

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Référence :.....

جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية و الري  
المرجع:.....



## Mémoire de Master

2<sup>ème</sup> année

Option : Sciences de l'eau et de l'environnement.

### THEME

**CALCUL NUMERIQUE DES ECOULEMENTS  
NON PERMANENTS A SURFACE LIBRE PAR  
LE SCHEMA DIFFUSIF DE LAX**

**Etudiant :**

KHELLAF Ismail

**Encadreurs :**

Pr. ACHOUR Bachir

Mr. AMARA Lyes

**PROMOTION : JUIN 2014**

## Résumé :

Les problèmes relatifs à l'hydraulique sont très complexe, surtout lorsqu'il s'agit des écoulements à surface libre où le phénomène est soumis à plusieurs paramètres, dont la solution analytique des équations est impossible; dans ces conditions la simulation numérique constitue le seul moyen de résoudre le problème et de répondre aux diverses questions relatives au comportement dynamique de l'écoulement à ciel ouvert.

Pour répondre à bon nombre de problèmes relevant des écoulements non permanents à ciel ouvert, on est conduit à résoudre le modèle mathématique régissant ces écoulements. Ce dernier est formé par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type hyperbolique, dit de Saint-Venant dont une solution analytique générale est simplement inenvisageable. Ceci nous conduit à faire appel aux méthodes de calcul numériques dédiées à ce type de problème et où l'approche aux différences finies est la plus simple.

L'objectif du travail consiste à résoudre numériquement les équations de Saint-Venant par le schéma aux différences finies de Lax en vue d'une analyse et étude pratique de l'écoulement non permanent. Dans un premier lieu, des généralités sont données pour ensuite enchaîner par la formulation des équations de base régissant l'écoulement. Ensuite une discrétisation numérique est faite moyennant le schéma de Lax après quoi des applications pratiques sont étudiées pour en juger la pertinence et limites du modèle numérique.

**Mots clés :** équations de Saint-Venant - Méthodes des Différences finies - schéma de Lax - écoulement non permanent - simulation numérique

## Abstract :

Hydraulic problems are very complex, especially when it comes to free surface flows where the phenomenon is subject to several parameters and an analytical solution of the equations is impossible; under these conditions the numerical simulation is the only way to solve the problem and answer the various questions relating to the dynamic behavior of the flow in open channels.

To answer many problems within the unsteady flow in the open channels, we are led to solve the mathematical model governing these flows. The latter is formed by a system of nonlinear hyperbolic partial equations, said Saint-Venant. This leads us to use the methods of numerical computation dedicated to this type of problem and the approach of finite differences is the simplest.

The aim of this work is to numerically solve the Saint-Venant equations by Lax finite difference scheme for analysis and practical study of the unsteady flow. In a first, the general data are given then the formulation of the basic equations governing the flow. Then a numerical discretization is made by means of the Lax scheme after which practical applications are examined to judge the relevance and limitations of the numerical model.

**Key words:** Saint-Venant equations - Finite differences method - Lax scheme - unsteady flow - numerical computation

## المخلص

المشاكل المتعلقة بالري معقدة جدا خاصة عندما يتعلق الأمر بسيلان ذو سطح حر, أين تكون الظاهرة تخضع لعدة معايير, حيث أن الحل التحليلي لهذه المعادلات مستحيل, في ضل هذه الظروف تعتبر المحاكاة العددية السبيل الوحيد لحل المشكلة والإجابة على مختلف الأسئلة المتعلقة بالسلوك الديناميكي للسيلان الحر .

للإجابة على العديد من المشاكل المتعلقة بالتدفقات الغير دائمة على فضاء مفتوح, قمنا بحل النموذج الرياضي المحدد لهذه التدفقات, هذا الأخير مشكل من نضام معادلات تفاضلية غير خطية من نوع الأمواج, المسماة معادلات سانت فانون, حيث أن الحل التحليلي العام ببساطة غير موجود, هذا ما يدفعنا إلى استعمال طرق الحل العددية المقدمة في هذا النوع من المشاكل حيث أن التقريب في الفروق المنتهية هو الأكثر بساطة .

الهدف من هذا العمل هو حل معادلات سانت فانون رقميا بواسطة مخطط الفروق المنتهية للكس بقصد تحليل ودراسة تطبيقية للجريان الغير دائم . في البداية قمنا بالتطرق إلى مختلف العموميات حول السيلان الحر ثم قمنا بطرح معادلات الحركة, ثم بعد ذلك قمنا بعمل تجزئة عددية لمخطط لكس ثم قمنا بفحص التطبيقات العملية

الكلمات المفتاحية : معادلات سانت فانون – طرق الفروق المنتهية – مخطط لكس – سيلان غير دائم – المحاكاة الرقمية

# Remerciements

*Au début, il est de clair voyance et avant tous de remercier Dieu. C'est en réalité par Sa miséricorde que j'ai pu parvenir au bout de mes espérances tant sur le plan académique que personnel en me donnant puissance, confiance et courage.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Mr. ACHOUR Bachir, Professeur et directeur du laboratoire de recherche LARHYSS, et à Mr. AMARA Lyes, enseignant au département d'Hydraulique de l'Université de Bejaia, qui ont aiguillés le présent travail, pour leur disponibilité et leur conseils judicieux, la confiance qu'il m'a témoignée, pour leur aides morale et documentaire, sans oublier leur accompagnement au cours de mon séjour d'étude à Biskra. Je dirai simplement que je suis très honoré d'être dirigé par eux. Que leur compétences et connaissances dans la direction de ce travail trouvent ici l'assurance de ma reconnaissance la plus sincère.*

*Je tiens aussi à remercier également le président de jury ainsi les membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce modeste travail.*

*Je saisi cette occasion pour remercier ici l'ensemble des enseignants du département d'Hydraulique de l'Université De Biskra qui ont assuré ma formation de base, pour l'appui et l'aide qui m'ont apporté tout le long de mon cursus ainsi que leur esprit d'amitié, spécialement Mr. BOUZIANE M<sup>ed</sup> Toufik, Mr. A. BEDJAOUI, Mr. DEBABECHÉ Mahmoud, Mr. OUAMANE Ahmed, Mr. F. ABDESSEMED, Mme. S. ACHOUR, M<sup>elle</sup> S. GUERGAZI, Mme. L. MIMECHE et Mme. L. YUCEF.*

*Je pense que beaucoup d'autres personnes doivent être citées ici, mais je suis persuadé que ceux-ci m'excuseront de ne pas pouvoir le faire sinon des tomes ne réussiraient pas à enfermer l'encre noire dépensé en signe de reconnaissance, cependant ils parviendront à comprendre que ma reconnaissance envers eux dépasse largement l'aptitude de quelques mots bien manipulés et tissés à miroiter ce que mon cœur leur doit.*

*Un chaleureux merci à tous !*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon père.*

*À la mémoire de mes grands-pères.*

*À ma mère pour leur soutient moral et matériel pendant toutes mes années d'étude  
et pour sa tendresse et son affection qui n'ont jamais en de limites.*

*À mes grands-mères.*

*À mon oncle et sa femme - À ma tante.*

*À ma fiancée Assia.*

*À mes sœurs : Fadhila et son mari Mohamed - Hadjira et son mari Omar -*

*Aïcha et son mari Abderrahim - Meriem - Sarah - Naïma et son mari*

*Abdelhamid - Nadia.*

*À mes frères : Ahmed et sa femme Farida - Khaled et sa femme Zineb - Athmane et  
sa femme Lamia - Mouloud et sa femme Dalila - A.rezak et sa femme Linda -*

*Toufik et sa femme Lamia - Youness - Redouane.*

*À toute ma famille.*

*À tout mes amis : à ceux avec qui j'ai passé des années agréables à : Lyes - Youness*

*- Saci - Badis - Imed - Mourad - Fouzi - Hichem - Walid - Dahmane - Hani -*

*Okba - Ali - Karim - Ridha - Riadh.*

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Généralités sur les écoulements à surface libre</b>	
I.1 Introduction.....	3
I.2 les canaux.....	3
I.2.1 Types de canaux.....	3
I.2.2 géométrie des canaux.....	4
I.3 Ecoulement dans les canaux.....	7
I.3.1 Types d'écoulements à surface libre.....	7
II.3.1.1 Variabilité dans le temps.....	7
II.3.1.2 Variabilité dans l'espace.....	8
II.3.1.3 Classification suivant le temps et l'espace.....	9
I.3.2 Régime d'écoulement.....	10
I.4 Répartition de Vitesse.....	11
I.5 Répartition de la pression.....	14
I.5.1 Courant uniforme.....	15
I.5.2 Courant courbe.....	16
I.6 Onde.....	18
I.6.1 Définition.....	18
I.6.2 Différents types d'ondes et d'ordres de grandeurs.....	18
I.6.3 Ecoulement avec onde.....	19
I.7 Conclusion.....	21
<b>Chapitre II : Equations du mouvement</b>	
II.1 Introduction.....	22
II.2 Equations différentielles du mouvement.....	22
II.2.1. hypothèses.....	22
II.2.2 Equation de continuité.....	22
II.2.3 Equations dynamiques.....	24
II.2.3.1 Equations de saint-Venant.....	24
II.3 Discussion des équations de base.....	28
II.4 Simplifications.....	29
II.4.1 Equation simplifiées de Saint-Venant.....	29
II.4.2 Onde cinématique.....	31
II.4.2.1 Equations hydrodynamiques.....	31
II.4.2.2 Célérité de propagation.....	33
II.4.3 Onde diffusive.....	36
II.4.3.1 Equations hydrodynamiques.....	36
II.4.3.2 Atténuation.....	39
II.5 Méthodes de résolution.....	40
II.5.1 Les caractéristiques.....	41
II.5.2 Méthodes des caractéristiques.....	42
II.6 Conclusion.....	45

**Chapitre III : Discrétisation numérique**

III.1 Introduction.....	46
III.2 Méthodes de résolution.....	47
III.2.1 Méthodes des différences finies.....	47
III.2.2 Méthode des éléments finis.....	47
III.2.3 Méthode des volumes finis.....	47
III.3 Méthodes des différences finies.....	47
III.3.1 Principe.....	47
III.4 Analyse de l'approximation.....	47
III.4.1 Erreur de troncature.....	50
III.4.2 La consistance d'un schéma aux différences finies.....	50
III.4.3 La stabilité.....	50
III.4.4 La convergence.....	50
III.5 Différent schémas.....	50
III.5.1 Schéma explicite, schéma implicite.....	50
III.5.2 Les Schémas aux différences finies implicites.....	51
III.5.3 Les Schémas aux différences finies explicites.....	51
III.5.3.1 Schéma de Mac Cormack.....	51
III.5.3.2 Schéma de Gabutti.....	52
III.5.3.3 Schéma de Lax.....	53
III.5.4 Comparaison des schémas explicites et implicites.....	54
III.5.5 Application du schéma de Lax aux équations de Saint-Venant.....	54
III.5.5.1 Conditions aux limites.....	56
III.5.5.2 Charge constant en amont du réservoir.....	59
III.5.5.3 Charge constant en amont du réservoir.....	60
III.5.5.4 Décharge spécifiée à la fin du canal.....	61
III.5.5.5 Stabilité.....	61
III.5.5.6 Procédure de calcul.....	62
III.6 Conclusion.....	63

**Chapitre IV : Applications et expérimentations numériques**

IV.1	
Introduction.....	64
IV.2 Application I.....	64
IV.3 Application II.....	68
IV.4 Etude paramétriques.....	72
IV.4.1 effets de la rugosité (nombre de Manning).....	72
IV.4.2 effets du nombre de courant.....	73
IV.4.3 effets de la pente de fond du canal.....	74
IV.5 Conclusion.....	76

<b>Conclusion générale.....</b>	<b>77</b>
---------------------------------	-----------

<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>78</b>
---	-----------

## Notations

B :	Largeur du canal
$C^+, C^-$ :	Courbe caractéristique positive, négative
C :	Célérité d'onde
$C_f$ :	Coefficient de frottement
$C_n$ :	Nombre de Courant
$C_w$ :	Célérité absolue
$c_k$ :	Célérité de l'onde cinématique (diffusive)
$D_h$ :	Profondeur hydraulique
$f$ :	Fonction
$F_r$ :	Nombre de Froude
g :	Accélération de la pesanteur
h :	Hauteur d'eau
i :	Indice de maillage suivant la direction x ; (pas de variation dans l'espace)
j :	Indice de maillage suivant la direction y ; (pas de variation dans l'espace)
$J_e$ :	pente énergétique
$J_w$ :	pente de la surface d'eau (libre)
$J_f$ :	pente de fond du canal
$K(h)$ :	débitance du canal
k :	Indice de l'incrémentation du pas du temps
L :	Longueur du canal
n :	Coefficient de Manning
p :	Pression
$P_m$ :	Périmètre mouillé
Q :	Débit liquide
q :	Débit liquide unitaire
$q_l$ :	Débit liquide latéral par unité de longueur
r :	rayon
$R_h$ :	Rayon hydraulique
$R_e$ :	nombre de Reynolds
S :	Surface
$J_{fx}$ :	Pente de frottement suivant x
$S_m$ :	Surface mouillé
$J_{0x}$ :	Pente du fond du canal suivant x
t :	Temps
$\Delta t$ :	Temps d'incrémentation
U :	Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction x
u :	Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction x
V :	Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction
v :	Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction y
$\tilde{V}_x^+, \tilde{V}_x^-, \tilde{V}_y^+, \tilde{V}_y^-$ :	Valeurs approchées des dérivés spatiales, prédiction A
$\bar{V}_x^+, \bar{V}_x^-, \bar{V}_y^+, \bar{V}_y^-$ :	Valeurs approchées des dérivés spatiales, prédiction B
$\hat{V}_x^+, \hat{V}_x^-, \hat{V}_y^+, \hat{V}_y^-$ :	Valeurs approchées des dérivés spatiales, corrigées de A ou B
x :	Coordonnée spatiale longitudinale
$\Delta x$ :	Pas de discrétisation spatial suivant x
y :	Coordonnée spatiale transversale

$\Delta y$ :	Pas de discrétisation spatial suivant y
$\alpha$ :	Angle d'inclinaison suivant x
$\Omega$ :	Domaine
$\Gamma$ :	Limitation du domaine
$\lambda, \omega$ :	Valeurs propres
$\lambda^+, \omega^+$ :	Valeurs propres positives
$\lambda^-, \omega^-$ :	Valeurs propres négatives
$\rho$ :	La masse volumique de fluide
$\tau$ :	Force de frottement par unité du surface
$\beta$ :	rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure I.1</b> : Canal Naturel.....	3
<b>Figure I.2</b> : Canaux artificiels.....	4
<b>Figure 1.3</b> : Elément géométrique de la section.....	4
<b>Figure I.4</b> : Ecoulement permanent.....	7
<b>Figure I.5</b> : Ecoulement non permanent.....	8
<b>Figure I.6</b> : Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés.....	9
<b>Figure I.7</b> : les quatre régimes d'écoulement. ....	11
<b>Figure I.8</b> : Profil logarithmique de la vitesse. ....	12
<b>Figure I.9</b> : Répartition de vitesse. ....	13
<b>Figure I.10</b> : vitesse moyenne. ....	14
<b>Figure I.11</b> : Ecoulement sur fond concave.....	15
<b>Figure I.12</b> : Ecoulement a courant uniforme. ....	16
<b>Figure I.13</b> : Ecoulement sur des fonds concave et convexe. ....	17
<b>Figure I.14</b> : Schéma d'une onde dans un canal. ....	19
<b>Figure I.15</b> : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas fluvial)...	20
<b>Figure I.16</b> : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas torrentiel).....	20
<b>Figure 1.17</b> : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas critique)...	21
<b>Figure II.1</b> : Schéma pour l'équation de continuité. ....	23
<b>Figure II.2</b> : Schéma d'un écoulement non permanent non uniforme sur une pente a fond fixe, $z(x)$ . ....	25
<b>Figure II.3</b> : Représentation schématique de la relation de $Q = f(h)$ et de $h = f(t)$ pour l'écoulement non uniforme et non permanent. ....	28
<b>Figure II.4</b> : Ondes cinématique et dynamique vues par un observateur stationnaire.....	30
<b>Figure II.5</b> : Onde monocline (front d'une onde cinématique). ....	33
<b>Figure II.6</b> : Atténuation d'une onde ; positions successives.....	37
<b>Figure II.7</b> : Schéma des caractéristiques (écoulement subcritique) : Conditions aux limites. ....	43
<b>Figure III.1</b> : Définition d'un domaine. ....	47
<b>Figure III.2</b> : Maillage élémentaire. ....	48
<b>Figure III.3</b> : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables..	49
<b>Figure III.4</b> : Notation de grille de calcul. ....	56
<b>Figure III.5</b> : Notation des équations caractéristiques positives et négatives.....	58
<b>Figure III.6a</b> : Notation des conditions aux limites (Réservoir en amont).....	60
<b>Figure III.6b</b> : Notation des conditions aux limites (Réservoir en aval).....	61
<b>Figure III.7</b> : Division du canal en n tronçons.....	62
<b>Figure IV.1</b> : les Données pour le canal rectangulaire. ....	64
<b>Figure IV.2</b> : Comparaison des résultats (dissipation artificielle).....	65
<b>Figure IV.3</b> : Comparaison des résultats (pas de dissipation artificielle).....	66
<b>Figure IV.4</b> : Schéma de l'installation étudiée. ....	68
<b>Figure IV.5</b> : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t= 500s$ .....	69
<b>Figure IV.6</b> : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t= 1000s$ .....	69
<b>Figure IV.7</b> : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t= 1500s$ .....	70
<b>Figure IV.8</b> : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x= 5km$ .....	70
<b>Figure IV.9</b> : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x= 2.5km$ .....	71
<b>Figure IV.10</b> : effets de la rugosité (nombre de Manning).....	73

**Figure IV.11** : effets du nombre de courant. ....74  
**Figure IV.12** : effets de la ponte de fond du canal. ....75

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau (I .1) :</b> Eléments géométriques pour différentes sections des canaux.....	6
<b>Tableau (II .1) :</b> comparaison des propriétés d'une onde cinématique avec celles d'une onde de gravité.....	35
<b>Tableau (IV.1) :</b> Données relatives à l' <i>application I</i> .....	65
<b>Tableau (IV.2) :</b> comparaison des résultats.....	67
<b>Tableau (IV.3) :</b> Données relatives à l' <i>application II</i> .....	68
<b>Tableau (IV.4):</b> comparaison des résultats. ....	72
<b>Tableau (IV.5) :</b> Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de Manning)....	73
<b>Tableau (IV.6) :</b> Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de courant).....	74
<b>Tableau (IV.7) :</b> Données relatives à l'étude paramétrique (la pente de fond du canal). ....	75

## Introduction générale :

L'étude des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté il y a déjà 300 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. (WERTEL, 2006), (Hubert, (2004).

L'hydraulique à surface libre traite les écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une interface eau/air soumise à la pression atmosphérique. Les équations de Barré de Saint-Venant (1871) sont les équations les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires et graduellement varié à surface libre.

L'étude des écoulements à ciel ouvert occupe une grande part des problèmes rencontrés dans l'art de l'ingénieur hydraulicien. Les canaux naturels ou artificiels, les réseaux d'assainissement, les évacuateurs de crues...etc. en sont de simples exemples des applications pratiques des écoulements à surface libre.

Cependant, ces écoulements sont connus par la complexité de leur étude vu les déformations de la surface libre et la nature des forces gouvernant leur mouvement. Cette difficulté se trouve accentuée davantage lorsque l'on envisage de l'étudier dans le régime non permanent c'est-à-dire suivre l'évolution dans l'espace et dans le temps de ses variables d'état ( $h, V$ ).

Pour répondre à bon nombre de problèmes relevant des écoulements non permanents à ciel ouvert, on est conduit à résoudre le modèle mathématique régissant ces écoulements. Ce dernier est formé par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type hyperbolique, dit de Saint-Venant dont une solution analytique générale est simplement inenvisageable. Ceci nous conduit à faire appel aux méthodes de calcul numériques dédiées à ce type de problème et où l'approche aux différences finies est la plus simple.

L'objectif du travail consiste à résoudre numériquement les équations de Saint-Venant par le schéma aux différences finies de Lax en vue d'une analyse et étude pratique de l'écoulement non permanent.

Dans un premier lieu, des généralités sont données pour ensuite enchaîner par la formulation des équations de base régissant l'écoulement. Ensuite une discrétisation numérique est faite moyennant le schéma de Lax après quoi des applications pratiques sont étudiées pour en juger la pertinence et limites du modèle numérique.

Nous commencerons d'abord dans le premier chapitre par les différents paramètres caractéristiques de ces écoulements ainsi que la forme et la nature des canaux qui les contiennent, et en terminera par un aperçu sur la notion d'onde de gravité et les écoulements avec onde.

Ensuite, nous présenterons dans le deuxième chapitre la formulation des équations de base régissant l'écoulement.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter la discrétisation des équations de

Saint-Venant par le schéma de Lax, dans le but de les résoudre en utilisant tout d'abord la méthode des Différence finies et ensuite la méthode des caractéristiques pour les conditions aux frontières

Dans Le quatrième chapitre, des applications pratiques sont étudiées pour en juger la pertinence et limites du modèle numérique. Les résultats obtenus seront comparées à ceux obtenus par d'autres auteurs par d'autres schémas numériques. La littérature utilisée à cet effet est principalement celle des travaux de Chaudhry (2008) et Fennema et Chaudhry (1986) traitant le calcul numérique des ondes de choc à surface libre. Cette étude sera suivie d'une étude de l'influence des différents paramètres sur l'écoulement, notamment l'effet de la pente de fond, de la rugosité de fond, du "nombre de Courant". Les résultats obtenus feront l'objet d'analyse et de critique.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

## Chapitre I : Généralités sur les écoulements à surface libre

### I.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons étudier les différents types des canaux selon ce qui suit :

Les différents types des canaux, la géométrie des canaux les écoulements dans les canaux, les régimes d'écoulements, la répartition des vitesses, la répartition des pressions, et les ondes.

Les écoulements à surface libre sont des écoulements caractérisés par la présence d'une surface de séparation entre l'air et l'eau appelée surface libre, généralement; la pression qui règne cette surface est la pression atmosphérique.

L'écoulement à surface libre se produit sous l'effet de la gravité.

### I.2 les canaux :

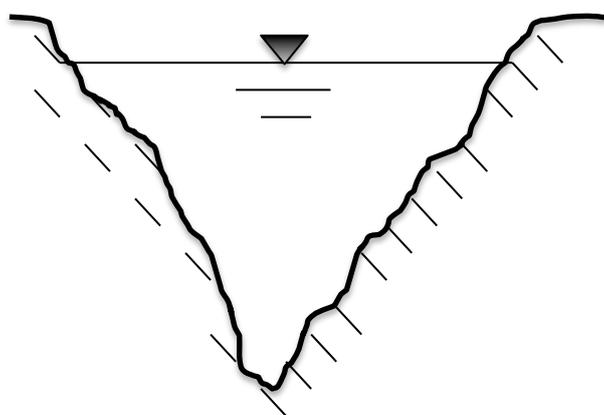
- On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.
- L'étude hydraulique d'un canal se pose souvent aux ingénieurs sous forme suivant :  
Pour une ponte longitudinale de fond il faut évacuer un certain débit ; la forme et les dimensions du canal sont à déterminer (Graf & Altinakar, 2000), (Traoure & Dialo, 2001).

#### I.2.1 Types de canaux :

On distingue deux catégories de canaux :

- **Les Canaux naturels :**

Les canaux naturels sont les cours d'eau qui existe naturellement sur (ou sous) terre, tels que les ruisselets, torrents, rivières, fleuves et estuaires. (*Figure I.1*).



*Figure I.1 : Canal Naturel*

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus à partir d'hypothèses qui s'imposent.

- **Canaux artificiels :**

Sont des cours d'eau réalisés par l'homme sur (ou sous) terre tels que : les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction et d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts dans lesquels les liquides ne remplissent pas toute la section (tunnels hydrauliques, aqueducs, drains, égouts).

Les propriétés hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application de la théorie hydraulique donne souvent des résultats réalistes.

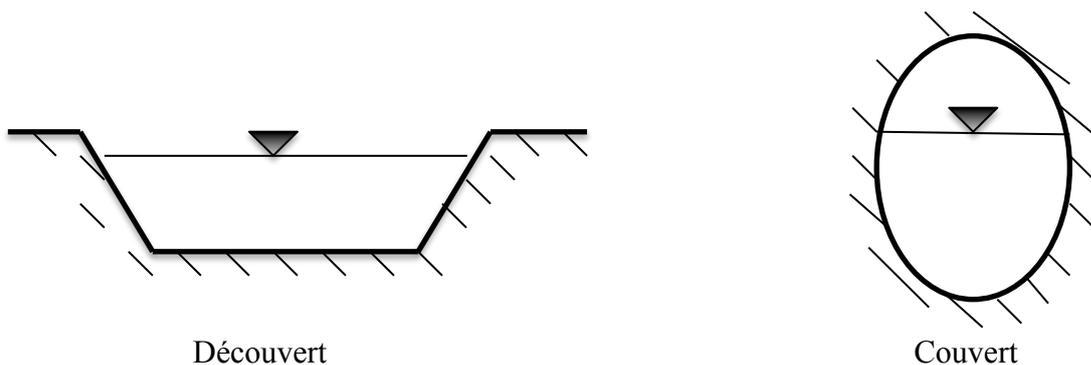


Figure 1.2 : Canaux artificiels

### I.2.2 géométrie des canaux :

- La section (transversale) d'un canal est une section plane normale à la direction de l'écoulement, (Graf & Altinakar, 2000), (Traoure & Dialo, 2001), (Zenzane & Maamare, 2003).

La section ou la surface mouillée,  $S$ , est la portion de section occupée par le liquide.

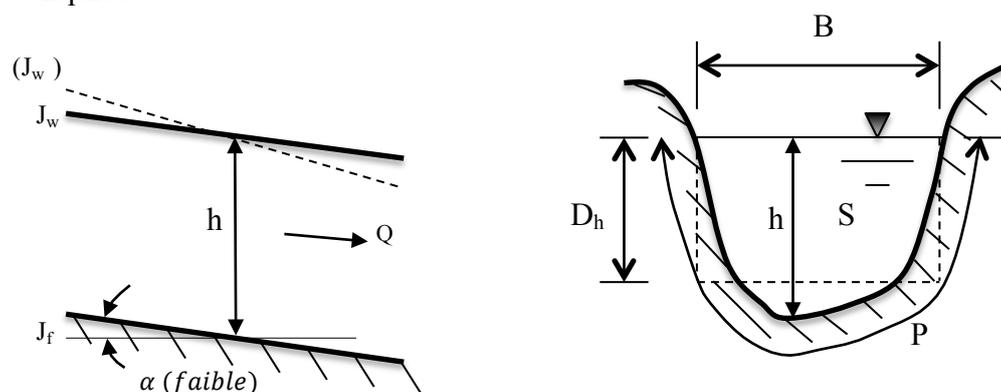


Figure 1.3 Élément géométrique de la section

- Un canal dont la section ne varie pas et dont la pente longitudinale et la rugosité restent constantes – la hauteur d'eau peut cependant varier – est appelé canal prismatique; sinon, l'appelle canal non prismatique.
- les éléments géométriques d'une section, ou surface mouillée,  $S$ , sont les suivants :
  - i. Le périmètre mouillé,  $P$ , du canal, formé par la longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et le lit y compris les berges, mais ne comprenant pas la surface libre.
  - ii. Le rayon hydraulique,  $R_h$ , donné par le quotient de la surface mouillée,  $S$ , et du périmètre mouillé,  $P$ , donc :

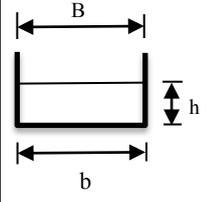
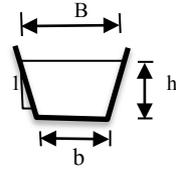
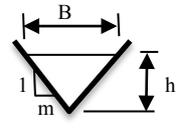
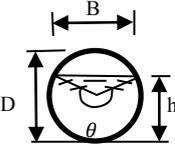
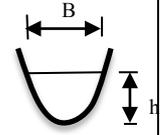
$$R_h = \frac{S}{P} \quad (I.1)$$

- iii. La largeur (superficielle),  $B$ , du canal à la surface libre.
- iv. La profondeur hydraulique,  $D_h$ , du canal définie par:

$$D_h = \frac{S}{B} \quad (I.2)$$

- v. La profondeur,  $h$ , ou tirant d'eau – à moins qu'elle ne soit définie autrement – est considérée la profondeur maximum.

