



**République Algérienne Démocratique et
Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique**
Université Mohamed Khider Biskra



Département de Mathématiques
Domaine Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Statistique

*Mémoire de fin d'étude en
Master*
Intitulé :
**ESTIMATION DES
PARAMETRES D'UNE COPULE**

Présenté par :
Slimani

Devant le jury :
-YAHIA Djabrane
-TOUBA Sonia
Encadreur : BENATIA
Fatah

Année Universitaire
2011-2012

Résumé

La dépendance entre variables aléatoires dans beaucoup de domaines telle que hydrologiques, la financier l'actuariat..., est d'une importance extrême par cela que nous nous sommes intéressés aux copules qui représentent l'un des outils des plus usités actuellement par modéliser cette dépendance entre variables aléatoires.

Un intérêt particulier est donné à leurs estimations paramétriques et semi-paramétriques, que nous avons étayées dans ce mémoire ; nous citons entre autre les méthodes du maximum de vraisemblance, du pseudo-maximum de vraisemblance, la méthode d'inférence des marginales, et les méthodes d'inversion du Tau de Kendall et du rho de Spearman.

Dédicace

A mes chères parents,

A mes frères,

A mes soeurs

Remerciements

Au nom du Dieu Le Plus Clément et Le Plus Miséricordieux.

Louange à Allah, *Dieu* de l'univers et de tous les hommes, que sa grâce, son salut, son pardon et sa bénédiction soient accordés au meilleur de ses créatures notre prophète Mohamed ainsi qu'aux membres purs de sa famille et à tous ses compagnons. Je tiens à remercier en premier Dieu le tout puissant qui nous a accordé la volonté et le courage pour réaliser ce projet.

Tout d'abord je tiens à exprimer ma profonde gratitude à **Dr.BENATIA Fatah**, d'avoir accepté la charge de m'encadrer. Il a su me donner une grande liberté d'initiative tout en restant toujours présente pour discuter des problèmes rencontrés, des résultats obtenus et des orientations à suivre. Son enthousiasme et son dynamisme m'ont à chaque fois permis de rebondir dans les moments difficiles. Je la remercie vivement pour son aide précieuse et tous les conseils qu'elle a pu me fournir durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie Messieurs les membres du jury de soutenance pour m'avoir honorée en acceptant de juger mon travail.

J'ai eu la chance de profiter de beaucoup d'expériences à la fois douloureuses et enrichissantes. Merci à tous mes professeurs qui m'ont soutenu durant mes années d'études, en particulier chef de département, Messieurs A. Necir, Z. Mokthari, B. Labed, Y. Djibran, T. Sonia, D. Meraghni, M. Hfayed.

Un grand merci aussi à mes chères amies. Elles m'ont toujours aidée et m'ont apportée beaucoup de soutien moral.

Merci beaucoup à ma chère mère, qui a contribué minutieusement à l'amélioration de mon mémoire, pour ses encouragements, sa patience, son soutien et surtout son amour.

Enfin, je remercierai assez mes frères et sœurs pour leurs conseils et soutien.

Notations et abréviations

X, Y	variables aléatoires
U, V	variables aléatoires uniformes
C	copule
c	densité de la copule
$C_{X,Y}$	copule bivariée
M	copule min
W	copule max
Π	copule produit
C_ρ^ϕ	copule gaussienne
$C_{\rho,\nu}^t$	copule student
C^A	copule Archimédienne
C_a^{Gum}	copule de Gumbel
C_a^{Fra}	copule de Frank
C_a^{Cla}	copule de Clayton
C^*	copule de valeurs extrêmes
\tilde{C}	copule empirique
\tilde{c}	copule de fréquence empirique
\mathbb{C}_n	processus empirique basé sur la copule empirique
Dom	domaine de définition
F_1, \dots, F_d	fonctions de répartition univariées
F^{-1}	inverse généralisé de F
ϕ	fonction de la loi normale standard
ϕ_ρ	fonction de la loi normale bivariée

$L(\theta)$	fonction de maximum de vraisemblance
λ_L	dépendance de queue inférieur
λ_U	dépendance de queue supérieur
MV	méthode de maximum de vraisemblance
p	p -valeur
\hat{p}	estimateur de p -valeur
PMV	pseudo maximum de vraisemblance
Q	mesure de concordance et de discordance
R	transformation intégrale de Rosenblatt
$\tau_{(X,Y)}$	tau de Kendall
τ_n	tau de Kendall empirique
$\rho_{(X,Y)}$	rho de Spearman
ρ_n	rho de Spearman empirique
α, θ	paramètres de dépendance
θ_n	estimateur de θ
θ_n^{PMV}	estimateur de θ par la méthode de PMV
θ_n^{IFM}	estimateur de θ par la méthode de IFM
θ_n^{MV}	estimateur de θ par la méthode de MV
θ_n^{RS}	estimateur de θ par l'inversion de rho de Spearman
θ_n^{TK}	estimateur de θ par l'inversion de tau de Kendall
H	fonction de répartition jointe
I	la matrice d'information de Fishes
IFM	fonction d'inférence des marginales

Table des figures

Fig.2.1- Graphique de la copule d'indépendance et son contour.....	19
Fig.2.2- Densité de la copule gaussienne pour $\rho = 0, 2$ (à gauche) et $\rho = 0, 7$ (à droite).....	21
Fig.2.3- Contour de copule gaussienne.....	21
Fig.2.4- Densité de copule de Student pour $\rho = 0, 2$ (à gauche) et $\rho = 0, 5$ (à droite) et $v = 5$	23
Fig.2.5- Densités de copules Frank(A) pour $a = 2$, Clayton(B) pour $a = 3$ et Gumbel(C) pour $a = 1, 5$	26
Fig.2.6- Contours de copules Frank (A), Clayton (B) et Gumbel (C).....	26
Fig.4.1- EchantillonEchantillons de taille1000 de trois copules archimédiennes ($\alpha = 5$).....	52
Fig.4.2- Echantillons de taille1000 de deux copules gaussienne pour $\rho = 1$ (à gauche) et $\rho = 0, 5$ (à droite).....	53

Liste des tableaux

TAB.1- Quelques copules de valeurs extrêmes.....	31
--	----

Table des matières

Dédicase	i
Remerciements	ii
Notations et abréviations	ii
Liste des Figures	v
List des Tables	vi
Table des matières	vi
Introduction	1
1 Rappels de probabilités	3
1.1 Espace probabilisé	3
1.2 Variable aléatoire	4
1.3 Loi de probabilité	4
2 Les copules	12
2.1 Copules bivariées	12
2.1.1 Définition et théorème d'existence	12
2.1.2 Propriétés d'une copule	16
2.1.3 Exemple de copules usuelles	19

3	Estimation	32
3.1	Estimation ponctuelle	32
3.1.1	Estimateur	32
3.1.2	Méthode du maximum de vraisemblance	34
3.2	Estimation par intervalle de confiance	36
3.2.1	Estimation de la moyenne d'une loi normale	36
3.2.2	Estimation de la variance d'une loi normale	36
4	Estimation de copules	38
4.1	Fonction de répartition empirique	38
4.2	Copule empirique	39
4.2.1	Cas bivarié	39
4.3	Mesure d'association	40
4.4	Méthodes d'estimation	53
4.4.1	Méthode du maximum de vraisemblance exacte	53
4.4.2	Méthode des fonctions d'inférence des marginales (IFM)	54
4.4.3	Méthode de pseudo-maximum de vraisemblance (maximum de vraisemblance canonique)	55
4.4.4	Méthode d'inversion du tau du Kendall et du rho de Spearman	57
4.4.5	Méthode de la distance minimale	59
	Conclusion	62
	Bibliographie	64

Introduction

Dans la théorie des probabilités, lorsque les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, leur fonction de répartition jointe $H(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit comme le produit de ses marginales F_1, \dots, F_n , c'est à dire :

$$H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n).$$

Dans la pratique, les variables aléatoires ne sont pas toujours indépendantes, comme par exemple les risques financiers, donc on ne peut pas négliger cette relation de dépendance. Par cette raison il faut déterminer la loi jointe de ces variables.

Les copules sont des fonctions qui permettent de coupler les lois marginales des variables afin d'obtenir la loi jointe, mesurer et modéliser la dépendance. Ces fonctions de dépendances ont permis de construire une nouvelle théorie, dite "théorie des copules", cette dernière, qui joue un rôle très important et contribue de manière significative dans différents domaines, telle que la statistique, la finance, l'hydrologie, la biologie,...etc. Parmi les travaux les plus importants sur les copules en statistique : on peut citer ceux de Hoeffding, en 1941, qui a utilisé les copules pour étudier les mesures d'associations non paramétriques comme le rho de Spearman et il a étudié les propriétés de cette fonction comme l'invariance des mesures de dépendance, ce qui lui a permis de proposer un théorème, en 1957, qui porte son nom, ce théorème assure que toutes les copules sont bornées par deux copules, appelés bornes de Fréchet-Hoeffding, par la suite Sklar, en 1959, a proposé un théorème fondamental dit théorème de Sklar et à partir duquel, Sklar a montré l'existence de cette fonction de dépendance, qui joint les fonctions de distributions marginales à leur de distribution jointe et il l'a nommé "copule".

Paul Deheuvels (1979) a utilisé la fonction de dépendance empirique pour construire des tests non paramétriques d'indépendance. En assurance Tibilili (1996) a introduit les copules pour modéliser la variation.

Parmi les nouvelles recherches sur les copules, on peut citer : l'estimation des paramètres des copules, Dans ce mémoire nous présentons les différentes l'approches classiques de l'estimation des copules.

Ce mémoire est réparti comme suit :

Dans le premier chapitre nous présentons les rappels sur les espaces probabilisés ainsi que les définitions et les propriétés des distributions classiques.

Dans le second chapitre les principales définitions et propriétés des copules sont établis par servir de base aux chapitres suivants.

Le troisième chapitre est consacré à l'estimation comme important volet de la statistique Inférentielle ; dans La théorie de l'estimation on étudie les propriétés des estimateurs ainsi que les méthodes générales classique comme celle du «Maximum de vraisemblance».

Le dernier chapitre est réparti en deux sections. Dans la première section nous allons présentés quelques mesures d'association, telle que la mesure de concordance, la mesure de dépendance ainsi que des exemples de ces mesures, comme le rho de Spearman, le tau de Kendall et la mesure de dépendance de Schewizer et Wolff, les mesures de dépendances des queues sont aussi citées. Dans la deuxième section on donne les différentes méthodes d'estimation paramétriques et semiparamétriques utilisées dans différents domaines pour estimer les paramètres d'une copule.

Chapitre 1

Rappels de probabilités

1.1 Espace probabilisé

Soit Ω un ensemble fini et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Le couple $(\Omega, P(\Omega))$ est appelé espace probabilisable (littéralement que l'on peut munir d'une probabilité).

Définitions

Définition 1.1.1 Une tribu ou σ -algèbre est un ensemble A de sous-ensembles de Ω avec les propriétés suivantes :

1. $\phi, \Omega \in A$,
2. Si $A \in A$ alors $A^c \in A$,
3. Si $A_1, A_2, \dots \in A$, alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in A$

Définition 1.1.2 Soit A une σ -algèbre de Ω . Une application $P : A \rightarrow [0, 1]$ est une mesure de probabilité sur (Ω, A) si

1. $P(\phi) = 0, P(\Omega) = 1$,
 2. Si $A_1, A_2, \dots \in A$, alors $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$
 3. Si $A_1, A_2, \dots \in A$ sont disjoints alors $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$
- Un élément A de A est un événement.
 - $P(A)$ est la probabilité de l'événement A .

· Une propriété vraie sauf pour un événement de probabilité nulle est dite vraie presque sûrement (p.s.).

· Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la plus petite σ -algèbre, notée \mathcal{B} , contenant tous les ouverts de \mathbb{R}^n s'appelle la tribu des boréliens.

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est appelé espace probabilisé .

1.2 Variable aléatoire

Définition 1.2.1 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité. Une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une variable aléatoire de dimension n si pour tout borélien

$B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ est mesurable .

