



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Med Khider Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

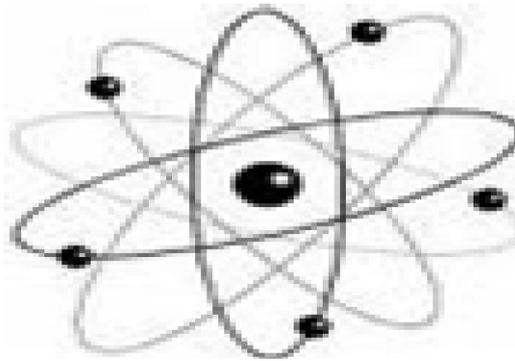


Département des Sciences de la Matière

Domaine des Sciences de la Matière

Filière de Physique

Spécialité Physique des Matériaux



Mémoire de fin d'étude en Master

Intitulé :

**Constructions formelles des solutions
pour une classe d'ondes non linéaires**

Présenté par: Amani Bekhoucha

Devant le Jury Composé par :

N. Bensalah

A. Zerarka

M. Moumni

M.C. « B »

Professeur

M.C. « A »

Université Med Khider- Biskra

Université Med Khider- Biskra

Université Med Khider - Biskra

Président

Rapporteur

Examineur

Année Universitaire

2013-2014

Remerciement

Un grand remerciement à mon bon Dieu, le tout puissant qui m'a fourni la volonté et la patience pour la réalisation de ce travail.

Je remercié premièrement mon directeur de recherche Monsieur "**M-A Zerarka**", pour sa confiance et son aide généreux tout au long de l'année. Ses encouragements et son soutien nous ont permis de mener à bien ce travail.

Je suis censées à remercier vivement professeur **M. Moumni** et professeur **N. Bensalah** pour son soutien afin de réaliser ce modeste travail.

Je tiens aussi à remercier beaucoup mes parents pour leurs sacrifices, n'ont jamais cessé de m'encourager et m'ont toujours soutenu dans les moments plus difficiles.

Je remercié toute la famille dont les conseils, les remarques, et les encouragements nous ont été très significatifs .

A tous Merci

DEDICACE

**Je dédie ce travail à mes parents qui m'ont aidé, conseillé et encouragé
pour ma réussite et mon bonheur**

**Pour les sœurs, Fayza, Nassima et Suhaila, et les frères Ali et Mohammed
Lamine et chaque famille Bekhoucha.**

A toute la famille

À mon cher ami et soeur Mofida ben aissa.

**Et tous mes collègues du Département des sciences des matériaux, en
particulier la physique des matériaux.**

Pour ceux qui m'ont aidé de quelque façon.

Table des Matières

| | |
|---|----|
| Introduction..... | 01 |
| Chapitre I: Phénomènes non linéaires | |
| I .1 Introduction au phénomène non linéaire | 02 |
| I.2 les équations des ondes non linéaires | 03 |
| I.2.1 Introduction..... | 03 |
| I.2.2 Les équations aux dérivées partielles..... | 04 |
| I.2.3 Problèmes bien posés..... | 05 |
| I.2.4 Notions de solution..... | 06 |
| I.2.5 Les équations dispersives non-linéaires..... | 06 |
| I.2.6 Le concept "soliton" | 09 |
| I.2.7 Définitions | 10 |
| I.2.8 Ondes non-linéaires et milieux dispersifs..... | 11 |
| I.2.8.1 Le comportement des équations non-linéaires dispersives | 12 |
| I.3 Types d'équations d'information non linéaires | 13 |
| I.3.1 Les modèles d'équations dispersives non-linéaires | 13 |
| Chapitre II: Quelques méthodes de construction des solutions | |
| II.1 Première partie..... | 19 |
| II.1.1 Les méthodes d'approximations | 19 |
| II.1.1.1 Introduction | 19 |
| II.1.1.2 Présentation de quelques méthodes d'approximations | 21 |
| II.1.1.2.1 L'Approche Variationnelle | 21 |
| II.1.1.2.2 La méthode d'itération Variationnelle | 21 |

| | |
|--|----|
| II.1.1.2.3 La méthode de perturbation d'homotopie (MPH)..... | 21 |
| II.1.1.2.4 La méthode du développement du paramètre..... | 23 |
| II.1.1.2.5 La méthode de la fonction exponentielle | 23 |
| II.1.1.2.6 La méthode Tanh..... | 24 |
| II.1.1.2.7 La méthode Sine-Cosine | 26 |
| II.2 Deuxième partie | 29 |
| II.2.1 Les méthodes de décomposition | 29 |
| II.2.1.1 Introduction..... | 29 |
| II.2.1.2 La méthode d'Adomian | 29 |
| II.2.1.2.1 Description de la méthode | 29 |
| II.2.1.2.2 Polynômes d'Adomian | 29 |
| II.2.2 La méthode de perturbation artificielle | 30 |
| II.2.2.1 Introduction | 30 |
| II.2.2.2 Description de la méthode | 30 |
| Chapitre III: Introduction de la méthode de la variable fonctionnelle | |
| III.1 Les équations d'ondes à coefficients constants..... | 32 |
| III.2 Description de la méthode | 32 |
| III.3 Quelques applications traitées..... | 33 |
| III.3.1 L'équation de KdV | 34 |
| III.3.2 La forme généralisée du système Boussinesq..... | 35 |
| III.3.3 L'équation d'onde longue régularisée (RLW)..... | 40 |
| III.4 Conclusion..... | 46 |
| Chapitre IV: Application de la méthode de la variable fonctionnelle | |
| IV.1 Présentation..... | 47 |

| | |
|----------------------------------|----|
| IV.2 Applications..... | 48 |
| IV.2.1 Premier test..... | 48 |
| IV.2 .2 Deuxième test..... | 51 |
| Conclusion..... | 54 |
| References bibliographiques..... | 56 |

Introduction générale:

Introduction générale:

Ce mémoire se compose d'une introduction générale aux solutions d'ingénierie pour des ondes non linéaires montrant l'importance de ce sujet, et les objectifs de cette recherche, qui se compose de quatre chapitres.

Une introduction générale aux phénomènes non-linéaire, qui sont connus que, dans divers domaines, y compris l'optique non linéaire, et des dispositifs de communication, tels que la fibre optique, les ondes sonores dans l'atmosphère et les océans. On s'intéresse à l'étude de plusieurs ondes issues des systèmes aux dérivées partielles. Ces ondes sont spécialement de type soliton.

Le deuxième chapitre présente certaines méthodes traitant l'aspect non linéaire des événements qui peuvent se produire dans la vie courante. Nous abordons quelques méthodes telles que la méthode de décomposition, ce qui nous a permis de trouver des solutions rationnelles pour les ondes non linéaires.

Le troisième chapitre propose donc une nouvelle approche : la méthode de la variable fonctionnelle appliquée à plusieurs types de problèmes non-linéaires à coefficients constants et variables. Dans ce chapitre, on essaye d'appliquer cette méthode pour quelques exemples bien connus, l'équation de KdV, la forme généralisée du système de Boussinesq, l'équation d'onde longue régularisée (*RIW*), et autres systèmes.

Dans le dernier chapitre, nous examinons comment l'étude des équations d'ondes non-linéaire à coefficients constants et d'utiliser pour la première fois la méthode de la variable fonctionnelle à une première forme différentielle non linéaire et une autre confrontation concernant l'équations de Benjamin - *Bona* - *Mahony*.

Les solutions obtenues sont exactes et coïncident avec d'autres méthodes utilisées dans la littérature.

Chapitre I :

Phénomène non linéaires

I-1-Introduction au phénomène non linéaire :

Ces phénomènes qui surgissent dans différents domaines incluent le système optique non-linéaire, les dispositifs de communication tels que les fibres optiques transsoniques, les ondes dans l'atmosphère et l'océan, et la turbulence dans le plasma. Les exemples des équations partielles dispersives non-linéaires renferment l'équation de Korteweg de Vries (KdV en abrégé), les équations non-linéaires de Klein Gordon, les équations de Schrödinger non-linéaires, et beaucoup d'autres.

Les réalisations principales des mathématiques appliquées ont montré entre autres la découverte des interactions de soliton, en introduisant la méthode «d'Inverse Scattering» pour trouver la solution exacte explicite pour un système d'équations partielles, et l'analyse asymptotique de perturbation pour la recherche des équations non-linéaires d'évolution.

La compréhension mathématique de ces objets et de leur rôle dans la description des dynamiques des ondes non-linéaires étaient depuis les années 60 un sujet de recherche extrêmement actif qui met en œuvre des points de vue très divers : la théorie classique des équations aux dérivées partielles (théorie des EDP elliptiques et de l'intégrabilité complète), l'analyse fonctionnelle et l'analyse harmonique, la théorie des systèmes dynamiques (théorie des perturbations, fonctionnelles de Liapounov), des ingrédients classiques de la physique mathématique (analyse spectrale), ainsi que des contributions importantes de l'analyse numérique.

Avec le développement rapide de la science non-linéaire, les scientifiques et les ingénieurs sont intéressés par les techniques analytiques asymptotiques pour des problèmes non-linéaires. Bien qu'il soit très facile pour nous maintenant de trouver les solutions des systèmes linéaires à l'aide de l'ordinateur.

D'autres équations d'évolution issues de la physique sont complètement intégrables.

Mais cette propriété exceptionnelle a le défaut d'être instable par perturbation de l'équation, ce qui ne permet pas de raffiner la modélisation physique. Ces trente dernières années un effort considérable a été entrepris pour développer une théorie beaucoup plus robuste et générale avec des apports importants de différentes parties des mathématiques.

L'objectif de ce travail, est la construction des solutions de certains modèles physiques classiques ou quantiques traités mathématiquement au moyen de la méthode de la variable fonctionnelle.

I-2- les équations des ondes non linéaires :

I-2-1- Introduction :

Les équations différentielles partielles expriment beaucoup de lois fondamentales de la nature et surgissent généralement dans l'analyse mathématique des problèmes en science et technologie. Bien que, les équations différentielles partielles non-linéaires aient subi de nouveaux développements remarquables pendant la dernière moitié du vingtième siècle, une des impulsions principales pour développer des équations partielles non-linéaires a été l'étude des problèmes non-linéaires de propagation des ondes [1-9].

Ces problèmes apparaissent dans différents domaines des mathématiques appliquées, de la physique, y compris la dynamique des fluides, le système optique, la mécanique des solides, la physique des plasmas, et la physique non-linéaire de la matière condensée.

Les équations d'ondes non-linéaires en particulier ont fourni plusieurs exemples de nouvelles solutions qui sont remarquablement différentes de celles obtenues pour des problèmes d'ondes linéaires.

On va essayer dans ce chapitre d'exposer rapidement un aperçu de la théorie de base pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles modélisant la propagation des ondes, suivie de quelques équations modèles décrivant des situations physiques données.

I-2-2 Les équations aux dérivées partielles :

Soit u une fonction définie sur R^d , à valeurs dans R et suffisamment régulière. Une équations aux dérivées partielles (E.D.P.) pour la fonction u est une relation entre u , les variables x_1, \dots, x_d et un nombre fini de dérivées partielles de u ,

$$F(x_1, \dots, x_d, u, D_1 u, \dots, D_d u, D_1 D_1 u, D_1 D_2 u, \dots, D^\beta u, \dots) = 0$$

Avec $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in N^d$

Ces équations peuvent être linéaires ou non-linéaires à coefficients constants ou variables. L'équation partielle non linéaire de premier ordre ayant deux variables indépendantes x et y est généralement exprimée sous la forme.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = f \quad (\text{I.1})$$

où f est une fonction d'une ou deux variables indépendantes x et y . De même, l'équation partielle non linéaire du second degré ayant deux variables indépendantes x et y peut être exprimée par

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) = f \quad (\text{I.2})$$

L'équation partielle non linéaire s'appelle homogène si $f = 0$, et dite non homogène si $f \neq 0$.

Quelques exemples des équations différentielles partielles non linéaires :

$$u_t + 2u u_x = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$u_t + u^2 u_x = 0 \quad (\text{I.4})$$

$$u_t + u u_x = \sin x \quad (\text{I.5})$$

Plus formellement, il est possible d'écrire ces équations sous forme d'opérateur.

$$L_x u(X) = f(X) \quad (\text{I.6})$$

Où L_x est un opérateur différentiel partiel et $f(X)$ est une fonction de deux variables et, $X = (x, y, \dots)$.

Si L_x n'est pas un opérateur linéaire, l'Eq. (I.6) s'appelle une équation partielle non linéaire. Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions. Les contraintes les plus fréquentes sont :

1-Conditions initiales :

Si u est fonction de $(x, t) \in R^d \times R$ on donne :

$u(x, t_0) = \Phi_0(x)$ ou $D_2^p u(x, t_0) = \Phi_p(x)$, on parle aussi de conditions de Cauchy.

2. Conditions au bord :

Si u est fonction de $x \in R^d$ on a trois types de contraintes :

- conditions de Dirichlet où u est fixé sur le bord de Ω : $u|_{\partial\Omega} = g$; et Ω est le domaine de définition de la solution.

- conditions de Neumann où la dérivée normale de u est fixée $\frac{du}{dn} |_{\partial\Omega} = g$;

- conditions mixtes $C(x)u + C^-(x)\frac{du}{dn} = g$ sur $\partial\Omega$;

Si $g = 0$ on a des conditions homogènes au bord ;

3. Conditions à l'infini :

Si u n'est pas bornée on a des conditions de la forme :

$$u(x) \sim \Phi(x) \text{ quand } |x| \rightarrow \infty \text{ ou } \|u\|_2 < \infty$$

Les contraintes sont en général imposées par la nature du problème que l'on essaye de résoudre, et l'équation aux dérivées partielles et ses conditions restrictives seront donc a priori cohérentes.

De façon générale une équation aux dérivées partielles ne donne lieu à un problème raisonnable que si on l'associe à un certain type de conditions restrictives, par exemple des conditions initiales pour des problèmes d'évolution (équation de la chaleur et équation des ondes) ou des conditions au bord pour l'équation de Laplace.

I-2-3 Problèmes bien posés :

Pour un problème physique modélisé par une équation aux dérivées partielles, le scientifique essaye de formuler les conditions auxiliaires physiquement réalistes, le tout constitue un problème bien-posé.

Si on considère une équation aux dérivées partielles sur un domaine avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posé si on a :

- Existence d'une solution du problème : l'existence au moins d'une solution satisfaisant toutes les conditions.

- Unicité de cette solution.

- Stabilité par rapport aux données du problème : la solution unique dépend d'une façon stable des données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu, on dit que le problème est sensible aux données.

I-2-4 Notions de solution :

Soit u la solution d'un problème bien posé. Dans ce qui précède on n'a pas précisé la régularité de u , on a seulement supposé que u était suffisamment différentiable pour que les équations aient un sens. Dans beaucoup de cas un problème n'admet pas de solutions régulières : ex, l'équation des ondes avec conditions initiales non continues, les lois de conservation scalaires qui génèrent des ondes de choc (Chaos).