Tableau (I.1) : Eléments géométriques pour différentes sections des canaux.

					
	Rectangle	Trapèze	Triangle	Cercle	Parabole
Surface S	$bh$	$(b + mh)h$	$mh^2$	$\frac{1}{8}(\theta - \sin \theta)D^2$	$\frac{2}{3}Bh$
Périmètre mouillé P	$B + 2h$	$b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	$2h\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{1}{2}\theta D$	$B = \frac{8h^2}{3}$
Rayon hydraulique $R_h$	$\frac{bh}{b + 2h}$	$\frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{1}{4}\left[1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right]D$	$\frac{2B^2h}{3B^2 + 8h^2}$
Largeur B	$b$	$b + 2mh$	$2mh$	$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)D$ ou $2\sqrt{h(D - h)}$	$\frac{3s}{2h}$
Diamètre hydraulique $D_h$	$h$	$\frac{(b + mh)h}{b + 2mh}$	$\frac{1}{2}h$	$\left[\frac{\theta - \sin \theta}{\sin \theta/2}\right]\frac{D}{8}$	$\frac{2}{3}h$

- A part les éléments géométriques d'une section, l'étude hydraulique des canaux prend également en considération les pentes longitudinales du canal, donc :

- i. La pente du fond du canal,  $J_f$ .
- ii. La pente piézométrique où pente de la surface libre,  $J_w$ .

La valeur de la pente de fond dépend essentiellement de la topographie et de la constitution du terrain. Cette pente, généralement faible, peut être exprimée par:

$$J_f = \text{tga} \cong \sin \alpha$$

- Le périmètre mouille, P, peut être composé d'un lit immobile (béton, roche) ou d'un lit mobile (granulat).

### I.3 Ecoulement dans les canaux :

- Les écoulements dans les canaux naturels et artificiels sont des écoulements à surface libre. La surface libre est la surface de séparation de l'air et de l'eau ; la pression y est égale à la pression atmosphérique.
- L'écoulement à surface libre est dû à la pente de fond de canal et non, comme pour les conduites (Graf & Altinakar, 1991, chap. PP. 1), à la différence de charge entre deux sections.

#### I.3.1 Types d'écoulements à surface libre :

Les écoulements à surface libre peuvent être classés en plusieurs types selon les paramètres suivants (Graf & Altinakar, 2000), (Traoure & Dialo, 2001):

- Permanent ou non permanent selon le temps ;
- Uniforme et non uniforme (varié) selon l'espace ;
- Torrentiel ou fluvial selon l'effet de la gravité ;
- Laminaire ou turbulent selon la viscosité.

##### I.3.1.1 Variabilité dans le temps :

###### a. Ecoulement permanent :

Le mouvement est permanent si les vitesses moyenne,  $V$ , et ponctuelle,  $v$ , ainsi que la profondeur,  $h$  ou  $D_h$ , restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent, le débit est constant (José, 2006), (Graf & Altinakar, 2000):

$$V S = Q \quad (I.3)$$

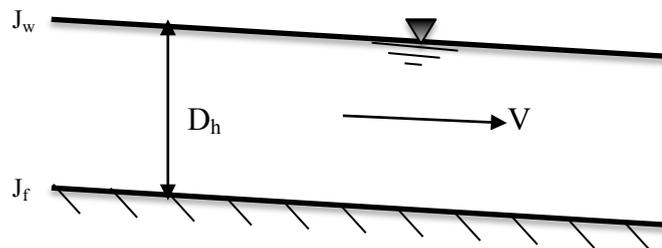


Figure I.4 : Ecoulement

###### b. Ecoulement non permanent :

Le mouvement est non permanent si la profondeur,  $D_h(t)$ , ainsi que les autres paramètres varient avec le temps. Le débit n'est pas constant.

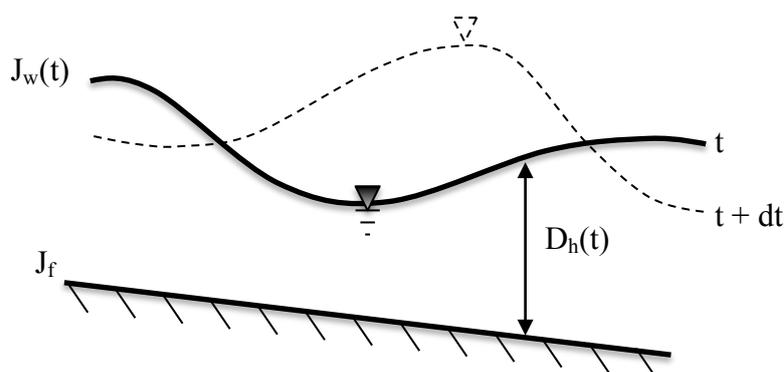


Figure I.5 : Ecoulement non permanent

Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins, les variations temporelles sont souvent suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent, du moins dans un intervalle de temps relativement court.

### I.3.1.2 Variabilité dans l'espace :

#### a. Ecoulement uniforme :

Le mouvement est uniforme si la profondeur,  $D_h$ , ainsi que les autres paramètres, restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a :  $j_f \equiv j_w$  (Mathew & Liz, 2003), (José, 2006), (Graf & Altinakar, 2000).

On le rencontre généralement dans les canaux artificiels.

#### b. Ecoulement non uniforme :

Le mouvement est non uniforme ou varié si la profondeur,  $D_h$ , ainsi que les autres paramètres, changent d'une section à l'autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre,  $j_w \neq j_f$ .

L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non permanent.

Un mouvement varié peut être accéléré,  $dV/dx > 0$ , ou décéléré,  $dV/dx < 0$ , suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur,  $D_h(x) \cong D_h$ , ainsi que les autres paramètres, ne changent que très lentement d'une section à l'autre. On peut donc admettre que l'écoulement est quasi uniforme le long d'un petit tronçon et que la vitesse,  $V$ , reste quasiment constante.

Lorsque le mouvement est rapidement varié, la profondeur,  $D_h(x)$ , ainsi que les autres paramètres changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un déversoir, un rétrécissement, en ressaut hydraulique ou une chute brusque (Hubert, 2004), (Graf & Altinakar, 2000).

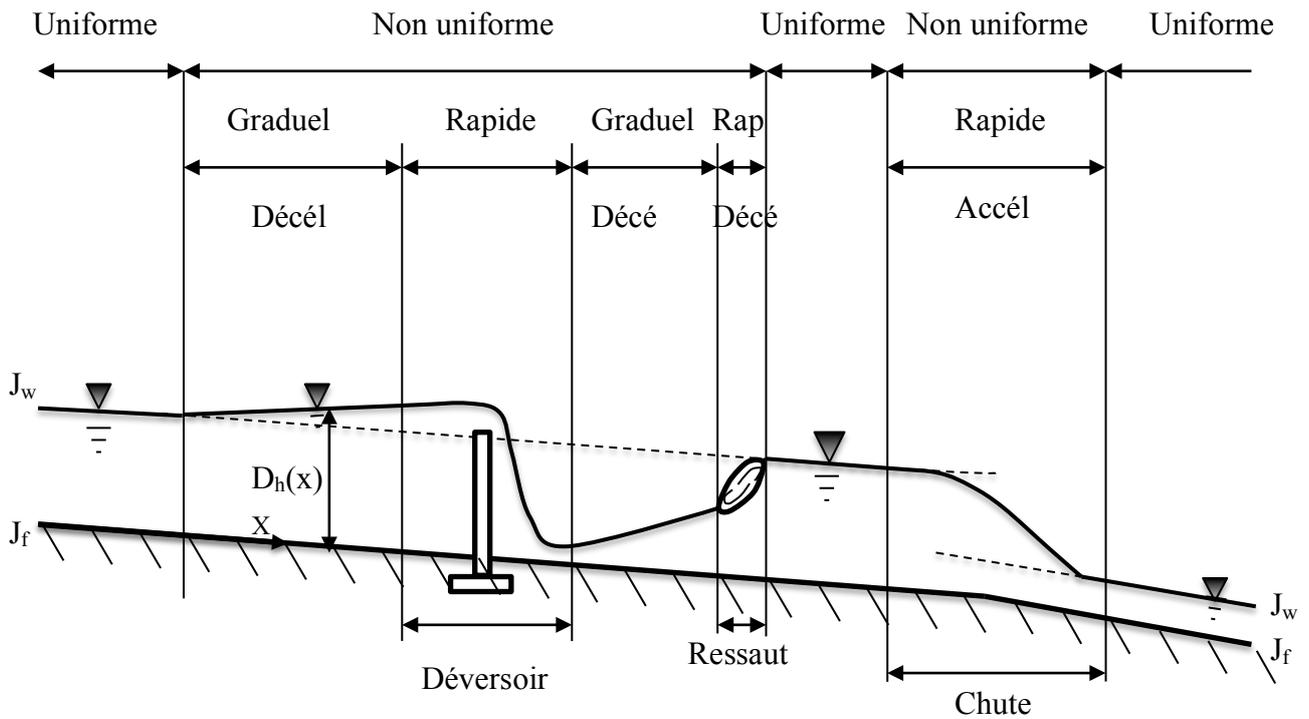
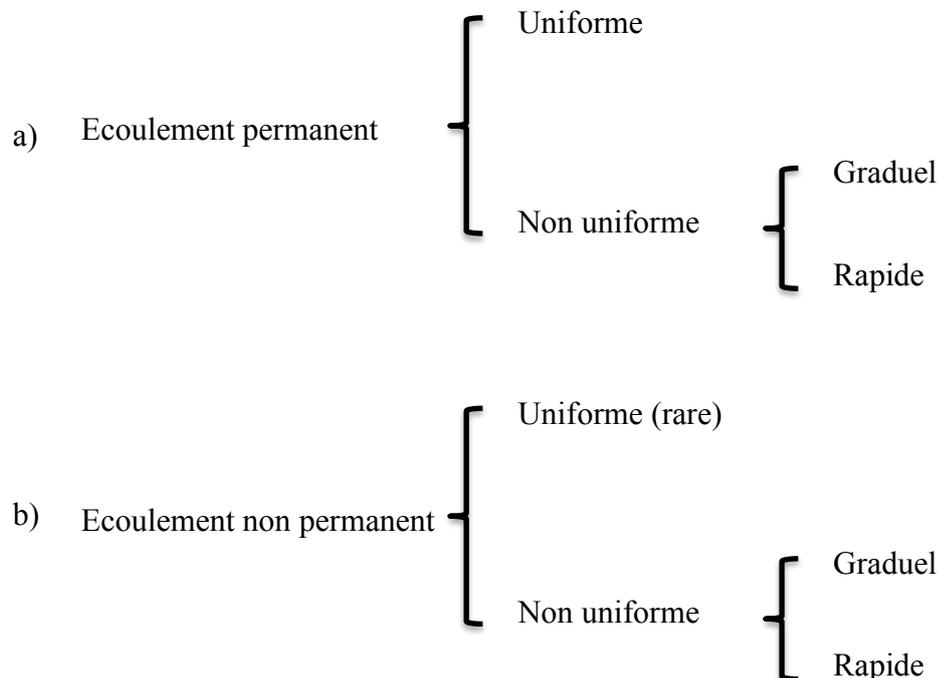


Figure I.6 : Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés

### I.3.1.3 Classification suivant le temps et l'espace

Les types d'écoulement qu'on rencontre en hydraulique fluviale peuvent être résumés ainsi :



### I.3.2 Régime d'écoulement :

- L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes:
  - Force de gravité,
  - Force d'inertie,
  - Force de frottement (viscosité et rugosité).
- Les équations réduites du mouvement font intervenir les coefficients où nombre adimensionnels suivants (Graf & Altinakar, 2000), (Zouaoui, 2004) :
  - i. Le nombre de Froude, qui est le rapport entre les forces de gravité et celles d'inertie ou:

$$\frac{\rho g}{\rho V_c^2 / L_c} = \frac{gL_c}{V_c^2} = Fr^{-2} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gL_c}} \quad (I.4)$$

- ii. le nombre de Reynolds, qui est le rapport entre les forces de gravite et celles d'inertie ou :

$$\frac{\mu(V_c/L_c^2)}{\rho V_c^2 / L_c} = \frac{\nu}{V_c L_c} = Re^{-1} \quad \text{et} \quad Re = \frac{V_c L_c}{\nu} \quad (I.5)$$

A ces deux nombres s'ajoute encore :

- iii. la rugosité relative, qui est le rapport entre la hauteur de la rugosité,  $K_s$ , et une longueur caractéristique ou :

$$\frac{K_c}{L_c} \quad (I.6)$$

$V_c$  et  $L_c$  représentant une vitesse et une longueur caractéristiques, on prend souvent  $V_c = V$  et  $L_c = R_h$  ou  $L_c = D_h$ .

Pour l'étude hydraulique des canaux, on définit donc habituellement les nombres adimensionnels suivants :

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gL_c}} \quad ; \quad Re = \frac{4R_h V}{\nu} \quad \text{ou} \quad Re' = \frac{R_h V}{\nu} \quad ; \quad \frac{K_s}{D_h} \quad (I.7)$$

- le rôle du nombre de Reynolds est de permettre le classement des écoulements comme suit :
  - Ecoulement laminaire  $Re' < 500$
  - Ecoulement turbulent  $Re' > 2000$
  - Transition  $500 < Re' < 2000$

Les expériences avec différents canaux artificiels (voir Chow, 1959, p. 10 in Graf & Altinakar, 2000) montrent que l'écoulement est turbulent dès que le nombre de Reynolds,  $Re'$ , atteint des valeurs 2000.

Dans la pratique, on ne rencontre en générale que des écoulements turbulents, souvent rugueux.

- Le rôle du nombre de Froude est de permettre le classement des écoulements comme suit :
  - Ecoulement fluvial  $Fr < 1$
  - Ecoulement torrentiel  $Fr > 1$
  - Ecoulement critique  $Fr \cong Fr_c = 1$

Dans la pratique, on rencontre ces trois types d'écoulement.

- Par conséquent, les effets du nombre de Reynolds,  $Re_c$ , et du nombre de Froude,  $Fr$ , donnent quatre régimes d'écoulement :
  - Fluvial-laminaire  $Fr < 1$ ,  $Re_c < 500$
  - Fluvial-turbulent  $Fr < 1$ ,  $Re_c > 2000$
  - Torrentiel-laminaire  $Fr > 1$ ,  $Re_c < 500$
  - Torrentiel-turbulent  $Fr > 1$ ,  $Re_c > 2000$

Une relation profondeur/vitesse, tirée d'expériences par Robertson et Rouse, est donnée à la Fig. I.7 pour des canaux rectangulaires très larges.

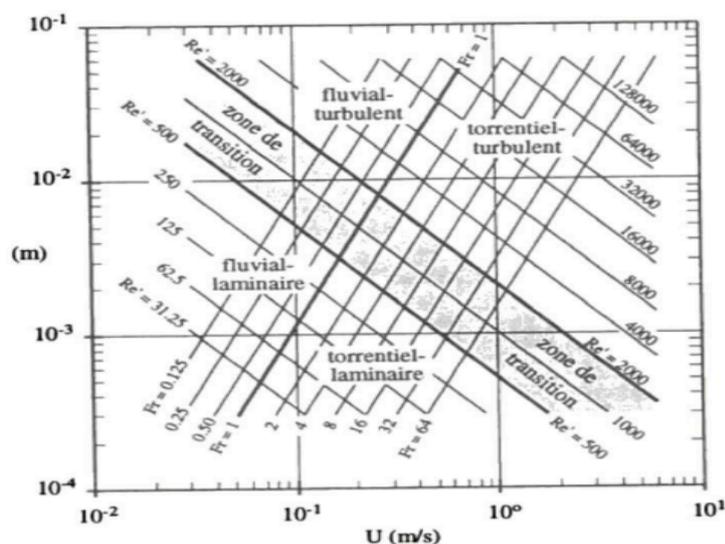


Figure I.7 les quatre régimes d'écoulement.

#### I.4 Répartition de Vitesse :

- Dans un écoulement le long d'une paroi, il y a répartition de vitesse (Graf & Altinakar, 2000), (Zouaoui, 2004). Nulle à la paroi, La vitesse ponctuelle,  $v$ , croît rapidement lorsqu'on s'en éloigne. La valeur maximale est souvent atteinte un peu

en dessous de la surface libre. Le profil de la vitesse est approximativement logarithmique (figure I.8).

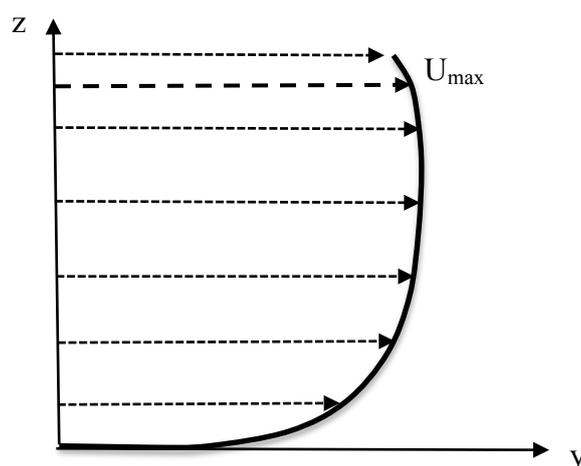


Figure I.8 : Profil logarithmique de la vitesse

- Un écoulement permanent dépend généralement de trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On l'appelle écoulement tridimensionnel (Candel, 1995), (Osman, 2006), (Shu-Qing, 2006), (Graf & Altinakar, 2000), (Zouaoui, 2004). Pour un canal rectangulaire avec un lit et des parois (berges) verticales, la répartition schématisée de vitesse ponctuelle,  $v(x, y, z)$ , est donnée la figure I.9.

Si le même canal de largeur,  $B$ , importante par rapport à la profondeur,  $h$ , – on prend  $B > 5h$  – l'écoulement est bidimensionnel, sauf sur une petite distance proche des parois verticales.

Les calculs hydraulique sont considérablement facilités si l'on admet que l'écoulement est unidimensionnel. On exprime donc la vitesse moyenne,  $V(x)$ , dans la verticale ou dans la section par :

$$V = \frac{1}{h} \int_0^h v(z) dz \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{S} \int_0^B \int_0^h v(z) dz dy \quad (I.8)$$

- Dans les canaux de géométrie simple, on ne rencontre généralement que des écoulements turbulents où la vitesse ponctuelle,  $v(x, z)$ , diffère très peu de la vitesse moyenne,  $V(x)$ . En régime permanent, cette hypothèse permet de considérer ces écoulements comme unidimensionnels.

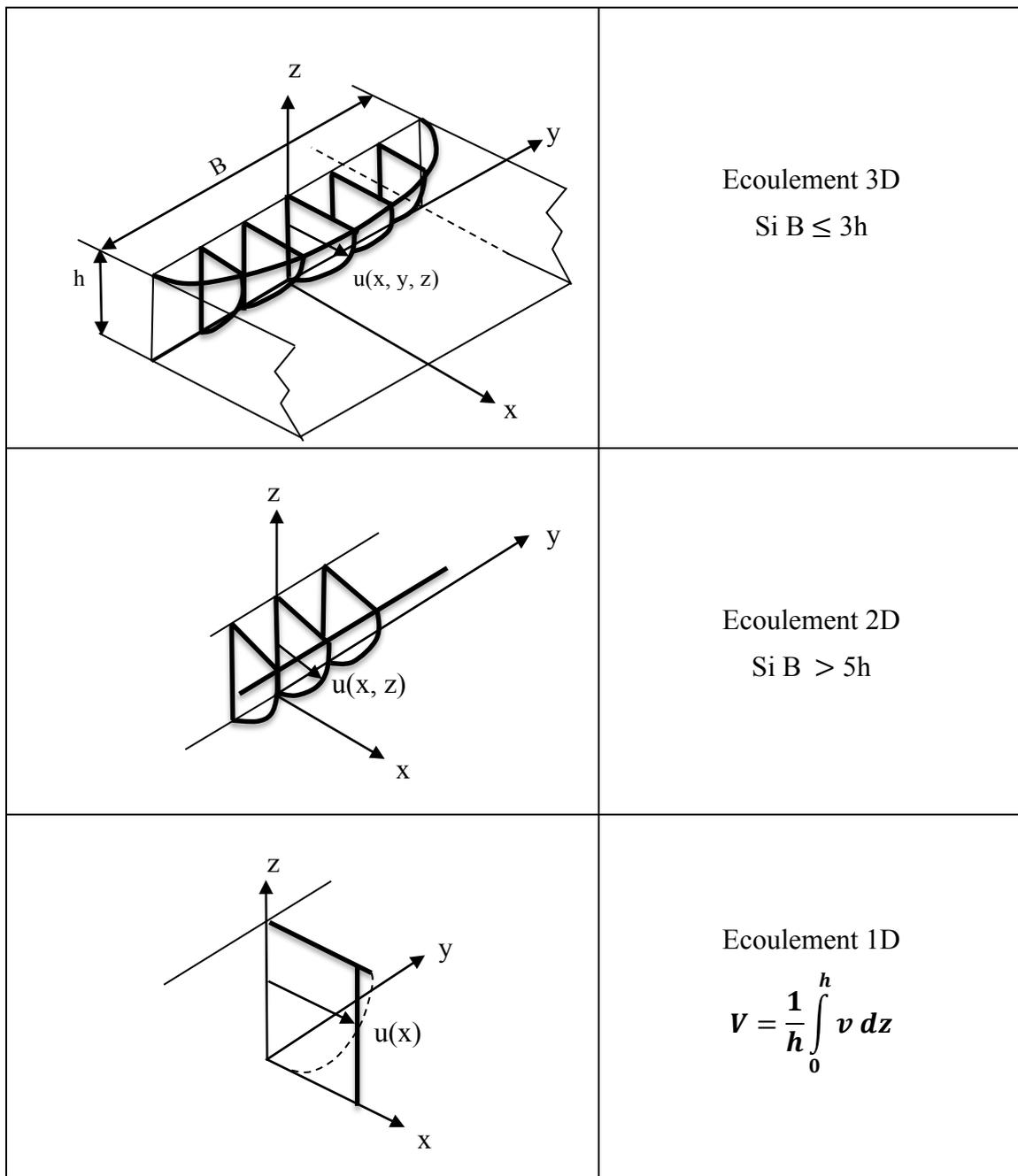


Figure I.9 : Répartition de vitesse

- Pour déterminer la vitesse moyenne,  $V$ , dans une section, on donne les relations approximatives suivantes :

$$V \cong (0.8 \text{ a } 0.9) v_s \quad (\text{formule de Prony})$$

$$V \cong 0.5 (v_{0.2} + v_{0.8}) \quad (\text{formule de l'USGS}) \quad (\text{I.9})$$

$$V \cong v_{0.4}$$

Où  $V_{0.2}$ ,  $V_{0.8}$ ,  $V_{0.4}$  et  $V_s$  sont les vitesses ponctuelles à l'endroit donné.

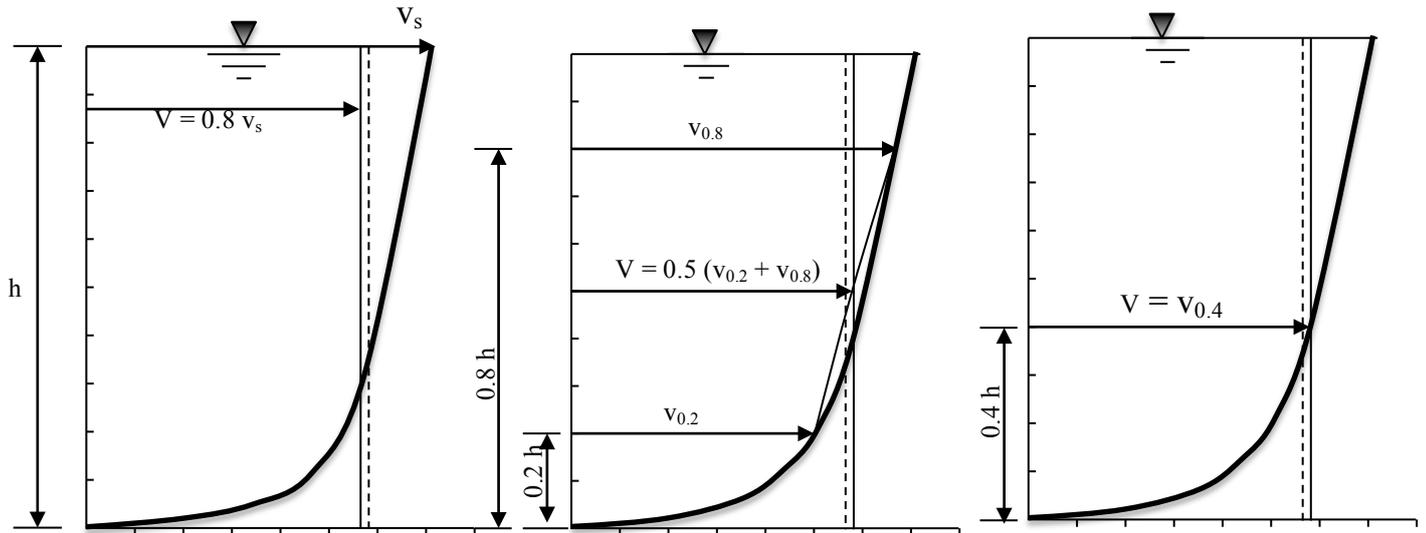


Figure I.10 vitesse moyenne.

### I.5 Répartition de la pression :

- L'équation intrinsèque du mouvement permanent d'un fluide incompressible, selon la composante normale  $n(\cong z)$ , s'écrit (Graf & Altinakar, 2000) :

$$V \frac{V}{r} = -\rho \frac{\partial}{\partial n} (p + \gamma z') \quad (I.10)$$

Où  $(V^2/r)$  est l'accélération centrifuge d'une masse qui se déplace selon une ligne courbe de rayon,  $r$ , (voir Fig. I.11).

- En admettant que  $V$  et  $r$  reste sensiblement constants et après intégration de l'équation I.10, on écrit :

$$(p + \gamma z') = -\rho \int_0^z \frac{V^2}{r} dn + cte = -\rho \frac{V^2}{r} z + cte \quad (I.10a)$$

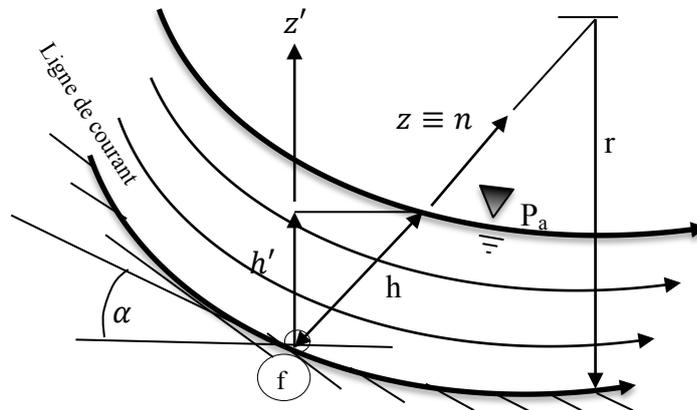


Fig. I.11 Ecoulement sur fond concave

- Pour un point au fond du canal et un point à la surface libre, on écrit respectivement :

$$\text{Pour } z = 0 \text{ (} z' = 0 \text{)} \quad : p = p_f \quad v = \text{cte}$$

$$\text{Pour } z = h \text{ (} z' = h \text{)} \quad : p = p_a \quad p_a + \gamma h' = -\rho \frac{v^2}{r} h + \text{cte}$$

Une expression pour la pression relative (par rapport à la pression atmosphérique) sur le fond est donnée par :

$$P_f = \gamma h' + \rho \frac{v^2}{r} h + P_a \quad = 0 \tag{I.11}$$

Avec des contributions hydrostatique et accélératrice.