Lemme 1.2.1 Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire. Alors $\mathcal{A}(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ est une σ -algèbre, dite engendrée par X .

· Soit $A \in \mathcal{A}$, la fonction indicatrice de A

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

est une v.a.

· Si $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ satisfont $\bigcup_{k=1}^m A_k = \Omega$ et a_1, \dots, a_m sont des réels , $X = \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{1}_{A_k}$, est une v.a .

1.3 Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de connaître les chances d'apparition des différentes valeurs de cette variable.

On se place dans l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

Fonction de répartition

Définition 1.3.1 Soit X une variable aléatoire. La loi de probabilité de X est définie par la fonction F_X , appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X , définie par

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow P(X \leq x) \end{cases} \quad (1.2)$$

On dit que deux v.a X et Y ont la même loi si elles ont la même fonction de répartition $F_X = F_Y$.

Propriété 1.3.1 La fonction de répartition est une fonction croissante à valeur dans $[0, 1]$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \quad (1.3)$$

Remarque 1.3.1 Soit $a \leq b$, on a

$$P(X \in [a, b]) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Loi d'une variable discrète

Définition 1.3.2 La fonction de répartition d'une variable discrète est constante par morceaux. Si X est une variable discrète à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < \dots < x_n$ alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^k P(X = x_i) \quad \text{avec } k \text{ tel que } x_k \leq x < x_{k+1}. \quad (1.4)$$

De même, si X prend une infinité de valeurs $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ avec $x_1 < \dots < x_n < \dots$, on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^k P(X = x_i) \quad \text{avec } k \text{ tel que } x_k \leq x < x_{k+1} \quad (1.5)$$

Proposition 1.3.1 Si X est à valeurs discrètes dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ (ou $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$), la loi de X est entièrement caractérisée par $\{P(X = x_i)\}$.

On remarque que

1. pour tout $i \geq 1$, $P(X = x_i) \in [0, 1]$,

$$2 \cdot \sum_{i \geq 1} P(X = x_i) = 1.$$

Loi d'une variable aléatoire à densité (ou continue)

Définition 1.3.3 Une variable aléatoire X est à densité, ou continue, s'il existe une fonction f définie sur \mathbb{R} telle que la fonction de répartition de X s'écrit

$$\forall X \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.6)$$

ou f est une fonction intégrable sur \mathbb{R} satisfaisant les conditions suivantes :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$

Une fonction qui vérifie les conditions 1. et 2. est appelée densité de probabilité.

Propriété 1.3.2 Soit X une variable aléatoire à densité.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0.$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'intervalle réduit à un point $I = \{x\}$. On a $P(X = x) = P(X \in I) = \int_x^x f(t) dt = 0$ ■

Espérance et variance d'une variable aléatoire

L'espérance

Définition 1.3.4 L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $E[X]$. Elle représente la valeur moyenne prise par la variable X .

1. Si X est une variable discrète à valeurs dans $D = \{x_1, \dots, x_n\}$, son espérance est

$$E[X] = x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i). \quad (1.7)$$

2. Si X est une variable à discrète à valeurs dans l'ensemble infini $D = \{x_i : i \geq 1\}$, son espérance est

$$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i). \quad (1.8)$$

3. Si X est une variable à densité f , lorsque l'intégrale est bien définie, son espérance est

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (1.9)$$

lorsqu'une variable X vérifie $E[X] = 0$, on dit que la variable est centrée.

Propriété 1.3.3 1. L'espérance est linéaire :

Soient a et $b \in \mathbb{R}$, deux variables aléatoires X et Y d'espérance finie alors

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

2. Si $X \geq 0$, alors $E[X] \geq 0$.

3. Si $X \leq Y$, alors $E[X] \leq E[Y]$.

Variance

Définition 1.3.5 La variance d'une variable aléatoire X , notée $Var(X)$, est définie par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] \quad (1.10)$$

L'écart type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}. \quad (1.11)$$

Lorsqu'une variable X vérifie $Var(X) = 1$, on dit que la variable est réduite.

Remarque 1.3.2 La variance s'écrit aussi $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Preuve. Il suffit de développer le carré et d'utiliser la linéarité de l'espérance.

Propriété 1.3.4 1. $Var(X) = 0$ ssi X est constante.

2. Soient a et $b \in \mathbb{R}$, alors $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

■

Preuve. Comme $E[aX + b] = aE[X] + b$, on a par définition $Var(aX + b) = E[(aX - aE[X])^2] = a^2 Var(X)$. ■

Indépendance

Définition 1.3.6 Soient A_1, \dots, A_n, \dots des événements. Ils sont dits indépendants si pour tous $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m$ on a

$$P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \dots P(A_{k_m}) \quad (1.12)$$

Définition 1.3.7 Soient $A_i \subset \mathcal{A}$, $i = 1, \dots$ des σ -algèbres. On dit qu'elles sont indépendantes si pour tous $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m$ pour tous événements $A_{k_i} \in \mathcal{A}$

$$P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \dots P(A_{k_m}). \quad (1.13)$$

Définition 1.3.8 Soient X_i , $i = 1, \dots$ des v.a. de dimension n . Elles sont indépendantes si pour tout entier $k \geq 2$ et quels que soient les boréliens B_1, \dots, B_k de \mathbb{R}^n on a

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_k \in B_k) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_k \in B_k).$$

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_m de dimension n sont indépendantes si et seulement si

$$F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_m}(x_m) \forall x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m.$$

Si elles ont des densités on a

$$f_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_m}(x_m) \forall x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m. \quad (1.14)$$

Définition 1.3.9 Si X_1, \dots, X_m sont des v.a. réelles indépendantes telles que $V(|X_i|) < \infty$, $i = 1, \dots, m$ alors

$$V(X_1 + \dots + X_m) = V(X_1) + \dots + V(X_m). \quad (1.15)$$

Fonctions caractéristiques

Définition 1.3.10 Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^n , la fonction définie par :

$$\Phi_X(\lambda) = E(e^{i\lambda X}) \quad \lambda \in \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

est la fonction caractéristique de X .

Lemme 1.3.1 1. Si X_1, \dots, X_m sont des v.a. indépendantes à valeurs dans \mathbb{R}^n alors

$$\Phi_{X_1 + \dots + X_m}(\lambda) = \Phi_{X_1}(\lambda) \dots \Phi_{X_m}(\lambda)$$

2. Soit X une v.a.r.

$$\Phi^{(k)}(0) = i^k E(X^k) \quad k = 0, 1, \dots$$

Les lois usuelles

Cas continue

1. **Loi uniforme** : On dit que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, noté $X \rightsquigarrow U[a, b]$, si elle admet la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.17)$$

avec

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \Phi_X(u) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$$

2. **Loi de Gauss** : On dit que X suit une loi de Gauss de moyenne m et de variance σ^2 , noté $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si elle admet la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

On

$$E(X) = m, V(X) = \sigma^2, \Phi_X(u) = e^{i um - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

3. **Loi exponentielle** : On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ }>

0, noté $X \rightsquigarrow E(\lambda)$, si elle admet la densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \Phi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$$

4. Loi gamma : X est de loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, noté $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha, \beta)$, si elle admet la densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.19)$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

telle que

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}, \Phi_X(u) = \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^\alpha$$

5. Loi de Cauchy : X est de loi de Cauchy, noté $X \rightsquigarrow C$, si la densité est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

Une variable de Cauchy n'admet pas d'espérance mathématique car :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^+ f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^- f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = +\infty$$

Cas discret

1. Loi de Bernoulli :

Soit X est une v.a, $X \rightsquigarrow B(p)$ qui prend les deux valeurs 0 et 1 respectivement avec $p \in]0, 1[$:

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p. \quad (1.21)$$

telle que $E[X] = p$, $Var(X) = pq$

2·Loi Binomiale :

Soit $X \rightsquigarrow B(p, n)$ de paramètres n et p , lorsque $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (1.22)$$

Et : $E[X] = np$, $Var(X) = npq$

3·Loi Géométrique :

Soit X v.a, telle que $X \rightsquigarrow G(p)$ de paramètre p avec $p \in]0, 1[$, alors :

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.23)$$

Et $p \neq 0$. On a : $E[X] = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

4·Loi de Poisson :

Soit X v.a et $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ de paramètre λ avec $\lambda > 0$:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ avec } k \in \mathbb{N}. \quad (1.24)$$

Alors : $E[X] = \lambda$, $Var(X) = \lambda$

Chapitre 2

Les copules

2.1 Copules bivariées

2.1.1 Définition et théorème d'existence

Dans toute la suite I désigne l'intervalle $[0, 1]$

Définition 2.1.1 *On appelle copule bivariée toute fonction C définie de $I^2 \rightarrow I$ qui possède les propriétés suivantes :*

$$(i) \quad \forall u \in I, C(u, 0) = C(0, u) = 0 \quad (2.1)$$

$$(ii) \quad \forall u \in I, C(u, 1) = C(1, u) = 1 \quad (2.2)$$

(iii) C est 2-croissante c'est-à-dire $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in I \times I$ avec $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0 \quad (2.3)$$

Cette définition signifie que C est une distribution avec des marginales uniformes .

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires uniformes . Considérons le vecteur aléatoire $U = (U_1, U_2)$. Nous avons

alors :

$$C(U_1, U_2) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2].$$

La propriété i) implique que

$$P[U_1 \leq 0, U_2 \leq u] = P[U_1 \leq u, U_2 \leq 0] = 0.$$

La propriété ii) implique que

$$P[U_1 \leq 1, U_2 \leq u] = P[U_1 \leq u, U_2 \leq 1] = u.$$

C est une distribution de probabilité , ce qui implique que

$$P[u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_2 \leq U_2 \leq v_2] = C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2).$$

Exemple 2.1.1 $\forall u, v \in I$, la fonction $M(u, v) = \min(u, v)$ définit une copule .

En effet :

$$\cdot \forall u, v \in I , \min(u, 0) = \min(0, u) = 0 \Rightarrow M \text{ vérifie (i)}.$$

$$\cdot \forall u, v \in I , \min(u, 1) = \min(1, u) = 1 \Rightarrow M \text{ vérifie (ii)}.$$

$$\cdot \text{ de même , } \forall u_1, u_1, v_1, v_2 \in I \text{ avec } u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$$

$$\min(u_2, v_2) \leq \min(u_2, v_1) \text{ et } \min(u_1, v_2) \leq \min(u_1, v_1) \Rightarrow M \text{ vérifie (iii)}$$

Par conséquent , M est une copule

De la même façon, on peut montrer que les fonction $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ et $\Pi(u, v) = uv$ définissent aussi des copules . M, W et Π sont appelées des copules .

Théorème de Sklar (1959)

Ce théorème est fondamentale dans la théorie des copules, établi par Skalar en 1959 il met la relation la loi jointe d'un couple aléatoire et ses marginales.

Théorème 2.1.1 Soit H la fonction de répartition jointe de deux variables aléatoires X, Y et $F(x), G(y)$ les fonctions de répartitions marginales . Alors il existe une copule C

telle que : pour tout $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (2.4)$$

Si F et G sont continues , alors C est unique

Inversement , si C est une copule et F, G des fonctions de répartition , alors la fonction H définie dans (2.4) est une fonction de répartition jointe dont les marginales sont F et G .

Les copules admettent des densités de probabilités. Si la densité c associée à la copule C existe alors, elle est définie par :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Si la fonction de répartition conjointe H est absolument continue, en utilisant le théorème de Sklar, nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X, Y) en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales F et G par :

$$h(x, y) = c(F(x), G(y)) f(x) g(y)$$

Preuve. l'existence

$$\begin{aligned} H(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= 1 - P(X > x \text{ ou } Y > y) \\ &= 1 - (P(X > x) + P(Y > y) - P(X > x, Y > y)), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} H(x, y) &= 1 - (1 - P(X \leq x)) - (1 - P(Y \leq y)) + (1 - P(X \leq x \text{ ou } Y \leq y)) \\ &= 1 - 1 + F(x) - 1 + G(y) + 1 - P(X \leq x \text{ ou } Y \leq y) \\ &= F(x) + G(y) - F(x) - G(y) + P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X \leq x, Y \leq y) \end{aligned}$$

Pour le reste de la démonstration on a besoin de la proposition suivante. ■

Proposition 2.1.1 Soit X une v.a de fonction de répartition F , alors

1. Si U est uniforme sur $[0, 1]$, alors $F^{-1}(U) \xrightarrow{d} F$.
2. Si F est continue, alors $F(X) \xrightarrow{d} U(0, 1)$.