En général, le principe de superposition linéaire peut être appliqué aux équations partielles linéaires. Ce principe est habituellement employé pour trouver une nouvelle solution comme une combinaison linéaire d'un ensemble donné de solutions. Cependant, pour des équations partielles non-linéaires, le principe de superposition linéaire ne peut pas être appliqué pour donner une nouvelle solution. Ainsi, parce que la plupart des méthodes de solution pour des équations linéaires ne peuvent pas être appliquées aux équations non-linéaires, et des techniques numériques sont habituellement exigées pour leur solution. On peut parfois trouver une transformation des variables qui transforme une équation non-linéaire en équation linéaire. En fait, de nouvelles méthodes sont manifestement exigées pour trouver des solutions aux équations de types non-linéaires.

I-2-5 Les équations dispersives non-linéaires :

L'intérêt que portent les physiciens aux équations non linéaires dispersives est dû à l'existence pour ces équations non linéaires des ondes solitaires, c.-à-d. des solutions se propageant à vitesse constante sans changement de forme.

La première observation dans la « nature » de ce phénomène est sans doute l'expérience vécue par J. Scott-Russell, en 1834. Lors d'une promenade le long du canal Edinburgh-Glasgow, il suivit pendant plusieurs kilomètres une vague produite par le sillage d'un bateau. Celle-ci se propageait sans se déformer. Il découvrit alors ce qu'il a appelé les grandes ondes de translation ou ondes solitaires.

La découverte remarquable a motivé Russel pour conduire des expériences physiques de laboratoire pour accentuer son observation et pour étudier ces ondes solitaires.

Il a empiriquement dérivé la relation :

$$C^2 = g(h + a) \quad (I.7)$$

Cela détermine la vitesse C de l'onde solitaire, où a est l'amplitude maximale au-dessus de la surface de l'eau, h est la profondeur finie et g est l'accélération de la pesanteur. Les ondes solitaires s'appellent donc les ondes de gravité.

La Fig.I.1. montre les paramètres et les variables utilisés dans la description de l'onde solitaire.

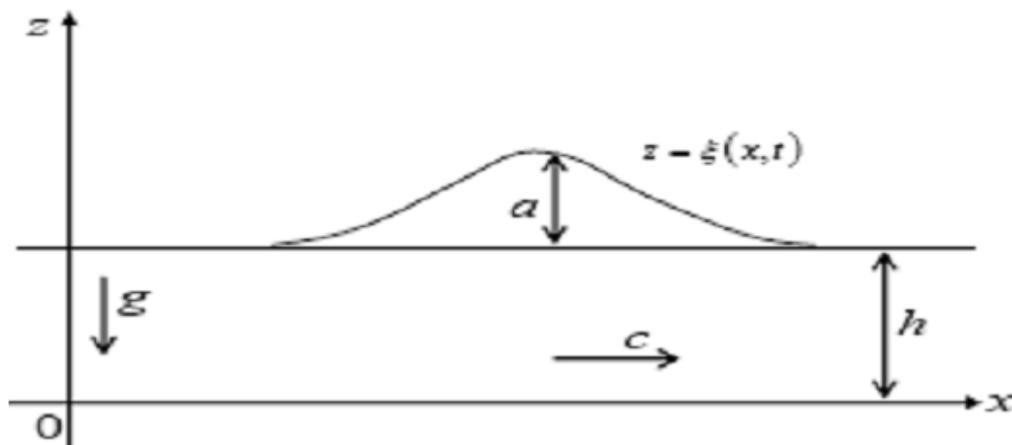


Fig I.1. La description de l'onde solitaire

Ce n'est qu'en 1895, que la découverte de Russel fût confortée grâce aux mathématiciens Korteweg et de Vries qui proposèrent leur célèbre équation aux dérivées partielles, appelée depuis, équation de Korteweg-de Vries, couramment abrégé en KdV, pour décrire le mouvement des ondes en eaux peu profondes (longueur d'onde plus grande que la profondeur). Ils montrèrent que les ondes solitaires sont solutions de cette équation.

Cette équation est l'une des équations d'évolution non-linéaires les plus étudiées. L'intérêt porté par les scientifiques envers cette équation est dû à ses propriétés remarquables lui permettant d'être un bon modèle pour de nombreux systèmes physiques.

-L'équation de KdV sous sa forme plus simple est donnée par :

$$u_t + 6 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (I.8)$$

qui indique que la dispersion et la non-linéarité pourraient se produire. On assume que les solutions d'ondes solitaires sont de la forme.

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (\text{I.9})$$

où, c est la vitesse de la propagation de l'onde, nous obtenons l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$-cf' + f''' + 6ff' = 0$$

qui fournit après intégration

$$-cf + f'' + 3f^2 = a$$

où a est une constante d'intégration. Une multiplication par f' suivi d'une intégration on trouve :

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 2af + b \quad (\text{I.10})$$

où b est encore une constante.

Nous cherchons une solution solitaire, signifiant que loin du tamas de l'eau, il n'y a aucune altitude et $f, f', f'' \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \pm\infty$, alors nous devons avoir $a = b = 0$, de sorte que

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 0$$

La solution de cette EDO de premier ordre est

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct + x_0) \right], \quad (\text{I.11})$$

où x_0 est une constante d'intégration

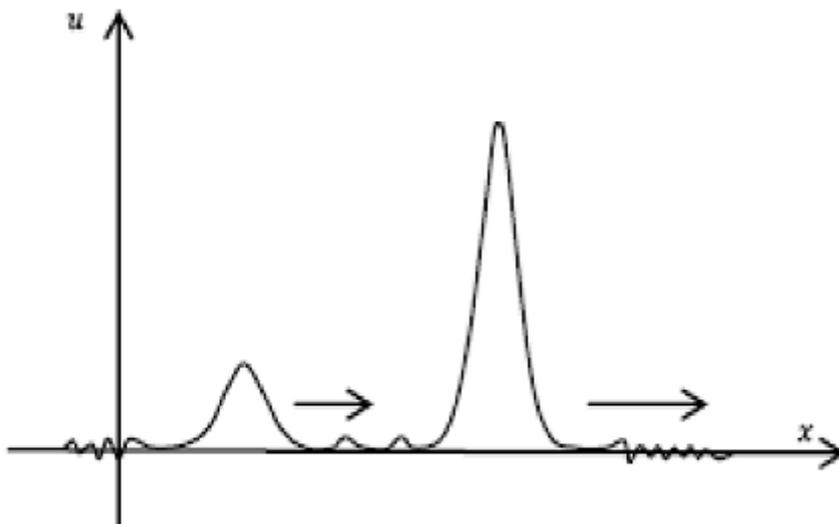


Fig.I.2. Le soliton, t fixe.

La solution (I.11), tend à zéro exponentiellement quand $x \rightarrow \pm\infty$.

(voir Fig.I.2.). Avec la fonction f , $u(x, t) = f(x - ct)$, c'est la forme d'un soliton.

Il voyage vers la droite à une vitesse c , son amplitude est $\frac{c}{2}$.

Il existe un soliton pour chaque $c > 0$. Il est long, étroit et rapide si c est grande, et est court, large et lent si c est petite.

La stabilité du soliton, est découverte seulement en 1965 par M. Kruskal et N. Zabusky. Ils ont trouvé une propriété inattendue de l'équation de KdV. Si nous commençons par deux solitons, les plus rapides dépasseront le plus lent et, après une interaction non linéaire compliquée, les deux solitons émergeront sans changement de forme quand ils se déplacent vers la droite, excepté un léger retard. En fait, ils ont observé que chaque solution de (I.8), avec n'importe quelle fonction initiale $u(x, 0) = \Phi(x)$, semble se décomposer, quand $t \rightarrow \pm\infty$, en un nombre fini de solitons (voir Fig.I.2).

Ce comportement spécial incite des physiciens à employer le soliton comme un modèle mathématique d'une particule élémentaire stable.

I-2-6 Le concept "soliton" :

Pendant ces dernières années, la théorie de soliton a été appliquée à de nombreux problèmes pratiques et fondamentaux dans des domaines divers. En raison de leur stabilité, les solitons constituent une image commode et adéquate pour décrire une multitude de phénomènes non linéaires.

Notons que le terme soliton (formé du latin solitarius : solitaire) est employé dans la physique et les mathématiques. Dans la littérature mathématique ce terme est typiquement associé aux solutions des équations intégrables qui interagissent élastiquement et reprennent leurs formes après collision. Donc, le soliton est une onde non-linéaire, qui a les deux propriétés importantes suivantes :

1. Une onde localisée se propage sans changer ses propriétés (forme, vitesse etc.)
2. Les ondes localisées sont stables contre des collisions mutuelles et maintiennent leurs identités.

La première propriété est un état d'onde solitaire connu en hydrodynamique depuis le 19ème siècle. La seconde signifie que l'onde a l'aspect d'une particule.

Comment confirmons-nous analytiquement les propriétés des solitons ? Pourquoi les solitons sont-ils stables comme des particules? Le soliton est-il un phénomène spécifique de l'équation de KdV ? Les réponses à ces questions ont joué un rôle important en établissant le concept de soliton.

La raison pour laquelle chaque onde solitaire reste stable contre des interactions mutuelles est que l'équation de KdV a un nombre infini de quantités conservées. Des propriétés dynamiques du système sont limitées par l'existence d'un nombre infini de lois de

conservation. Les quantités conservées garantissent l'indépendance des paramètres par rapport au temps ; ce qui caractérise les solitons, et donc les solitons sont stables.

Le plus important développement des solitons est survenu en 1967 dans lequel une relation remarquable entre les solitons et la diffusion transformée de l'opérateur de Schrödinger a été introduite par Gardner, Green, Kruskal et Miura.

Ces derniers ont proposé de résoudre le problème de Cauchy de l'équation de KdV en utilisant la diffusion inverse. Gardner, Green, Kruskal et Miura ont présenté un problème linéaire (problème de valeur propre) où le potentiel $U(x, t)$ est la solution de l'équation de KdV ,

$$-\psi_{xx} - u(x, t) \psi = \lambda \psi \quad (\text{I.12})$$

c'est une équation de type Schrödinger. Quand u satisfait l'Eq. (1.8), la valeur propre

$\lambda = -c^2$ ne dépend pas du temps. Puisque λ est négatif ceci représente un état lié dans la mécanique ondulatoire. D'autres valeurs de $\lambda > 0$ peuvent être associées aux solitons mais ce ne sont pas des états liés et ils sont reliés aux ondes progressives.

Le fait que les solitons peuvent être associés à l'équation de Schrödinger, des physiciens ont postulé l'idée que les solitons peuvent apparaître en tant que particules élémentaires massives beaucoup plus lourdes que le proton. Les solitons peuvent décrire la physique des particules d'une autre manière, confinées non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps. Dans ce cas ils s'appellent les Instantons.

I-2-7 Définitions :

La propagation des ondes intervient dans différents domaines. Une onde peut se définir comme étant une perturbation qui se propage dans un milieu provoquant ainsi des variations de ses propriétés physiques locales. Une onde transporte de l'énergie sans transporter de la matière. Il existe différents types d'ondes : ondes acoustiques, ondes élastiques, ondes électromagnétiques, ondes solitaires..etc. Les ondes sont solutions d'équations aux dérivées partielles.

Un exemple d'une équation d'onde est l'équation des ondes acoustiques qui décrit la propagation des ondes sonores dans un fluide. En une dimension d'espace, celle-ci s'écrit :

$$u u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (\text{I.13})$$

où x et t représentent les variables spatiale et temporelle respectivement. La notation u_{tt} désigne la dérivée seconde de u par rapport à la variable t . De même on notera, u_{α} la dérivée de u par rapport à la variable α .

Les définitions suivantes sont inspirées des notes de Scott et al :

a- Définition 1 :

Une onde progressive est une solution d'une équation aux dérivées partielles qui dépend des variables spatiale x et temporelle t uniquement à travers la relation $\xi = x - ct$; c étant la vitesse de propagation constante.

Exemple, la solution de l'Eq. (I.13) se met sous la forme :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct), \quad (\text{I.14})$$

où $f(x, t)$ est une onde qui se propage vers la gauche et $g(x, t)$ est une onde se propageant vers la droite.

b-Définition 2 :

Une onde solitaire est une onde progressive localisée, c'est à dire, une onde progressive qui tend vers des états constants.

c-Définition 3 :

Un soliton est une onde solitaire qui asymptotiquement préserve sa forme et sa vitesse après collision avec d'autres ondes solitaires.

d-Définition 4 :

Un N-soliton consiste en N ondes solitaires de différentes amplitudes, se propageant à différentes vitesses, éventuellement en interaction.

I-2-8- Ondes non-linéaires et milieux dispersifs :

Les phénomènes de non-linéarité tendent à favoriser la formation de fronts raides étant donné que les points de plus grande amplitude se propagent plus vite. Prenons l'exemple de l'équation dite de Burgers :

$$u_t + uu_x = 0 \quad (\text{I.15})$$

Un terme non-linéaire est présent dans cette équation, à savoir (uu_x) .

Pour comprendre son effet, rappelons que l'équation linéaire :

$$u_t + cu_x = 0 \quad (\text{I.16})$$

admet pour solution une onde de la forme $u(x, t) = f(x - ct)$ qui se propage à la vitesse c .

Ainsi en assimilant dans l'équation de Burgers (I.15) le coefficient du terme u_x , à savoir u , à la vitesse de propagation de l'onde, il est facile de se convaincre qu'en première approximation, les parties aux grandes valeurs de u vont se propager plus vite que les parties de faible amplitude, ce qui induit à la formation d'ondes de choc, c'est à dire des solutions présentant des discontinuités à temps fini (voir Fig.I. 3).

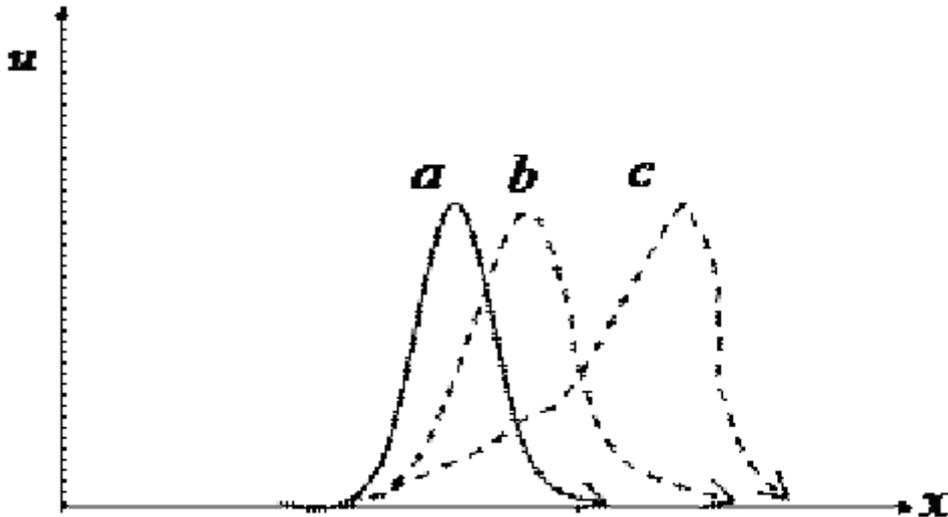


Fig.I.3: La rupture de l'onde non-linaire

Par ailleurs, on définit un milieu dispersif par le fait que les différentes fréquences constituant l'onde ne se propagent pas à la même vitesse. Les vitesses de phase et de groupe sont alors différentes. Une onde se propageant dans un milieu dispersif s'étale. Prenons l'exemple suivant :

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (I.17)$$

Cette équation admet comme solution une onde plane du type

$$u(x, t) = A \exp [i (Kx - \omega t)]$$

si la pulsation ω est liée au nombre d'onde k par la relation

$\omega = -k^3$ appelée relation de dispersion. La vitesse de phase dépend dans ce cas du nombre d'onde et est différente de la vitesse de groupe.