### I.5.1 Courant uniforme :

- Pour un écoulement uniforme, lorsque la vitesse moyenne,  $V$ , est constante et les lignes de courant sensiblement rectilignes (avec  $r \rightarrow \infty$ ), la répartition de pression est hydrostatique dans la section droite du canal (voir fig. I.12). On l'écrit alors en prenant  $z \equiv n$  (éq. I.10) comme suit (Graf & Altinakar, 2000) :

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} (\gamma z' + p) \tag{I.12}$$

- L'expression pour la pression relative sur le fond s'écrit maintenant ainsi :

$$P_f = +\gamma h' \quad (\text{I.13})$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{P}{\gamma}\right)_f = h \cos \alpha \quad (\text{I.14})$$

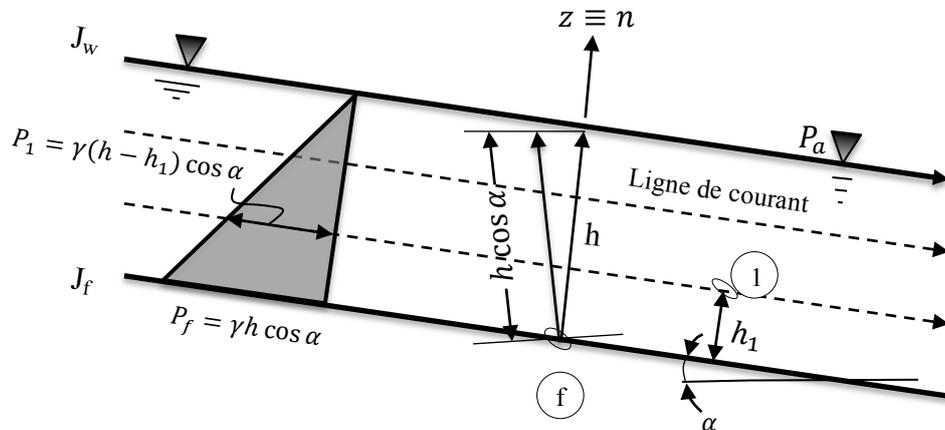


Fig.I.12 Ecoulement à courant uniforme.

- Pour les canaux usuels, l'angle avec l'horizontale,  $\alpha$ , est toujours très faible, soit  $\alpha < 6^\circ$  ou  $J_f < 0.1$ , impliquant que  $\cos \alpha \approx 1$ . L'éq. I.14 se réduit à :

$$\left(\frac{P}{\gamma}\right)_f = h \quad (\text{I.15})$$

Où  $h$  est la profondeur d'eau dans le canal.

### I.5.2 Courant courbe :

- Pour un écoulement (légèrement) non uniforme, donc à courant courbe, convergent, il existe une accélération qui provoque la force d'inertie. On a écrit plus haut (Graf & Altinakar, 2000) :

$$\frac{v^2}{r} = -\rho \frac{\partial}{\partial n} (p + \gamma z') \quad (\text{I.10})$$

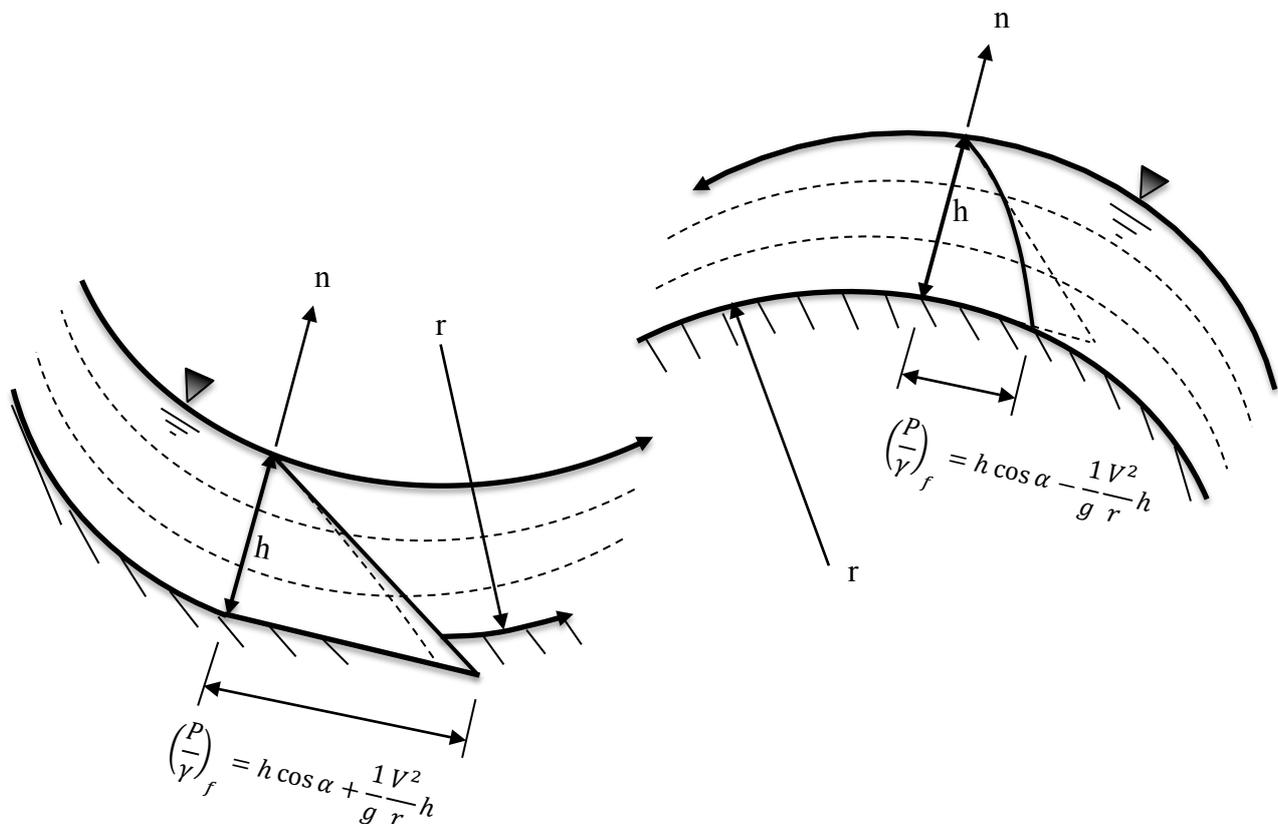


Fig. I.13 Ecoulement sur des fonds concave et convexe

Et l'expression pour la pression relative sur le fond est :

$$P_f = + \gamma h' \pm \rho \frac{V^2}{r} h \quad (\text{I.11})$$

Pour un fond concave (+) ou convexe (-) respectivement.

On obtient ensuite :

$$\left(\frac{P}{\gamma}\right)_f = h \cos \alpha \pm \frac{1}{g} \frac{V^2}{r} h \quad (\text{I.16})$$

- La répartition de pression n'est pas hydrostatique (voir fig. I.13). pour un courant extérieurement concave, la force centrifuge augmente les pressions ; pour un courant convexe, cette force diminue les pressions. Dans le dernier cas, elle peut même les rendre inférieure à la pression atmosphérique, provoquant un écoulement du liquide du fond du canal.

## I.6 Onde :

### I.6.1 Définition :

On appelle onde matérielle, une onde qui se propage dans un milieu en le déformant. La propagation de l'onde est due, dans ce cas, à la transmission du mouvement par les molécules du milieu de propagation.

La vitesse de propagation d'une onde dépend de la nature de cette onde et du milieu dans lequel elle se propage. (Graf & Altinakar, 2000), (Zouaoui, 2004), (Traoure & Dialo, 2001), (Zenzane & Maamare, 2003).

### I.6.2 Différents types d'ondes et d'ordres de grandeurs :

- Ondes de gravité :

Dans un canal, un écoulement non uniforme dans le temps se manifeste par une onde de gravité à la surface libre (figure I.14). La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude, donne pour la vitesse apparente de propagation, également appelée célérité d'une intumescence (Graf & Altinakar, 2000), (Zouaoui, 2004), (PIMENOV et al., 1993):

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \operatorname{tg} h \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \quad (\text{I.17})$$

Où,  $h$  représente la profondeur d'eau.

Dans le cas où la célérité d'onde ne dépend pas de la hauteur d'onde,  $H$ , la formule (I-9) se réduit alors à :

1. Pour les ondes courtes ou ondes de grande profondeur, ( $L/H < 1$ ), on a :

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \quad (\text{I.18})$$

2. Pour les ondes longues ou ondes de faible profondeur, ( $L/H \gg 1$ ), on a :

$$C^2 = gh \quad (\text{I.19})$$

3. Pour une section quelconque; on a :

$$C^2 = g D_h \quad (\text{I.20})$$

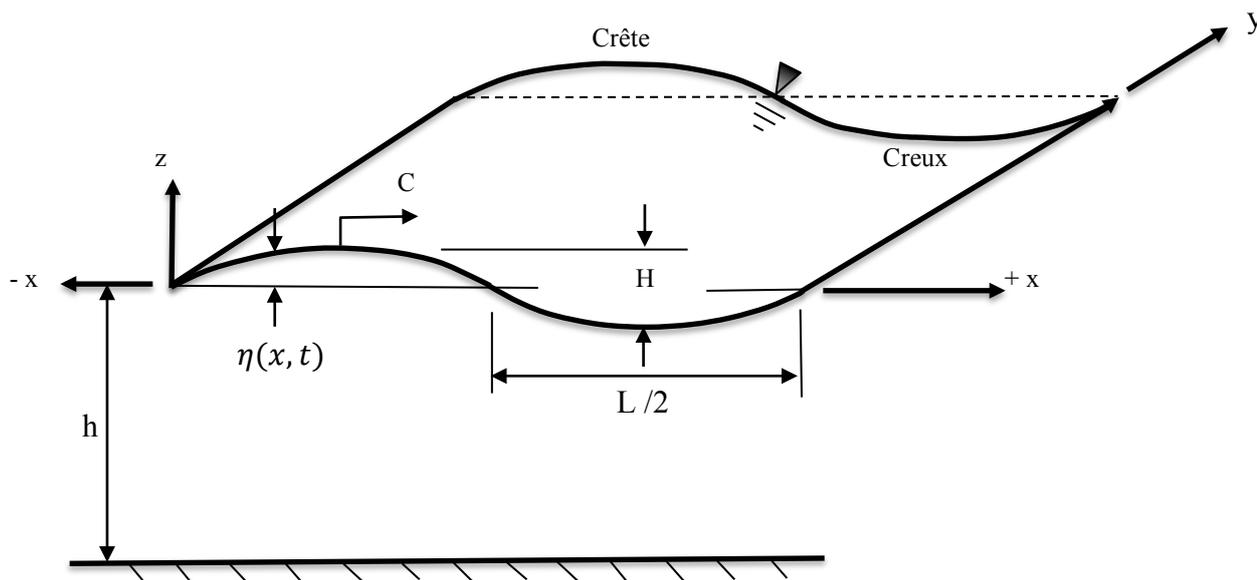


Figure I.14 : Schéma d'une onde dans un canal.

- **Ondes capillaires :**

Elles sont très petites ( $L < 1,74$  cm) et produites par le vent et les effets de tension de surface.

Contrairement aux ondes de gravité, ce sont les ondes de petites longueurs d'ondes qui se propagent le plus vite.

- **Ondes générées par les séismes :**

Elles sont produites par les déplacements de la croûte terrestre.

Les dimensions caractéristiques sont :  $L = 200$ km,  $H = 0,5$  m jusqu'à 30m,  $T = 15$  min et  $C$  de l'ordre de 700km/h.

### I.6.3 Ecoulement avec onde :

La formule (I-11) a été démontrée par Lagrange pour un canal rempli d'eau au repos. Elle reste valable aussi pour le cas où l'eau est plus au moins en mouvement; l'onde se superpose à ce courant.

La célérité absolue,  $C_w$ , d'onde pour un écoulement dans un canal ayant une vitesse moyenne,  $V$ , est :

$$C_w = V \pm \sqrt{gD_h} = V \pm C \quad (\text{I.21})$$

Pour un canal de section rectangulaire :

$$C_w = V \pm \sqrt{gh} = V \pm C \quad (\text{I.22})$$

La célérité absolue,  $C_w$ , qui est la vitesse par rapport au sol, a évidemment deux valeurs :

$$C'_w = V + C \quad (\text{I.23})$$

$$C''_w = V - C \quad (I.24)$$

On distingue trois cas :

- a)  $V < C$ , l'onde avec la célérité,  $C'_w$ , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité,  $C''_w$ , se propage vers l'amont ; c'est le "régime fluvial", (figure I.15).

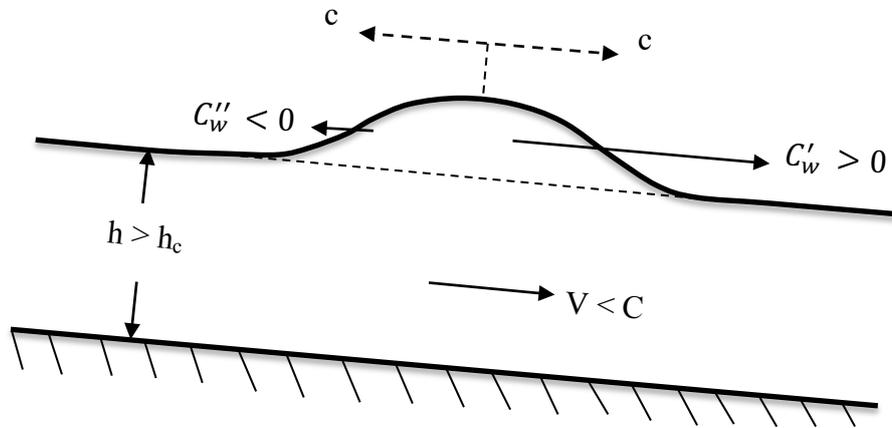


Figure I.15 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas fluvial)

- b)  $V > C$ , l'onde avec la célérité,  $C'_w$ , et l'onde avec la célérité,  $C''_w$ , se propagent vers l'aval; c'est le régime torrentiel (figure I.16).

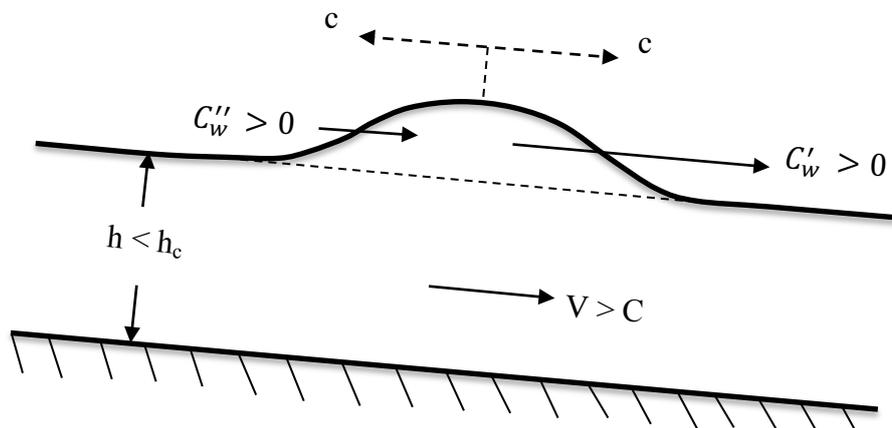


Figure I.16 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas torrentiel)

- c) Dans le cas où la vitesse de courant,  $V$ , et la célérité d'onde,  $C$ , sont égales; donc :

$$V = C = \sqrt{gh_c} \quad (I.25)$$

L'écoulement est en "régime critique", et  $h_c$  représente la profondeur critique :

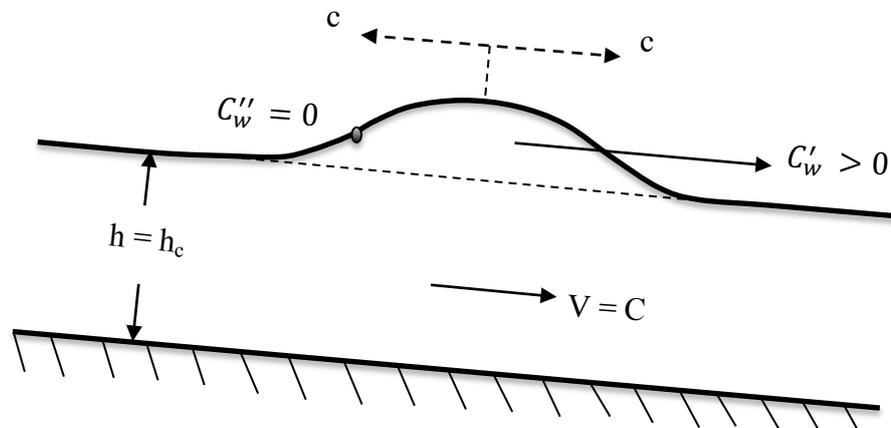


Figure 1.17 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas critique)

Lorsque deux trains d'ondes se rencontrent on assiste à un phénomène d'interférence. L'interférence peut être :

- Constructive : les ondes sont en phase et s'ajoutent ;
- Destructive : les ondes sont en opposition de phase et l'onde résultante est la différence de celles-ci ;
- Autre (en général) : Combinaison des 2 premières.

## I.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions générales sur les équations à surface libre tel que :

Les différents types des canaux, la géométrie des canaux les écoulements dans les canaux, les régimes d'écoulements, la répartition des vitesses, la répartition des pressions, et les ondes.

A l'appréhension de cette catégorie d'écoulement. Ainsi, ce qui a précédé sera la base des suivants chapitre où l'on abordera l'aspect mathématique et numérique relatif à la résolution des problèmes de stationnarité qui s'y rattachent

## Chapitre II : Equations du mouvement

### II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations de mouvement dans les étapes suivant:

Equations différentielles du mouvement (équation de continuité, équation dynamique), discussion des équations de base, simplifications, méthode de résolution.

Les équations fondamentales décrivant les écoulements de fluides sont dans leur formulation générale très complexe et non linéaire, malgré la restriction à l'étude des seuls écoulements de type Newtonien. Un certain nombre d'approximations a été effectué et s'avère aujourd'hui valable pour des écoulements gouvernés par les équations de Navier Stokes.

Le niveau d'approximation le plus élevé est représenté par les équations de Navier Stokes sans aucune modification.

Un autre niveau d'approximation concerne les écoulements à très haut nombre de Reynolds où la plus grande partie de l'écoulement est turbulent. Les équations de Reynolds peuvent alors être utilisées.

Les équations de Barré de Saint venant (1871) jouent un rôle très important dans l'étude des écoulements en rivière ou canaux (naturels ou artificiels) où les écoulement en mer.

### II.2 Equations différentielles du mouvement :

#### II.2.1 hypothèses :

Les équations de la dynamique et de continuité décrivant les écoulements transitoires unidimensionnels sont dérivées dans cette section (Chaudhry, 2008).

Les hypothèses suivantes sont faites pour dériver ces équations.

- a) la pente,  $\theta$ , du fond du canal est petit de sorte que  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$  et  $\cos \theta \approx 1$ .
- b) la répartition de la pression dans une section est hydrostatique. ceci est vrai si l'accélération verticale est faible, c'est à dire, si la variation de la surface de l'eau avec la distance est graduelle.
- c) les pertes par frottement à l'état transitoire peuvent être calculées en utilisant les formules pour les pertes par frottement à l'état stationnaire.
- d) la distribution de vitesse à une section de canal est uniforme.
- e) le canal est rectiligne et prismatique.

#### II.2.2 Equation de continuité :

L'équation de continuité, qui est une des équations fondamentales de la mécanique des fluides, exprime le principe de conservation de la masse (Graf & Altinakar, 2000).

La variation de la masse fluide contenue dans un volume donné pendant un certain temps doit être égale à la somme des masses fluides qui y entrent, diminuées de celles qui en sortent.

Nous allons étudier l'écoulement non permanent, non uniforme et presque rectiligne d'un fluide incompressible dans un canal à surface libre avec une faible pente de fond, entre deux sections proches (voir Fig. II.1) ;  $Q$  sera le débit entrant.

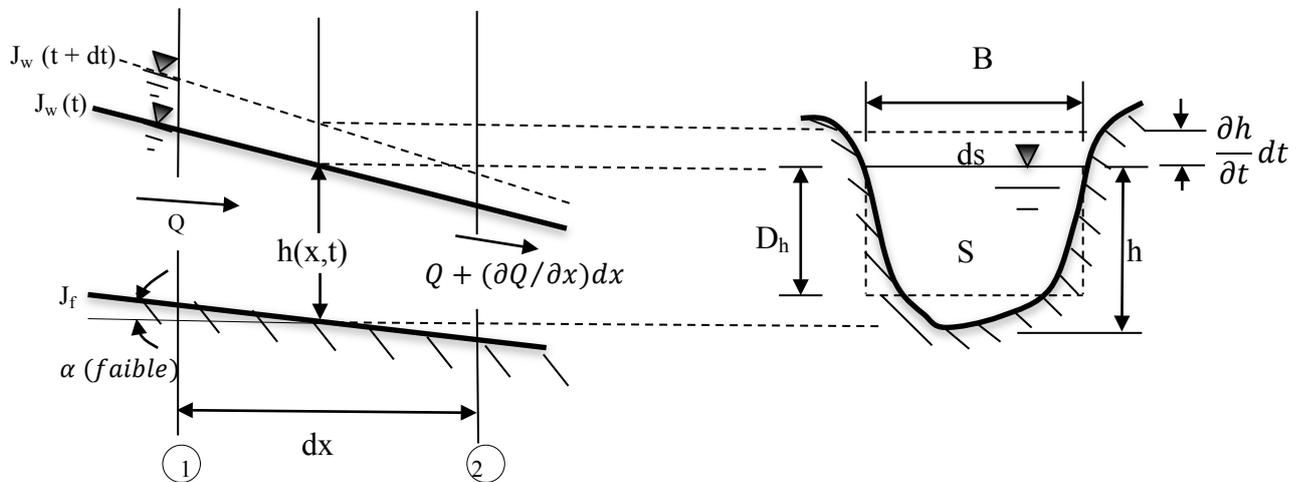


Fig. II.1 : Schéma pour l'équation de continuité.

Le volume entrant par la première section dans le temps, est  $Qdt$  ; le volume par la deuxième section, distante de  $dx$  de la première, est  $[Q + (\partial Q/\partial x)dx]dt$ . La variation de volume entre ces deux sections pendant le temps  $dt$  est donc :

$$- \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dt$$

Cette variation de volume est le résultat d'une modification de la surface libre  $\partial h/\partial t$ , entre les deux sections pendant le temps  $dt$ , ce qui correspond à :

$$(Bdx) \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

Où  $B(h)$  est la largeur à la surface libre et  $h(x,t)$  la profondeur d'eau.

Supposant le fluide incompressible et égalant ces deux expressions (Chow, 1951, p. 525 in Graf & Altinakar, 2000), on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Ou } ds = Bdh$$

On peut écrire la relation suivante pour une section donnée :

$$Q = VS \quad (\text{II.2})$$

Où  $V$  est la vitesse moyenne dans la section,  $S$ . L'éq. II.1 devient ainsi :

$$\frac{\partial(VS)}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

Avec la profondeur hydraulique,  $D_h = S/B$ , on peut aussi écrire :

$$D_h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial D_h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 4})$$

Les équations ci-dessus représentent différentes formes de l'équation de continuité, valable pour les canaux prismatiques.

Pour le cas d'un canal rectangulaire, on écrit l'équation II.3 ainsi :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 5})$$

Où  $q = Q/B$  est le débit unitaire.

Si l'écoulement est permanent,  $\partial S/\partial t = 0$ , l'équation de continuité, eq. II.1, se réduit à :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{II. 6})$$

Si un débit supplémentaire sort (ou entre) dans le canal entre les deux sections, il faut modifier l'éq. II.1 ainsi :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} \pm q_l = 0 \quad (\text{II. 7})$$

Où  $q_l$  est le débit supplémentaire par unité de longueur.

### II.2.3 Equations dynamiques :

#### II.2.3.1 Equations de saint-Venant:

On considère (voir Fig. II.2) un canal à surface libre où l'écoulement unidimensionnel est non permanent, non uniforme (graduellement varié) et presque rectiligne. On admet que la pente de fond,  $j_f$ , fixe et permanente, est faible et que le débit d'un fluide incompressible est donné par  $Q = VS$ , avec  $V(x, t)$  comme vitesse moyenne pour toute la section mouillée,  $S(x,t)$ . Il n'y a pas d'apport latéral (Graf & Altinakar, 2000).

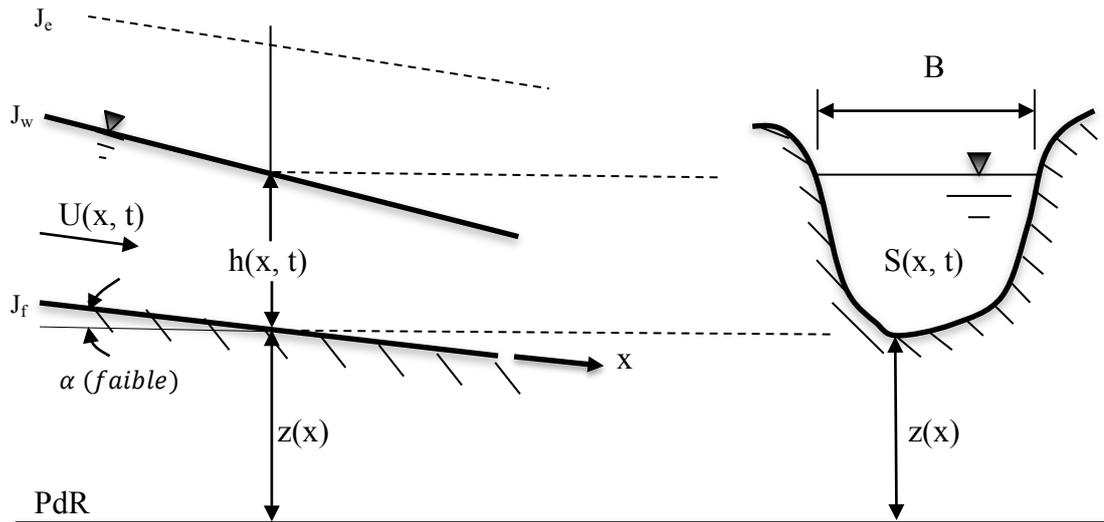


Fig. II.2 : Schéma d'un écoulement non permanent non uniforme sur une pente à fond fixe,  $z(x)$ .

L'équation de continuité, développée à la sect. 2.1, est donnée (voir Fig. II.1) par :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (II.8)$$

Il serait plus exact, notamment pour les canaux non prismatiques, de remplacer le deuxième terme par :

$$V \frac{\partial S}{\partial x} = V \left( \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

Par ce que  $S = f[h(x, t), x]$  ; et avec  $\partial S / \partial h = B$ .

Pour un canal prismatique rectangulaire, on écrit l'éq. II.8 ainsi :

$$h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad B = cte \quad (II.9)$$

L'équation dynamique du mouvement non permanent et graduellement varié est développée ; elle est donnée par :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = -j_e \quad (II.10)$$

Avec  $j_f = -(\partial z / \partial x)$  comme pente de fond,  $h_f = j_e dx$  comme perte de charge et  $j_e$  comme pente énergétique.

Comme première approximation, on admet que la pente énergétique,  $j_e$ , peut être donnée par une relation établie pour l'écoulement uniforme permanent de type Weisbach-Darcy :

$$j_e = f \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{II. 11})$$

Ou de type Chézy :

$$j_e = \frac{8g}{C^2} \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{II. 12})$$

L'équation dynamique, éq. II.10, peut aussi s'écrire ainsi, en remplaçant V par Q/S :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{S} \right) + S \frac{\partial h}{\partial x} + S \frac{\partial z}{\partial x} = -S j_e \quad (\text{II. 10a})$$

Les différents termes de l'éq. II.10 peuvent être considérés comme la représentation d'une pente. Dans le premier et le deuxième terme, la pente est due à la variation de la vitesse en temps et en espace. Le troisième et le quatrième terme donnent la pente de la surface libre.  $j_w$ . le cinquième terme est la pente énergétique,  $j_e$ .

