

People's Democratic Republic of Algeria

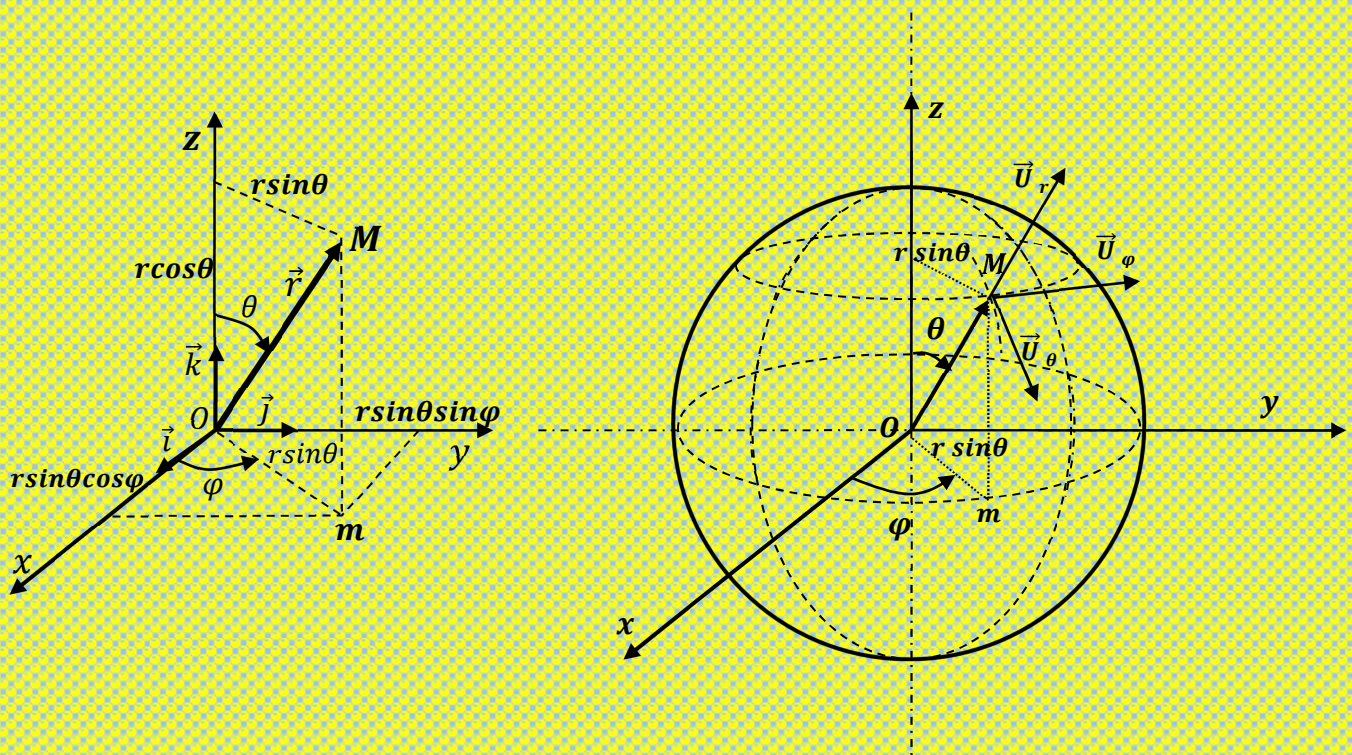
University Mohamed Khider of Biskra, Algeria

Faculty of Science and Technology

The Common Core of the Field of Science and Technology

Detailed Lessons According to the L.M.D. System for Physics -01-

Mechanics of the Material Point



Prepared by Dr: Nacer Chouchane

University year 2025/2026

The index

Title	Page
Chapter One: General Mathematical Concepts	
1. Introduction	1
1.1. Mechanics	1
1.2. Fundamental and Derived Quantities – Units	1
1.3. Dimensional Equations	2
1. 4. Dimensional equations in other physical sciences.	3
1.4.1.Fundamental Quantities and Units	3
1.5. Error Calculation (Uncertainty)	3
1.5. 1. Addition	4
1.5. 2. Multiplication	4
1.5. 3. Division	4
1.5. 4. Power Function	5
1.6. Gradient, Divergence, and Curl in Cartesian Coordinates	5
Chapter Two: Principles of Vector Calculus	
2.1. Definitions	7
2.2. Types of Vectors	7
2.3. Orthogonal Projection of a Vector onto an Axis	9
2.4. Basic Operations on Free Vectors	10
2.5. Analytical Representation of Vectors	12
2.6. The Scalar (Dot) Product of Two Vectors	14

2.7. The vector product of two vectors	15
2.8. Scalar Triple Product	17
2.9. The vector triple product of three vectors	18
Chapter three: Kinematics (Motion of a Material Point)	
3. Introduction	19
3.1. Path of a Point	19
3.2 .Velocity Vector and Acceleration Vector	20
3.3. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Different Coordinate Systems	21
3.3.1. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Cartesian Coordinates	21
3.3.2. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Polar Coordinates	23
3.3.3 .Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Cylindrical Coordinates	26
3.3.4. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Spherical Coordinates	29
3.4 Study of Some Types of Motion	35
3.4.1. Uniform Rectilinear Motion	35
3.4.2. Uniformly Accelerated Rectilinear Motion	36
3.4.3. Simple Harmonic Rectilinear Motion (Sinusoidal)	38
3.4.4. Circular Motion	38
3.4.4. 1. Uniform Circular Motion	41
3.4.4. 2. Uniformly Accelerated Circular Motion	42
Chapter four: Relative Motion of a Material Point	
4.1. Absolute Motion, Relative Motion, and Transport Motion	45
4.2 Absolute Velocity Calculation	46
4.3. Absolute Acceleration Calculation	48

Chapter five: Dynamics (Motion of a Material Point)

5. Introduction

5.1. Newton's Three Laws 50

5.2. Some Types of Forces 52

5.3. Moment of a Force 57

5.4. Angular Momentum 59

Chapter Six: Work and Energy

6. Introduction 60

6.1 Work 60

6.2 Power 60

6.3. The Kinetic Energy Theorem 61

6.4. Potential Energy 64

6.5. Principle of Conservation of Total (Mechanical) Energy 64

6.6. General Cases (Conservative and Non-Conservative Forces) 66

المحور الأول: مفاهيم رياضية عامة

68 1. مقدمة

68 1.1. علم الميكانيك

68 1.2. المقادير الأساسية والمقادير المشتقة « الوحدات »

69 1.3. معادلات الأبعاد

70 1.4. معادلات الأبعاد في مختلف العلوم الفيزيائية الأخرى .

70 1.5. حساب الأخطاء (الإمريتيابات)

71 1. الجمع

71 2. الجداء

71	3 . القسمه
71	4 . الأس
71	5 . الحاله العامة
72	1 . 6 . التدرج ، التباعد والدوران في الإحداثيات الديكارتية
	المحور الثاني: مبادئ في الحساب الشعاعي
74	2 . 1 . تعريف
74	2.2 . أصناف الأشعة
76	2 . 3 . الإسقاط العمودي لشعاع على محور
77	2 . 4 . عمليات أولية على الأشعة الحرة
81	2 . 5 . المجداء السلمي لشعاعين
83	2 . 6 . المجداء الشعاعي لشعاعين
85	2 . 7 . المجداء المختلط
	المحور الثالث: علم الحركة (حركة نقطة مادية)
87	3 . مقدمة
87	3.1 . مسار نقطة: لتكن الثلاثية OXZ
88	3.2 . شعاع السرعة وشعاع التسارع
89	3.3 . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في مختلف أنواع الإحداثيات
89	أ . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات الديكارتية
90	ب . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية
93	ج . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات الأسطوانية
96	د . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات الكروية
103	3.4 . دراسة بعض أنواع الحركات
103	أ . الحركة المستقيمة المنتظمة
104	ب . الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام
106	ج . الحركة الجيبية المستقيمة
106	د . الحركة الدائرية
109	د . 1 . الحركة الدائرية المنتظمة

110	د. 2. الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام
المحور الرابع: الحركة النسبية لنقطة مادية	
113	1.4. الحركة المطلقة، الحركة النسبية والحركة الجبرية
114	أ. الحركة المطلقة
114	ب. الحركة النسبية
114	ج. الحركة الجبرية
114	4. 2. حساب السرعة المطلقة
116	4. 3. حساب التسارع المطلق
المحور الخامس: علم الديناميك (تحريك نقطة مادية)	
118	5. مقدمة
118	1.5. القوانين الثلاثة لنيوتن
118	1. القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة لغاليلي)
119	2. القانون الثاني لنيوتن
119	3. القانون الثالث لنيوتن
120	2.5. بعض أنواع القوى
120	أ. قوى التماس أو قوى الترابط
120	ب. قوى الاحتكاك
120	ب. 1. قوى الاحتكاك السكوني
122	ب. 2. قوى الاحتكاك الحركي
123	ب. 3. قوى الاحتكاك الميوعة
124	ج. القوى المرنة
124	قوى العطالة أو شبه القوة د.
126	3.5. عزيم القوة
127	4.5. العزيم الحركي
المحور السادس: العمل والطاقة	
128	1.6. العمل

128	2.6. الإستطاعة
129	3.6. نظرية الطاقة الحركية
132	4.6. الطاقة الكامنة
132	5.6. مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية (الميكانيكية)
133	6.6. حالات عامة

Chapter One: General Mathematical Concepts

1. Introduction

1.1. Mechanics

Mechanics is one of the most important branches of physics. It deals with the study of the static, kinematic, and dynamic states of bodies in nature.

The mechanical motions studied are generally relative in nature. In most cases, when studying the motion of a body relative to another, one of the bodies is considered stationary and is referred to as a reference frame or coordinate system.

Mechanics can be divided into three branches:

A. Statics: This branch concerns the static study of bodies and is called statics mechanics. It focuses on the conditions that must be satisfied by bodies or systems of bodies in order to remain in equilibrium relative to a reference frame assumed to be fixed.

B. Kinematics: This branch deals with the motion of bodies without addressing the causes of motion (i.e., without studying the forces that caused the motion). It is referred to as kinematics.

C. Dynamics: This branch forms the core of mechanics. It studies both the motion of bodies and the causes behind their motion and is known as dynamics or kinetic mechanics.

1.2. Fundamental and Derived Quantities – Units

In mechanics, the number of units can be reduced to three: distance, mass, and time.

All other quantities (which are infinite in number) are considered derived quantities, such as (velocity, acceleration, force, pressure, work, power, ...).

Hence, the system of physical units can be divided into:

A. Fundamental Unit System: This is the commonly used system among physicists. In mechanics, it mainly consists of M, L, T, where:

- L is the meter (unit of length),
- M is the kilogram (unit of mass),
- T is the second (unit of time).

B. Derived Unit System: This system consists of an unlimited number of units. In mechanics, these units are expressed in terms of the three fundamental units mentioned above.

1.3. Dimensional Equations

In mechanics, the dimensions of the fundamental units are: Mass (M), Length (L), and Time (T). All derived units can be obtained from the fundamental quantities using dimensional analysis, also known as the π products method or the Vaschy – Buckingham theorem.

The dimensional equation is written in the form:

$$Y = k M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$$

Or in dimension notation:

$$[Y] = k [M]^{\alpha} [L]^{\beta} [T]^{\gamma}$$

Where:

- **k** A numerical coefficient that is constant.
- **α, β, γ** are constants (can be positive, negative, or zero).

Examples:

Quantity	Dimensional Equation
Velocity	$[V] = [L][T]^{-1}$
Acceleration	$[a] = [L][T]^{-2}$
Force	$[F] = [N] = [M][L][T]^{-2}$
Pressure	$[P] = [Pas] = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$
Work	$[W] = [joule] = [M][L]^2[T]^{-2}$
Power	$[p] = [watt] = [M][L]^2[T]^{-3}$

1. 4. dimensional equations in other physical sciences.

If we extend our study to other areas of physics outside of mechanics, the basic dimensions can be summarized in the following table:

1. 4. 1.Fundamental Quantities and Units

Quantity	Mass	Length	Time	Electric Current	Temperature	Amount of Substance	Luminous Intensity
Symbol	M	L	T	I	θ	N	J
Unit Name	Kilogram	Metre	Second	Ampere	Kelvin	Mole	Candela
Unit Symbol	kg	m	s	A	K	mol	Cd

The general dimensional equation is written as follows:

$$[Y] = k [M]^{\alpha} [L]^{\beta} [T]^{\gamma} [I]^x [\theta]^y [N]^z [J]^n$$

Warning: In addition to the base units, there are secondary units for certain quantities and one supplementary unit.

a. Secondary units: Examples include the liter (l), degree Celsius ($^{\circ}\text{C}$), calorie (Cal), millimeter of mercury (mm Hg), etc.

b. Supplementary unit: This is the official unit for plane angles, namely the radian (rad).

1.5. Error Calculation (Uncertainty)

Let us consider a quantity y that depends on other (fundamental) quantities A , B , C , and let y be the measurement of y , while a , b , c are respectively the measurements of A , B , C .

Suppose we have the relationship: $y = f(a, b, c)$

If we change each of a , b , and c by a small amount $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ respectively, what will be the resulting change Δy in y ?

By definition: The ratio $\Delta y/y$ represents the relative error committed in the measurement of the quantity Y .

The change Δy is called the absolute error committed in the measurement of Y . It is equal to the absolute value of the difference between the true (exact) value and the experimental measurement result.

Usually, we deal with absolute uncertainty instead of absolute error, and similarly with relative uncertainty instead of relative error.

▪ Special Cases:

1.5. 1. Addition

Let us consider:

$$y = a + b - c$$

Differentiating (taking the derivative), we obtain:

$$dy = da + db - dc$$

We deduce that the maximum absolute error is:

$$\Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c$$

And the maximum relative error is:

$$\Delta y/y = \Delta a/y + \Delta b/y + \Delta c/y$$

1.5. 2. Multiplication

Let us consider:

$$y = a \cdot b \cdot c$$

Differentiation gives:

$$\begin{aligned} dy &= bc \cdot da + ac \cdot db + ab \cdot dc \Rightarrow \Delta y = bc \cdot \Delta a + ac \cdot \Delta b + ab \cdot \Delta c \\ \Rightarrow \Delta y/y &= \Delta y/(abc) = bc \cdot \Delta a/(abc) + ac \cdot \Delta b/(abc) + ab \cdot \Delta c/(abc) \\ &= \Delta a/a + \Delta b/b + \Delta c/c \end{aligned}$$

1.5. 3. Division

Let us consider: $y = a / b$

Taking logarithms: $\log y = \log a - \log b$

Differentiating:

$$dy/y = da/a - db/b \Rightarrow \Delta y/y = \Delta a/a + \Delta b/b \Rightarrow \Delta y = y(\Delta a/a + \Delta b/b)$$

1.5. 4. Power Function

Let us consider:

$y = a^n$ where n is an integer or a fraction

We write:

$$\log y = n \cdot \log a$$

Differentiating:

$$dy/y = n \cdot da/a \Rightarrow \Delta y/y = n \cdot \Delta a/a \Rightarrow \Delta y = n \cdot y \cdot \Delta a/a$$

▪ General Case

Let us consider:

$y = k \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ where k is a constant and α, β, γ are real constants (positive, negative, or zero)

Taking logarithms:

$$\log y = \log k + \alpha \cdot \log a + \beta \cdot \log b + \gamma \cdot \log c$$

Differentiating:

$$dy/y = \alpha \cdot da/a + \beta \cdot db/b + \gamma \cdot dc/c$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \alpha \cdot \frac{\Delta a}{a} + \beta \cdot \frac{\Delta b}{b} + \gamma \cdot \frac{\Delta c}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta y = y(\alpha \cdot \Delta a/a + \beta \cdot \Delta b/b + \gamma \cdot \Delta c/c)$$

1.6. Gradient, Divergence, and Curl in Cartesian Coordinates

Definitions: We call a function $f(x, y, z)$ a scalar field if it is a scalar function.

Similarly, we call $\vec{v}(x, y, z)$ a vector field if it is a vector-valued function.

We define the differential vector operator Nabla ($\vec{\nabla}$) as:

$$\vec{\nabla} = \partial/\partial x \vec{i} + \partial/\partial y \vec{j} + \partial/\partial z \vec{k}$$

where $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, and $\partial/\partial z$ are partial derivatives.

The gradient, divergence, and curl are defined using this operator:

A. Gradient: If $f(x, y, z)$ is a scalar function, then its gradient is a vector quantity defined by:

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

B. Divergence: If $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ is a vector field, the divergence of $\vec{v}$ is a scalar quantity defined by:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

C. Curl: If $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, its curl is written as:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{v}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

D. Laplacian: It is written as: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\nabla})^2 = \nabla^2$.

▪ Laplacian of a scalar function:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{\nabla})^2 (f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{\nabla})^2 (f) = \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$$

Thus, the Laplacian of a scalar function is the divergence of its gradient.

▪ Laplacian of a vector function:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) = (\vec{\nabla})^2 (\vec{v})$$

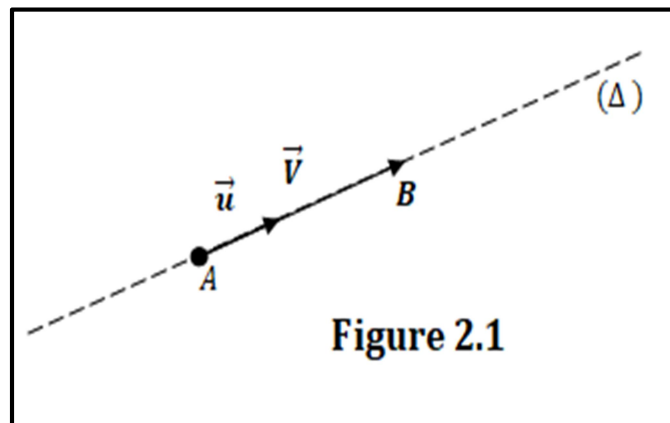
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\vec{\nabla})^2 (\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \text{div}(\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}))$$

Hence, the Laplacian of a vector function is the gradient of its divergence.

Chapter Two: Principles of Vector Calculus

2.1. Definitions:

A vector is a line segment $[AB]$ supported by the line (AB) , for which we choose a starting point A and an endpoint B (Figure 2.1).



A vector is defined by:

- Its origin or point of application.
- Its direction, which is the direction of the supporting line.
- Its sense, which is the direction from the origin to the endpoint.
- Its magnitude or intensity: the length separating the two endpoints of the vector.

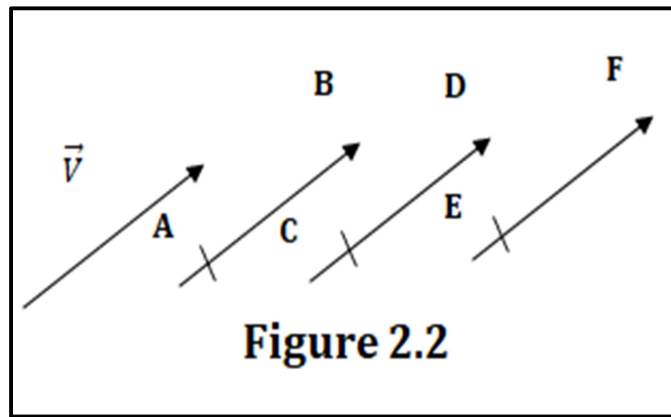
Notation: The vector is denoted by $\overrightarrow{AB}$ or $\vec{V}$, and its magnitude is given by:
 $|\overrightarrow{AB}| = V = AB = |\vec{V}|$

2.2. Types of Vectors:

Vectors can be classified into three types.

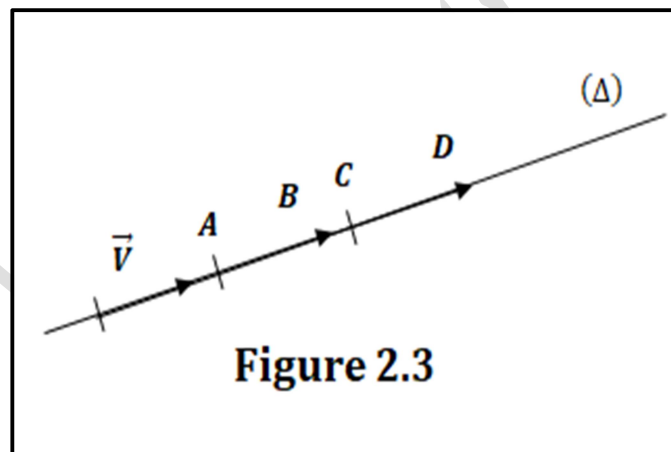
★ **Free vector:** Only the direction, sense, and magnitude are specified. The supporting line and the point of application are not defined (Figure 2.2).

Example: The vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ and $\overrightarrow{EF}$ represent the same vector $\vec{V}$.



★ **Sliding Vector:**

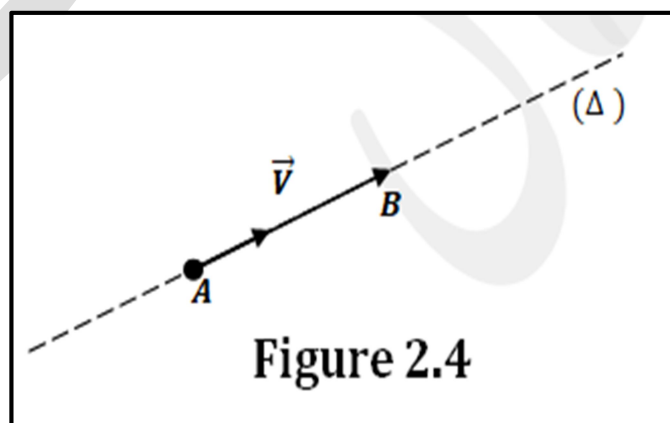
It is defined by its supporting line (Δ), while the point of application is not specified (Figure 2.3).



Example: The vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{CD}$ represent the sliding vector $\vec{V}$.

★ **Restricted vector:** All elements that define the vector are given, including the point of application.

Example: The vector $\vec{V}$ is defined with all the required conditions of a vector (Figure 2.4).



Note: If we have two bound vectors with their respective points of application A and $\hat{A}$ (Figure 2.5),

these two vectors are considered equal if they have the same direction, sense, and magnitude.

They represent the same free or sliding vector if their support line is the same straight line (Δ) .

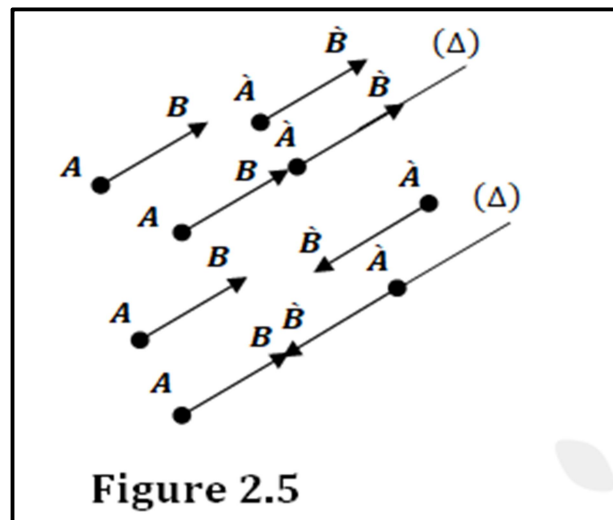


Figure 2.5

- Two vectors are said to be opposite if they have the same magnitude and lie along the same line of action but have opposite directions.

They are said to be exactly opposite if their common line of action is the straight line (Δ) .

★ **Unit Vector:** A unit vector $\vec{U}$ is a vector whose magnitude is equal to one.

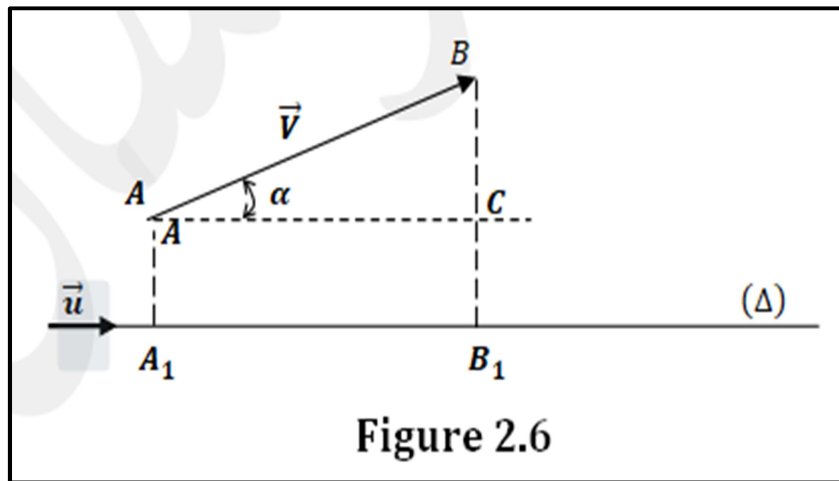
For example, a vector $\vec{V}$ and its corresponding unit vector $\vec{U}$ are linearly dependent (i.e., parallel), and we write: $\vec{V} = V \cdot \vec{U}$.

2.3. Orthogonal Projection of a Vector onto an Axis:

Let us consider the vector $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$.

Its projection is defined by the segment A_1B_1 , determined by the perpendiculars dropped from its initial and terminal points (see Figure 2.6).

$$\text{Proj}_{(\Delta)}(\vec{V}) = A_1B_1 = |\vec{V}| \cdot \cos \alpha$$



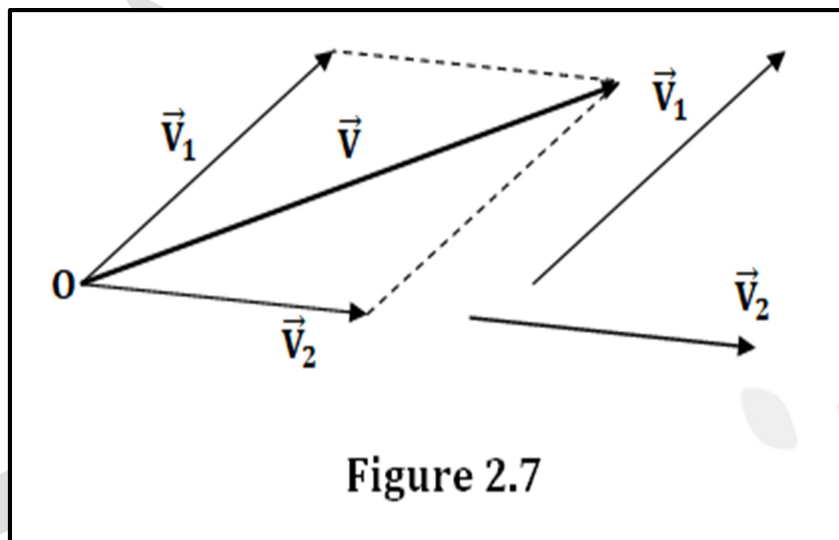
Thus, the projection of a vector onto an axis is equal to the product of the magnitude of this vector and the cosine of the angle between it and the axis onto which it is projected.

$$\text{Proj}_{(\Delta)}(\vec{V}) = |\vec{V}| \cdot \cos(\alpha)$$

2.4. Basic Operations on Free Vectors:

▪ Vector Addition:

The sum of two free (unbound) vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$ is defined as the free vector $\vec{V}$ that connects the origin of vector $\vec{V}_1$ to the endpoint of vector $\vec{V}_2$ (see Figure 2.7).



We write: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

This definition constitutes the parallelogram rule of vector addition.

Vector addition is commutative: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$.

▪ Addition of multiple free vectors:

The result is a vector polygon (see Figure 2.8).

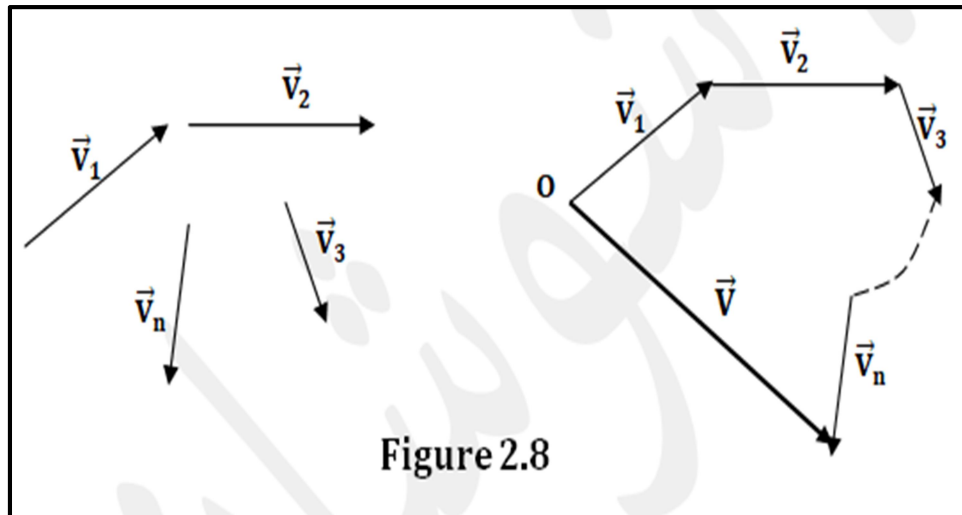


Figure 2.8

Cumulative Addition of Several Free Vectors:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 \dots + \vec{V}_n = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + (\vec{V}_3 + \vec{V}_4) \dots + \vec{V}_n = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$$

• **Difference between two vectors:**

The difference between two vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$, taken in this order, is the vector $\vec{V}$ that must be added to the second vector $\vec{V}_2$ to obtain the first vector $\vec{V}_1$ (Figure 2.9).

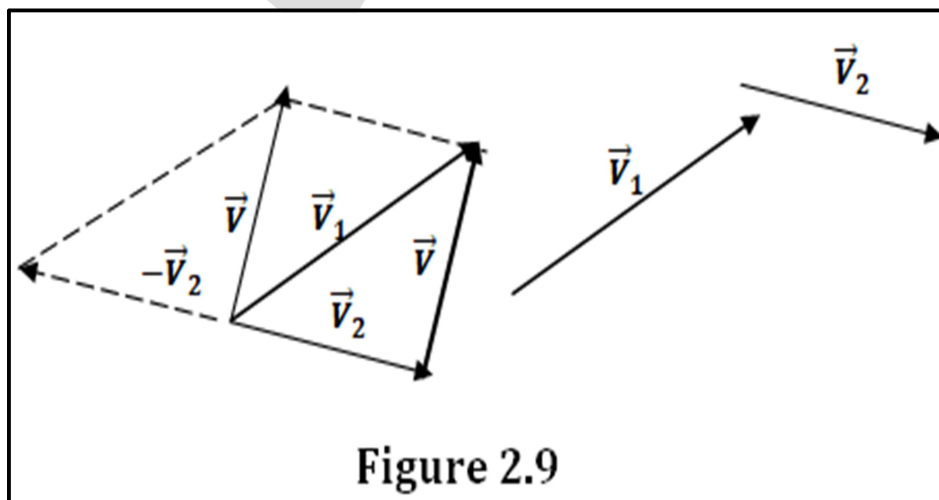


Figure 2.9

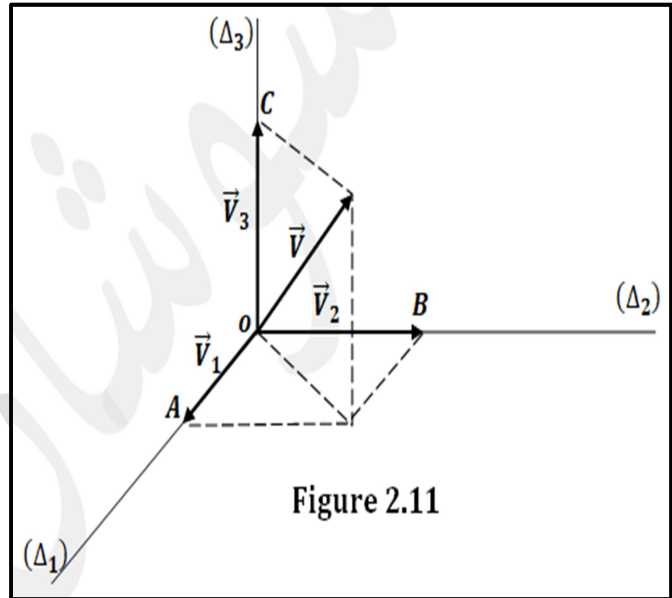
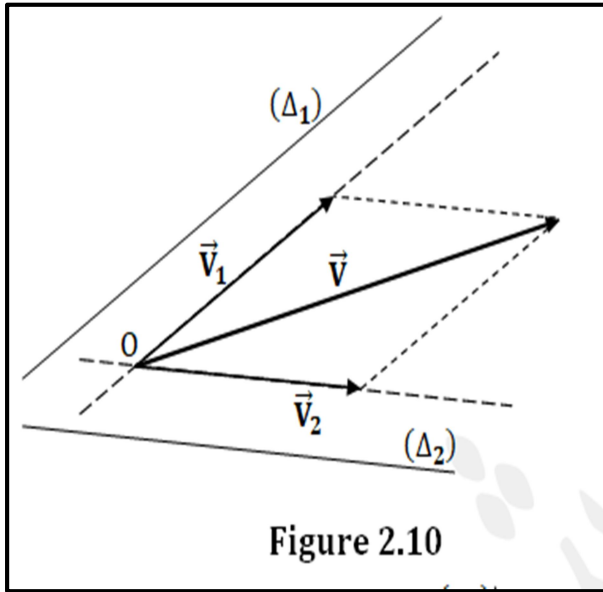
We write: $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

▪ **Vector Decomposition:**

A vector can be decomposed, in various ways, into the sum of two or more vectors.

To uniquely determine a pair of components, it is sufficient to specify their

directions that is, to draw two axes (Δ_1) and (Δ_2) in a plane, or three axes (Δ_1) , (Δ_2) and (Δ_3) in space (Figure 2.10 and 2.11)



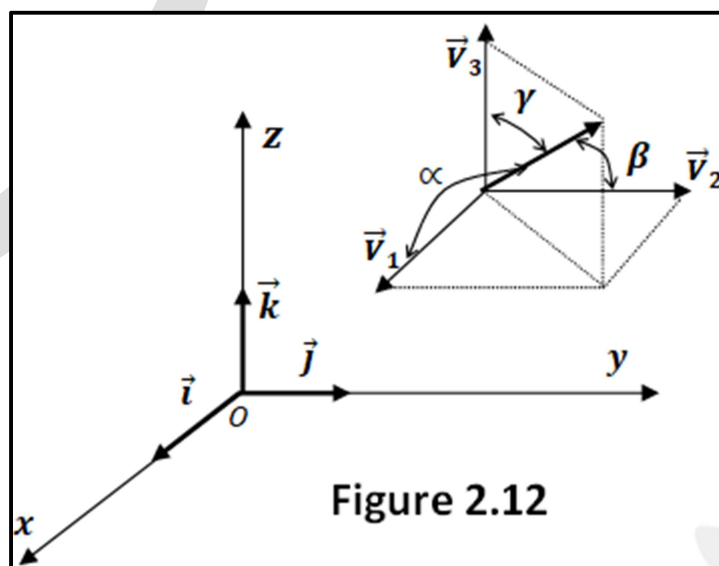
We denote the vectors $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, and $\vec{V}_3$ as the components of the vector $\vec{V}$.

2.5. Analytical Representation of Vectors:

Operations on vectors are greatly simplified when using an orthogonal coordinate system ox, oy, oz (Figure 2.12).

The directions of the orthogonal axes ox, oy, oz are defined by the unit vectors $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectively.

The vector $\vec{V}$ is fully defined if its components $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ and $\vec{V}_3$ along the axes ox, oy, oz are known: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$



We can write, along the directions of the axes ox, oy and oz the following relations: $\vec{V}_1 = x\vec{i}, \vec{V}_2 = y\vec{j}, \vec{V}_3 = z\vec{k}$

Where x, y, z are the projections of the vector $\vec{V}$ on the coordinate axes ox, oy and oz respectively.

$$x = V \cos \alpha, y = V \cos \beta, z = V \cos \gamma$$

The analytical form of the vector $\vec{V}$ is written as:

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = V \cos \alpha \vec{i} + V \cos \beta \vec{j} + V \cos \gamma \vec{k}$$

▪ **Analytical form of a vector sum:**

Let us consider several free vectors $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ defined by their projections on the three axes ox, oy and oz .

$$\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1), \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2), \vec{V}_3(x_3, y_3, z_3), \dots, \vec{V}_n(x_n, y_n, z_n)$$

The vector sum of the vectors $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ is the vector $\vec{V}$.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \sum_{i=1}^n \vec{V}_i = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots + \vec{V}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{i} + \sum_{i=1}^n y_i \vec{j} + \sum_{i=1}^n z_i \vec{k} \\ &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \end{aligned}$$

Thus, the analytical form of the vector $\vec{V}$ is: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Where: $X = \sum_{i=1}^n x_i, Y = \sum_{i=1}^n y_i, Z = \sum_{i=1}^n z_i$.

The magnitude of the vector $\vec{V}$ is: $|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

▪ **The direction cosines of the vector (directional angles) are:**

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

▪ **Special Case:** For a set of vectors lying in a plane:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$$

The analytical form of the resultant vector is: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$.