Revenant à la preuve de théorème de Sklar

$$\begin{aligned}
 H(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\
 &= P(F_X^{-1}(U_1) \leq x, G_Y^{-1}(U_2) \leq y) \\
 &= P(U_1 \leq F(x), U_2 \leq G(y)) \\
 &= C(F(x), G(y)).
 \end{aligned}$$

A partir du théorème de Sklar on peut extraire une définition de copule dépendant de la notion de variables aléatoires comme suit :

Soient F, G les fonctions de répartitions de deux variables aléatoires X et Y respectivement.

Définition 2.1.2 Une copule C bivariée définie sur $[0, 1]^2$ est une fonction de répartition jointe de X, Y , et dont les marginales F et G sont uniformes sur $[0, 1]$.

Remarque 2.1.1 D'après la théorème (2.2.1) et la définition (2.1.1), on a :

1. $u = F(x)$ et $v = G(y)$.
2. La copule C sera appelé la copule de X et Y , et notée $C_{X,Y}$.

Corollaire 2.1.1 Soit H une fonction de répartition 2-dimensionnelle de fonctions de répartitions marginales F et G . Alors la copule C associée à H en utilisant la proposition (2.2.1) est donnée par $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$ pour tout $u, v \in [0, 1]^2$

Bornes de Fréchet-Hoeffding

Théorème 2.1.2 Soit H une fonction de répartition conjointe d'un couple aléatoire (X, Y) de fonction de répartition marginales F et G . Pour toute copule bivariée C associée à H

et $\forall (u, v) \in I^2$, on a :

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v) \quad (2.5)$$

Preuve. On a

$$\forall u, v \in I \begin{cases} C(u, v) \leq C(u, 1) = v \\ C(u, v) \leq C(1, v) = v \end{cases} \Rightarrow C(u, v) \leq \min(u, v) = M \quad (2.6)$$

De iii) de la définition (2.1.1) et $\forall u, v \in I$, on a :

$$C(u, v) \geq C(u, 1) + C(1, v) - C(1, 1) \Rightarrow C(u, v) \geq (u + v - 1) \text{ or}$$

$$\forall u, v \in I, C(u, v) \geq 0$$

$$\Rightarrow C(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0) = W(u, v) \quad (2.7)$$

En combinant (2.6) et (2.7), on a :

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

Les copules W et M sont appelées borne inférieure (respectivement borne supérieure) de Fréchet-Hoeffding ou copule minimale (respectivement copule maximale) . ■

2.1.2 Propriétés d'une copule

1.Symétrie :

Soient X, Y deux v.a continues, de fonction de répartition jointe H et de marginales F et G , et soit C une copule .

Définition 2.1.3 On dit que X, Y sont échangeable si seulement si $F = G$ et

$$C(u, v) = C(v, u) \text{ pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2 .$$

Si $C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, on dit que C est symétrique.

2.Théorème d'invariance :

Ce théorème est essentielle à la théorie des copules.

Théorème 2.1.3 Soient deux v.a continues X , Y de marginales F et G et de copule $C_{X,Y}$. Si α et β sont deux fonctions strictement croissantes, alors

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}.$$

La copule $C_{X,Y}$ est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

Preuve. On peut démontrer ce théorème facilement à l'aide de lois de probabilité, comme suit : soient F_1, G_1, F_2, G_2 les fonctions de répartition de $X, Y, \alpha(X)$ et $\beta(Y)$, respectivement.

Les fonctions α et β sont strictement croissantes, alors

$$F_2 = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x))$$

aussi

$$G_2 = P(\beta(Y) \leq y) = P(Y \leq \beta^{-1}(y)) = G_1(\beta^{-1}(y))$$

$\forall x, y \in \bar{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

■

3·Ordre :

Soit C_1, C_2 deux copules

Définition 2.1.4

On dit que C_1 est plus petite que C_2 ou C_2 est plus grande que C_1 et on note $C_1 \prec C_2$ si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \text{ pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2$$

Exemple 2.1.2 La copule $W = \max(u + v - 1, 0)$ est la plus petite copule et $M = \min(u, v)$ est la plus grande copule .

4·Convexité et concavité :

Soit $(a, b), (c, d) \in [0, 1]^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Définition 2.1.5 Une copule C est concave (convexe) si on a :

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \geq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d).$$

5·Copule harmonique :

Soit C une copule dont les dérivées partielles de second ordre sont continues dans $[0, 1]^2$.

Définition 2.1.6 C est harmonique dans $[0, 1]^2$ si C satisfait l'équation de Laplace dans $[0, 1]^2$

$$\nabla^2 C(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} C(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} C(u, v) = 0. \quad (2.8)$$

Exemple 2.1.3

La copule $\pi = uv$ est une copule harmonique : $\frac{\partial^2}{\partial u^2} uv = 0 = \frac{\partial^2}{\partial v^2} uv$.

6·Copule homogène

Définition 2.1.7 Une copule C est homogène de degré k si $\exists k \in \mathbb{R}, \forall u, v, \lambda \in I, C(\lambda u, \lambda v) = \lambda^k C(u, v)$.

Exemple 2.1.4

(a) La fonction $\pi = uv$ est homogène de degré 2, car $(\lambda u)(\lambda v) = \lambda^2 uv$.

(b) La fonction $M = \min(u, v)$ est homogène de degré 1 :

$$\min(\lambda u, \lambda v) = \lambda \min(u, v).$$

Dérivées partielles

Les dérivées partielles de $C(u, v)$ existent presque sûrement pour tout

$$u, v \in [0, 1] \quad 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1.$$

2.1.3 Exemple de copules usuelles

1-Copules d'indépendance

Soient X, Y deux v.a continues, et H la fonction de répartition jointe dont les marginales sont F et G .

Définition 2.1.8 *Si X et Y sont indépendantes, alors la copule associée est le produit de ses marginales comme suit*

$$C_{X,Y}(x, y) = F(x)G(y).$$

Cette copule est harmonique (voir 2.8) et homogène de degré 2 (voir 2.9)

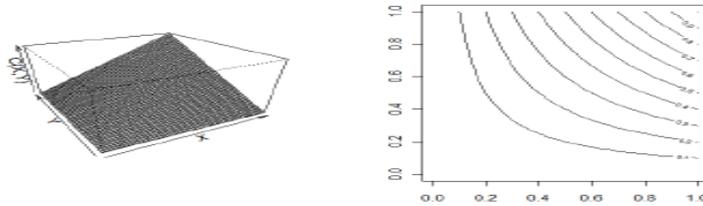


Fig.2.1 : Graphique de la copule d'indépendance et son contour.

2-Copule de survie

Cette copule est très intéressante, car dans la majorité des applications on s'intéresse à la durée de vie des individus dans une certaine population. Dans le cas univarié la

probabilité de survie est définie par :

$$P(X \succ x) = 1 - F(x) ;$$

telle que F représente la fonction de répartition de X .

De même pour le cas bivarié , si H est la fonction de répartition jointe associée au couple aléatoire (X, Y) , et soit $C_{X,Y}$ sa copule de la fonction jointe de survie est $\bar{H}(x, y) = P(X \succ x, Y \succ y)$ et les marginales sont \bar{F} et \bar{G} , alors :

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= P(X \succ x, Y \succ y) \\ &= 1 - P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C_{X,Y}(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)) . \end{aligned}$$

Donc la copule de survie \hat{C} de X , Y est

$$\hat{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C_{X,Y}(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)) .$$

3.Copule Gaussienne

La copule gaussienne de deux variables aléatoires X , Y est définie par :

$$C_\rho^\phi(u, v) = \phi_\rho(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) ,$$

telle que ϕ_ρ est la fonction de répartition jointe de la loi normale bivariée, de coefficient de corrélation linéaire $\rho \in [-1, 1]$ et ϕ est la fonction de la loi normale standard, Par suite :

$$\phi_\rho(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho_{X,Y}st - s^2 - t^2}{1-\rho_{X,Y}^2}\right) ds dt .$$

Cette copule est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ .

- $C_\rho^\phi(u, v) \rightarrow W(u, v)$ quand $\rho \rightarrow -1$ et- $C_\rho^\phi(u, v) \rightarrow M(u, v)$ quand $\rho \rightarrow 1$.

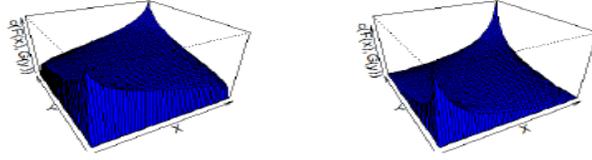


Fig.2.2 : Densité de la copule gaussienne pour $\rho = 0.2$ (à gauche) et $\rho = 0.7$ (à droite).

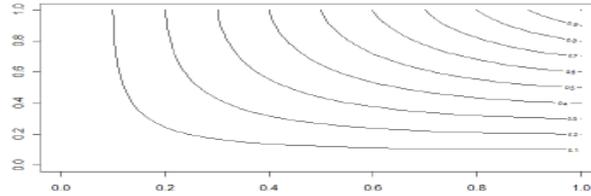


Fig.2.3 : Contour de copule gaussienne.

4. Copule de Student

Dans le cas univarié, la fonction de répartition de Student est définie par

$$t_v(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{S^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ds,$$

telle que Γ est la fonction d'Euler.

Dans le cas bivarié, soit $\rho \in [-1, 1]$, alors la fonction de répartition bivariée est

$$t_{\rho,v}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt.$$

Définition 2.1.9 La copule de Student est une copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ et de degré de liberté v . Cette copule est définie par

$$C_{\rho,v}^t(u,v) = t_{\rho,v}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt.$$

Sa densité est définie par

$$c_{\rho,v}^t(u,v) = \rho^{\frac{-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^2} \left(\frac{\left(\frac{1+S_1^2+S_2^2-2\rho S_1 S_2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\left(\frac{v-2}{2}\right)}}{\prod_{j=1}^2 (1+S_j^2)^{-\left(\frac{v+2}{2}\right)}} \right),$$

où $S_1 = t_v^{-1}(u)$, $S_2 = t_v^{-1}(v)$.

Remarque 2.1.2 (a) La copule gaussienne et la copule de Student appartiennent à la famille de copules elliptique.

(b) Si le degré de liberté $v \rightarrow \infty$, alors la copule de student converge vers la copule gaussienne et dans ce cas très difficile de différencier entre ces deux copules

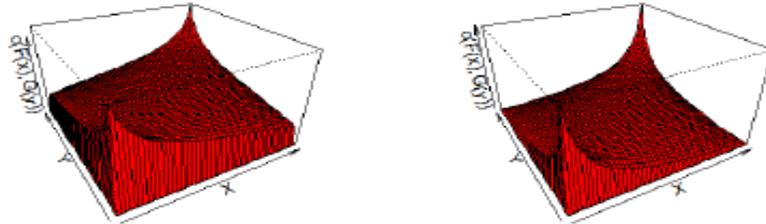


Fig.2.4 : Densité de copule de Student pour $\rho = 0.2$ (à gauche) et $\rho = 0.5$ (à droite) et $v = 5$.

5. Copule archimédienne

Cette famille de copule a été nommée par Ling (1965), mais il a été reconnu par Schweizer et Sklar (1961) dans l'étude de t-norme. Avant d'être introduit dans la finance et aussi

dans d'autres domaines. Mais avant de définir cette famille de copules, on a besoin de présenter quelques définitions, et propriétés utiles pour définir les copules archimédiennes.