Chaque terme de l'éq. II.10 a une importance relative, dépendant de la situation hydraulique. Cunge et al. (1980, p. 45) donnent l'ordre de grandeur des termes de pente pour une crue sur le Rhône en France :

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} & O(\sim 10^{-5}) \quad ; \quad \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} & O(\sim 10^{-5}) \\ j_f & O(\sim 10^{-5}) \quad ; \quad j_e & O(\sim 10^{-5}) \end{array}$$

Cela montre (Henderson, 1966, p. 364 in Graf & Altinakar, 2000) que pour une rivière à faible pente,  $j_f$ , les deux termes dus à l'accélération peuvent être négligés. On écrit donc l'éq. II.10 comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = -j_e \quad \text{ou} \quad -j_w = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}$$

Lorsque la variation de la profondeur d'eau est faible par rapport à la pente de fond,  $\partial h / \partial x < \partial z / \partial x$  - ce qui peut se produire dans un cours d'eau à pente de fond plutôt rapide - , l'équation dynamique , éq. II.10, se réduit à :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -j_e \quad \text{ou} \quad -j_f = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Si l'on utilise la forme de la relation de Chézy, l'équation dynamique, éq. II.10 peut être exprimée ainsi :

$$V = C \sqrt{R_h j_e} = C \sqrt{R_h \left( j_f - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \right)} \quad (\text{II. 13})$$

Pour un écoulement permanent et uniforme, en écrit évidemment :

$$V = C\sqrt{R_h j_f} \quad (\text{II. 14})$$

La relation entre la vitesse,  $V$ , ou le débit,  $Q$ , et profondeur d'eau,  $h$ , ou le rayon hydraulique,  $R_h$ , (voir Fig. II.3a) est :

- i. Une relation univoque pour l'éq. II.14,
- ii. Une relation non univoque en boucle pour l'éq. II.13. la largeur de cette boucle indique l'importance des termes d'inertie et de pression dans l'éq. II.13.

La relation  $Q = f(h)$ , (voir Fig.II.3a) qu'on appelle aussi courbe de tarage ou de jaugeage de la section, nous donne les renseignements suivants (Forchheimer, 1930, p. 297 et Flamant, 1923 in Graf & Altinakar 2000) :

- i. Dans un écoulement non permanent, le débit,  $Q$ , a deux valeurs différentes pour la même profondeur d'eau,  $h$ , suivant que le niveau d'eau monte ou descend.
- ii. Lorsque le débit dans la section est maximum,  $Q = Q_{\max}$ , donc  $\partial Q / \partial t = 0$ , la profondeur d'eau,  $h$ , croît encore parce qu'elle n'a pas atteint son plus haut niveau (voir Fig. II.3b).
- iii. En prenant la relation :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = (VB) \frac{\partial h}{\partial t} + (VB) \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Soit les deux dérivées s'annulent en même temps lorsque  $\partial Q / \partial t = 0$ , soit elles ont des signes opposés.

Si la profondeur d'eau,  $h$ , croît, le même  $\partial h / \partial t$  est positif et le terme  $\partial V / \partial t$  négatif ; par conséquent, la vitesse,  $V$ , décroît.

- iv. A une section donnée fixe, on observera donc d'abord (voir Fig.II.3b) :  
Le maximum de la vitesse moyenne,  $V_{\max}$ , puis ;  
Le maximum du débit,  $Q_{\max}$ , puis ;  
Le maximum de la profondeur d'eau,  $h_{\max}$  ;  
tous sont précédés de la pente d'eau,  $j_{w_{\max}}$ , maximale.

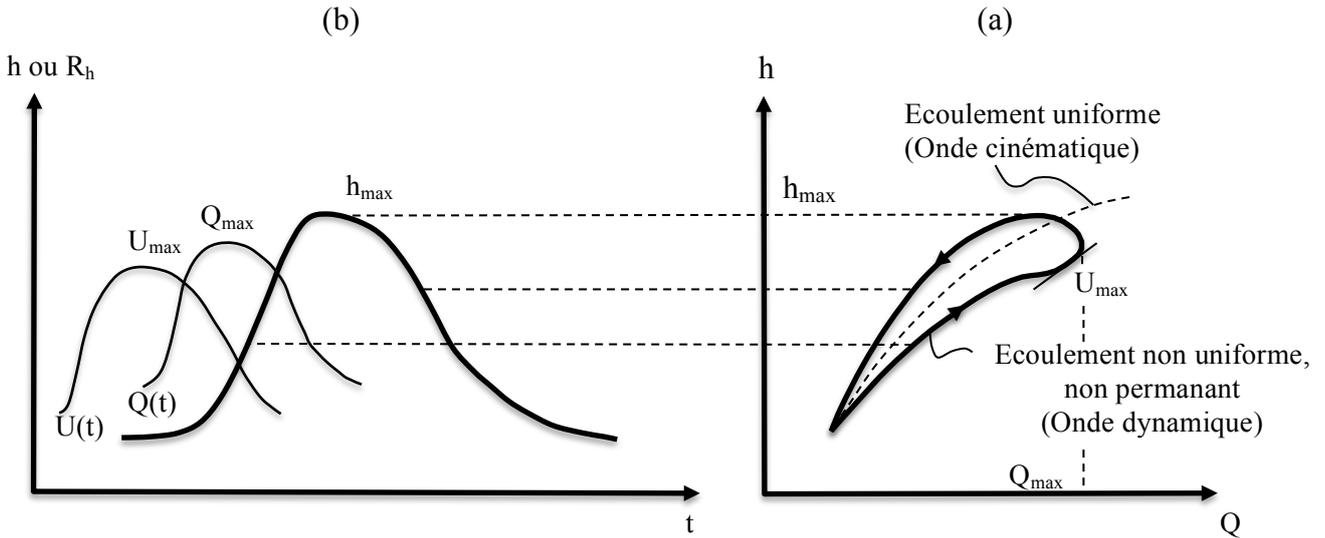


Fig. II.3 : Représentation schématique de la relation de  $Q = f(h)$  et de  $h = f(t)$  pour l'écoulement non uniforme et non permanent.

- Les équations, éq. II.8 et éq. II.10, établies pour la première fois par Saint-Venant (1870), donne une solution aux écoulements non permanents pour autant qu'il soit possible de les intégrer.
- Les équations de Saint-Venant constituent un système de deux équations aux dérivées partielles – de type hyperbolique- en  $x$  et  $t$ , introduisant deux fonctions inconnues,  $h$  et  $V$ . Il faut choisir des conditions aux limites et initiales pour bien encadrer le problème.
- L'intégration exacte des équations de Saint-Venant étant très compliquée, leur solution analytique est rare. Il existe toutefois différentes techniques numériques (et graphiques) pour les résoudre.

### II.3 Discussion des équations de base :

Les équations de continuité et de la quantité de mouvement forment un ensemble d'équations différentielles partielles non linéaires. Une solution de forme fermée de ces équations n'est pas disponible, sauf pour des cas très simplifiés. Par conséquent, les méthodes numériques sont utilisées pour leur intégration. Pour sélectionner un schéma numérique, il est utile si nous connaissons le type de ces équations, à savoir si elles sont hyperboliques, parabolique ou elliptique. Nous pouvons déterminer le type de ces équations comme suit (Chaudhry, 2008):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + D_h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{q_l}{B} = 0 \tag{II.15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} + h \right) = g(J_0 - J_f) \tag{II.16}$$

Ecrivons les équations. II-15 et II-16 sous forme de vecteur

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = S \quad (\text{II. 17})$$

Dans lequel

$$U = \begin{pmatrix} h \\ V \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} V & D_h \\ g & V \end{pmatrix} ; \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{q_l}{B} \\ g(J_0 - J_f) \end{pmatrix} \quad (\text{II. 18})$$

Les valeurs propres de la matrice A définissent le type de eq. II.17. Ces valeurs propres sont déterminées à partir de l'équation :

$$\begin{vmatrix} V - \lambda & D \\ g & V - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{II. 19})$$

Il résulte de cette équation que :

$$(V - \lambda)^2 - gD = 0 \quad (\text{II. 20})$$

Deux racines de cette équation sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= V + \sqrt{\frac{gA}{B}} \\ \lambda_2 &= V - \sqrt{\frac{gA}{B}} \end{aligned} \quad (\text{II. 21})$$

Le terme radical de l'équation. II.21 est une expression de la célérité de l'onde. Par conséquent, les valeurs propres de A représentent les vitesses des ondes absolues,  $V + c$  et  $V - c$ .

Les expressions de valeurs propres,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , montrent que les deux sont réelles et distinctes pour les flux sous- et supercritiques. Par conséquent, les équations. II.17 sont un ensemble d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. Ce type d'équation représente la propagation des ondes dans les différents milieux. Des procédures de calcul, dénommé la procédure de marche, sont appropriées pour l'intégration numérique de ces équations.

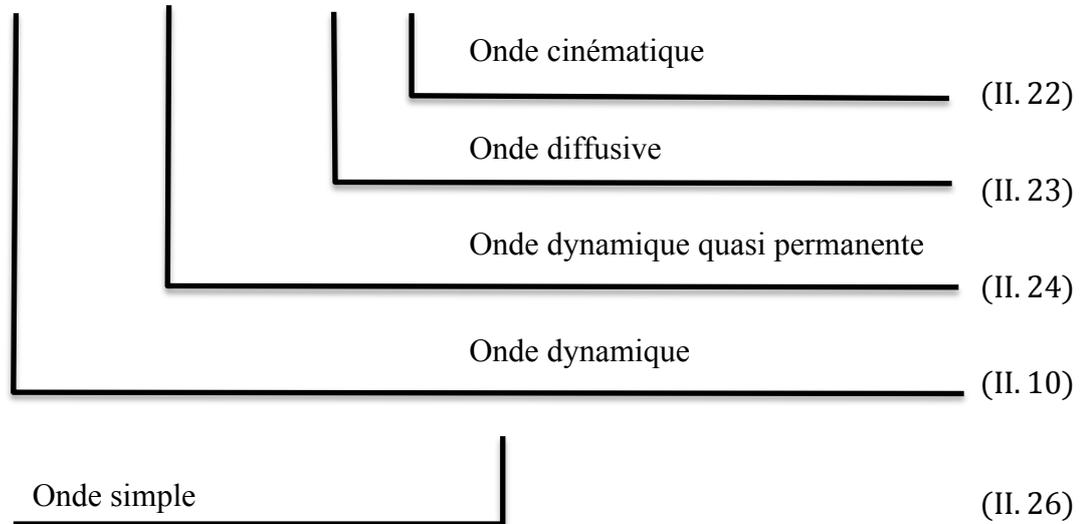
## II.4 Simplifications :

### II.4.1 Equation simplifiées de Saint-Venant :

- Il arrive qu'un problème d'écoulement non permanent et graduellement varié puisse être formulé de façon qu'un ou plusieurs termes de l'équation dynamique puissent être négligés.

- En considérant les différents termes dans l'équation dynamique, éq. II.10, on distingue habituellement les types d'ondes suivants (Graf & Altinakar, 2000) :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = J_f - J_e \quad (II.10)$$



- L'équation de continuité, éq. II.8, reste toujours valable pour chacun de ces types d'ondes.
- Il est intéressant de noter la différence entre une onde cinématique, qui demande le plus de simplifications, et une onde dynamique, qui est la plus complète. Un observateur, qui reste stationnaire sur la berge du canal, voit qu'entre deux sections distantes de  $\Delta x$  (voir Fig. II.4) :
  - La pente de fond,  $J_f$ , et la pente énergétique,  $J_e \equiv J_w$ , (voir éq. II.22) sont parallèles pour l'onde cinématique.
  - La pente de fond,  $J_f$ , la pente piézométrique,  $J_w$ , et la pente énergétique,  $J_e$ , (voir eq. II.10) ne sont pas parallèles pour l'onde dynamique.

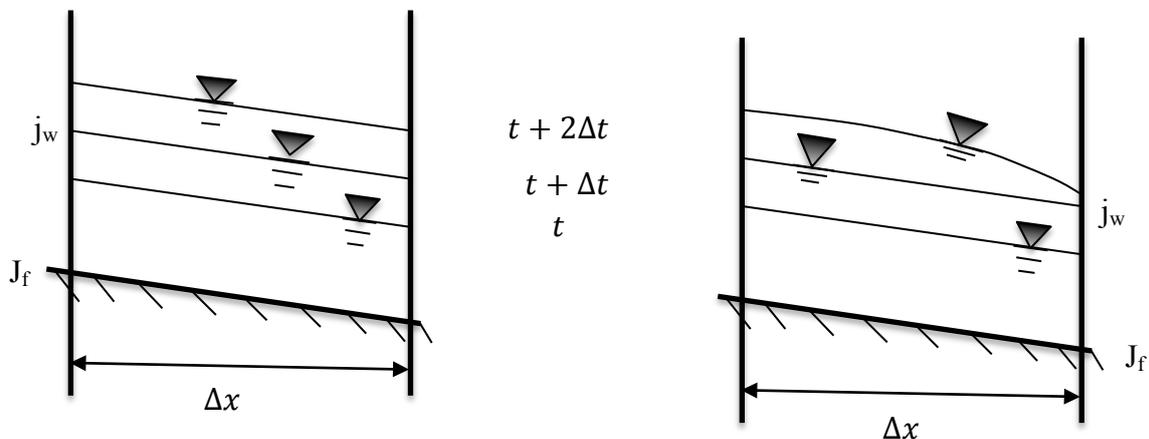


Fig. II.4 : Ondes cinématique et dynamique vues par un observateur stationnaire.

## II.4.2 Onde cinématique :

L'onde cinématique représente un cas spécial et simple des équations de Saint-Venant.

### II.4.2.1 Equations hydrodynamiques :

- les équations de Saint-Venant, éq. II.8 et éq. II.10, se simplifient si l'on considère l'onde cinématique (voir sect. III.1).
- l'équation de continuité reste toujours valable ; donc (Graf & Altinakar, 2000):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = B \frac{\partial h}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (\text{II. 8})$$

- l'équation dynamique se simplifie et l'on écrit :

$$j_f = j_e \quad (\text{II. 22})$$

Cela que dans l'équation dynamique, éq. II.10, les termes d'inertie et le terme dû à la variation de la profondeur d'eau sont négligeables (par rapport au terme dû à la variation du fond,  $\partial z / \partial x = j_f$ ).

- L'éq. II.22 peut alors s'écrire en utilisant la relation de Chézy :

$$j_f = \frac{V^2}{C^2 R_h} \quad \text{ou} \quad V = C \sqrt{R_h j_f} \quad (\text{II. 27})$$

Le débit est ensuite donné par :

$$Q = VS = CS \sqrt{R_h j_f}$$

Qui implique que  $Q = f(S)$  ou  $S = f(Q)$ . D'où il apparaît qu'une relation univoque existe (voir Fig. II.3a) entre le débit, Q, et la surface mouillée, S, dans une section d'abscisse donnée,  $x = x_0$ .

Par conséquent, le premier terme,  $\partial S / \partial t$ , dans l'éq. II.8 peut être exprimé ainsi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left( \frac{\partial S}{\partial Q} \right)_{x_0} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- L'équation de continuité, éq. II.8, s'écrit alors (Forchheimer, 1930, p. 298 in Graf & Altinakar, 2000) comme suit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left( \frac{\partial Q}{\partial S} \right)_{x_0} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (\text{II. 28})$$

C'est l'équation de l'onde cinématique. Le terme :

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial S}\right)_{x_0} = c_k \quad \text{ou} \quad c_k = \frac{\partial Q/\partial t}{\partial Q/\partial x} \quad (\text{II.29})$$

Est la célérité de propagation de l'onde cinématique pour un débit donné ; elle est différente pour chaque section d'abscisse  $x = x_0$ . Selon l'éq. II.28, le débit,  $Q$ , subit un déplacement convectif avec la célérité  $c_k$ .

Un observateur se déplaçant avec la crête de l'onde — donc avec la célérité, — n'observera aucune variation de débit (voir Fig. II.5) ; le lui apparaîtra donc comme constant ; on écrira alors :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0$$

Cette expression est à comparer avec l'éq. II.28.

On peut aussi écrire l'éq. II.8 comme suit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{II.8b})$$

Cela indique (voir Fig. II.1) que la variation en temps, de la surface,  $S$ , dans une section du canal est égale à la variation en espace,  $x$ , du débit,  $Q$ .

L'onde cinématique est un type d'onde dont les propriétés découlent essentiellement de l'équation de continuité (voir éq. II.8b et éq. II.28).

- L'éq. II.28 peut aussi s'écrire en utilisant la relation univoque entre  $Q$  et  $h$ , avec la profondeur d'eau,  $h$ , comme variable dépendante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_k \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.28a})$$

Où  $c_k = f(h)$

- Sans tenir compte de la variation de la profondeur d'eau,  $\partial h/\partial x$ , (voir éq. II.10 et éq. II.12) l'onde cinématique ne s'atténue pas — la profondeur maximale reste constante sur son parcours —, mais elle tend à se raidir et à augmenter sa courbure (voir Fig. II.6).

La forme géométrique d'une onde cinématique, c.-à-d. son profil, — d'un intérêt limité pour l'ingénieur — est donnée par Henderson (1966, p. 371).

- Pour une simulation numérique des ondes cinématiques, les méthodes de solution présentées à la sect. IV sont utilisées :
  - i. La méthode explicite, exposée aussi par Jansen et al. (1979, p, 263) et Abbott et Basco (1989, p, 58).
  - ii. La méthode implicite, exposée aussi par Chow et al. (1988, p, 294), Jansen et al. (1979, p, 265) et Abbott et Basco (1989, p, 86).

Pour la simulation numérique, on admet généralement que l'onde cinématique, éq. II.28, est une approximation valable pour l'équation dynamique complète, éq. II.10, si :

$$gL_j/V^2 > 10$$

Ici  $L$  représente la longueur du canal à l'étude et  $V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme.

#### II.4.2.2 Célérité de propagation :

- Supposons la pente du fond,  $j_f$ , constante est très petite, et bornons-nous à un canal rectangulaire. Admettons (voir Fig. II.5) qu'avant l'arrivée de l'onde, l'écoulement soit uniforme, qu'il ait une profondeur d'eau,  $h_1$ , et une vitesse moyenne,  $V_1$  ; le débit d'apport sera initialement constant,  $Q_1$ .

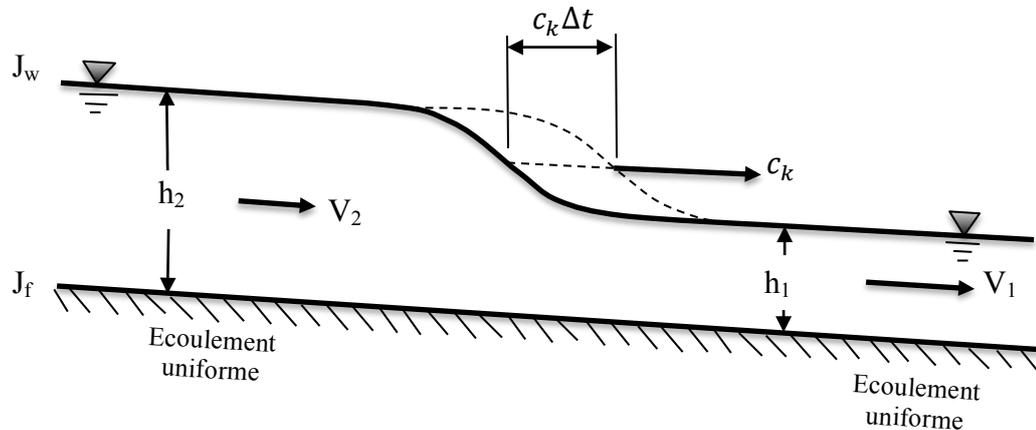


Fig. II.5 : Onde monocline (front d'une onde cinématique).

- Le débit augmente rapidement jusqu'à une valeur,  $Q_2$ , et se stabilise lorsqu'il a atteint un écoulement uniforme. Cet échelon de débit se propage en aval, après un temps d'établissement assez long, en formant une onde de translation de forme (géométrique) stable, dite onde monocline.
- Pendant un intervalle de temps,  $\Delta t$ , l'onde se déplace à une distance de  $\Delta x = c_k \Delta t$ . en appliquant la conservation des volumes à un volume de contrôle en translation avec la célérité,  $c_k$ , on écrira (Graf & Altinakar, 2000):

$$c_k(Bh_2) - Q_2 = c_k(Bh_1) - Q_1 \quad (\text{II. 30})$$

D'où la célérité de propagation ;

$$c_k \frac{Q_2 - Q_1}{s_2 - s_1} = \frac{dQ}{dS} = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dh} \quad (\text{II. 31})$$

Cette relation est à comparer avec l'éq. II.29. la célérité de propagation d'une onde cinématique est proportionnelle au taux de variation du débit,  $Q$ , avec la surface,  $S$ , ou la profondeur d'eau,  $h$ .

- L'éq. II.30 peut aussi s'écrire ainsi :

$$(c_k - V_2)S_2 = (c_k - V_1)S_1 \quad (\text{II. 30a})$$

Cette équation montre que :

- i. S'il n'y a pas d'écoulement initial,  $Q_1 = 0$  qui implique que  $V_1 = 0$  et  $S_1 = 0$ , on aura :

$$c_k = V_2$$

- ii. S'il y'a un écoulement initial,  $Q_1 > 0$  , on aura :

$$c_k > V_1 \quad , \quad c_k > V_2 \quad (\text{II. 32})$$

La célérité de l'onde cinématique,  $c_k$ , est donc toujours supérieure aux vitesses,  $V_1$  et  $V_2$ , en aval et en amont respectivement.

- La célérité de propagation, éq. II.31, peut être exprimée ainsi :

$$c_k = \frac{d(VS)}{dS} = V + S \frac{\partial V}{\partial S} \quad (\text{II. 31a})$$

Cette relation confirme la conclusion donnée pour les relations de l'éq. II.32 ; or  $\partial V / \partial S$  est toujours positif.

Selon une telle relation, éq. II.31, la célérité,  $c_k(h)$ , varie avec la profondeur d'eau,  $h$  ; mais on admet souvent que cette variation peut être ignorée (Henderson, 1966, p. 370 in Graf & Altinakar, 2000) et l'on prend  $c_k(h) \equiv c_k$ .

- Admettons qu'on ait un écoulement turbulent dans un canal rectangulaire, infiniment large et qu'on exprime la vitesse moyenne avec la relation de Chézy :

$$V = Ch^{1/2} J_f^{1/2} \quad (\text{II. 14})$$

L'éq. II.31a s'écrit alors :

$$c_k = V + h \frac{\partial V}{\partial h} = V + h \frac{C J_f^{1/2}}{2h^{1/2}} = V + \frac{V}{2}$$

Donc :

$$c_k = \frac{3}{2} V \quad (\text{II. 33})$$

Pour un canal parabolique ou triangulaire respectivement, on aura :

$$c_k = \frac{4}{3} V \quad \text{ou} \quad c_k = \frac{5}{4} V \quad (\text{II. 33a})$$

La même opération peut se faire en utilisant la relation de Manning,  $V = K_S R_h^{2/3} j_f^{1/2}$  , et l'on obtiendra pour un canal rectangulaire :

$$c_k = \frac{5}{3} V \quad (\text{II. 34})$$

La célérité de propagation d'une onde cinématique représente 5/3 de la vitesse moyenne. Notons que ce résultat a été obtenu en utilisant l'équation de continuité, éq. II.8, et l'équation dynamique, éq. II.22, c.-à-d. la relation de Manning.

- La comparaison des propriétés d'une onde cinématique avec celles d'une onde de gravité s'avère intéressante, comme le montre le tableau ci-dessous :

Tableau (II.1) : comparaison des propriétés d'une onde cinématique avec celles d'une onde de gravité.

	Onde de gravité	Onde cinématique
cause	Toutes les perturbations à la surface de l'eau	Accumulation locale d'eau
célérité	$c_w = V \pm \sqrt{gh}$	$c_k = (5/3)V$
direction	Aval, amont	Aval
Atténuation	importante	Pas possible

- Si dans un canal rectangulaire une onde de gravité se propage vers l'aval avec la célérité d'une onde cinématique, on admet que :

$$c_k = c_w$$

En utilisant l'éq. II.34 et l'éq. I.22, on écrira :

$$\frac{5}{3}V = V + \sqrt{gh}$$

Ce qui donne (voir éq. I.19) :

$$c = \sqrt{gh} = \frac{2}{3}V$$

Ensuite, avec la définition du nombre de Froude,  $V/\sqrt{gh}$ , on obtiendra :

$$Fr = \frac{3}{2} \quad \text{pour} \quad c_w = c_k$$

$$Fr > \frac{3}{2} \quad \text{pour} \quad c_w < c_k$$

$$Fr < \frac{3}{2} \quad \text{pour} \quad c_w > c_k$$

En hydraulique fluviale, ou l'on a souvent  $Fr < 3/2$ , une onde cinématique (crue) se propage moins vite qu'une onde de gravité. A signaler qu'en prenant la relation de Chezy (voir éq. II.33), la valeur limite du nombre de Froude est de  $Fr = 2$

### II.4.3 Onde diffusive :

L'onde diffusive représente un autre cas spécial et simple des équations de Saint-Venant.

#### II.4.3.1 Equations hydrodynamiques :

- Si l'on considère l'onde diffusive, les équations de Saint-Venant, éq. II.8 et éq. II.10, se simplifient (voir sect. IV.1).
- L'équation de continuité reste toujours valable ; donc (Graf & Altinakar, 2000):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = B \frac{\partial h}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (\text{II. 8})$$

- L'équation dynamique se simplifie et l'on écrit :

$$j_f - \frac{\partial h}{\partial x} = j_e \quad (\text{II. 23})$$

Cela implique que dans l'équation de Saint-Venant, éq. II.10, les termes d'inertie sont négligeables (par rapport aux termes dus à la variation de la surface libre,  $\partial h / \partial x + \partial z / \partial h = -j_w$ ).

En utilisant la forme de la relation de Chézy, éq. II.14, l'équation dynamique, éq. II.23 peut être exprimée (voir éq. II.13) comme suit :

$$V = C \sqrt{R_h \left( j_f - \frac{\partial h}{\partial x} \right)} \quad (\text{II. 13a})$$

- L'onde diffusive s'atténue (voir Fig. II.6) du fait de la variation (possible) de profondeur d'eau,  $\partial h / \partial x$  ; ce qui ne pas la cas pour l'onde cinématique (voir sect. IV.2.1). cette dernière ne s'atténue pas, mais tend à se raidir et à augmenter sa courbure.

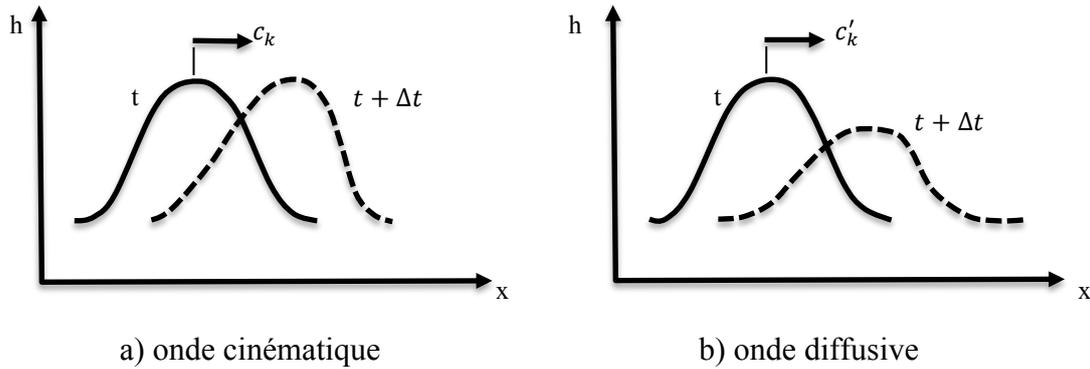


Fig. II.6 : Atténuation d'une onde ; positions successives.