And its magnitude is: $|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

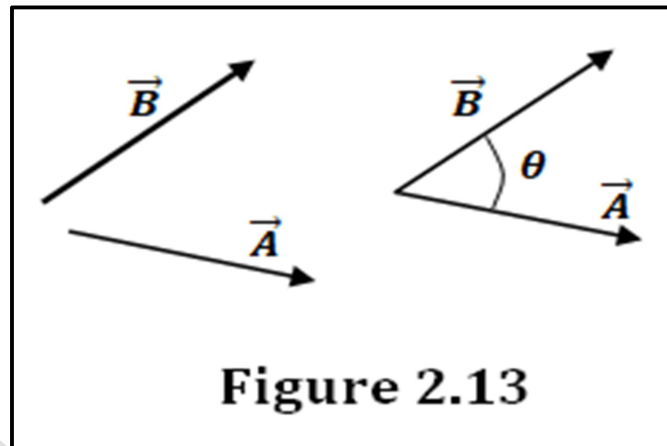
The direction of the vector $\vec{V}$ is defined by the angle it makes with the ox axis:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}$$

2.6. The Scalar (Dot) Product of Two Vectors:

▪ Definition:

The scalar product (dot product) of two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$, which form an angle θ between them, is equal to the product of their magnitudes multiplied by the cosine of the angle between them (see Figure 2.13).



We write: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\widehat{A, B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta$

▪ Properties:

1. If the vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are parallel, the dot product equals the product of their magnitudes: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \mp |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$.

2. If the vectors are perpendicular, the dot product is zero: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

Example: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

3. Dot product of a vector with itself: $\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = A \cdot A = A^2$.

Example: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

4. The dot product is commutative: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

5. The scalar product is distributive with respect to vector addition:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

6. The scalar product of two vectors is associative with respect to scalar multiplication: $m \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = m\vec{A} \cdot (\vec{B}) = \vec{A} \cdot (m\vec{B})$.

▪ Analytical expression of the scalar product:

Let two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ be defined by their components along the axes ox, oy, oz :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

Applying the above properties, we find:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

- The angle between two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

- Condition for orthogonality of two vectors:

Two vectors are orthogonal if their scalar product is zero:

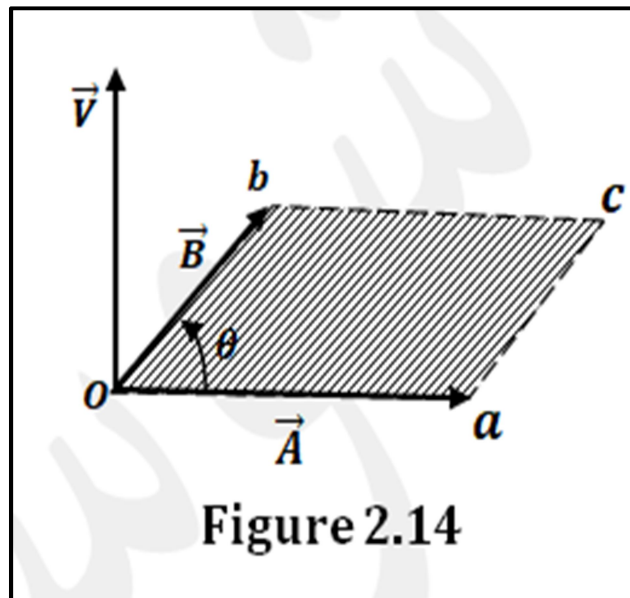
$$\text{We write: } A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

2.7. The vector product of two vectors:

The vector product of two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ is a free vector $\vec{V}$ such that: (Figure 2.14)

- Direction: $\vec{V}$ is perpendicular to both $\vec{A}$ and $\vec{B}$.
- Orientation: $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{V})$ forms a right-handed system.
- Magnitude: $|\vec{V}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta)$, where θ is the angle between $\vec{A}$ and $\vec{B}$.

$$\text{We write: } \vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$



▪ **Properties:**

1. The magnitude of the vector (cross) product equals the area of the parallelogram formed by the two vectors.
2. If the two vectors are parallel, the cross product is zero:

$$\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

3. The cross product of a vector with itself is zero: $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$

Example: $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

4. The cross product is not commutative: $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$.

Example: $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

5. The cross product is distributive over vector addition:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

6. The cross product of two vectors is associative with respect to scalar multiplication: $m. (\vec{A} \wedge \vec{B}) = m\vec{A} \wedge (\vec{B}) = \vec{A} \wedge (m\vec{B})$

▪ **Analytical Expression of the Vector (Cross) Product**

Starting from the projections of the vectors on the coordinate axes OX, Oy and OZ

Let: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ and $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$.

The vector (cross) product of vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ is given by:

$$\vec{V} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

Considering the previously mentioned properties, we obtain:

$$\vec{V} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

The previous result can also be written as the determinant of the following matrix:

$$\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{V} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

2.8. Scalar Triple Product

The scalar triple product of three vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ is defined as the dot product of $\vec{A}$ with the cross product $\vec{B} \wedge \vec{C}$ (see Figure 2.15).

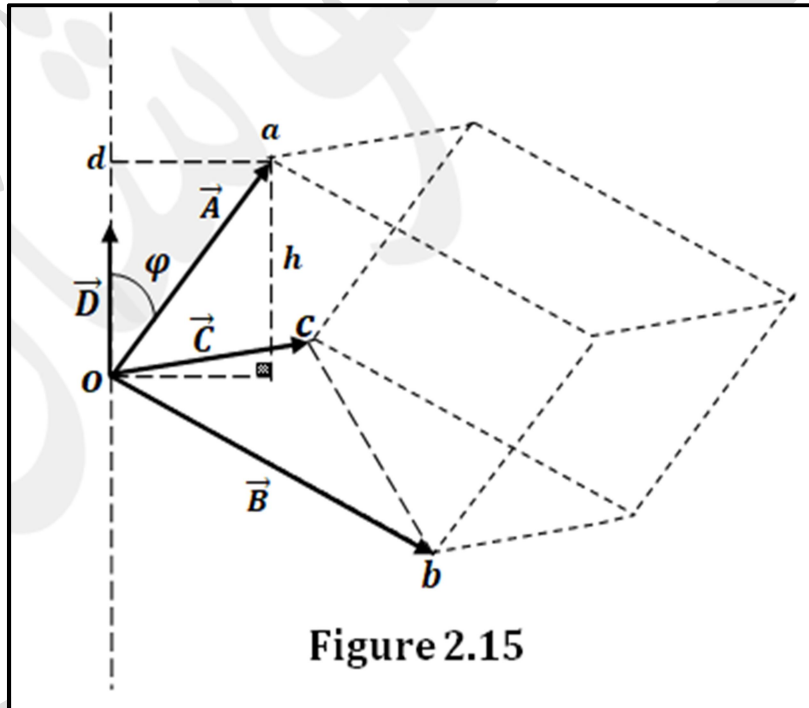


Figure 2.15

We write: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{D} = |\vec{A}| \cdot |\vec{D}| \cos \varphi$

Given that:

$$(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{D}, |\vec{D}| = \text{twice the area of triangle (obc)} = 2 \cdot \Delta(\text{obc}), h = |\vec{A}| \cos \varphi$$

$$\text{Then: } \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{D} = |\vec{A}| \cdot |\vec{D}| \cos \varphi = 2 \cdot \Delta(\text{obc}) \cdot h.$$

From this, we conclude that the **scalar triple product** of the three vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ represents the **volume of the parallelepiped** constructed on these three vectors (see Figure 2.15).

▪ **Properties:**

- The scalar triple product of three vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ is zero if and only if either two of the vectors are parallel or the three vectors lie in the same plane.
- The scalar triple product remains invariant under cyclic permutations of the vectors: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$.
- It also remains invariant under swapping the dot and cross product operations as follows:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

▪ **Analytical Expression of the Scalar Triple Product:**

Starting from the analytical expressions of vectors:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

The scalar triple product is expressed using the determinant form:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = A_x(B_y C_z - C_y B_z) - A_y(B_x C_z - C_x B_z) + A_z(B_x C_y - C_x B_y)$$

2.9. The vector triple product of three vectors

Definition:

The vector triple product of three vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ is the vector product of vector $\vec{A}$ with the vector product $(\vec{B} \wedge \vec{C})$.

$$\vec{W} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{B} & \vec{C} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} & \vec{A} \cdot \vec{C} \end{vmatrix} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Chapter three: Kinematics (Motion of a Material Point)

3. Introduction:

Kinematics is the branch of mechanics concerned with the study of the motion of a point relative to a reference frame, without addressing the causes of motion (i.e., without considering the forces that cause the body to move).

3.1. Path of a Point:

Let us consider the three-dimensional Cartesian coordinate system: $oxyz$

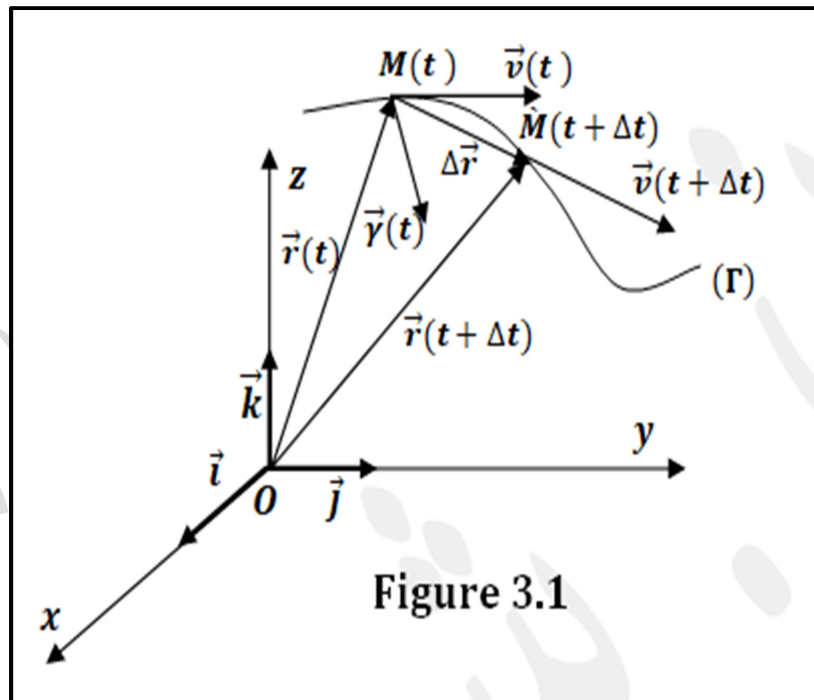


Figure 3.1

The position of the moving object M with respect to the reference frame is defined by the position vector at instant t , where: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ (see Figure 3.1).

It can be written as: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Where: $x(t)$, $y(t)$, and $z(t)$ are the coordinates of point M at time t .

The curve (i.e., the geometric locus of the successive positions of the moving point) is called the trajectory of the moving point with respect to the reference frame.

- If the trajectory is a straight line, the motion of the point is said to be rectilinear.
- If the trajectory is curved, the motion is said to be curvilinear.

3.2. Velocity Vector and Acceleration Vector:

Let $M(t)$ be the position of the moving point at instant t , and $M'(t + \Delta t)$ be its position at instant $(t + \Delta t)$. $\vec{V}_{avg}$

$\overrightarrow{MM'}$: the displacement vector of the point:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}.$$

▪ Average Velocity Vector:

The average velocity vector of a moving point between two instants is defined as the vector $\vec{V}_{avg}$, obtained by dividing the displacement vector $\overrightarrow{MM'}$ by the time interval Δt :

$$\text{And we write: } \vec{V}_{avg} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

▪ Instantaneous Velocity Vector:

The instantaneous velocity vector of a moving point is defined as the limit of the average velocity vector when the time interval Δt approaches zero

$$\text{And we write: } \vec{V}_{ins} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{V}_{avg}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)$$

As $M' \rightarrow M$ the chord MM' tends toward the tangent to the trajectory (Γ) at point M , and thus the velocity vector $\vec{V}$ becomes tangent to the path.

Result:

The velocity vector of a point is equal to the time derivative of the position vector

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{Hence: } \vec{V}_{ins} = \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

▪ Average Acceleration Vector:

The average acceleration vector of a moving point between two instants is

the vector $\vec{\gamma}_{\text{avg}}$, defined as the change in velocity vector $\Delta\vec{V} = (\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t))$ divided by the time interval Δt :

And we write: $\vec{\gamma}_{\text{avg}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$.

▪ **Instantaneous Acceleration Vector:**

The instantaneous acceleration vector of a moving point is defined as the limit of the average acceleration vector as the time interval Δt approaches zero.

And write: $\vec{\gamma}_{\text{ins}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{\gamma}_{\text{Avg}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} \right)$.

Result:

The acceleration vector of a point is equal to the derivative of the velocity vector, or the second derivative of the position vector with respect to time.

$$\vec{\gamma} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Note:

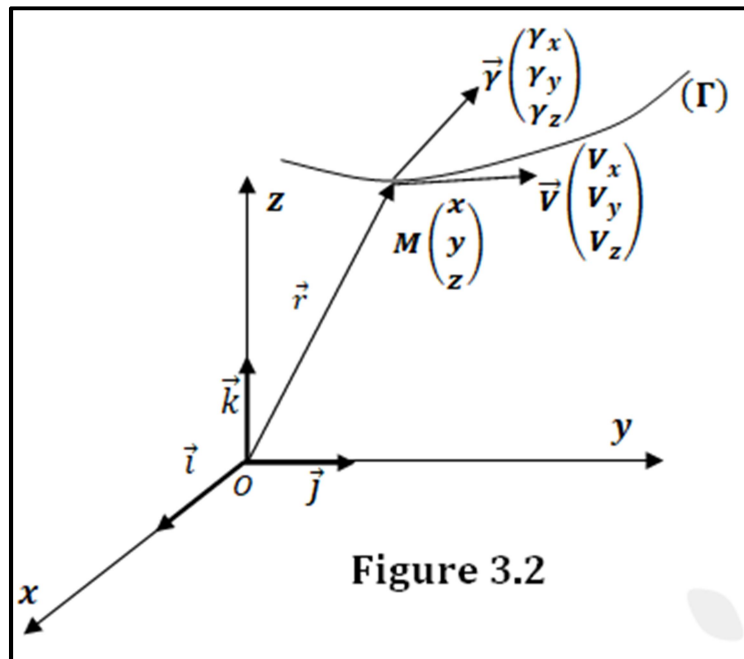
The total acceleration vector $\vec{\gamma}$ always points toward the concave side of the curve.

3.3. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Different Coordinate Systems:

3.3.1 Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Cartesian Coordinates:

The position of the point is defined by its time-dependent coordinates:

$x(t), y(t)$ and $z(t)$ These equations represent the parametric equations of the trajectory (Γ) of the moving point (Figure 3.2)



- **Position Vector:** $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.
- **Velocity Vector:** $\dot{\vec{r}} = \overrightarrow{\dot{OM}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$.

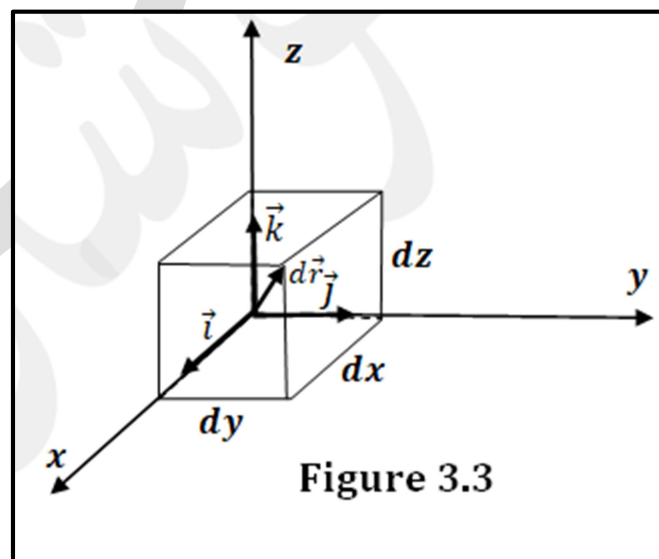
Thus, the components of the velocity vector along the coordinate axes are:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

- Magnitude (Speed): $V = |\vec{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Note: The velocity vector can also be directly calculated from the elemental displacement vector (see Figure 3.3)

where: $d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k}$



The infinitesimal displacement occurs over a very short time interval (an infinitesimal time), thus:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}(t)\vec{i} + \frac{dy}{dt}(t)\vec{j} + \frac{dz}{dt}(t)\vec{k}$$

▪ **Acceleration vector:**

$$\dot{\vec{V}} = \vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\vec{k}.$$

Hence, the components of acceleration along the axes are:

$$\dot{V}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \dot{V}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \dot{V}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

- **Magnitude :** $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

3.3.2. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Polar Coordinates:

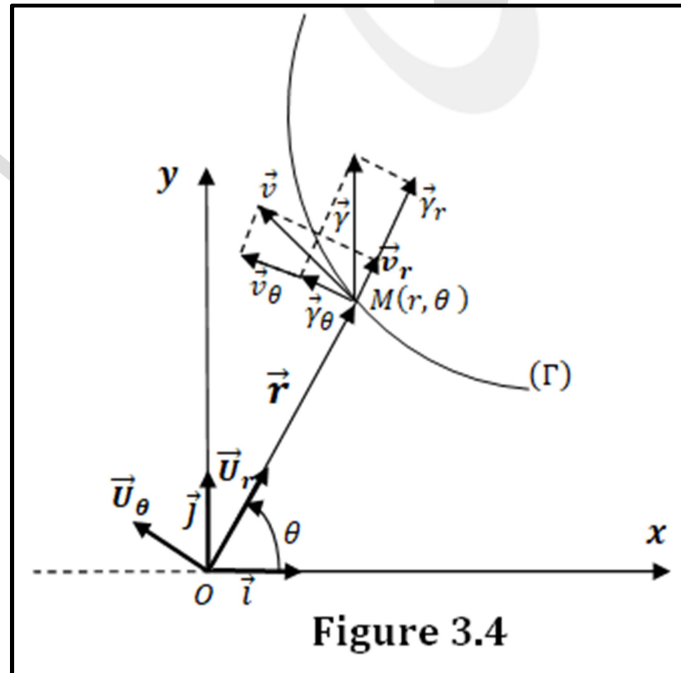


Figure 3.4

Let O be the pole and Ox the polar axis.

The position of a point in polar coordinates is defined by:

- $r = r(t)$: the radial distance.
- $\theta = \theta(t)$: the polar angle. (See Figure 3.4).

Using the unit vectors: $\vec{U}_r$ (parallel to $\vec{r}$), and $\vec{U}_\theta$ (perpendicular to $\vec{U}_r$), we can write:

$$\vec{U}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{U}_\theta = d\vec{U}_r/d\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Alternatively, $\vec{U}_\theta$ can be obtained by adding $\frac{\pi}{2}$ to θ in $\vec{U}_r$.

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_r\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i} + \sin(\theta + \pi/2)\vec{j} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Now, differentiating the unit vectors $\vec{U}_r$ and $\vec{U}_\theta$ with respect to time, we obtain:

$$\dot{\vec{U}}_r = \frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \dot{\theta}\vec{U}_\theta$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\dot{\theta}\vec{U}_r$$

▪ **Position vector:** $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$.

▪ **Velocity vector:**

$$\vec{V} = \dot{\vec{OM}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\vec{U}}_r = \dot{r}\vec{U}_r + r(\dot{\theta}\vec{U}_\theta) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta$$

Or using components: $\vec{V} = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta$

Therefore:
$$\begin{cases} V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \end{cases}$$

▪ **Magnitude of velocity:** $V = |\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$

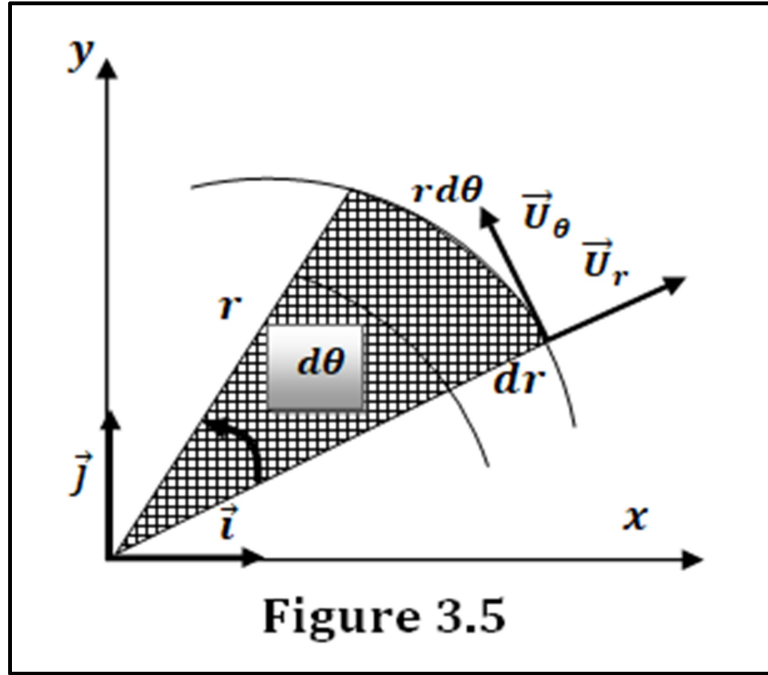
Note:

The velocity vector can also be directly computed from the elemental displacement vector $d\vec{r}$ over a small-time interval dt : (see Figure 3.5).

$$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + r d\theta\vec{U}_\theta$$

Dividing by dt :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta$$



- **Acceleration Vector:**

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{U}_r + \dot{r}\frac{d\vec{U}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\vec{U}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{U}}_\theta = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{U}_r \\ \vec{\gamma} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{U}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{U}_\theta = \gamma_r\vec{U}_r + \gamma_\theta\vec{U}_\theta\end{aligned}$$

Thus, the components of the acceleration are:

$$\gamma_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \gamma_\theta = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

Magnitude : $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2}.$

- **Relation between Cartesian and Polar Coordinates:**

We have the **position vector** in **polar coordinates** expressed as:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}).$$

And in Cartesian coordinates, it is:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

By comparing both expressions, we find:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \dots \dots (1) \\ y = r \sin \theta \dots \dots (2) \end{cases}$$

By squaring and adding equations (1) and (2), we obtain:

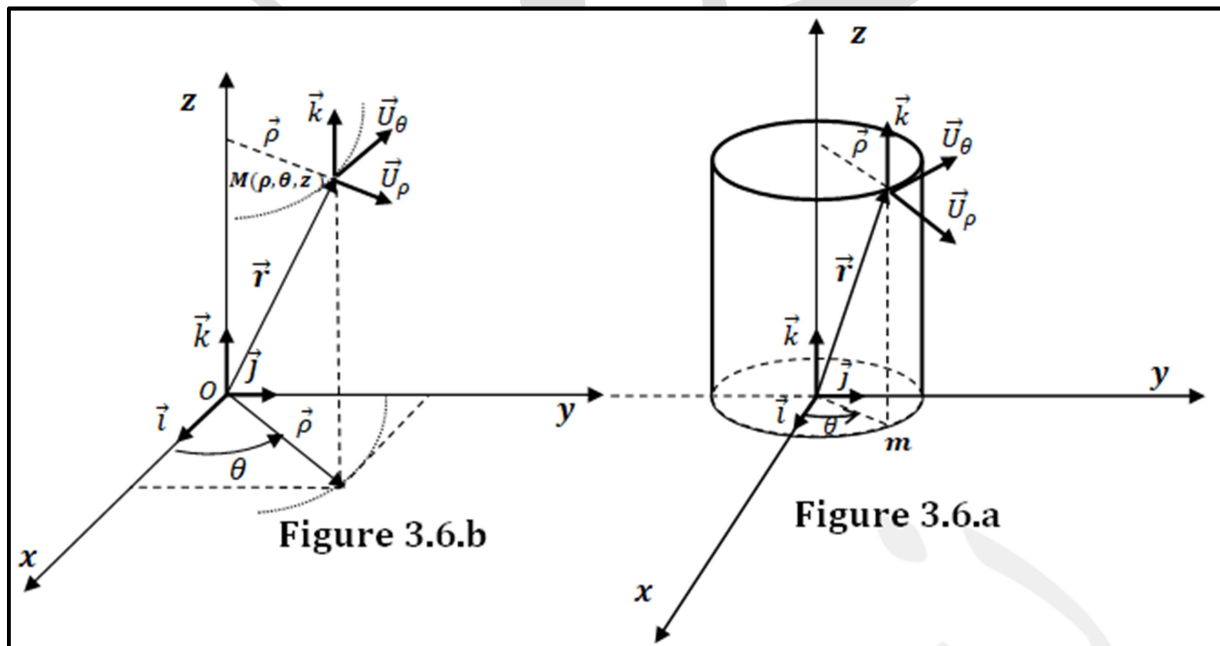
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

By dividing equation (2) by equation (1), we get:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$$

3.3.3. Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Cylindrical Coordinates:

The position of a point in cylindrical coordinates is defined by (ρ, θ, z) , using the unit vectors $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ (see Figure 3.6.a and 3.6.b)



Using the unit vectors $\vec{U}_\rho$ (parallel to $\vec{\rho}$), $\vec{U}_\theta$ and $\vec{k}$, we can write:

$$\begin{cases} \vec{U}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{U}_\theta = d\vec{U}_\rho / d\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$

Alternatively, $\vec{U}_\theta$ can be found by adding $\frac{\pi}{2}$ to θ in $\vec{U}_\rho$.

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_\rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i} + \sin(\theta + \pi/2)\vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{k} = \vec{k}$$

Differentiating the unit vectors $\vec{U}_\rho$ and $\vec{U}_\theta$ with respect to time, we get:

$$\dot{\vec{U}}_\rho = \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} \vec{U}_\rho$$

- **Position vector:** $\vec{OM} = \vec{r} = \rho \vec{U}_\rho + z \vec{k}$
- **Velocity vector:** $\vec{V} = \dot{\vec{OM}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\vec{U}}_\rho + \dot{z} \vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \dot{\vec{OM}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\vec{U}}_\rho + \dot{z} \vec{k} \\ &= \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho(\dot{\theta} \vec{U}_\theta) + \dot{z} \vec{k} = \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{k} \\ \vec{V} &= V_\rho \vec{U}_\rho + V_\theta \vec{U}_\theta + V_z \vec{k} \end{aligned}$$

Thus:
$$\begin{cases} V_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{cases}$$

- **Magnitude of velocity:** $V = |\vec{V}| = \sqrt{V_\rho^2 + V_z^2 + V_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + (\rho \dot{\theta})^2}$

Note: The velocity vector can be directly calculated from the elemental displacement vector $d\vec{r}$, over an elemental time dt (Figure 3.7).

$$d\vec{r} = d\rho \vec{U}_\rho + \rho d\theta \vec{U}_\theta + dz \vec{k}$$

Dividing by dt , we obtain:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{U}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{k} = V_\rho \vec{U}_\rho + V_\theta \vec{U}_\theta + V_z \vec{k}$$

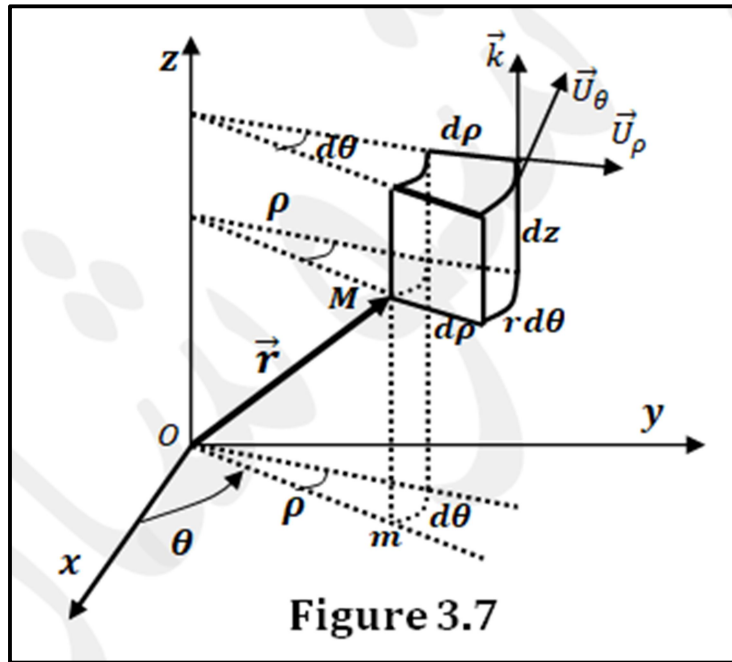


Figure 3.7

Acceleration Vector:

$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2} \vec{U}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{U}_\theta + \rho \dot{\theta} \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{k} \\
 &= \ddot{\rho} \vec{U}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{U}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{U}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\vec{U}}_\theta + \ddot{z} \vec{k} \\
 &= \ddot{\rho} \vec{U}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{U}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \vec{U}_\rho + \ddot{z} \vec{k} \\
 \vec{\gamma} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{U}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{U}_\theta + \ddot{z} \vec{k} = \gamma_\rho \vec{U}_\rho + \gamma_\theta \vec{U}_\theta + \gamma_z \vec{k}
 \end{aligned}$$

Hence, the components of the acceleration are:

$$\gamma_\rho = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2), \gamma_\theta = (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}), \gamma_z = \ddot{z}$$

Magnitude : $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2)^2 + \ddot{z}^2 + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta})^2}$

▪ Relationship Between Cartesian and Cylindrical Coordinates:

The position vector in cylindrical coordinates is:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho \vec{U}_\rho + z \vec{k} = \rho(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + z \vec{k}$$

And in Cartesian coordinates:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

By comparison, we obtain:
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \dots \dots (1) \\ y = \rho \sin \theta \dots \dots (2) \\ z = z \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

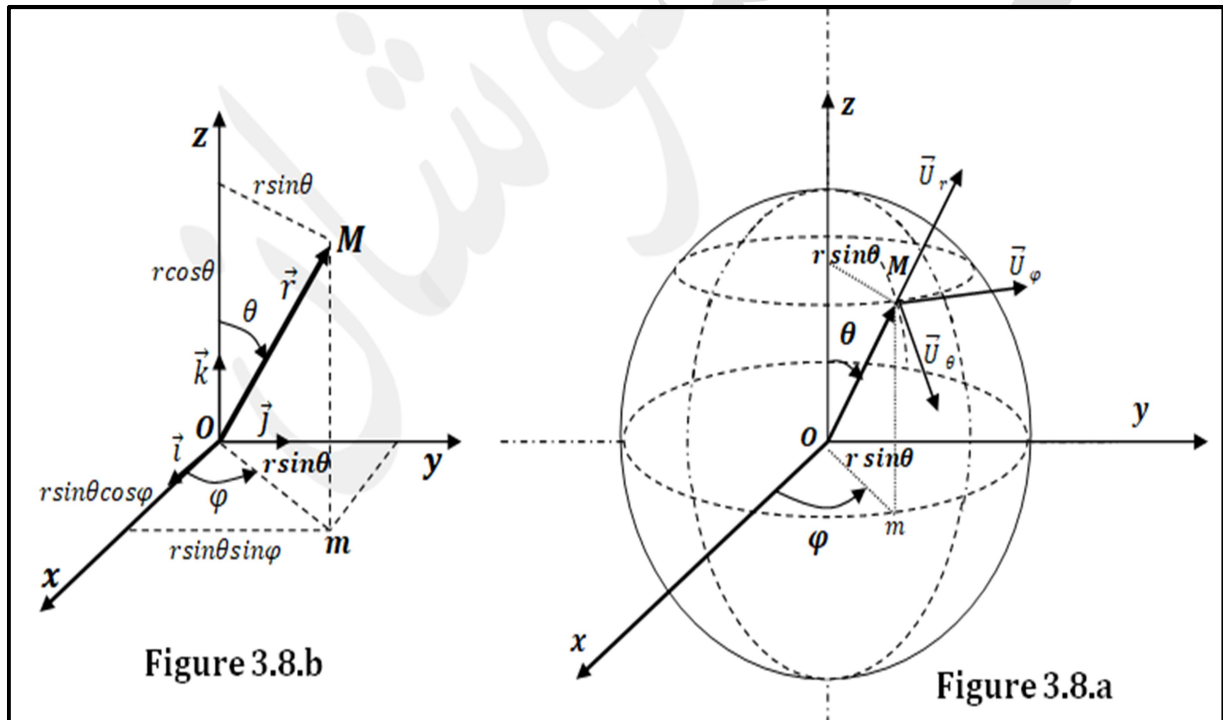
By squaring equations (1) and (2) and adding, we find: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

By dividing equation (2) by equation (1), we find:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$$

3.3.4 Position, Velocity, and Acceleration Vectors in Spherical Coordinates:

The position of point M in spherical coordinates is defined by (r, θ, φ) , using the unit vectors $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ (see Figures 3.8.a and 3.8.b).



Position Vector in Spherical Coordinates: $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$

The components of this vector in Cartesian coordinates are:

$$\vec{OM} = \vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})$$

By comparing both forms, we obtain:

$$\vec{U}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

Computation of $\vec{U}_\theta$:

▪ **First Method:** By differentiating $\vec{U}_r$ with respect to θ , we get:

$$\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

- **Second Method:** By adding $\frac{\pi}{2}$ to θ in $\vec{U}_r$, we find:

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_r\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \varphi \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \varphi \vec{j} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{k}$$

Using trigonometric identities:

$$\vec{U}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

Computation of $\vec{U}_\varphi$:

- **First Method:**

It can be computed geometrically in the same way as in polar coordinates (see Figure 3.9).

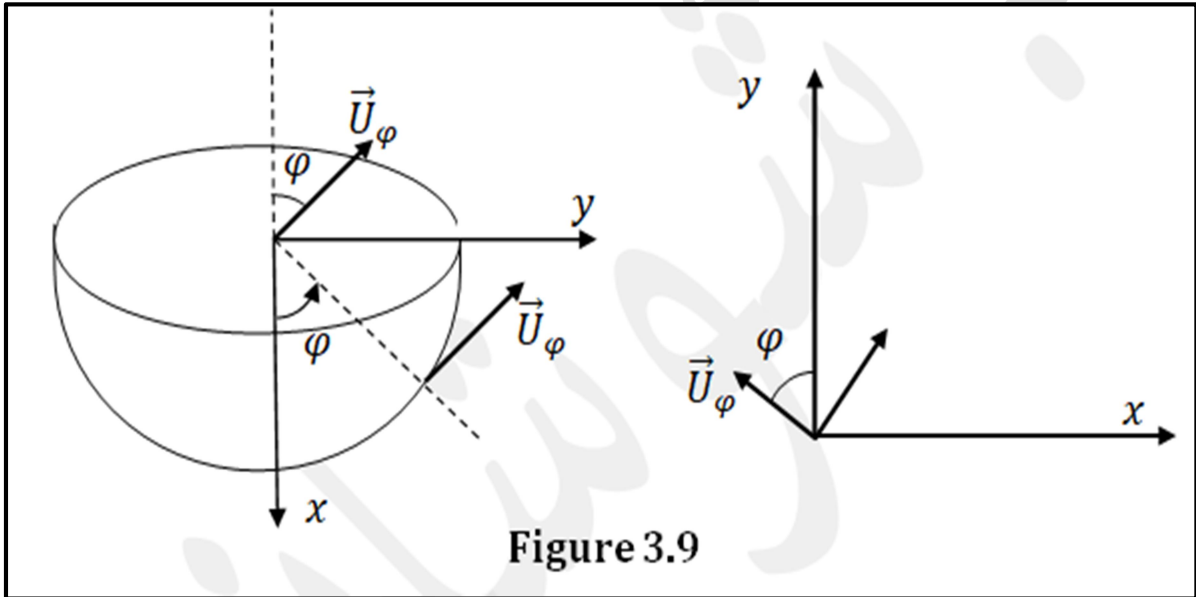


Figure 3.9

Thus: $\vec{U}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$

- **Second method:** $\vec{U}_r$, $\vec{U}_\theta$ and $\vec{U}_\varphi$ form a direct (right-handed) triad.

$$\text{Thus : } \vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_\varphi = & -(\sin \theta^2 \sin \varphi + \cos \theta^2 \sin \varphi) \vec{i} + (\sin \theta^2 \cos \varphi + \cos \theta^2 \cos \varphi) \vec{j} \\ & + (\sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{U}_\varphi = -\sin \varphi (\sin \theta^2 + \cos \theta^2) \vec{i} + \cos \varphi (\sin \theta^2 + \cos \theta^2) \vec{j}$$

$$\vec{U}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

▪ **Third method:** $\vec{U}_\varphi = \frac{1}{\cos \theta} \frac{d\vec{U}_\theta}{d\varphi} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$

▪ **Fourth method:** $\vec{U}_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\vec{U}_r}{d\varphi} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$

▪ Time derivatives of $\vec{U}_r$, $\vec{U}_\theta$ and $\vec{U}_\varphi$:

✓ Time derivative of $\vec{U}_r$:

Then: $\vec{U}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\vec{U}}_r$$

$$\dot{\vec{U}}_r = -(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}$$

$$\dot{\vec{U}}_r = \dot{\theta}(\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}) + \dot{\varphi} \sin \theta (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\dot{\vec{U}}_r = \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{U}_\varphi$$

✓ Time derivative of $\vec{U}_\theta$:

Given: $\vec{U}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$

Then: $\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \dot{\vec{U}}_\theta$

$$= -(\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \vec{i} + (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \cos \theta \vec{k}$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta}(\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) + \dot{\varphi} \cos \theta (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{U}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{U}_\varphi$$

✓ Time derivative of $\vec{U}_\varphi$:

Given: $\vec{U}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$

$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j}$$

Now using the base transformation:

$$\begin{vmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix}$$

Using the transpose of matrix A, we obtain:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix} = A^T \begin{vmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{vmatrix}$$

Hence, we obtain:

$$\vec{i} = \sin\theta \cos\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{U}_\theta - \sin\varphi \vec{U}_\varphi$$

$$\vec{j} = \sin\theta \sin\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{U}_\theta + \cos\varphi \vec{U}_\varphi$$

$$\vec{k} = \cos\theta \vec{U}_r - \sin\theta \vec{U}_\theta$$

Substituting the expressions of $\vec{i}$ and $\vec{j}$ into the expression of $\dot{\vec{U}}_\varphi$, we find:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} &= \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos\varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin\varphi \vec{j} = \\ &= -\dot{\varphi} \cos\varphi (\sin\theta \cos\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{U}_\theta - \sin\varphi \vec{U}_\varphi) \\ &\quad - \dot{\varphi} \sin\varphi (\sin\theta \sin\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{U}_\theta + \cos\varphi \vec{U}_\varphi) \\ &= -\dot{\varphi} \sin\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \vec{U}_r - \dot{\varphi} \cos\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \vec{U}_\theta \\ &\quad \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_r - \dot{\varphi} \cos\theta \vec{U}_\theta \end{aligned}$$

▪ **Position vector:** $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$

▪ **Velocity vector:**

$$\text{We have : } \begin{cases} \dot{\vec{U}}_r = \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_\varphi \\ \dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{U}_r + \dot{\varphi} \cos\theta \vec{U}_\varphi \\ \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_r - \dot{\varphi} \cos\theta \vec{U}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\vec{U}}_r = \dot{r}\vec{U}_r + r(\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\vec{U}_\phi) \\ \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi \\ \vec{V} = \dot{\vec{r}} = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta + V_\phi\vec{U}_\phi \end{cases}$$

Therefore:
$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \\ V_\phi = (r\sin\theta)\dot{\phi} \end{cases}$$

Thus, the magnitude:
$$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + ((r\sin\theta)\dot{\phi})^2}$$

Note:

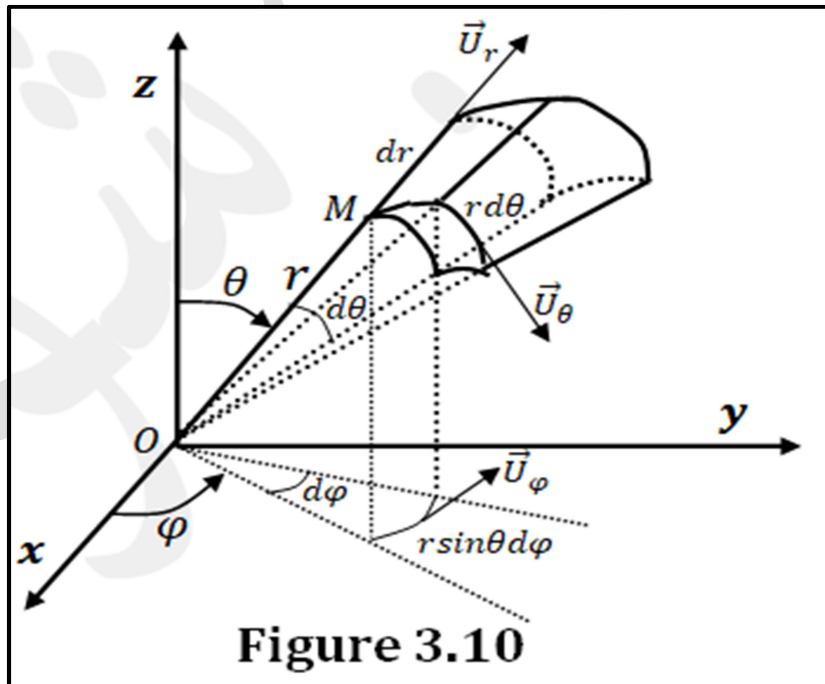
The velocity vector can be computed directly from the infinitesimal displacement vector $d\vec{r}$ over an infinitesimal time interval dt (see *Figure 3.10*).