I-2-8-1-Le comportement des équations non-linéaires dispersives :

Une des conséquences mathématiques de la dispersion pour les équations linéaires est la présence d'effets régularisant locaux ; c'est à dire qu'à l'instant $t > 0$, les solutions sont localement en espace plus régulières qu'elles ne le sont à l'instant initial. Ces effets régularisant, ne peuvent pas être globaux puisque, pour ces équations linéaires, les normes de Sobolev sont conservées au cours du temps ; de plus, elles sont toutes réversibles en temps). Ces effets régularisant sont liés à la dispersion :

- Ils n'existent pas pour l'équation des ondes par exemple ; plus l'équation est dispersive, plus ces effets seront importants.

- Il est remarquable que la non-intégrabilité ne soit pas forcément lié aux termes non linéaires. Les dispersions d'ordre supérieur, par exemple, peuvent également effectuer le système pour être non-intégrable.

I-3-Types d'équations d'information non linéaires :

I-3-1- Les modèles d'équations dispersives non-linéaires :

Les équations partielles non linéaires apparaissent fréquemment en formulant des lois fondamentales de la nature et dans l'analyse mathématique d'une grande variété de problèmes physiques. Nous nous intéresserons donc à des équations de la forme :

$$\partial_t u = Lu + f(u) \quad (\text{I.18})$$

où, $\partial_t = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$ et $u = u(t, x)$ est à valeurs réelles (ou complexes (ou éventuellement à valeurs dans R^K), $t \in R^+$ et $x \in R^n$; l'opérateur L sera anti-adjoint, f est une fonction donnée.

On cite quelques exemples modèles d'équations dispersives non linéaires importantes.

I-3-1-1-Les équations de type Korteweg-de Vries (KdV) :

Cela concerne les équations qui se mettent en général sous la forme :

$$\partial_t u + \partial_x Mu + \partial_x f(u) = 0, \quad (\text{I.19})$$

où, $x \in R, t > 0, u(t, x)$ est à valeurs réelles. M est un opérateur différentiel ou pseudo différentiel à coefficients constants. Aussi des dérivées d'ordre élevé par rapport au temps peuvent se manifester dans l'équation (1.19).

1. L'équation de Korteweg-de Vries (KdV) :

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^2) = 0, t \in R^+, x \in R \quad (\text{I.20})$$

Cette équation décrit un modèle de propagation unidirectionnelle pour les ondes longues à la surface de l'eau, en faible profondeur.

2. L'équation de Benjamin-Ono (B.O) :

L'équation de Benjamin-Ono (B.O) est donnée par

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^2 H(u) + \partial_x(u^2) = 0, t \in R, x \in R \quad (\text{I.21})$$

Où, H est la transformation d'Hilbert

Cette équation surgit dans l'étude de longues ondes de gravité internes faiblement non-linéaires et appartient à la classe des modèles faiblement non-linéaires.

3. L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) :

L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) est un modèle bi ou tridimensionnel, qui tient compte de faibles perturbations transversales, dont la longueur d'onde est de l'ordre du carré de la longueur d'ondes dans la direction de propagation. Cette équation s'écrit en deux dimensions :

$$\partial_x(\partial_t u + \gamma \partial_x^3 u + \partial_x(u^2))_x + \sigma^2 \partial_y^2 u = 0, t \in R, (x, y) \in R^2 \quad (\text{I.22})$$

où les différents coefficients sont constants.

Kadomtsev et Petviashvili ont présenté la première fois cette équation pour décrire le changement lent des ondes non linéaires dans un milieu dispersif. L'Eq. (I.22) avec $\sigma^2 = +1$ surgit dans l'étude des ondes dispersives faiblement non-linéaires dans les plasmas et également dans la modulation de longues ondes d'eau faiblement non-linéaires qui voyage presque dans un plan vertical.

Récemment, les auteurs ont dérivé l'équation de KP unifiée (UKP) pour les ondes externes et d'interface se propageant dans un canal tournant avec la topographie variable et les parois latérales. Cette nouvelle équation inclut la majeure partie des équations de type KP existant dans la littérature en tant que cas spéciaux.

4. L'équation de Benjamin-Bona-Mahony généralisée (BBM) :

Une variante des modèles de type KdV est donnée par l'équation de Benjamin-Bona Mahony (BBM) ou "Regularized Long Wave equation (RLW)".

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u + \partial_x(u + u^2) = 0, t \in R, x \in R \quad (I.23)$$

est mise aussi sous la forme :

$$\partial_t u = -(1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x(u + u^2) = 0, \quad (I.24)$$

L'équation de Benjamin-Bona-Mahony généralisée (BBM) comme modèle qui caractérise de longues ondes dans des milieux dispersifs non-linéaires. De nombreux chercheurs sont attirés par l'application de l'équation de BBM.

5. L'équation de Boussinesq :

L'équation de Boussinesq, décrit les vagues d'eau non-linéaires unidimensionnelles faiblement dispersives se propageant dans les directions positives et négatives de x

$$u_{tt} - u_{xx} + (3u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0, \quad (I.25)$$

6. L'équation de Burgers :

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} = 0, x \in R, t > 0 \quad (I.26)$$

où ν est la viscosité cinématique

C'est l'équation non-linéaire et modèle le plus simple pour les ondes diffusives dans la dynamique de fluide. Elle a été présentée la première fois par pour décrire la turbulence unidimensionnelle, et elle surgit également dans beaucoup de problèmes physiques comprenant les ondes sonores dans un milieu visqueux, les ondes dans des tubes élastiques visqueux remplis de fluide, et les ondes magnétohydrodynamiques dans un milieu avec la conductivité électrique finie.

7. L'équation de Fisher :

$$u_t - vu_{xx} = K(u - \frac{u^2}{\kappa}) = 0, x \in R, t > 0 \quad (I.27)$$

où v , K et κ sont des constantes.

L'Eq. (I.27) a été employée comme équation modèle non-linéaire pour étudier la propagation d'ondes dans un grand nombre de systèmes biologiques et chimiques. Fisher a présenté la première fois cette équation pour étudier la propagation d'ondes d'un gène dans une population. Ces dernières années, l'équation de Fisher a été employée comme équation modèle pour une grande variété de problèmes qui incluent la propagation d'onde chimique, la population de neutrons dans un réacteur nucléaire, et peut s'appliquer à la théorie de combustion, de diffusion non-linéaire, et la cinétique chimique.

8. Les équations non linéaires fortement dispersives et les Compactons :

Récemment, un type spécial d'équations de KdV a été découvert et un nouveau¹⁹ phénomène a été observé. Quand l'onde de dispersion est purement non-linéaire, on peut observer l'existence des 'compactons' : solitons avec la longueur d'onde finie.

Rosenau et Hyman ont découvert une classe d'ondes solitaires avec un support compact appelés 'compactons'. Les compactons sont définis par les ondes solitaires avec la propriété remarquable qu'après collision avec d'autres compactons, ils émergent avec la même forme de cohérence.

Cette nouvelle classe de solutions est régie par une famille de deux-paramètres, dénotée par $K(m, n)$,

$$u_t \pm a (u^m)_x + b (u^n)_{xxx} = 0, m > 0, 1 < n \leq 3 \quad (I.28)$$

Pour certaines valeurs de m et de n , où a et b sont des constantes positives réelles. Ainsi, des compactons sont définis comme des solitons avec un support compact. En d'autres termes, les compactons ont les propriétés suivantes :

- 1- Les Compactons sont des solitons avec la longueur d'onde finie ;
- 2- Les Compactons sont des ondes de solitons avec un support compact ;
- 3- Les Compactons sont des solitons exempts de queues exponentielles ;
- 4- Les Compactons sont des solitons caractérisés par l'absence des ailes finies ;
- 5- Les Compactons sont des solutions robustes de type soliton ;
- 6- Les Solutions de type compactons sont des solutions d'ondes spéciales qui peuvent être exprimées par le carré des fonctions sinusoïdales. À la différence du soliton standard de KdV, la largeur se décroît quand les amplitudes (vitesse) augmentent, la largeur d'un compacton est indépendante de l'amplitude, mais sa vitesse dépend de sa hauteur. Puisque la dispersion augmente avec l'amplitude ; aux amplitudes élevées, la dispersion est plus dominante que

dans l'équation de KdV , et par conséquent, elle peut efficacement équilibrer l'effet de la non-linéarité. L'Eq.(I.28) avec (+a) s'appelle la branche focalisante et admet des solutions d'ondes solitaires de déplacement. D'autre part, l'Eq.(1.28) avec (-a) est référée comme la branch défocalisante et admet des solutions d'ondes solitaires avec des pentes infinies. Ainsi, l'Eq.(I.28) représente deux modèles non-linéaires avec des structures physiques entièrement différentes.

La solution de $K(2, 2)$ avec $a = b = 1$ de l'Eq.(I.28)

$$u_t + (u^2)_x (u^2)_{xxx} = 0, \quad (I.29)$$

est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{4c}{3}\right) \cos^2\left[\frac{1}{4}(x - ct)\right], & |x - ct| \leq 2\pi \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (I.30)$$

Wazwaz a obtenu des compactons, des solitons, des modèles solitaires et des solutions périodiques pour la forme généralisée en utilisant la méthode de Tanh et la méthode de sine-cosine .

Récemment, une famille des équations de KdV non-linéaires est apparue dans la théorie de soliton parce que diverses formes d'effets de non-linéarité et de dispersion ont été prises en considération.

A titre d'exemple, nous citons principalement l'équation de type KdV de cinquième ordre et l'équation dispersive non-linéaire $K(m, n)$.

Aussi, Wazwaz [10] a dérivé plusieurs types de solutions, y compris des compactons pour l'équation dispersive non-linéaire $K(n, n)$ et

$$K(m, n).$$

Aussi, l'équation $K(m, n)$ (I.31) à coefficients dépendant du temps étudié par Wazwaz et al :

$$(u^m)_t + 2\beta(t)u^m + [\alpha(t) + \beta(t)x](u^m)_x + \delta(t)u^m u_x + \gamma(t)(u^n)_{xxx} = 0, \quad (I.31)$$

avec α et β sont des coefficients variables (dépendant du temps). γ et δ sont les coefficients de la non-linéarité et la dispersion en fonction du temps respectivement.

Les solitons et les compactons sont deux types d'ondes non-linéaires. Ils jouent un rôle essentiel dans toutes les ramifications de la science et de la technologie, et sont employés comme éléments constructifs pour formuler le comportement dynamique complexe des systèmes d'ondes dans toute la science : de l'hydrodynamique au système optique non linéaire, des plasmas aux ondes de chocs, des tornades à la grande tache rouge de Jupiter, de

Tsunamis à la turbulence. Récemment, le soliton et le compactons sont d'importance principale dans le domaine de la nano hydrodynamique.

9. L'équation de Sine-Gordon (SG) :

$$\Phi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0, \quad (\text{I.32})$$

L'équation de SG possède diverses solutions intéressantes : car x varie de $(-\infty \rightarrow +\infty)$, une solution qui change de 0 à 2π est un soliton (kink). Une solution qui change de 2π à 0 est un anti-soliton (anti-kink) et l'état lié de kink et anti-kink est un breather.

En 1939, Frenkel et Kontrova ont présenté l'équation de SG comme modèle pour les dislocations dans les cristaux. Le déplacement $\varphi(x, t)$ des atomes peut se propager comme un kink dans le champ périodique du cristal. Autour de 1960, Perring and Skyrme ont considéré l'équation de SG comme modèle pour les particules élémentaires (plus rigoureusement, baryons). Ils ont étudié les collisions de kink-kink et de kink-(anti-kink) et ont confirmé la stabilité des kink.

10. L'équation complexe de Korteweg de Vries modifiée (CMKdV) :

Cette équation est donnée par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial (|\psi|^2 \psi)}{\partial x} = 0, \quad (\text{I.33})$$

$$-\infty < x < +\infty, t > 0,$$

où, ψ est une fonction complexe évaluée en fonction de la coordonnée spatiale x et du temps t , α est un paramètre réel. Cette équation est utilisée comme modèle pour l'évolution non-linéaire des ondes de plasma. Elle incorpore la propagation des ondes transversales dans un modèle à chaînes moléculaires.

11. L'équation de Schrödinger non linéaire :

L'exemple type est donné par l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i\partial_t u + \beta \Delta u + \gamma |u|^{2\sigma} u = 0, \quad (\text{I.34})$$

$$x \in R, t > 0,$$

où u est une fonction à valeurs complexes, $t \in R$, $x \in R^n$, β et

$\gamma = \pm 1$ sont des constantes réelles. Cette équation intervient dans la physique des plasmas (c'est alors un cas particulier de l'équation de Zakharov) et en optique non linéaire (par exemple comme modèle de propagation dans les fibres optiques).

Bien souvent, l'effet de non linéarité est à l'origine d'une interaction cohérente de matière-rayonnement et a forte puissance.

Ceci ne peut être réservé que pour les sources laser notamment les lasers à solides. Par ailleurs, le transport d'informations par solitons dans les systèmes de télécommunications utilise la fibre optique comme milieu de propagation non linéaire en s'appuyant sur le principe de réflexion totale des ondes à l'interface cœur-gaine de la fibre. De ce fait, l'équation de Schrödinger non linéaire a été développée pour approximer la dynamique de propagation

non linéaire dans un système faiblement non linéaire et fortement dispersif comme les fibres optiques et les guides d'ondes.

Cette équation intervient aussi dans la propagation des ondes solitaires dans les semi conducteurs piézoélectriques, mais également dans le contexte des ondes de surface, lorsque la profondeur est infinie. Le cas le plus souvent rencontré dans les modèles physiques correspond à $\sigma = 1$. En hydrodynamique, on rencontre également l'équation en deux dimensions dans laquelle l'opérateur Δ est remplacé par l'opérateur $\partial_{x^2} - \partial_{y^2}$ [1].