- L'équation dynamique éq. II.23, peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{K^2} = 0 \quad (\text{II. 35})$$

Où la débitance du canal s'écrit ainsi :

$$K(h) = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S \quad (\text{II. 36})$$

Ce qui donne  $Q = K\sqrt{J_f}$ .

On suppose le canal rectangulaire de largeur  $B = \text{Cte}$  :

- En dérivant l'éq. II.8 par rapport à  $x$ , on a :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

- En dérivant l'éq. 5.37 par rapport à  $t$ , on obtient, sachant que :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{2|Q|}{K^2} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2|Q|Q}{K^3} \frac{\partial K}{\partial t} = 0$$

$$\text{Ou l'on met : } \frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial h} \left( -\frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

- Ensuite (Cunge et al, 1980, p.45 in Graf & Altinakar 2000), par élimination de  $\partial^2 h / \partial x \partial t$ , on a :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left( \frac{Q}{BK} \frac{\partial K}{\partial h} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} - \left( \frac{K^2}{2B|Q|} \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II. 37})$$

C'est l'équation de l'onde diffusive (par analogie avec la diffusion de la chaleur). Cette équation partielle différentielle est parabolique avec

une seule variable dépendante,  $Q(x, t)$ . Le débit,  $Q$ , subit une convection avec la célérité (voir aussi éq. II.31) :

$$c'_k = \left( \frac{Q}{BK} \frac{\partial K}{\partial h} \right) = \left( \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial h} \right) \quad (\text{II. 38})$$

Et une dispersion (ou atténuation) avec un coefficient de :

$$C_D = \left( \frac{K^2}{2B|Q|} \right) = \frac{Q}{2BJ_f} \quad (\text{II. 39})$$

L'équation de l'onde diffusive, éq. II.37, s'écrit alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c'_k \frac{\partial Q}{\partial x} - C_D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II. 37a})$$

Cette équation doit être comparée avec l'équation de l'onde cinématique, éq. II.31. L'éq. II.37a peut aussi s'écrire (voir Dingman, 1984, p.265 in Graf & Altinakar, 2000) en utilisant la profondeur d'eau,  $h$ , comme variable dépendante, sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c'_k \frac{\partial h}{\partial x} - C_D \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II. 37b})$$

- iv. Moyennant l'hypothèse supplémentaire que la pente du fond reste constante, (Henderson, 1966, P. 388 in Graf & Altinakar, 2000) donne les relations suivantes (voir aussi éq. II.333 et éq. II.13a) pour la célérité en utilisant le coefficient de Chézy :

$$c'_k = \frac{3}{2}V = \frac{3}{2}C \sqrt{h \left( j_f - \frac{\partial h}{\partial x} \right)} \quad (\text{II. 38a})$$

Et pour le coefficient de dispersion :

$$C_D = \frac{c'_k h}{3 \left[ j_f - (\partial h / \partial x) \right]} \approx \frac{c'_k h}{3j_f} \quad (\text{II. 39a})$$

- Pour une simulation numérique des ondes diffusives, les méthodes de solution présentées à la sect. V sont utilisées, soit :
  - i. La méthode explicite, exposée par Abbott et Basco (1989, pp.100 et 140) ;
  - ii. La méthode implicite, exposés aussi par Abbott et Basco (1989, pp.114 et 151) et Jansen et al. (1979, p.269).

### II.4.3.2 Atténuation :

- Le coefficient de dispersion,  $C_D$ , exprime le taux d'atténuation ou de dissipation de l'onde. Cela peut être démontré en admettant que  $\partial h / \partial x = 0$  à la crête de l'onde (voir Fig. II.6). (en amont de la crête, où  $\partial h / \partial x > 0$ , la profondeur d'eau augmente, tandis qu'en aval, où  $\partial h / \partial x < 0$ , la profondeur d'eau diminue.) on utilise ensuite la relation en  $h$  et on écrit l'éq. II.37b comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 0 = C_D \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\text{II. 40})$$

La crête de l'onde est le point maximum de la relation entre  $h$  et  $x$ , qui donne  $\partial^2 h / \partial x^2 < 0$  à ce point. Le terme à droite de l'équation, éq. II.40, est alors négatif et représente le taux avec lequel la profondeur d'eau  $h$ , de l'onde diffusive décroît avec le temps (Dingman, 1984, p. 265 in Graf & Altinakar, 2000). Cela est schématiquement montré sur la Fig. II.6b.

- Pour calculer la valeur de l'atténuation, différentes approches, toutes approximatives, sont proposées par Forchheimer (1930, p. 299), Hayashi (1953) et Henderson (1966, p. 377). Une relation approximative et simple proposée par Jansen et al. (1979, p. 70) :

$$h = h_0 \exp(-k^2 C_D t) \sin[k(x - c'_k t)] \quad (\text{II. 41})$$

Où  $h_0$  est la profondeur d'eau initiale. L'onde est approximée par une fonction sinusoïdale qui décroît exponentiellement en se propageant en aval avec la célérité,  $c'_k$ .

- Le terme de dispersion dans l'éq. II.37 est négligeable si  $\partial^2 Q / \partial x^2$  ou/et  $Q / 2Bj_f$  (voir éq. II.39) sont faibles. La dernière condition implique que :

$$Q \ll 2Bj_f \quad (\text{II. 42})$$

Où l'on a, en utilisant la relation de Manning,  $V = K_s R_h^{2/3} j_f^{1/2}$ , pour un canal rectangulaire :

$$h^{5/3} \ll 2n j_f^{1/2} \quad (\text{II. 42a})$$

Cette relation montre que si la pente de fond,  $J_f$ , est :

- Importante, le terme de dispersion peut être éliminé ; l'onde diffusive est donc bien approximée par l'onde cinématique (voir éq. II.31, comparée avec éq. II.37a) ;
  - Faible, le terme de dispersion doit être conservé ; l'onde diffusive existe (voir éq. II.37a.).
- En régime permanent, le débit,  $Q$ , se calcule selon l'éq. II.13a par :

$$Q = C S \sqrt{R_h \left( j_f - \frac{\partial h}{\partial x} \right)} \quad (\text{II. 43})$$

D'où l'on remarque qu'une relation non univoque, en boucle (voir Fig. II.3a) existe. L'importance de la boucle est liée au coefficient de dispersion,  $C_D$ , éq. II.39, dans l'équation de l'onde diffusive, éq. II.37.

## II.5 Méthodes de résolution :

En négligeant les différents termes des équations qui régissent en fonction de leur importance par rapport à d'autres termes, plusieurs procédures analytiques ont été développées pour analyser les flux instables. Toutefois, si tous les termes doivent être utilisés dans l'analyse, donc les méthodes numériques doivent être utilisés. Les différentes méthodes sont les suivantes (Chaudhry, 2008):

1. Méthode des caractéristiques
2. Méthode des différences finies
3. Méthode des éléments finis

Dans la méthode des caractéristiques, les équations sont d'abord converties en forme caractéristique, qui sont ensuite résolues par un schéma de différences finies. Dans la méthode des différences finies, les dérivés partiels sont remplacés par des quotients de différences finies et les équations algébriques résultantes sont ensuite résolues pour déterminer les conditions transitoires. Dans la méthode des éléments finis, le système est divisé en un certain nombre d'éléments, et les équations différentielles partielles sont intégrées au niveau des points nodaux des éléments.

La méthode des éléments finis est dans les premières étapes pour l'application des canaux ouverts transitoires et ne sera pas examinée plus en détail ici. La méthode de caractéristiques échoue en raison de la convergence des courbes caractéristiques une fois qu'il se forme l'onde de choc. Par conséquent, l'onde de choc doit être isolée et traitée séparément dans les procédures de calcul. En utilisant les progrès réalisés dans la dynamique des gaz et le fait que les équations de la dynamique des gaz et les équations de Saint-Venant sont analogues, un certain nombre de schémas de différences finies ont été proposés dans lesquels il n'est pas nécessaire d'isoler l'onde de choc.

L'isolement d'une onde de choc dans les calculs automatiques est très lent et complexe, surtout si il y a plusieurs changements géométriques dans le système depuis la transmission et la réflexion de l'onde de choc à chaque changement doit être considéré. Par conséquent, il est hautement souhaitable de disposer d'une procédure de calcul dans laquelle aucun traitement spécial n'est requis s'il se forme de l'onde de choc au cours des conditions transitoires.

En fonction de l'approximation des différences finies utilisées pour remplacer les dérivées partielles, deux types différents de régimes de différences finies sont produits. Si les approximations de différences finies pour les dérivés spatiaux (exemple, dérivés partiels qui respectent à  $x$ ) sont en termes de quantités au niveau de temps connu, alors les équations résultantes peuvent être directement résolues pour chaque nœud de calcul une fois à la fois. En d'autres termes, les variables inconnues sont explicitement exprimées en termes de méthodes des variables. Ces méthodes sont désignées comme méthodes explicites. Dans les procédés implicites, les approximations de différences finies pour les dérivées spatiales sont en termes de variables inconnues, et les équations algébriques pour l'ensemble du système doivent être résolus simultanément.

### II.5.1 Les caractéristiques :

- pour les équations de saint-Venant, éq. II.8 et éq. II.10, on n'obtient souvent pas de solution analytique, sauf dans certains cas simples. D'autres techniques s'imposent alors, comme la méthode des caractéristiques.
- Pour un canal rectangulaire, les équations de Saint-Venant sont (Graf & Altinakar, 2000):

$$h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 8})$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = j_f - j_e \quad (\text{II. 10})$$

Avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt = dh \quad (\text{II. 44})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt = dV \quad (\text{II. 45})$$

Où l'éq. II.44 et l'éq. II.45 sont les différentielles totales de la profondeur d'eau,  $dh$ , et de la vitesse moyenne,  $dV$ , respectivement.

Le système d'équations, éq. II.9 à éq. II.45, proposé par Massau (voir Chow, 1959, p. 587 in Graf & Altinakar, 2000) donne un jeu de quatre équations aux dérivées partielles avec quatre inconnues :  $\partial h/\partial x$ ,  $\partial h/\partial t$ ,  $\partial V/\partial x$ ,  $\partial V/\partial t$ .

- Si l'on exprime la profondeur d'eau,  $h$ , par la célérité d'onde,  $c$ , on écrira :

$$c^2 = gh \quad (\text{I. 19})$$

Et par conséquent, après différentiation :

$$d(c^2) = 2c dc = d(gh)$$

La célérité,  $c$ , devient ainsi une mesure de la profondeur d'eau,  $h$ .

- Les équations de Saint –Venant s'écrivent (Stoker, 1975, p. 470 in Graf & Altinakar, 2000) dans le système de variables,  $V$  et  $c$  :

$$c \frac{\partial V}{\partial x} + 2V \frac{\partial c}{\partial x} + 2 \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 46})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = g(j_f - j_e) \quad (\text{II. 47})$$

- En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on obtient un système équivalent dont la forme est la suivante :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (V + c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (V + 2c) = g(j_f - j_e) \quad (\text{II. 48})$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (V - c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (V - 2c) = g(j_f - j_e)$$

Les arguments de gauche peuvent représenter des dérivées totales ; on peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (V + 2c) = g(j_f - j_e) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} (V - 2c) = g(j_f - j_e) \quad (\text{II. 49})$$

$$\text{avec} \quad (V + c) = \frac{dx}{dt} \quad , \quad (V - c) = \frac{dx}{dt} \quad (\text{II. 49a})$$

La dernière relation, éq. 2.49a, est la célérité absolue définie ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = c_w = (V \pm c) \quad (\text{I. 22})$$

Qui représente la vitesse par rapport au sol. Le double signe indique qu'une propagation en amont et en aval est possible.

Les quatre équations, éq. II.49 et éq. II.49a, forment le système d'équations aux dérivées totales des caractéristiques ; elles remplacent les deux équations aux dérivées partielles de Saint-Venant, éq. II.8 et éq. II.10.

- A condition qu'on (un observateur) suive les courbes définies par  $\partial x / \partial t = (V \pm c)$ , les équations précédentes — en admettant que le canal soit sans frottement et horizontal, alors  $(j_f - j_e) = 0$  — prennent des formes simples :

$$V + 2c = \text{Cte} \quad \text{sur les caractéristiques positives, } C^+, \text{ définies par}$$

$$\frac{dx}{dt} = (V + c)$$

$$V - 2c = \text{Cte} \quad \text{sur les caractéristiques positives, } C^-, \text{ définies par}$$

$$\frac{dx}{dt} = (V - c)$$

Les courbes caractéristiques,  $C^+$ , et  $C^-$ , peuvent être tracées sur un plan,  $x$  et  $t$  (voir Fig. II.7)

### II.5.2 Méthodes des caractéristiques :

- Les quarts équations différentielles ordinaires, éq. II.49, peuvent (Viessman et al., 1972, p. 194 in Graf & Altinakar, 2000) être écrites ainsi :

$$\left. \begin{aligned} dV + \sqrt{g/h} dh + dt[g(j_e - j_f)] &= 0 \\ dx &= (V + \sqrt{gh})dt \end{aligned} \right\} c^+$$

$$\begin{aligned}
 dV - \sqrt{g/h} dh + dt[g(j_e - j_f)] &= 0 \\
 dx = (V - \sqrt{gh})dt &
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} dV - \sqrt{g/h} dh + dt[g(j_e - j_f)] &= 0 \\ dx = (V - \sqrt{gh})dt & \end{aligned}} \right\} c^- \tag{II.50}$$

Une solution aux éq. II.50 peut être établie de façon numérique ; elle donne la description d'un mouvement non permanent d'une position à l'autre dans un canal.

- Les courbes données par  $dx = (V \pm \sqrt{gh})dt$ , sont les courbes caractéristiques positives,  $C^+$ , et négatives,  $C^-$ , issues des points communs,  $L(x_L, t_L)$  et  $R(x_R, t_R)$ , où sont données les vitesses,  $V_L$  et  $V_R$ , et les profondeurs d'eau,  $h_L$  et  $h_R$ .

Donc, en résolvant les équations pour  $V$  et  $h$  en différents points,  $P, P_1, P_2$ , etc., communs à deux courbes caractéristiques à travers le plans,  $x$  et  $t$ . on obtiendra le mouvement non permanent de l'écoulement.

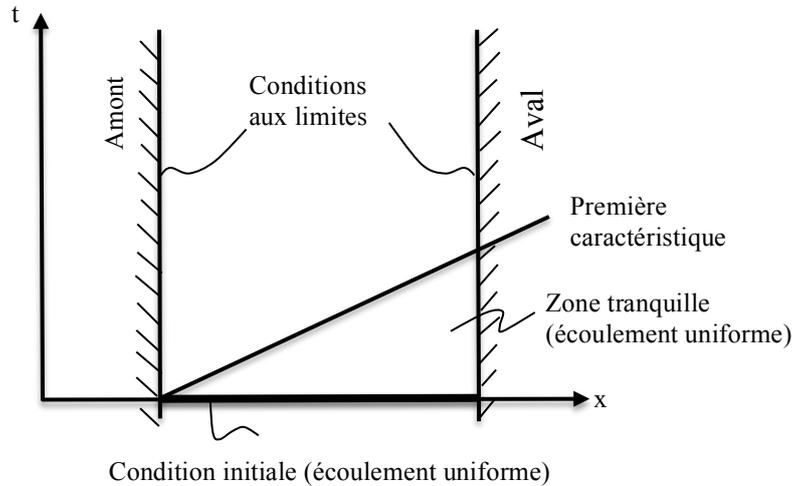


Fig. II.7 : Schéma des caractéristiques (écoulement subcritique) : Conditions aux limites.

- En substituant des différences finies aux différentielles (Viessman et al., 1972, p. 195 in Graf & Altinakar, 2000), les éqs. II.50 s'écrivent :

$$(V_P - V_L) + \sqrt{g/h_L} (h_P - h_L) + (t_P - t_L)[g(j_{eL} - j_f)] = 0 \tag{II.51a}$$

$$(x_P - x_L) = (V_L + \sqrt{gh_L})(t_P - t_L) \tag{II.51b}$$

$$(V_P - V_R) + \sqrt{g/h_R} (h_P - h_R) + (t_P - t_R)[g(j_{eR} - j_f)] = 0 \tag{II.51c}$$

$$(x_P - x_R) = (V_R + \sqrt{gh_R})(t_P - t_R) \tag{II.51d}$$

Il y a quatre inconnues :  $x_p$ ,  $t_p$  et  $V_p$ ,  $h_p$ .

- On obtient d'abord le temps,  $t_p$ , en éliminant  $x_p$  entre l'éq. II.51b et l'éq. II.51d :

$$t_p = \frac{(x_L - x_R) + t_R(V_R + \sqrt{gh_R}) - t_L(V_L + \sqrt{gh_L})}{(V_R + V_L) - (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R})} \quad (\text{II. 52})$$

- On obtient ensuite la distance,  $x_p$ , par l'éq. II.51b :

$$x_p = x_L + (V_L + \sqrt{gh_L})(t_p - t_L) \quad (\text{II. 53})$$

La position du point,  $P(x_p, t_p)$ , est ainsi obtenue.

- On obtient la profondeur d'eau,  $h_p$ , au point, P, en éliminant  $V_p$  entre l'éq. II.51a et l'éq. II.51c :

$$h_p = \{(V_R + V_L) - (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) - (t_p - t_L)[g(j_{eL} - j_f)] + (t_p - t_R)[g(j_{eR} - j_f)]\}[\sqrt{g/h_L} + \sqrt{g/h_R}]^{-1} \quad (\text{II. 54})$$

- On obtient ensuite la vitesse moyenne,  $V_p$ , à travers la profondeur d'eau à ce point, P, par l'éq. II.51a :

$$V_p = V_L - \sqrt{\frac{g}{h_L}}(h_p - h_L) + (t_p - t_L)[g(j_{eL} - j_f)] \quad (\text{II. 55})$$

Ainsi sont obtenues la vitesse et la profondeur d'eau,  $V_p$  et  $h_p$ , au point  $P(x_p, t_p)$ .

- Cette méthode permet de calculer explicitement la vitesse,  $V_p$ , et la profondeur,  $h_p$ , en tout point du réseau plan, x et t.

Par exemple, par un choix (condition initiales) des points discrétisés (1, 2, 3, etc.) sur la ligne du temps,  $t = 0$ , il est possible de calculer une autre série de points (11, 12, 13, etc.) à un temps ultérieur. Une autre série de points (101, 104, ... également L et R) est ensuite calculée en utilisant les points actuellement connus (11, 12, ect.). Ce type de calcul peut aussi se répéter.

- Avant de commencer le calcul, il faut évidemment spécifier les conditions aux limites et initiale (voir Fig. II.7).

La condition initial donne la profondeur d'eau, la vitesse moyenne ou le débit à tous les points dans le canal au temps  $t = 0$ . (On admet souvent qu'initialement l'écoulement est uniforme,  $h \equiv h_n$ ).

Les conditions aux limites dépendent de la profondeur d'eau, de la vitesse moyenne ou du débit à l'amont et à l'aval du canal à tous les temps,  $t > 0$ . Pour l'écoulement subcritique, deux conditions sont donc nécessaires, l'une à l'amont et l'autre à l'aval ; pour l'écoulement supercritique, deux conditions sont nécessaires en amont par ce que l'effet en aval ne peut pas se propager vers l'amont. (En amont, on admet souvent un hydrogramme,  $h = f(t)$  ou  $V = f(t)$ , ou également une relation de type  $V = f(h)$ . en aval, on peut

admettre une section de contrôle, par exemple la profondeur critique,  $h_c$ , ou une jonction avec un autre canal.).

Le choix des conditions aux limites et initiale va évidemment encadrer chaque problème physique (Cunge et al., 1980, p.29, et Abbott et Basco, 1989, p. 208 in Graf & Altinakar, 2000).

- La méthode des caractéristiques donnée ici n'est pas valable pour les problèmes où une discontinuité (par ex. : ressaut hydraulique) se présente. Dans ce cas, les équations de Saint-Venant ne sont pas valables par ce que la courbure des lignes d'écoulement est trop importante et que la pression n'est plus hydrostatique, en présence de discontinuité dans l'écoulement, des méthodes spéciales doivent donc être employées (Cunge et al., 1980, p, 37 et p, 57 in Graf & Altinakar, 2000).
- La méthode des caractéristiques est une méthode avec un schéma explicite, cela veut dire : si un certain temps,  $t = t_1$ , toutes les valeurs,  $h$  et  $V$ , sont connues ; alors, a un temps,  $t = t_1 + \Delta t$ , toutes les valeurs,  $h$  et  $V$  peuvent être déterminées directement ou explicitement avec les équations caractéristiques, éq. II.49.

Un tel schéma explicite est stable tant que la condition de courant :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(V + c)} \quad (\text{II. 56})$$

Est satisfaite. Une telle condition, une fois que  $\Delta x$  est fixé, peut être très limitative, puisqu'elle impose une borne supérieure au choix de  $\Delta t$ .

- Des applications de la méthode des caractéristiques sont données par Viessman et al. (1972, p. 198-207), Streeter (1971, p. 690) et Abbott (1979). Pour un développement approfondi de la méthode des caractéristiques, on consultera Abbott (1979) ou Liggett et Cunge (1975).

## II.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations de mouvement tel que l'équation de Saint Venant. Ce système est un ensemble d'équations différentielles aux dérivées partielles hyperbolique. Alors pour le résoudre, il est nécessaire d'utiliser des approximations de Saint Venant 1D se présentées dans le prochaine chapitre.

## Chapitre III : Discrétisation numérique

### III.1 Introduction :

La recherche des méthodes numériques les plus adaptées à la simulation des problèmes d'écoulement de l'eau à surface libre est l'un des sujets les plus actifs en mathématiques appliquées, mécanique des fluides et hydraulique. En utilisant la simulation et l'analyse numérique de quelques modèles simplifiés appropriés, les scientifiques obtiennent de nombreuses informations significatives pour les phénomènes complexes associés aux écoulements à surface libre.

Diverses méthodes numériques ont été par la suite développées dans ce contexte, et qui sont classées en quatre principales catégories :

- Méthode des éléments finis
- Méthode des caractéristiques
- Méthode des éléments intégrables aux frontières (M.E.F)
- Méthode aux différences finies (M.D.F)

La méthode des différences finies classiques est une méthode bien connue dans le cadre de l'hydraulique urbaine. Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée.

Il existe trois approches de méthodes qui permettent à l'ingénieur de résoudre un problème physique donné :

- L'approche expérimentale.
- L'approche théorique.
- L'approche numérique.

Cette dernière utilise un nombre d'hypothèses et nécessite un ordinateur pour résoudre les équations qui régissent le système physique.

Notons que les limites des méthodes numériques sont liées à la capacité de stockage et à la vitesse d'exécution du ordinateur, cet inconvénient est surmontable avec l'avancée importante des moyens de calcul.

La difficulté majeure de cette méthode réside dans la capacité de l'ingénieur à comprendre et formuler mathématiquement certains phénomènes physiques complexes.

Les méthodes couramment utilisées restent cependant les méthodes des différences finies et des éléments finis. Selon les constats faits par certains chercheurs, la méthode des différences finies est la mieux conseillée quand on traite un problème d'écoulement unidimensionnel.

## III.2 Méthodes de résolution :

### III.2.1 Méthodes des différences finies :

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation de dérivées de fonctions, considérées suffisamment régulières, sur un ensemble discret de points au moyen de quotients de deux différences (NECIB & KHOUALFIA 2013).

### III.2.2 Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour les études des structures à trois dimensions, car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet donc l'analyse des structures complexes (Zouaoui, 2004).

Le principe de cette méthode, consiste à subdiviser la structure étudiée en sous domaine, de forme relativement simple «éléments finis». L'approximation de la solution concernera l'élément constitutif et non pas la structure totale.

### III.2.3 Méthode des volumes finis :

Il s'agit d'une méthode de formulation intégrale dans l'espace physique des lois de conservation. Bien qu'elle ne soit pas fondamentalement différente aux méthodes aux différences finies ou aux éléments finis, il est d'usage de la considérer à part, parce qu'elle trouve un domaine d'application tout à fait spécifique (Zouaoui, 2004).

## III.3 Méthodes des différences finies :

### III.3.1 Principe :

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine en remplaçant l'opérateur différentielle par un opérateur aux différences finies (Figure III.1) (Absi & Retieb, 1994), (Berriksi & Bouhadji, 1993), (Berriksi, 1998), (Oukacha & Lecheheb, 1996), (Zouaoui, 2004).

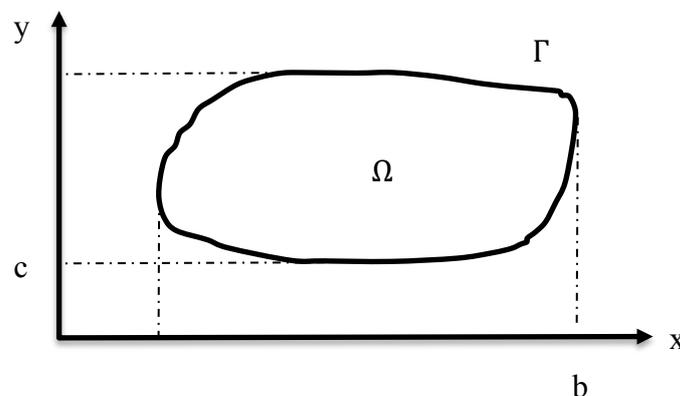


Figure III.1 : Définition d'un domaine.

En d'autres termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau (appelé aussi maillage ou grille) (Figure III-2).

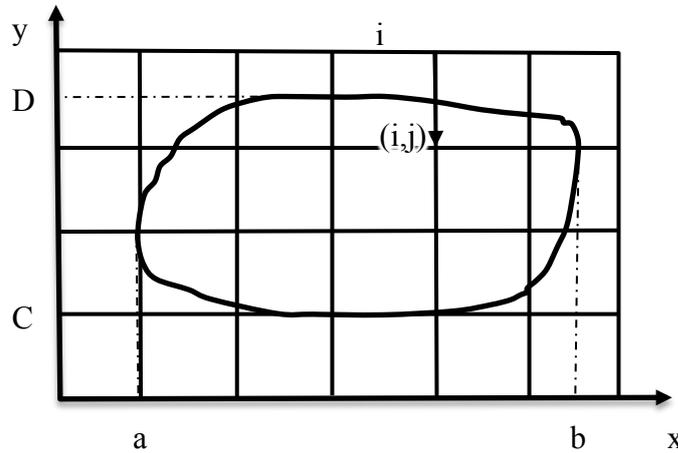


Figure III.2 : Maillage élémentaire.

- **Cas d'une approximation à une dimension :**

Soit  $f$  une fonction continue différentiable, on écrit :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{Où} \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (\text{III. 1})$$

Avec,  $f_i = f(x_i)$  et  $x_i = (i - 1)\Delta x$

Dans les différenciations ci-dessus, on a utilisé respectivement une différence avant et une différence arrière.

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide du développement en série de Taylor de la fonction  $f$  :

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\Delta x \partial f}{1! \partial x} \Big|_x + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 f}{2! \partial x^2} \Big|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1} \partial^{n-1} f}{(n-1)! \partial x^{n-1}} \Big|_x + R_p \quad (\text{III. 2})$$

Où, le reste  $R_n$  est de l'ordre de  $\|\Delta x\|^p$ , ce que l'on note habituellement :

$R_p = O(\|\Delta x\|^p)$  Avec  $p$ , représente l'ordre d'approximation.

• **Cas d'une approximation à plusieurs dimensions :**

La méthode peut être aisément étendue au cas où la fonction (f) considérée dépend de deux ou plusieurs variables.