- Infinitesimal displacement vector :

$$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r\sin\theta)d\phi\vec{U}_\phi$$

By dividing by dt , we obtain:

$$\begin{cases} \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + (r\sin\theta)\frac{d\phi}{dt}\vec{U}_\phi \\ \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi \\ \vec{V} = \dot{\vec{r}} = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta + V_\phi\vec{U}_\phi \end{cases}$$



Acceleration Vector

We have: $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} = \dot{\vec{V}} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\vec{U}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{U}}_\theta + (\dot{r}\sin\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi + (r\dot{\theta}\cos\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi \\ + (r\sin\theta)\ddot{\phi}\vec{U}_\phi + (r\sin\theta)\dot{\phi}\dot{\vec{U}}_\phi\end{aligned}$$

We substitute the expressions for $\dot{\vec{U}}_r$, $\dot{\vec{U}}_\theta$, and $\dot{\vec{U}}_\phi$ into the expression for $\vec{\gamma}$, and we obtain:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{U}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{U}_\theta \\ + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{U}_\phi\end{aligned}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_r\vec{U}_r + \gamma_\theta\vec{U}_\theta + \gamma_\phi\vec{U}_\phi$$

$$\begin{cases} \gamma_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) \\ \gamma_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) \\ \gamma_\phi = (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) \end{cases}$$

Magnitude : $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_\phi^2}$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)^2 + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)^2}$$

▪ Relationship Between Cartesian and Spherical Coordinates:

Position vector in Cartesian coordinates:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Position vector in spherical coordinates:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$$

Its components in Cartesian coordinates:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\vec{j} + \cos\theta\vec{k})$$

By matching components:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2((\sin\theta^2(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) + \cos\theta^2))$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc} \cos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

3.4 Study of Some Types of Motion

3.4.1. Uniform Rectilinear Motion:

Definition: The position of the moving object M at time t is defined by:

$$x = OM = x(t) \text{ (Figure 3.11).}$$

This equation is called the time equation of motion.

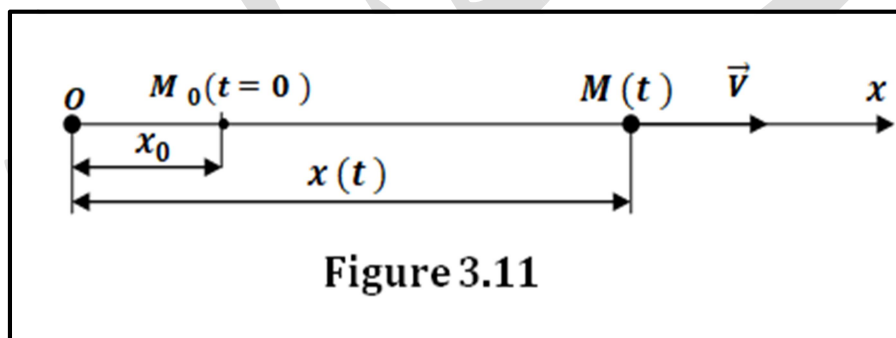


Figure 3.11

Definition: A moving object undergoes **uniform linear motion** if its trajectory is a straight line and its time-position equation is a first-degree function of time.

Uniform linear motion implies: $V = \text{cste}$, $\gamma = 0$

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V dt$$

Initial conditions: $t = 0 \rightarrow x(t = 0) = x_0$

By integration: $\int_{x_0}^x dx = V \int_0^t dt \Rightarrow x = V t + x_0$

Hence, the time-position equation of the motion is: $x = V t + x_0$.

- Position-time and velocity-time diagrams: (Figure 3.12)

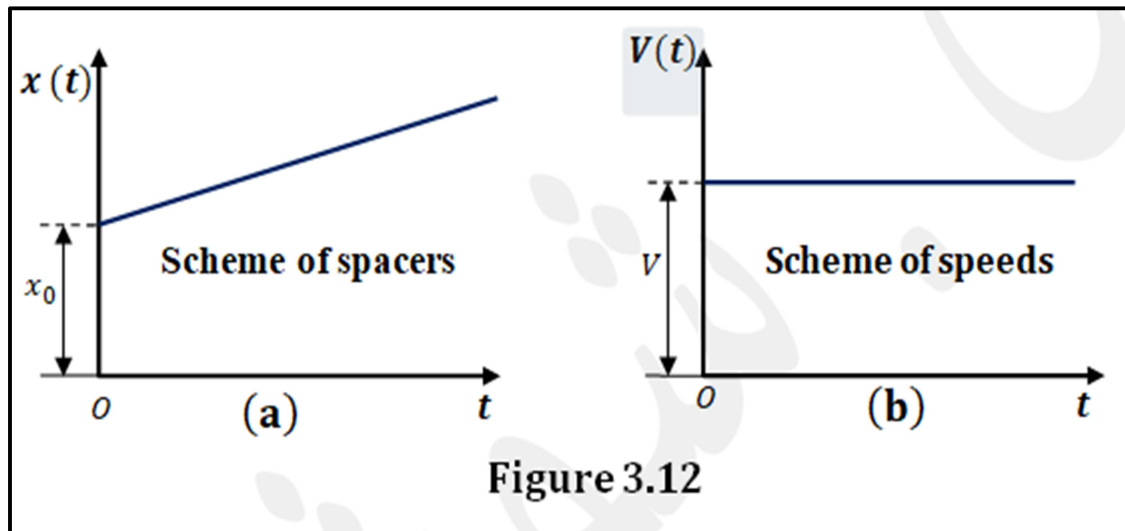


Figure 3.12

3.4.2. Uniformly Accelerated Rectilinear Motion:

Definition: An object is said to undergo uniformly accelerated rectilinear motion if its trajectory is a straight line and its position-time equation is a second-degree function with respect to time, while the acceleration of the object is constant ($\gamma = cste$) (see Figure 3.13).

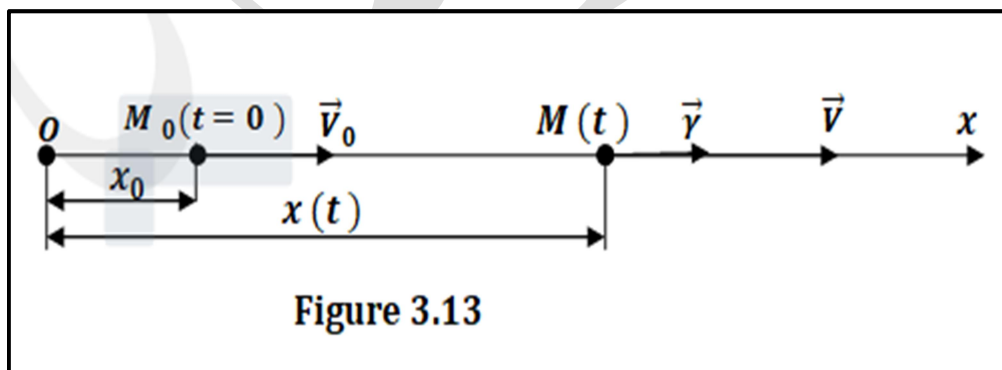


Figure 3.13

Given : $\gamma = cste$

$$\gamma = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = \gamma dt$$

Initial conditions: $t = 0 \rightarrow x(t = 0) = x_0 \rightarrow V(t = 0) = V_0$

By integration, we obtain: $\int_{V_0}^V dV = \gamma \int_0^t dt \Rightarrow [V]_{V_0}^V = \gamma [t]_0^t$

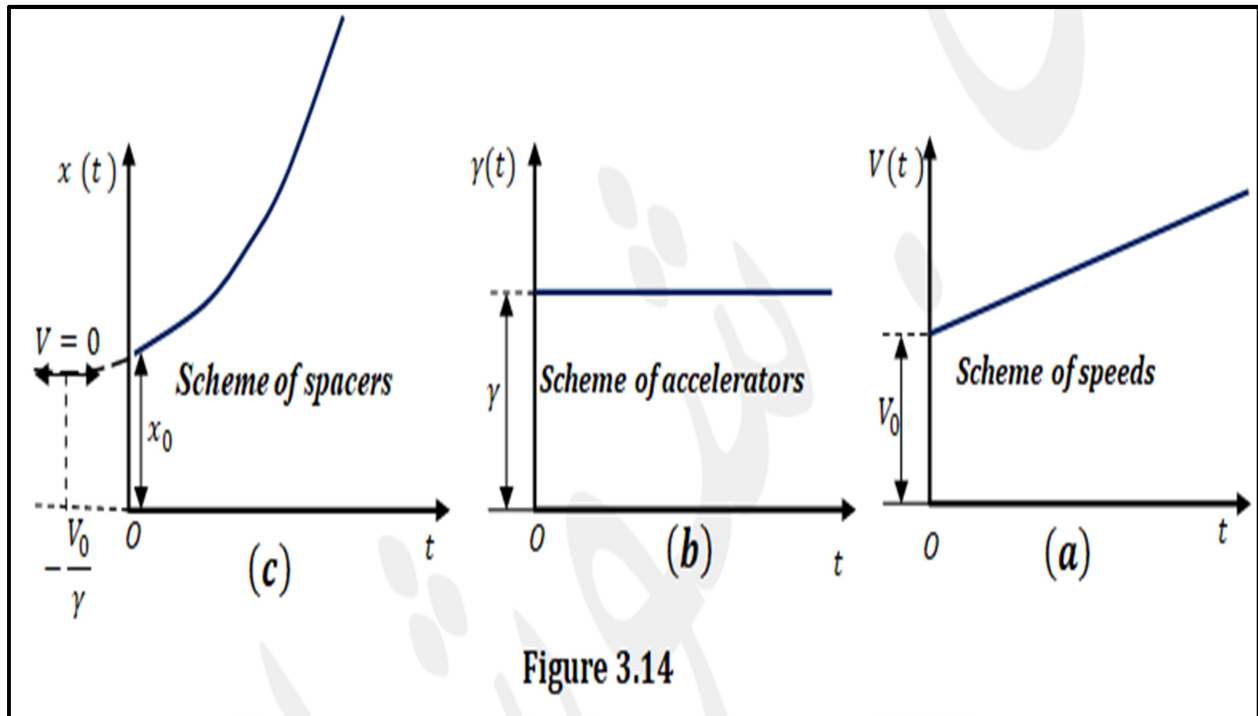
$$V = \gamma t + V_0$$

We also have: $V = \frac{dx}{dt} = \gamma t + V_0 \Rightarrow dx = \gamma t dt + V_0 dt$

By integration, we obtain: $\int_{x_0}^x dx = \gamma \int_0^t t dt + V_0 \int_0^t dt \Leftrightarrow [x]_{x_0}^x = \frac{1}{2} \gamma [t^2]_0^t + V_0 [t]_0^t$

$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0$: This is the time equation of motion.

Displacement, velocity, and acceleration diagrams: (Figure 3.14).



Note: A motion is said to be accelerated or decelerated if:

- Accelerated: (The velocity $\vec{V}$ increases in absolute value).
or $\vec{\gamma} \cdot \vec{V} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma > 0, V > 0 \\ \gamma < 0, V < 0 \end{cases}$
- Decelerated: (The velocity $\vec{V}$ decreases in absolute value).
Or $\vec{\gamma} \cdot \vec{V} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma > 0, V < 0 \\ \gamma < 0, V > 0 \end{cases}$
- **Relationship between the displacement and velocity over a given time:**

We have:
$$\begin{cases} V = \gamma t + V_0 \\ x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0 \end{cases}$$

Also: $t = \frac{V - V_0}{\gamma}$

Thus: $x - x_0 = \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{V - V_0}{\gamma}\right)^2 + V_0 \left(\frac{V - V_0}{\gamma}\right)$

After expansion, we get: $V^2 - V_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$

Special case: If the initial conditions are null ($V_0 = 0, x_0 = 0$)

$$V = \sqrt{2\gamma x}$$

3.4.3. Simple Harmonic Rectilinear Motion (Sinusoidal):

The time-dependent equation of motion is given by:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Where:

- x : displacement (amplitude)
 - A : amplitude
 - ω : angular frequency
 - φ : initial phase
- Period: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
 - Frequency: $f = \frac{1}{T}$
 - **Velocity:** $V = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$
 - **Acceleration:** $\gamma = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

We observe that the position (displacement), velocity, and acceleration are all periodic sinusoidal functions of time.

3.4.4. Circular Motion:

A particle is said to be in circular motion if its trajectory is a circle (see Figure 3.15).

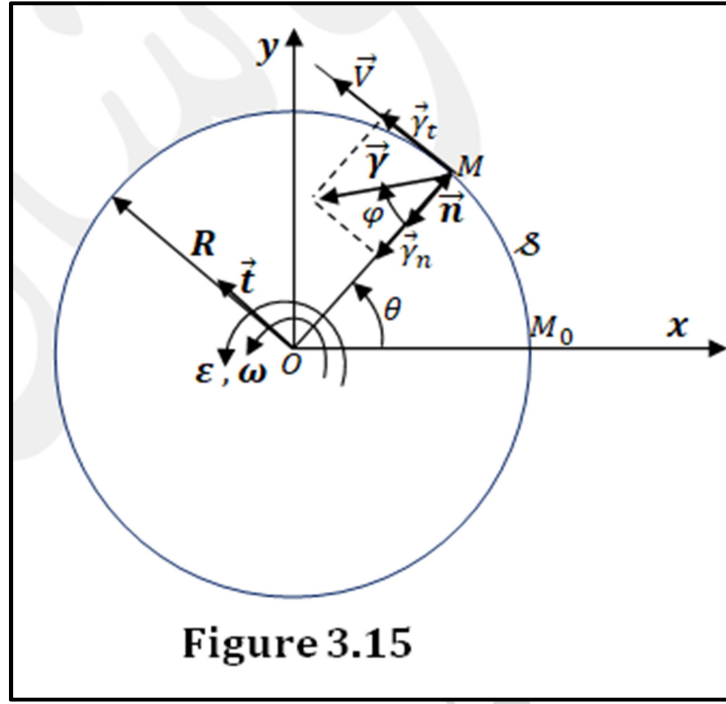


Figure 3.15

The position of the moving object M at time t is defined either by the curvilinear abscissa $s(t)$, or by the angle θ :

$$\theta = (\widehat{OM_0, OM}) = \theta(t)$$

$s(t)$: represents the equation of motion with respect to time.

$\vec{n}$ and $\vec{t}$: represent the unit normal and tangent vectors, respectively.

Using the unit vectors $\vec{n}$ and $\vec{t}$, we write:

$$\vec{n} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{t} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Alternatively, $\vec{t}$ can be obtained by adding $\frac{\pi}{2}$ to θ in $\vec{n}$:

$$\vec{t} = \vec{n} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\cos(\theta + \pi/2) \vec{i} - \sin(\theta + \pi/2) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

By differentiating the unit vectors $\vec{n}$ and $\vec{t}$ with respect to time, we obtain:

$$\dot{\vec{n}} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} (\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$$

$$= -\dot{\theta} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} \vec{t} = -\omega \vec{t}$$

$$\dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) = \dot{\theta} \vec{n} = \omega \vec{n}$$

We define:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad : \text{Angular velocity [rad/s].}$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \quad : \text{Angular acceleration [rad/s}^2 \text{]}$$

- **Position vector:** $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = -R\vec{n}$
- **Velocity vector:** $\vec{V} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = -R\dot{\vec{n}} = -R(-\dot{\theta}\vec{t}) = R\dot{\theta}\vec{t}$
- **Magnitude of velocity:** $|\vec{V}| = V = R\dot{\theta}$
- **Acceleration vector:** $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{t} + R\dot{\theta}\frac{d\vec{t}}{dt}$

$$= R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}\dot{\vec{t}} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n}$$

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n}$$

We know that the curvilinear abscissa is:

$$s(t) = R\theta \Rightarrow \dot{s}(t) = R\dot{\theta} = R\omega \Rightarrow \ddot{s}(t) = R\ddot{\theta} = R\varepsilon$$

Hence, the velocity vector becomes: $\vec{V} = \dot{s}(t)\vec{t} = R\dot{\theta}\vec{t}$.

The velocity vector is tangent to the circular path and its magnitude is:

$$|\vec{V}| = V = R\dot{\theta} = R\omega$$

We have:
$$\begin{cases} V = R\dot{\theta} = \dot{s}(t) = R\omega \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega = \frac{\dot{s}(t)}{R} = \frac{V}{R} \\ \ddot{s}(t) = \frac{dV}{dt} = R\ddot{\theta} = R\varepsilon \end{cases}$$

The **total acceleration vector** is directed toward the concavity:

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n} = \ddot{s}(t)\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{t} + \frac{V^2}{R}\vec{n} = \gamma_n\vec{n} + \gamma_t\vec{t}$$

Therefore, the total acceleration vector $\vec{\gamma}$ can be decomposed into two components:

- Tangential component (tangential acceleration) $\vec{\gamma}_t$: along the tangent, characterizing the change in the magnitude of velocity.

$$\gamma_t = \ddot{s}(t) = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\varepsilon = \frac{dV}{dt}$$

- Normal component (normal acceleration) $\vec{\gamma}_n$ $\vec{\gamma}_n$: directed toward the center of the circle, representing the change in direction of the velocity vector.

$$\gamma_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}$$

Magnitude and direction of total acceleration:

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}$$

And

$$\text{tng}\varphi = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)}{\left(\frac{V^2}{R}\right)} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

(R : is called the radius of curvature).

3.4.4. 1. Uniform Circular Motion:

Definition: A circular motion in which the speed of the object is constant, and its trajectory is circular (see Fig 3.16)

$$|\vec{V}| = V = R\dot{\theta} = R\omega = \text{cste} \Rightarrow \omega = \text{cste} \Rightarrow \varepsilon = 0$$

The angular velocity is constant:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{n\pi}{30} \text{ (n rotations per minute).}$$

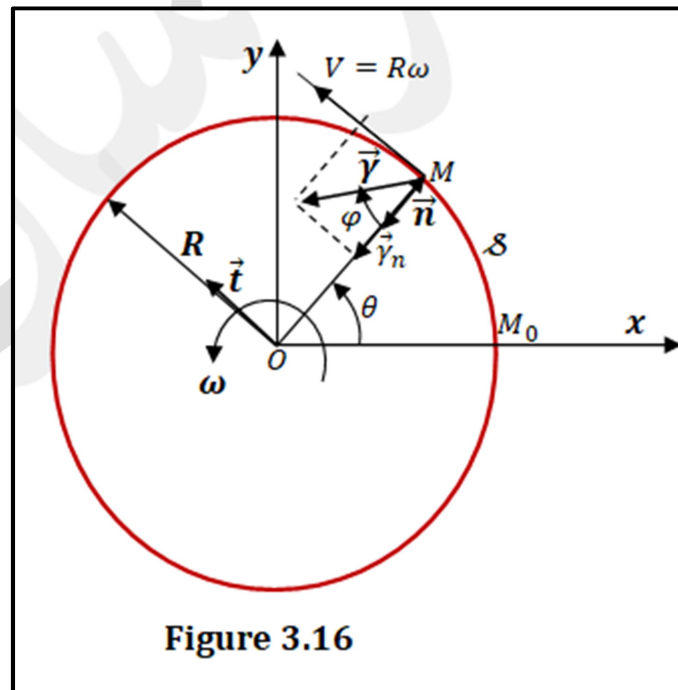


Figure 3.16

We write: $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$

Initial conditions: $t = 0 \rightarrow \theta(t = 0) = \theta_0$

By integration: $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt \Leftrightarrow [\theta]_{\theta_0}^{\theta} = \omega [t]_0^t$

Hence: $\theta = \omega t + \theta_0$

This is the time equation of motion in the case of uniform circular motion.

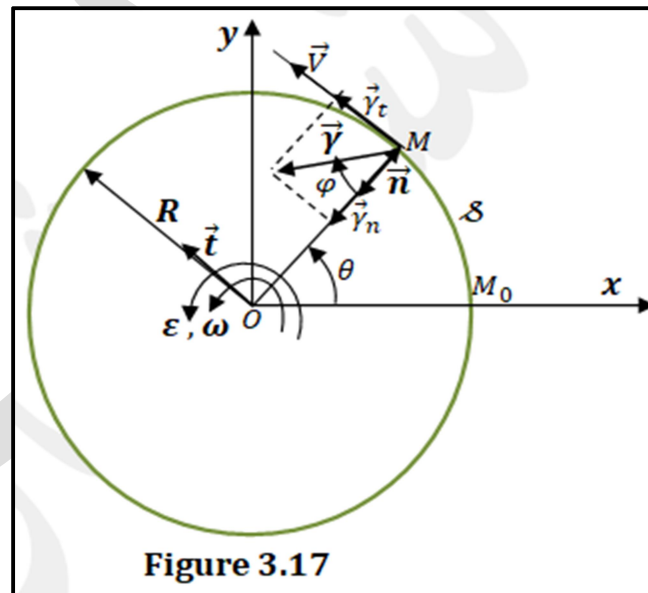
Note: The time equation of motion can also be obtained directly from the arc length.

- Uniform rectilinear motion: $x = V t + x_0$.
- Uniform circular motion: $s(t) = \dot{s}t + s_0$
where: ($s = R\theta$, $\dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega$, $s_0 = R\theta_0$)

Thus: $R\theta = R\dot{\theta}t + R\theta_0 \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$

3.4.4. 2. Uniformly Accelerated Circular Motion:

A particle undergoes uniformly accelerated circular motion if its path is circular and its tangential acceleration γ_t is constant (see Figure 3.17).



$$\gamma_t = \text{cste} = R\epsilon \Rightarrow \epsilon = \text{cste}$$

Since the angular acceleration is constant, we can write:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt$$

Initial conditions: $t = 0 \rightarrow \theta(t = 0) = \theta_0 \rightarrow \omega(t = 0) = \omega_0$

By integration: $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt \Rightarrow [\omega]_{\omega_0}^{\omega} = \varepsilon [t]_0^t$

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0$$

Also, we have: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon t + \omega_0 \Rightarrow d\theta = (\varepsilon t + \omega_0) dt$

By integration: $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\varepsilon t + \omega_0) dt \Rightarrow [\theta]_{\theta_0}^{\theta} = \left[\frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t \right]_0^t$

$$\theta = \frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

This is the time equation for uniformly accelerated rotational motion.

- We can also find the time equation directly from the curvilinear displacement

$$s(t) = \frac{1}{2} \ddot{s} t^2 + \dot{s}_0 t + s_0 = R\theta = \frac{1}{2} R\varepsilon + R\omega_0 + R\theta_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

Where:
$$\begin{cases} \gamma_t = \ddot{s}(t) = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\varepsilon = \frac{dv}{dt} \\ \gamma_n = \frac{\dot{s}^2}{R} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = R(\varepsilon t + \omega_0)^2 \end{cases}$$

Note: The motion is said to be accelerated or decelerated depending on:

- Accelerated : $\omega \cdot \varepsilon > 0$
- lagging : $\omega \cdot \varepsilon < 0$

The relationship between the surveyed angle and angular velocity in a given time:

We have:
$$\begin{cases} \omega = \varepsilon t + \omega_0 \\ \theta = \frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}$$

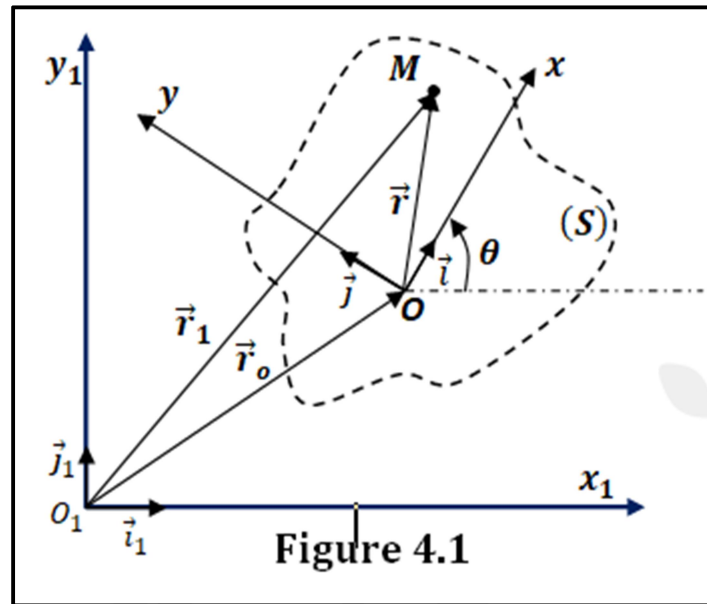
And from him:
$$\theta = \frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \right)^2 + \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \right) + \theta_0$$

After publication and distribution, we find : $(\omega^2 - \omega_0^2) = 2\varepsilon(\theta - \theta_0)$



Chapter four: Relative Motion of a Material Point

4.1. Absolute Motion, Relative Motion, and Transport Motion :



In our previous studies, we examined the motion of point M relative to a fixed reference frame $O_1x_1y_1$. In most cases, it is also easier to study the same motion of point M with respect to a moving reference frame Oxy .

Therefore, it is necessary to determine the motion of point M relative to the moving frame Ox , as well as the motion of the moving frame Oxy relative to the fixed frame $O_1x_1y_1$, in order to fully understand the motion of point M with respect to the fixed reference frame $O_1x_1y_1$.

Let us consider (Figure 4.1) :

- M : A material point moving in the fixed plane $O_1x_1y_1$, whose unit vectors are $\vec{i}_1, \vec{j}_1$.
- Oxy : A moving reference frame attached to the rigid body (S) , whose unit vectors are $\vec{i}_1(t), \vec{j}_1(t)$.
- $\vec{r}_o$: The position vector of the moving origin O with respect to the fixed origin O_1 (i.e., relative to the fixed frame $O_1x_1y_1$).
- $\vec{r}_1$: The position vector of point M with respect to the fixed origin O_1 (i.e., relative to the fixed frame $O_1x_1y_1$).

- $\vec{r}$: The position vector of point M with respect to the moving origin O (i.e., relative to the moving frame Oxy).
- $x(t), y(t)$: The coordinates of point M with respect to the moving axes ox, oy .

Definitions:

A. Absolute Motion:

The absolute motion refers to the motion of point M relative to the fixed frame $O_1x_1y_1$.

The absolute velocity and absolute acceleration represent the velocity and acceleration of point M with respect to the fixed reference frame $O_1x_1y_1$.

B. Relative Motion:

Relative motion refers to the motion of point M with respect to the moving reference frame Oxy .

The relative velocity and relative acceleration represent the velocity and acceleration of point M with respect to the moving frame Oxy .

C. Transport Motion (Convective Motion):

Transport motion refers to the motion of point M with respect to the fixed frame $O_1x_1y_1$, when this point coincides with the rigid body (S) (i.e., it represents the motion of the moving frame Oxy relative to the fixed frame $O_1x_1y_1$).

The transport velocity and transport acceleration represent the velocity and acceleration of the moving frame Oxy with respect to the fixed frame $O_1x_1y_1$.

4.2 Absolute Velocity Calculation

The position vector of point M with respect to the fixed reference frame $O_1x_1y_1$

is:
$$\begin{cases} \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r} \\ \vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \end{cases}$$

We know that:
$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{j}_1 \\ \vec{j} = d\vec{i}/d\theta = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1 \end{cases}$$

Alternatively, $\vec{j}$ can be obtained by adding $\frac{\pi}{2}$ to θ in $\vec{i}$.

$$\vec{j} = \vec{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i}_1 + \sin(\theta + \pi/2)\vec{j}_1 = -\sin\theta\vec{i}_1 + \cos\theta\vec{j}_1$$

Now, we differentiate the unit vectors $\vec{i}$ and $\vec{j}$ with respect to time:

$$\dot{\vec{i}} = \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{i}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{i}_1 + \cos\theta\vec{j}_1) = \dot{\theta}\vec{j} = \omega\vec{j}$$

$$\dot{\vec{j}} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\theta\vec{i}_1 + \sin\theta\vec{j}_1) = -\dot{\theta}\vec{i} = -\omega\vec{i}$$

Thus, the derivative of the position vector $\overrightarrow{O_1M}$ is:

$$\overrightarrow{O_1M} = \vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r}_O + \vec{r}$$

$$\vec{V}_{M/O_1} = \vec{V}_{O/O_1} + \vec{V}_{M/O} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r}_O + \vec{r}$$

$$\vec{V}_{M/O_1} = \overrightarrow{O_1O} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} = \overrightarrow{O_1O} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\omega\vec{j} - y\omega\vec{i}$$

We know that: $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$$\text{Also: } \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} \vec{k} = (-\omega y)\vec{i} + x\omega\vec{j}$$

Thus:

$$\vec{V}_{M/O_1} = \vec{V}_a = \overrightarrow{O_1O} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right] + [\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}]$$

$$\text{We have: } \begin{cases} \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \\ \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{cases}$$

which respectively represent the translation of (O/O_1) and the rotation of $(\vec{i}, \vec{j})$, (i.e., the rotation of the frame Oxy).

$$\text{Thus: } \vec{V}_e = \vec{V}_{(Oxy)/(O_1x_1y_1)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right]$$

$$\vec{V}_r = \vec{V}_{M/O} = [\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}]$$

Therefore:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (\text{which is the velocity composition relation}).$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{M/O_1} = \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r & : \text{Absolute velocity} \\ \vec{V}_r = \vec{V}_{M/O} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} & : \text{Relative velocity} \\ \vec{V}_e = \vec{V}_{O/O_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} & : \text{Transport velocity} \end{cases}$$

4.3. Absolute Acceleration Calculation:

We have:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_a = \vec{O_1\dot{O}} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

And also: $\begin{cases} \vec{r} = \vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\omega\vec{j} - y\omega\vec{i} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{cases}$

Therefore:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_{M/O_1} = \dot{\vec{V}}_{M/O_1} = \dot{\vec{V}}_a &= \vec{O_1\ddot{O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} \\ \vec{\gamma}_a &= \vec{O_1\ddot{O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\omega\vec{j} - \dot{y}\omega\vec{i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

We know: $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} = \varepsilon\vec{k}, \dot{\vec{r}} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\begin{aligned} \text{Thus: } \vec{\gamma}_a &= \vec{O_1\ddot{O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\omega\vec{j} - \dot{y}\omega\vec{i} + \varepsilon \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \Rightarrow \vec{\gamma}_a &= \vec{O_1\ddot{O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\omega\vec{j} - \dot{y}\omega\vec{i} + \varepsilon \wedge \vec{r} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \end{aligned}$$

We have:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ \dot{x} & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \vec{k} = (-\omega\dot{y})\vec{i} + \dot{x}\omega\vec{j}$$

Thus:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_a &= \vec{O_1\ddot{O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \varepsilon \wedge \vec{r} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \Rightarrow \vec{\gamma}_a &= [\vec{O_1\ddot{O}} + \varepsilon \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] + [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}] + [2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{O_1\ddot{O}} &= \vec{\gamma}_{O/O_1} \\ \varepsilon \wedge \vec{r} &= \vec{\gamma}_t \\ \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) &= \vec{\gamma}_n \end{cases}$$

Where:

- $\vec{\gamma}_{O/O_1}$: represents the acceleration of point O with respect to O_1 .

- $[\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})]$:represents the rotational motion of the moving frame Oxy with respect to the fixed frame $O_1x_1y_1$.

Thus:

- The translational acceleration is: $\vec{\gamma}_e = [\ddot{\vec{O_1O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})]$
- The relative acceleration is: $\vec{\gamma}_r = [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}]$
- The Coriolis acceleration is: $\vec{\gamma}_c = [2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r]$

It is a fictitious acceleration and is also referred to as the **complementary** or **compensatory** acceleration.

- Therefore, the absolute acceleration is :

$$\vec{\gamma}_a = [\ddot{\vec{O_1O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] + [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}] + [2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r]$$

That is:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

This is the **acceleration composition formula**.

- **Special case:**

The Coriolis acceleration vanishes when:

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_r = \vec{0} \text{ , } \dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \text{ , } \dot{\vec{\omega}} \parallel \vec{V}_r$$

Then: $\Rightarrow \vec{\gamma}_a = [\ddot{\vec{O_1O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] + [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}]$

Thus: $\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$

Chapter five: Dynamics (Motion of a Material Point)

5. Introduction:

While *kinematics* is concerned with describing motions, *dynamics* focuses on studying the relationship between the motion of a body and the causes of that motion. In a deeper sense, the study of dynamics is the study of the relationship between force and the changes in a body's motion.

5.1. Newton's Three Laws:

1 – Newton's First Law (Galileo's Inertia Principle):

Statement of the Principle:

If a material body is not subjected to any force, then it:

- Either moves in uniform straight-line motion,
- Or remains at rest if it was initially at rest.

For a particle, the principle of inertia states:

A free and isolated particle moves along a straight path at a constant speed.

Therefore, an accelerating particle is neither isolated nor free, but rather undoubtedly subjected to a force.

♦ Momentum:

The momentum of a particle is defined as the product of its mass and its velocity vector: $\vec{P} = m\vec{V}$ (see figure 5.1)

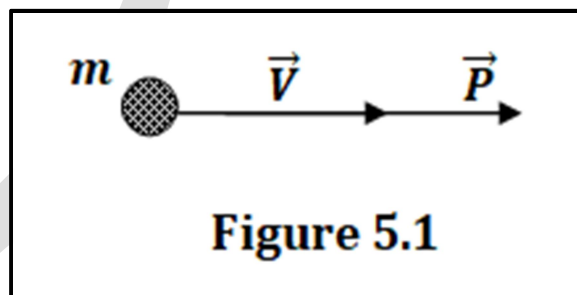


Figure 5.1

Thus, linear momentum is a vector quantity, and it is a very important concept because it encompasses two elements that characterize the dynamic state of a particle.

A new formulation of Newton's First Law (Law of Inertia) can now be stated as follows:

A free particle always moves with a constant linear momentum.

★ Conservation of Linear Momentum:

If there is any change in velocity or momentum, this indicates that the particle is not free.

Let us assume the existence of two free particles, subjected only to mutual interactions between them. Consequently, they are isolated from the rest of the universe.

$$\text{At the instant } t: \begin{cases} m_1 \rightarrow \vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \\ m_2 \rightarrow \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

$$\text{At the instant } t: \begin{cases} m_1 \rightarrow \vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \\ m_2 \rightarrow \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

$$\text{Momentum is conserved if: } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Leftrightarrow m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

2. Newton's Second Law: This is more of a definition than a law.

The time derivative of the momentum of a particle is called the force. That is, the resultant of the forces acting on a particle is:

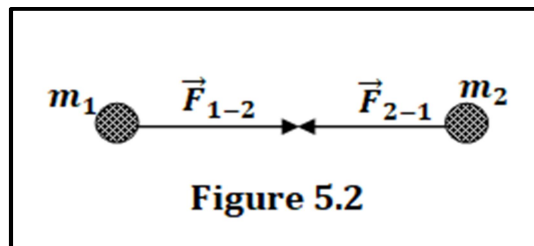
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{V} + m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Special case: if $m = \text{cste}$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{a}$$

3. Newton's Third Law:

Law statement: When two particles are in mutual interaction, the force acting on one is equal in magnitude and opposite in direction to the force acting on the other.