Chapitre II :
**Quelques méthodes de construction
des solutions.**

II-Quelques méthodes de construction des solutions :

II-1-Première partie :

II-1-1-Les méthodes d'approximations :

II-1-1-1-Introduction :

L'effort pour trouver une solution exacte à une équation non-linéaire est important pour comprendre la plupart des phénomènes physiques non-linéaires. Ces dernières années beaucoup de méthodes puissantes pour chercher les solutions exactes des équations partielles non-linéaires ont été établies et développées, ce qui est l'une des avancées les plus passionnantes de la science non-linéaire et de la physique mathématique et théorique.

Il y a un grand nombre d'approches analytiques à la recherche des solutions. Parmi ces méthodes nous pouvons citer la méthode de perturbation, la méthode « de diffusion inverse », la transformation de Bäcklund /Darboux, la méthode d'Adomian, la méthode bilinéaire d'Hirota, la méthode elliptique de Jacobi, la méthode de perturbation d'homotopie, la méthode de la fonction tangente hyperbolique (Tanh), la méthode de Sinus Cosinus (Sine-Cosine), la méthode d'itération variationnelle, les méthodes d'ansatze . . . et beaucoup d'autres .

Dans cette partie, on va donner un aperçu sur quelques méthodes puissantes et connues d'être utilisées dans plusieurs modèles physiques, ensuite on tente de résoudre quelques modèles intéressants, en citant l'équation de KdV, et l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée (CMKdV). Toutes ces méthodes peuvent être consultées dans [11-18].

II-1-1-2-Présentation de quelques méthodes d'approximations :

II-1-1-2-1-L'Approche Variationnelle :

La théorie variationnelle a été appliquée avec succès à la recherche des solutions de soliton . Cette méthode peut mener à une simple dérivation des solutions de soliton.

Considérons l'équation de KdV

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = 0, \quad (\text{II.1})$$

Nous cherchons ces solutions comme une onde de la forme suivante

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (\text{II.2})$$

où c est la fréquence angulaire (ou vitesse). La substitution de (II.2) dans l'Eq.(II.1) donne

$$-cU' - 6UU' + U''' = 0 \quad (\text{II.3})$$

où ''' dénote la différentiation selon ξ . L'intégration de l'Eq. (II.3) donne

$$-cU - 3U^2 + U'' = 0 \quad (\text{II.4})$$

et par la méthode de semi-inverse, la formulation variationnelle suivante est établie.

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2c} cU^2 + U^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi \quad (\text{II.5})$$

La méthode semi-inverse est un outil mathématique puissant à la recherche des formules variationnelles pour des problèmes physiques réels. Par la méthode de Ritz, nous cherchons une solution d'ondes solitaires sous la forme d'un polynôme en termes de fonctions hyperboliques :

$$u = \sum_{i=0}^M p_i y^i,$$

où

$$y = \text{sech}(q_i \xi), \quad (\text{II.6})$$

où p_i, q_i et M sont des constantes à déterminer. Pour des mesures de simplicité, nous posons $M = 2, p_0 = p_1 = 0, p_2 = p$ et $q_2 = q$.

La substitution de (II.6) dans la relation (II.5) résulte

$$J = \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{2} \right) cp^2 \text{sech}^4(q\xi) + p^3 \text{sech}^6(q\xi) + \frac{1}{2} (4p^2 q^2 \text{sech}^4(q\xi) \tanh^2(q\xi)) \right] d\xi \quad (\text{2.7})$$

$$= \frac{cp^2}{2q} \int_0^\infty \text{sech}^4(z) dz + \frac{p^3}{q} \int_0^\infty \text{sech}^6(z) dz + 2p^2 q \int_0^\infty \{ \text{sech}^4(z) \tanh^4(z) \} dz$$

$$= \frac{cp^2}{3q} + \frac{8p^3}{15q} + \frac{4p^2 q}{15}$$

La fonctionnelle J est minimale par rapport à p et q , il résulte

$$\frac{2cp}{3q} + \frac{24p^2}{15q} + \frac{8pq}{15} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{-cp^2}{3q^2} - \frac{8p^3}{15q^2} - \frac{4p^2}{15} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Après simplification, on trouve

$$5c + 12p + 4q^2 = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$-5c - 8p + 4q^2 = 0$$

À partir du système (II.10), nous pouvons facilement obtenir les quantités suivantes :

$$P = -\frac{1}{2}c, q = \sqrt{\frac{c}{4}} \quad (\text{II.11})$$

ainsi la solution d'onde solitaire peut être approximée comme

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{c}{4}} (x - ct - \xi_0) \quad (\text{II.12})$$

qui fournit la solution d'onde solitaire exacte de l'équation de KdV (II.1).

L'analyse précédente a la vertu de la simplicité totale, l'approche variationnelle peut aisément être appliquée à la recherche des solutions d'ondes solitaires à d'autres problèmes non-linéaires, et peut être employée comme point de référence pour beaucoup d'autres applications.

II-1-1-2-2-La méthode d'itération Variationnelle :

La méthode d'itération variationnelle est une méthode pour obtenir des solutions de type soliton à de diverses équations d'ondes non-linéaires. La méthode commence par une solution de type soliton avec quelques paramètres inconnus qui peuvent être déterminés après quelques itérations seulement. La formule d'itération est construite par un multiplicateur général de Lagrange qui peut être identifié de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

II-1-1-2-3-La méthode de perturbation d'homotopie (MPH) :

Cette méthode est un outil mathématique simple dans la recherche des solutions de soliton . Dans cette méthode, une homotopie est construite avec un paramètre p . Pour illustrer les idées fondamentales de cette méthode, nous considérons l'équation non-linéaire suivante :

$$A(U) - f(r) = 0 \quad r \in \Omega \quad (\text{II.13})$$

avec les conditions aux bords sont données. A est un opérateur différentiel général, $f(r)$ une fonction analytique connue, Ω est le domaine de la solution.

L'opérateur A peut être, généralement divisé en deux parties de L et N , où L est la partie linéaire, alors que N est la partie non-linéaire. L' Eq.(II.13) peut, donc, être réécrite comme :

$$L(U) + N(U) - f(r) = 0 \quad (\text{II.14})$$

Par la technique d'homotopie, nous construisons une homotopie $v(r, p)$:

qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, p \in [0,1], \quad (\text{II.15})$$

ou

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (\text{II.16})$$

où p est un paramètre et u_0 est une approximation initiale de l'Eq.(II.13) qui satisfait les conditions aux limites. Evidemment, en considérant l'Eq.(II.16), on a :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) \quad (\text{II.17})$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Le changement de p de zéro à l'unité est justement le changement de $v(r, p)$ de $u_0(r)$ à $U(r)$. Dans la topologie, ceci s'appelle la déformation, et $L(v) - L(u_0)$ et $A(v) - f(r)$ s'appellent homotopie.

Selon *MPH*, nous pouvons d'abord employer le paramètre p comme "petit paramètre", et supposons que la solution de (2.16) peut être écrite comme une série entière en p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (\text{II.19})$$

Posons $p = 1$, la solution approximative de l'Eq.(2.13) :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (\text{II.20})$$

La combinaison de la méthode de perturbation et de la méthode d'homotopie s'appelle la méthode d'homotopie de perturbation.

La série (II.20) est convergente pour la plupart des cas. Cependant, le taux de convergence dépend de l'opérateur non-linéaire $A(v)$.

Les remarques suivantes sont suggérées par He :

(a)- la deuxième dérivée de $N(v)$ selon v doit être petite parce que le paramètre p peut être relativement grand, c-à-d. $p \rightarrow 1$.

(b)- la norme $L^{-1} \partial N / \partial v$ doit être plus petite que "un" de sorte que la série converge.

II-1-1-2-4-La méthode du développement du paramètre

La méthode du développement du paramètre est une nouvelle méthode pour rechercher les solutions de type soliton et les solutions périodiques des systèmes non linéaires. La méthode suppose que les solutions peuvent être exprimées sous formes arbitraires de fonction exponentielle. Cette méthode n'exige pas de construire une homotopie.

Pour illustrer la procédure de la recherche des solutions, nous considérons comme exemple l'équation non-linéaire suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N(u) = 0, a > 0, b > 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 1 \cdot N(u) = 0, \quad (\text{II.22})$$

Supposons que les paramètres a , b , et 1 peuvent s'exprimer de la forme

$$a = a_0 + p a_1 + p^2 a_2 + \dots \quad (\text{II.23})$$

$$b = b_0 + p b_1 + p^2 b_2 + \dots \quad (\text{II.24})$$

$$1 = p c_1 + p^2 c_2 + \dots \quad (\text{II.25})$$

où p est un paramètre de comptabilité, $p = 1$. La substitution des Eqs.(II.19) et (II.23) –(II.25) dans l’Eq.(II.22) et en procédant la même démarche utilisée dans la méthode de perturbation, nous pouvons facilement obtenir la solution nécessaire.

II-1-1-2-5 La méthode de la fonction exponentielle :

La méthode de la fonction exponentielle nous fournit une approche directe et concise sur la réalisation des solutions solitaires généralisées et les solutions périodiques.

Considérons une équation partielle non-linéaire générale de la forme

$$F = (u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, u_{xt}, u_{yt}, \dots) = 0 \quad (\text{II.26})$$

Utilisant la transformation

$$\eta = ax + by + cz + dt, \quad (\text{II.27})$$

nous pouvons réécrire l’Eq.(II.26) sous forme d’équation ordinaire non-linéaire comme suit

$$G = (u, u', u'', u''', \dots), \quad (\text{II.28})$$

où les primes dénotent la dérivée par rapport à η .

On donne aux solutions d’ondes la forme suivante

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-k}^l a_n \exp(n \eta)}{\sum_{m=-i}^j b_m \exp(m \eta)} \quad (\text{II.29})$$

où i, j, k , et l sont des nombres entiers positifs qui pourraient être librement choisis, a_n et b_m sont des constantes inconnues à déterminer.

II-1-1-2-6 -La méthode Tanh :

1- introduction :

Depuis que le monde autour de nous est intrinsèquement non linéaire , les équations aux dérivées partielles non linéaires (PDE) sont largement utilisées pour décrire des phénomènes complexes dans différents domaines des sciences , en particulier dans la physique telles que la physique des plasmas , la mécanique des fluides , fibres optiques , la physique de l'état solide , l'optique non linéaire et ainsi de suite . L'un des progrès les plus passionnants de la science non linéaire et la physique théorique est le développement des

méthodes pour rechercher des solutions exactes des équations aux dérivées partielles non linéaires.

2- Présentations et applications :

Dans cette section, nous donnons une brève description de la tanh-fonction étendue modifiée. Considérons une forme non linéaire PDE.

$$H = (u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (\text{II.30})$$

Nous considérons d'abord les solutions d'onde de voyage $u(x, t) = u(\xi)$, où $\xi = x - ct$, l'équation (2.30) devient une équation différentielle ordinaire. La prochaine étape nous recherchons les solutions sous la forme

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^M w^i (a_i + b_i w^{-2i}) \quad (\text{II.31})$$

et

$$w' = b + w^2, \quad (\text{II.32})$$

où b est un paramètre à déterminer $w = w(\xi), w' = \frac{dw}{d\xi}$. Le paramètre M se déduit en équilibrant l'ordre le plus élevé du terme linéaire avec celui du terme non linéaire. L'insertion (II.31) et (II.32) dans l'équation différentielle ordinaire fournit un système d'équations algébriques par rapport à a_i, b_i, b et c ($i = 1, \dots, M$) car tous les coefficients de w^i doivent s'annuler. Avec l'aide de Mathematica, on peut déterminer a_i, b_i, b et c . L'équation de Riccati (II.32) présente des solutions générales:

a) si $b < 0$

$$w = -\sqrt{-b} \tanh[\sqrt{-b}\xi], \quad (\text{II.33})$$

$$w = -\sqrt{-b} \coth[\sqrt{-b}\xi].$$

b) si $b = 0$

$$w = -1/\xi \quad (\text{II.34})$$

c) si $b > 0$

$$w = \sqrt{b} \tan[\sqrt{b\xi}]; \quad (II.35)$$

$$w = -\sqrt{-b} \cot[\sqrt{b\xi}].$$

- Dans la section suivante, nous étudions quelques équations non linéaires d'un intérêt particulier en physiques et mathématiques pour illustrer cette méthode.

II-1-1-2-7 -La méthode Sine-Cosine :

La description de cette méthode peut être illustrée comme suit :

Soit, l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante,

$$p = (u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) \quad (II.36)$$

qui peut être convertie en EDO,

$$Q = (u, u', u'', u''', \dots) \quad (II.37)$$

Le changement de variable, $\xi = x - ct$ est utilisé comme une variable d'onde. Les solutions de l'équation réduite EDO peuvent être exprimées sous la forme,

$$u = \begin{cases} \lambda \cos^\beta(\mu\xi), & |\xi| \leq \pi/2\mu \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (II.38)$$

ou sous cette forme,

$$u = \begin{cases} \lambda \sin^\beta(\mu\xi), & |\xi| \leq \pi/2\mu \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (II.39)$$

où λ, μ et β sont des paramètres qui seront déterminés, μ et c sont le nombre d'onde et la vitesse de l'onde respectivement.

Ces hypothèses donnent

$$(u^n)'' = -n^2 \mu^2 \beta^2 \lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2 \lambda^n \beta(n\beta - 1) \cos^{n\beta-2}(\mu\xi), \quad (II.40)$$

$$(u^n)'' = -n^2 \mu^2 \beta^2 \lambda^n \sin^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2 \lambda^n \beta(n\beta - 1) \sin^{n\beta-2}(\mu\xi), \quad (II.41)$$

L'utilisation de (2.38)–(2.41) dans l'EDO réduite donne une équation trigonométrique de termes $\cos^\beta(\mu\xi)$ ou $\sin^\beta(\mu\xi)$. Puis, les paramètres sont déterminés en équilibrant d'abord les exposants de chaque paire de cosinus ou sinus pour déterminer β .

Ensuite, nous rassemblons tous les coefficients de même puissance de $\cos^k(\mu\xi)$ ou $\sin^k(\mu\xi)$. Ceci donne un système d'équations algébriques où les inconnus β, λ , et μ seront déterminés.

Les solutions proposées en (II.38) et (II.39) suivent immédiatement .