Ainsi, si f dépend par exemple de deux variables (x, y) ; et si dans le plan oxy, on trace une série de droites parallèle aux axes déterminant de la sorte un réseau de points (i,j) (Figure III.3) auxquels correspondent les coordonnées de la fonction inconnue , on peut écrire pour les différences centrales :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{cases} \quad (\text{III. 3})$$

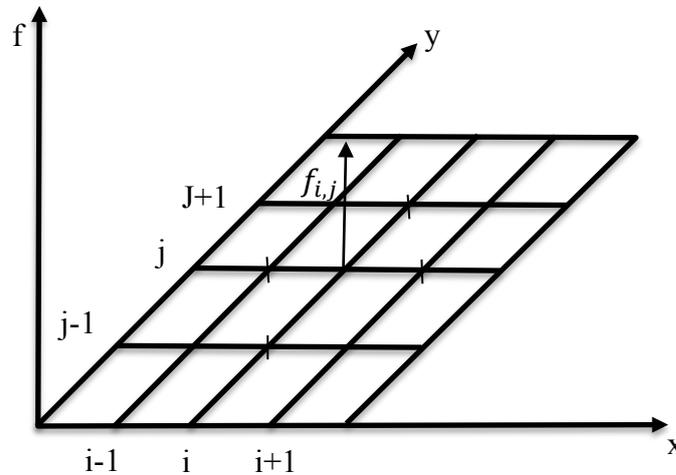


Figure III.3 : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables.

D'une manière similaire, pour les dérivées de second ordre, on a :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\ \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) - (f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1})}{4(\Delta x \Delta y)} \end{cases} \quad (\text{III. 4})$$

$\Delta x, \Delta y$  : Pas d'espace suivant les directions (x,y) respectivement.

### III.4 Analyse de l'approximation :

#### III.4.1 Erreur de troncature :

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction  $f$ .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'un pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

#### III.4.2 La consistance d'un schéma aux différences finies :

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu, c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement.

La « qualité » de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

#### III.4.3 La stabilité :

Un schéma numérique est dit stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé.

#### III.4.4 La convergence :

Un schéma est dit convergent quand la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue.

Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent.

### III.5 Différent schémas :

#### III.5.1 Schéma explicite, schéma implicite :

Un schéma est explicite, si chaque valeur approchée de la solution au temps  $t + \Delta t$  et au point  $x$  donné, est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps  $t$  en ce même point. Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées et s'obtient directement pour tous les points du maillage (FENNEMA & CHAUDHRY 1987), (Berreksi & Bouhadji, 1993), (COMOLET, 1982), (Traoure & Dialo, 2001).

Un schéma est implicite, si la valeur approchée en un point au temps  $t + \Delta t$ , est écrite en fonction de la solution précédente au temps  $t$ , et les valeurs voisines au temps  $t + \Delta t$ . Il s'agit donc d'une liaison, entre toutes les valeurs au temps  $t + \Delta t$ , qui se résout globalement.

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques schémas régulièrement utilisés afin d'opter pour le schéma qui sera utilisé comme moyen de résolution des équations.

### III.5.2 Les Schémas aux différences finies implicites :

Dans les méthodes implicites, la dérivée spatiale est remplacée par l'approximation aux différences finies (FENNEMA & CHAUDHRY, 1987), (Traoure & Dialo, 2001), (Zouaoui, 2004), (Chaudhry, 2008).

Plusieurs schémas différents ont été rapportés sur les approximations par différence finie et l'évaluation des coefficients des équations. Parmi les schémas implicites celui de Preissman a été très largement utilisé pour l'analyse des courants de surface libre instables.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{(V_i^{k+1} + V_{i+1}^{k+1}) - (V_i^k + V_{i+1}^k)}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha[V_{i+1}^{k+1} + V_i^{k+1}]}{\Delta x} + \frac{(1-\alpha)[V_{i+1}^k + V_i^k]}{\Delta x} \quad (\text{III. 5})$$

$$V(x, t) = \frac{\alpha[V_{i+1}^{k+1} + V_i^{k+1}]}{2} + (1-\alpha) \frac{[V_{i+1}^k + V_i^k]}{2}$$

### III.5.3 Les Schémas aux différences finies explicites :

Plusieurs schémas aux différences finies explicites aux seconds ordres ont été développés pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique qu'on rencontre toujours dans la dynamique des fluides (Berreksi & Bouhadji, 1993), (Traoure & Dialo, 2001).

On distingue principalement les trois schémas ci-dessous :

#### III.5.3.1 Schéma de Mac Cormack

Le schéma de Mac Cormack consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de prédiction et une autre de correction (Berreksi & Bouhadji, 1993), (Berreksi, 1998), (Oukacha & Lecheheb, 1996), (Traoure & Dialo, 2001), (Zenzane & Maamare, 2003), (Zouaoui, 2004), (CONSTANTINE & JHON, 1987), (Chaudhry, 2008).

Le but est de calculer les valeurs des variables de l'écoulement au pas de temps (n+1), sachant que leurs valeurs sont connues au temps n.

#### ➤ Etape de prédiction

$$\begin{cases} \tilde{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \beta_1 (F_{(i,j)+1}^n - F_{(i,j)}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)+1}^n - E_{(i,j)}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n \\ \tilde{V}_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \beta_1 (F_{(i,j)+1}^n - F_{(i,j)}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)+1}^n - E_{(i,j)}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

avec,  $2 \leq i \leq N$   
 $2 \leq j \leq M$

➤ **Etape de correction**

$$\begin{cases} \hat{U}_{(i,j)}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ U_{(i,j)}^n + \tilde{U}_{(i,j)}^n - \beta_1 (F_{(i,j)}^n - F_{(i,j)-1}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)+1}^n - E_{(i,j)}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n \right] \\ \hat{V}_{(i,j)}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ V_{(i,j)}^n + \tilde{V}_{(i,j)}^n - \beta_1 (F_{(i,j)+1}^n - F_{(i,j)}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)}^n - E_{(i,j)-1}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n \right] \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

avec,  $2 \leq i \leq N-1$   
 $2 \leq j \leq M-1$

où,  $\beta_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et  $\beta_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}$  avec  $\Delta t =$  pas de temps et  $\Delta x, \Delta y =$  pas de

discrétisation de l'espace ;  $i, j$  et  $n$  indiquent les valeurs respectives des variables d'un nœud au point d'indice  $(i,j,n)$  sur le plan  $(x,y,t)$  avec les coordonnées  $x_i, y_j$  et  $t$ .

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)\Delta x & \text{Pour } i=1,2,\dots; \\ y_j &= (j-1)\Delta y & \text{Pour } j=1,2,\dots; \\ t_n &= (n-1)\Delta t & \text{Pour } n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

### III.5.3.2 Schéma de Gabutti :

Après avoir testé le schéma de Lambda, Gabutti remarqua que celui-ci ne donne pas d'assez de bons résultats et ne peut par conséquent être utilisé dans tous les cas (Berreksi & Bouhadji, 1993), (Berreksi, 1998), (Oukacha & Lecheheb, 1996), (Traoure & Dialo, 2001), (Zenzane & Maamare, 2003), (Zouaoui, 2004), (BRUNO, 1983), (Hunt, 1987).

Pour corriger cette insuffisance, Gabutti proposa un schéma dit "schéma de Gabutti" qui est d'un côté similaire à celui de Lambda, dans la procédure de développement des équations, qui doivent être écrites sous une forme non conservatrice, et qui utilise aussi largement la théorie des caractéristiques, mais d'un autre côté diffère de celui-ci dans l'approximation des dérivées partielles par des différences finies.

Le schéma de Gabutti qui est aussi précis à l'ordre deux, a la particularité d'effectuer deux étapes de prédiction et une étape de correction.

L'algorithme de schéma donne :

➤ **Etape de prédiction**

#### Partie A

$$\begin{aligned} \tilde{V}_x^+ &= \frac{V_{i,j}^k - V_{(i-1),j}^k}{\Delta x} & \text{Pour } \lambda > 0 \\ \tilde{V}_x^- &= \frac{V_{(i+1),j}^k - V_{i,j}^k}{\Delta x} & \text{Pour } \lambda > 0 \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_y^+ &= \frac{V_{i,j}^1 - V_{i,(j-1)}^1}{\Delta y} & \text{Pour } \omega < 0 \\ \tilde{V}_y^- &= \frac{V_{i,(j+1)}^1 - V_{i,j}^1}{\Delta y} & \text{Pour } \omega < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

**Parie B**

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_x^+ = \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{(i-1),j}^k + V_{(i-2),j}^k}{\Delta x} \quad \text{Pour } \lambda > 0 \\ \bar{V}_x^- = \frac{-2V_{i,j}^k + 3V_{(i+1),j}^k - V_{(i+2),j}^k}{\Delta x} \quad \text{pour } \lambda > 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.11})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_y^+ = \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} \quad \text{Pour } \omega < 0 \\ \bar{V}_y^- = \frac{-2V_{i,j}^k + 3V_{i,(j+1)}^k - V_{i,(j+2)}^k}{\Delta y} \quad \text{Pour } \omega < 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

**➤ Etape de correction**

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_x^+ = \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{(i-1),j}}{\Delta x} \quad \text{Pour } \lambda > 0 \\ \hat{V}_x^- = \frac{\tilde{V}_{(i+1),j} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta x} \quad \text{Pour } \lambda > 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_y^+ = \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta y} \quad \text{Pour } \omega < 0 \\ \hat{V}_y^- = \frac{\tilde{V}_{i,(j-1)} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta y} \quad \text{Pour } \omega < 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

Les solutions au pas de temps  $k+1$  sont données par :

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left( V_{i,j}^k + \bar{V}_{i,j} + \hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j} \right) \quad (\text{III.15})$$

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left( V_{i,j}^k + \bar{V}_{i,j} + \hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j} \right) \quad (\text{III.16})$$

**III.5.3.3 Schéma de Lax :**

Le schéma de Lax est très simple à programmer et donne des résultats satisfaisants. En outre, l'onde de choc n'a pas à être isolée dans les calculs. Cependant, la principale limitation de ce schéma est que de courts intervalles de temps peuvent être nécessaires pour la stabilité et fronts d'ondes raides peuvent être diffusés.

### III.5.4 Comparaison des schémas explicites et implicites :

Une comparaison entre les deux schémas nécessite au préalable une étude des différents schémas. Selon la comparaison faites par certains chercheurs, on retient les avantages et les inconvénients suivants (Chaudhry, 2008), (Traoure & Dialo, 2001):

- La méthode explicite exige une condition de stabilité sur le pas de temps tandis que la méthode implicite ne nécessite aucune.
- La souplesse de programmation offerte par la méthode explicite est beaucoup meilleure que celle offerte par la méthode implicite, surtout lorsque le temps de programmation est limité.
- L'économie de calcul est beaucoup plus importante pour un schéma implicite car il n'y a aucune restriction sur le pas de temps.
- Etant donné que le pas de temps dépend de chaque itération, les valeurs de cette dernière paraissent souvent très petites de sorte que les précisions sur les calculs sont meilleures.
- La méthode explicite est très conseillée dans le cas de problèmes de discontinuité. Dans ce qui suit, on s'intéressera plus particulièrement à la méthode de **Lax**, qui nous servira à résoudre les équations de Saint Venant

### III.5.5 Application du schéma de Lax aux équations de Saint-Venant :

Dans ce schéma, les dérivées partielles et les coefficients  $D$  et  $J_f$  des équations régissant sont estimés comme suit (Chaudhry, 2014) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{h_i^{k+1} - h_i^*}{\Delta t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{V_i^{k+1} - V_i^*}{\Delta t} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2\Delta x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta x}\end{aligned}\tag{III.17}$$

$$D_i^* = 0.5(D_{i-1}^k + D_{i+1}^k)$$

$$J_f^* = 0.5(J_{f_{i-1}}^k + J_{f_{i+1}}^k)$$

Dans lequel :

$$h_i^* = 0.5(h_{i-1}^k + h_{i+1}^k)\tag{III.18}$$

$$V_i^* = 0.5(V_{i-1}^k + V_{i+1}^k)$$

- **Forme de non conservation :**

En Remplacent les dérivées partielles des équations régissant (Eqs. III.19 et III.20) par ces approximations de différences finies et le coefficient D et la pente  $J_f$  par les expressions de l'éq. III.17

$$\frac{\partial h}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (\text{III. 19})$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = g(J_0 - J_f) \quad (\text{III. 20})$$

Et par simplification, on obtient :

$$h_i^{k+1} = h_i^* - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} D_i^* (V_{i+1}^k - V_{i-1}^k) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_i^* (h_{i+1}^k - h_{i-1}^k) \quad (\text{III. 21})$$

$$V_i^{k+1} = V_i^* - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} g (h_{i+1}^k - h_{i-1}^k) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} V_i^* (V_{i+1}^k - V_{i-1}^k) + g \Delta t (J_0 - J_f^*) \quad (\text{III.22})$$

Notez que les dérivés des équations de Saint-Venant sont remplacés par approximations de différences finies évaluées au temps  $t_0$  (Fig.III.4) et les coefficients, D et  $J_f$ , sont également évaluées au temps  $t_0$ . Ainsi, nous avons deux équations algébriques linéaires relatives des deux inconnues  $V_i^{k+1}$  et  $h_i^{k+1}$  au point (i, k+1) pour les conditions connues aux points (i-1, k), (i, k), et (i+1, k). En raison de cette relation explicite, la méthode est appelée méthode des différences finies explicite.

Il est clair (Fig.III.4) que les coordonnées des points (i, k +1), (i, k), (i-1, k), et (i+1, k) sont  $(x_0, t_0 + \Delta t)$ ,  $(x_0, t_0)$ ,  $(x_0 - \Delta x, t_0)$ , et  $(x_0 + \Delta x, t_0)$ , respectivement. En élargissant les termes des éqs.III.18 et III.19 dans la série Taylor, par exemple,  $h_i^{k+1} = h(x_0, t_0) + \Delta t \partial h / \partial t + [(\Delta t)^2 / 2!](\partial^2 h / \partial t^2)$ , et par la comparaison avec les éqs.III.19 et III.20, on peut montrer que cette différence schéma présente les termes de diffusion comme supplémentaires,  $\frac{1}{2} [(\Delta x)^2 / \Delta t](\partial^2 h / \partial x^2)$  et  $\frac{1}{2} [(\Delta x)^2 / \Delta t](\partial^2 V / \partial x^2)$ . Par conséquent, ce schéma est appelé schéma diffusive. Notez que les éqs. III.21 et III.22 sont pour les nœuds intérieurs seulement, c'est à dire, à  $i = 2, 3, \dots, n$ . Nœuds frontières besoin d'un traitement spécial.

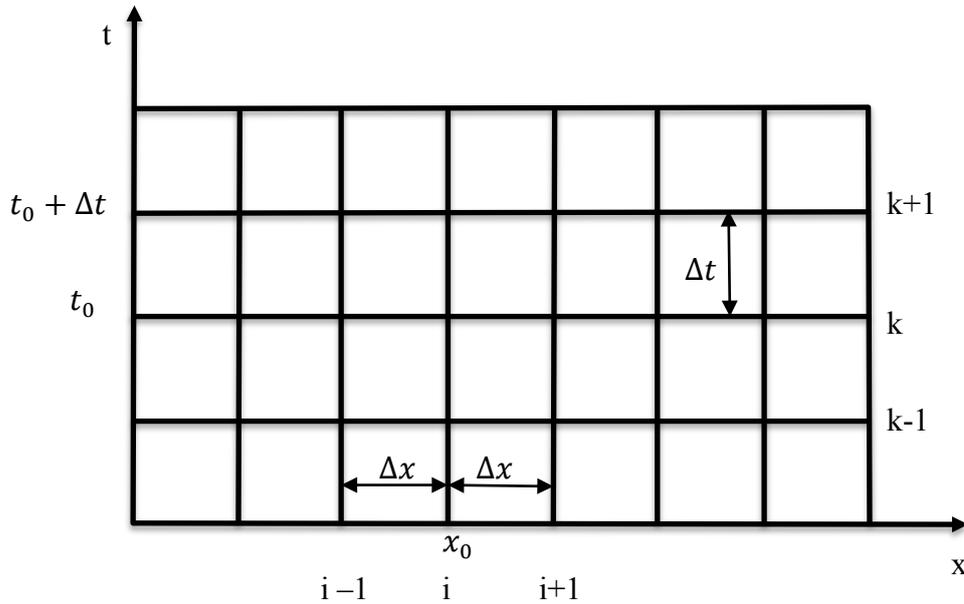


Fig.III.4 : Notation de grille de calcul.

- **Forme de conservation :**

La forme de la conservation des équations régissant sous la forme de la matrice peut être écrite comme, (Chaudhry, 2008):

$$U_t + F_x + S = 0 \quad (\text{III. 23})$$

Dans lequel :

$$U = \begin{pmatrix} A \\ VA \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} VA \\ V^2 + gA\bar{y} \end{pmatrix} ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(J_0 - J_f) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 24})$$

Et  $A\bar{y}$  = moment de la section d'écoulement sur la surface libre. Ce moment peut être calculée à partir de  $\int_0^{y(x)} [y(x) - \eta] \sigma(\eta) d\eta$  dans laquelle  $\sigma$  est la largeur de la surface de l'eau à une profondeur  $\eta$ . Le remplacement des approximations de différences finies de l'éq. III.17 dans l'éq. III.23 donne

$$U_i^{k+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1}^k + U_{i-1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^k - F_{i-1}^k) - J^* \Delta t \quad (\text{III. 25})$$

Une fois que les valeurs de A et VA ont été déterminées à la (k + 1) au niveau du temps, nous déterminons les valeurs des variables d'intérêt, h et V, puis on passe à prochaine étape de temps.

### III.5.5.1 Conditions aux limites :

En multipliant les équations. III.26 et III.27 par dt (Chaudhry, 2014) :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = g(J_0 - J_f) \quad (\text{III. 26})$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = g(J_0 - J_f) \quad (\text{III. 27})$$

Et en intégrant le long de la courbe caractéristique AP et BP, nous obtenons :

$$\int_A^P dV + \int_A^P \frac{g}{c} dy = \int_A^P g(J_0 - J_f) dt \quad (\text{III. 28})$$

et

$$\int_B^P dV - \int_B^P \frac{g}{c} dy = \int_B^P g(J_0 - J_f) dt \quad (\text{III. 29})$$

Notez que nous n'avons pas fait de rapprochement que ce soit dans la dérivation des éqs. III.28 et III.29. Cependant, les approximations sont nécessaires pour l'intégration des différents termes de ces équations, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants.

Pour évaluer les intégrales du second terme sur le côté gauche et le terme de droite des éq. III.28, la variation de V et h le long des courbes caractéristiques doivent être connues. Toutefois, V et h sont les inconnues que nous voulons calculer. Par conséquent, les intégrales de ces termes ne peuvent pas être directement calculé. Nous pouvons, cependant, d'intégrer ces termes en faisant une approximation. Par exemple, nous pouvons utiliser les valeurs de c et  $J_f$  calculé en utilisant les valeurs de V et h au niveau de temps connu, et supposer que ces valeurs calculées de c et  $J_f$  sont constants de A à P et de B à P (Fig. III-5). Par conséquent, les équations. III.28 peut être écrite comme :

$$V_P - V_A + \left(\frac{g}{c}\right)_A (h_P - h_A) = g(J_0 - J_f)_A \Delta t \quad (\text{III. 30})$$

et

$$V_P - V_B + \left(\frac{g}{c}\right)_B (h_P - h_B) = g(J_0 - J_f)_B \Delta t \quad (\text{III. 31})$$

Dans lequel les indices P, A, et B se réfèrent à des valeurs au niveau des points de la grille correspondantes dans le plan de x-t (Fig. III-5).

Supposons que les caractéristiques passent par le point adjacent de la grille au nœud limite. Comme on le verra dans les sections suivantes, des considérations de précision dictent que l'espacement de grille spatiale,  $\Delta x$ , et l'intervalle de temps,  $\Delta t$ , être choisis de telle sorte que les caractéristiques de passage aussi proche aux nœuds adjacents spatiales que possibles.

Pour utiliser les caractéristiques des équations dans le développement des conditions aux limites, nous allons utiliser la notation suivante: Un indice est utilisé pour

désigner le point de grille dans la direction x et un exposant pour désigner le point de grille dans la direction t. Par exemple,  $V_i^k$  se réfère à la vitesse d'écoulement à la i-ième section et à la k-ième niveau du temps (Fig. III-4). Le k exposant est utilisé pour le niveau de temps au cours de laquelle les conditions d'écoulement sont connus (dénommé le "niveau de temps connue") et exposant k + 1, pour le niveau de temps au cours de laquelle les conditions d'écoulement ne sont pas connus (dénommé "niveau de temps inconnu").

En utilisant cette notation et en combinant les quantités connues, les éqs. III.30 et III.31 peut être écrite comme :

$$V_i^{k+1} = C_p - C_{a_{i-1}} h_i^{k+1} \quad (\text{III. 32})$$

et

$$V_i^{k+1} = C_n + C_{a_{i+1}} h_i^{k+1} \quad (\text{III. 33})$$

Dans lequel

$$C_p = V_{i-1}^k + C_{a_{i-1}} h_{i-1}^k + g(J_0 - J_f)_{i-1} \Delta t$$

$$C_n = V_{i+1}^k - C_{a_{i+1}} h_{i+1}^k + g(J_0 - J_f)_{i+1} \Delta t \quad (\text{III. 34})$$

$$C_a = \frac{g}{c}$$

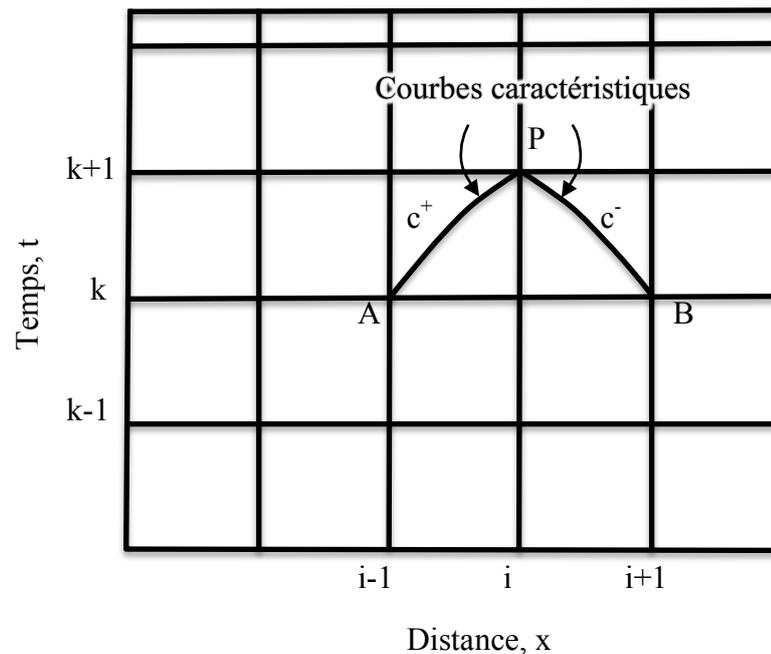


Fig.III.5 : Notation des équations caractéristiques positives et négatives.

Comme indiqué précédemment, les éqs. III.21 et III.22 sont utilisés pour déterminer les conditions dans les nœuds intérieurs. Aux frontières, toutefois, les conditions aux limites particulières sont développées en résolvant les équations caractéristiques positives ou négatives, ou les deux, en même temps que les conditions imposées par la frontière. L'équation caractéristique positive, l'éq. III.32, est utilisée pour une limite en aval, et l'équation caractéristique négative, éq. III.33, est utilisé pour une limite en amont.

Deux indices sont utilisés ici pour désigner les variables à différentes sections. Le premier indice désigne le canal, et la deuxième se rapporte au nombre de section. Par exemple, l'indice (i, 1) se réfère à la première section sur le canal i et l'indice (i, n + 1) est destiné à la dernière section de l'i-ième canal divisé en n atteint. Notez que k + 1 en exposant désigne les quantités inconnues au temps  $t_0 + \Delta t$  (Fig.III.4). Quatre conditions aux limites communs sont dérivés dans cette section ; d'autres conditions aux limites peuvent être développées de façon similaire.

### III.5.5 2 Charge constant en amont du réservoir :

Si la perte d'entrée au niveau du réservoir est  $C_u(V_{i,1}^{k+1})^2 / (2g)$ , alors, se référant à la Fig. III-6a, (Chaudhry, 2014)

$$h_{res} = h_{i,1}^{k+1} + (1 + C_u) \frac{(V_{i,1}^{k+1})^2}{2g} \quad (\text{III. 35})$$

En remplaçant  $h_{i,1}^{k+1}$  de l'équation. III-33 dans l'éq. III.35 et pour résoudre  $V_{i,1}^{k+1}$ , on obtient :

$$V_{i,1}^{k+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4C_r(C_n + C_a y_{res})}}{2C_r} \quad (\text{III. 36})$$

Dans lequel

$$C_r = C_a(1 + C_u)/(2g) \quad (\text{III. 37})$$

Maintenant  $h_{i,1}^{k+1}$  peut être déterminé à partir de l'éq. III.33.

Si les pertes de charge et la tête de vitesse à l'entrée du canal sont négligeable, alors  $h_{i,1}^{k+1} = h_{res}$  et  $V_{i,1}^{k+1}$  peut être calculée à partir de l'éq. III.33. Notez que l'éqs. III.35 et III.36 sont valables pour les flux positifs seulement; équations similaires peut être écrite pour les flux négatifs.

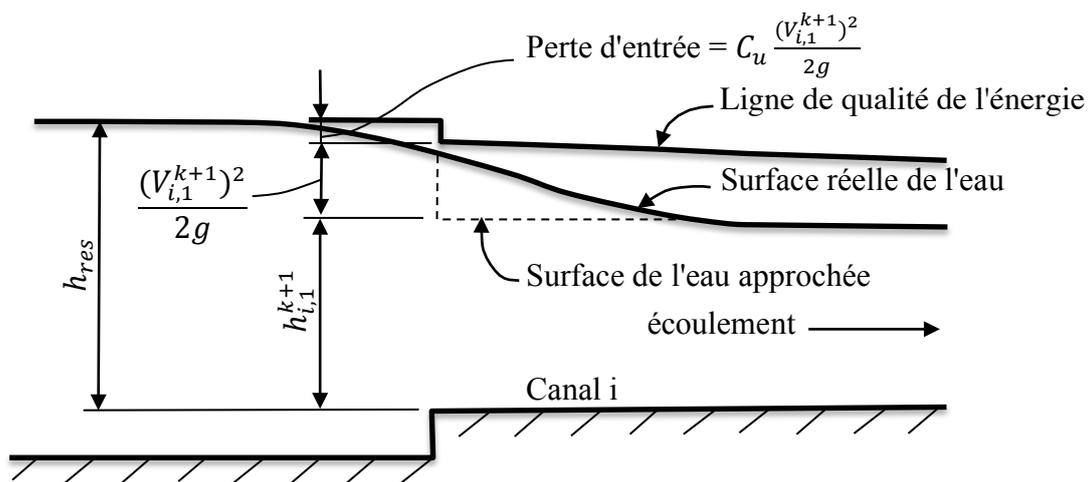


Fig. III.6a : Notation des conditions aux limites (Réservoir en amont).

### Remarque:

On néglige l'énergie cinétique et les pertes des charges singulières.

### III.5.5.3 Charge constant en amont du réservoir :

Si la perte de charge à l'entrée du réservoir est  $C_v (V_{i,n+1}^{k+1})^2 / (2g)$ , alors, se référant à la Fig. III-6b, (Chaudhry, 2014)

$$h_{i,n+1}^{k+1} = h_{res} - \frac{(1 - C_v)(V_{i,n+1}^{k+1})^2}{2g} \quad (\text{III. 38})$$

Dans lequel  $h_{res}$  = profondeur du réservoir au-dessus du fond du canal, et  $C_v$  = coefficient de la perte d'entrée. La solution simultanée des éqs. III.32 et III.38 donne

$$V_{i,n+1}^{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_r(C_p + C_a y_{res})}}{2C_r} \quad (\text{III. 39})$$

Dans lequel  $C_r = C_a(1 - C_v)/(2g)$

Si la vitesse d'écoulement est perdue à l'entrée du réservoir, alors  $C_v = 1$ , et l'équation. III.39 ne peut être utilisé car il en résulte à une division par zéro. Dans un tel cas, l'équation suivante peut être utilisée:

$$h_{i,n+1}^{k+1} = h_{res} \quad (\text{III. 40})$$

$V_{i,n+1}^{k+1}$  est alors déterminée à partir de l'équation. III.32.