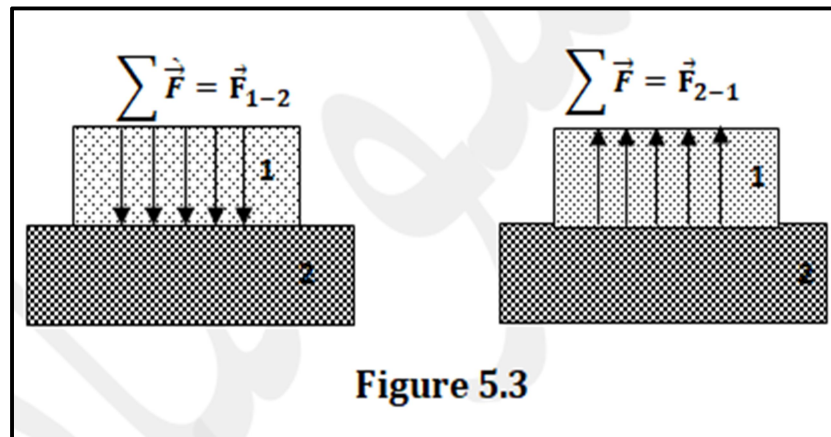


$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$$

5.2. Some Types of Forces:

A. Contact Forces or Bonding Forces:

Here, we understand that we are referring to the forces exerted mutually between two bodies in contact (Figure 5.3).



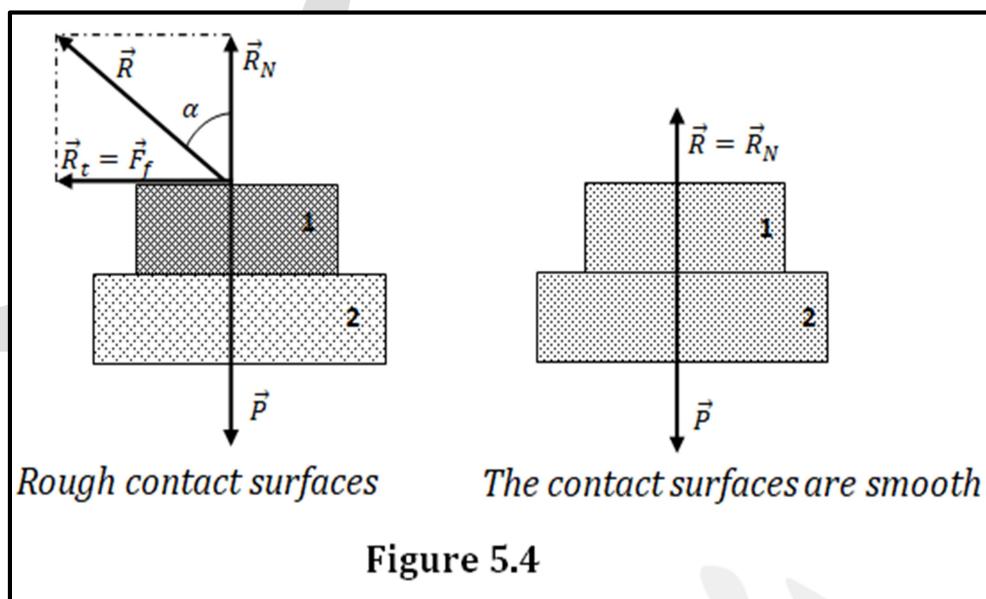
$$\vec{F}_{1-2} = \vec{F}_{2-1}$$

B. Friction Forces:

Whenever there is contact between two rough surfaces of solid bodies, a resistance force arises that opposes their relative motion. There are different types of friction forces.

B.1. Static Friction Forces:

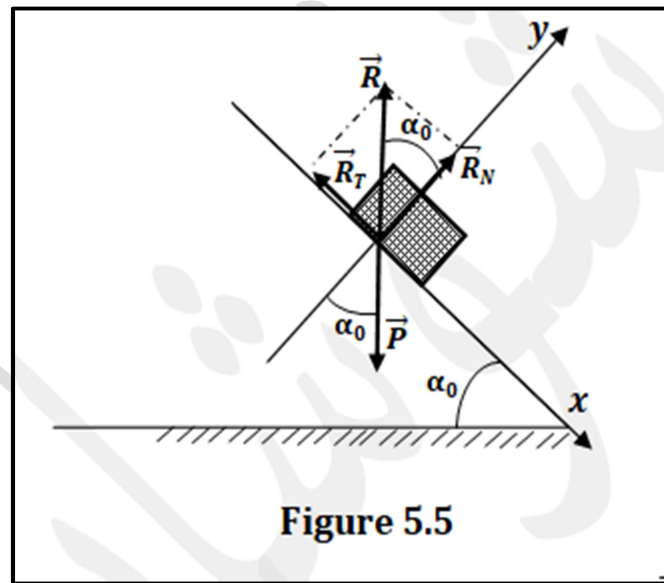
These are the forces that keep a body at rest even in the presence of external forces (Figure 5.4).



▪ **Coefficient of Roughness (Coefficient of Static Friction):**

We place a body on an inclined plane forming an angle α with respect to the horizontal surface.

In the presence of frictional forces between the inclined plane and the body, the body remains at rest despite the increase in angle α , as long as the sequence of values taken by α remains less than a critical value α_0 , which corresponds to the onset of sliding and loss of equilibrium (Figure 5.5).



By applying the fundamental principle of dynamics:

The body is at rest, therefore:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

By projecting along the axes of motion:

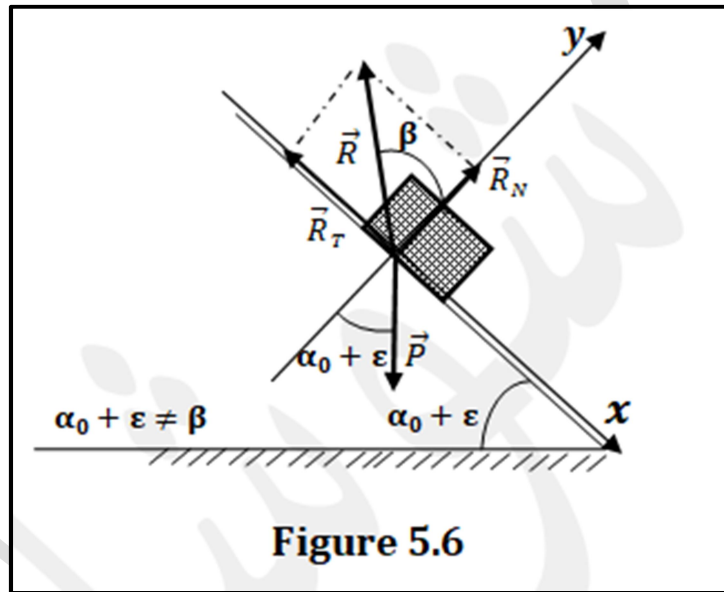
$$\begin{cases} -R_T + mg \cdot \sin \alpha = 0 & \rightarrow \text{along } ox \\ R_N - mg \cdot \cos \alpha = 0 & \rightarrow \text{along } oy \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_T = mg \cdot \sin \alpha \\ R_N = mg \cdot \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{R_T}{R_N} = \tan \alpha = f_s$$

Where f_s is the static friction coefficient.

B.2. Kinetic Friction Forces:

These are the forces that oppose the motion of a body when it slides over a rough surface (i.e., the body continues to move despite their presence) (see Figure 5.6).



▪ Kinetic Friction Coefficient:

Let us continue the previous experiment by slightly increasing the angle α by a very small amount ϵ , such that $\alpha + \epsilon > \alpha_0$, causing the object to start sliding with an accelerated motion.

Applying the fundamental principle of dynamics:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

Projecting onto the axes:

Along ox : $-R_T + mg \cdot \sin(\alpha + \epsilon) = m\gamma$

Along oy : $R_N - mg \cdot \cos(\alpha + \epsilon) = 0$

Hence:
$$\begin{cases} -R_T + mg \cdot \sin(\alpha + \epsilon) = m\gamma \\ R_N - mg \cdot \cos(\alpha + \epsilon) = 0 \end{cases}$$

Therefore: $\frac{R_T}{R_N} = \frac{mg.\sin(\alpha+\varepsilon)-m\gamma}{mg.\cos(\alpha+\varepsilon)} = \text{tg}(\alpha + \varepsilon) - \frac{\gamma}{g.\cos(\alpha+\varepsilon)} = f_c$

Where f_c is the kinetic friction coefficient .

B.3. Viscous Friction Forces:

When a solid body moves through a fluid (gas or liquid) at relatively low speed, a friction force arises and is calculated by the equation:

$$\vec{F}_f = -k\eta\vec{V}$$

Note: In the case of motion at relatively high speed, the friction force becomes:

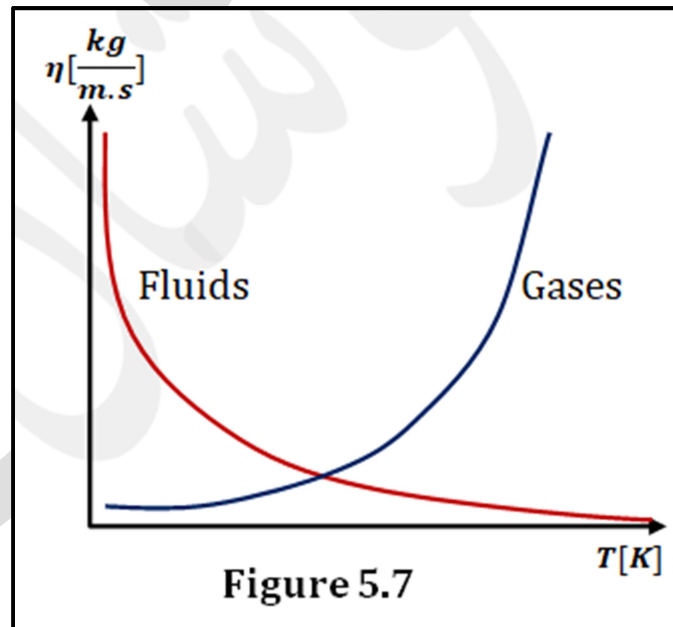
$$F_f = k\eta V^2$$

k : A coefficient that depends on the shape of the object moving within the fluid.

For example, in the case of a sphere: $\vec{F}_f = \vec{F}_s = -6\pi\eta R\vec{V}$ (This is known as **Stokes' viscous force**).

η : The internal friction of fluids (η) is called the **viscosity coefficient**, specifically **dynamic viscosity**.

Note: In liquids, the viscosity coefficient decreases with increasing temperature, while in gases, it increases with temperature. (Figure 5.7).



C. Elastic Forces: These forces lead to periodic motions. For example, in our study of simple harmonic motion, we have seen that the acceleration is given by:

$$\vec{\gamma} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$

By applying the fundamental principle of dynamics:

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM} = -m \frac{k}{m} \overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM}$$

This means that in simple harmonic motion, the net force acting on a material point is directly proportional to the position vector and directed oppositely. It always points toward the center, which is why it is called a central force. It only vanishes at the origin.

By projecting onto the x-axis, we obtain the equation:

$$F = -kx = m\gamma = m\ddot{x}$$

D. Inertial (Fictitious) Forces:

Previously, in our study of relative motion, we encountered the **composition of accelerations** : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$.

For the **absolute inertial frame**, the observer associated with it writes:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_a = m \frac{d\vec{V}_a}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

For the **relative frame**, which is **non-inertial**, the observer associated with it writes:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_r = m(\vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_e - \vec{\gamma}_c)$$

Therefore: $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_r = m(\vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_e - \vec{\gamma}_c) = \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

Where: $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$, $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$

Conclusion: In a non-Galilean frame, it is necessary to add the two **fictitious forces** $\vec{F}_e$ and $\vec{F}_c$ to the real force $\vec{F}_a$, so:

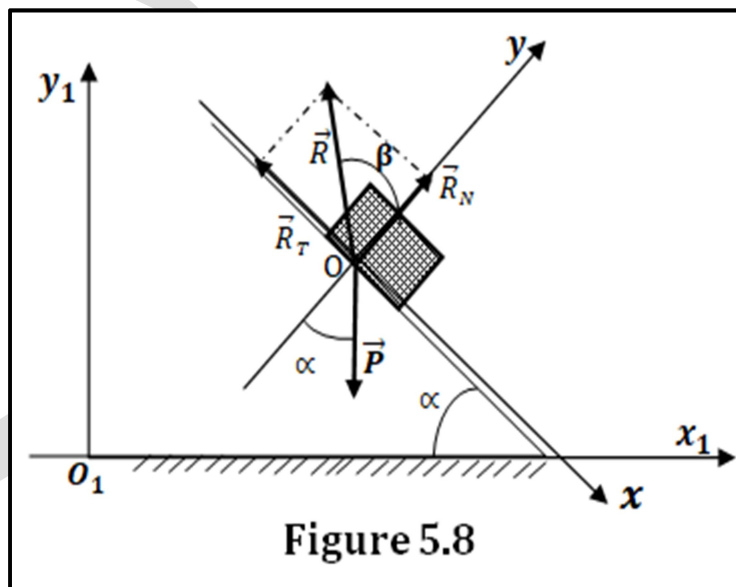
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

Illustrative Example:

Consider a body moving on an inclined plane. The inclined plane makes a time-dependent angle $\alpha(t)$ with the horizontal (see Figure 5.8).

- To carry out a **dynamic (kinematic)** study of the body relative to the **non-Galilean frame** (oxy), it is necessary to:

1. Conduct a dynamic study of the body with respect to the **Galilean frame** ($o_1x_1y_1$), and
 2. Conduct a dynamic study of the **inclined plane (oxy)** with respect to the same **Galilean frame** ($o_1x_1y_1$).
- This means that the resultant force acting on the body in a moving reference frame: $[\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_r]$ is equal to the force acting on the body in a fixed reference frame $[\vec{F}_a]$, plus the force acting on the moving frame relative to the fixed frame $[\vec{F}_e]$, and also includes the fictitious (imaginary) Coriolis force $[\vec{F}_c]$.



5.3. Moment of a Force:

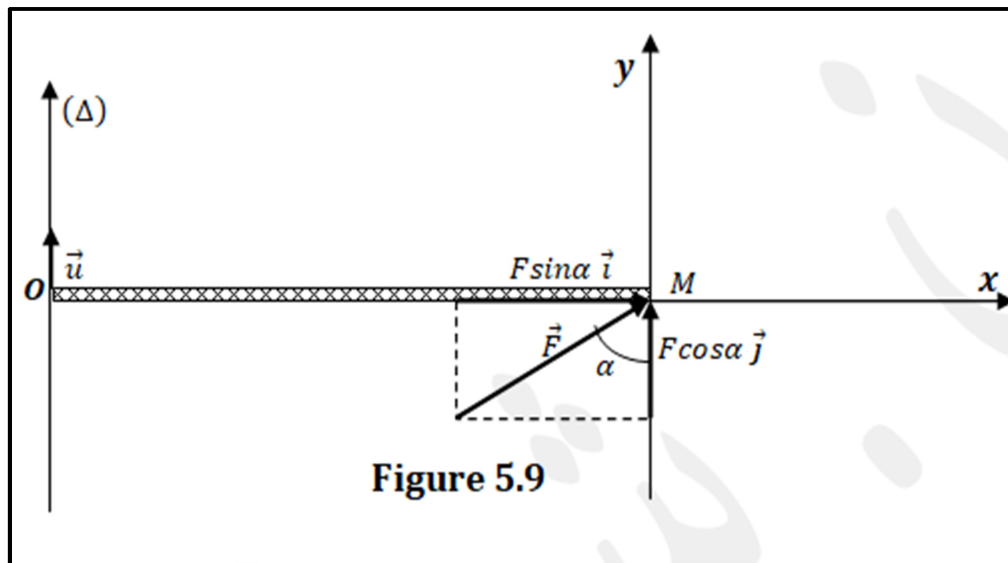
Let the axis (Δ) have a unit vector $\vec{u}$, where ($\vec{u}$ and (Δ)) are parallel and

oriented in the same direction. Let O be a point on the axis (Δ) (see Figures 5.9 and 5.10).

The **moment of a force** $\vec{F}$ applied at point M with respect to the axis (Δ) is defined as: $\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

To compute the moment of the force, one can either decompose the force vector $\vec{F}$ into its components or decompose the position vector $\overrightarrow{OM}$ into its components.

- **Decomposition of the force vector into its components:** (see Figure 5.9).



$$\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = OM\vec{i} \wedge (F\sin\alpha\vec{i} + F\cos\alpha\vec{j}) = OM\vec{i} \wedge F\cos\alpha\vec{j} = OM \cdot F\cos\alpha\vec{k}$$

Longitudinal Component: $\mathcal{M}_{/O}(\vec{F}) = OM \cdot F\cos\alpha$

- **Decomposition of the vector $\overrightarrow{OM}$ into its components:** (see Figure 5.10)

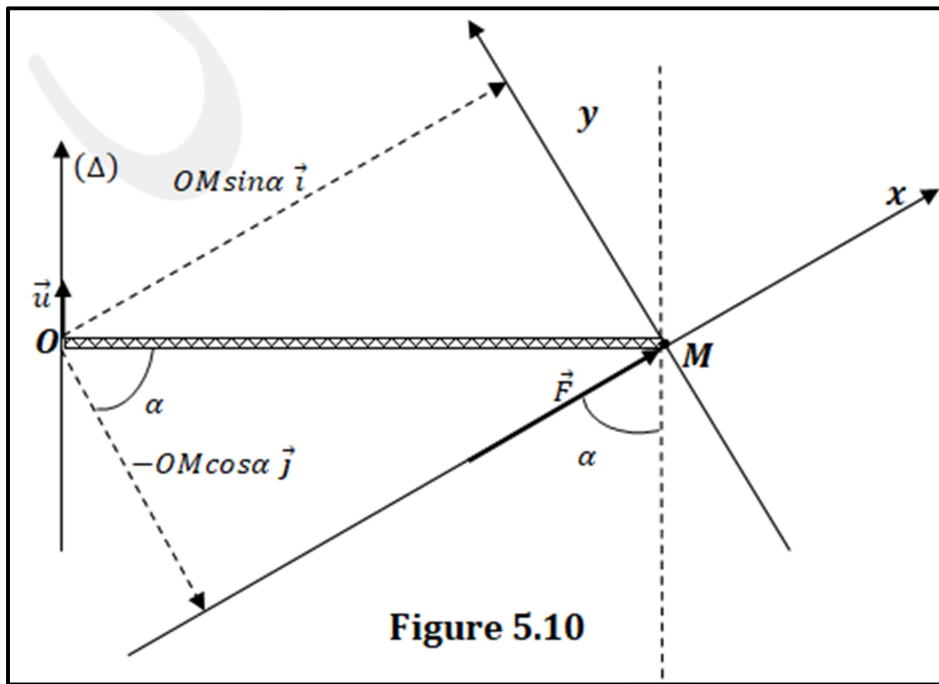


Figure 5.10

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{/o}(\vec{F}) &= \vec{OM} \wedge \vec{F} = (OM \sin \alpha \vec{i} - OM \cos \alpha \vec{j}) \wedge (F \vec{i}) \\ &= -OM \cos \alpha \vec{j} \wedge F \vec{i} = OM \cdot F \cos \alpha \vec{k}\end{aligned}$$

Longitudinal Component : $\mathcal{M}_{/o}(\vec{F}) = OM \cdot F \cos \alpha$

5.4. Angular Momentum:

Its expression is written in the following form:

$$\vec{L}_{/o} = \vec{OM} \wedge \vec{P}$$

- Time derivative of angular momentum:

$$d(\vec{L}_{/o})/dt = d(\vec{OM} \wedge \vec{P})/dt$$

- We assume that $\vec{OM}$ and m are constant:

$$\frac{d(\vec{L}_{/o})}{dt} = \frac{d(\vec{OM} \wedge \vec{P})}{dt} = \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_{/o}(\vec{F})$$

Conclusion: The time derivative of angular momentum is equal to the torque of the force.

Chapter Six: Work and Energy

6. Introduction:

The principle of force leading to exerted effort is linked to the principle of energy and work.

6.1 Work: Work is defined as the transformation of energy from one form to another whenever the point of application of a force is displaced.

- This relationship between energy and force exists for all types of energy relevant to mechanical phenomena.
- Energy is a scalar quantity.
- Work is defined as the scalar product of a force $\vec{F}$ applied to a point M during the infinitesimal time interval dt :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt$$

Where:

$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$: is the velocity of point M .

6.2 Power:

Power is defined as the ratio of the elemental work dW to the elemental time dt :

$$p = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

The SI unit of power is the *watt*:

Watt=joule/ second

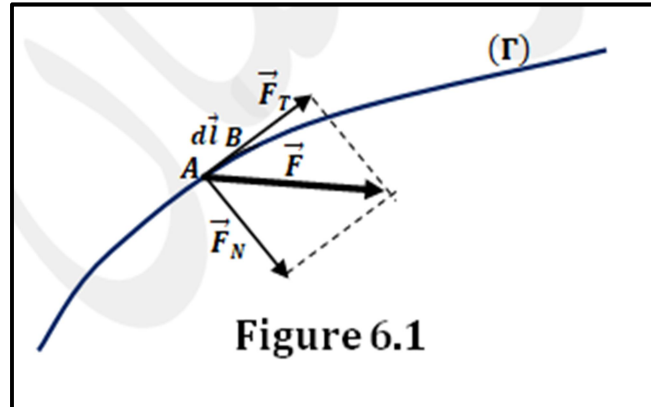
The SI unit of work is the joule:

joule = (joule = $kg.m^2.s^{-2}$) .

Definition of the joule: A joule is the work done by a force of 1 newton when its point of application moves a distance of 1 meter.

Thus, calculating work requires knowing the force as a function of the point M in the spatial region where the displacement occurs.

If the displacement is defined between two points A and B (see Figure 6.1), then:



$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

By decomposing the force into its tangential and normal components:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{F}_T + \vec{F}_N) \cdot d\vec{l} = \vec{F}_T \cdot d\vec{l} + \vec{F}_N \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_T \cdot d\vec{l} = F_T \cdot dl \cdot \cos 0 = F_T \cdot dl$$

$$\vec{F}_N \cdot d\vec{l} = F_N \cdot dl \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Hence:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_T \cdot dl$$

The work done between two points A and B is: $W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B F_T \cdot dl$

6.3. The Kinetic Energy Theorem:

This theorem is also known as the theorem of effective forces, and the first to name it as such was the scientist Leibniz

The kinetic energy of a material point is defined as: $E_c = \frac{1}{2} mV^2$ and its value depends on the reference frame in which the motion is studied.

If $\vec{F}$ is the external force applied to the considered material point, then the elemental work of this force is:

$$dW = \vec{F}d\vec{l} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{V} \cdot dt = m\vec{V}d\vec{V} = mV dV = d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)$$

During the motion from point A to point B:

$$W_A^B = \int_A^B dW = m \int_A^B V dV = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)$$

$$W_A^B = \left[\frac{1}{2} m V^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$$

$$W_A^B = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c$$

Therefore: $\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$

This is known as the **Kinetic Energy Theorem**.

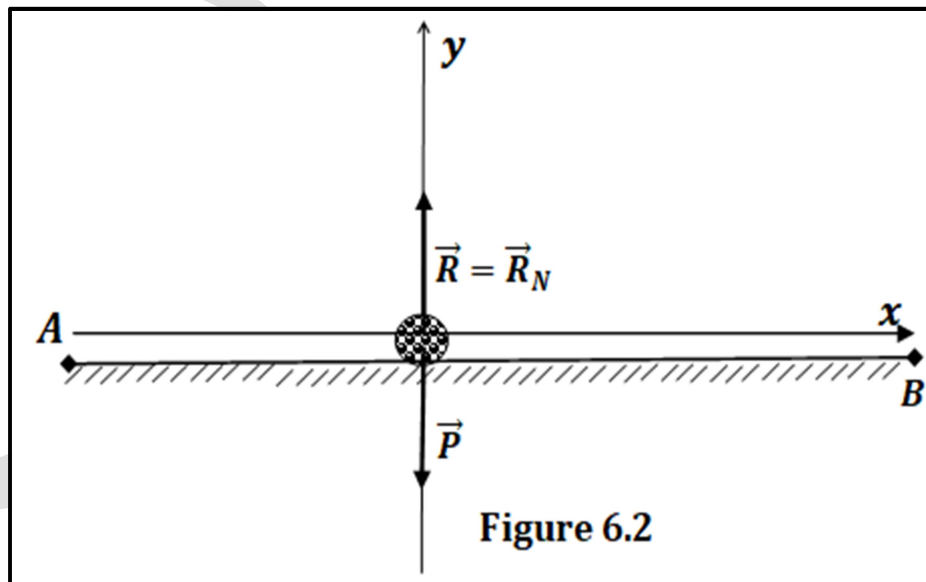
Application Example:

We consider a horizontal path of length AB (see figure 6.2). A particle starts from point A with initial speed V_A and reaches point B.

- We apply the kinetic energy theorem in two cases:

When the path is **smooth**, and when it is **rough** with a kinetic friction coefficient f_c , in order to derive the expression of the velocity at point B.

a. Case of a smooth surface:



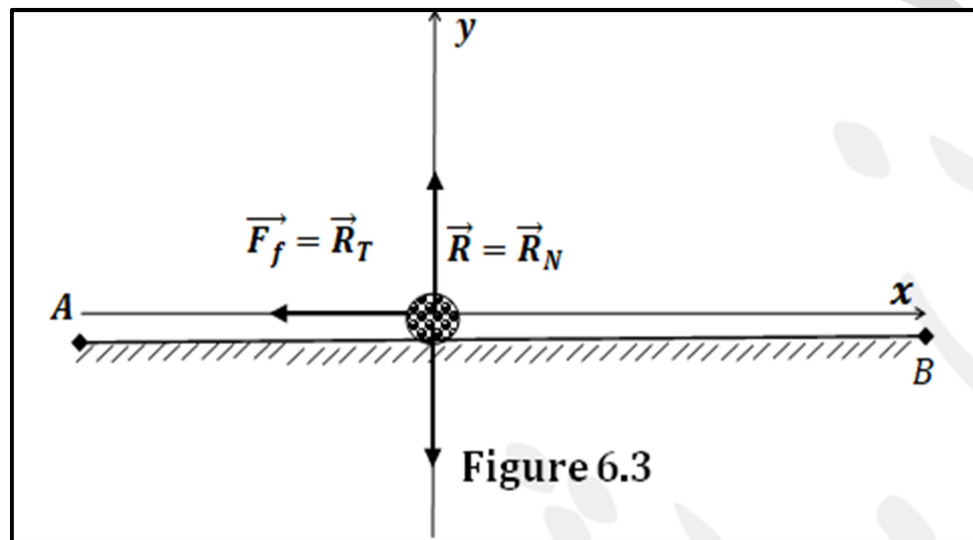
- Applying the Kinetic Energy Theorem between points A and B:

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N)$$

$$\begin{cases} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}_N) = 0 \end{cases} \text{ Because } \vec{P} \text{ and } \vec{R}_N \text{ are perpendicular to the path.}$$

Therefore: $\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 \Rightarrow V_A = V_B$

b. Case of a rough surface:



- By applying the fundamental principle of dynamics:

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{R}$$

By projecting onto the oy axis, we find:

$$mg - R_N = 0$$

- Now, by applying the Kinetic Energy Theorem between points A and B:

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_{c_B} - E_{c_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$$

$$\begin{cases} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}_N) = 0 \end{cases} \text{ Because } \vec{P} \text{ and } \vec{R}_N \text{ are perpendicular to the path.}$$

Therefore: $\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_{c_B} - E_{c_A} = W(\vec{R}_T)$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -R_T(AB)$$

We have: $f_c = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = f_c \cdot R_N = f_c \cdot mg$

Hence: $\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -R_T(AB) = -f_c \cdot mg(AB)$

$$\Rightarrow V_B^2 = V_A^2 - 2f_c g \cdot (AB) \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 - 2f_c g \cdot (AB)}$$

6.4. Potential Energy:

In reality, the forces applied on bodies can take different forms. At every point in space, the moving object is subjected to a force $\vec{F}$, where $\vec{F}$ is a conservative force derived from a potential (i.e., the work done does not depend on the path or the time).

It mathematically means that:
$$\begin{cases} -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\vec{\nabla} E_p = \vec{F} \\ \text{Rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$$

The displacement of the point of application of the force leads to an energy expenditure (interaction energy), denoted as $(-dE_p)$, which is expressed as the work done by the interaction force:

$$dW = \vec{F} d\vec{l} = dE_c = -dE_p$$

During the transition from point A to point B:

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B dE_c = - \int_A^B dE_p$$

$$E_{cB} - E_{cA} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

$$\Rightarrow (E_{cB} + E_{pB}) = (E_{cA} + E_{pA}) = E_M = E_T = \text{cste}$$

Where: (E_M) is the mechanical energy or (E_T) is the total energy.

6.5. Principle of Conservation of Total (Mechanical) Energy:

We have:

$$[\Delta E_c]_A^B = -[\Delta E_p]_A^B \Rightarrow E_{cB} - E_{cA} = -(E_{pB} - E_{pA}) \Rightarrow (E_{cB} + E_{pB}) = (E_{cA} + E_{pA})$$

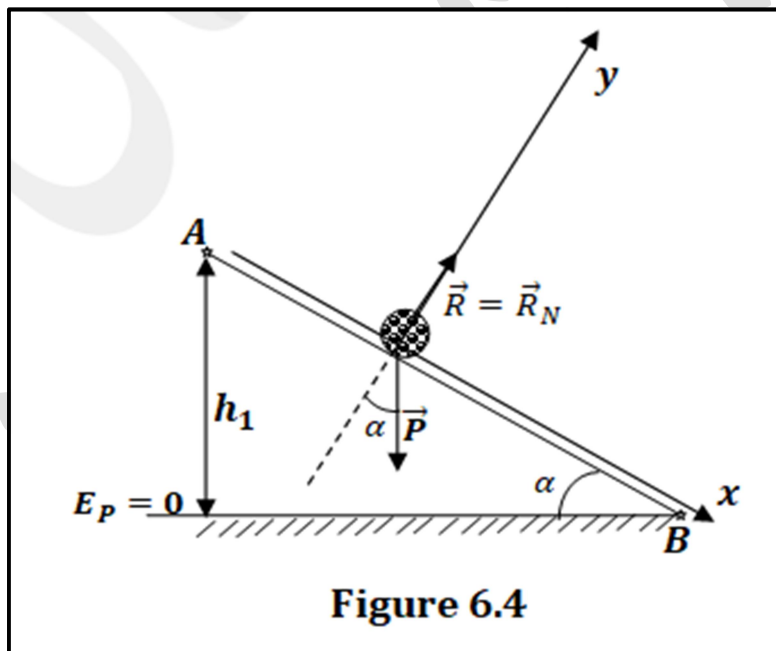
Therefore: $[\Delta E_M]_A^B = [\Delta E_T]_A^B = 0$

Which is the principle of conservation of total energy.

Applied Example:

We consider an inclined path of length AB, making an angle α with the horizontal (see Figure 6.4). A particle is launched from point A with initial speed V_A and reaches point B.

- Applying the principle of total energy conservation for the case where the surface is smooth, we aim to determine the expression for the speed at point B.
- **Case of a smooth surface:**



- Applying the Principle of Conservation of Total Energy:

$$[\Delta E_M]_A^B = [\Delta E_T]_A^B = 0$$

$$[\Delta E_C]_A^B = -[\Delta E_P]_A^B \Rightarrow E_{c_B} - E_{c_A} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \Rightarrow (E_{c_B} + E_{p_B}) = (E_{c_A} + E_{p_A})$$

Given: $E_{p_B} = 0$

$$\Rightarrow (E_{c_B}) = (E_{c_A} + E_{p_A}) \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 = \frac{1}{2}mV_A^2 + mg \cdot h_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V_B^2 = \frac{1}{2}V_A^2 + g \cdot AB \cdot \sin\alpha \Rightarrow V_B^2 = V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin\alpha}$$

6.6. General Cases (Conservative and Non-Conservative Forces):

In real-life situations, many examples involve non-conservative forces, i.e., forces not derived from a potential. Measurements show that the mechanical (total) energy conservation law is not valid in such cases.

▪ Case of Forces Derived from a Potential:

Let the forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ be derived from a potential.

Then the elemental work is: $dW = \vec{F}_1 d\vec{l} + \vec{F}_2 d\vec{l}$

- Dynamic Interpretation (Fundamental Principle of Dynamics):

$$\sum_{i=1}^{n=2} \vec{F}_i = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

- Energetic Interpretation: $\Delta E_M = 0$

$$\Rightarrow (E_{c1})_A + (E_{c2})_A + (E_{P1})_A + (E_{P2})_A = (E_{c1})_B + (E_{c2})_B + (E_{P1})_B + (E_{P2})_B$$

$$\Rightarrow [(E_{c1})_B + (E_{c2})_B + (E_{P1})_B + (E_{P2})_B] - [(E_{c1})_A + (E_{c2})_A + (E_{P1})_A + (E_{P2})_A] = 0$$

▪ Case of Non-Conservative Forces:

If we add two non-conservative forces $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ to the previously mentioned conservative forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, then:

- Dynamic Interpretation : $\sum_{i=1}^{n=4} \vec{F}_i = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m \frac{d\vec{V}}{dt}$

- Energetic Interpretation:

$$\begin{aligned} \Delta E_M &= [(E_{c1})_B + (E_{c2})_B + (E_{P1})_B + (E_{P2})_B] \\ &- [(E_{c1})_A + (E_{c2})_A + (E_{P1})_A + (E_{P2})_A] \neq 0 \\ \Delta E_M &= W(\vec{F}_3) + W(\vec{F}_4) = \sum W(\vec{F}_{n.c}) \end{aligned}$$

Where $\vec{F}_{n.c}$ are **non-conservative forces** (i.e., not derived from a potential).

Application Example:

We have an inclined path of length AB, forming an angle α with the horizontal. A particle starts at point A with an initial velocity V_A and reaches point B.

We apply the principle of total energy conservation in the case where the path is rough with a kinetic friction coefficient f_c , in order to find the expression of velocity at point B.

▪ **Case: Rough Surface**

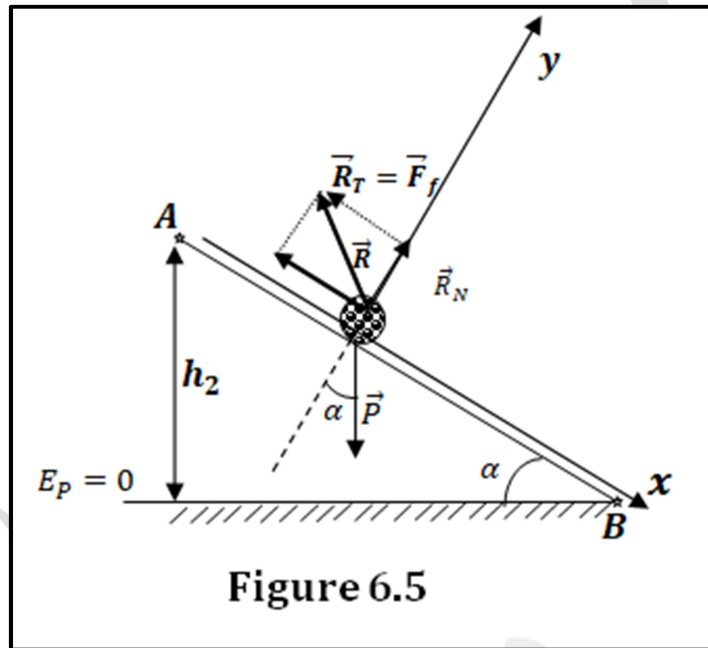


Figure 6.5

- By applying the fundamental principle of dynamics: $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{R}$
- By projecting onto the oy axis, we find: $mg \cdot \cos \alpha - R_N = 0$
- By applying the principle of total (mechanical) energy conservation:

$$\begin{aligned}
 [\Delta E_M]_A^B &= [\Delta E_T]_A^B = W(\vec{R}_T) \\
 \Rightarrow (E_{c_B}) - (E_{c_A} + E_{p_A}) &= W(\vec{R}_T) \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 &= \frac{1}{2} m V_A^2 + mg \cdot h_2 - R_T(AB) \\
 h_2 &= AB \cdot \sin \alpha, R_T = f_c \cdot mg \cdot \cos \alpha \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 &= \frac{1}{2} m V_A^2 + mg \cdot AB \cdot \sin \alpha - f_c \cdot mg \cdot \cos \alpha (AB) \\
 \Rightarrow V_B^2 &= V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha - 2f_c \cdot g \cdot \cos \alpha (AB) \\
 \Rightarrow V_B &= \sqrt{V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha - 2f_c \cdot g \cdot AB \cos \alpha}
 \end{aligned}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

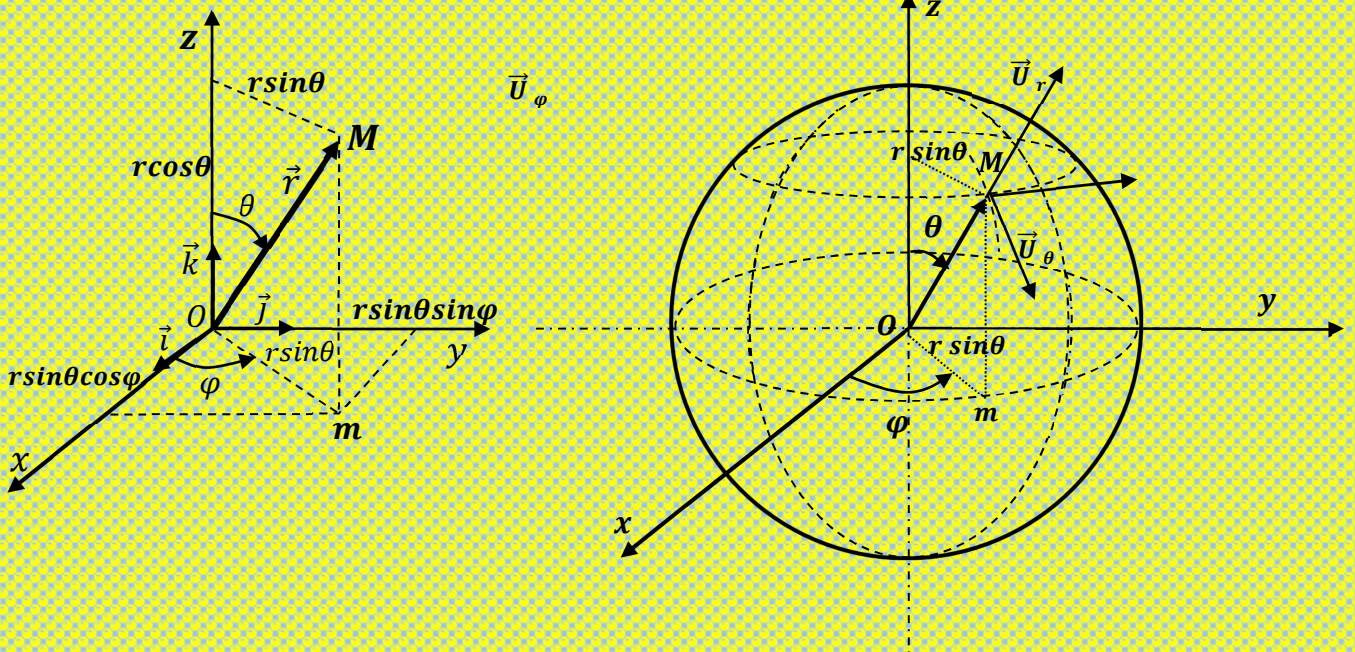
جامعة محمد خيضر - بسكرة -

كلية العلوم والتكنولوجيا

المجند المشترك لميدان العلوم والتكنولوجيا

دروس تفصيلية وفق نظام L.M.D مادة الفيزياء -01-

ميكانيك النقطة المادية



من إعداد الدكتور: ناصر شوشان

السنة الجامعية 2026/2025

المحور الأول: مفاهيم رياضية عامة

1. مقدمة

1.1. علم الميكانيك

الميكانيك هو أحد أهم فروع الفيزياء وهو يهتم بدراسة الحالة السكونية والحركية والتحريرية للأجسام في الطبيعة .