Définition 2.1.10 Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$, continue, décroissante et convexe, telle que $\varphi(1) = 0$, alors φ est dite *générateur*. La pseudo-inverse de φ est définie par :

$$\varphi^{-1}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) & \text{si } 0 \leq u \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq u \leq +\infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

Remarque 2.1.3 Si $\varphi(0) = \infty$, alors φ est strictement décroissante.

Définition 2.1.11 Une copule est dite *Archimédienne* si elle s'écrit sur la forme :

$$C^A(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (2.10)$$

Propriété 2.1.1 Cette copule est

(a) **Symétrique**

$$C^A(u, v) = C^A(v, u), \forall (u, v) \in [0, 1]^2.$$

(b) **Associative**

$$C^A(C^A(u, v), z) = C^A(u, C^A(v, z)), \forall (u, v, z) \in [0, 1]^3.$$

(c) **De contour convexe**

$$\{(u, v) \in [0, 1]^2 : \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(k)\}, k > 0.$$

(d) **De densité**

$$c^A(u, v) = \frac{-\varphi''(C(v, u)) \dot{\varphi}(u) \dot{\varphi}(v)}{(\dot{\varphi}(C(v, u)))^3}.$$

(e) Si c est une constante strictement positive, alors $c\varphi$ est un générateur de la copule C^A .

Exemple 2.1.5 (a) Pour $\varphi(t) = -\ln(t)$ comme générateur et de pseudo-inverse $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$. on génère la copule C par (2.11);

$$C^A(u, v) = \exp(-[(-\ln(u)) + (-\ln(v))]) = uv = \Pi(u, v).$$

Π est une copule archimédienne stricte .

(b) Soit $\varphi(t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$. Donc $\varphi^{-1}(t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$ et 0 pour $t > 1$, alors $\varphi^{-1}(t) = \max(1 - t, 0)$. D'après (2.11)

on a :

$$C^A(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v),$$

donc la copule $W(u, v)$ est Archimédienne .

Famille des copules archimédienne

Les copules les plus utilisés de cette famille sont les copule de Gumbel; de Clayton et de Frank, définies dans ce qui suit .

1. Copule de Gumbel

En prenant comme générateur $\varphi(t) = (-\ln(t))^a$ avec $a > 1$. La fonction ainsi définie satisfait à les conditions du théorème sur les copules Archimédiennes, ce qui permet générer la copule de Gumbel en prenant :

$$C_a^{Gum}(u, v) = \exp\left\{-\left((-\ln(u))^a + (-\ln(v))^a\right)^{\frac{1}{a}}\right\}.$$

Les cas limites suivant la valeur du paramètre sont donc :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C_a = C^M.$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} C_a = C^\Pi.$$

2. Copule de Clayton

Pour $\varphi(t) = a\left(t^{-\frac{1}{a}} - 1\right)$ avec $a > 0$. Nous obtenons ainsi la copule de Clayton

$$C_a^{Cla}(u, v) = \left\{u^{-\frac{1}{a}} + v^{-\frac{1}{a}} - 1\right\}^{-a}.$$

Les cas limites suivant la valeur du paramètre sont donc :

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} C_a = C^W.$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} C_a = C^{\text{II}}.$$

3. Copule de Frank

Si $\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-at}-1}{e^a-1}\right)$ avec $a \neq 0$. On obtient ainsi la copule de Frank qui est donc définie comme suit :

$$C_a^{\text{Fr}}(u, v) = -\frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{(e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}{e^{-a} - 1} \right).$$

Et de densité

$$c^{\text{Fr}}(u, v) = \frac{(a-1) \ln a^{u+v}}{(a-1 + (a^u - 1)(a^v - 1))^2}.$$

Les cas limites sont donc les suivants :

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} C_a = C^W.$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} C_a = C^{\text{II}}.$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C_a = C^M.$$

On présente dans le graphique suivant les densités des copules archimédiennes et leurs contours.

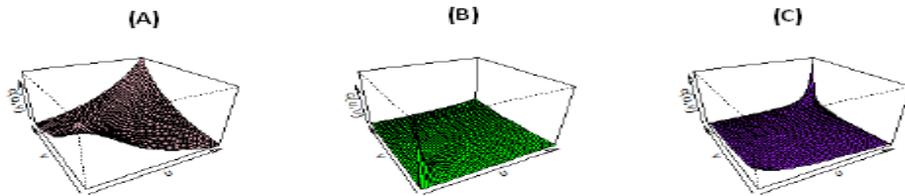


Fig.2.5 : Densités de copules Frank(A) pour $a = 2$, Clayton(B) pour $a = 3$ et Gumbel(C) pour $a = 1.5$

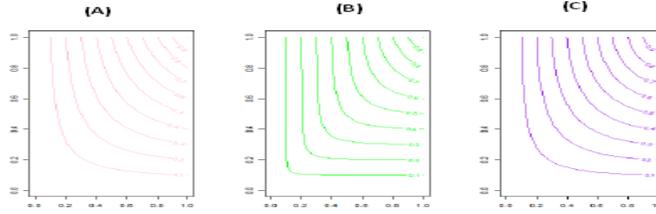


Fig.2.6 : Contours de copules Frank (A), Clayton (B) et Gumbel (C).

6. Copule de valeurs extrêmes

Avant de citer les copules de valeurs extrêmes, on va d'abord présenter les lois de ces variables aléatoires. Pour cela, considérons X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires i.i.d. Soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

Théorème 2.1.4 (Fisher-Tippett, 1928)

S'il existe deux suites $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$, telle que $\frac{M_n - d_n}{c_n}$ converge en distribution, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = G_\alpha(x), \text{ au } M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

$G_\alpha(x)$ prend une des trois lois suivantes :

Fréchet	$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0.$
Weibull	$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(x)^\alpha\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0.$
Gumbel	$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, x \in \mathbb{R}.$

Exemple 2.1.6 (Loi uniforme)

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, \theta]$ telle que $\theta > 0$.

Lemme 2.1.1 La statistique $(n(\frac{M_n}{\theta} - 1))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire de Weibull, telle que $\alpha = 1$

Démonstration

On pose $G(x) = P\left(n\left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right) \leq x\right)$ et $F_{X_n} = P(\max(X_i) \leq x) = (F(x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ car la fonction de répartition de la loi uniforme $F(x) = \frac{x}{\theta}$, alors

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P\left(n\left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right) \leq x\right) \\ &= P\left(\frac{M_n}{\theta} \leq \frac{x}{n} + 1\right) \\ &= P\left(M_n \leq \theta\left(\frac{x}{n} + 1\right)\right) \\ &= F_{M_n}\left(\theta\left(\frac{x}{n} + 1\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ G(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \end{aligned}$$

Donc $G(x) = \exp(x)$ a une loi de Weibull.

Soit $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)_n$ couples aléatoires i.i.d d'une copule commune C , et $C_{(n)}$ la copule associée à $X_{(n)} = \max(X_i)$ et $Y_{(n)} = \max(Y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Alors

$$C_{(n)}(u, v) = C^n\left(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}\right), 0 \leq u, v \leq 1.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} H_{(n)}(x, y) &= P(\max(X_i) \leq x, \max(Y_i) \leq y) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x \text{ et } Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \dots, Y_n \leq y) \\ &= (H(x, y))^n \\ &= C(F(x), G(y))^n \\ &= C^n\left(\left(F_{(n)}(x)\right)^{\frac{1}{n}}, \left(G_{(n)}(y)\right)^{\frac{1}{n}}\right). \end{aligned}$$

La limite de la suite $\{C_{(n)}\}$ nous donne la définition suivante.

Définition 2.1.12 Une copule C^* est copule de valeurs extrêmes bivariées s'il existe une

copule C , telle que

$$C^*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n \left(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}} \right).$$

Loi de valeurs extrêmes bivariées

Soit $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)_n$ copules aléatoires i.i.d de distribution commune H . Alors il existe des $a_n, c_n > 0$ et $b_n, d_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{M_{X,n} - b_n}{a_n} \leq x; \frac{M_{Y,n} - d_n}{c_n} \leq y \right) = G_\theta(x, y),$$

Avec G est une distribution non dégénérée si et seulement si les lois marginales de G sont des lois de valeurs extrêmes univariées .

Théorème 2.1.5 Pour toute copule de valeurs extrêmes bivariées C^* il existe une fonction convexe A définie de $[0, 1]$ dans $[\frac{1}{2}, 1]$, telle que

$$C^*(u, v) = \exp \left[\left(-\ln(u) + \ln(v) A \left(\frac{\ln u}{\ln(u) + \ln(v)} \right) \right) \right].$$

De plus A vérifie

$$\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq t, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Le générateur A est dite générateur ou fonction de dépendance de Pickands.

Caractérisation des domaines d'attraction

Nous allons donner des conditions sur la fonction de répartition F pour qu'elle appartienne à l'un des trois domaines d'attractions. Dans la suite, on note $x_F = \sup \{x \mid F(x) < 1\}$ le point terminal de F et $F^{\leftarrow}(y) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq y\}$ l'inverse généralisée de F

Domaine d'attraction de Fréchet

Théorème 2.1.6 F appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice de valeur extrême $\zeta > 0$ si et seulement si $x_F = +\infty$ et $1 - F$ est une fonction à variations

régulières d'indice $\frac{-1}{\zeta}$. Dans ce cas, un choix possible pour les suites a_n et b_n est :

$$a_n = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \text{ et } b_n = 0. \quad (2.11)$$

Remarque 2.1.4 On déduit du théorème (2.1.6) que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice de valeur extrême $\zeta > 0$ si et seulement si $x_F = +\infty$ et $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\zeta}} l(x)$, ou l est une fonction à variations lentes.

Domaine d'attraction de Weibull

Théorème 2.1.7 F appartient au domaine d'attraction de Weibull avec un indice de valeur extrême $\zeta < 0$ si et seulement si $x_F < +\infty$ et $1 - F^*$ est une fonction à variations régulières d'indice $\frac{1}{\zeta}$ avec

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F(x_F - x^{-1}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, un des choix possible pour les suites a_n et b_n est :

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \text{ et } b_n = x_F. \quad (2.12)$$

Remarque 2.1.5 On déduit du théorème (2.1.7) que F appartient au domaine d'attraction de Weibull avec un indice de valeur extrême $\zeta < 0$ si et seulement si $x_F < +\infty$ et $1 - F(x) = (x_F - x)^{-\frac{1}{\zeta}} l[(x_F - x)^{-1}]$.

Domaine d'attraction de Gumbel

Rappelons tout d'abord la définition d'une fonction de Von-Mises.

Définition 2.1.13 Soit F une fonction de répartition de point terminal x_F fini ou infini. S'il existe $z < x_F$ tel que

$$1 - F(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, z < x < x_F, \quad (2.13)$$

ou $c > 0$ et a est une fonction positive absolument continue de densité \dot{a} vérifiant $\lim_{x \uparrow x_F} \dot{a}(x) = 0$, alors F est une fonction de Von-Mises et \dot{a} est sa fonction auxiliaire.

Théorème 2.1.8 F appartient au domaine d'attraction de Gumbel si et seulement si il existe une fonction de Von-Mises F^* telle que pour $z \langle x \langle x_F$ on ait :

$$1 - F(x) = c(x) [1 - F^*(x)] = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad (2.14)$$

ou $c(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow x_F$.

Famille paramétriques des copules de valeurs extrêmes

Il existe essentiellement deux grandes familles de modèle paramétrique usuels de copules de valeurs extrêmes bivariées : le modèle mixte ou de Tawn (1988) et le modèle logistique ou de Gumbel (1960). Les autres modèles proviennent généralement d'une extension symétrique de ces modèles. Les modèles Galambos et Husler-Reiss et le modèle Marchal-Olkin, cette copule dépend de deux paramètres.