-Variante d'onde longue régularisée (RLW: Abréviation de: Regularized Long Wave)

Une variante de l'équation RLW non linéaire est donnée par

$$u_t + au_x - k(u^n)_x + b(u^n)_{xxt} = 0 \quad (\text{II.70})$$

La substitution $u(x, t) = u(\xi)$, où la variable d'onde est $\xi = x - ct$, transforme l' Eq. (II.70) à une ODE

$$(a - c)u' - k(u^n)' - bc(u^n)''' = 0 \quad (\text{II.71})$$

L'intégration (II.71), avec la constante d'intégration mise à zéro, on obtient

$$(a - c)u - ku^n - bc(u^n)'' = 0 \quad (\text{II.72})$$

En substituant (II.66) dans (II.72) donne :

$$(a - c)\lambda \cos^\beta(\mu\xi) - k\lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + bc n^2 \mu^2 \beta^2 \lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) - bc n \lambda^n \mu^2 \beta (n\beta - 1) \cos^{n\beta-2}(\mu\xi) = 0 \quad (\text{II.73})$$

En égalant les exposants de la première et la dernière des fonctions cosinus, en recueillant les coefficients de chaque paire de fonctions cosinus comme des exposants, on obtient le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{aligned} n\beta - 1 &\neq 0 \\ n\beta - 2 &= \beta \\ bc n^2 \mu^2 \beta^2 &= k \\ bc n \lambda^n \mu^2 \beta (n\beta - 1) &= (a - c)\lambda \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Ce système permet de trouver

$$\beta = \frac{2}{n-1}$$

$$\mu = \frac{n-1}{2n} \sqrt{\frac{k}{bc}}, \frac{k}{bc} > 0, \quad (\text{II.75})$$

$$\lambda = \left(\frac{2n(a-c)}{k(n+1)} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad n > 1$$

qui peuvent également être obtenus en utilisant la forme sinus (2.67). Sur la base de ce résultat, nous obtenons les solutions de type compactons et non compactons suivantes.

1-Des solutions de type Compactons :

Des solutions de Compactons Pour $\frac{k}{cb} > 0$, et en utilisant les résultats précédents en (II.75) on obtient une famille de solutions de compactons

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2n(a-c)}{k(n+1)} \sin^2 \left[\frac{n-1}{2n} \sqrt{\frac{n-1}{2n}} (x - ct) \right] \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad |\mu\xi| < \pi, \\ 0, \quad \text{ailleurs,} \end{array} \right\} \quad (\text{II.76})$$

et

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2n(a-c)}{k(n+1)} \sin^2 \left[\frac{n-1}{2n} \sqrt{\frac{k}{cb}} (x - ct) \right] \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad |\mu\xi| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, \quad \text{ailleurs,} \end{array} \right\} \quad (\text{II.77})$$

2-Solutions de type solitaires :

Cependant, pour $\frac{k}{cb} < 0$, on obtient une famille de solutions solitaires

$$u(x, t) = \left\{ -\frac{2n(a-c)}{k(n+1)} \sinh^2 \left[\frac{n-1}{2n} \sqrt{-\frac{k}{bc}} (x - ct) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{II.78})$$

et

$$u(x, t) = \left\{ \frac{2n(a-c)}{k(n+1)} \cosh^2 \left[\frac{n-1}{2n} \sqrt{-\frac{k}{bc}} (x - ct) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{II.79})$$

3-Solutions de type périodiques :

Il est utile d'examiner l'effet des exposants négatifs sur les compactons précédents et des solutions solitaires. Pour $\frac{k}{bc} > 0$ et n négatif, on obtient les solutions périodiques

$$u(x, t) = \left\{ \frac{k(n-1)}{2n(a-c)} \operatorname{csc}^2 \left[\frac{n+1}{2n} \sqrt{\frac{k}{bc}} (x - ct) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{II.80})$$

et

$$u(x, t) = \left\{ \frac{k(n-1)}{2n(a-c)} \operatorname{sec}^2 \left[\frac{n+1}{2n} \sqrt{\frac{k}{bc}} (x - ct) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{II.81})$$

4-Solutions de type solitons :

Pour $\frac{k}{cb} < 0$ et pour n négatif, les deux dernières solutions seront solitons solutions de la forme

$$u(x, t) = \left\{ -\frac{k(n-1)}{2n(a-c)} \operatorname{coch}^2 \left[\frac{n+1}{2n} \sqrt{-\frac{k}{bc}} (x - ct) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{II.83})$$

et

$$u(x, t) = \left\{ \frac{k(n-1)}{2n(a-c)} \operatorname{scht}^2 \left[\frac{n+1}{2n} \sqrt{-\frac{k}{bc}} (x - ct) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{II.84})$$

II-2-Deuxième partie :

II-2-1-Les méthodes de décomposition :

II-2-1-1-Introduction :

Des problèmes non-linéaires sont résolus facilement sans linéarisation et discrétisation en employant les méthodes de décomposition. Ces méthodes consistent en la décomposition du terme non linéaire en une série infinie. Les deux méthodes qui seront présentées ici sont : la méthode d'Adomian [11] et la méthode de perturbation a paramètre artificiel [12].

II-2-1-2-La méthode d'Adomian :

II-2-1-2-1-Description de la méthode :

La méthode présente un algorithme formel pour établir une représentation appropriée de toutes les formes des termes non-linéaires. La représentation des termes non-linéaires est

nécessaire pour manipuler l'équation non-linéaire d'une manière efficace. Un algorithme alternatif pour calculer les polynômes d'Adomian sera décrit en détails. De façon semblable, la représentation des termes non-linéaires sera également présentée. La discussion sera illustrée par un exemple faisant preuve de test.

II-2-1-2-2- Polynômes d'Adomian :

La solution $u(x, t)$ est écrite comme une somme infinie de composantes

$u_n(x, t)$ définie par .

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (\text{II.39})$$

la méthode de décomposition identifie le terme non-linéaire,

$$N(u(x, t)) = F(u(x, t)) \text{ par la décomposition en } A_0(u_0) + A_1(u_0, u_1) + A_2(u_0, u_1, u_2) + \dots + A_n(u_0, u_1, \dots, u_n),$$

$$F[u(x, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\text{II.40})$$

où A_n sont les polynômes d'Adomian.

Adomian a présenté plusieurs formules pour générer les polynômes (d'Adomian) pour toutes les formes d'opérateurs non-linéaires. Récemment, quelques méthodes récentes pour calculer les polynômes d'Adomian d'une manière simple sans le besoin des formules introduites par Adomian ont été étudiées par nombreux auteurs .

II-2-2-La méthode de perturbation artificielle :

II-2-2-1-Introduction :

Cette méthode est présentée dans le contexte du système dynamique pour résoudre l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée (m KdV Couplée) dans le but de séparer le terme non-linéaire dans l'équation d'évolution. La description de la méthode de perturbation, ainsi que la représentation des termes non-linéaires seront présentés en détail [11-13].

II-2-2-2-Description de la méthode :

Pour illustrer les concepts de base de cette méthode, nous considérons une équation différentielle aux dérivées partielles avec deux variables indépendantes.

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (\text{II.41})$$

Cette approche consiste à introduire un paramètre auxiliaire,

ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) et le remplacement du terme non-linéaire par $Nu = F(u)$. Donc, on obtient l'équation partielle analogue suivante :

$$F(v, v_x, v_t, v_{xx}, \dots) = 0 \quad (\text{II.42})$$

avec la solution $u(x, t)$ étant de la forme :

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} v(x, t, \varepsilon) \quad (\text{II.43})$$

Supposons l'existence des solutions des équations pour toutes les valeurs de ε , et nous pouvons voir que $u(x, t)$ sera modifiée et dépend maintenant du paramètre ε . Les solutions v dans l'Eq.(II.43) peuvent être trouvées par un développement en séries de Taylor en fonction du paramètre ε . Dans les calculs pratiques nous retenons seulement les termes d'ordre M de la série pour décrire la solution v , notée comme suit :

$$v_M(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \varepsilon^i v^{(i)}, \quad (\text{II.44})$$

$$v^{(0)} = v_M(x, t, 0), v^{(N)} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n v_M}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0}, n = 1, \dots, M$$

Où $\frac{\partial^n v_M}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0}$ représente la dérivée d'ordre n évaluée au point 0.

En introduisant la forme de la solution, Eq.(II.44) dans l'équation différentielle (II.42) et ensuite par égalisation des mêmes puissances de ε , on obtient un système d'équations linéaires qui peut être résolu récursivement.

La solution $v^{(0)}$ est obtenue à partir de l'équation linéaire qui peut être résolue par la méthode de la transformée de Fourier ou par d'autres méthodes.

En introduisant $v^{(0)}$ dans le système d'équations, nous obtenons la solution $v^{(1)}$ qui sera incorporée dans le système pour obtenir la solution $v^{(2)}$ et ainsi de suite.

Notons que la séparation du terme non-linéaire de l'équation initiale nous permet d'obtenir un système d'équations et la reconstruction de la solution finale est alors possible dans la plupart des cas.

Chapitre III :

Méthodes fonctionnelles pour les équations non linéaires

III- Nouvelle méthode de la variable fonctionnelle formulée par A. Zerarka pour les équations d'ondes non linéaires

III-1- Les équations d'ondes à coefficients constants:

Les développements récents des problèmes non-linéaires avec l'effort intense entrepris a augmenté le besoin de la construction de nouvelles approches. Nous décrivons dans ce chapitre un nouveau traitement basé sur la méthode de la variable fonctionnelle [20,21] élaborée par le Prof A. Zerarka pour trouver les solutions exactes pour une classe d'équations d'ondes non-linéaires . Pour montrer l'efficacité de cette méthode, on présente les structures de quelques équations non linéaires à coefficients constants, et l'effet de l'exposant négatif des termes non-linéaires est aussi traité.

III-2-Description de la méthode

Dans cette section, nous décrivons la méthode de la variable fonctionnelle (MV F) qui conduit à l'intégration de plusieurs modèles des équations différentielles partielles non-linéaires EDP . Considérons l'équation différentielle partielle non-linéaire suivante, écrite en plusieurs variables indépendantes

$$P(u, u_t, u_y, u_z, u_{xy}, u_{yz}, u_{xx}, \dots \dots) \quad (\text{III.1})$$

les indices expriment les dérivées partielles de la fonction inconnue $u(t, x, y, z, \dots)$, P est une fonction qui relie les différents êtres mathématiques tels que $u, u_t, u_y, u_z, u_{xy}, u_{yz}, u_{xx}, \dots$

On exprime la nouvelle variable d'onde par :

$$\xi = \delta + \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i \quad (\text{III.2})$$

x_i sont les variables indépendantes, δ et α_i sont des paramètres .

Quand $m = 1$, alors $\xi = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \delta$, et si x_0, x_1 sont les variables t et x respectivement, les paramètres α_0, α_1 sont identifiés comme la pulsation d'onde, ω et le vecteur d'onde, k respectivement.

A ce stade, nous introduisons la transformation suivante pour la solution d'onde

$$u(x_0, x_1, \dots) = U(\xi) \quad (\text{III.3})$$

et avec la règle de chaîne

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot) = \alpha_i \frac{d}{d\xi}(\cdot), \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot) = \alpha_i \alpha_j \frac{d^2}{d\xi^2}(\cdot), \dots \dots \quad (\text{III.4})$$

Avec l'utilisation des relations (III.3) et (III.4), l'équation différentielle partielle non-linéaire (III.1) est convertie en équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$Q(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (\text{III.5})$$

On introduit alors une transformation dans laquelle la fonction inconnue U est considérée comme une variable fonctionnelle est écrite sous la forme

$$U_\xi = F(U) \quad (\text{III.6})$$

et les dérivées successives de U sont

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)', U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)''\sqrt{F^2}, U_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}[(F^2)'''F^2 + (F^2)''(F^2)'], \quad (\text{III.7})$$

Où « ' » représente la dérivée $(\frac{\partial}{\partial U})$, « '' » représente la dérivée $(\frac{\partial^2}{\partial U^2})$,...

L'équation différentielle ordinaire (III.5) peut être réduite en termes de U, F et ses dérivée en utilisant les relations (III.7), on obtient une fonction R de la forme

$$R(U, F, F', F'', F''', F^4, \dots \dots) = 0 \quad (\text{III.8})$$

L'idée principale de la forme particulière (III.8) est d'intérêt spécial parce qu'elle admet les solutions analytiques pour une certaine classe d'équations d'ondes non-linéaires.

Après intégration, l'éq.(III.8) fournit l'expression de F , et alternativement avec l'éq.(III.6), on peut extraire les solutions appropriées au problème original. Dans la suite, nous examinons quelques exemples traités par d'autres approches notamment par la méthode de *sine – cosine*, la méthode de *Tanh* et les méthodes d'ansatze.

III-3-Quelques applications traitées

Dans la plupart des cas, cette méthode peut donner des solutions exactes, telles que par exemple, des solutions de type *soliton*, des solutions de type *compactons* et *non – compactons*, des solutions *trigonometriques*, des solutions de type *Pattern*, des

solutions de type *Kink*, et d'autres profils de solutions. Dans cette section, nous intéressons à quelques exemples bien connus tels que, l'équation de *KdV*, la forme généralisée du système de *Boussinesq*, et l'équation des ondes longues régularisées (*RLW*). En conséquence beaucoup de recherches ont été consacrées à ces types d'équations.

III-3-1- L'équation de *KdV* :

Nous allons tester cette méthode sur l'équation de *KdV*

$$u_t + \eta u(u)_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad (III.9)$$

avec $\alpha = \eta = 1$. en utilisant la relation (III.2), l'éq.(III.9) prend la forme :

$$\alpha_1 U_\xi + \alpha_0 U U_\xi + \alpha_0^3 U_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (III.10)$$

et après intégration on trouve

$$\alpha_1 U + \frac{1}{2} \alpha_0 (U)^2 + \alpha_0^3 U_{\xi\xi} = 0, \quad (III.11)$$

En multipliant l'éq.(III.11) par U_ξ , et en intégrant il vient,

$$\frac{\alpha_1}{2} U^2 + \frac{1}{6} \alpha_0 (U)^3 + \frac{1}{2} \alpha_0^3 (U_\xi)^2 = 0, \quad (III.12)$$

avec l'aide de la transformation (III.6), l'éq.(III.12) devient :

$$\alpha_1 U^2 + \frac{1}{3} \alpha_0 (U)^3 + \alpha_0^3 F^2(U) = 0, \quad (III.13)$$

qui fournit l'expression de $F(U)$:

$$F(U) = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} U} \sqrt{1 + \frac{\alpha_0}{3} U}, \quad (III.14)$$

En regardant l'expression (III.14), la relation différentielle (III.6) est complètement intégrable, puisque ses solutions sont déduites directement de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}} = \ln \left| \frac{-1+\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{1+y}} \right|, \quad (III.15)$$

A partir de (III.6) et (III.15), nous pouvons obtenir l'équation quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2)Z - 4(1 - A^2) = 0, \quad (III.16)$$

Avec

$$Z = \frac{\alpha_0}{3} U, \quad (\text{III.17})$$

et

$$A = \frac{2 \tanh \left[\frac{c}{2} \xi \right]}{\left\{ 1 + \tanh^2 \left[\frac{c}{2} \xi \right] \right\}}, \quad (\text{III.18})$$

Ou,

$$c = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}, \quad (\text{III.19})$$

Finalement, les deux solutions de l'équation (III.16), et après une certaine manipulation algébrique sont données par :

1. Pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3} < 0$,

On trouve la solution exacte

$$u_1(x, t) = \frac{3}{\alpha_1} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x) + \beta \right) \right], \quad (\text{III.20})$$

avec $\beta = \delta \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}}$

2. Pour $\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3} > 0$,

On trouve la solution exacte

$$u_2(x, t) = \frac{3}{\alpha_1} \operatorname{sec}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x) + \beta \right) \right], \quad (\text{III.21})$$

avec $\beta = \delta \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}}$ et qui sont identiques avec celles trouvées en

III-3-2-La forme généralisée du système Boussinesq

$$\begin{cases} v_t + \alpha(u^n)_x - bu_{xxx} = 0 \\ u_t + v_x = 0 \end{cases}, \quad a, b \neq 0 \text{ et } n > 1 \quad (\text{III.22})$$

où , a et b sont des constantes arbitraires. Les équations de *Boussinesq* décrivent les vagues d'eau non-linéaires faiblement dispersives et les *solitons* d'ions acoustiques . Plusieurs formes des équations de *Boussinesq* sont également construites avec différentes stratégies afin de fournir de nouvelles structures physiques . Nous présentons d'abord les variables indépendantes, x et t , par l'intermédiaire de la variable d'onde en utilisant la relation (III.2), alors on a

$$\xi = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta, \quad (III.23)$$

et nous cherchons les solutions d'ondes de déplacement du système (III.22) en utilisant la relation (III.3), $u(x, t) = U(\xi)$ et $v(x, t) = V(\xi)$. En employant la règle de chaîne (III.4), le système (III.22) devient comme

$$\begin{cases} \alpha_0 V_\xi + a\alpha_1 (U^n)_\xi - b\alpha_0^3 U_{\xi\xi\xi}, \\ \alpha_0 U + \alpha_1 V = 0 \end{cases}, \quad (III.24)$$

L'intégration du système (III.24) donne

$$\begin{cases} \alpha_0 V + a\alpha_1 (U^n) - b\alpha_0^3 U_{\xi\xi\xi} = 0, \\ \alpha_0 U + \alpha_1 V \end{cases}, \quad (III.25)$$

ou, d'une manière équivalente, (III.25) est écrite sous cette forme

$$\begin{cases} -\alpha_0^2 U + a\alpha_1^2 U^n - b\alpha_1^4 U_{\xi\xi} = 0 \\ V = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} U \end{cases}, \quad (III.26)$$

Suivant les relations (III.7), nous obtenons à partir de l'Eq.(III.26), l'expression de la fonction $F(U)$

$$F(U) = \frac{\alpha_0}{\alpha_1^2 \sqrt{-b}} U \sqrt{1 - \frac{2a\alpha_1^2}{(n+1)\alpha_0^2} U^{n-1}}, \quad (III.27)$$

Évidemment, en vertu de (III.27), l'Eq.(III.6) est complètement intégrable, puisque ses solutions sont déduites directement de l'intégrale :

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y}} = \ln \left| \frac{-1+\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-y}} \right|, \quad (III.28)$$

Suivant (III.6) et (III.28), nous pouvons obtenir l'équation quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2)Z - 4(1 - A^2) = 0, \quad (\text{III.29})$$

Avec

$$Z = \frac{2a\alpha_1^2}{(n+1)\alpha_0^2} U^{n-1}, \quad (\text{III.30})$$

et

$$A = \frac{2 \tanh\left[\frac{c}{2}\xi\right]}{\left\{1 + \tanh^2\left[\frac{c}{2}\xi\right]\right\}}, \quad (\text{III.31})$$

Où

$$c = \frac{(n-1)\alpha_0}{\alpha_1^2 \sqrt{-b}}, \quad (\text{III.32})$$

Finalement, les deux solutions de (III.29)et (III.30), après une certaine manipulation algébrique sont données par

$$U_1(\xi) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{-b}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.33})$$

et

$$U_2(\xi) = \left\{ -\frac{(n+1)\alpha_1^2}{2a\alpha_0^2} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{-b}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.34})$$

1. Pour $b > 0$

À partir des Eqs.(3.33) et (3.34), nous obtenons les solutions périodiques pour $u(x, t)$ et $v(x, t)$

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sec}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.35})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csc}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.36})$$

et pour $v(x, t)$, tel que

$$v_{(1)}(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(1)}(x, t), \quad (\text{III.37})$$

$$v_{(2)}(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(2)}(x, t), \quad (\text{III.38})$$

$$v_1(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sec}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.39})$$

et

$$v_2(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csc}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.40})$$

2. Pour $b < 0$

À partir des Eqs.(III.33) et (III.34), les solutions de type *solitons* sont

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}}, \quad (\text{III.41})$$

Et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.42})$$

et pour $v(x, t)$, nous obtenons

$$v_1(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.43})$$

$$v_2(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csch}^2 \left[-\frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (\text{III.44})$$

On note que les solutions d'ondes de déplacements exactes (III.41), (III.42), (III.43) et (III.44) sont identiques avec celles trouvées en employant la méthode *Sine – Cosine* avec les paramètres suivants :

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, a = 2, b = 1 \text{ et } \delta = 0 \quad (\text{III.45})$$

Nous montrons dans la *Fig-III-1* (a, b), la formation des solutions périodiques

$u_1(x, t)$ donnée par l'Eq.(III.35) où les courbes (a) et (b) affichent les cas $n = 2$ et $n = 3$ respectivement.

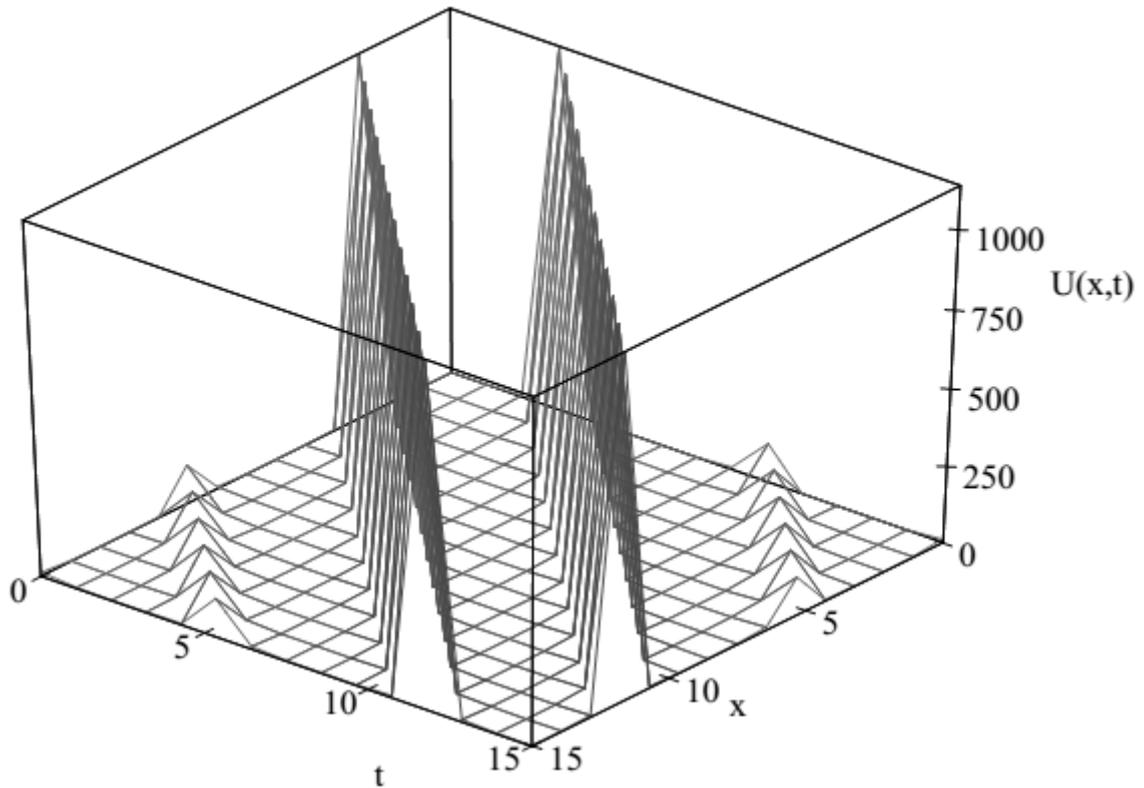


Fig-III-1- a. La courbe de la solution périodique , le cas $n = 2$

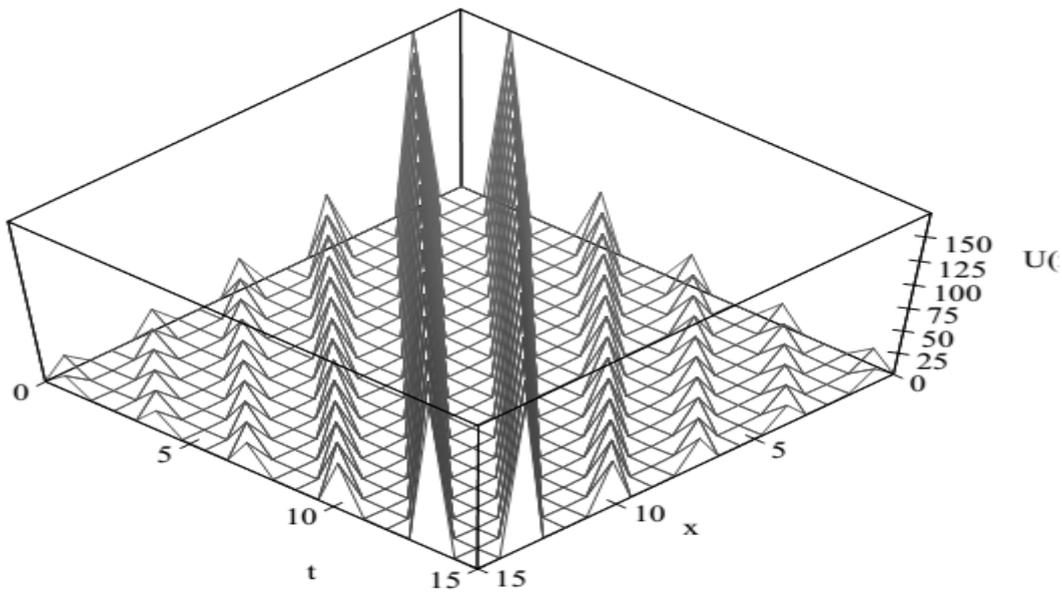


Fig-III-1- b. La courbe de la solution périodique, le cas $n = 3$

III-3-3- L'équation d'onde longue régularisée (RLW) :

Dans cet exemple, nous exposons l'équation d'onde longue régularisée (RLW) (regularized long-wave) qui est un modèle pour la description des ondes longues de faible amplitude.

L'équation (RLW) est présentée comme suit

$$U_t + aU_x - K(U^n)_x + b(U^n)_{xxt} = 0, \quad (\text{III.46})$$

En utilisant la nouvelle variable d'onde (III.2) et avec les transformations (III.3) et (III.4), l'éq.(III.46) devient

$$(\alpha_0 + a\alpha_1)U(\xi) - \alpha_1 K(U^n)_\xi + \alpha_1^2 \alpha_0 b(U^n)_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (\text{III.47})$$

En posant $U = V^{\frac{1}{n}}$, et après intégration de l'éq.(III.47), nous obtenons l'équation suivante en termes de V

$$(\alpha_0 + a\alpha_1)V^{\frac{1}{n}} - K\alpha_1 V + \alpha_0 \alpha_1^2 b V_{\xi\xi} = 0, \quad (\text{III.48})$$

À partir des eqs.(III.7) et (III.48), il est facile de déduire l'expression de la fonction $F(V)$

$$F(V) = \sqrt{\frac{K}{b\alpha_0\alpha_1}} V \sqrt{1 - \frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 K(n+1)} V^{\frac{1-n}{n}}}, \quad (\text{III.49})$$

On pose alors

$$Z = \frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 K(n+1)} V^{\frac{l-n}{n}}$$

et en utilisant la relation (III.49), la solution de l'éq.(III.6) est obtenue comme suit

$$\ln \left| \frac{-l + \sqrt{l-y}}{l + \sqrt{l-y}} \right| = c\xi, \quad (\text{III.50})$$

Avec
$$c = \frac{(l-n)}{n} \sqrt{\frac{K}{b\alpha_0\alpha_1}}$$

En combinant le résultat (III.50), nous obtenons la forme quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(I - A^2)Z - 4(I - A^2) = 0 \quad (\text{III.51})$$

Où

$$A = \frac{2 \tanh \left[\frac{(l-n)}{2n} \sqrt{\frac{K}{b\alpha_0\alpha_1}} \xi \right]}{\left\{ 1 + \tanh^2 \left[\frac{(l-n)}{2n} \sqrt{\frac{K}{b\alpha_0\alpha_1}} \xi \right] \right\}} \quad (\text{III.52})$$

Il résulte deux solutions possibles du système (III.51) et (III.52) :

$$V_1(\xi) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (n+1)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(l-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{n}{l-n}} \quad (\text{III.53})$$

et

$$V_2(\xi) = \left\{ -\frac{\alpha_1 k (n+1)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1)} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{(l-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{n}{l-n}} \quad (3.54)$$

Des Eqs.(III.53) et (III.54) nous déduisons les solutions du problème (III.46)

$$U_1(\xi) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (l+n)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(l-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{l}{l-n}} \quad (\text{III.55})$$

et

$$U_2(\xi) = \left\{ -\frac{\alpha_1 k (l+n)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1)} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{(l-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{l}{l-n}} \quad (\text{III.56})$$

[1]

On a deux cas à discuter :

1. Pour $\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} > 0$

Les solutions des Eqs.(III.55) et (III.56) sont

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2n(\alpha_0 + \alpha_1)}{\alpha_1 k (n+1)} \operatorname{cosh}^2 \left[\frac{(n-l)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{l}{n-l}} \quad (\text{III.57})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 k(n+1)} \sinh^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{III.58})$$

Ces deux solutions sont connues comme des solutions solitaires "Pattern".

2. Pour $\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} < 0$

Les résultats (III.55) et (III.56), mènent à des solutions de la famille des compactons suivante

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 k(n+1)} \cos^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{III.59})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 k(n+1)} \sin^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{III.60})$$

Notant que, pour les deux cas, ces solutions exactes sont similaires à ceux trouvés dans l'utilisation des méthodes de *Ansatz* avec le mappage suivant

$$\alpha_0 = -c, \alpha_1 = 1, \delta = 0 \quad (\text{III.61})$$

III-3-3-1-D'autres structures ayant un exposant négatif :

Solutions remarquables peuvent être déduites de deux exemples dans le cas où les termes non linéaires de l'équation. (III.59) a été utilisé pour tracer les portraits de solutions compactons comme indiqué sur la figure. 2 (a) et (b) pour $n = 2$, et $n = 3$ respectivement. le problème initial comporte un exposant négatif

$$u_t + v_x = 0, v_t + a(u^{-n})_x - bu_{xxx} = 0, a, b \neq 0, \text{ et } n > 1 \quad (\text{III.62})$$

pour la forme généralisée du système de *Boussinesq*, et

$$u_t + u_x - k(u^{-n})_x + b(u^{-n})_{xxt} = 0, \quad (\text{III.63})$$

pour l'équation régularisée longueur d'onde (RLW).