فالحرركات الميكانيكية المدروسة عادة ذات مفهوم نسبي حيث في أغلب الأحيان وعند دراسة حركة جسم بالنسبة لآخر نعتبر أحد الجسمين ساكنا ونسميه معلما أو جملة إسناد .
يمكن تقسيم الميكانيك إلى ثلاثة أقسام .

أ . قسم يهتم بالدراسة السكونية للأجسام : ويسمى الميكانيك السكوني حيث يهتم هذا القسم بدراسة الشروط التي يجب أن تحققها الأجسام أو مجموعات الأجسام حتى تكون متوازنة بالنسبة لمعلم أو جملة إسناد نعتبرها ثابتة .

ب . قسم يهتم بالدراسة الحركية للأجسام : ويسمى الميكانيك الحركي حيث يهتم هذا القسم بدراسة حركة الأجسام دون التعرض لمسبباتها (أي دون دراسة القوى التي جعلت هذا الجسم يتحرك) .

ج . قسم يهتم بالدراسة التحريكية (الديناميكية) للأجسام : حيث أن هذا القسم يشكل صلب علم الميكانيك حيث أنه يهتم بدراسة حركة الأجسام مع دراسة مسببات الحركة .

1.2. المقادير الأساسية والمقادير المشتقة « الوحدات »

في الميكانيك يمكن إختزال عدد الوحدات إلى ثلاثة : المسافة ، الكتلة والزمن .

كل المقادير الأخرى والتي عددها غير محدود تسمى مقادير مشتقة مثل (السرعة، التسارع، القوة، الضغط، العمل، الإستطاعة،)

إذن جملة الوحدات الفيزيائية هذه يمكن تقسيمها إلى:

أ. جملة وحدات أساسية : وهي الجملة المستعملة عادة عند أغلبية الفيزيائيين ففي الميكانيك مشكلة أساسا من M, K, S المتر وهي وحدة الطول، K الكيلوغرام وحدة الوزن S ، الثانية وحدة الزمن).

ب. جملة وحدات مشتقة : وهي جملة غير محدودة العدد، وفي علم الميكانيك هذه الجملة تكتب بدلالة الوحدات الأساسية الثلاثة السابقة

1. 3. معادلات الأبعاد : في الميكانيك أبعاد الوحدات الأساسية هي: الكتلة M ، الطول L ، الزمن T وكل الوحدات المشتقة يمكن أن تستنتج من المقادير الأساسية بواسطة معادلة تحليل الأبعاد أو ما يعرف بطريقة المجداءات π أو طريقة $Vaschy-Buckingham$.

ومعادلة الأبعاد تكتب على الشكل : $Y = k M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$ أو تكتب من الشكل :

$$[Y] = k [M]^{\alpha} [L]^{\beta} [T]^{\gamma}$$

حيث k معامل عددي يمثل قياس، المعاملات α, β, γ هي أعداد سالبة أو معدومة أو موجبة .

أمثلة :

السرعة	$[V] = [L] [T]^{-1}$	الضغط	$[P] = [Pas] = [M][L]^{-1} [T]^{-2}$
التسارع	$[\gamma] = [L] [T]^{-2}$	العمل	$[W] = [joule] = [M][L]^2 [T]^{-2}$
القوة	$[F] = [N] = [M][L] [T]^{-2}$	الإستطاعة	$[p] = [watt] = [M][L]^2 [T]^{-3}$

1. 4. معادلات الأبعاد في مختلف العلوم الفيزيائية الأخرى .

إذا إمتدت دراستنا لمجالات فيزيائية أخرى خارج المجال الميكانيكي فالأبعاد الأساسية يمكن حصرها في الجدول التالي :

المقدار	الكتلة	الطول	الرمز	الشدة	درجة	كمية	الشدة الضوئية
				الكهربائية	الحرارة	المادة	
رمز المقدار	M	L	T	I	θ	N	J
إسم الوحدة	الكيلوغرام	المتر	الثانية	الأمبير	الكالفن	المول	القنديلة
	kilogramme	Mètre	Seconde	Ampère	Kalvin	Mole	Candela
رمز الوحدة	kg	m	s	A	K	mol	Cd

ومعادلة الأبعاد العامة تكتب على الشكل التالي :

$$[Y] = k [M]^{\alpha} [L]^{\beta} [T]^{\gamma} [I]^x [\theta]^y [N]^z [J]^n$$

تنبيه: إضافة للوحدات الأساسية هناك وحدات ثانوية لبعض المقادير وهناك وحدة إضافية .

أ. الوحدات الثانوية (Unités secondaires) : مثل اللتر (l) ، الدرجة المئوية (°C) ، الحرارة (Cal) ، مللمتر زئبقي (mm Hg) ،

ب. وحدة إضافية (Unité supplémentaire) : وهي الوحدة الرسمية للزوايا المستوية وهي الراديان (rad) .

1. 5. حساب الأخطاء (الإمريبات) :

لنعتبر مقدار Y تابعاً لمقادير أخرى (أساسية) A, B, C ، ولتكن y هي قياس Y و a, b, c هي على الترتيب قياسات A, B, C . نفرض أنه لدينا العلاقة $y = f(a, b, c)$. إذا غيرنا a ، b و c بالمقادير الصغيرة Δa ، Δb و Δc على الترتيب فما هو التغير Δy الحاصل على y .

بالتعريف : تمثل النسبة $\frac{\Delta y}{y}$ الخطأ النسبي المرتكب في قياس المقدار Y .

يسمى التغير Δy : الخطأ المطلق المرتكب في قياس المقدار Y ، فهو يساوي القيمة المطلقة للفرق بين القيمة المضبوطة (الصحيحة) ونتيجة القياس التجريبية .

عادة تتعامل مع الإرتياب المطلق بدل الخطأ المطلق وكذلك مع الإرتياب النسبي بدل الخطأ النسبي .

حالات خاصة :

1. الجمع : ليكن لدينا $y = a + b - c$

تفاضل (نشتق) فنجد : $dy = da + db - dc$.

نستنتج أن الخطأ المطلق الأعظمي : $\Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c$.

والخطأ النسبي الأعظمي : $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{y} + \frac{\Delta b}{y} + \frac{\Delta c}{y}$

2. المجداء : ليكن لدينا $y = a \cdot b \cdot c$

المشتق (التفاضل) :

$$dy = bcda + acdb + abdc \Rightarrow \Delta y = bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta y}{a \cdot b \cdot c} = \frac{bc\Delta a}{a \cdot b \cdot c} + \frac{ac\Delta b}{a \cdot b \cdot c} + \frac{ab\Delta c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

3. القسمة : ليكن لدينا $y = \frac{a}{b}$ ومنه $\log y = \log a - \log b$

بالمفاضلة (الإشتقاق) نجد : $\frac{dy}{y} = \frac{da}{a} - \frac{db}{b} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \Rightarrow \Delta y = y \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right)$

4. الأس : ليكن لدينا $y = a^n$ حيث n صحيح أو كسري .

لدينا $\log y = n \log a$ وبالإشتقاق (المفاضلة) نجد :

$$\frac{dy}{y} = n \cdot \frac{da}{a} \Rightarrow \Delta y = n y \frac{\Delta a}{a}$$

5. الحالة العامة : $y = ka^\alpha b^\beta c^\gamma$ حيث k ثابت و α, β, γ ثوابت صحيحة أو كسرية (موجبة سالبة أو

معدومة) .

$$\log y = \log k + \alpha \log a + \beta \log b + \gamma \log c \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \alpha \frac{da}{a} + \beta \frac{db}{b} + \gamma \frac{dc}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \alpha \frac{\Delta a}{a} + \beta \frac{\Delta b}{b} + \gamma \frac{\Delta c}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta y = y \left(\alpha \frac{\Delta a}{a} + \beta \frac{\Delta b}{b} + \gamma \frac{\Delta c}{c} \right)$$

1. 6. التدرج، التباعد والدوران في الإحداثيات الديكارتية :

تعريف : نسمي دالة $f(x, y, z)$ حقلا سلميا إذا كانت الدالة $f(x, y, z)$ سلمية وبالمثل نسمي $\vec{V}(x, y, z)$ حقلا شعاعيا إذا كانت الدالة $\vec{V}(x, y, z)$ شعاعية .

نعرف المؤثر الشعاعي التفاضلي نابلا (Nabla) : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ حيث :

حيث : $\frac{\partial}{\partial x}$ ، $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial z}$ مشتقات جزئية .

نعرف التدرج والتباعد والدوران بواسطة هذا المؤثر .

أ . التدرج (Le gradient) : إذا كانت $f(x, y, z)$ دالة سلمية فإن تدرجها عبارة عن مقدار شعاعي

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad } f} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$
 معرف بـ :

ب . التباعد (Divergence) : إذا كانت $\vec{V}(x, y, z)$ دالة شعاعية حيث $\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
 تباعد الدالة $\vec{V}$ هو عبارة عن قيمة سلمية .

ج . الدوران (Rotation) : إذا كان المقدار الشعاعي $\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ فإن دورانه

يكتب على الشكل :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

د. لابلاسيان (Laplacien) : يكتب على الشكل. $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\nabla})^2 = \nabla^2$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{\nabla})^2 (f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} : \text{لابلاسيان دالة سلمية} \quad \blacksquare$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{\nabla})^2 (f) = \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$$

إذن لابلاسيان دالة سلمية هو عبارة عن تباعد تدرج هذه الدالة .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) = (\vec{\nabla})^2 (\vec{v}) : \text{لابلاسيان دالة شعاعية} \quad \blacksquare$$

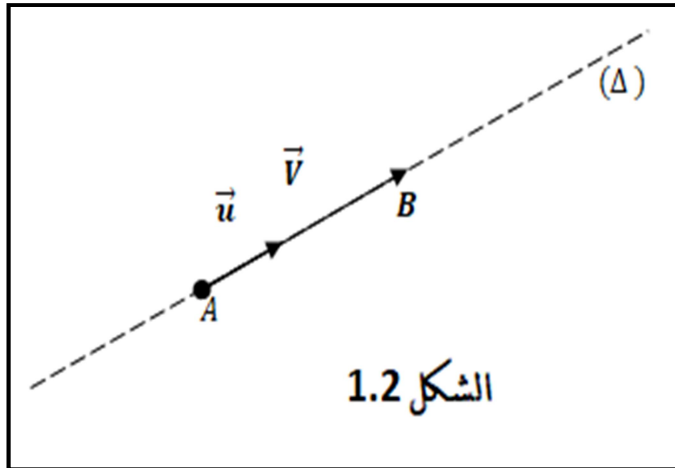
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\vec{\nabla})^2 (\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \text{div}(\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{v}))$$

إذن لابلاسيان دالة شعاعية هو عبارة عن تدرج تباعد هذه الدالة .

المحور الثاني: مبادئ في الحساب الشعاعي

1.2. تعاريف:

الشعاع هو قطعة مستقيمة $[AB]$ محمولة على مستقيم (AB) نختار لهذا الشعاع مبدأ A ونهاية B (الشكل 1.2)



يعرف الشعاع بـ:

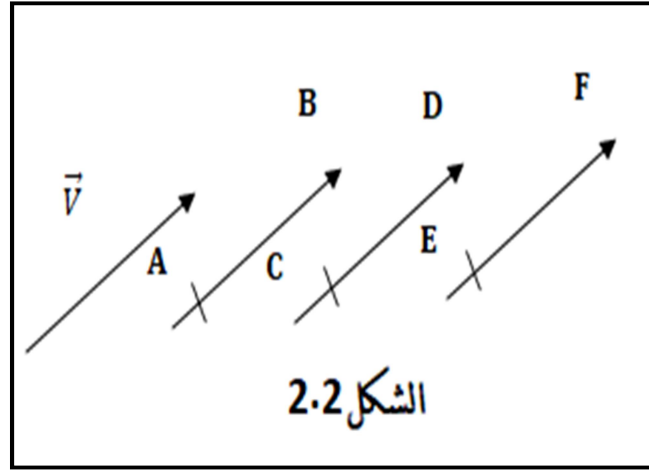
- مبدئه أو نقطة التطبيق .
- منحاه والذي هو منحنى المستقيم الحامل له .
- جهته وهي جهة متحرك يتحرك من المبدأ إلى النهاية .
- قياسه أو شدته: الطول الذي يفصل طرفي الشعاع .

الرموز: الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{V}$ ويرمز للقياس بـ $|\vec{V}| = |\overrightarrow{AB}| = V = AB$.

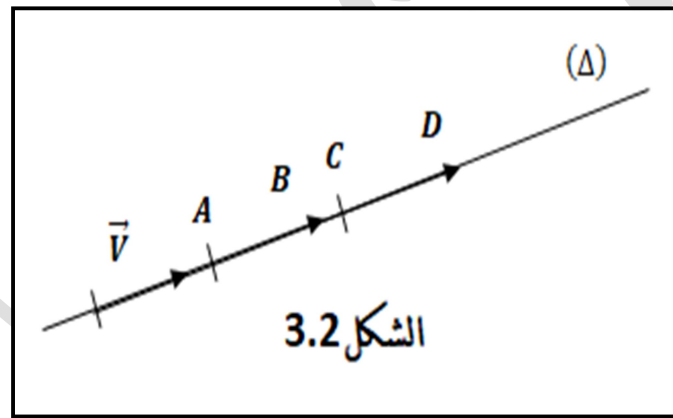
2.2. أصناف الأشعة: يمكن تصنيف الأشعة إلى ثلاثة أصناف .

★ الشعاع الحر: يحدد فيه فقط المنحنى والجهة والقياس ولا يحدد فيه المستقيم الحامل ولا نقطة التطبيق (الشكل 2.2)

مثال: الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ تمثل الشعاع $\vec{V}$ نفسه .



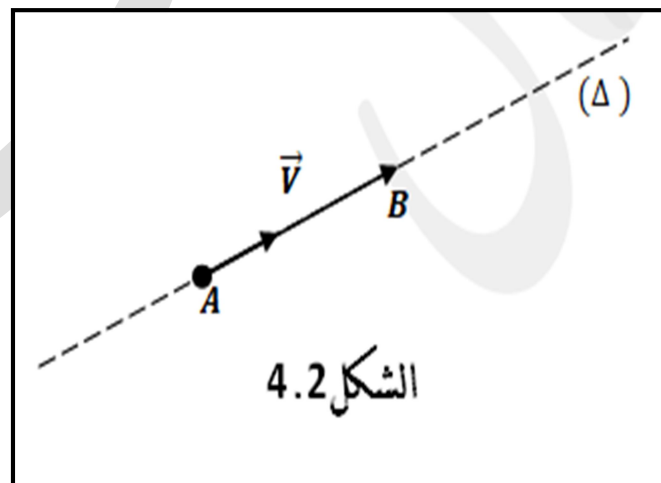
★ الشعاع المنزلق: يحدد فيه المستقيم الحامل (Δ) ولا تحدد فيه نقطة التطبيق (الشكل 2.3).



مثال: الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ تمثل الشعاع المنزلق $\vec{V}$.

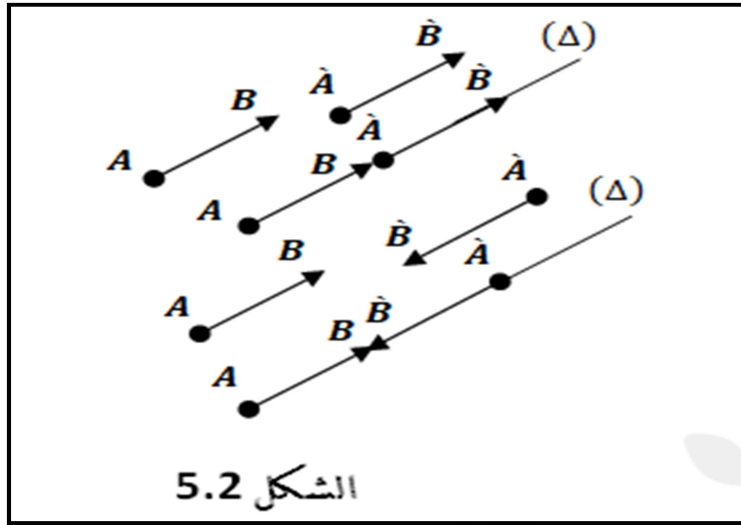
★ الشعاع المقيد: تغطي فيه كل العناصر التي تعرف الشعاع مع نقطة التطبيق.

مثال: شعاع $\vec{V}$ محددة فيه جميع شروط الشعاع (الشكل 4.2).



تنبيه: إذا كان لدينا شعاعان مقيدان ونقطتا تأثيرهما على التوالي A و $\hat{A}$ (الشكل 5.2).

يكون هذان الشعاعان متسويان: إذا كان لهما نفس الاتجاه والمنحى والطويلة
وهما يمثلان نفس الشعاع المطلق أو المنزلق إذا كان حاملهما هو المستقيم (Δ) .



■ يكون هذان الشعاعان متعاكسان: إذا كانا متعاكسان في الاتجاه ولهما نفس المنحى والطويلة. ونقول عنهما
أنهما متعاكسان تماما إذا كان حاملهما هو المستقيم (Δ) .

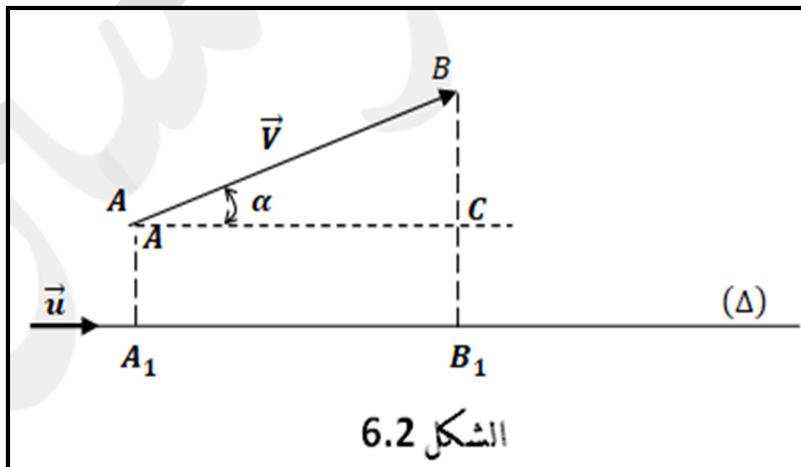
★ شعاع الوحدة: هو شعاع $\vec{U}$ قياسه يساوي الوحدة، فمثلا الشعاع $\vec{V}$ هو شعاع وحدته $\vec{U}$ يكونان مرتبطان خطيا

(متوازيان) حيث نكتب: $\vec{V} = V \vec{U}$

2. 3. الإسقاط العمودي لشعاع على محور: ليكن لدينا الشعاع $\vec{AB} = \vec{V}$ يحدد مسقطه A_1B_1 بالعمودين

المنزلقين من بدايته ونهايته (الشكل 6.2)

$$\text{Proj}_{(\Delta)}(\vec{V}) = A_1B_1 = |\vec{V}| \cdot \cos \alpha$$



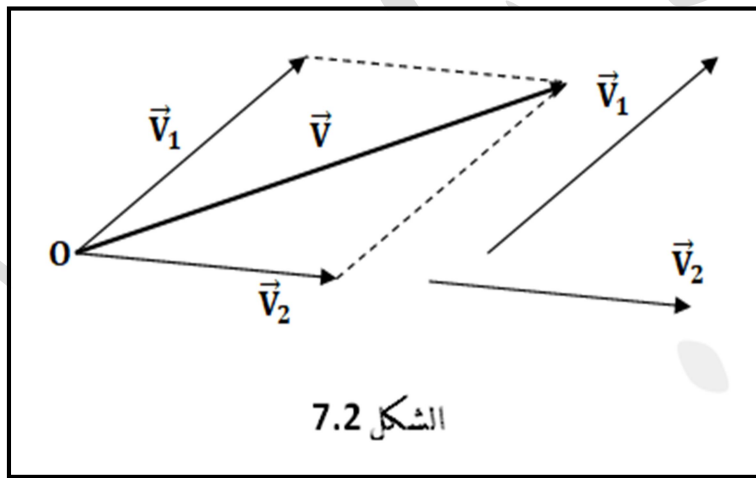
إذن مسقط شعاع على محور يساوي جداء قياس هذا الشعاع في تجب ($\cos$) الزاوية المحصورة بينه وبين المحور الذي أسقط عليه .

2. 4. عمليات أولية على الأشعة الحرة:

■ جمع الأشعة: مجموع شعاعين حرين (طلقين) $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ يعرف بالشعاع الحر $\vec{V}$ الذي يصل مبدأ الشعاع $\vec{V}_1$ ونهاية

الشعاع $\vec{V}_2$

(الشكل 7.2)

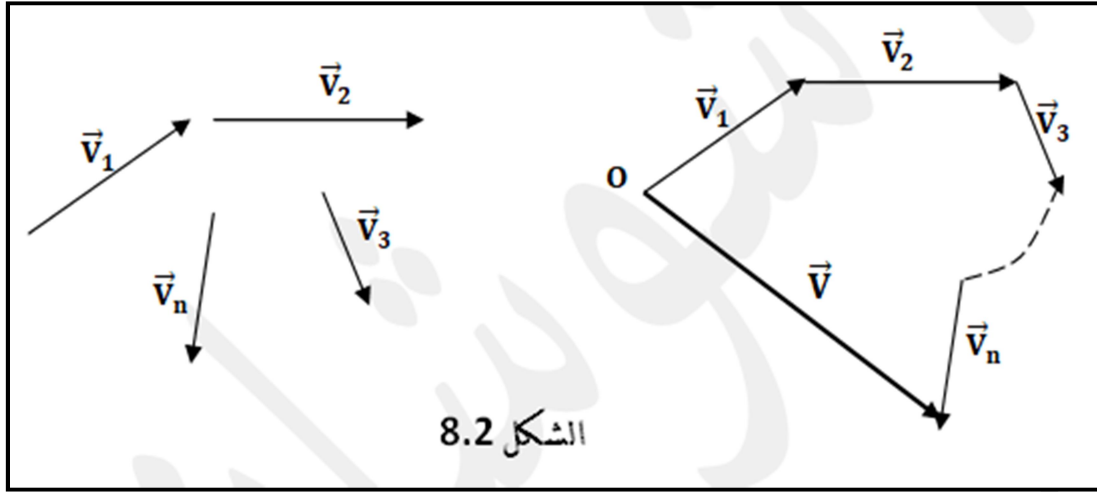


ونكتب : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

هذا التعريف يشكل قاعدة الجمع لتوازي الأضلاع .

الجمع الشعاعي تبديلي : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

■ جمع عدة أشعة حرة: نحصل على مضلع الأشعة (الشكل 8.2).

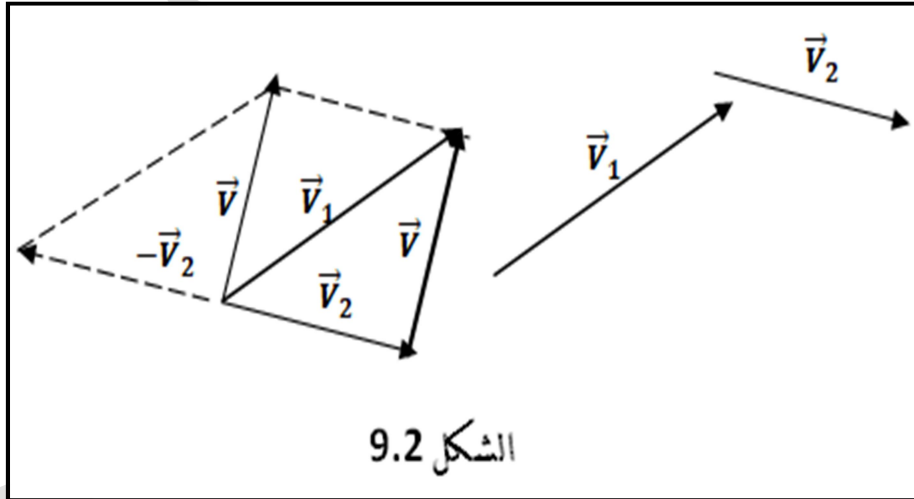


عملية جمع عدة أشعة حرة تجميعية:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 \dots \dots \dots + \vec{V}_n = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + (\vec{V}_3 + \vec{V}_4) \dots \dots \dots + \vec{V}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$$

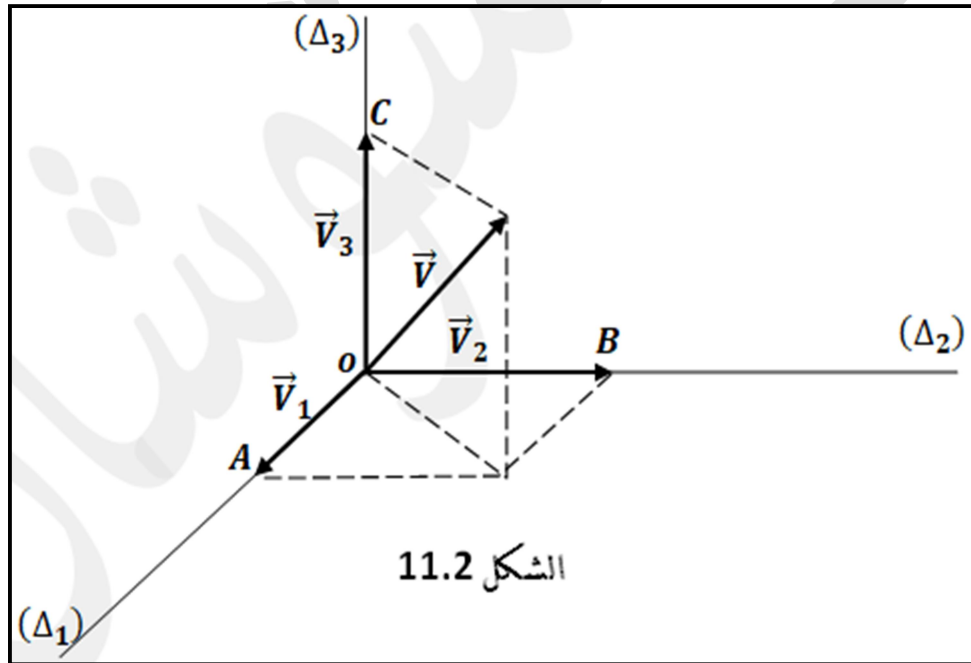
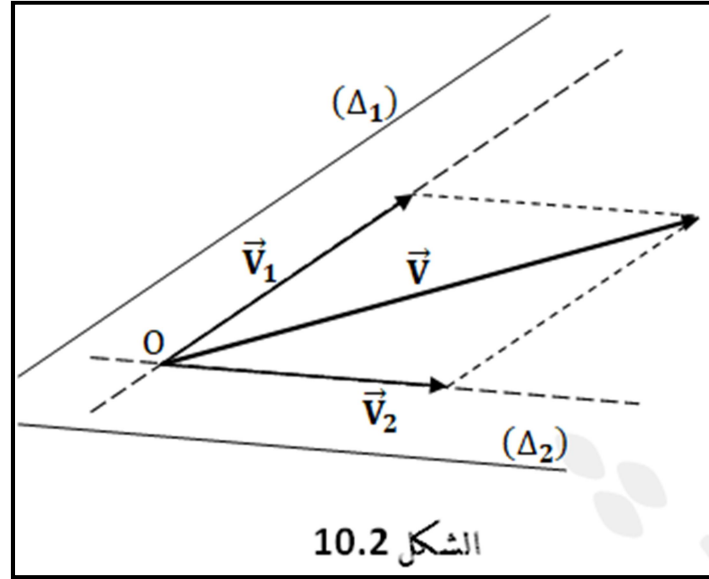
- الفرق بين شعاعين: الفرق بين شعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مأخوذين وفق هذا الترتيب هو الشعاع $\vec{V}$ الذي يجب إضافته للشعاع الثاني $\vec{V}_2$ للحصول على الشعاع الأول $\vec{V}_1$ (الشكل 9.2).



ونكتب: $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

- تحليل شعاع: يمكن وبطرق عدة تحليل شعاع إلى مجموع شعاعين أو أكثر.

لتحديد نروج من المركبات وبطريقة وحيدة يكفي أن نعطي منحيهما، أي نرسم محورين (Δ_1) و (Δ_2) في مستوي أو ثلاثة محاور (Δ_1) ، (Δ_2) و (Δ_3) في الفراغ (الفضاء). (الشكل 10.2 . و 11.2).



نسمي الأشعة $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ مركبات الشعاع $\vec{V}$.

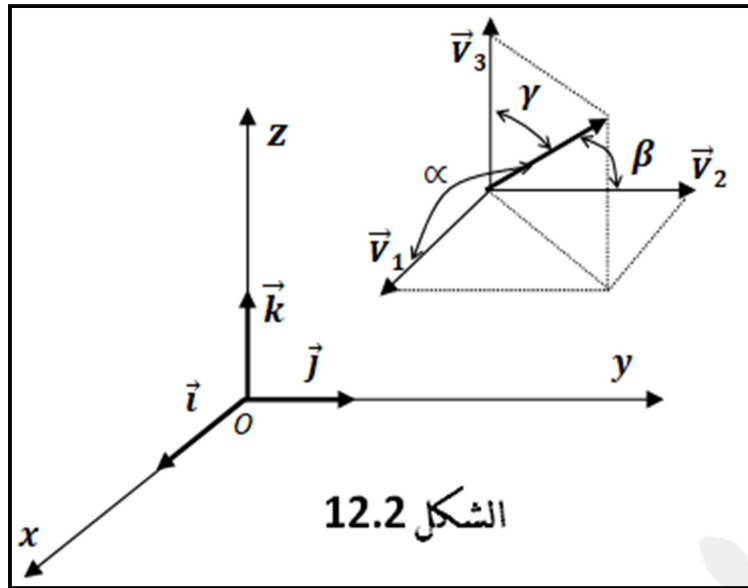
■ التمثيل التحليلي للأشعة:

تختصر كثيرا العمليات على الأشعة إذا استعملنا جملة محاور متعامدة OX ، OY ، OZ (الشكل 12.2).

تعرف إتجاهات المحاور المتعامدة OX ، OY ، OZ بأشعة الواحدة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$.

الشعاع $\vec{V}$ معرف تماما إذا علمنا مركباته $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ وفق المحاور OX, OY, OZ .

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$



يمكن أن نكتب وفق مناحي المحاور OX, OY, OZ العلاقات:

$$\vec{V}_1 = x\vec{i}, \vec{V}_2 = y\vec{j}, \vec{V}_3 = z\vec{k}$$

حيث x, y, z هي مساقط الشعاع $\vec{V}$ على جملة المحاور OX, OY, OZ .

$$x = V \cos \alpha, y = V \cos \beta, z = V \cos \gamma$$

والصيغة التحليلية للشعاع $\vec{V}$ تكتب على الشكل:

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = V \cos \alpha \vec{i} + V \cos \beta \vec{j} + V \cos \gamma \vec{k}$$

■ الصيغة التحليلية لمجموع شعاعي : لتعتبر عدة أشعة حرة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ معرفة بمساقطها

على المحاور الثلاثة OX, OY, OZ

$$\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1), \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2), \vec{V}_3(x_3, y_3, z_3), \dots, \vec{V}_n(x_n, y_n, z_n)$$

المجموع الشعاعي للأشعة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ هو الشعاع $\vec{V}$.

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots + \vec{V}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{i} + \sum_{i=1}^n y_i \vec{j} + \sum_{i=1}^n z_i \vec{k}$$

$$= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

إذن الصيغة التحليلية للشعاع $\vec{V}$ هي: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

حيث: $X = \sum_{i=1}^n x_i, Y = \sum_{i=1}^n y_i, Z = \sum_{i=1}^n z_i$

★ قياس الشعاع $\vec{V}$: $|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

■ التجيبات التوجيهية لمنحى الشعاع (نرواها التوجيه) هي:

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

حالة خاصة: في حالة مجموعة أشعة تنتمي لمستوي فإن:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$$

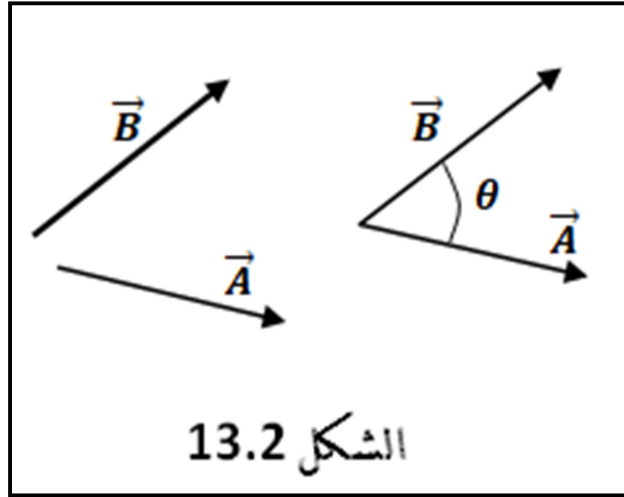
★ الصيغة التحليلية للشعاع المجموع هي: $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

والقياس هو: $|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

يعرف منحى الشعاع $\vec{V}$ بالزاوية التي يصنعها مع المحور Ox : $\tan \alpha = \frac{Y}{X}$

5.2. الجداء السلمي لشعاعين:

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يصنعان فيما بينهما الزاوية θ يساوي جداء قياسيهما في تجب الزاوية المحصورة بينهما (الشكل 13.2).



ونكتب: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\widehat{A, B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta$

خواص:

1- إذا كان الشعاعان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متوازيان فالجداء السلمي يساوي جداء قياسيهما $\vec{A} \cdot \vec{B} = \mp |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$

2- إذا كان الشعاعان متعامدان فالجداء السلمي $\vec{A} \cdot \vec{B}$ معدوم .

مثال: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

3- الجداء السلمي لشعاعين متساويين: $\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = A \cdot A = A^2$

مثال: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

4- الجداء السلمي لشعاعين تبديلي: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

5- الجداء السلمي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الأشعة $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

6- الجداء السلمي لشعاعين تجميعي بالنسبة لعملية الضرب بعدد سلمي .

$$m \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = m\vec{A} \cdot (\vec{B}) = \vec{A} \cdot (m\vec{B})$$

■ الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

لنعتبر شعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ معرفين بمساقطهم على المحاور ox, oy, oz .

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

بتطبيق الخواص السابقة نجد :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

■ الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

■ شرط تعامد شعاعين: يتعامد شعاعان إذا كان ناتج العبارة التحليلية لجدايهما السلمي معدوم .

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \text{ ونكتب:}$$

2.6. الجداء الشعاعي لشعاعين:

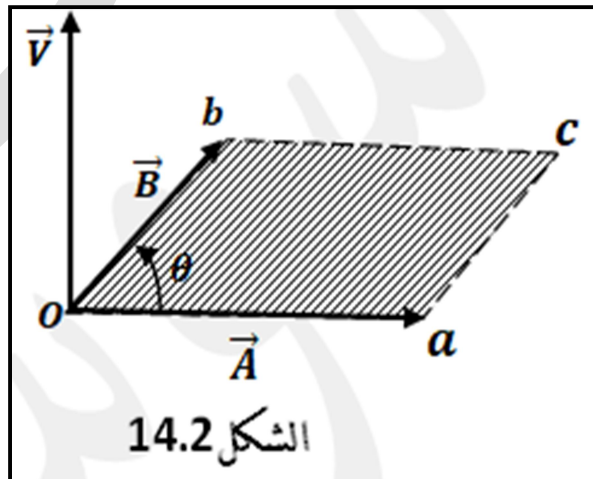
الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو شعاع $\vec{V}$ (الشكل 14.2) . حيث .