Les copules des différentes familles sont présentés dans le tableau suivant :

famille	C_θ^*	$A_\theta(t)$
Indépendance	uv	$A(t)$
Gumbel ₁	$\exp \left\{ - (\tilde{u}^\theta + \ln \tilde{v}^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \theta \geq 1$	$[t^\theta + (1 - t^\theta)]^{\frac{1}{\theta}}$
Gumbel ₂	$uv \exp \left\{ \theta \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{\tilde{u} + \tilde{v}} \right\}, \theta \geq 0$	$t^2 - \theta t + 1$
Galambos	$uv \exp \left\{ - (\tilde{u}^{-\theta} + \tilde{v}^{-\theta})^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$1 - [t^\theta + (1 - t^\theta)]^{\frac{1}{\theta}}$
Husler-Reiss	$\exp \left\{ - \tilde{v} \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \right) \right] - \tilde{u} \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \right) \right] \right\}, \theta \geq 0$	$t \Phi \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left(\frac{t}{1-t} \right) \right] + \\ t \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left(\frac{t}{1-t} \right) \right] \end{array} \right.$
Marchal-Olkin	$u^{1-\alpha} v^{1-\beta} \min(u^\alpha, v^\beta) = \begin{cases} uv^{1-\beta} & \text{si } u^\alpha < v^\beta \\ u^{1-\alpha} v & \text{si } u^\alpha > v^\beta \end{cases}$	$\left\{ \begin{array}{l} \max \{1 - \alpha t, 1 - \beta(1 - t)\}, \\ \alpha \leq \beta, \beta \geq 0 \end{array} \right.$
Tawn	$uv \exp \left\{ \begin{array}{l} -(1-\sigma) + (\theta - \sigma) \tilde{u} \\ [(\theta) \tilde{u}] + [\sigma \tilde{v}]^{\frac{1}{\lambda}} \end{array} \right\}$	$\left[\begin{array}{l} (1-\sigma) + (1-\sigma)t + \\ [(\theta t)^\lambda + (\sigma(1-t)^\lambda)] \end{array} \right]$

TAB.1 : Quelques copules de valeurs extrêmes

Avec $\tilde{u} = -\ln u$, $\tilde{v} = -\ln v$ et Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Remarque 2.1.6 *La copule de Gumble est la seule copule qui appartient à la famille de copules archimédiennes et à la famille de copules de valeurs extrêmes.*

Chapitre 3

Estimation

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité $f(x, \theta)$ dépend d'un paramètre θ appartenant à \mathbb{R}^k , au vu d'un échantillon de X il s'agit de déterminer au mieux la valeur θ_0 de θ .

Pour cela il existe deux types de l'estimations :

3.1 Estimation ponctuelle

Définition 3.1.1 *L'estimation est dite ponctuelle si on estime un paramètre de la population avec un seul nombre.*

· La statistique T est fonction définie par :

$$(X_1, \dots, X_n) : T = \varphi(X_1, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

Exemple 3.1.1 : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$

3.1.1 Estimateur

On appelle estimateur l'application $T : L \rightarrow D$ telle que $(X_1, \dots, X_n) \rightarrow T(X_1, \dots, X_n)$.

Exemple 3.1.2 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur de l'espérance mathématique de X .

Propriétés d'un estimateur .

Estimateur biaisé

Si T est un estimateur de θ , on appelle biais de T pour la valeur θ la valeur :

$$b(T) = E[T] - \theta, E[T] \neq \theta \quad (3.2)$$

Exemple 3.1.3 $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 de biais $(-\frac{1}{n}\sigma^2)$.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur ponctuelle sans biais de m ;

et

$$T = \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \quad (3.3)$$

est un estimateur sans biais de σ^2 .

Estimateur asymptotiquement sans biais

Un estimateur T_n est dit asymptotiquement sans biais si le biais diminue quand la taille de l'échantillon augmente $\lim_{n \rightarrow \infty} E[T_n] = \theta$.

Exemple 3.1.4 $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2

Estimateur convergent

L'estimateur T_n est convergent en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$ fixé la quantité : $P(\|T_n - \theta\| > \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Pour tout θ de Θ , $T_n \xrightarrow{P} \theta \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 P_\theta(|T_n - \theta| < \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Proposition 3.1.1 Un estimateur T_n de θ asymptotiquement sans biais et dont la variance tend vers 0 est convergent

Théorème 3.1.1 Un estimateur T_n dont l'espérance mathématique tend vers θ et la variance tend vers 0 est convergent pour θ ceci résulte de la conséquence de convergence en probabilité.

Ainsi \bar{X}_n, S_n^2 mais aussi \hat{S}_n^2 sont des estimateur convergents de $E[X]$ et $Var(X)$

Remarque 3.1.1 Pour qu'un estimateur T_n de θ asymptotiquement sans biais soit convergent il faut et implique :

$$Var(T_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

Estimateur exhaustif

On dit que T_n est un estimateur exhaustif pour $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ si la loi conditionnelle de (X_1, \dots, X_n) sachant T_n ne dépend pas de θ .

Estimateur efficace

Théorème 3.1.2 (Inégalité de Gramer-Rao au de Fréchet) Soit T un estimateur sans biais pour θ de dimension 1. Sous certaines conditions de régularité on a nécessairement pour tout $\theta \in \Theta : V_\theta(T) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$

ou $I(\theta)$ est l'information de Fisher, qui vaut :

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right)^2 \right]. \quad (3.5)$$

S'estimateur sans biais pour θ atteint la borne de Gramer-Rao, on dit qu'il est efficace

Exemple 3.1.5 Soit $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$ et soit l'échantillon i.i.d (X_1, \dots, X_n) de même loi que X on a :

$$I_n(m) = \frac{n}{\sigma^2}$$

et

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad g(m) = m$$

d'ou :

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\dot{g}^2(m)}{I_n(m)}$$

\bar{X}_n est un estimateur efficace de m

3.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Nous présenterons la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance et qui relève de l'approche classique, ainsi que quelques exemples il la stratifs

Définition 3.1.2 Soit le modèle statistique (X, P_θ) et $f(x, \theta)$ la densité de P_θ relativement à la mesure dominante ν . Considérons un échantillon aléatoire (X_1, \dots, X_n) de (X, P_θ) . On

appelle vraisemblance la fonction :

$$L_n(\theta) = f(X_1, \dots, X_n, \theta). \quad (3.6)$$

Si les variables $X_j, j = 1, \dots, n$ sur i.i.d, on a :

$$f(X_1, \dots, X_n, \theta) = \prod_{j=1}^n f(X_j, \theta). \quad (3.7)$$

Définition 3.1.3 Soit $L_n(\theta)$ la vraisemblance au point $\theta \in \Theta$. On appelle estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV) la statistique $\hat{\theta}_n = \theta(X_1, \dots, X_n)$ telle que

$$L_n(\hat{\theta}_n) \geq L_n(\theta) \forall \theta \in \Theta \text{ p.s.} \quad (3.8)$$

Quelques exemples

- **Calcul de l'EMV du paramètre d'une loi de Poisson de paramètre λ**

Soient $X_1, \dots, X_n \sim P(\lambda)$. On a

$$L_n(\lambda) = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{j=1}^n X_j} \prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!}.$$

$$l_n(\lambda) = -n\lambda + \sum_{j=1}^n X_j \log \lambda + c.$$

$$\frac{\partial l_n(\hat{\lambda}_n)}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\hat{\lambda}_n} = 0 \iff \hat{\lambda}_n = \bar{X}_n.$$

et

$$\frac{\partial^2 L_n(\hat{\lambda}_n)}{\partial^2 \lambda} = -\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\hat{\lambda}_n^2} < 0. \quad (3.9)$$

Donc, $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$ (la moyenne empirique) est l'EMV dans le cas d'un modèle de Poisson.

3.2 Estimation par intervalle de confiance

Soit θ un paramètre de la population on veut déterminer un intervalle $[a, b]$ recouvrant la vraie valeur de θ . Fournir un tel intervalle s'appelle une estimation par intervalle de confiance de θ .

Définition 3.2.1 Soit $\alpha \in [0, 1]$ on appelle intervalle de confiance pour le paramètre θ ; de niveau de confiance $1 - \alpha$ la famille des ensembles $C_\alpha(\theta)$ telle que :

$$P(\theta \in C_\alpha(\theta)) = 1 - \alpha.$$

3.2.1 Estimation de la moyenne d'une loi normale

Nous considérons une variable X de loi $N(\mu, \sigma^2)$, donc de loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Nous cherchons à estimer μ à l'aide d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes toutes de loi $N(\mu, \sigma^2)$.

Le premier cas est celui où σ est connue. L'intervalle de confiance qu'on choisit, alors est

$$\left[\bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (3.10)$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi Normale $N(0, 1)$.

Lorsque σ n'est pas connue, on considère

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]. \quad (3.11)$$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

3.2.2 Estimation de la variance d'une loi normale

Soient $X \sim N(m, \sigma^2)$ et X_1, \dots, X_n n variables i.i.d selon la loi de X .

1- Cas m est connue

Soit $\check{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$. On a

$$n \frac{\check{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

D'où

$$P \left(\chi_{\frac{\alpha_1}{2}}^2 \leq n \frac{\check{S}_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2 \right) = 1 - \alpha.$$

ou $\chi_{\alpha_1}^2$ est le fractile d'ordre α_1 de la loi $\chi^2(n)$, et $\chi_{1-\alpha_2}^2$ est le fractile d'ordre $1 - \alpha_2$ de la loi $\chi^2(n)$.

L'intervalle de confiance pour la variance d'une loi normale s'écrit donc au niveau $1 - \alpha$ sous la forme suivante

$$IC(\sigma^2) = \left[n \frac{\check{S}_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2}, n \frac{\check{S}_n^2}{\chi_{\frac{\alpha_1}{2}}^2} \right]. \quad (3.12)$$

Remarque 3.2.1 *Cet intervalle n'est pas centré car la loi du khi-deux n'est pas symétrique.*

2- Cas où m est inconnue

On considère la variance empirique $\check{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. On sait que

$$\frac{(n-1) \check{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

On a donc

$$P \left(\chi_{\frac{\alpha_1}{2}}^2 \leq (n-1) \frac{\check{S}_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2 \right) = 1 - \alpha.$$

ou $\chi_{\alpha_1}^2$ est le fractile d'ordre α_1 de la loi $\chi^2(n-1)$, et $\chi_{1-\alpha_2}^2$ est le fractile d'ordre $1 - \alpha_2$ de la loi $\chi^2(n-1)$.

L'intervalle de confiance pour la variance d'une loi normale s'écrit donc au niveau $1 - \alpha$ sous la forme suivante.

$$C(\sigma^2) = \left[(n-1) \frac{\check{S}_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}^2}, (n-1) \frac{\check{S}_n^2}{\chi_{\frac{\alpha_1}{2}}^2} \right] \quad (3.13)$$

Chapitre 4

Estimation de copules

L'estimation en statistique est une opération qui permet de calculer la valeur inconnue d'un paramètre θ du modèle statistique (Ω, P) à partir d'un échantillon observé (X_1, \dots, X_n) , on prend comme exemple la loi normale de paramètres μ et σ^2 ($N(\mu, \sigma^2)$), telle que l'estimateur de μ est la moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et l'estimateur de σ^2 est la variance $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Il existe beaucoup de méthodes d'estimation telle que la méthode du maximum de vraisemblance (méthode classique), la méthode des moments...etc, et comme les copules sont des fonctions de répartition paramétriques comme on a vu dans le deuxième chapitre, alors on a besoin d'estimer ces paramètres. Dans quatrième chapitre, on va expliquer les méthodes d'estimation des paramètres d'une copule, mais avant on donne la notion de copule empirique et la mesure d'association .

4.1 Fonction de répartition empirique

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille n de loi F . La fonction de répartition empirique est donc définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(X_i \leq x)} \quad (4.1)$$

Cet estimateur conduit à un estimateur non paramétrique naturel d'une copule.

Propriétés asymptotiques

- F_n est un estimateur sans biais

$$E(F_n(x)) = F(x).$$

- Par la loi forte des grands nombres

$$F_n(x) \xrightarrow{p,s} F(x).$$

- F_n est asymptotiquement normale de variance $F(x)(1 - F(x))$

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \rightarrow N(0, F(x)(1 - F(x))).$$

- F_n est un estimateur uniformément consistant de F , c'est-à-dire

$$\|F_n - F\|_\infty \xrightarrow{p,s} 0.$$

4.2 Copule empirique

La copule empirique a été introduite et d'abord étudié par Deheuvels (1979)[9], qui l'appelle fonction de dépendance empirique.