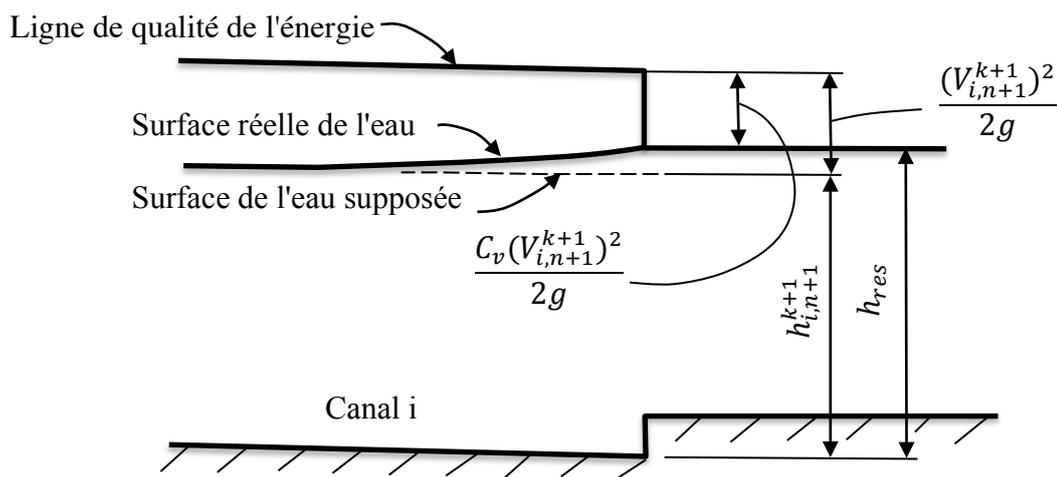


Fig. III.6b : Notation des conditions aux limites (Réservoir en aval).

#### III.5.5.4 Décharge spécifiée à la fin du canal :

Le décharge peut être modifiée à l'amont ou à l'aval de l'extrémité du canal en raison de l'acceptation ou du rejet de la charge par des turbines hydrauliques, démarrage ou arrêt des pompes, ou l'ouverture ou la fermeture des portes de contrôle; ou, il peut être constant en fonction du temps, (Chaudhry, 2014).

La décharge au niveau des extrémités des canaux peut être spécifiée à des temps discrets sous forme de tableau ou sous forme de fonction du temps, c'est à dire,  $Q = Q(t)$ . Ainsi, la décharge  $Q_{i,j}^{k+1}$  à la fin du pas de temps est connue. Maintenant,

$$Q_{i,j}^{k+1} = A(h_{i,j}^{k+1})V_{i,j}^{k+1} = Q(t^{k+1}) \quad (\text{III. 41})$$

Dans laquelle  $A(h_{i,j}^{k+1})$  dénote la zone d'écoulement en profondeur  $h_{i,j}^{k+1}$  et  $Q(t^{k+1})$  désigne la décharge à temps  $t^{k+1}$  et la section (i, j) désigne les sections à l'amont ou à l'extrémité aval du canal. Pour déterminer  $h_{i,j}^{k+1}$  et  $V_{i,j}^{k+1}$ , l'éqs. III.32 et III.41 sont résolus par une procédure itérative pour l'extrémité en aval et l'éqs. III.33 et III.41, pour l'extrémité en amont.

#### III.5.5.5 Stabilité :

Le schéma de différences finies présentée ci-dessus est dite stable si de petites erreurs numériques dues à l'arrondi introduites au temps  $t_0$  ne sont pas amplifiées au cours des applications successives des équations aux différences, et l'erreur au temps suivant ne poussent pas assez grande pour masquer la partie valide de la solution. En utilisant la technique présentée par Courant et al. [1928], il a été démontré que le schéma diffusif de Lax est stable si (Chaudhry, 2008):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V| \pm c} \quad (\text{III. 42})$$

C'est ce qu'on appelle la condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou tout simplement la condition de Courant.

### III.5.5.6 Procédure de calcul :

Pour déterminer les conditions transitoires, (Chaudhry, 2014) le canal est divisé en  $n$  tronçons de longueur égale; la première section est numérotée 1, et donc la dernière section est  $n + 1$  (voir Fig. III.7). Les conditions à l'équilibre initial (c'est-à-dire,  $V$ ,  $y$  et  $Q$ ) à ces sections sont calculés. Le pas de temps,  $\Delta t$  est choisi de telle sorte que l'éq. III.42 est satisfaite. L'éqs III.21 et III.22 sont utilisés pour déterminer  $h_i^{k+1}$  et  $V_i^{k+1}$  de la sections 2 à  $n$ , et les conditions aux limites appropriées sont utilisés pour calculons  $V_i^{k+1}$  et  $h_i^{k+1}$  à l'amont et à les extrémités aval, c'est-à-dire au niveau des sections 1 et  $n + 1$ . Ainsi,  $h_i^{k+1}$  et  $V_i^{k+1}$  au temps  $t = \Delta t$ , sont connus à toutes les sections, et la valeur de  $Q_i^{k+1}$  est calculé en multipliant  $V_i^{k+1}$  par la section d'écoulement correspondant à  $h_i^{k+1}$ . Maintenant, en supposant que les valeurs calculées de  $V_i^{k+1}$ ,  $h_i^{k+1}$ , et  $Q_i^{k+1}$  en tant que  $V_i^k$ ,  $h_i^k$ , et  $Q_i^k$ , les valeurs de  $h_i^{k+1}$  et  $V_i^{k+1}$  au temps  $2\Delta t$  sont calculées. Cette procédure est poursuivie jusqu'à ce que les conditions transitoires pendant le temps nécessaire soient calculées.

S'il existe deux ou plusieurs canaux dans le système, alors le pas de temps  $\Delta t$  est choisi pour le plus court canal, et chaque canal restant est divisé en tronçons de longueur égale de telle sorte que l'éq. III.42 est satisfaite.

Il est nécessaire que la condition de stabilité de Courant (eq. III.42) est satisfait à tous les points de la grille à chaque pas de temps. Si elle n'est pas satisfaite, alors le pas de temps est réduite (par exemple, de 0,75 de la valeur précédente), et les conditions à la fin du pas de temps est recalculé avant d'incrémenter le temps. Pour éviter de faire  $\Delta t$  trop petit dans ce processus, sa valeur actuelle est comparée à chaque pas de temps à la valeur requise pour la stabilité, et si cela est permis,  $\Delta t$  est augmenté (par exemple, par 15 pour cent) pour le pas de temps suivant.

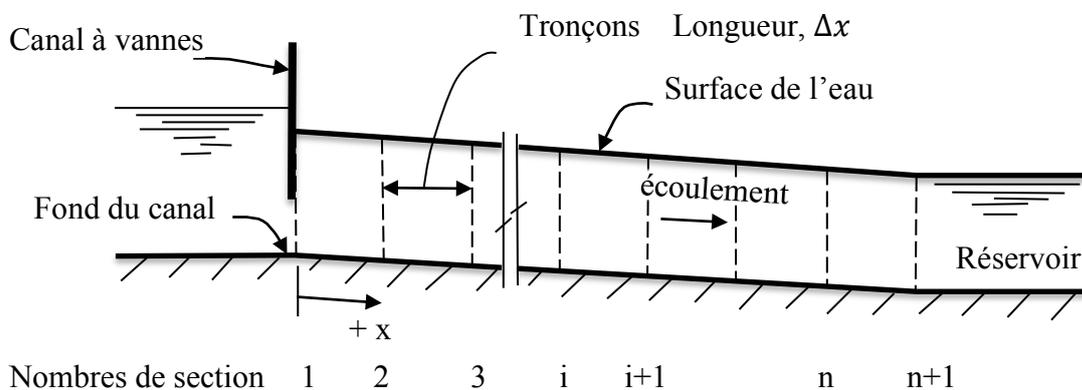


Fig. III.7 : Division du canal en  $n$  tronçons.

### III.6 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre les étapes de discrétisation du système de Barré de Saint-Venant 1-D par le biais de la méthode des différences finies qui consiste à remplacer les opérateurs différentiels par les opérateurs algébriques afin d'établir les expressions des paramètres de l'écoulement ( $h, u, v$ ). La simplicité de cette méthode facilite sa mise en application, toute fois, elle génère un temps de calcul assez long notamment pour le système bidimensionnel, de plus, elle présente souvent des problèmes de convergence, en particulier pour les schémas explicites.

## Chapitre IV : Applications et expérimentations numériques

### IV.1 Introduction :

Après avoir réalisé la discrétisation du système de Saint-Venant en utilisant d'abord, la méthode des différences finies et par la suite, la méthode des caractéristiques, il est nécessaire de concrétiser cette démarche en un code de calcul qui a pour objectif, la simulation des écoulements à surface libre.

Dans le but de valider nos essais numériques, nous avons choisi le cas d'un canal rectangulaire. Pour ce type de section, on se permet d'obtenir une solution analytique directe la profondeur  $h$  et la vitesse  $V$  en toute section et à tout instant.

Puis nous nous sommes intéressés au cas de section trapézoïdal. Dans ce cas le calcul analytique n'est pas possible explicitement, le calcul numérique s'impose donc.

Enfin pour enrichir l'analyse, une étude paramétrique a été faite. Plusieurs paramètres (pente du fond, rugosité et nombre de Courant) ont fait l'objet de l'analyse.

Nous présentons dans ce qui suit les différents cas avec les résultats obtenus.

### IV.2 Application I :

Pour valider le modèle que nous avons proposé en utilisant le schéma de Lax ; nous nous servirons des travaux effectués par Fennema et Chaudhry (1986) et Chaudhry, M. H. (2008)

Dans cette première application "Chaudhry et Fennema (1986) « *Explicit numerical schemes for unsteady free surface flows with shocks* », le canal est de forme rectangulaire (Fig.VI.1) avec une rugosité  $n = 0.013$ . Initialement, le canal a un écoulement uniforme avec un débit  $Q = 150 \text{ m}^3/\text{s}$ , et la profondeur normale  $h_0 = 6\text{m}$ . L'installation que l'on se propose d'étudier est schématisée sur la figure (IV.1).

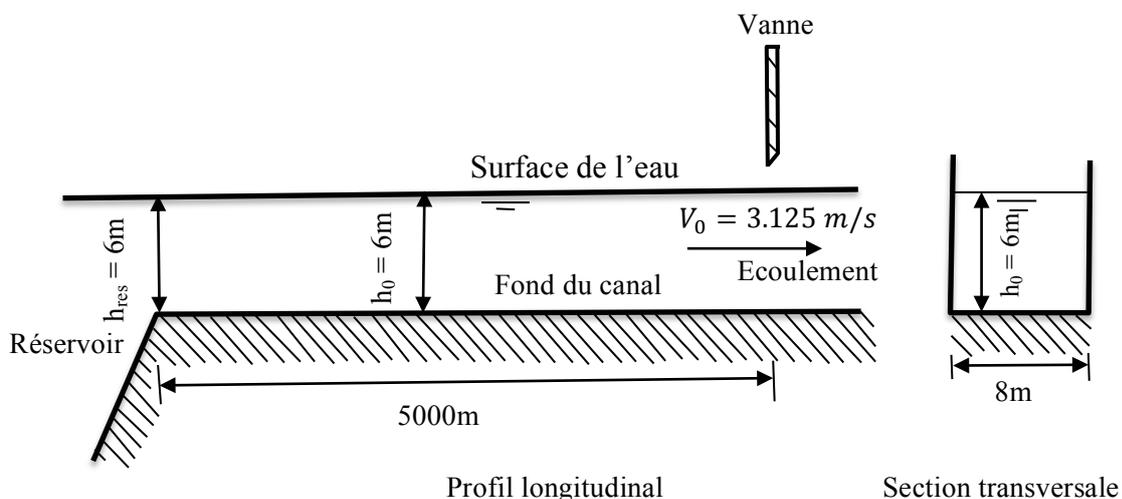


Fig. IV.1: les Données pour le canal rectangulaire.

Les données du canal simulé sont récapitulées dans Le tableau (IV.1) suivant:

Tableau (IV.1) : Données relatives à l'application I.

Longueur du canal L	5000 m
La largeur b	8 m
La rugosité n	0.013
Débit Q	150 m <sup>3</sup> /s
La profondeur d'écoulement h	6 m
N	100
Nombre de Courant C <sub>r</sub>	0.95

### Résultats :

Les résultats calculés pour le canal rectangulaire sont présentés dans les figures suivantes :

Les Figures (IV.2, IV.3) donnent le profil de la ligne (front d'onde) calculé par le schéma de Lax ainsi que les profils de la ligne d'eau déterminés numériquement par le modèle de MacCormack et de Gabutti (Fennema et Chaudhry, 1986).

Les profils déterminés par le présent modèle pour un temps,  $354 < t < 354 + \Delta t$ , et pour un coefficient de Manning  $n = 0.013$ .

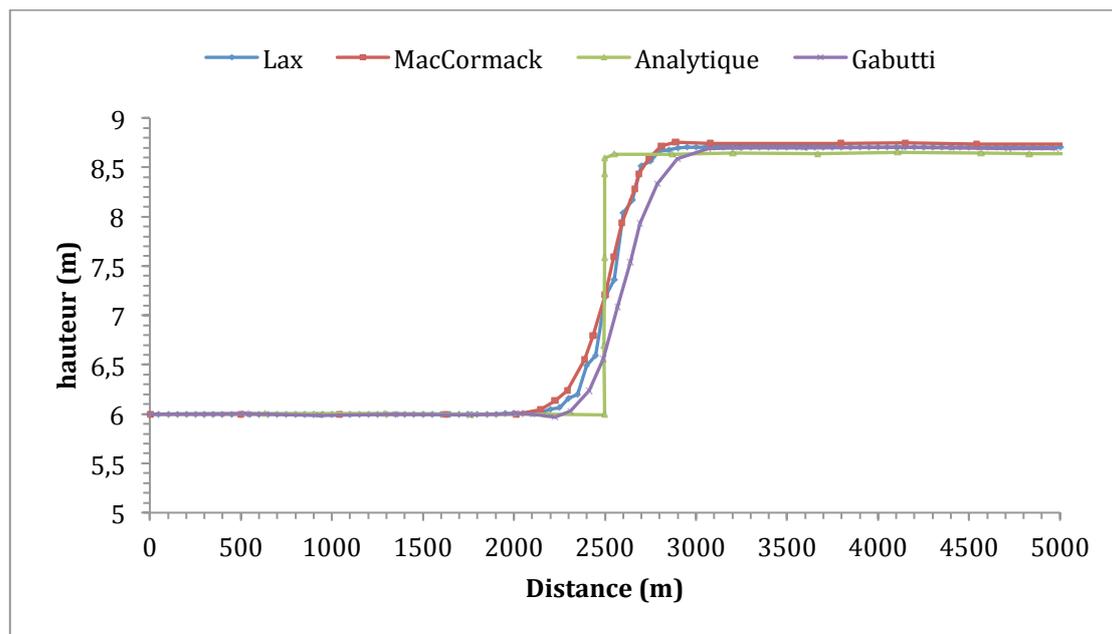


Figure IV.2 : Comparaison des résultats (dissipation artificielle).

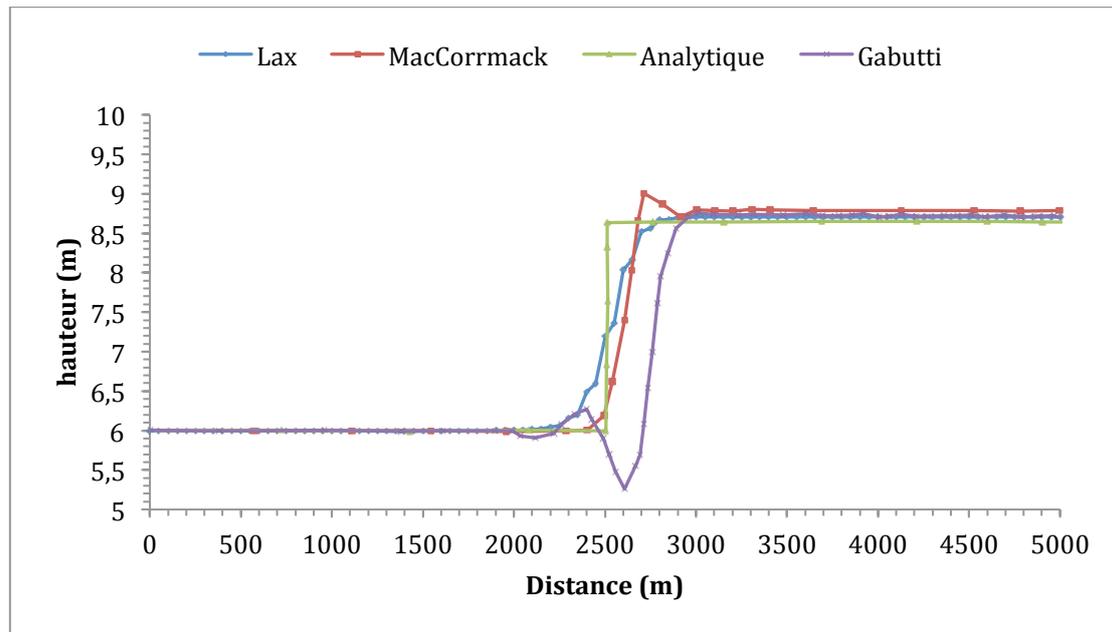


Figure IV.3 : Comparaison des résultats (pas de dissipation artificielle).

#### Analyse des résultats :

- Le niveau d'eau dans la partie amont, reste constant jusqu'à  $x = 2300\text{m}$  (Figure IV.2); au delà, il se produit une surélévation du niveau d'eau jusqu'à  $x = 2800\text{m}$ , puis elle s'uniformise en fonction de la distance.
- La courbe de variation de la hauteur de l'écoulement à surface libre le long du canal obtenue à l'aide du schéma de Lax présente la même allure que celle des autres schémas mais en plus avec monotonie de la solution.
- Cette même courbe de variation de la hauteur se rapproche davantage de façon encore plus précise avec le schéma de MacCormack.
- Comparé aux schémas de MacCormack et Gabutti, le schéma de Lax ne manifeste pas d'oscillations parasites (dispersion numérique). Ceci est dû à la précision du premier ordre du schéma mais présente une allure plus diffuse.
- La hauteur de l'onde (surélévation de la surface libre) est calculée avec une très bonne précision par les divers schémas numériques.

#### Commentaire et interprétation des résultats obtenus :

La solution analytique peut être obtenue en appliquant la l'équation de continuité et de quantité de mouvement au front d'onde. Les équations résultant sont avec  $V_1=0$  m/s.

$$h_1 = -\frac{V_0 h_0}{c} + h_0$$

$$c = \left( \frac{gh_1(h_0 + h_1)}{2h_0} \right)^{1/2} + v_0$$

Ces équations peuvent être résolues par itérations à partir des variables d'écoulement initial connu,  $V_0$  et  $h_0$ . Pour cet exemple,  $h_1=8.66$  m et  $C=-7.06$  m/s.

Le  $C_r$  indiqué dans les figures est le maximum des valeurs  $C_r$  pour tous les points de la grille.

Les oscillations au voisinage de l'onde de choc sont principalement dues à des erreurs de troncature (instabilités non linéaires locales causant les agitations) se produisant à l'arrière de l'onde.

Les valeurs de la hauteur maximale sont reportées sur le tableau (IV.2).

Tableau IV.2 : comparaison des résultats, application I

	Solution analytique	Lax	MacCormack	Gabutti
$h_{\max}$ (m)	8.66	8.70	8.75	8.70

Ces résultats mettent en relief des écarts relatifs dans les valeurs calculées par les différents schémas.

La comparaison de nos résultats par les résultats de Lax et de MacCormack montre que la hauteur maximale aux différents schémas est presque la même.

Et d'autre part nous constatons que les schémas de Lax et de Gabutti retracent les mêmes résultats et révèlent une hauteur maximale de 8.7 m, et ceci avec monotonie de la solution, c'est-à-dire sans diffusion ou dispersion numérique étant donné.

- **Calcul de l'erreur relative du schéma de Lax:**

$$E_{\text{reur}} = \frac{8.70 - 8.66}{8.70} * 100 = 0.46 \%$$

On constate alors que la solution numérique est entachée d'une erreur relative de 0,46 %. Résultat très satisfaisant ce qui démontre une bonne précision de calcul du schéma de Lax.

### IV.3 Application II:

Dans cette application ; nous nous servirons d'un exemple tiré de la littérature (Chaudhry, 2008) où le canal est de forme trapézoïdale (Fig.IV.4). Avec fruits des talus  $m= 1.5$ , pente longitudinale  $S= 0.00008$ , et rugosité de Manning  $n = 0.013$ . Initialement, le canal est le siège d'un écoulement uniforme avec un débit  $Q= 126 \text{ m}^3/\text{s}$ , et la profondeur normale de l'écoulement  $h_0= 5.79\text{m}$ .

L'installation que l'on se propose d'étudier est schématisée sur la figure (IV.4).

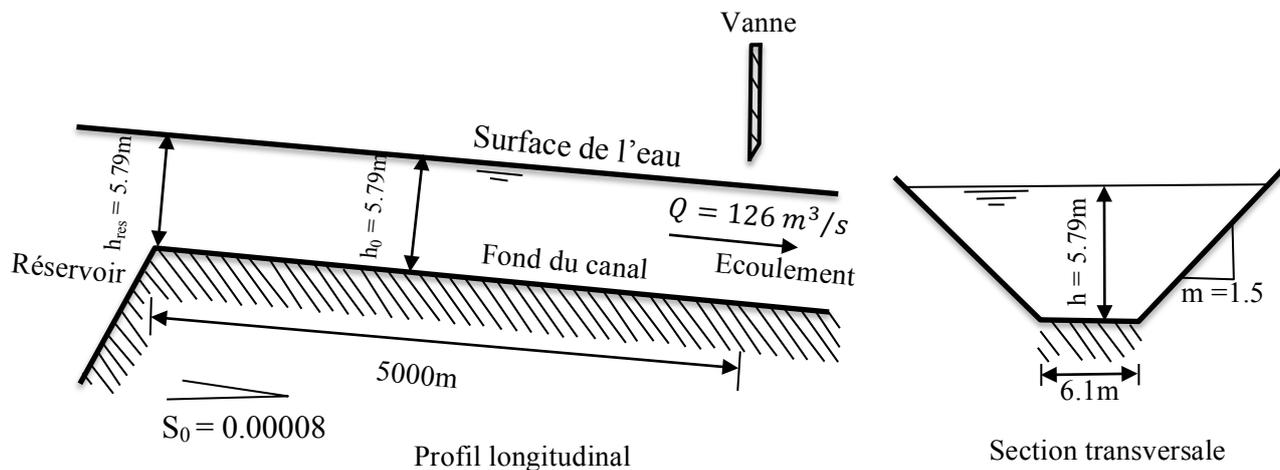


Fig. IV.4 : Schéma de l'installation étudiée.

Les données de l'installation sont celles récapitulées dans le tableau (IV.3) suivant:

Tableau (IV.3) : Données relatives à l'application II.

Longueur du canal L	5000 m
La largeur b	6.1 m
m	1.5
La pente du fond $S_0$	0.00008
La rugosité n	0.013
Débit Q	$126 \text{ m}^3/\text{s}$
La profondeur d'écoulement h	5.79 m
N	100
Nombre de Courant $C_r$	0.95

### Résultats :

Les résultats calculés pour le canal trapézoïdal sont présentés dans les figures (IV.5, IV.6 et IV.7). Ces dernières donnent le profil de la ligne d'eau calculé par le schéma de Lax ainsi que les profils de la ligne d'eau déterminés numériquement par le modèle

de MacCormack et Preissmann selon Chaudhry, M. H. (2008). Ces profils sont donnés aux temps,  $t = 500s$ ;  $t = 1000s$  et  $t = 1500s$ , pour un coefficient de Manning  $n = 0.013$ .

De plus une comparaison est présentée dans les figures (IV.8), (IV.9) et pour les différentes sections,  $x = 5 \text{ km}$  ;  $x = 2.5 \text{ km}$ .

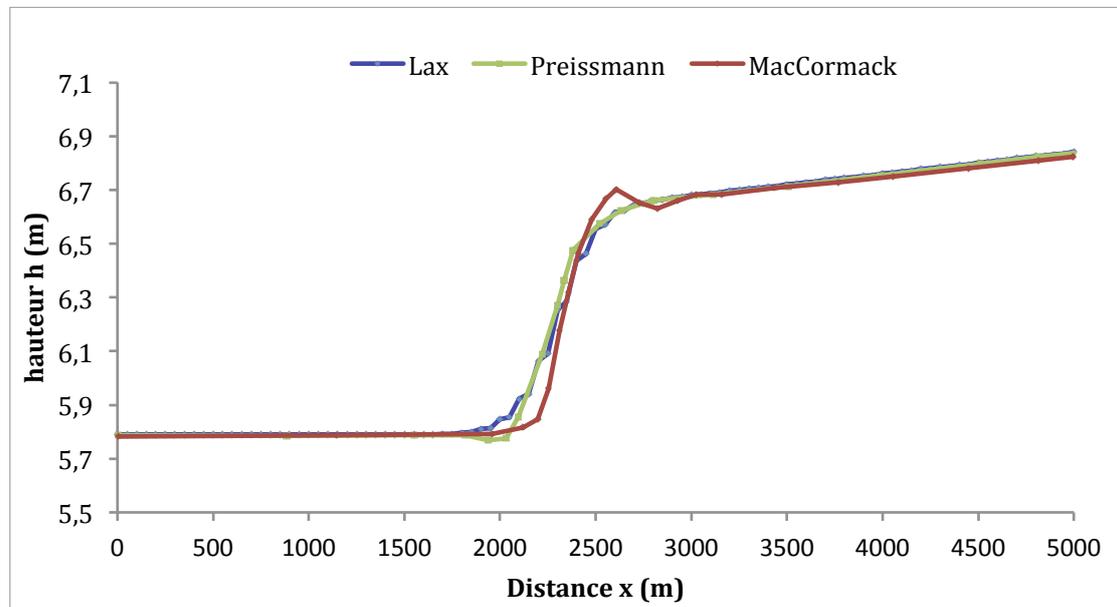


Figure IV.5 : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour  $t = 500s$ .

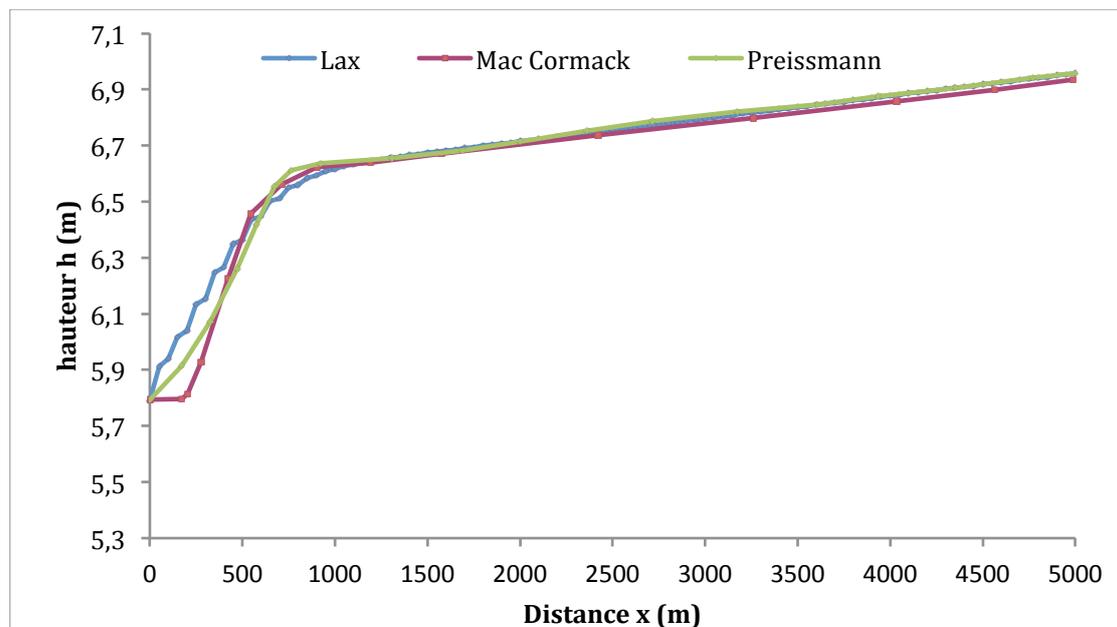


Figure IV.6 : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour  $t = 1000s$ .