■ منحاها عمودي على الشعاعين في نفس الوقت أي أنه عمودي على المستوي المشكل بالشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

■ جهته: بحيث تشكل الثلاثية $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{V}$ ثلاثية مباشرة (طرديّة) .

■ قياسه يساوي $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta$ و θ هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

ونكتب: $\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B}$



خواص :

1- قياس الجداء الشعاعي يساوي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين .

2- إذا كان الشعاعان متوازيان فالجداء الشعاعي معدوم . $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

3- الجداء الشعاعي لشعاعين متساويين معدوم : $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$

مثال : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

4- الجداء الشعاعي ليس تبديلي : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

مثال : $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

5- الجداء الشعاعي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الأشعة .

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

6- الجداء الشعاعي لشعاعين تجميعي بالنسبة لعملية الضرب بعدد سلمي .

$$m. (\vec{A} \wedge \vec{B}) = m\vec{A} \wedge (\vec{B}) = \vec{A} \wedge (m\vec{B})$$

▪ الصيغة التحليلية للجداء الشعاعي .

إنطلاقاً من مساقط الأشعة على المحاور ox , oy , oz .

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad \text{حيث :}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

نحسب عن الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بـ :

$$\vec{V} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

وبالأخذ في الاعتبار الخواص السابقة نجد :

$$\vec{V} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

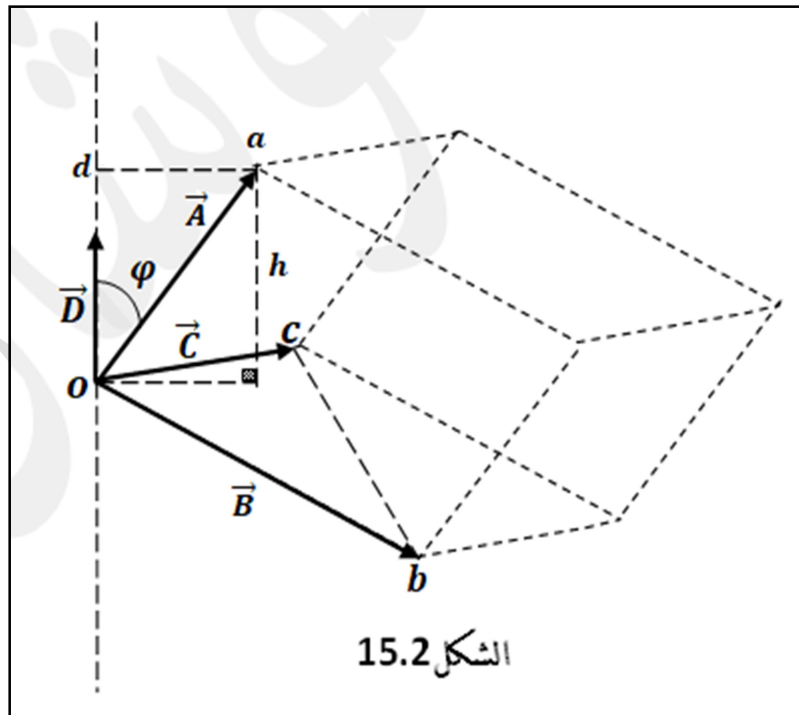
يمكن كتابة النتيجة السابقة إنطلاقاً من محدد المصفوفة التالية :

$$\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{V} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

7.2. الجداء المختلط:

الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$, و $\vec{C}$ هو الجداء السلمي للشعاع $\vec{A}$ في الجداء الشعاعي $\vec{B} \wedge \vec{C}$ (الشكل 15.2).



الشكل 15.2

ونكتب: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{D} = |\vec{A}| \cdot |\vec{D}| \cos \varphi$

, $(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{D}$, $|\vec{D}| = (\text{obc})$ ضعف مساحة المثلث $2 \cdot \Delta(\text{obc})$

$$h = |\vec{A}| \cos \varphi$$

إذن: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{D} = |\vec{A}| \cdot |\vec{D}| \cos \varphi = 2 \cdot \Delta(\text{obc}) \cdot h$

ومنه نستنتج أن الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$, و $\vec{C}$ يمثل حجم متوازي مستطيلات (الأوجه) المنشأ على الأشعة

الثلاثة (الشكل 15.2).

خواص:

- الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ معدوم: إما لأن شعاعين من الثلاثة متوازيان أو أن الأشعة الثلاثة تنتمي لنفس المستوى.

- الجداء المختلط يحافظ على نفس القيمة إذا أجرينا تبديلات دورية على الأشعة:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

وكذلك بإجراء تبديلات على العمليتين الجداء السلمي والجداء الشعاعي:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} \\ &= (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} \end{aligned}$$

- الصيغة التحليلية للجداء المختلط:

إبتداء من الصيغ التحليلية للأشعة:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

نحسب عن الجداء المختلط وفق شكل المحددة:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= A_x(B_y C_z - C_y B_z) - A_y(B_x C_z - C_x B_z) + A_z(B_x C_y - C_x B_y)$$

8.2 . الجداء الشعاعي المضاعف لثلاثة أشعة.

تعريف:

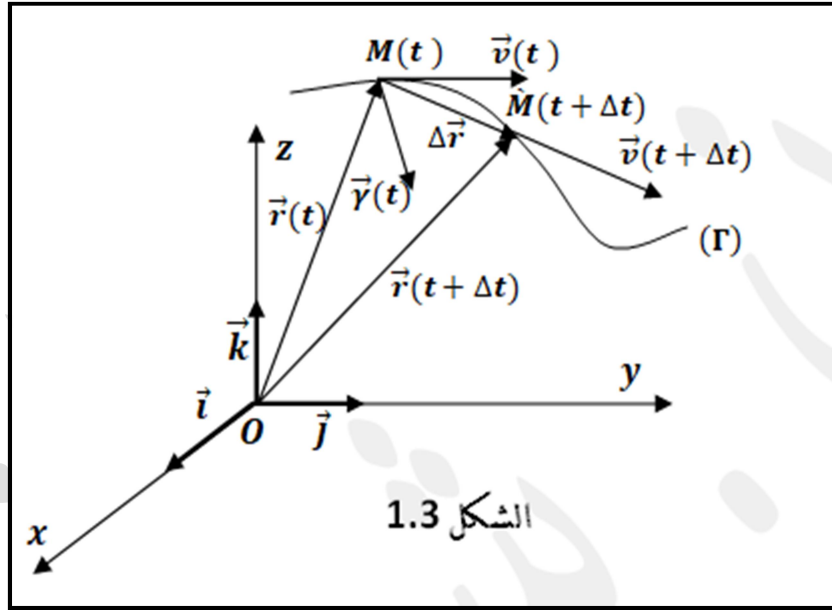
الجداء الشعاعي المضاعف لثلاثة أشعة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ هو الجداء الشعاعي للشعاع $\vec{A}$ في الجداء الشعاعي $(\vec{B} \wedge \vec{C})$

$$\vec{W} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{B} & \vec{C} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} & \vec{A} \cdot \vec{C} \end{vmatrix} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

المحور الثالث: علم الحركة (حركة نقطة مادية)

3. مقدمة: علم الحركة هو علم يهتم بدراسة حركة نقطة بالنسبة لمعلم دون التعرض لمسببات الحركة (أي دون التعرض للقوى التي جعلت الجسم يتحرك).

1.3. مسار نقطة: تكن الثلاثية OXZ :



يحدد موضع المتحرك M بالنسبة لجملة الإسناد بشعاع الموضع في اللحظة t حيث: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ (الشكل 1.3).

يمكن كتابة: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ حيث: $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ هي إحداثيات M في اللحظة t .

يسمى المنحني (الحل الهندسي لمجموعة المواضع المتتالية للمتحرك) مسار المتحرك بالنسبة لجملة الإسناد.

■ إذا كان المسار مستقيماً نقول عن حركة النقطة أنها مستقيمة.

■ إذا كان المسار منحنياً فحركة النقطة منحنية.

2.3. شعاع السرعة وشعاع التسارع: لتكن $M(t)$ موضع المتحرك في t اللحظة و $M(t + \Delta t)$ موضع المتحرك عند اللحظة $(t + \Delta t)$.

$$\overrightarrow{MM} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r} \quad \text{شعاع إنتقال (إنزاحة) النقطة :}$$

■ شعاع السرعة المتوسطة : شعاع السرعة المتوسطة لمتحرك بين لحظتين هو شعاع $\vec{V}_{moy}$ معرف كحاصل قسمة الشعاع $\overrightarrow{MM}$ على المجال الزمني Δt .

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{ونكتب:}$$

■ شعاع السرعة الآنية : شعاع السرعة الآنية لمتحرك هي نهاية شعاع السرعة المتوسطة لما يؤول المجال الزمني Δt إلى الصفر.

ونكتب:

$$\vec{V}_{ins} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{V}_{moy}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{MM}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)$$

عندما $M \rightarrow M$ ينتهي الوتر MM نحو المماس لـ (Γ) عند M والشعاع $\vec{V}$ عندئذ يكون مماسيا للمسار.

نتيجة: شعاع السرعة لنقطة يساوي مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$$\vec{V}_{ins} = \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \text{ومنه:}$$

■ شعاع التسارع المتوسط : شعاع التسارع المتوسط لمتحرك بين لحظتين هو شعاع $\vec{V}_{moy}$ معرف كحاصل قسمة الشعاع

$$\Delta \vec{V} = (\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)) \quad \text{على المجال الزمني } \Delta t.$$

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} \quad \text{ونكتب:}$$

▪ شعاع التسارع الآني : شعاع التسارع الآني لتحرك هي نهاية شعاع التسارع المتوسط لما يؤول المجال الزمني Δt إلى الصفر .

ونكتب : $\vec{\gamma}_{ins} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{\gamma}_{moy}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} \right)$

نتيجة : شعاع التسارع لنقطة يساوي مشتق شعاع السرعة أو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن

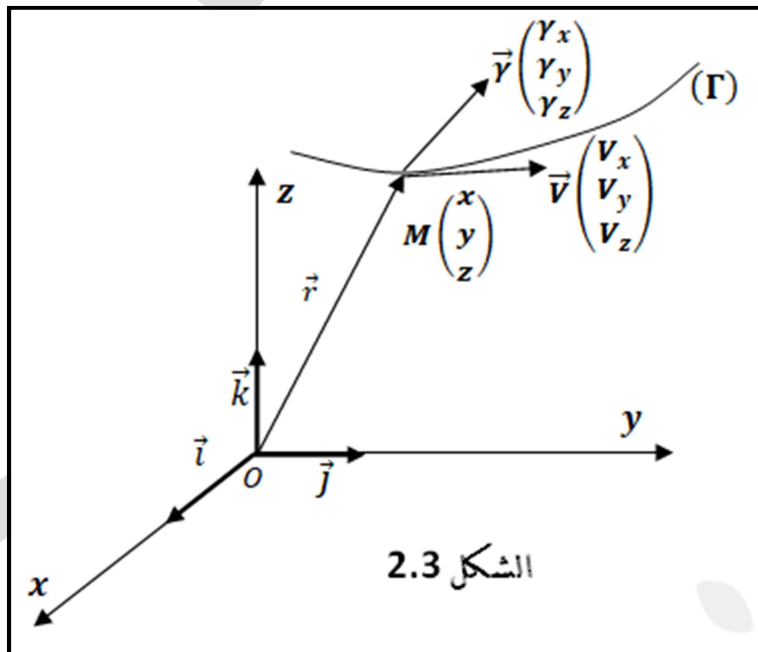
$$\vec{\gamma} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

ملاحظة: التسارع الكلي $\vec{\gamma}$ يكون دوما متجها نحو تقعر المنحني .

3.3. شعاع الموضع والسرعة والتسارع في مختلف أنواع الإحداثيات:

أ. شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات الديكارتية: يحدد موضع النقطة بإحداثياتها التابعة للزمن . $x(t), y(t), z(t)$.

هذه المعادلات تمثل المعادلات الوسيطة للمسار (Γ) للنقطة المتحركة (الشكل 2.3).



▪ شعاع الموضع: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

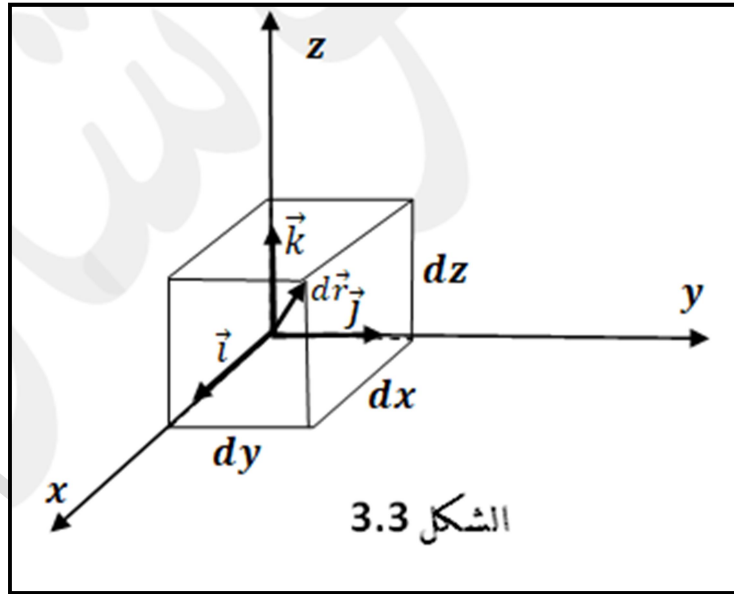
▪ شعاع السرعة: $\dot{\vec{r}} = \overrightarrow{OM} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$

إذن مركبات شعاع السرعة وفق المحاور هي: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \text{ القياس:}$$

تنبيه: يمكن حساب شعاع السرعة مباشرة انطلاقاً من شعاع الانتقال العنصري (الشكل 3.3). حيث:

$$d\vec{r} = d\vec{OM} = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k}$$



الانتقال العنصري $d\vec{r}$ خلال مجال نرمي صغير جداً (نرمي عنصري) ومنه:

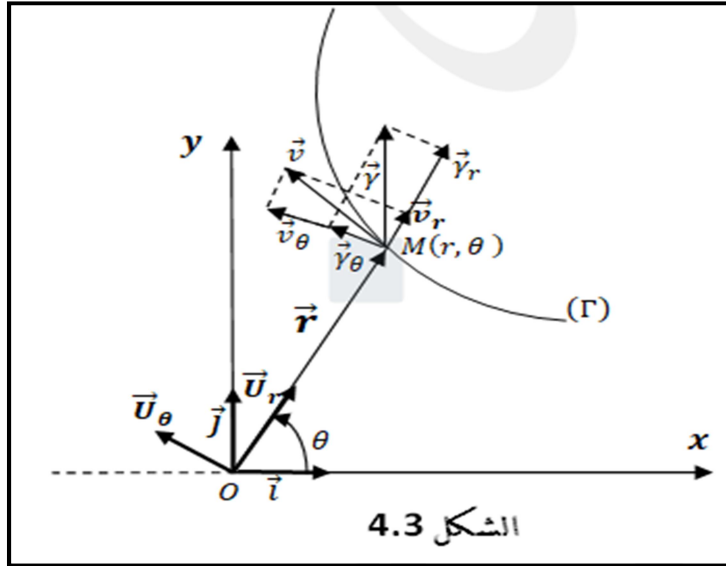
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}(t)\vec{i} + \frac{dy}{dt}(t)\vec{j} + \frac{dz}{dt}(t)\vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\vec{k} \quad \blacksquare \text{ شعاع التسارع:}$$

إذن مركبات التسارع وفق المحاور هي: $\dot{V}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\dot{V}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, $\dot{V}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \text{ القياس:}$$

ب. شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية:



لتكن 0 القطب وOX المحور القطبي .

يحدد موضع النقطة في الـ؛ دائيات القطبية بـ:

▪ $r = r(t)$ نصف القطر الشعاعي .

▪ $\theta = \theta(t)$ الزاوية القطبية (الشكل 4.3) .

باستعمال أشعة الواحدة $\vec{U}_r$ (يوأري $\vec{r}$) و $\vec{U}_\theta$ (عمودي على $\vec{U}_r$) يمكن كتابة:

$$\vec{U}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{U}_\theta = d\vec{U}_r / d\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

كما يمكن إيجاد $\vec{U}_\theta$ بإضافة $\frac{\pi}{2}$ إلى θ في $\vec{U}_r$.

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_r \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos(\theta + \pi/2) \vec{i} + \sin(\theta + \pi/2) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

نشتق أشعة الواحدة $\vec{U}_r$ و $\vec{U}_\theta$ بالنسبة للزمن فنجد:

$$\dot{\vec{U}}_r = \frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} \vec{U}_r$$

▪ شعاع الموضع: $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$

▪ شعاع السرعة:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\vec{U}}_r = \dot{r}\vec{U}_r + r(\dot{\theta}\vec{U}_\theta) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta$$

$$\vec{V} = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta$$

إذن:

$$\begin{cases} V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ V_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

والقياس :

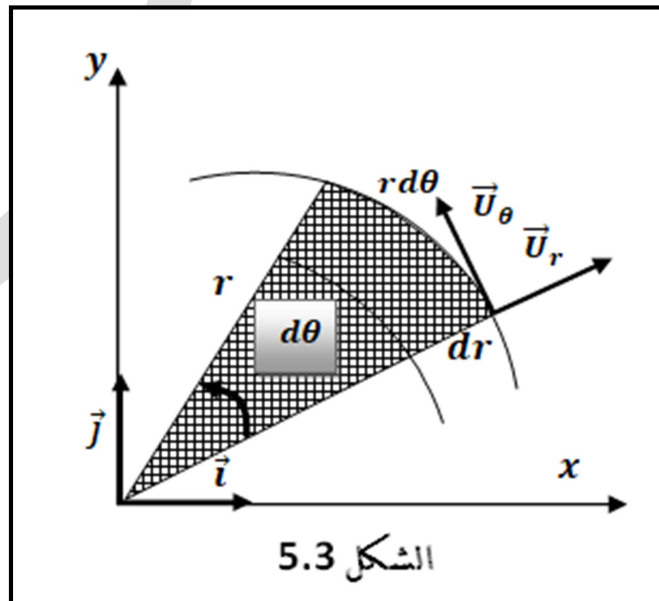
تنبیه: يمكن حساب شعاع السرعة مباشرة انطلاقاً من شعاع الانتقال العنصري $d\vec{r}$ وهذا خلال زمن عنصري dt .

(الشكل 5.3)

$$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + r d\theta\vec{U}_\theta$$

وبالقسمة على dt نجد:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta$$



▪ شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{U}_r + \dot{r} \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{U}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$$

$$= \ddot{r} \vec{U}_r + \dot{r} \dot{\vec{U}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{U}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{U}}_\theta$$

$$= \ddot{r} \vec{U}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{U}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{U}_r$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{U}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{U}_\theta = \gamma_r \vec{U}_r + \gamma_\theta \vec{U}_\theta$$

$$\gamma_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2), \gamma_\theta = (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \quad \text{إذن مركبات التسارع هي:}$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})^2} \quad \text{القياس:}$$

▪ العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية:

$$\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{U}_r = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \quad \text{لدينا شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية هو:}$$

$$\vec{r} = \vec{OM} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \quad \text{وفي الإحداثيات الديكارتية هو:}$$

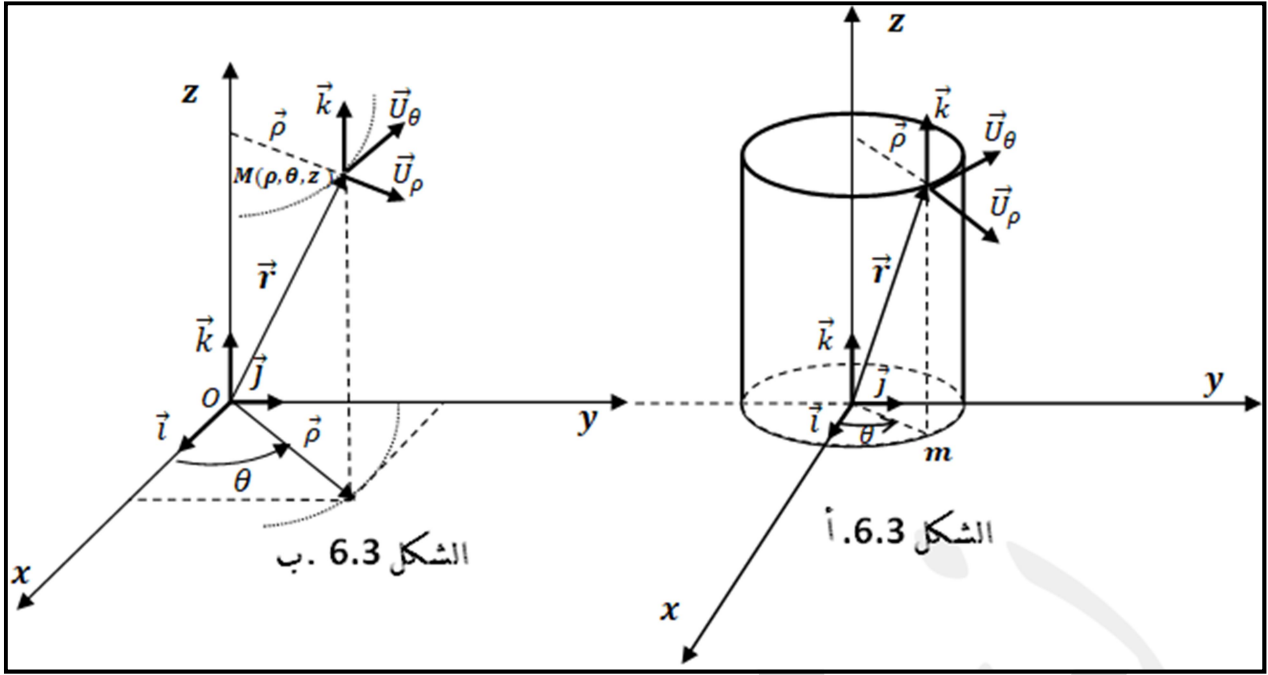
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \dots \dots (1) \\ y = r \sin \theta \dots \dots (2) \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{بالتربيع والجمع نجد:}$$

$$\text{وتقسمة العلاقة 2/ العلاقة 1 نجد: } \text{tng} \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{arctng} \left(\frac{y}{x} \right)$$

ج . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات الأسطوانية : يحدد موضع النقطة في الإحداثيات

الأسطوانية بـ (ρ, θ, z) وفق أشعة الواحدة $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ (الشكل 6.3 أ و 6.3 ب).



باستعمال أشعة الوحدة $\vec{U}_\rho$ (يوانري $\vec{\rho}$) ، $\vec{U}_\theta$ و $\vec{k}$ يمكن كتابة:

$$\vec{U}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{U}_\theta = d\vec{U}_\rho / d\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

كما يمكن إيجاد $\vec{U}_\theta$ بإضافة $\frac{\pi}{2}$ إلى θ في $\vec{U}_\rho$.

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_\rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos(\theta + \pi/2) \vec{i} + \sin(\theta + \pi/2) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{k} = \vec{k}$$

نشتق أشعة الوحدة $\vec{U}_\rho$ و $\vec{U}_\theta$ بالنسبة للزمن فنجد:

$$\dot{\vec{U}}_\rho = \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} \vec{U}_\rho$$

▪ شعاع الموضع: $\vec{OM} = \vec{r} = \rho \vec{U}_\rho + z \vec{k}$

▪ شعاع السرعة: $\vec{V} = \dot{\vec{OM}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\vec{U}}_\rho + \dot{z} \vec{k}$

$$= \dot{\rho} \vec{U}_r + \rho(\dot{\theta} \vec{U}_\theta) + \dot{z} \vec{k} = \dot{\rho} \vec{U}_r + \rho \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$\vec{V} = V_\rho \vec{U}_\rho + V_\theta \vec{U}_\theta + V_z \vec{k}$$

إذن:

$$\begin{cases} V_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{cases}$$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_\rho^2 + V_z^2 + V_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + (\rho \dot{\theta})^2} \quad \text{والقياس:}$$

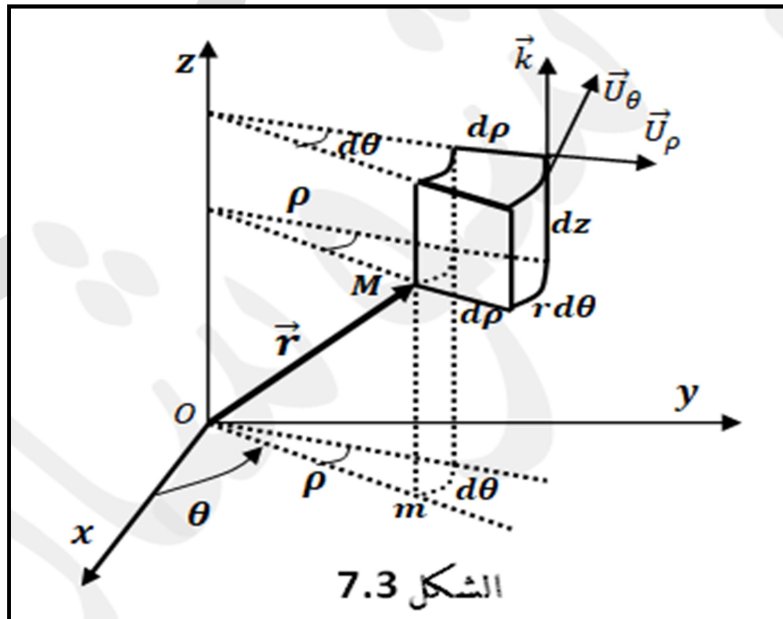
تنبيه: يمكن حساب شعاع السرعة مباشرة انطلاقاً من شعاع الانتقال العنصري $d\vec{r}$ وهذا خلال نرمن عنصري dt (الشكل 7.3).

$$d\vec{r} = d\rho \vec{U}_\rho + \rho d\theta \vec{U}_\theta + dz \vec{k}$$

وبالقسمة على dt نجد:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{U}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{\rho} \vec{U}_r + \rho \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$= V_\rho \vec{U}_\rho + V_\theta \vec{U}_\theta + V_z \vec{k}$$



▪ شعاع التسارع :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k} \\ &= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{U}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{U}}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \\ &= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho + \ddot{z}\vec{k} \\ \vec{\gamma} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{U}_\theta + \ddot{z}\vec{k} = \gamma_\rho\vec{U}_\rho + \gamma_\theta\vec{U}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \\ \gamma_\rho &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2), \gamma_\theta = (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}), \gamma_z = \ddot{z} : \text{إذن مركبات التسارع هي:}\end{aligned}$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + \ddot{z}^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2} : \text{القياس:}$$

▪ العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية:

لدينا شعاع الموضع في الإحداثيات الأسطوانية هو:

$$\vec{OM} = \vec{r} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k} = \rho(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + z\vec{k}$$

وفي الإحداثيات الديكارتية هو:

$$\vec{r} = \vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

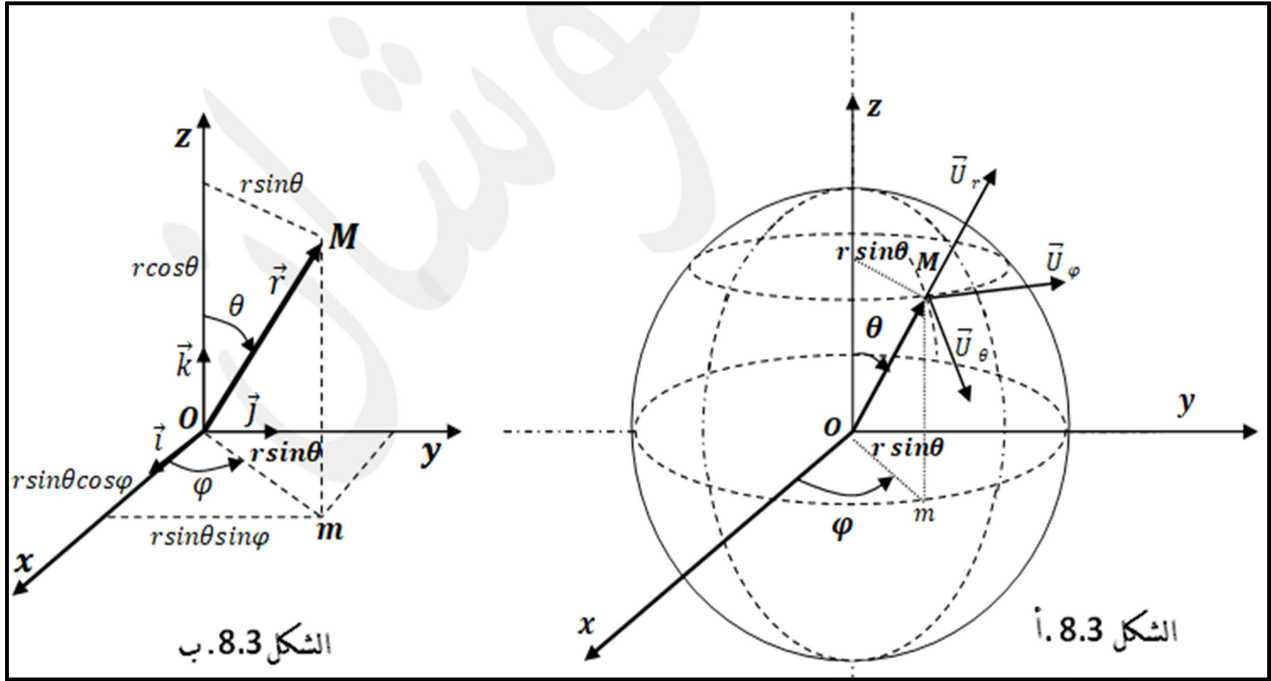
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \dots\dots (1) \\ y = \rho\sin\theta \dots\dots (2) \\ z = z \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{بالمطابقة نجد:}$$

بالتربيع كل من 1 و 2 والجمع نجد: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

وبقسمة العلاقة 2 / العلاقة 1 نجد: $\text{tng}\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{arctng}\left(\frac{y}{x}\right)$

د . شعاع الموضع والسرعة والتسارع في الإحداثيات الكروية: يحدد موضع النقطة M في الإحداثيات

الكروية بـ (r, θ, φ) وفق أشعة الواحدة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ (الشكل 8.3.أ و 8.3.ب)



■ شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$
ومركبات هذا الشعاع في الإحداثيات الديكارتية هي:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})$$

$$\vec{U}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad \text{بالمطابقة نجد أن:}$$

حساب $\vec{U}_\theta$:

■ الطريقة الأولى: نشتق $\vec{U}_r$ بالنسبة لـ θ فنجد:

$$\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

■ الطريقة الثانية: بإضافة $\frac{\pi}{2}$ إلى θ في $\vec{U}_r$ فنجد:

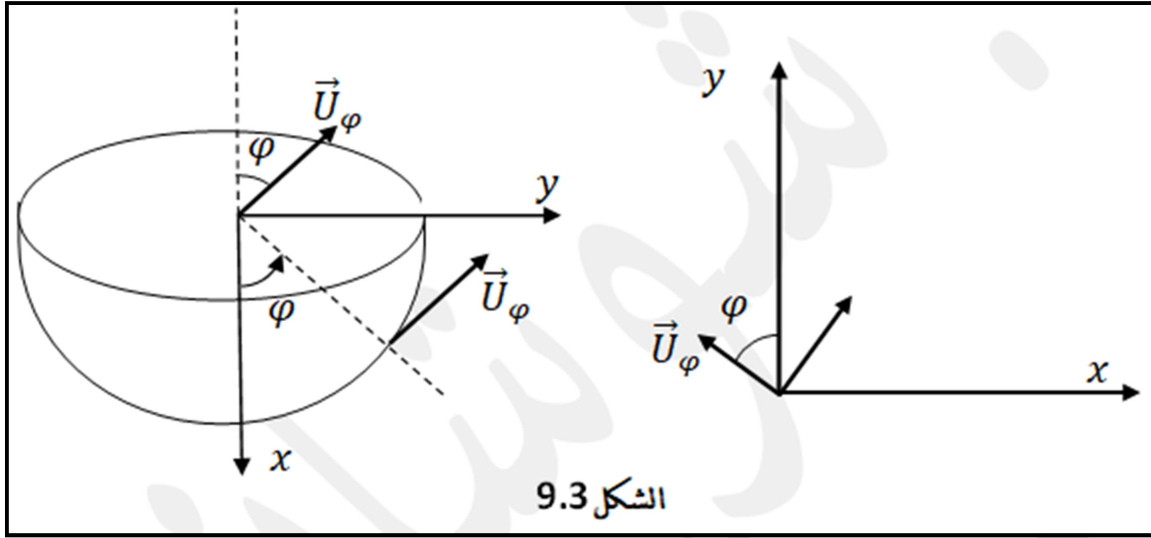
$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_r \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \varphi \vec{i} + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \sin \varphi \vec{j} + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \vec{k}$$

$$\vec{U}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

حساب $\vec{U}_\varphi$:

- الطريقة الأولى : يمكن حسابه هندسيا مباشرة مثلما نرى في الإحداثيات القطبية . (الشكل 9.3).