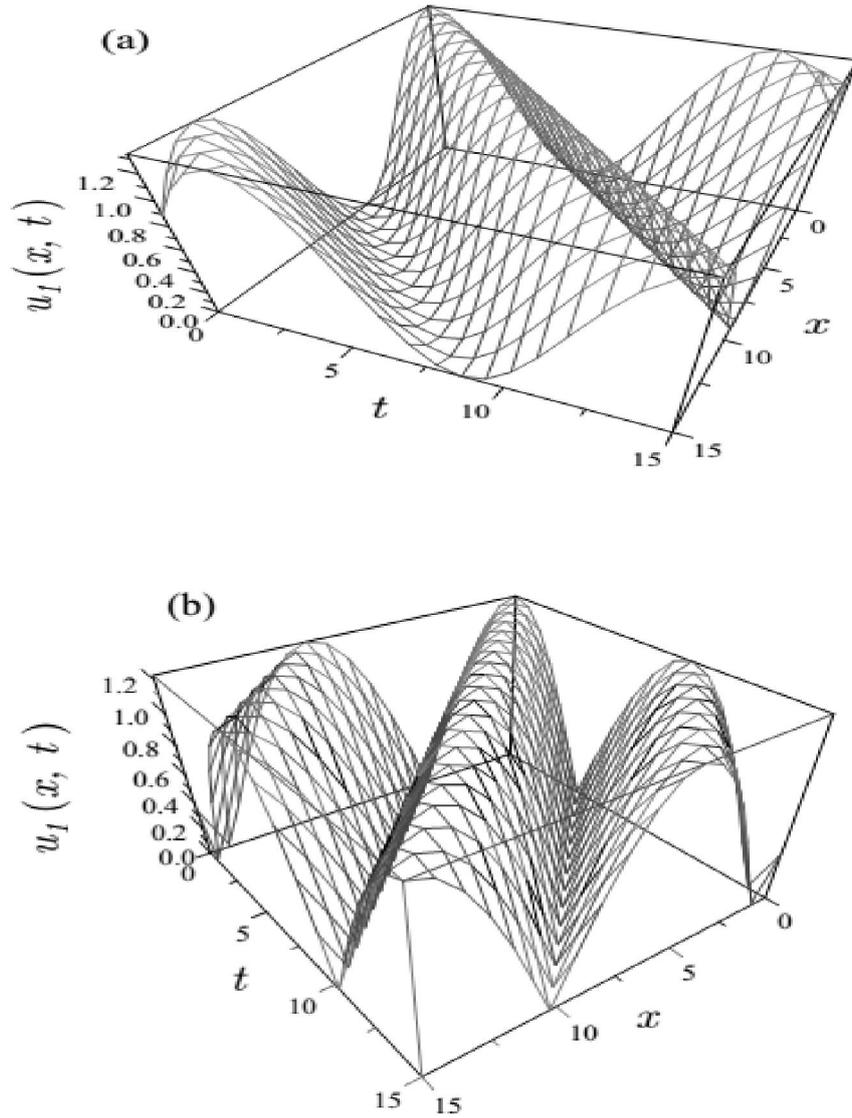


Fig.III. 2. Portraits de deux solutions périodiques typiques $u_1(x, t)$ donnée par l'équation. (III.59), les paramètres d'entrée: $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\delta = 0$, $a = 2$, $b = 1$, $k = 1$.

(a) $n = 2$, (b) $n = 3$

III-3-3-2- Structures de l'équation. (III.62)

Compte tenu des résultats (III.35) et (III.36), for $b > 0$, et n est remplacée par $-n$, on en déduit les solutions compactons-comme exactes suivantes pour l'équation. (III.62)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2a\alpha_1^2}{(1-n)\alpha_0^2} \cos^2 \left[\frac{(n+1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{III.64})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{2a\alpha_1^2}{(1-n)\alpha_0^2} \sin^2 \left[\frac{(n+1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{III.65})$$

et $v_{(1)2} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(1)2}$.

Cependant, pour $b < 0$, et des équations. (III.41) et (III.42) dans laquelle n est remplacée par $-n$, nous obtenons les solutions exactes de modèles solitaires suivants pour l'équation.

(III.62)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2a\alpha_1^2}{(1-n)\alpha_0^2} \cosh^2 \left[\frac{(n+1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{III.66})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{2a\alpha_1^2}{(1-n)\alpha_0^2} \sinh^2 \left[\frac{(n+1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{1+n}} \quad (\text{III.67})$$

et $v_{(1)2} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(1)2}$.

L'intrigue de l'évolution de la solution de motif solitaire associée à un exposant négatif donné par l'équation. (III.66) est affiché sur la figure 3

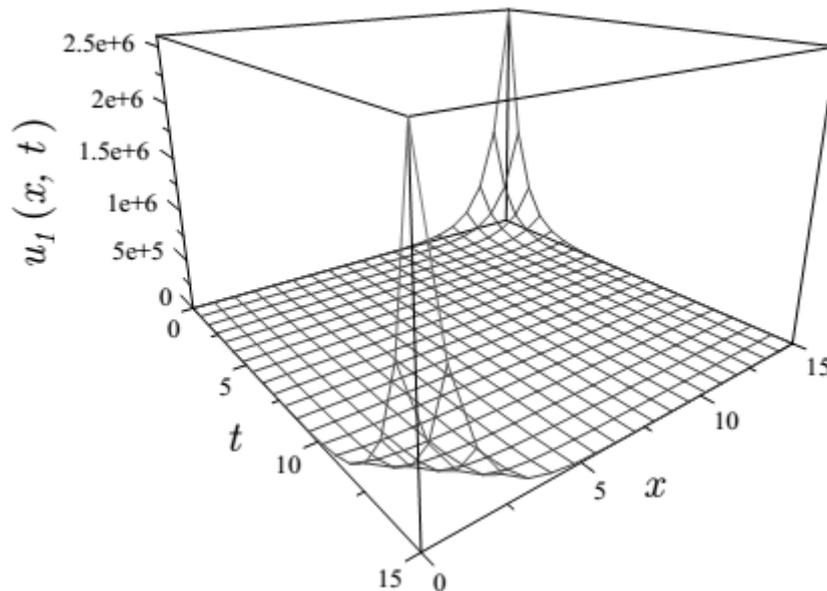


Fig. III.3. L'évolution des solutions de modèles solitaires $v_1(x, t)$ associée à un exposant négatif donné par l'équation. (III.66), paramètres d'entrée:

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \delta = 0, n = 2, a = -1, b = -1$$

III-3-3- Structures de l'équation. (III.67)

Compte tenu des résultats (III.57) et (III.58) pour $\frac{k}{\alpha_0\alpha_1b} > 0$, et n est remplacé par n , on en déduit les solutions *solitons*-comme exactes suivantes pour l'équation. (III.67)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1 k(n-l)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1 a)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{n+l}{2n} \sqrt{\frac{k}{\alpha_0\alpha_1b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{l}{l+n}} \quad (\text{III.68})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{\alpha_1 k(n-l)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1 a)} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{n+l}{2n} \sqrt{\frac{k}{\alpha_0\alpha_1b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{l}{l+n}} \quad (\text{III.69})$$

De même, nous utilisons maintenant les résultats (III.59) et (3.60) pour $\frac{k}{\alpha_0\alpha_1b} < 0$, et n est remplacé par $-n$, nous avons la solutions périodiques analytiques de l'équation suivante. (III.67)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1 k(l-n)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1 a)} \operatorname{sec}^2 \left(\frac{n+l}{2n} \sqrt{-\frac{k}{\alpha_0\alpha_1b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right) \right\}^{\frac{l}{l+n}} \quad (\text{III.70})$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1 k(l-n)}{2n(\alpha_0 + \alpha_1 a)} \operatorname{csc}^2 \left(\frac{n+l}{2n} \sqrt{-\frac{k}{\alpha_0\alpha_1b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right) \right\}^{\frac{l}{l+n}} \quad (\text{III.71})$$

L'intrigue de l'évolution de la solution *soliton* comme associée à un exposant négatif donné par l'équation. (III,68) est affiché sur la Fig.III. 4.

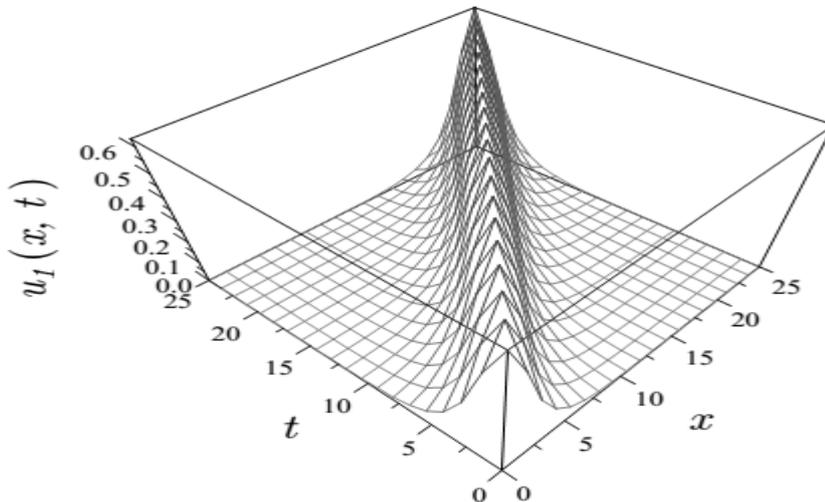


Fig.III. 4. L'évolution du *soliton* comme solutions $v_1(x, t)$ associée à un exposant négatif donné par l'équation. (III.68), les paramètres d'entrée:

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \delta = 0, n = 2, a = 2, b = 1, k = 1$$

III-4 Conclusion

Cette méthode a été appliquée avec succès pour résoudre certaines équations d'ondes non linéaires considérés comme banc d'essai. Dans ces exemples, nous avons montré que cette méthode peut fournir un moyen utile de trouver efficacement les structures exactes des solutions à une variété d'équations d'ondes non linéaires. Le procédé ne nécessite pas la linéarisation des équations différentielles, parce que c'est un traitement direct, pure et simple dans la réalisations des solutions exactes de certains modèles physiques non linéaires. L'application de cette méthode, a fournit des résultats exacts pour les modèles exposés ici et qui concerne l'équation de *KdV*, la forme généralisée du système de *Boussinesq*, et le système d'onde long et régularisé (RLW). En résumé, nous pouvons conclure que, cette méthode permet de produire des solutions exactes de plusieurs familles de problèmes non linéaires plus complexes.

ChapitreIV :

**Rappel de la méthode de la variable
fonctionnelle**

IV- La méthode de la variable fonctionnelle :

IV-1-Présentation

On expose brièvement la méthode de la variable fonctionnelle sur une forme différentielle générale . Les ingrédients de la méthode peuvent être présentés comme suit: On considère un système différentielle linéaire ou non linéaire quelconque suivant:

$$P(x, t, u, u_x, u_t, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yt}, u_{xt}, u_{xz} \dots) = 0, \quad (IV.1)$$

P est une certaine fonction, et $u(t, x, y, z, \dots)$ est appelée la variable indépendante ou la variable fonctionnelle à déterminer.

Nous introduisons d'abord la nouvelle variable d'onde suivante:

$$\xi = \delta + \sum_{i=0}^m \alpha_i \chi_i \quad (IV.2)$$

χ_i sont les variables indépendantes, et δ et α_i sont des paramètres libres. Quand $m = 1$, $\xi = \delta + \alpha_0 \chi_0 + \alpha_1 \chi_1$, et les paramètres α_0 et α_1 sont identifiés comme la pulsation de l'onde ω et le vecteur d'onde k respectivement si χ_0 et χ_1 sont respectivement les variables t and x .

Nous introduisons la transformation suivante pour les solutions d'onde du système principal

$$u(\chi_0, \chi_1, \dots) = U(\xi) \quad (IV.3)$$

et la règle de chaine suivante

$$\frac{\partial}{\partial \chi_i} (\cdot) = \alpha_i \frac{d}{d\xi} U(\cdot), \quad \frac{\partial^2}{\partial \chi_i \partial \chi_j} (\cdot) = \alpha_i \alpha_j \frac{d^2}{d\xi^2} U(\cdot), \dots \quad (IV.4)$$

En utilisant ces transformations, le système (IV.1) se convertit en un système différentiel ordinaire comme

$$Q(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, U_\xi U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (IV.5)$$

Faisant maintenant une transformation ans laquelle la fonction inconnue U est considérée comme une variable fonctionnelle de la forme

$$U_\xi = F(U) \quad (IV.6)$$

où F est une fonction de U seulement. On donne quelques dérivées successives de U en posant , $G = F^2$

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(G)_U, \quad U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(G)_{UU}\sqrt{G} \\
U_{\xi\xi\xi\xi} &= \frac{1}{2}[(G)_{UUU}G + (G)_{UU}G_U], \dots
\end{aligned}
\tag{IV.7}$$

En utilisant ces transformations le système (IV.5) devient

$$R(U, G_U, G_{UU}, G_U G_{UU}, G_{UUU}, \dots) = 0 \tag{IV.8}$$

L'intérêt de la forme (IV.8) est qu'elle admet des solutions analytique pour une large classe de systèmes linéaires et non linéaires. L'intégration (IV.8) fournit l'expression de F via G . Enfin, l'usage de (IV.6) permet de construire les solutions possible du système original.

IV-2-Applications

Nous allons montrer dans ces applications comment peut on mettre en œuvre cette méthode dans la construction des solutions pour une certaine classe d'ondes non linéaires.