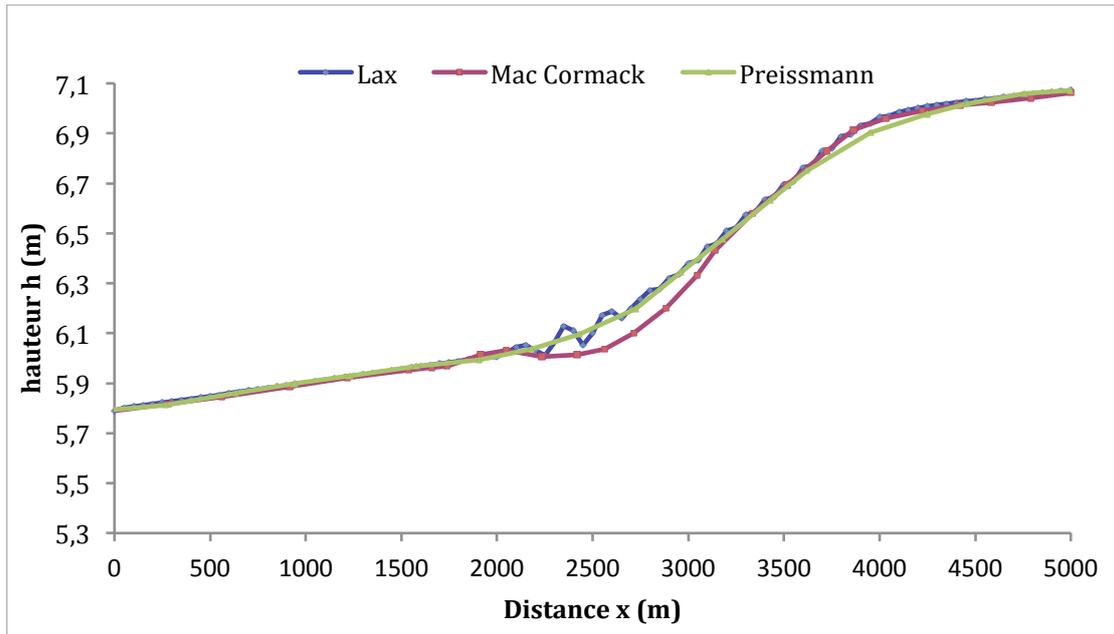


Figure IV.7 : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour  $t= 1500s$ .

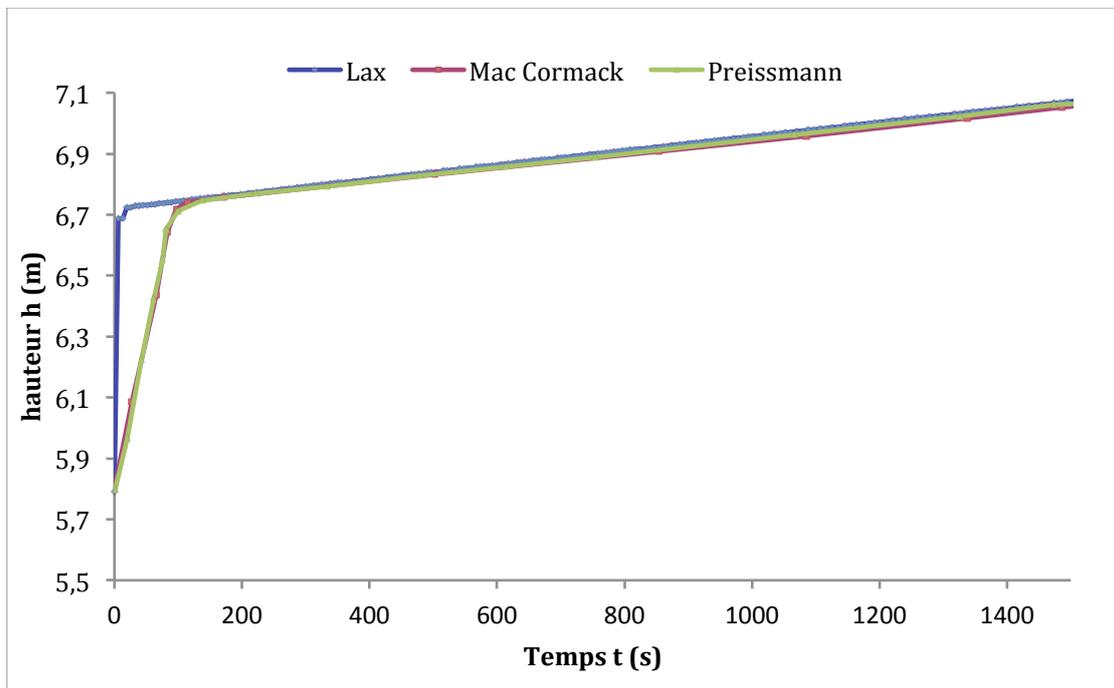


Figure IV.8 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour  $x= 5km$ .

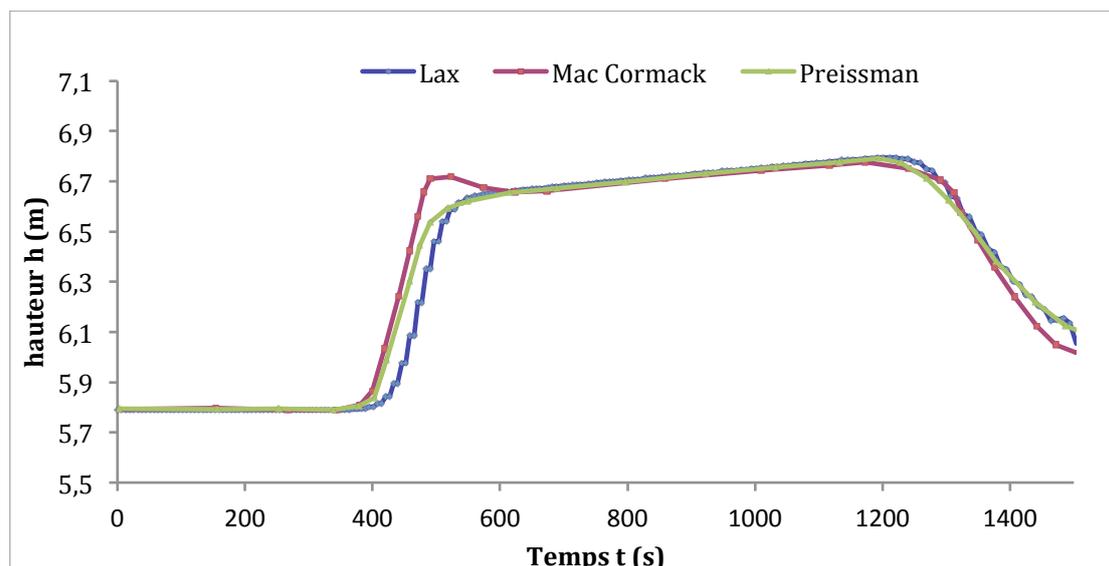


Figure IV.9 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour  $x = 2.5\text{km}$ .

#### Analyse des résultats :

- A  $t = 500$  s, on remarque que la valeur de la hauteur reste constante ( $h = 5.79$  m) jusqu'à  $x = 2000\text{m}$  (Figure IV.2), puis la courbe subit une variation brusque (une montée d'une hauteur dépassant les 6.6 mètres) puis elle commence à se stabiliser avec une variation légère de la hauteur pour arriver à la valeur de  $h = 6.83\text{m}$ .
- A  $t = 1000$  s, lors des premiers instants, il se produit une surélévation du niveau d'eau (Figure IV.6) ; et à  $x = 1000\text{m}$ , l'augmentation de la hauteur d'eau est graduellement amorcée.
- A  $t = 1500$  s, on observe que l'augmentation de la hauteur d'eau est graduellement variée, et à  $x = 2200\text{m}$  il se produit une surélévation du niveau d'eau (Figure IV.7) jusqu'à  $x = 4200$  m, puis elle commence à se stabiliser avec une variation légère de la hauteur pour arriver à la hauteur maximale  $h = 7.07\text{m}$ .
- La courbe de variation de la hauteur de l'écoulement à surface libre le long du canal obtenue à l'aide du schéma de Lax se coïncide en la comparant à la courbe obtenue grâce au schéma de MacCormack.
- Cette même courbe de variation de la hauteur recoupe de façon encore plus prononcée celle du schéma de Preissmann.
- Le niveau d'eau dans la partie amont, reste constant pendant les quatre cent premiers secondes (Figure IV.9) ; au delà, il se produit une augmentation du niveau d'eau jusqu'à 600s, et de 600s à 1300s il se stabilise, après 600s il se produit une diminution du niveau d'eau.

- Les courbes obtenues par les trois modèles présentent les mêmes allures aux différentes sections.

### Commentaire et interprétation des résultats obtenus :

Les valeurs de la hauteur maximale pour les schémas numériques sont reportées sur le tableau (IV.4).

Tableau IV.4 : comparaison des résultats, application II

$h_{\max}$ (m) \ t (s)	500	1000	1500
MacCormack	<b>6.82</b>	<b>6.93</b>	<b>7.07</b>
Preissmann	<b>6.83</b>	<b>6.95</b>	<b>7.07</b>
Lax	<b>6.83</b>	<b>6.95</b>	<b>7.07</b>

La comparaison de nos résultats par les résultats de MacCormack et Preissman au différents temps montre que la hauteur maximale pour chaque schéma est presque la même; ce qui montre que la bonne précision du schéma de Lax.

Nous constatons alors que les schémas de Lax, MacCormack et Preissmann retracent les mêmes résultats et révèlent une hauteur maximale de 6.83 m a  $t = 500s$  et 6.95 m a  $t = 1000s$  et 7.07 m a  $t = 1500s$  et ceci avec monotonie de la solution, c'est-à-dire sans diffusion ou dispersion numérique étant donné que le nombre de Courant  $Cr = 0.95$ .

## IV.4 Etude paramétriques :

Après avoir validé le modèle propose, cette étape consiste à étudier l'effet des différents paramètres sur la propagation d'onde.

### IV.4.1 effets de la rugosité (nombre de Manning) :

Les valeurs utilisées dans cet exemple sont reportées sur le tableau (IV.4).

La figure IV.10, illustre l'évolution de la hauteur pour un temps  $t = 1000s$ . Nous constatons à travers cette figure que la célérité et l'amplitude de l'onde dépend de la rugosité de fond du canal. Les pertes de charges sont d'autant plus réduites que la rugosité est faible.

L'interprétation qu'on peut émettre est que lorsque la rugosité est prononcée, l'onde se propageant à la surface libre subit un fort amortissement. Ce dernier fait alors dissiper une grande part de l'énergie mécanique eu suite à l'arrêt brusque de l'écoulement à l'aval. Ainsi, l'onde se voit rapidement décélérée en fonction de l'espace et perdant de l'on amplitude (surélévation). Ce cas ne peut évidemment pas être traité du point de vu analytique étant donnée la non linéarité des frottements en fonction de la vitesse d'écoulement.

Tableau (IV.5) : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de Manning).

Longueur du canal L	5000 m
La largeur b	6.1 m
m	1.5
La pente du fond $S_0$	0.00008
Débit Q	126 m <sup>3</sup> /s
La profondeur d'écoulement h	5.79 m
Nombre de Courant $C_r$	0.95

Les valeurs utilisées pour la rugosité sont : 0.009, 0.013, 0.02, 0.05

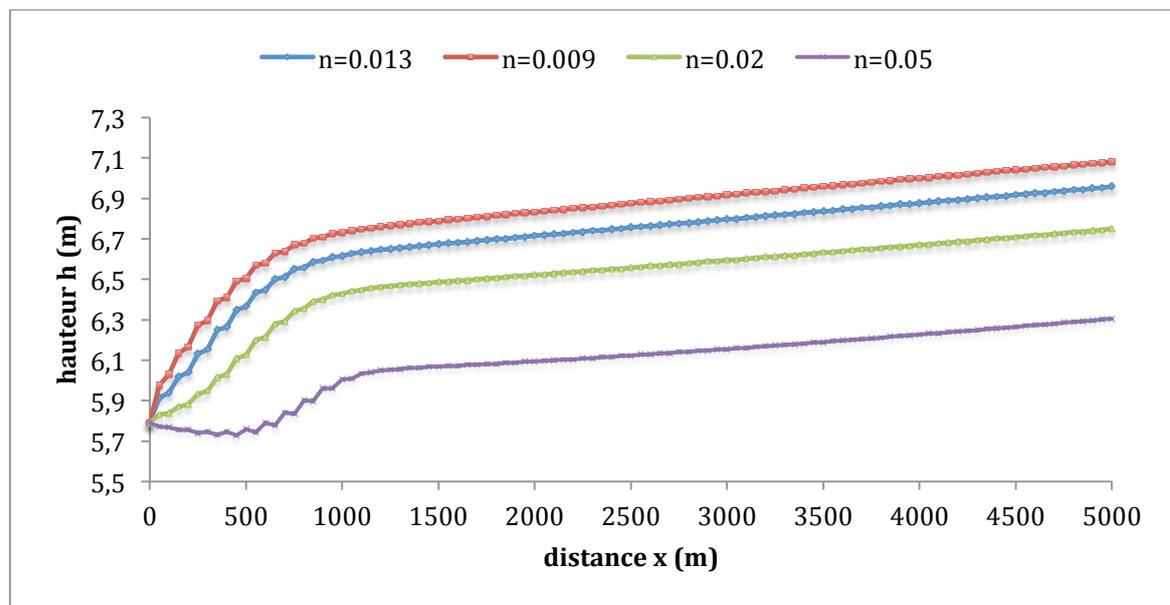


Figure IV.10 : effets de la rugosité (nombre de Manning).

#### IV.4.2 effets du nombre de courant:

Les valeurs utilisées dans cet exemple sont reportées sur le tableau (IV.5).

La figure (IV.11) illustre la variation de la fore du front d'onde simulé. Cette figure montre que pour un temps donné, plus ce nombre est petit devant l'unité, l'onde présente une allure diffuse. Cependant, si l'on s'approche davantage de l'unité le front d'onde prend une allure plus raide proche de sa forme physique réelle. A l'inverse, ayant dépassé l'unité, des instabilités numériques commencent à se faire ressentir, et après quelques temps de simulation la solution divergent complètement suite à l'accumulation d'erreurs.

Ceci s'interprète par le fait que lorsque le nombre de Courant est petit la célérité numérique de l'onde diffère de la célérité réelle, dès lors, le front d'onde présente un

étalement. En dépassant l'unité, le domaine d'influence numérique est alors plus petit que du domaine d'influence physique. L'information n'est plus capturée de manière adéquate et le calcul diverge.

Tableau (IV.6) : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de courant).

Longueur du canal L	5000 m
La largeur b	6.1 m
m	1.5
La pente du fond $S_0$	0.00008
La rugosité n	0.013
Débit Q	126 m <sup>3</sup> /s
La profondeur d'écoulement h	5.79 m

Les valeurs utilisées pour le nombre de courant sont : 0.5, 0.7, 0.95, 1.2

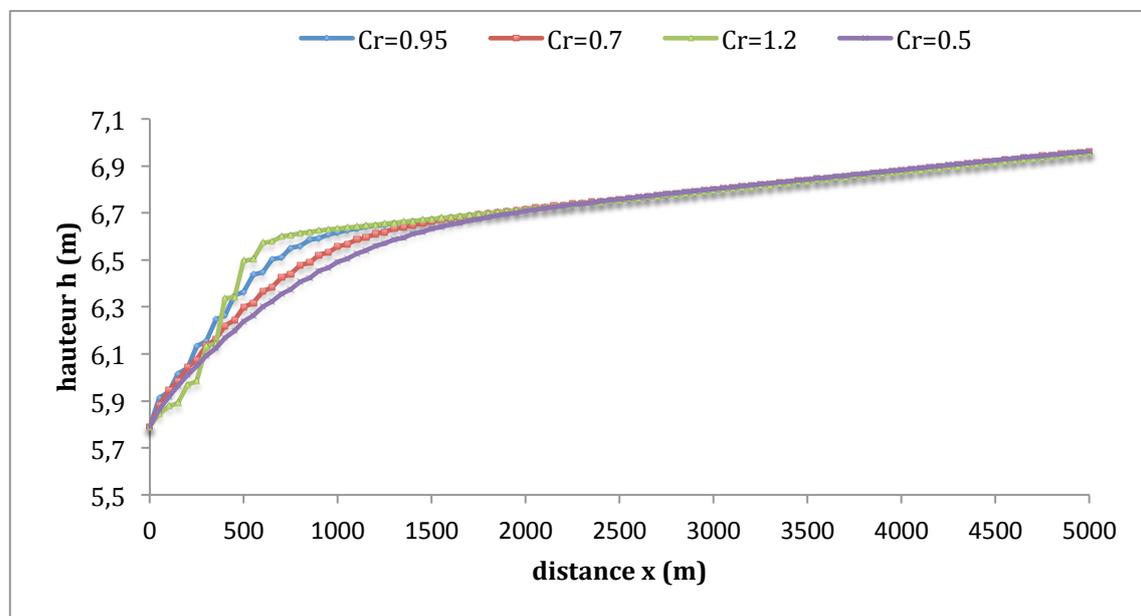


Figure IV.11 : effets du nombre de courant.

#### IV.4.3 effets de la pente de fond du canal:

Les valeurs utilisées dans cet exemple sont reportées sur le tableau (IV.6), et les résultats correspondant sont groupés sur la figure (IV.12).

Tableau (IV.7) : Données relatives à l'étude paramétrique (la pente de fond du canal)

Longueur du canal L	5000 m
La largeur b	6.1 m
m	1.5
La rugosité n	0.013
Débit Q	126 m <sup>3</sup> /s
La profondeur d'écoulement h	5.79 m
Nombre de Courant C <sub>r</sub>	0.95

Les valeurs utilisées pour la pente de fond sont : 0.00001, 0.00004, 0.00008, 0.00012  
En réalité, en variant la pente, on verra la profondeur normale varier, mais pour des raisons de simplicité nous admettons que le tirant d'eau normale reste constant du fait que nous nous intéressons juste à l'allure du front d'onde.

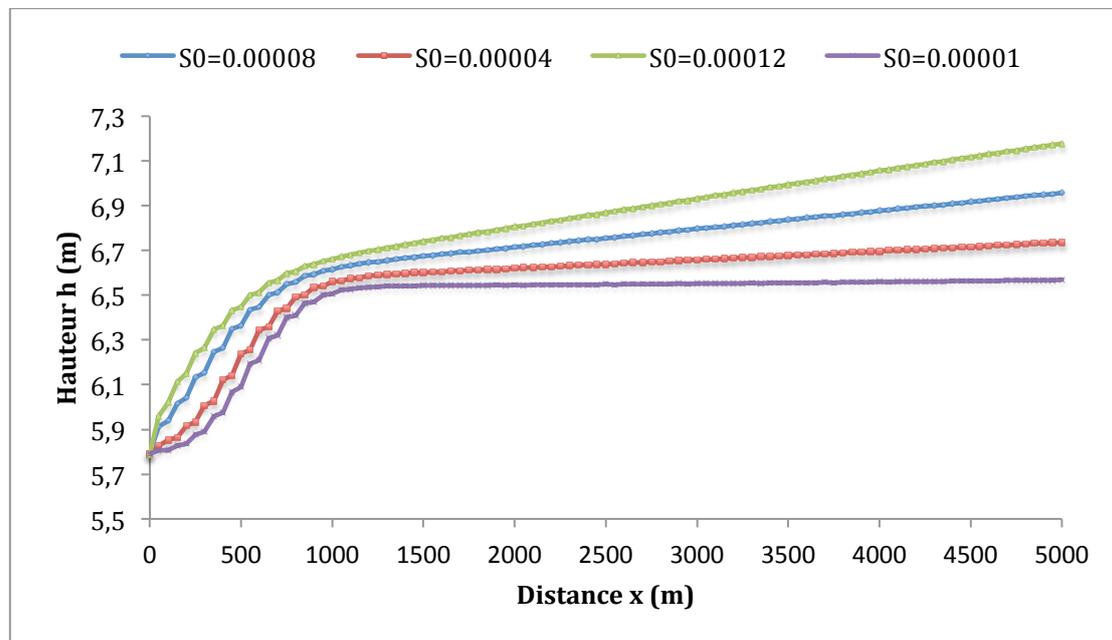


Figure IV.12 : effets de la pente de fond du canal.

Les résultats montrent que la surélévation (amplitude de l'onde) est d'autant accentuée en mesure que la pente est grande. Pour des faibles inclinaisons longitudinales, la surélévation est moins prononcée.

Ce constat trouve explication dans le fait que lorsque l'on varie la pente du canal on modifie l'équilibre et la balance dynamique entre les forces d'inertie. Ainsi, on aura une grande influence de la composante longitudinale de la pesanteur et son effet sur les accélérations du fluide dans le canal.

### **IV.5 Conclusion :**

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de simulation issus de notre modèle bâti sur le schéma diffusif de Lax. Le modèle élaboré résout les équations complètes de Saint-Venant en utilisant différentes approximations numériques basées sur une procédure de calcul récurrente dans le temps

Les applications faites dans ce travail concernent le cas de canaux prismatique rectangulaire et trapézoïdal. Les analyses effectuées prouvent la fiabilité du modèle propose dans cette étude. Après validation, une analyse de l'impact des différents paramètres a été effectuée.

A travers cette étude, nous déduisons que pour ce modèle, les meilleurs résultats sont obtenus pour un nombre de courant inférieur très proche de l'unité. Enfin, notons que le modèle élaboré est d'un large éventail d'applications cependant, et pour chaque cas pratique étudié, les conditions aux limite doivent être revues en fonction du type du problème et ses spécificités.

## Conclusion générale :

Les problèmes relatifs à l'hydraulique sont très complexe, surtout lorsqu'il s'agit des écoulements à surface libre où le phénomène est soumis à plusieurs paramètres, dont la solution analytique des équations est impossible; dans ces conditions la simulation numérique constitue le seul moyen de résoudre le problème et de répondre aux diverses questions relatives au comportement dynamique de l'écoulement à ciel ouvert.

La méthode la plus simple et efficace pour traiter la propagation d'ondes à surface libre est la méthode des différences finies. Elle convient le mieux pour les problèmes d'évolution, c'est à dire dépendant du temps.

Les équations de Barre de Saint-Venant gouvernent les écoulements 1D à surface libre sont obtenues en appliquant le principe de la conservation de la masse et le théorème de la quantité de mouvement ainsi que des hypothèses simplificatrices.

Le schéma aux différences finies utilisé dans cette étude est celui de Lax, qui est un schéma explicite. Ce dernier est précis au premier ordre.

Le problème étant de nature hyperbolique, la discrétisation des équations doit être traitée avec délicatesse et précision, car chaque erreur sur un nœud se répercute immédiatement sur les autres nœuds. Ceci nous a conduits à utiliser la méthode des caractéristiques pour l'implémentation des conditions aux limites, méthode plus consistante du point de vu physique.

Vu l'instabilité que les schémas aux différences finies explicites présentent, la condition de Friedrich Lewy (C.F.L) a été respectée pour assurer la fiabilité des résultats.

Les résultats donnés par le modèle numérique de Lax sont très proches des résultats obtenus par d'autres auteurs pour les problèmes similaires. A coté de la précisons satisfaisante obtenu par ce schéma, tant sur plan quantitatif (hauteur des ondes) que celui qualitatif (forme du front d'onde), on peut affirmer que le schéma de Lax est très adapté pour la simulation de la majorité des cas pratiques rencontrés dans l'art de l'ingénieur. Comparativement aux autres schémas, il présente une simplicité dans la programmation et une précision satisfaisante sans phénomènes parasites (dispersion numérique). Cependant, son ordre de précision (premier ordre) fait que le nombre de Courant doit se rapprocher autant que possible de l'unité pour éviter une diffusion excessive inhérente à ce schéma.

Enfin, le présent travail n'est qu'un petit effort pour l'exploration du domaine du calcul numérique des écoulements à ciel ouvert. Ceci ouvre la voie à d'autres études ultérieures avec d'autres schémas numériques, par exemple le schéma de Preissman, Beam-Warming... etc.

## Références bibliographiques :

- A. OSMAN AKAN. (2006), "*Open Channel Hydraulics*", Elsevier.
- ABSI, R. & RETIEB, S. (1994), "*Modélisation et simulation numérique des problèmes de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régime instationnaire*". Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- BRUNO, G., (1983), "*one two upwind finite-difference schemes for hyperbolic equations in non-conservative form*", computer and fluids, vol. 11, N° 3., pp. 207-230.
- BERREKSI, A. & BOUHADJI, A. (1993), "*Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones transitions*". Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- BERREKSI, A. (1998), "*Simulation des écoulement à surface libre dans des canaux à faible et forte pente à géométrie variable*". Mémoire de Magister, E. N. Polytechnique d'Alger.
- CHAUDHRY, M. H. (2008), "*Open Channels Flow*". Deuxième édition, Springer.
- CHAUDHRY, M. H. (2008), "*Applied hydraulic transients*". Deuxième édition, Springer.
- CHAUDHRY, M. H. (2014), "*Applied Hydraulic Transients*" Troisième édition, Springer.
- COMOLET. R. (1982), "*Mécanique Expérimentale des fluides*", tome2., Masson, PARIS, 1963.
- CONSTANTINE, V. B. et JHON. G. S., (1987), "*Dam-break flood-wave propagation on dry*", journal of hydraulic Engineering, ASCE, vol. 113, N° 12.
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. (1986), "*Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface Flows with Shocks*". Water Resources Research, Vol. 22, N° 13, pp. 1923-1930.
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. (1987), "*Simulation des écoulements monodimensionnels consécutifs aux ruptures des barages*". Journal of hydraulic Research, Vol. 25, N° 1, pp. 41-50.
- GRAF, W. H. & ALTINAKAR, M. S. (2000), "*Hydraulique fluvial, Tome II Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*". Edition. Presses Polytechnique et universitaires Romandes, Lausanne.

- HUBERT CHANSON, ( 2004), "*Environmental Hydraulics of Open Channel Flows*", Elsevier Butterworth-Heinemann.
- HUBERT CHANSON, (2004), "*The Hydraulics of Open Channel Flow*" .
- HUNT, B. (1987), "*une solution sans viscosité de l'onde de rupture de barrage*", journal of hydraulic research, vol. 25, N° 3, pp. 313-326.
- JONATHAN WERTEL, (2006), "*Modélisation 3D des écoulements turbulents à surface libre en canal rectangulaire*" ,thèse de doctorat, Université louis pasteur de Strasbourg.
- JOSE VAZQUEZ, (2006), "*Hydraulique A Surface Libre*", Ecole nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg, France.
- JOSE VAZQUEZ, (2006), "*Hydraulique Générale*", Ecole nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg, France.
- MATHEW FLYNN et LIZ GOOSTER, (2003), "*History of fluid Mechanics*".
- NECIB. A et KHOUALFIA.S (2013), "*Modélisation 1D et 2D des écoulements à surface libre* ", Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- OUKACHA, M. & LECHEHEB, M. (1996), "*Détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et forte pente*". Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- PIMENOV. A. et TAGHI-ZADE, K. H. (1993), "*Hydraulique générale*", E. N. Polytechnique, Office des publications Universitaires (OPU), ALGER.
- SHU-QING YANG, (2006), "*Velocity distribution in a gradually accelerating free surface flow*", Advances in Water Resources 29, 1969–1980.
- S. CANDEL, (1995), "*Mécanique des fluides*", Dunod.
- TRAOURE, S. & DIALO, S. (2001), "*Etude d'un écoulement transitoire à surface libre*". Projet de fin d'études, Université A. MIRA de Bejaia.
- ZENZANE, A. et MAAMARE, B. (2003), "*Calcul des écoulement à surface libre instationnaire (cas unidimensionnel)* ". Projet de fin d'études, Université A. MIRA de Bejaia.
- ZOUAOUI. D. (2004), "*Simulation numérique des écoulements à surface libre avec onde*". Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.