إذن: $\vec{U}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$

- الطريقة الثانية : $\vec{U}_r$ ، $\vec{U}_\theta$ و $\vec{U}_\phi$ تشكل ثلاثية مباشرة ومنه .

$$\vec{U}_\phi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{U}_\phi = -(\sin \theta^2 \sin \phi + \cos \theta^2 \sin \phi) \vec{i} + (\sin \theta^2 \cos \phi + \cos \theta^2 \cos \phi) \vec{j}$$

$$+ (\sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi) \vec{k}$$

$$\vec{U}_\phi = -\sin \phi (\sin \theta^2 + \cos \theta^2) \vec{i} + \cos \phi (\sin \theta^2 + \cos \theta^2) \vec{j}$$

$$\vec{U}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$

$$\vec{U}_\phi = \frac{1}{\cos \theta} \frac{d\vec{U}_\theta}{d\phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \quad \text{الطريقة الثالثة :}$$

$$\vec{U}_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\vec{U}_r}{d\phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \quad \text{الطريقة الرابعة :}$$

باشتقاق $\vec{U}_r$ ، $\vec{U}_\theta$ و $\vec{U}_\phi$ بالنسبة للزمن نجد :

مشتق $\vec{U}_r$ بالنسبة للزمن :

$$\vec{U}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\vec{U}}_r = -(-\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}$$

$$\dot{\vec{U}}_r = \dot{\theta} (\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}) + \dot{\varphi} \sin \theta (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\dot{\vec{U}}_r = \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{U}_\varphi$$

$$\vec{U}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad \text{مشتق } \vec{U}_\theta \text{ بالنسبة للزمن : لدينا}$$

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \dot{\vec{U}}_\theta = -(\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \vec{i}$$

$$+ (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \cos \theta \vec{k}$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta} (\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) + \dot{\varphi} \cos \theta (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{U}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{U}_\varphi$$

$$\vec{U}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \quad \text{مشتق } \vec{U}_\varphi \text{ بالنسبة للزمن : لدينا}$$

$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j}$$

لدينا :

$$\begin{vmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{pmatrix} \quad \text{باستعمال متقول المصفوفة A نجد :}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_r \\ \vec{U}_\theta \\ \vec{U}_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{i} = \sin\theta \cos\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{U}_\theta - \sin\varphi \vec{U}_\varphi \quad \text{ومنهُ :}$$

$$\vec{j} = \sin\theta \sin\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{U}_\theta + \cos\varphi \vec{U}_\varphi$$

$$\vec{k} = \cos\theta \vec{U}_r - \sin\theta \vec{U}_\theta$$

نعوض قيمة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ في عبارة $\dot{\vec{U}}_\varphi$ فنجد :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} &= \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos\varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin\varphi \vec{j} = \\ &= -\dot{\varphi} \cos\varphi (\sin\theta \cos\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{U}_\theta - \sin\varphi \vec{U}_\varphi) \\ &\quad - \dot{\varphi} \sin\varphi (\sin\theta \sin\varphi \vec{U}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{U}_\theta + \cos\varphi \vec{U}_\varphi) \\ &= -\dot{\varphi} \sin\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \vec{U}_r - \dot{\varphi} \cos\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \vec{U}_\theta \\ &\quad \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_r - \dot{\varphi} \cos\theta \vec{U}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{U}_r \quad \blacksquare \text{ شعاع الموضع :}$$

$$\quad \blacksquare \text{ شعاع السرعة :}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{U}}_r = \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_\varphi \\ \dot{\vec{U}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{U}_r + \dot{\varphi} \cos\theta \vec{U}_\varphi \\ \dot{\vec{U}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_r - \dot{\varphi} \cos\theta \vec{U}_\theta \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{U}_r + r \dot{\vec{U}}_r = \dot{r} \vec{U}_r + r(\dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \vec{U}_\varphi)$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r \sin \theta)\dot{\phi} \vec{U}_\phi$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta + V_\phi\vec{U}_\phi$$

$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \\ V_\phi = (r \sin \theta)\dot{\phi} \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 + ((r \sin \theta)\dot{\phi})^2} \quad \text{ومنه القياس:}$$

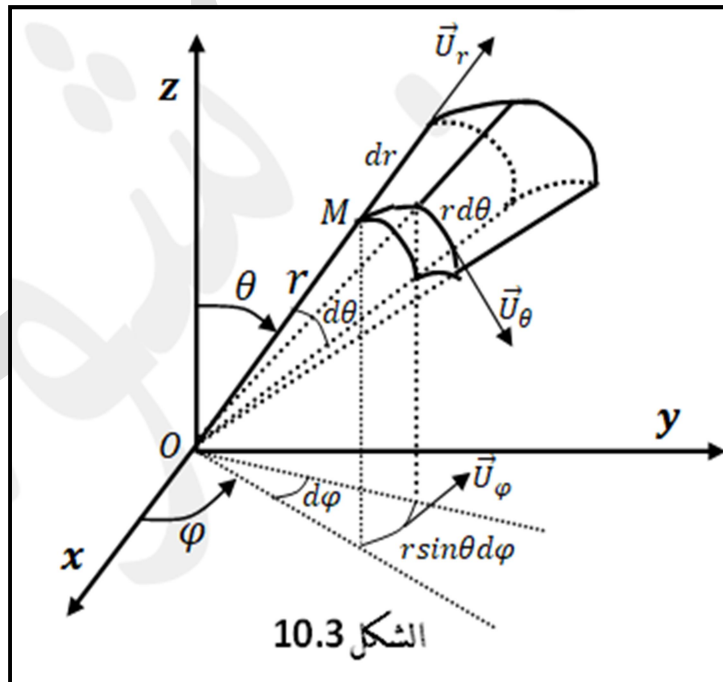
تنبيه : يمكن حساب شعاع السرعة مباشرة انطلاقاً من شعاع الانتقال العنصري $d\vec{r}$ خلال مجال زمني عنصري dt (الشكل 10.3).

$$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r \sin \theta) d\phi \vec{U}_\phi : \text{شعاع الانتقال العنصري}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + (r \sin \theta) \frac{d\phi}{dt}\vec{U}_\phi : \text{بالقسمة على } d$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r \sin \theta)\dot{\phi} \vec{U}_\phi$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta + V_\phi\vec{U}_\phi$$



▪ شعاع التسارع:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} = \dot{\vec{V}} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\vec{U}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{U}}_\theta + (\dot{r}\sin\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi \\ + (r\dot{\theta}\cos\theta)\dot{\phi}\vec{U}_\phi + (r\sin\theta)\dot{\phi}\dot{\vec{U}}_\phi + (r\sin\theta)\dot{\phi}\dot{\vec{U}}_\phi \end{aligned}$$

نعوض كل من $\vec{U}_r$ ، $\vec{U}_\theta$ و $\vec{U}_\phi$ قيمة في عبارة $\vec{\gamma}$ فنجد:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{U}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{U}_\theta \\ + (r\dot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{U}_\phi \end{aligned}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_r\vec{U}_r + \gamma_\theta\vec{U}_\theta + \gamma_\phi\vec{U}_\phi$$

$$\begin{cases} \gamma_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) \\ \gamma_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) \\ \gamma_\phi = (r\dot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) \end{cases}$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_\phi^2}$$

القياس:

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)^2 + (r\dot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)^2}$$

▪ العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الكروية:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \text{شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية:}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r \quad \text{شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية:}$$

ومركباته في الإحداثيات الديكارتية:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\vec{j} + \cos\theta\vec{k})$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد :}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ((\sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \cos^2 \theta))$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

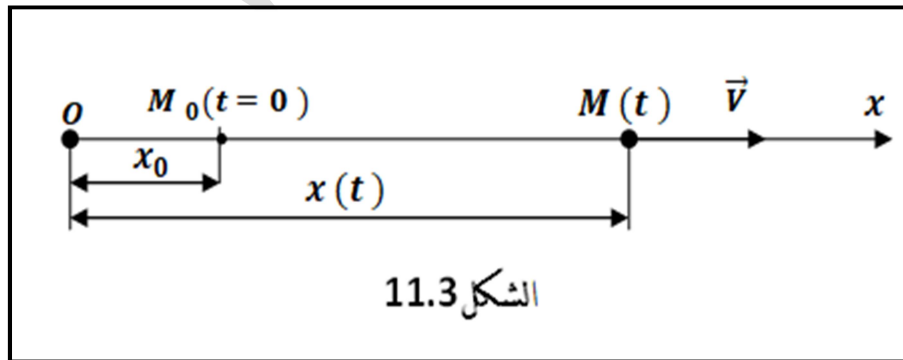
$$\frac{y}{x} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

4.3. دراسة بعض أنواع الحركات :

أ. الحركة المستقيمة المنتظمة :

تعريف : يحدد موضع المتحرك M في اللحظة t بـ $x = OM = x(t)$ (الشكل 11.3). وتسمى هذه المعادلة : المعادلة الزمنية للحركة .



تعريف : يتحرك متحرك حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مساره مستقيما ومعادلاته الزمنية دالة من الدرجة الأولى بدلالة الزمن .

الحركة مستقيمة منتظمة إذن : $V = \text{cste}, \gamma = 0$

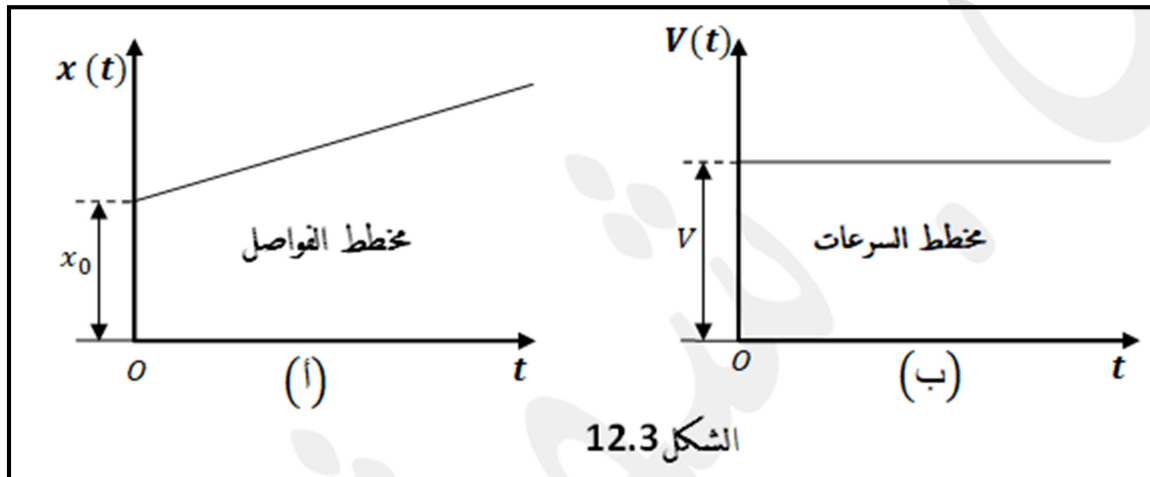
$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V dt$$

الشروط الابتدائية: $t = 0 \rightarrow x(t = 0) = x_0$

بالمكاملة: $\int_{x_0}^x dx = V \int_0^t dt \Rightarrow x = V t + x_0$

ومنه المعادلة الزمنية للحركة هي: $x = V t + x_0$

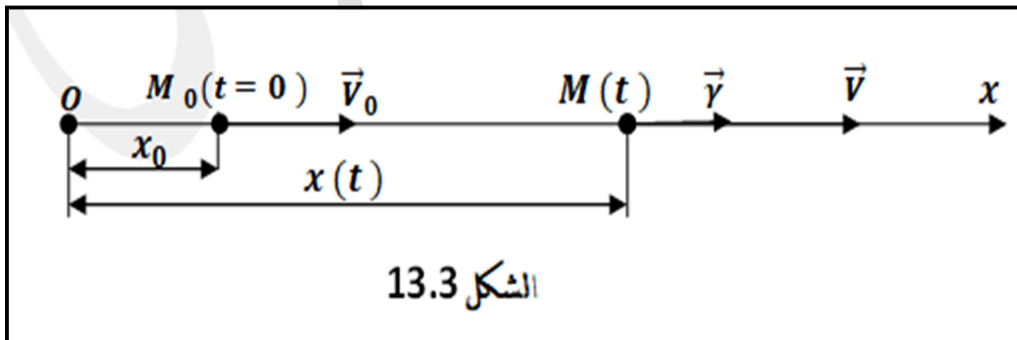
■ مخطط الفواصل ومخطط السرعات: (الشكل 12.3).



ب. الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:

تعريف: يتحرك متحرك حركة مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان مساره مستقيماً ومعادلاته الزمنية دالة من الدرجة

الثانية بدلالة الزمن وتسارع المتحرك $(\gamma = \text{cste})$ (الشكل 13.3).



لدينا: $\gamma = \text{cste}$

$$\gamma = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = \gamma dt$$

الشروط الابتدائية: $t = 0 \rightarrow x(t = 0) = x_0 \rightarrow V(t = 0) = V_0$

$$\int_{V_0}^V dV = \gamma \int_0^t dt \Rightarrow [V]_{V_0}^V = \gamma [t]_0^t \quad \text{بالمكاملة نجد :}$$

$$V = \gamma t + V_0 \quad \text{ومنه :}$$

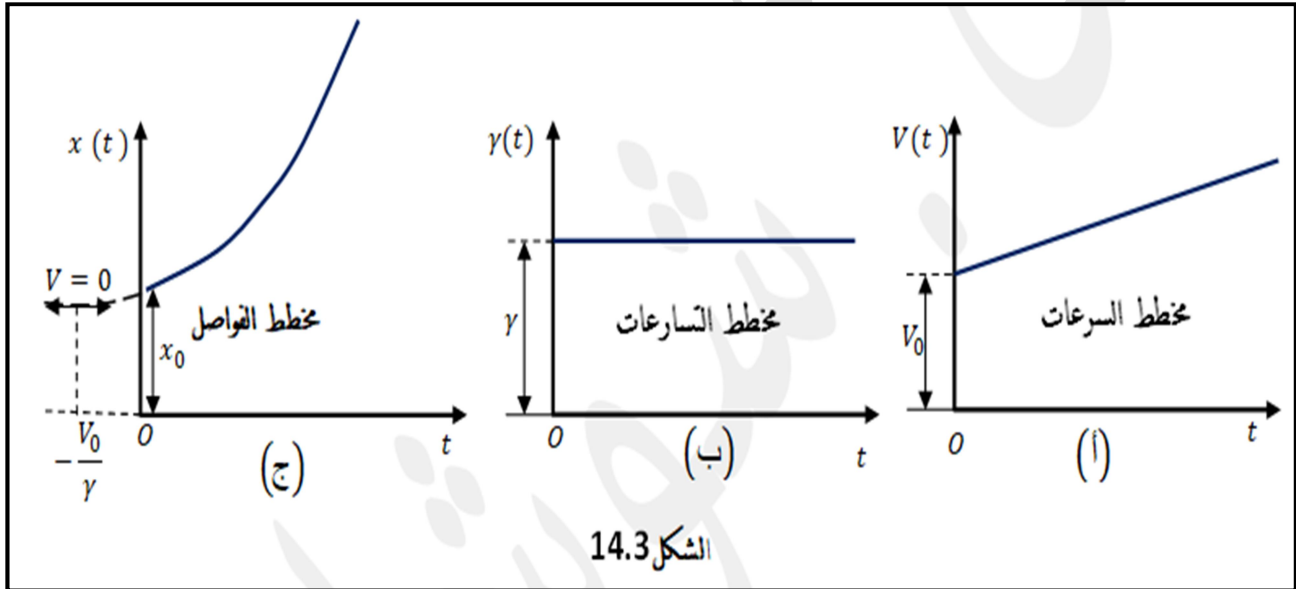
$$V = \frac{dx}{dt} = \gamma t + V_0 \Rightarrow dx = \gamma t dt + V_0 dt \quad \text{لدينا كذلك :}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \gamma \int_0^t t dt + V_0 \int_0^t dt \Leftrightarrow [x]_{x_0}^x = \frac{1}{2} \gamma [t^2]_0^t + V_0 [t]_0^t \quad \text{بالمكاملة نجد :}$$

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t + x_0 \quad \text{ومنه :}$$

وهي المعادلة الزمنية للحركة

■ مخطط الفواصل والسرعات والتسارعات : (الشكل 14.3) .



تنبيه: نقول عن الحركة أنها متسارعة أو متباطئة إذا كان :

■ متسارعة : (السرعة $\vec{V}$ تتزايد بالقيمة المطلقة) .

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{V} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma > 0, V > 0 \\ \gamma < 0, V < 0 \end{cases} \quad \text{أو}$$

■ متباطئة : (السرعة $\vec{V}$ تتناقص بالقيمة المطلقة) .

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{V} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma > 0, V < 0 \\ \gamma < 0, V > 0 \end{cases} \quad \text{أو}$$

■ العلاقة بين المسافة المقطوعة والسرعة في زمن معطى :

$$\begin{cases} V = \gamma t + V_0 \\ x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t + x_0 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$t = \frac{V - V_0}{\gamma} \quad \text{لدينا :}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{V - V_0}{\gamma} \right)^2 + V_0 \left(\frac{V - V_0}{\gamma} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$V^2 - V_0^2 = 2\gamma(x - x_0) \quad \text{بعد النشر نجد :}$$

حالة خاصة : إذا كانت الشروط الابتدائية معدومة ($V_0 = 0, x_0 = 0$)

$$V = \sqrt{2\gamma x}$$

ج. الحركة الجيبية المستقيمة:

تعرف المعادلة الزمنية للحركة الجيبية المستقيمة بالعلاقة التالية : $x = A \sin(\omega t + \varphi)$

حيث : x : المطال ، A : السعة ، ω : النبض (السرعة الزاوية) ، φ : الصفحة الابتدائية ،

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{الدور :}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{التواتر :}$$

$$V = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{■ السرعة :}$$

$$\gamma = \dot{V} = x'' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad \text{■ التسارع :}$$

نلاحظ أن الموضع (المطال) ، السرعة والتسارع عبارة عن دوال دورية جيبية بدلالة الزمن .

د . الحركة الدائرية : يتحرك متحرك حركة دائرية إذا كان مساره دائري (الشكل 15.3) .

$$\dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) = \dot{\theta}\vec{n} = \omega\vec{n}$$

نعرف أن: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ - وهي السرعة الزاوية [rad/s].

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad - \text{وهو التسارع الزاوي [rad/s}^2\text{]}$$

$$\vec{OM} = \vec{r} = -R\vec{n} \quad \blacksquare \text{ شعاع الموضع :}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{OM}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = -R\dot{\vec{n}} = -R(-\dot{\theta}\vec{t}) = R\dot{\theta}\vec{t} \quad \blacksquare \text{ شعاع السرعة :}$$

$$|\vec{V}| = V = R\dot{\theta} \quad \blacksquare \text{ الطويلة (القياس) :}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{t} + R\dot{\theta}\frac{d\vec{t}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}\dot{\vec{t}} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n} \quad \blacksquare \text{ شعاع التسارع :}$$

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n}$$

$$s(t) = R\theta \Rightarrow \dot{s}(t) = R\dot{\theta} = R\omega \Rightarrow \ddot{s}(t) = R\ddot{\theta} = R\varepsilon \quad \text{نعلم أن الفاصلة المنحنية :}$$

$$\vec{V} = \dot{s}(t)\vec{t} = R\dot{\theta}\vec{t} \quad \text{ومنه يصبح شعاع السرعة :}$$

$$|\vec{V}| = V = R\dot{\theta} = R\omega \quad \text{شعاع السرعة محمول على مماس الدائرة وقياسه هو :}$$

$$\begin{cases} V = R\dot{\theta} = \dot{s}(t) = R\omega \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega = \frac{\dot{s}(t)}{R} = \frac{V}{R} \\ \ddot{s}(t) = \frac{dV}{dt} = R\ddot{\theta} = R\varepsilon \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

شعاع التسارع الكلي متجه نحو التقعر :

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n} = \ddot{s}(t)\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{t} + \frac{V^2}{R}\vec{n} = \gamma_n\vec{n} + \gamma_t\vec{t}$$

إذن شعاع التسارع الكلي $\vec{\gamma}$ يمكن تحليله إلى مركبتين :

مركبة مماسية (التسارع المماسي) $\vec{\gamma}_t$: وهي محمولة على المماس وتميز تغير قياس السرعة .

$$\gamma_t = \ddot{s}(t) = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\varepsilon = \frac{dV}{dt}$$

مركبة ناظرية (التسامع الناظمي) $\vec{\gamma}_n$: موجهة نحو مركز الدائرة وتميز تغير منحى السرعة .

$$\gamma_n = \frac{\dot{s}^2}{R} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}$$

قياس التسامع ومنحاه :

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}$$

و

$$\text{tng}\varphi = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)}{\left(\frac{V^2}{R}\right)} = \frac{\omega}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

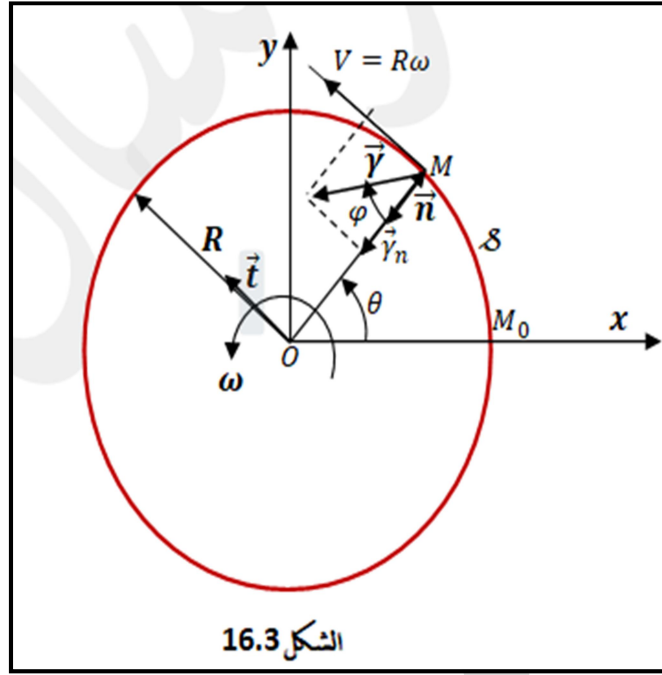
(R : يسمى نصف قطر الانحناء)

د. 1. الحركة الدائرية المنتظمة :

تعريف : هي حركة دائرية تكون فيها سرعة المتحرك ثابتة ومساره دائري (الشكل . 16.3 .)

$$|\vec{V}| = V = R\dot{\theta} = R\omega = \text{cste} \Rightarrow \omega = \text{cste} \Rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{n\pi}{30} \left(\frac{\text{دورة}}{\text{دقيقة}} \right) : \text{السرعة الزاوية ثابتة :}$$



$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

نكتب :

$$t = 0 \rightarrow \theta(t = 0) = \theta_0$$

لدينا الشروط الابتدائية :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt \Leftrightarrow [\theta]_{\theta_0}^{\theta} = \omega [t]_0^t$$

بالمكاملة :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

ومنه :

وهي المعادلة الزمنية للحركة في حالة حركة دائرية منتظمة

تنبيه : يمكن إيجاد المعادلة الزمنية للحركة انطلاقاً من الفاصلة المنحنية مباشرة .

• الحركة المستقيمة المنتظمة : $x = V t + x_0$

• الحركة الدائرية المنتظمة : $s(t) = \dot{s}t + s_0$

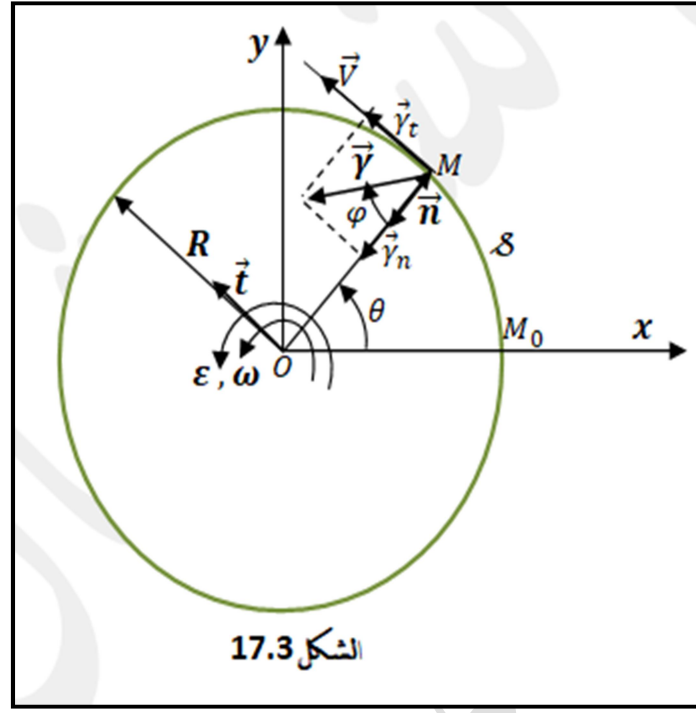
حيث $(s = R\theta, \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega, s_0 = R\theta_0)$

$$R\theta = R\dot{\theta}t + R\theta_0 \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

ومنه :

د . 2 . الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام : يتحرك متحرك حركة دائرية متغيرة بانتظام إذا كان مساره دائرياً

وتسارعه المماسي γ_t ثابت (الشكل 17.3) .



$$\gamma_t = \text{cste} = R\epsilon \Rightarrow \epsilon = \text{cste}$$

$$\omega = \frac{d\omega}{dt} = \epsilon \Rightarrow d\omega = \epsilon dt \quad \text{التسارع الزاوي ثابت إذن يمكن أن نكتب:}$$

$$t = 0 \rightarrow \theta(t = 0) = \theta_0 \rightarrow \omega(t = 0) = \omega_0 \quad \text{الشروط الابتدائية:}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \epsilon \int_0^t dt \Rightarrow [\omega]_{\omega_0}^{\omega} = \epsilon [t]_0^t \quad \text{بالمكاملة نجد:}$$

$$\omega = \epsilon t + \omega_0$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \epsilon t + \omega_0 \Rightarrow d\theta = (\epsilon t + \omega_0) dt \quad \text{لدينا كذلك:}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\epsilon t + \omega_0) dt \Rightarrow [\theta]_{\theta_0}^{\theta} = \left[\frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t \right]_0^t \quad \text{بالمكاملة نجد:}$$

$$\theta = \frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad \text{المعادلة الزمنية للحركة الدائرية المتغيرة بانتظام هي:}$$

■ يمكن إيجاد المعادلة الزمنية مباشرة انطلاقاً من الفاصلة المنحنية:

$$s(t) = \frac{1}{2} \epsilon t^2 + \dot{s}_0 t + s_0 = R\theta = \frac{1}{2} R\epsilon + R\omega_0 + R\theta_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$\begin{cases} \gamma_t = \ddot{x}(t) = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\varepsilon = \frac{dV}{dt} \\ \gamma_n = \frac{\dot{x}^2}{R} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{V^2}{R} = R(\varepsilon t + \omega_0)^2 \end{cases} \quad \text{حيث:}$$

تنبيه: تكون الحركة متسارعة أو متباطئة إذا كان:

▪ متسارعة: $\omega \cdot \varepsilon > 0$

▪ متباطئة: $\omega \cdot \varepsilon < 0$

العلاقة بين الزاوية المسوحة والسرعة الزاوية في زمن معطى:

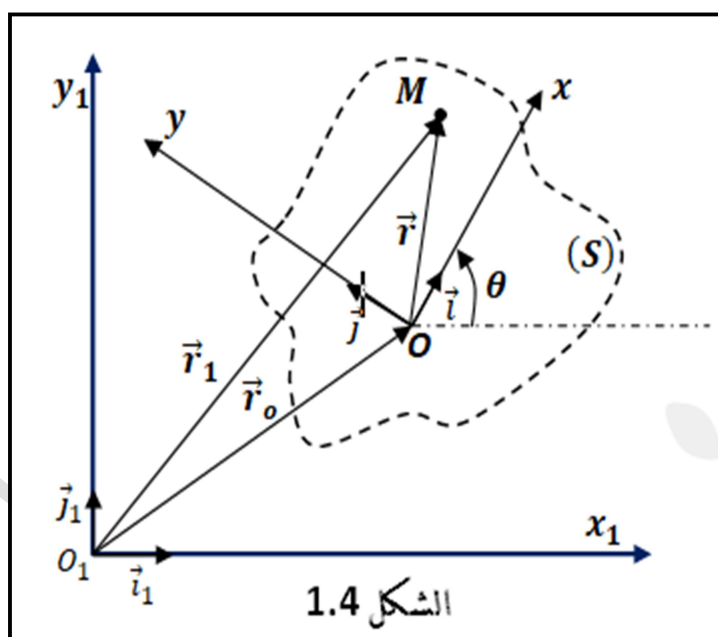
$$\begin{cases} \omega = \varepsilon t + \omega_0 \\ \theta = \frac{1}{2}t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \quad \text{لدينا:}$$

$$\theta = \frac{1}{2}t^2 + \omega_0 t + \theta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}\right)^2 + \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}\right) + \theta_0 \quad \text{ومنه:}$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2) = 2\varepsilon(\theta - \theta_0) \quad \text{بعد النشر والتوزيع نجد:}$$

المحور الرابع: الحركة النسبية لنقطة مادية

1.4. الحركة المطلقة، الحركة النسبية والحركة الجبرية:



في دراساتنا السابقة درسنا حركة نقطة M بالنسبة لجملة إسناد ثابتة $O_1x_1y_1$ ، وفي أغلب الأحيان كذلك من السهولة دراسة نفس حركة النقطة M بالنسبة لجملة إسناد متحركة Oxy . لهذا يجب معرفة حركة النقطة M بالنسبة للجملة المتحركة Ox ومعرفة حركة الجملة المتحركة Oxy بالنسبة للجملة الثابتة $O_1x_1y_1$ وهذا حتى نعرف حركة النقطة M بالنسبة لجملة الإسناد الثابتة $O_1x_1y_1$ (الشكل 1.4).

لتكن:

M - نقطة مادية تتحرك في المستوي الثابت $O_1x_1y_1$ الذي أشعة وحدته $\vec{i}_1, \vec{j}_1$.

Oxy - جملة متحركة وهي مرتبطة بالجسم (S) الصلب الذي أشعة وحدته $(\vec{i}(t), \vec{j}(t))$.

$\vec{r}_0$ - شعاع موضع المبدأ المتحرك O بالنسبة للمبدأ الثابت O_1 (أي بالنسبة للمعلم الثابت $O_1x_1y_1$).

1. شعاع موضع النقطة M بالنسبة للمبدأ الثابت O_1 (أي بالنسبة للمعلم الثابت $O_1x_1y_1$).
2. شعاع موضع النقطة M بالنسبة للمبدأ المتحرك O (أي بالنسبة للمعلم المتحرك Oxy).
3. إحداثيات النقطة M بالنسبة للمحاور المتحركة ox ، oy .

تعريف:

- أ. الحركة المطلقة: هي حركة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة $O_1x_1y_1$ ، السرعة المطلقة والتسارع المطلق يمثلان كلامن سرعة وتسارع النقطة M بالنسبة للمعلم الثابت $O_1x_1y_1$.
- ب. الحركة النسبية: هي حركة النقطة M بالنسبة للجملة المتحركة Oxy، السرعة النسبية والتسارع النسبي يمثلان كلامن سرعة وتسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك Oxy.
- ج. الحركة الجبرية: هي حركة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة $O_1x_1y_1$ لما تنطبق هذه النقطة مع الجسم الصلب (S) (أي هي حركة المعلم المتحرك Oxy بالنسبة للمعلم الثابت $O_1x_1y_1$)، السرعة الجبرية والتسارع الجبري يمثلان سرعة وتسارع المعلم المتحرك Oxy بالنسبة للمعلم الثابت $O_1x_1y_1$.
4. حساب السرعة المطلقة:

شعاع موضع النقطة M بالنسبة للجملة الإسناد الثابتة $O_1x_1y_1$ هو :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r}_1 = \vec{r}_O + \vec{r}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

نعلم أن:

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{j}_1$$

$$\vec{j} = d\vec{i}/d\theta = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1$$

كما يمكن إيجاد $\vec{j}$ بإضافة $\frac{\pi}{2}$ إلى θ في $\vec{i}$.

$$\vec{j} = \vec{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i}_1 + \sin(\theta + \pi/2)\vec{j}_1 = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1$$

نشتق أشعة الواحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بالنسبة للزمن فنجد :

$$\dot{\vec{i}} = \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{i}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1) = \dot{\theta} \vec{j} = \omega \vec{j}$$

$$\dot{\vec{j}} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{j}_1) = -\dot{\theta} \vec{i} = -\omega \vec{i}$$

ومنه مشتق شعاع الموضع $\overrightarrow{O_1M}$ هو: $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r}_O + \vec{r}$

$$\vec{V}_{M/O_1} = \vec{V}_{O/O_1} + \vec{V}_{M/O} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \vec{r}_O + \vec{r}$$

$$\vec{V}_{M/O_1} = \overrightarrow{O_1O} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} = \overrightarrow{O_1O} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\omega\vec{j} - y\omega\vec{i}$$

نلم أن: $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

و $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

ولدينا كذلك:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} \vec{k} = (-\omega y)\vec{i} + x\omega\vec{j}$$

ومنه:

$$\vec{V}_{\frac{M}{O_1}} = \vec{V}_a = \overrightarrow{O_1O} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right] + [\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}]$$

لدينا : $\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \\ \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{cases}$

تمثل على الترتيب إنسحاب (O/O_1) ودوران $(\vec{i}, \vec{j})$ (أي دوران Oxy).

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{(Oxy)/(O_1x_1y_1)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right] \quad \text{إذن:}$$

$$\vec{V}_r = \vec{V}_{M/O} = [\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}]$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad \text{ومنه:}$$

وهي علاقة تركيب السرعات

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{السرعة المطلقة : } \vec{V}_{M/O_1} = \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \\ \text{السرعة النسبية : } \vec{V}_r = \vec{V}_{M/O} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\ \text{السرعة الجبرية : } \vec{V}_e = \vec{V}_{O/O_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{array} \right.$$

3.4. حساب التسارع المطلق :

لدينا :

$$\vec{V}_{\frac{M}{O_1}} = \vec{V}_a = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

ولدينا كذلك :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + x\vec{\omega}\vec{j} - y\omega\vec{i} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{array} \right.$$

ومنه :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_{M/O_1} = \ddot{\vec{V}}_{M/O_1} = \ddot{\vec{V}}_a = \ddot{\vec{O_1O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{\gamma}_a = \ddot{\vec{O_1O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\omega\vec{j} - \dot{y}\omega\vec{i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \varepsilon\vec{k}$$

نعلم أن :

$$\vec{\gamma}_a = \ddot{\vec{O_1O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\omega\vec{j} - \dot{y}\omega\vec{i} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad \text{إذن :}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \ddot{\vec{O_1O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{x}\omega\vec{j} - \dot{y}\omega\vec{i} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

لدينا :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ \dot{x} & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \vec{k} = (-\omega\dot{y})\vec{i} + \dot{x}\omega\vec{j}$$

ومنه :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{O_1\ddot{O}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = [\vec{O_1\ddot{O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] + [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}] + [2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r]$$

$$\begin{cases} \vec{O_1\ddot{O}} &= \vec{\gamma}_{O/O_1} \\ \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} &= \vec{\gamma}_t \\ \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) &= \vec{\gamma}_n \end{cases}$$

حيث : $\vec{\gamma}_{O/O_1}$ - تمثل تسارع O بالنسبة لـ O_1 و $[\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})]$ - تمثل دوران Oxy بالنسبة لـ $O_1x_1y_1$.

إذن :

$$\vec{\gamma}_e = [\vec{O_1\ddot{O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] \quad \text{التسارع الجذري هو :}$$

$$\vec{\gamma}_r = [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}] \quad \text{التسارع النسبي هو :}$$

$$\vec{\gamma}_c = [2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r] \quad \text{تسارع كوريوليس (Coriolis) هو :}$$

وهو تسارع تخيلي ويسمى كذلك التسارع المتمم أو المكمل.

إذن التسارع المطلق هو :

$$\vec{\gamma}_a = [\vec{O_1\ddot{O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] + [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}] + [2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r]$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c \quad \text{أي أن :}$$

وهي علاقة تركيب التسارعات .

حالة خاصة : ينعدم تسارع كوريوليس لما : $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_r$ أو $\vec{\omega} = \vec{0}$ أو $\vec{V}_r = \vec{0}$ أو $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_r = \vec{0}$ أو $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = [\vec{O_1\ddot{O}} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] + [\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$$

المحور الخامس: علم الديناميك (تحريك نقطة مادية)

5. مقدمة : إذا كان علم الحركة يختص بوصف الحركات فإن علم التحريك يختص بدراسة العلاقة بين حركة الجسم ومسببات تلك الحركة وبمفهوم أعمق فإن دراسة التحريك هي العلاقة بين القوة وتغيرات حركة الجسم .

1.5. القوانين الثلاثة لنيوتن :

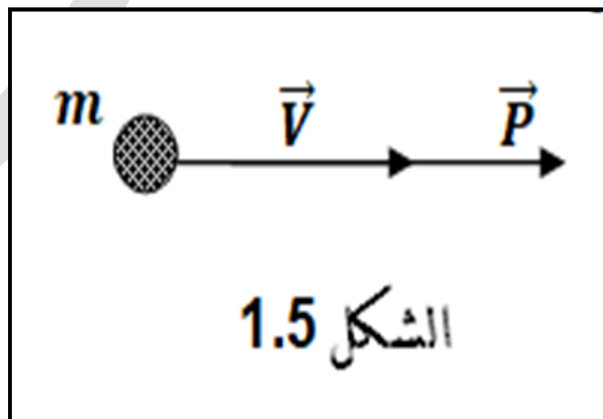
1. القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة لغاليلي) :

نص المبدأ : إذا كان جسم مادي غير خاضع لأي قوة فإنه :

- إما في حركة مستقيمة منتظمة .
- إما في سكون إذا كان منذ البداية في سكون .

بالنسبة لجسيمة فإن نص مبدأ العطالة هو : الجسيمة الحرة والمعزولة تتحرك وفق مسار مستقيم بسرعة ثابتة ، لذا نقول عن جسيمة متسارعة أنها ليست معزولة ولا حرة وإنما خاضعة دون أدنى شك لقوة .

★ كمية الحركة : كمية الحركة لجسيمة هي جداء كتلتها بشعاع سرعتها (الشكل 1.5) .



$$\vec{P} = m\vec{V}$$

إذن كمية الحركة مقدار شعاعي وهو مفهوم مهم جدا لأنه يشمل عنصرين يميزان الحالة التحركية للجسيمة .
يمكن الآن إعطاء نصا جديدا لمبدأ العطالة .

تنتقل الجسيمة الحرة دائما بكمية حركة ثابتة .

★ **إنحفاظ كمية الحركة:** إذا كان هناك تغير في السرعة أو كمية الحركة فهذا يدل على أن الجسيمة غير حرة .

نفرض وجود جسيمتين حرتين غير خاضعتين إلا للتأثيرات المتبادلة بينهما وبالتالي فهما معزولتان عن باقي الكون .

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow \vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \\ m_2 \rightarrow \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 \quad \text{في اللحظة } t :$$

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow \vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \\ m_2 \rightarrow \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 \quad \text{في اللحظة } t :$$

تكون كمية الحركة محفوظة إذا كان: $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Leftrightarrow m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$

2. القانون الثاني لنيوتن: وهو تعرف أكثر منه قانونا .

مشتق كمية حركة جسيمة بالنسبة للزمن تسمى قوة، أي أن محصلة القوى المطبقة على الجسيمة هي:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{V} + m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

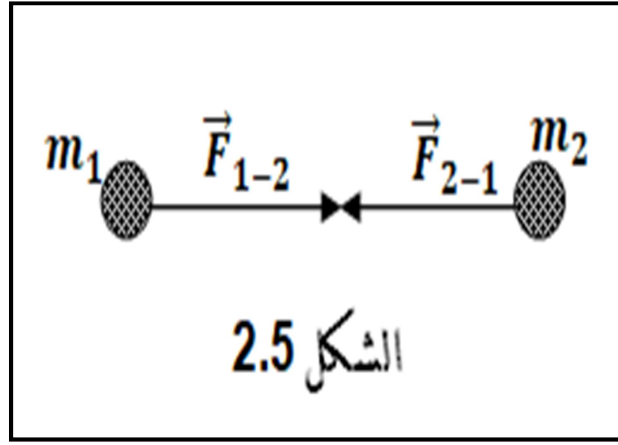
حالة خاصة: إذا كان $m = \text{cste}$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{a}$$

3. القانون الثالث لنيوتن:

نص القانون: حينما تكون جسيمتان في حالة تأثير متبادل تكون القوة المؤثرة على إحداها مساوية ومعاكسة للقوة

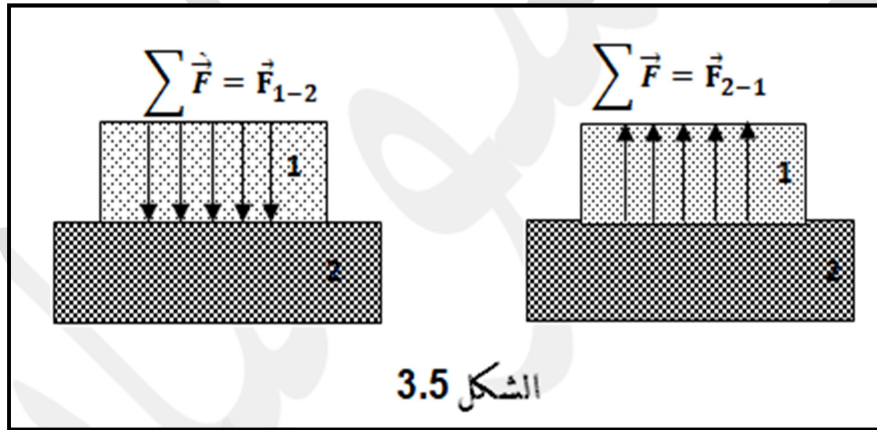
المؤثرة على الأخرى (الشكل 2.5) .



$$\vec{F}_{1-2} = \vec{F}_{2-1}$$

2.5. بعض أنواع القوى:

أ. قوى التلامس أو قوى الترابط: نفهم هنا أننا نتكلم عن القوى المؤثرة بالتبادل بين جسمين متلامسين (الشكل 3.5).