Dans le cas bivarié, nous donnons une définition.

4.2.1 Cas bivarié

Définition 4.2.1 Soit $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ un échantillon de taille n d'une copule de variables aléatoires. La copule empirique est la fonction \hat{C} définie par

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_{(i)} \text{ et } y \leq y_{(j)}}{n},$$

ou $x_{(i)}$ et $y_{(j)}$ représentent les statistiques d'ordre associées à l'échantillon.

La fonction densité empirique de la copule C notée \hat{c} est donnée par :

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } (x_{(i)}, y_{(j)}) \text{ est un élément de l'échantillon;} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Elle est parfois appelée «fréquence empirique de la copule»; il existe une relation entre \hat{C} et \hat{c} donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \hat{c}_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right),$$

et

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right).$$

Beaucoup d'autres mesures de dépendance sont connues et utilisées telles que les mesures de concordance le tau de kendall, le de rho de Spearman dites aussi mesures d'association et verifiant certaines conditions.

4.3 Mesure d'association

Concordance et discordance

Soient (x_i, y_i) et (x_j, y_j) deux observations d'un couple de variables aléatoires (X, Y) pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 4.3.1 On dit que (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont concordantes si et seulement si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0 \Leftrightarrow (x_i < x_j \text{ et } y_i < y_j) \text{ ou } (x_i > x_j \text{ et } y_i > y_j)$$

Définition 4.3.2 On dit que (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont discordantes si et seulement si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \Leftrightarrow (x_i < x_j \text{ et } y_i > y_j) \text{ ou } (x_i > x_j \text{ et } y_i < y_j)$$

Exemple 4.3.1 Soit un échantillon de taille $n = 4$ de données bivariées $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$. Les

observations x_i et y_i présentés dans le tableau suivant

x_i	2	-6	-5	4
y_i	1	2	3	4

A partir de cet échantillon nous donnons les paires concordantes et discordantes :

$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$	$(x_1 - x_4)(y_1 - y_4)$	$(x_2 - x_4)(y_2 - y_4)$	$(x_3 - x_4)(y_3 - y_4)$
$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$	$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$	$(x_1 - x_3)(y_1 - y_3)$	$(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)$

Mesure de concordance

Définition 4.3.3 Une mesure numérique d'association k entre deux variables aléatoires continues X et Y dont la copule C est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. k est défini pour chaque couple (X, Y) des variables aléatoires continues ;
2. $-1 \leq k_{X,Y} \leq 1, k_{X,X} = 1, \text{ et } k_{X,-X} = -1$;
3. $k_{X,Y} = k_{Y,X}$;
4. Si X et Y sont indépendants, alors $k_{X,Y} = k_{\Pi} = 0$;
5. $k_{-X,Y} = k_{X,-Y} = -k_{X,Y}$;
6. Si C_1 et C_2 sont copules telles que $C_1 \prec C_2$, puis $K_{C_1} \leq K_{C_2}$;
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ est une suite de variables aléatoires continues de copule C_n , et que C_n converge simplement vers C , puis $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{C_n} = k_C$.

Théorème 4.3.1 Soit (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont des vecteurs indépendants de variables aléatoires continues de fonctions de répartition jointe H_1 et H_2 respectivement, avec F et G les marginales associées à X_1, X_2 et Y_1, Y_2 respectivement. On note par C_1 et C_2 les copules associées à H_1 et H_2 de sorte que :

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y)) \text{ et } H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y)).$$

On note par Q la différence entre les probabilités de mesure de concordance et de

discordance des (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) , c'est-à-dire :

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0], \quad (4.2)$$

alors

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (4.3)$$

Preuve. Puisque toute les variables aléatoires sont continus, alors

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0],$$

et donc de (4.2) on a :

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1.$$

or

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2],$$

par l'intégration sur la distribution des vecteurs (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2)

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1], \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} P[X_2 < x, Y_2 < y] dC_1(F(x), G(y)), \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

Si on pose $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on obtient :

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} P[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)), \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)), \\
&= \iint_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v),
\end{aligned}$$

où (U, V) sont des variables aléatoires uniformes $(0, 1)$, $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$, et donc :

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v),$$

ainsi

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

D'après le théorème (4.3.1), on déduit

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

Corollaire 4.3.1 Soient C_1, C_2 deux copules, et Q une mesure de concordance et discordance définie par (4.3.1), et possédant les propriétés suivantes :

1. Q est symétrique :

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1).$$

2. Q est nondécroissante dans chaque argument :

$$\text{si } C_1 < \dot{C}_1 \text{ et } C_2 < \dot{C}_2 \text{ pour tous } (u, v) \in I^2, \text{ Alors } Q(C_1, C_2) \leq Q(\dot{C}_1, \dot{C}_2).$$

3. On peut remplacer la copule C par la copule de survie \dot{C} dans Q ,

$$Q(C_1, C_2) = Q(\dot{C}_1, \dot{C}_2).$$

■

Exemple 4.3.2 La fonction Q est mesuré pour les copules M, W et Π .

Le support de M est la diagonale $u = v$ dans I^2 . Si g est une fonction intégrable dont le domaine I^2 , telle que

$$\iint_{I^2} g(u, v) dM(u, v) = \int_0^1 g(u, u) du.$$

Par conséquent nous avons

$$- Q(M, M) = 4 \iint_{I^2} \min(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1$$

$$- Q(M, \Pi) = 4 \iint_{I^2} uv dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 du - 1 = \frac{1}{3}, \text{ et } Q(M, W) = 4 \iint_{I^2} \max(u +$$

$$v - 1, 0) dM(u, v) - 1 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 (2u - 1) du - 1 = 0.$$

De la même façon, car le support de W est la diagonale $v = 1 - u$, nous avons

$$\iint_{I^2} g(u, v) dW(u, v) = \int_0^1 g(u, 1 - u) du,$$

$$\text{et donc } - Q(M, \Pi) = 4 \iint_{I^2} uv dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1 - u) du - 1 = \frac{-1}{3} \text{ et } Q(M, W) =$$

$$4 \iint_{I^2} \max(u + v - 1, 0) dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = -1.$$

Enfin, puisque $d\Pi(u, v) = dudv$, alors

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \iint_{I^2} uv d\Pi(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv dudv - 1 = 0.$$

Remarque 4.3.1 Dans l'exemple ci-dessus, soit C une copule arbitraire, nous avons tou-

jours

$$Q(C, M) \in [0, 1], Q(C, W) \in [-1, 0] \text{ et } Q(C, \Pi) \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3} \right].$$

Tau de Kendall

Soit (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) de vecteurs aléatoires continues, indépendants et identiquement distribués de fonction de répartition jointes H . Le tau de Kendall du vecteur aléatoire (X, Y) est défini par

$$\tau_{(X,Y)} = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}. \quad (4.4)$$

On peut définir le tau de Kendall en fonction d'une copule C , utilisant la fonction Q définie dans (4.3). Le théorème suivant représente la relation entre le tau de Kendall et les copules.

Théorème 4.3.2 Soient X, Y deux variables aléatoires continues dont la copule est C . Le tau de Kendall de X et Y est défini par

$$\tau_{(X,Y)} = Q(C; C) = 4 \int_{I^2} C(u; v) dC(u; v) - 1; \quad (4.5)$$

car les variables aléatoires $U = F(x)$ et $V = G(y)$ sont des variables aléatoires uniformes, alors l'équation (4.5) devient

$$\tau_{(X,Y)} = 4E(C(U; V)) - 1.$$

Exemple 4.3.3 Nous présentons dans le tableau suivant quelques copules et le tau de kendall correspondant :

Copule	Tau de Kendall
Normale	$2\pi^{-1} \arcsin(\rho)$
Gumbel	$\frac{(\theta-1)}{\theta}$
Frank	$\frac{1-4}{\theta} + \frac{4D_k(\theta)}{\theta}$
Clayton	$\frac{\theta}{(\theta+2)}$

telle que $D_k(\theta) = \int_0^\theta \frac{x}{\theta} \searrow (e^x - 1) dx$ est la fonction de Debye.

Tau de Kendall empirique (estimateur de tau de Kendall)

Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. Définissons les nombres c et d comme étant respectivement le nombre de paires concordantes et discordantes dans cet échantillon. On définit la version empirique du tau de Kendall par

$$\tau_n = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{C_2^n}, \text{ avec } C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}. \quad (4.6)$$

Exemple 4.3.4 En reprenant l'exemple (4.3.1) on trouve que $\tau_n = \frac{3-3}{3+3} = \frac{0}{C_2^4} = 0$.

Une autre mesure d'association basée sur les mesures de concordances et discordance, est connue sous le nom du rho de Spearman :

Rho de Spearman

Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) des coples indépendants du vecteur aléatoire (X, Y) . Le rho de Spearman, noté $\rho_{(X,Y)}$, est défini par

$$\rho_{(X,Y)} = 3(P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3)\}) < 0. \quad (4.7)$$

Comme le tau de Kendall, nous pouvons définir le rho de Spearman en fonction d'une copule C grâce au théorème suivant :

Théorème 4.3.3 Soient X, Y deux variables aléatoires continues dont la copule est C . Le rho de Spearman de X et Y est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_{(X,Y)} &= 3Q(C; \Pi), \\ &= 12 \int_{I^2} uv \, dC(u, v) - 3, \\ &= 12 \int_{I^2} C(u, v) \, dudv - 3, \end{aligned}$$

Car les variables U, V sont uniformes d'espérance $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$, et de variance $\text{var}(U) = \text{var}(V) = \frac{1}{12}$, alors $\rho_{(X,Y)}$ peut s'écrire

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{var}(U)}\sqrt{\text{var}(V)}}. \quad (4.8)$$

Démonstration

On sait que $\int_{I^2} uv \, dC(u, v)$ représente l'espérance de (UV) , alors

$$\begin{aligned} \rho_{(X,Y)} &= 12 \int_{I^2} uv \, dC(u, v) - 3 \\ &= 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} \\ &= \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{var}(U)}\sqrt{\text{var}(V)}} \end{aligned}$$

Remarque 4.3.2 Puisque le rho de Spearman est défini en fonction d'une copule paramétrique C nous notons $\rho_{(X,Y)}$ par ρ_θ .

Exemple 4.3.5 1. Soit C_θ une copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern, de paramètre $\theta \in [-1, 1]$, alors

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v),$$

donc

$$\int_{I^2} C_\theta(u, v) \, dudv = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36},$$

le rho de Spearman est

$$\rho_\theta = \frac{\theta}{3}$$

2. Soit $C_{\alpha,\beta}$ la copule de Marshall Olkin, de paramètres $0 < \alpha$ et $\beta < 1$ définie par

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{cases} u^{1-\alpha}v & \text{et } u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta} & \text{et } u^\alpha \leq v^\beta \end{cases},$$

donc

$$\int_{I^2} C_{\alpha,\beta}(u,v) dudv = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta} \right),$$

et le rho de Spearman est alors égale à :

$$\rho_{\alpha,\beta} = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}.$$

3. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires gaussienne de corrélation r , alors

$$\rho_r = \frac{6}{\pi} \arcsin \left(\frac{r}{2} \right).$$

Rho de Spearman empirique (estimateur du Rho de Spearman)

Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. la version empirique du rho de Spearman est définie par :

$$\rho_n = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \left(\frac{n+1}{n-1} \right), \quad (4.9)$$

telle que, R_i est le rang de X_i parmi les X_1, \dots, X_n et S_i est le rang de Y_i parmi les Y_1, \dots, Y_n .