IV-2-1. Premier test

Le système qu'on désire présenter est l'équation non linéaire de *Benjamin–Bona–Mahony* [6].

$$u_t + au_x - bu_{xxt} + k(u^n)_x = 0 \tag{IV.9}$$

On utilise la variable d'onde suivante $\xi = x - ct$, et on pose $u(x, t) = U(\xi)$. On effectue les différentes dérivées via la règle de chaine, le système (IV.9) se transforme comme

$$cU_\xi + au_\xi - bcU_{\xi\xi\xi} + k(U^n)_\xi = 0 \tag{IV.10}$$

Une première intégration du système (IV.10) fournit

$$cU + aU - bcU_{\xi\xi} + k(U^n) = 0 \tag{IV.11}$$

Nous utilisons la transformation $U_\xi = \sqrt{G(U)}$, l'équation (IV.11) se transforme comme

$$G_U = \frac{2}{bc} [(c - a)U - kU^n] \tag{IV.12}$$

L'intégration de (IV.12) donne

$$G = \frac{2}{bc} \left[\frac{(c-a)}{2} U^2 - \frac{k}{(n+1)} U^{(n+1)} \right] \tag{IV.13}$$

Ainsi on obtient la fonctionnelle $F(U)$

$$F(U) = \sqrt{\frac{c-a}{2bc}} U \sqrt{1 - \frac{2k}{(c-a)(n+1)} U^{n-1}} \quad (\text{IV.14})$$

et la solution U est obtenue par intégration

$$\sqrt{\frac{c-a}{2bc}} \xi = \int \frac{dU}{U \sqrt{1 - \frac{2k}{(c-a)(n+1)} U^{n-1}}} \quad (\text{IV.15})$$

On obtient la relation suivante après intégration de (IV.15)

$$\sqrt{\frac{c-a}{2bc}} \xi = -\frac{2}{n-1} \text{Arctanh} \left(\sqrt{1 - \frac{2k}{(c-a)(n+1)} U^{n-1}} \right) \quad (\text{IV.16})$$

Il vient alors

$$\sqrt{1 - \frac{2k}{(c-a)(n+1)} U^{n-1}} = -\tanh \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c-a}{2bc}} \xi \right] \quad (\text{IV.17})$$

La relation (IV.17) fournit l'expression suivante

$$\frac{2k}{(c-a)(n+1)} U^{n-1} = \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c-a}{2bc}} \xi \right] \quad (\text{IV.18})$$

On déduit U qui s'écrit avec $\frac{c-a}{2bc} > 0$

$$U(\xi) = \left(\frac{(c-a)(n+1)}{2k} \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c-a}{2bc}} \xi \right] \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{IV.19})$$

Si $\frac{c-a}{2bc} < 0$, on obtient la deuxième solution suivante

$$U(\xi) = \left(\frac{(c-a)(n+1)}{2k} \text{sec}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{a-c}{2bc}} \xi \right] \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{IV.20})$$

Les solutions en termes de x et t sont

Si $\frac{c-a}{2bc} > 0$

$$u(x, t) = \left(\frac{(c-a)(n+1)}{2k} \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c-a}{2bc}} (x - ct) \right] \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{IV.21})$$

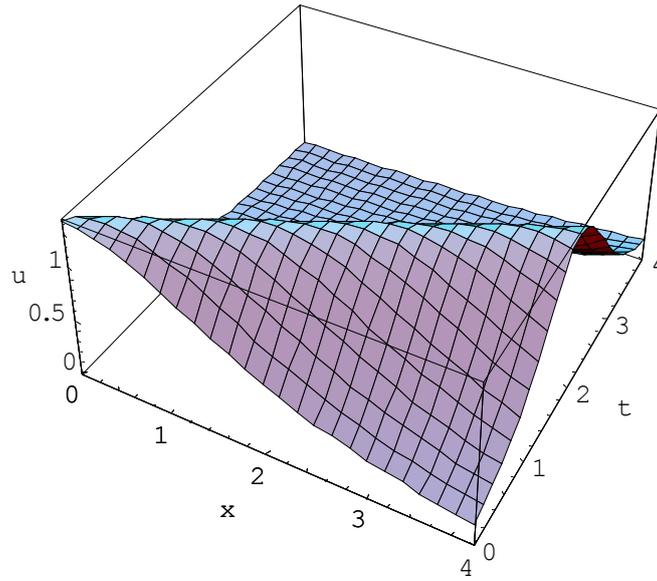


Figure IV.1: Profile de la solution (IV.21) avec $c = 2$, $n = 3$, $k = b = a = 1$.

Si $\frac{c-a}{2bc} < 0$, on obtient la deuxième solution suivante

$$u(x, t) = \left(\frac{(c-a)(n+1)}{2k} \sec^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{a-c}{2bc}} (x - ct) \right] \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (\text{IV.22})$$

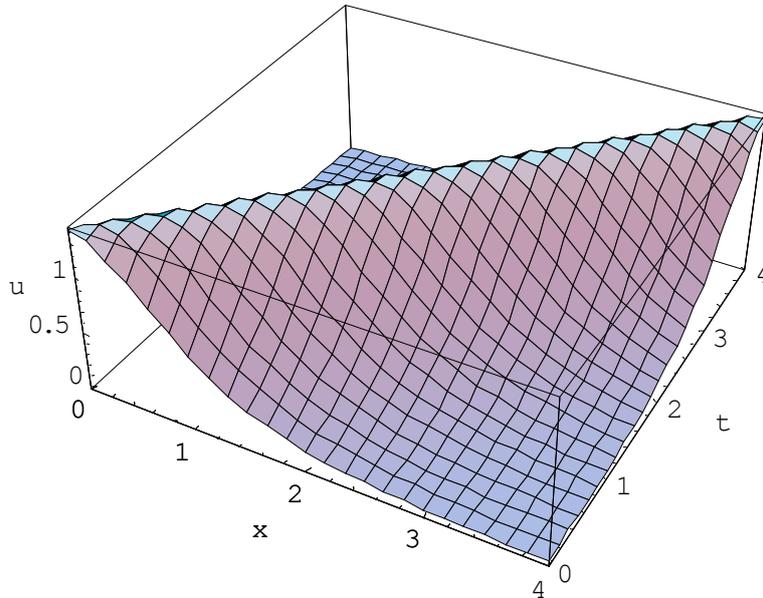


Figure IV.2: Profile de la solution (IV.22) avec $c = b = 1$, $n = 3$, $k = -1$, $a = 2$.

IV-2-1. Deuxième test

Nous utilisons l'équation différentielle partielle non linéaire de type "puissance n " et qui s'écrit comme suit [vv]

$$u^n(u^n)_t + a(u^{3n})_x + du^n(u^n)_{xxx} = 0, n > 0 \quad (\text{IV.23})$$

on pose :

$$v = u^n$$

on obtient

$$2v_t + 3(v^2)_x + 2dv_{xxx} = 0 \quad (\text{IV.24})$$

on divise l'éq (4.24) par 2 on a:

$$v_t + \frac{3}{2}(v^2)_x + dv_{xxx} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

Pour trouver une solution à l'équation (IV.25) au moyen de la méthode de la variable fonctionnelle, on introduit la variable d'onde $\xi = x - ct$ il vient alors

$$-cv_\xi + \frac{3}{2}a(v^2)_\xi + dv_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (\text{IV.26})$$

on intègre l'équation on trouve

$$-cv + \frac{3}{2}av^2 + dv_{\xi\xi} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

Nous utilisons la transformation $U_\xi = \sqrt{G(U)}$, l'équation (IV.27) se transforme comme

$$G_u = \frac{2c}{d}v - \frac{3}{d}av^2 \quad (\text{IV.28})$$

L'intégration de (IV.28) donne

$$G = \frac{c}{d}v^2 - \frac{a}{d}v^3 \quad (\text{IV.29})$$

$$G = \frac{c}{d}v^2 \left[1 - \frac{a}{c}v\right] \quad (\text{IV.30})$$

Ainsi on obtient la fonctionnelle $F(U)$

$$F(U) = \sqrt{\frac{c}{d}} v \sqrt{1 - \frac{a}{c} v} \quad (\text{IV.31})$$

Et la solution V est obtenue par intégration :

$$\sqrt{\frac{c}{d}} \xi = \int \frac{dv}{v \sqrt{1 - \frac{a}{c} v}} \quad (\text{IV.32})$$

On obtient la relation suivante après intégration de (IV.32)

$$\sqrt{\frac{c}{d}} \xi = -\frac{2}{n-1} \text{Arctanh} \sqrt{1 - \frac{a}{c} v} \quad (\text{IV.33})$$

Il vient alors

$$\sqrt{1 - \frac{a}{c} v} = -\tanh \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} \xi \right] \quad (4.34)$$

La relation (IV.34) fournit l'expression suivante :

$$\frac{a}{c} v = \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} \xi \right] \quad (\text{IV.35})$$

Alors

$$v = \frac{c}{a} \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} \xi \right] \quad (\text{IV.36})$$

$$v = u^n$$

$$u^n = \frac{c}{a} \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} \xi \right] \quad (\text{IV.37})$$

$$u = \left(\frac{c}{a} \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} \xi \right] \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.38})$$

On déduit u qui s'écrit avec $\frac{c}{a} > 0$

$$u(x, t) = \left(\frac{c}{a} \text{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} \xi \right] \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.39})$$

Les solutions en termes de x et t sont

$$u(x, t) = \left(\frac{c}{a} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} (x - ct) \right] \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.40})$$

Si $\frac{c}{d} < 0$, on obtient la deuxième solution suivante :

$$u(x, t) = \left(\frac{c}{a} \operatorname{sec}^2 \left[\frac{n-1}{2} \sqrt{\frac{c}{d}} (x - ct) \right] \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.41})$$

Conclusion générale

Conclusion :

Bien qu'il soit très facile pour nous maintenant de trouver les solutions des systèmes linéaires à l'aide de l'ordinateur. Cependant, il est très difficile de résoudre toujours les problèmes non-linéaires numériquement ou analytiquement.

C'est probablement dû au fait que les diverses méthodes de simulations numériques s'appliquent à des techniques d'itération pour trouver leurs solutions numériques à des problèmes non-linéaires, et presque toutes les méthodes itératives sont sensibles aux solutions initiales. Ainsi, il semble difficile d'obtenir des résultats convergents dans les cas de forte non-linéarité.

Nous avons présenté la méthode de décomposition d'Adomian dans le but de séparer le terme non linéaire dans l'équation d'évolution spécifique, qui est l'équation non linéaire de Schrödinger, (équation cubique : CNLS). nous avons montré que la méthode est bonne dans la recherche des solutions approximatives, et on a constaté que les résultats itérés sont en bon accord avec les solutions exactes.

La deuxième méthode de décomposition est la méthode de perturbation artificielle basée sur la série de Taylor qui permet d'obtenir les termes de correction ordre-par ordre de la solution approximée du problème original. Le système d'équations linéaires différentielles résultant est résolu à l'aide de la transformée de Fourier comme un premier test. Les résultats obtenus sont excellents.

La méthode de la variable fonctionnelle a été appliquée avec succès pour résoudre quelques équations d'ondes non-linéaires à coefficients constants. Nous avons montré que cette méthode est souple et efficace pour trouver les structures exactes des solutions à une variété d'équations d'ondes non-linéaires.

En appliquant cette méthode, nous avons obtenu des solutions exactes des ondes de déplacement pour trois modèles de la physique mathématique notamment, l'équation de KdV, la forme généralisée du système de Boussinesq, et l'équation des ondes longues régularisées (RLW).

En se basant sur les résultats de ces modèles typiques, nous avons également analysé l'effet de l'exposant négatif sur les solutions obtenues. En résumé, nous pouvons conclure que cette

méthode permet de trouver les solutions exactes pour plusieurs familles de problèmes non-linéaires à coefficients constants.

En outre, la formulation de la méthode de la variable fonctionnelle présentée dans ce travail peut être aisément appliquée aux systèmes non-linéaires à coefficient variable (dépendant du temps). Cette notion est envisageable dans un travail futur.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Korteweg, D.J., de Vries, G., 1895. On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 39:422-443 (I).
- [2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* 15, 240 (1965)...
- [3] L. N. Trefethen, « Spectral Methods in Matlab », SIAM, Philadelphia (2000).
- [4] Zerarka, A., 1996. Solution of Korteweg-de Vries Equation by Decomposition Method. *Internat. Cong. on Math. Appl. and Ingeen. Sc.*, Casablanca.
- [5] Zerarka and V. G. Foester. Separation method for solving the generalized Korteweg–de Vries equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 10 (2005)217 –225 (Elsevier).
- [6] Khelil N., Bensalah N., Saidi H., Zerarka A. Artificial perturbation for solving the Korteweg-de Vries equation. *Journal Zhejiang Univ Science A* 2006 7(12):2079-2082(Springer).
- [7] Scott, A.C., Chu, E.Y.F., McLaughlin, D.W., 1973. The soliton: A new concept in applied science. *Proc. of IEEE*, 61:1443-1483.
- [8] Iskandar, L., 1989. New numerical solution of the Korteweg-de Vries equation. *Appl. Num. Math.*, 5(3):215-221.
- [9] El-Zoheiry, H., Iskandar, L., El-Naggar, B., 1994. The quintic spline for solving the Korteweg-de Vries equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 37(6):539-549.
- [10] Wazwaz AM. *Appl Math Comput* 2004;159:539.
- [11] Jinqing F, Wei-Guang Y. In : , Adomian's decomposition method for the solution of generalized Duffing equations. In : *Proc (1992), Proc (1992), Int Workshop on Mathematics Mechanization, Beijing, China, 1992.*
- [12] Khelil N., Bensalah N., Saidi H., Zerarka A. Artificial perturbation for solving the Korteweg-de Vries equation. *J Zhejiang Univ SCIENCE A* 7(12), (2006) 2079-2082.

- [13] Ye JF, Zheng CL, Xie LS ,. *Int J Nonlinear Sci NumSimul* 7(2) :203—208, (2006)
- Bogning JR, Tchakoutio-Nguetcho AS, Kofane ,. *Int J Nonlinear Sci Num Simul* 6(4) :371—385(2005).
- [14] El-Sabbagh MF, Ali AT ,. *Int J Nonlinear Sci NumSimul* 6(2) :151—162, (2005).
- [15] Shen JW, XuW . *Int J Nonlinear Sci NumSimul* 5(4) :397—402, (2004).
- [16] Sheng Z , *Chaos Solit. Fract* 32(4) :1375—1383, (2007).
- [17] A.M. Wazwaz, *chaos , Solitons and Fractals* 28 454-462. (2006).
- [18] Zerarka and V. G. Foester. Separation method for solving the generalized Korteweg –de Vries equation. *Comm. Nonl. Sc. Num. Sim.* Vol 10, (2005) 217-225.
- [19] Zerarka, V.G. Foester, Separation method for solving the generalized Korteweg –de Vries equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 10 (2005) 217-225.
- [20] A. Zerarka, S. Ouamane, A. Attaf. On the functional variable method for finding exact solutions to a class of wave equations. *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010) 2897-2904
- [21] A. Zerarka, S. Ouamane. Application of the functional variable method to a class of nonlinear wave equations. *World Journal of Modelling and Simulation* Vol. 6 (2010) No. 2, pp. 150-160.

ملخص

قمنا في هذا العمل بمحاولة إيجاد مجموعة من أشكال و حلول للموجة الغير خطية باستخدام مجموعة من الطرق و الأساليب التطبيقية المختلفة .

هذه الطرق التي مكنتنا من إيجاد حلول سليمة و دقيقة للموجة الغير خطية بمساهمة بعض تطبيقات الرياضيات المتعلقة بالجانب الفيزيائي.

Résumé

Nous avons dans ce travail d'essayer de trouver un ensemble de formes et de solutions pour des ondes non linéaires en utilisant une variété de méthodes et d'applications différentes.

Ces méthodes, nous ont permis d'obtenir plusieurs types de solutions exactes concernant les ondes non linéaires avec la contribution de certaines applications mathématiques en relation avec l'aspect physique.