Exemple 4.3.6 On calcule ρ_n à partir de l'exemple (4.3.1) :

R_i	3	1	2	4
S_i	1	2	3	4

$$\text{donc : } \rho_n = \frac{12}{4(16-1)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \left(\frac{5}{3} \right) = 0.2.$$

Mesure de dépendance

Définition 4.3.4 Une mesure numérique d'association δ entre deux variables aléatoires continues X, Y dont la copule est C est une mesure de dépendance si et seulement si elle satisfait les propriétés qui suivent (on la note $\delta_{X,Y}$)

1. $\delta_{X,Y}$ est définie pour chaque couple (X, Y) de variables aléatoires continues.
2. $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.
3. $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$.
4. $\delta_{X,Y} = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.
5. $\delta_{X,Y} = 1$ si et seulement si chacun de X, Y est une fonction strictement monotone de l'autre, presque sûrement.
6. Si $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des fonctions strictement monotones presque sûrement, alors

$$\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}.$$

7. Si (X_n, Y_n) est une suite de variables aléatoires continues de copule C_n , convergent vers C , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{X_n, Y_n} = \delta_{X,Y}.$$

Exemple de mesure de dépendance

Mesure de Schweizer et Wolffs : Le rho de Spearman de deux v.a continue X, Y est définie par

$$\rho_{(X,Y)} = 12 \int_{I^2} (C(u; v) - uv) dudv;$$

cet intégral représente le volume entre la copule C et la copule produit Π . Si on change la différence $(C(u; v) - uv)$ par $|C(u; v) - uv|$, alors on obtient une mesure basée sur la distance L_1 entre le graphique de C et Π , cette distance représente la mesure σ de Schweizer et Wolffs, qui est définie par

$$\sigma_C = \sigma_{X,Y} = 12 \int_{I^2} |(C(u; v) - uv)| dudv. \quad (4.10)$$

Théorème 4.3.4 Soit X, Y deux v.a continues d'une copule C . Alors la quantité σ_C définie dans (4.10) est une mesure de dépendance.

Schweizer et Wolffs (1981) assure que toute distances entre les surfaces $z = C(u; v)$ et $z = uv$ représentent une mesure nonparamétrique de dépendance, $\forall 1 \leq p \leq \infty$, la distance

L_p entre C et Π est définie par :

$$L_p = \left(k_p \int_{I^2} |(C(u;v) - uv)|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.11)$$

telle que k_p est une constante choisie de sorte que la quantité dans (4.11) soit égale à 1 lorsque la copule C est égale à M ou W .

A partir de la quantité dans (4.11) on définit les mesures de dépendances suivantes

Mesure $\Phi_{X,Y}$: Si $p = 2$, alors nous avons :

$$\Phi_{X,Y} = \Phi_C = \left(90 \int_{I^2} |(C(u;v) - uv)|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}},$$

telle que le carré de cette dernière c'est-à-dire $\Phi_{X,Y}^2$ représente l'indice de dépendance entre les variables X et Y .

Mesure $\Lambda_{X,Y}$: Pour $p = 1$ nous avons

$$\Lambda_{X,Y} = \Lambda_C = 4 \sup_{u,v \in I} |(C(u;v) - uv)|.$$

Remarque 4.3.3 D'après les définitions de mesures de dépendance σ_C ; Φ_C et Λ_C on trouve que ces dernières sont basées sur le coefficient du rho de Spearman. Il existe d'autres mesures de dépendance basées sur un autre coefficient telle que le coefficient de Gini (voir Nelsen, 2006, p.211 [6]).

Dépendance de queue

La dépendance de queue est une mesure locale, car elle mesure la dépendance au niveau des queues de distribution. Il existe deux coefficients de dépendance de queues, définies comme suit :

Définition 4.3.5 Soit X, Y deux v.a continues de fonctions de répartition respectives F et G .

Le coefficient de dépendance inférieure (lower tail dependence coefficient) λ_L est définie par

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P(X \leq F^{-1}(\alpha) \text{ et } Y \leq G^{-1}(\alpha)).$$

Le coefficient de dépendance supérieure (upper tail dependence coefficient) λ_U est définie par

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(X > F^{-1}(\alpha) \text{ et } Y > G^{-1}(\alpha)).$$

On peut définir ces mesures en fonction d'une copule C de la façon suivante :

Définition 4.3.6 Soit X, Y deux v.a continues de copule C , alors nous avons

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^{+-}} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (4.12)$$

- Quand $\lambda_L \in]0, 1]$, alors C a une dépendance de queue inférieure.
- Quand $\lambda_L = 0$, alors C n'a pas de dépendance de queue inférieure.

Et

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad (4.13)$$

- Quand $\lambda_U \in]0, 1]$ alors C a une dépendance de queue supérieure.
- Quand $\lambda_U = 0$ alors C n'a pas de dépendance de queue supérieure.

Nous présentons maintenant quelques copules avec les coefficients de dépendance de queues, si elles existent dans le tableau suivant.

	Copule $C(u, v)$	λ_L	λ_U
archimédienne $C(u, v)$	Clayton	$2^{-\frac{1}{\alpha}}$	0
	Gumbel	0	$2 - 2^{-\frac{1}{\alpha}}$
	Frank	0	0
$C_\rho(u; v)$	gaussienne	0	0
$C_{\alpha, \beta}(u; v)$	Marchall-Olkin	0	0

La copule de Clayton a une dépendance de queue inférieure, au contraire de la copule de Gumbel qui possède une dépendance de queue supérieure, elle est à ce titre particulièrement

adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'événement de forte intensité sur la dépendance entre branches d'assurance ou actifs financiers [11], et pour la copule de Frank il n'existe aucune dépendance de queue ni inférieur ni supérieur, telle que la copule gaussienne.

Remarque 4.3.4 La copule gaussienne n'a pas de dépendance de queue, sauf pour $\rho = 1$; telle que

$$\lambda_L = \lambda_U = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 1 \\ 1 & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

On peut observer graphiquement la dépendance de queue entre les variables, comme le montre les graphique suivants :

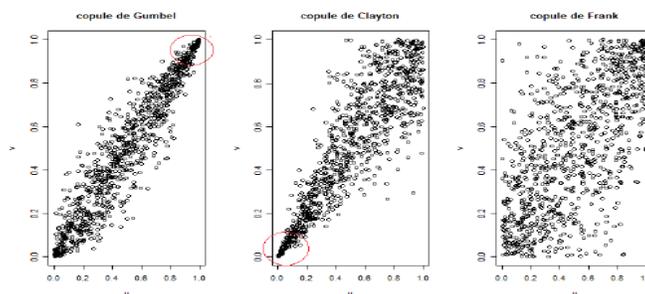


Fig.4.1 :Echantillons de taille1000 de trois copules archimédiennes ($\alpha = 5$)

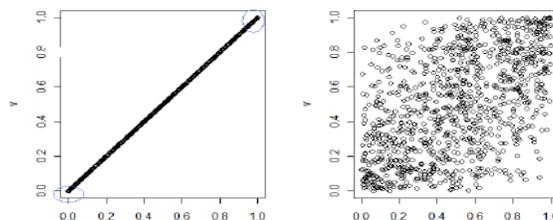


Fig.4.2:Echantillons de taille1000 de deux copules gaussienne pour $\rho = 1$ (à gauche)et $\rho = 0.5$ (à droite)

Quadrant de dépendance positive

Le concept de quadrant de dépendance positive (positive quadrant dependency) PQD peut être défini en terme de copule comme on a défini la dépendance de queue.

Définition 4.3.7 Soit X, Y deux v.a continues de copule C . On dit que X et Y sont PQD si

$$C(u; v) \geq uv, \forall (u; v) \in [0, 1]^2.$$

On peut aussi utiliser la notion d'ordre entre les copules, telle qu'elle est définie au chapitre 2 pour définir la PQD. X et Y sont PQD si leurs copule C est supérieure à la copule produit Π

$$C(u, v) \geq \Pi.$$

4.4 Méthodes d'estimation

Dans cette section, on va expliquer les méthodes d'estimation telle que la méthode de maximum de vraisemblance exacte, méthode des fonctions d'inférence des marginales qui sont des méthodes paramétriques, et deux méthodes sont semiparamétriques, telle que la méthode de pseudo-maximum de vraisemblance et la méthode de moment, on termine par la méthode de la distance minimale.

4.4.1 Méthode du maximum de vraisemblance exacte

Soit C_θ une copule paramétrique multivariées de paramètre θ . On estime sous les deux hypothèses suivantes

$$H_0 : C \in C_0, \tag{4.14}$$

telle que $C_0 = \{C_\theta : \theta \in \Theta\}$; où Θ est un sous ensemble de \mathbb{R}^p pour tout entier $p \geq 1$. et

$$\dot{H}_0 = F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_d \in \mathcal{F}_d,$$

telle que F_j pour $j = 1, \dots, d$ sont les lois marginales de X_1, \dots, X_d et $\mathcal{F}_j = \{\mathcal{F}_{\gamma_j} : \gamma_j \in \Gamma_j\}$, où Γ_j est un sous ensemble de \mathbb{R} et en maximisant la fonction log- vraisemblance $L(\theta)$ définie

par

$$L(\theta) = \sum_{j=1}^n \ln f(x_j), \quad (4.15)$$

telle que $f(x_1, \dots, x_d)$ est la fonction de densité jointe de $X_1, \dots, X_d \dots$

Comme on peut voir la fonction $L(\theta)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^n \ln (c_\theta (F_1(x_{i1}), \dots, F_d(x_{id}))) \prod_{j=1}^d f_j(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln c_\theta (F_1(x_{i1}), \dots, F_d(x_{id})) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f_i(x_j), \end{aligned}$$

où c représente la densité de la copule C_θ , alors l'estimateur de θ , noté $\hat{\theta}_n^{MV}$ est

$$\hat{\theta}_n^{MV} = \arg \max L(\theta).$$

Cet estimateur est consistant et vérifie la propriété de normalité asymptotique

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta \right) \rightarrow N(0, I^{-1}(\theta)),$$

telle que $I(\theta)$ et la matrice d'information de Fisher. Cette matrice est estimée par l'inverse de la matrice Hessian de la fonction de vraisemblance.

4.4.2 Méthode des fonctions d'inférence des marginales (IFM)

Supposant que nous avons les mêmes hypothèses que la méthode de maximum de vraisemblance, alors cette méthode consiste à maximiser la fonction log- vraisemblance $L(\theta)$ mais en séparant entre les paramètres de distributions marginales γ_j et les paramètres de dépendance.

La procédure d'estimation effectuée en deux étapes, introduites par Joe et Xu (1996) consiste à :

- Estimer les paramètres de distribution marginales univariées γ_j , qui sont définis par :

$$\hat{\gamma}_j = \arg \max L_j(\gamma_j), \quad (4.16)$$

telle que

$$L_j(\gamma_j) = \sum_{i=1}^n \ln f_j(x_{ij}),$$

où f_j est la densité de F_j .

- Puis, on estime θ , En utilisant les estimateurs $\hat{\gamma}_j$ obtenues par (4.16),

nous avons alors :

$$\hat{\theta}_n^{IFM} = \arg \max L(\theta),$$

où

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_\theta \{F_{\hat{\gamma}_1}(x_{i1}), \dots, F_{\hat{\gamma}_d}(x_{id})\}.$$

Là encore, l'estimateur $\hat{\theta}_n^{IFM}$ vérifie la propriété de normalité asymptotique démontré par Joe (1997) :

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{IFM} - \theta \right) \rightarrow N(0, V^{-1}(\theta)),$$

avec $V(\theta)$ est la matrice d'information de Godambe, définie par :

$$V(\theta) = D^{-1} M (D^{-1})^t,$$

où

$$D = E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (g(\theta)^t) \right], M = E [g(\theta)^t g(\theta)] \text{ et } g(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_1} L_1, \dots, \frac{\partial}{\partial \gamma_d} L_d \right).$$

4.4.3 Méthode de pseudo-maximum de vraisemblance (maximum de vraisemblance canonique)

Cette méthode a été proposé dans le cas où les marginales F_1, \dots, F_d associées aux X_1, \dots, X_d sont inconnues, elle compose de deux étapes :

- On remplace les marginales F_1, \dots, F_d par leurs estimations naturelles (estimateur empirique), définies par :

$$\hat{F}_{j,n}(x_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(X_{ij} \leq x)}.$$

- En maximisant la pseudo log-vraisemblance pour estimer θ , telle que :

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta} \left\{ \hat{F}_{1,n}(x_{i1}), \dots, \hat{F}_{d,n}(x_{id}) \right\},$$

alors l'estimateur $\hat{\theta}_n^{PMV}$ est définie par :

$$\hat{\theta}_n^{PMV} = \arg \max L(\theta).$$

Remarque 4.4.1 Nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, d\}$, $R_{ij} = n\hat{F}_{j,n}(x_{ij})$, ou R_{ij} est le rang de X_{ij} dans l'échantillon univarié X_{1j}, \dots, X_{nj} . Donc l'estimateur tiré de cette méthode est basé sur les rangs des observations.

Cas bivarié :

Soit X, Y deux variables aléatoires dont les marginales sont F et G respectivement. Soit C_{θ} la copule associée à X, Y de paramètre θ . La pseudo log-vraisemblance est définie à partir de l'équation (4.15) par

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta} \{F_n(x_i), G_n(y_i)\},$$

telle que (voir 4.1) :

$$F_n(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(X_i \leq x)} \text{ et } G_n(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(Y_i \leq y)},$$

comme $nF_n = R_i$ et $nG_n = S_i$; où R_i et S_i sont les rangs de X_i et Y_i dans leurs échantillons univariés respectivement, donc $L(\theta)$ devient

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta} \left(\frac{R_i}{n}, \frac{S_i}{n} \right).$$

4.4.4 Méthode d'inversion du tau du Kendall et du rho de Spearman

Cette méthode consiste à estimer les paramètres recherchés en utilisant certaine mesure d'association telle que le tau de Kendall ou le rho de Spearman, car il existe une relation entre ces mesures et le paramètre de dépendance de la copule. Nous présentons dans ce qui suit les détails de l'application de cette méthode.

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la copule est C_θ , de paramètre θ , telle que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

1- L'estimateur de θ basé sur le tau de Kendall

- Supposant qu'il existe une relation entre le tau de Kendall et le paramètre θ . définie par l'égalité suivante

$$\tau_{(X,Y)} = g(\theta),$$

où g est une fonction continue et dérivable, alors un estimateur $\hat{\theta}_n^{TK}$, de θ est défini par :

$$\hat{\theta}_n^{TK} = g^{-1}(\tau_n),$$

telle que τ_n est l'estimateur empirique de voir (4.6).

- Cet estimateur est asymptotiquement normale

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{TK} - \theta) \rightarrow N(0, \hat{\sigma}_\tau^2),$$

telle que $\hat{\sigma}_\tau^2$ est la variance empirique de σ_τ^2

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = (4S\dot{g}(\tau_n))^2,$$

où

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2,$$

et

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{(X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i)} \text{ et}$$

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{(X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j)}.$$

2- L'estimateur de θ basé sur le rho de Spearman

De la même manière, si on suppose que le rho de Spearman se définit en fonction de θ par la relation suivante :

$$\rho = h(\theta),$$

où h est une fonction continue et dérivable, alors l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ est défini par

$$\hat{\theta}_n^{RS} = h^{-1}(\rho_n),$$

telle que, ρ_n est l'estimateur empirique de ρ voir (4.9).

- Cet estimateur est asymptotiquement normale

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{RS} - \theta \right) \rightarrow N \left(0, (\sigma_n h^{-1}(\rho_n))^2 \right),$$

telle que σ_n^2 est l'estimateur de σ^2

$$\sigma_n^2 = 144 \left(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2\varepsilon_n \right),$$

ou

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}, \\
B_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left(\frac{S_i}{n+1} \right)^2, \\
C_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} \mathbb{1}(R_k \leq R_i, S_k \leq S_i) + \frac{1}{4} - A_n, \\
D_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{R_j}{n+1} \right) \text{ et} \\
\varepsilon_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max \left(\frac{S_i}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

4.4.5 Méthode de la distance minimale

Il existe trois types d'estimation lié à cette méthode et chaque type est basé sur trois statistiques, telle que la statistique de Cramer-von-Mises, la statistique de L_1 variant Cramer-von-Mises et la statistique de Kolomogorov-Smirnov [8].

Esimateurs de la distance minimale basés sur le processus de copule empirique

C'est le premier type d'estimation qui consiste à :

1. Calculer le processus empirique définie par

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n} (C_n - C_{\hat{\theta}}),$$

telle que, C_n est la copule empirique de Deheuvels et $C_{\hat{\theta}}$ est la copule proposé dans l'hypothèse H_0 (4.14).

2. Calculer les statistiques de Cramer-von-Mises, noté ρ_{emp}^{CvM} , de Kolomogorov-Smirnov, noté ρ_{emp}^{KS} et de L_1 variante de Cramer-von-Mises,

noté $\rho_{emp}^{L_1}$ définies par

$$\begin{aligned}\rho_{emp}^{CvM} &= \int_{I^2} \mathbb{C}_n(u)^2 d\mathbb{C}_n(u), \\ \rho_{emp}^{KS} &= \sup_{u \in [0,1]^2} |\mathbb{C}_n(u)| \text{ et} \\ \rho_{emp}^{L_1} &= \sqrt{n} \int_{I^2} |\mathbb{C}_n(u)| d\mathbb{C}_n(u).\end{aligned}$$

Les versions empiriques de $\hat{\rho}_{emp}^{CvM}$ et $\hat{\rho}_{emp}^{L_1}(U, \theta)$ sont données par

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{emp}^{CvM} &= \sum_{i=1}^n \{\mathbb{C}_n(U_i) - \mathbb{C}_{\hat{\theta}}(U_i)\}, \\ \hat{\rho}_{emp}^{L_1} &= \sum_{i=1}^n |\mathbb{C}_n(U_i) - \mathbb{C}_{\hat{\theta}}(U_i)|.\end{aligned}$$

3. Calculer les estimateurs de la distance minimale basés sur la minimisation des statistiques ci-dessus définies par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n^{emp, L_1} &= \arg \min \hat{\rho}_{emp}^{L_1}(U, \theta), \\ \hat{\theta}_n^{emp, CvM} &= \arg \min \hat{\rho}_{emp}^{CvM}(U, \theta) \text{ et} \\ \hat{\theta}_n^{emp, KS} &= \arg \min \rho_{emp}^{KS}(U, \theta).\end{aligned}$$

Estimateurs de la distance minimale basés sur la fonction de dépendance de Kendall

Le deuxième type de la distance minimale est basé sur la fonction de dépendance de Kendall, il a été proposé par Savu et Tiede (2004), Genest et al. (2006). La transformée d'intégrale de probabilité V d'un vecteur aléatoire X dont la fonction de répartition est H et de marginales F_1, \dots, F_d est définie par :

$$X \longmapsto V = H(X) = C(U_1, \dots, U_d),$$

telle que, $U_i = F(X_i)$.

Pour estimer on calcule :

1. L'estimation nonparamétrique de K , telle que K est la fonction de répartition

jointe de V . Cet estimateur est donné par :

$$K_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(V_i \leq \omega)}, \omega \in [0, 1]^2.$$

2. Le processus empirique \mathbb{k}_n définie par :

$$\mathbb{k}_n = \sqrt{n} (K_n - K_{\hat{\theta}}).$$

3. Les statistiques $\rho_K^{L_1}$, ρ_K^{CvM} et ρ_K^{KS} sont alors :

$$\begin{aligned} \rho_K^{L_1} &= \sqrt{n} \int_0^1 |\mathbb{k}_n(\omega)| d\mathbb{k}_{\hat{\theta}}(\omega), \\ \rho_K^{CvM} &= \int_0^1 \mathbb{k}_n(\omega)^2 d\mathbb{k}_{\hat{\theta}}(\omega) \text{ et} \\ \rho_K^{KS} &= \sup_{\omega \in [0,1]} |\mathbb{k}_n(\omega)|. \end{aligned}$$

Estimateurs de la distance minimale basé sur la transformée de Rosenblatt

Avant de présenter cette méthode, on définit la transformé de Rosenblatt dans le cas bivarié.

Définition 4.4.1 *L'intégrale de probabilité de Rosenblatt a été proposé par Rosenblatt (1952) qui transforme une suite de variables aléatoires dépendantes en variables aléatoires indépendantes de lois uniforme $U(0, 1)$.*

Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition marginales sont $F_j(x_j)$ pour $j \in \{1, 2\}$ et une fonction de répartition conditionnelle $F_{2|1}$, la transformée de Rosenblatt est définie par :

$$R(X) = (R(X_1), R(X_2)),$$

telle que

$$R_1(X_1) = F_1(x_1), R_2(X_2) = F_{2|1}(x_2 | x_1).$$

Donc, pour estimer θ en pose $V \doteq R(X)$ et on calcule les statistiques de Cramer-

von-Mises ρ_{Ros}^{CvM} , L_1 variante de Cramer-von-Mises $\rho_{Ros}^{L_1}$ et Kolomogorov-Smirnov ρ_{Ros}^{KS} ,
 définies par :

$$\begin{aligned}\rho_{Ros}^{CvM} &= n \int_{I^2} \{\mathbb{C}_n(V) - \mathbf{\Pi}(V)\}^2 d\mathbb{C}_n(V), \\ \rho_{Ros}^{L_1} &= \sqrt{n} \int_{I^2} |\mathbb{C}_n(V) - \mathbf{\Pi}(V)| d\mathbb{C}_n(V) \text{ et} \\ \rho_{Ros}^{KS} &= \sup |\mathbb{C}_n(V) - \mathbf{\Pi}(V)|.\end{aligned}$$

La version empirique de la statistique de Cramer-von-Mises est donnée par

$$\hat{\rho}_{Ros}^{CvM}(V) = \sum_{i=1}^n \{\mathbb{C}_n(V_i) - \mathbf{\Pi}(V_i)\}^2.$$

Remarque 4.4.2 La méthode d'inversion est appliquée dans le cas où le paramètre de dépendance est réel

Conclusion

Nous avons présentés dans ce mémoire les différentes méthodes d'estimation des copules, ce qui permet de bien modéliser la structure de dépendance de certaines données.

Des plus connues on peut citer la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode d'inférence des marginales, celle du pseudo-maximum de vraisemblance, ainsi que les méthodes d'inversion du Tau de Kendall et du rho de Spearman.

Bibliographie

- 1- [http ://www/-sop-inria.fr/membres/Olivier.Faugueras/MVA/.../probabilités.Pdf](http://www/-sop-inria.fr/membres/Olivier.Faugueras/MVA/.../probabilités.Pdf) /12-10-2008.
- 2 - Lounas Fadhila.(2011)-Modélisation de la dépendance par les copules et applications-.mémoire de magister(université Tizi-Ouzou).
- 3 - Amel Chine.(2011)-Test d'ajustement des copules paramétrique-.mémoire de magister(université BISKRA).
- 4 - Belguise Olivier.(2001)-Tempêtes :Etude auto et Incendie avec la théorie des copules-.mémoire de stage de troisième année(université louis Pasteur Strasbourg).
- 5 - Laurent GARDES.(2003)-Estimation d'une fonction quantile extrême-Thèse pour obtenir le grade de (DOCTER DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II).
- 6 - Nelsen,R,B. (2006)- An introduction to copulas. second ed. Springer, New York.
- 7- Umberto cherubini,E.V,W.V.(2004).Copula Methods in Finance.British Library Cataloguing in Publication Data
- 8 - Gregor N. F. WeiB.(February 3, 2009)-Copula parameter estimation by maximum-Likelihood and minimum-Distance estimators-A Simulation Study.
- 9 - Dheuvels,P.(1979).La fonction de empirique et ses propriétés. Um test non paramétrique d'indépendance .Acad.Roy.Bull.Cl.Sci.,5th Ser.65 :247-292.
- 10 - Rihab.B and Makrem Ben .D.September(2008) .Copules et mesures du risque bildimensionnelles.application pratique aux hedgs funds. Version Préliminaire.
- 11 - Cadoux, D.and Loizeau,J.M (2004).Copules et dépendances : application pratique

à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Institut des Actuaires. Paris.

12 - Bernard Delyon (16 décembre 2011). Estimation paramétrique. Cours de Master 2. IRMAR, Université Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.