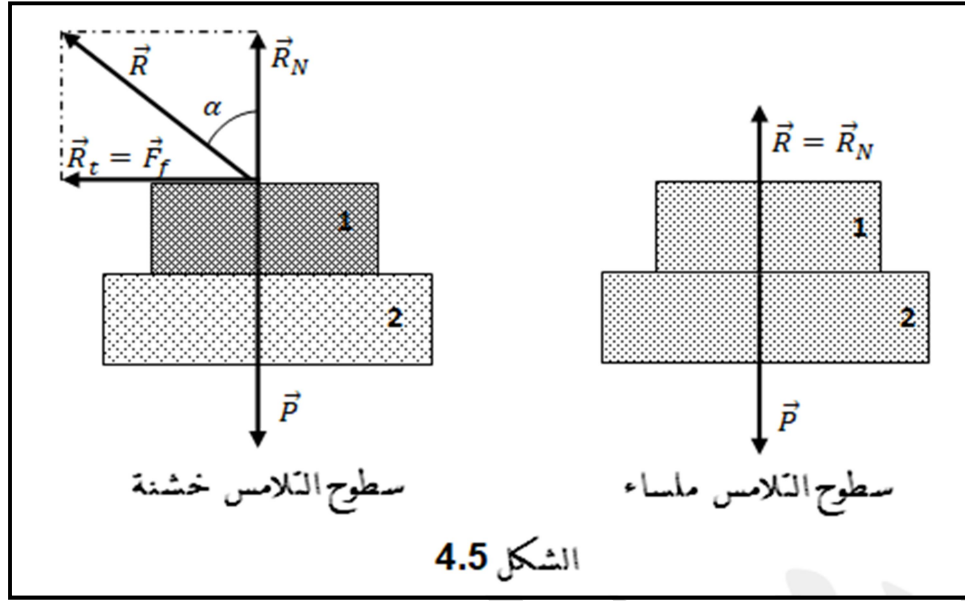


$$\vec{F}_{1-2} = \vec{F}_{2-1}$$

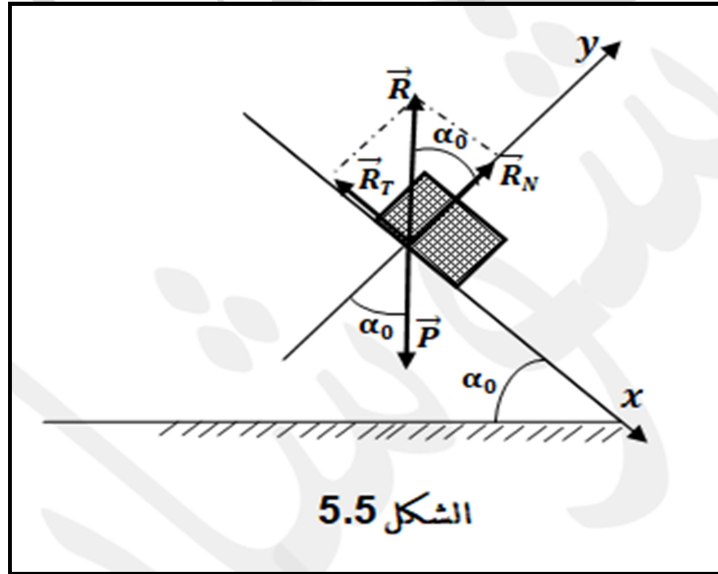
ب. قوى الاحتكاك: كل ما كان هناك تلامس بين سطحين خشنيين لجسمين صلبين إلا وكانت هناك مقاومة

تعاكس الحركة النسبية للجسمين. هناك أنواع من الاحتكاكات.

ب. 1. قوى الاحتكاك السكوني: هي القوى التي تبقى جسمًا في حالة سكون ولو بوجود قوى خارجية (الشكل 4.5).



- معامل الخشونة (معامل الاحتكاك السكوني) : نضع جسما على سطح مائل بنزاوية α بالنسبة للسطح الأفقي . في حالة وجود قوى احتكاك بين السطح المائل والجسم يبقى الجسم في حالة سكون رغم تزايد النزاوية α مادامت سلسلة القيم التي تأخذها α أصغر من قيمة حدية α_0 الموافقة لبداية الانزلاق واختلال التوازن (الشكل 5.5) .



بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك :

الجسم في حالة سكون إذن :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

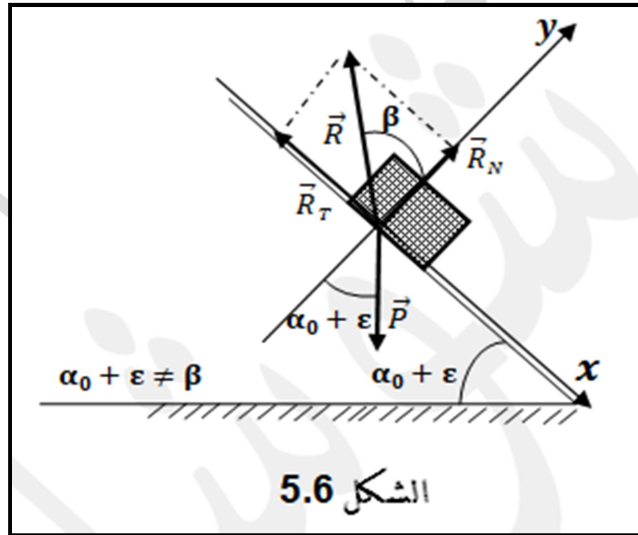
$$\begin{aligned} -R_T + mg \sin \alpha &= 0 && \leftarrow \text{وفق } ox \\ R_N - mg \cos \alpha &= 0 && \leftarrow \text{وفق } oy \end{aligned}$$

بالإسقاط على محاور الحركة:

$$\begin{cases} R_T = mg \sin \alpha \\ R_N = mg \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{R_T}{R_N} = \tan \alpha = f_s$$

حيث f_s هو معامل الإحتكاك السكوني

ب. 2. قوى الإحتكاك الحركي: هي القوى التي تقاوم حركة الجسم عندما ينتقل على سطح خشن (أي أنه رغم تواجدها فالجسم يتحرك) (الشكل 6.5).



- معامل الإحتكاك الحركي :

لنتابع التجربة السابقة وهذا يجعل الزاوية α تزداد بكمية صغيرة جدا ϵ عن α_0 فيبدأ الجسم في الانزلاق بحركة متسارعة.

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور :

$$-R_T + mg \cdot \sin(\alpha + \varepsilon) = m\gamma \quad \text{وفق } ox :$$

$$R_N - mg \cdot \cos(\alpha + \varepsilon) = 0 \quad \text{وفق } oy :$$

$$R_N = mg \cdot \cos(\alpha + \varepsilon) \text{ و } R_T = mg \cdot \sin(\alpha + \varepsilon) - m\gamma \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{R_T}{R_N} = \frac{mg \cdot \sin(\alpha + \varepsilon) - m\gamma}{mg \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)} = \tan(\alpha + \varepsilon) - \frac{\gamma}{g \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)} = f_c \quad \text{ومنه :}$$

حيث f_c : هو معامل الاحتكاك الحركي .

ب. 3. قوى الاحتكاك الميوعية : حيث ينتقل جسم صلب في مائع (غاز أو سائل) بسرعة ضعيفة نسبياً فتنشأ قوة

احتكاك تحسب بالقانون :

$$\vec{F}_f = -k\eta \vec{V}$$

ملاحظة : في حالة تحرك الجسم بسرعة كبيرة نسبياً فإن : $F_f = k\eta V^2$

k : معامل يتعلق بشكل الجسم المتحرك داخل المائع .

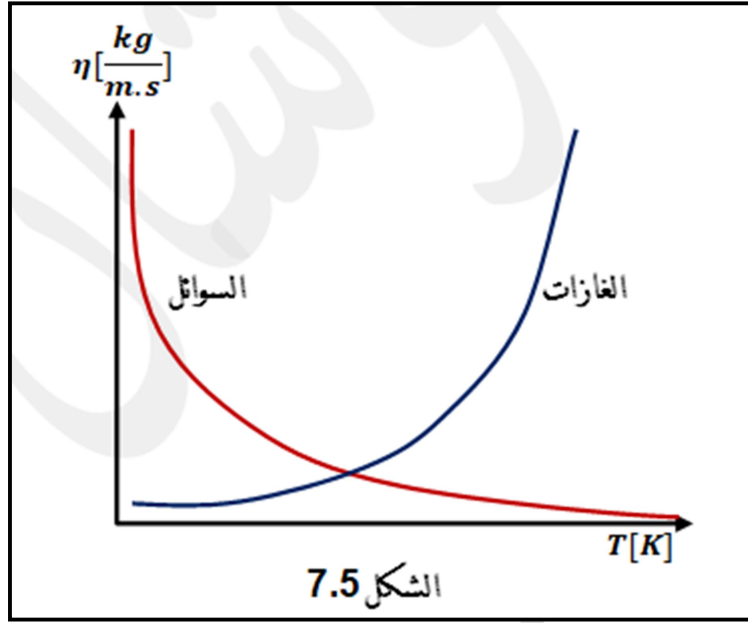
فمثلاً بالنسبة لكرة : $\vec{F}_f = \vec{F}_s = -6\pi\eta R\vec{V}$ وهي القوة الميوعية لستوكس (Stokes) .

η : معامل يتعلق بالاحتكاكات الداخلية للمائع (أي قوى الاحتكاك بين مختلف طبقات المائع والتي تتحرك بسرعات

مختلفة) .

الاحتكاك الداخلي للموائع (η) يسمى معامل اللزوجة وهي لزوجة ديناميكية .

ملاحظة : في السوائل ينخفض معامل اللزوجة بارتفاع درجة الحرارة بينما يزداد في الغازات (الشكل 7.5) .



ج. القوى المرنة: تحدث حركات دورية .

فمثلا في دراستنا للحركات الجيبية المستقيمة رأينا أن التسارع يحسب بـ : $\vec{\gamma} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك : $\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM} = -m \frac{k}{m} \overrightarrow{OM} = -k \overrightarrow{OM}$

وهذا يعني أنه في الحركة الجيبية المستقيمة تكون محصلة القوى المطبقة على النقطة المادية تناسب طرذا مع شعاع الموضع وتعاكسه في الاتجاه وهي موجهة دوما نحو المركز ولهذا السبب تسمى بالقوة المركزية ولا تنعدم إلا في المبدأ ،

وبالإسقاط على المحور OX تتوصل إلى القانون

$$F = -kx = m\gamma = m\ddot{x}$$

د. قوى العطالة أو شبه القوة: سبق لنا وأن صادفنا في دراستنا للحركة النسبية علاقة تركيب التسارعات :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

بالنسبة للمعلم العطالي المطلق فإن المراقب المرتبط به يكتب :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_a = m \frac{d\vec{V}_a}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

بالنسبة للمعلم النسبي وهو غير عطالي فإن المراقب المرتبط به يكتب :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_r = m(\vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_e - \vec{\gamma}_c)$$

إذن:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_r = m(\vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_e - \vec{\gamma}_c) = \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$$\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e, \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c \quad \text{حيث:}$$

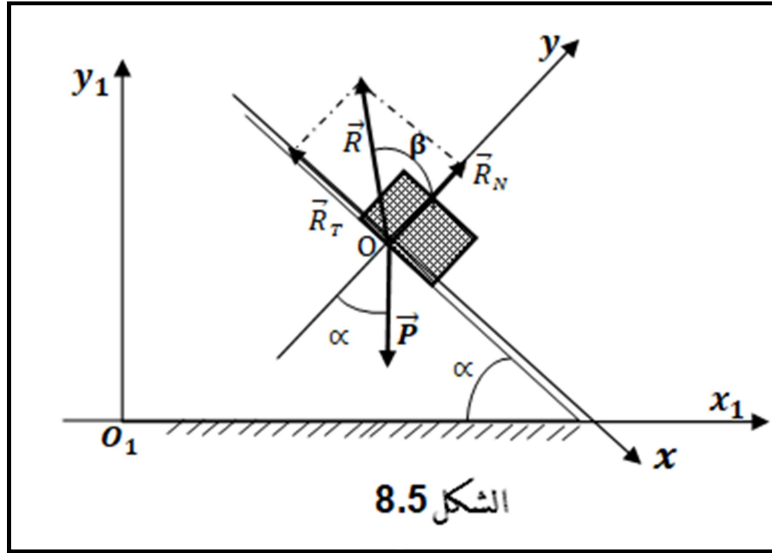
خلاصة: في المعلم غير غاليلي لا بد من إضافة شبه قوتين $\vec{F}_c$ و $\vec{F}_e$ إلى $\vec{F}_a$ أي أن:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

مثال توضيحي: لدينا جسم يتحرك على مستوي مائل، المستوي المائل يصنع مع الأفق زاوية $\alpha(t)$ غير ثابتة أي تتغير بدلالة الزمن (الشكل 8.5).

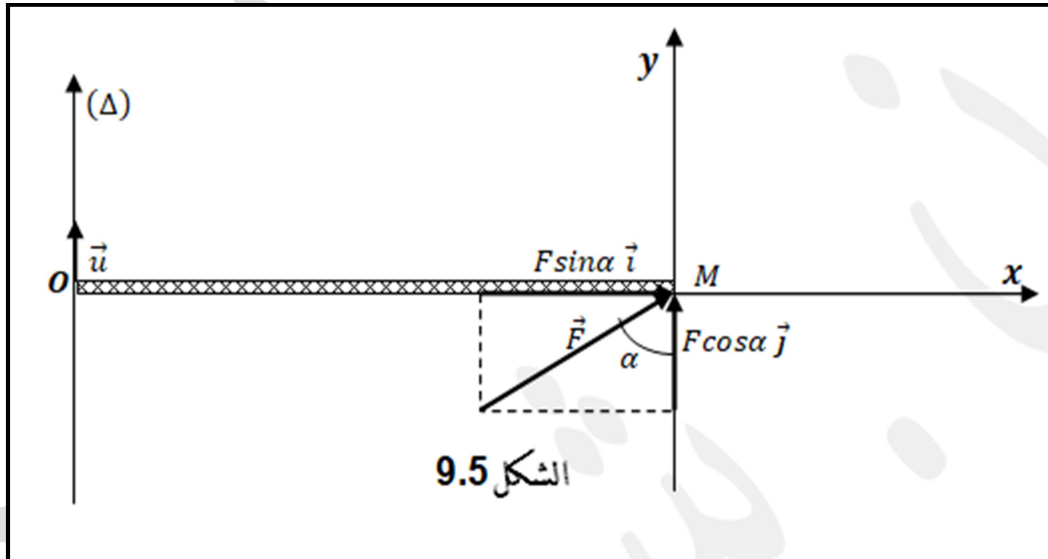
■ من أجل إجراء دراسة ديناميكية (تحريرية) للجسم بالنسبة للمعلم غير غاليلي (oxy) لا بد من إجراء دراسة تحريرية له بالنسبة للمعلم الغاليلي ($o_1x_1y_1$) ودراسة تحريرية للمستوي المائل ((oxy)) بالنسبة للمعلم الغاليلي ($o_1x_1y_1$) (الشكل 8.5).

■ معنى هذا أن محصلة القوى المؤثرة على الجسم بالنسبة لمعلم متحرك $[\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_r]$ تساوي القوى التي تؤثر على الجسم في معلم ثابت $[\vec{F}_a]$ نضيف لها القوى التي تؤثر على المعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت $[\vec{F}_e]$ ونضيف لها كذلك القوى التخيلية (الوهمية) لكريوليس $[\vec{F}_c]$.



5.3. عنزم القوة: ليكن المحور (Δ) شعاع وحدته $\vec{u}$ و (Δ) متوازيان ولهما نفس الاتجاه) وليكن O نقطة من المحور (الشكل 9-9-و-10) .

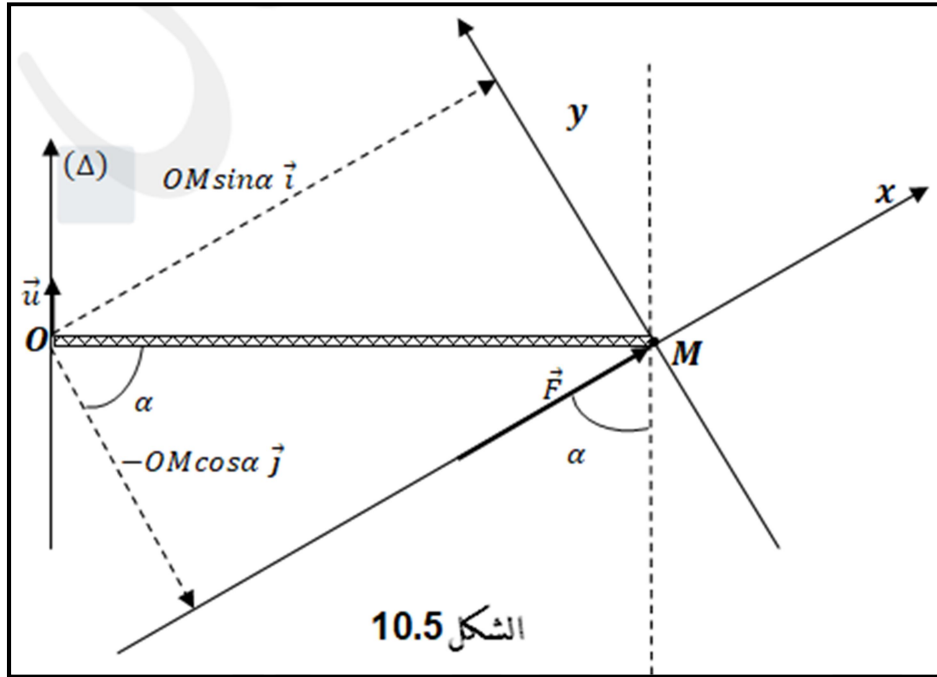
نسمي عنزم قوة $\vec{F}$ المطبقة في النقطة M بالنسبة للمحور (Δ) المقدار: $\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$.
 لحساب عنزم القوة يمكن تحليل القوة $\vec{F}$ إلى مركباتها أو تحليل الشعاع $\vec{OM}$ إلى مركباته .
 ■ تحليل شعاع القوة إلى مركبتيه: (الشكل 9.5) .



$$\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = OM \vec{i} \wedge (F \sin \alpha \vec{i} + F \cos \alpha \vec{j}) = OM \vec{i} \wedge F \cos \alpha \vec{j} \\ = OM \cdot F \cos \alpha \vec{k}$$

$$\mathcal{M}_{/O}(\vec{F}) = OM \cdot F \cos \alpha \quad \text{الطويلة :}$$

■ تحليل الشعاع $\vec{r}$ إلى مركبتيه: (الشكل 10.5)



$$\vec{\mathcal{M}}_{(\vec{F})/O} = \vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = (OM \sin \alpha \vec{i} - OM \cos \alpha \vec{j}) \wedge (F \vec{i})$$

$$= -OM \cos \alpha \vec{j} \wedge F \vec{i} = OM \cdot F \cos \alpha \vec{k}$$

$$\mathcal{M}_{/O}(\vec{F}) = OM \cdot F \cos \alpha \quad \text{الطويلة:}$$

4.5. العزم الحركي: وتكتب عبارته من الشكل: $\vec{L}_{\vec{P}/O} = \vec{L}_{/O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

- مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن: $d(\vec{L}_{/O})/dt = d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P})/dt$

- نفرض أن (m و $\overrightarrow{OM}$) ثابتين.

$$\frac{d(\vec{L}_{\vec{P}/O})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P})}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O}$$

خلاصة: مشتق العزم الحركي هو عزم القوة.

المحور السادس: العمل والطاقة

تمهيد: إن مبدأ القوة الذي يؤدي إلى جهد منجز مرتبط بمبدأ الطاقة والعمل.

1.6. العمل: عبارة عن تحول الطاقة من شكل إلى آخر كلما تم انتقال نقطة تأثير القوة.

■ هذا الربط بين الطاقة والقوة يتواجد بالنسبة لكل أنواع الطاقة التي تهم الظواهر الميكانيكية.

■ الطاقة عبارة عن مقدار سلمي.

■ نعرف العمل على أنه قوة $\vec{F}$ مطبقة على نقطة M خلال الفارق الزمني dt بالجداء السلمي:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt$$

حيث: $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$: سرعة انتقال M .

2.6. الإستطاعة: معرفة كحاصل قسمة العمل العنصري dW على الزمن العنصري dt .

$$p = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

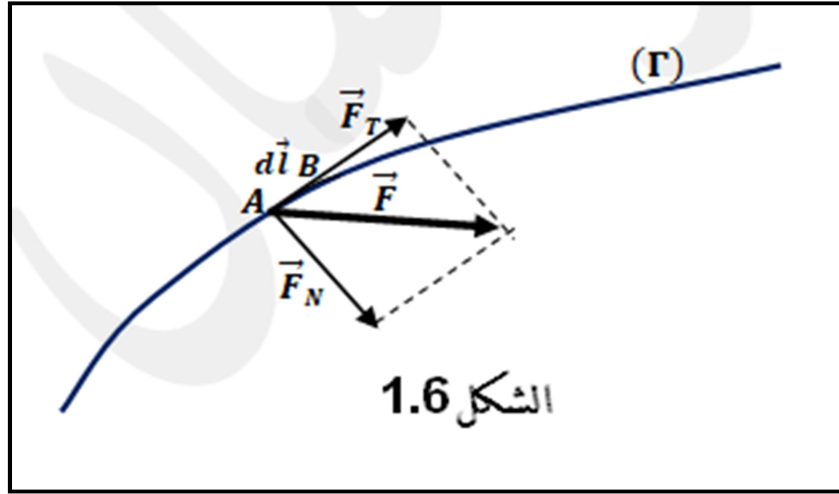
وحدة الإستطاعة في النظام الدولي (SI) هي: watt = joule / s.

ووحدة العمل في النظام الدولي (SI) هي: الجول ($\text{joule} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$).

تعريف الجول: هو عبارة عن قوة مقدار 1 N تنتقل نقطة تطبيقها 1 m .

إذن لمعرفة العمل يتطلب معرفة القوة وهذا بدلالة نقطة M في حين فضائي يتم فيه هذا الانتقال.

إذا كان الانتقال محدد بين نقطتين A و B (الشكل 1.6) فإن:



$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

بتحليل القوة إلى مركبتها الناعمية والمماسية :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{F}_T + \vec{F}_N) \cdot d\vec{l} = \vec{F}_T \cdot d\vec{l} + \vec{F}_N \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_T \cdot d\vec{l} = F_T \cdot dl \cdot \cos 0 = F_T \cdot dl$$

$$\vec{F}_N \cdot d\vec{l} = F_N \cdot dl \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_T \cdot dl \quad \text{ومنه :}$$

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B F_T \cdot dl \quad \text{والعمل بين النقطتين B و A هو :}$$

3.6. نظرية الطاقة الحركية: هذه النظرية تدعى أيضا نظرية القوى الحدية وأول من أعطاهها هذا الإسم هو العالم (leibniz).

تعرف الطاقة الحركية لنقطة مادية كالتالي: $E_c = \frac{1}{2} m V^2$ ، وترتبط قيمتها بالمعلم الذي ندرس فيه الحركة.

إذا كانت $\vec{F}$ هي القوة الخارجة المطبقة على النقطة المادية المعبرة فإن العمل العنصري لهذه القوة هو:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} \cdot dt = m \vec{V} \cdot d\vec{V} = m V dV = d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)$$

أثناء الانتقال بين النقطتين A و B :

$$W_A^B = \int_A^B dW = m \int_A^B V dV = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)$$

$$W_A^B = \left[\frac{1}{2} m V^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$$

$$W_A^B = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c$$

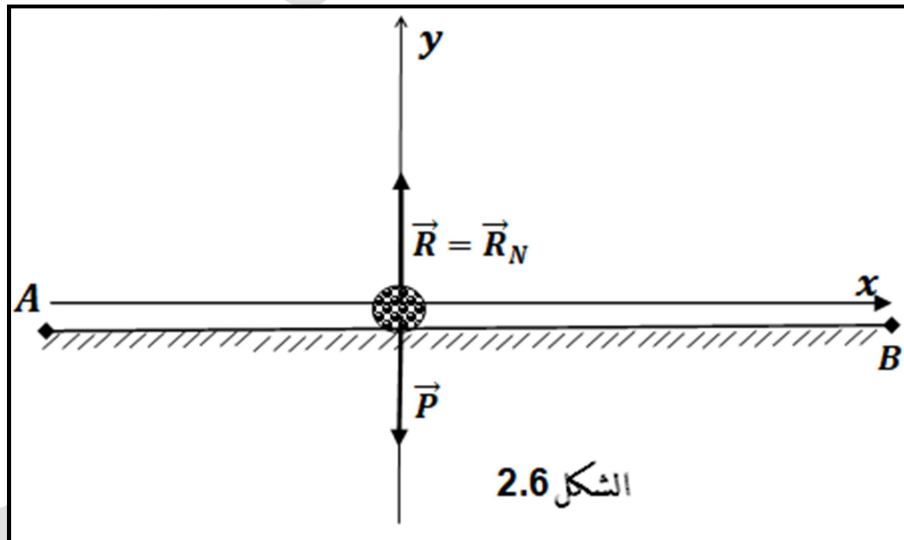
$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext}) \quad \text{إذن:}$$

وهو ما يعرف بنظرية الطاقة الحركية

مثال تطبيقي: لدينا مسار أفقي طوله AB (أنظر الشكل)، تنطلق جسيمة من النقطة A بسرعة ابتدائية V_A لتصل إلى النقطة B (الشكل 2.6).

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية في حالة كون هذا المسار أملس وفي الحالة التي يكون فيها خشن ومعامل احتكاكه الحركي f_c وهذا لإيجاد عبارة السرعة عند النقطة B .

أ. حالة المسار سطحه أملس:



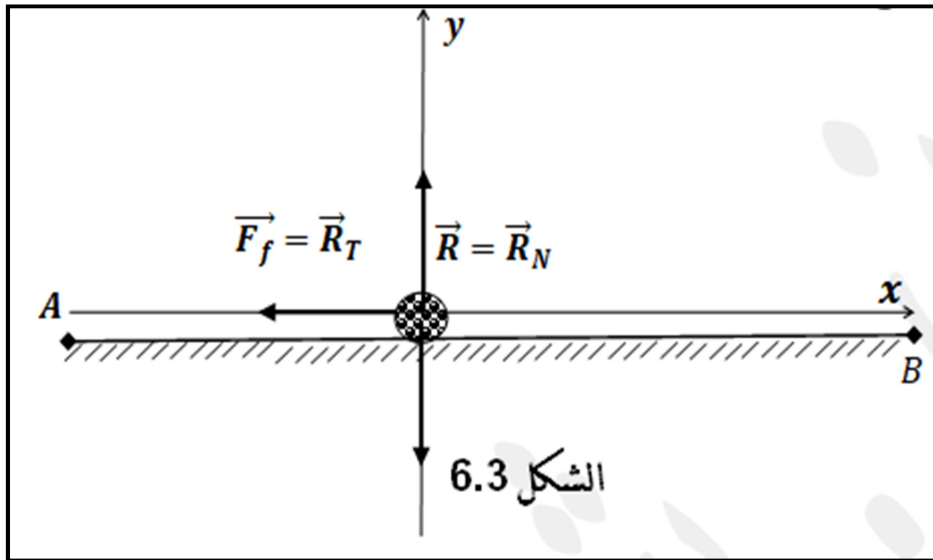
■ بتطبيق نظرية الطاقة الحركية الآن بين النقطتين A و B :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext}) = E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N)$$

$$\text{لأن } \vec{P} \text{ و } \vec{R}_N \text{ عموديان على المسار (الشكل 2.6).} : \begin{cases} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}_N) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 \Rightarrow V_A = V_B \quad \text{إذن:}$$

ب. حالة المسار سطحه خشن:



بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك: $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{R}$

بالإسقاط على المحور oy نجد: $mg - R_N = 0$

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية الآن بين النقطتين A و B :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$$

$$\text{لأن } \vec{P} \text{ و } \vec{R}_N \text{ عموديان على المسار (الشكل 3.6).} : \begin{cases} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}_N) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_{cB} - E_{cA} = W(\vec{R}_T) \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -R_T(AB)$$

$$f_c = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = f_c \cdot R_N = f_c \cdot mg \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -R_T(AB) = -f_c \cdot mg(AB) \quad \text{إذن:}$$

$$\Rightarrow V_B^2 = V_A^2 - 2f_c g. (AB) \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 - 2f_c g. (AB)}$$

4.6. الطاقة الكامنة : في الحقيقة تكون للقوى المطبقة على الأجسام أنماط مختلفة ، في كل نقطة من الفضاء

يكون المتحرك خاضع لقوة $\vec{F}$ حيث $\vec{F}$ قوة مشتقة من كمون (قوة تحفظية) (أي أن العمل المنجز لا يتعلق لا بمسار ولا بزمناً)

$$\begin{cases} -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\vec{\nabla} E_p = \vec{F} \\ \overrightarrow{\text{Rot}} (\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases} \text{ يعني رياضياً أن :}$$

إن إنتقال نقطة تأثير القوة يؤدي إلى صرف في الطاقة (طاقة التفاعل) $(-dE_p)$ التي نعبّر عنها بعمل قوة التفاعل :

$$dW = \vec{F} d\vec{l} = dE_c = -dE_p$$

$$W_A^B = \int_A^B dW \int_A^B dE_c = - \int_A^B dE_p \quad \text{: أثناء الإنتقال بين A و B}$$

$$E_{cB} - E_{cA} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

$$\Rightarrow (E_{cB} + E_{pB}) = (E_{cA} + E_{pA}) = E_M = E_T = \text{cste}$$

حيث : (E_M) هي الطاقة الميكانيكية أو (E_T) الطاقة الكلية .

5.6. مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية (الميكانيكية) :

لدينا :

$$[\Delta E_c]_A^B = -[\Delta E_p]_A^B \Rightarrow E_{cB} - E_{cA} = -(E_{pB} - E_{pA}) \Rightarrow (E_{cB} + E_{pB})$$

$$= (E_{cA} + E_{pA})$$

$$[\Delta E_M]_A^B = [\Delta E_T]_A^B = 0$$

إذن :

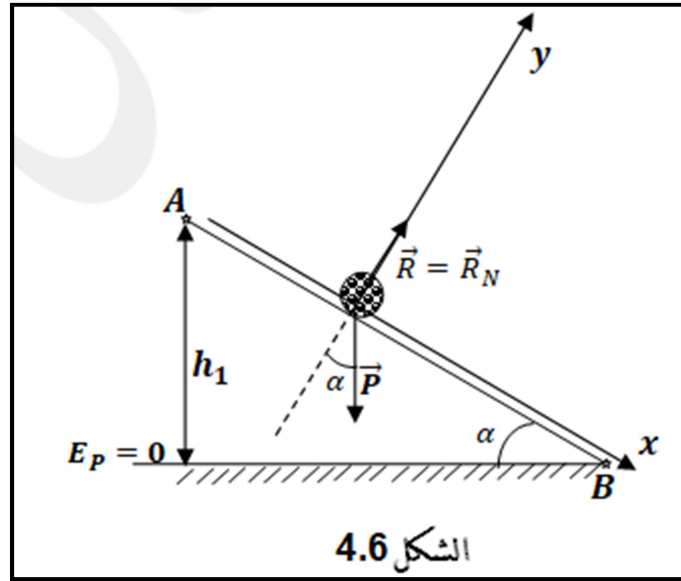
وهو مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية

مثال تطبيقي : لدينا مسار مائل طوله AB يصنع مع الأفق زاوية α (أنظر الشكل 4.6.) ، تنطلق جسيمة من النقطة

A بسرعة ابتدائية V_A لتصل إلى النقطة B .

بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة الكلية في حالة كون هذا المسار أملس وهذا لإيجاد عبارة السرعة عند النقطة B.

- حالة المسار سطحه أملس :



بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة الكلية: $[\Delta E_M]_A^B = [\Delta E_T]_A^B = 0$

$$[\Delta E_C]_A^B = -[\Delta E_P]_A^B \Rightarrow E_{cB} - E_{cA} = -(E_{pB} - E_{pA}) \Rightarrow (E_{cB} + E_{pB}) = (E_{cA} + E_{pA})$$

$$E_{pB} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow (E_{cB}) = (E_{cA} + E_{pA}) \Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + m g \cdot h_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_B^2 = \frac{1}{2} V_A^2 + g \cdot AB \cdot \sin \alpha \Rightarrow V_B^2 = V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha}$$

6.6. حالات عامة : (قوى محافظة وقوى غير محافظة) : توجد في الحياة الجارية أمثلة عديدة عن القوى غير محافظة أي

غير مشتقة من كمون حيث يتضح من القياسات عدم صلاحية قانون حفظ الطاقة الميكانيكية (الكلية) .

■ حالة قوى مشتقة من كمون : لتكن قوتان $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ مشتقتان من كمون .

إذن العمل العنصري هو : $dW = \vec{F}_1 d\vec{l} + \vec{F}_2 d\vec{l}$

$$\sum_{i=1}^{n=2} \vec{F}_i = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = m \frac{d\vec{V}}{dt} : (\text{المبدأ الأساسي للحركة})$$

$$\Delta E_M = 0 \quad \blacksquare \text{ التفسير الطاقي :}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (E_{c1})_A + (E_{c2})_A + (E_{p1})_A + (E_{p2})_A \\ = (E_{c1})_B + (E_{c2})_B + (E_{p1})_B + (E_{p2})_B \\ \Rightarrow [(E_{c1})_B + (E_{c2})_B + (E_{p1})_B + (E_{p2})_B] \\ - [(E_{c1})_A + (E_{c2})_A + (E_{p1})_A + (E_{p2})_A] = 0 \end{aligned}$$

■ حالة قوى غير مشتقة من كمون : إذا أضفنا إلى القوتين $\vec{F}_2, \vec{F}_1$ المشتقتين من كمون $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ غير مشتقتين من كمون فإن .

$$\sum_{i=1}^{n=4} \vec{F}_i = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m \frac{d\vec{V}}{dt} : (\text{المبدأ الأساسي للحركة})$$

$$\blacksquare \text{ التفسير الطاقي :}$$

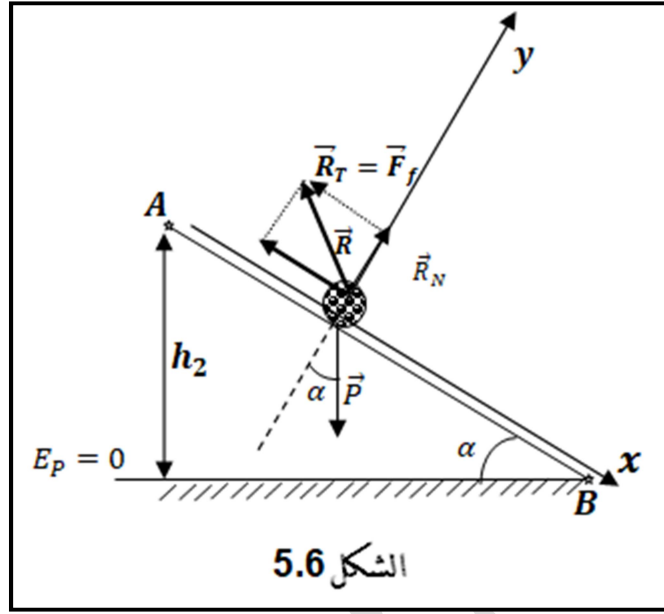
$$\begin{aligned} \Delta E_M &= [(E_{c1})_B + (E_{c2})_B + (E_{p1})_B + (E_{p2})_B] \\ &\quad - [(E_{c1})_A + (E_{c2})_A + (E_{p1})_A + (E_{p2})_A] \neq 0 \\ \Delta E_M &= W(\vec{F}_3) + W(\vec{F}_4) = \sum W(\vec{F}_{n.c}) \end{aligned}$$

حيث : $\vec{F}_{n.c}$ هي القوى غير تحفظية (غير مشتقة من كمون) (les forces non conservatives)

مثال تطبيقي : لدينا مسار مائل طول AB يصنع مع الأفق زاوية α ، تنطلق جسيمة من النقطة A بسرعة ابتدائية V_A لتصل إلى النقطة B .

بتطبيق مبدأ انخفاض الطاقة الكلية في حالة كون هذا المسار خشن ومعامل احتكاكه الحركي f_c وهذا لإيجاد عبارة السرعة عند النقطة B .

- حالة المسار سطحه خشن :



■ بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك: $\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{R}$

■ بالإسقاط على المحور oy نجد: $mg \cdot \cos \alpha - R_N = 0$

بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة الكلية (الميكانيكية).

$$[\Delta E_M]_A^B = [\Delta E_T]_A^B = W(\vec{R}_T)$$

$$\Rightarrow (E_{cB}) - (E_{cA} + E_{pA}) = W(\vec{R}_T)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + mg \cdot h_2 - R_T(AB)$$

$$h_2 = AB \cdot \sin \alpha, R_T = f_c \cdot mg \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + mg \cdot AB \cdot \sin \alpha - f_c \cdot mg \cdot \cos \alpha (AB)$$

$$\Rightarrow V_B^2 = V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha - 2f_c \cdot g \cdot \cos \alpha (AB)$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin \alpha - 2f_c \cdot g \cdot AB \cos \alpha}$$

References

- [1] AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, Office des Publications Universitaires, Algérie, 2013.
- [2] ZIANI NOSSAIR et BOUTAOUS AHMED, Mécanique du point matériel cours et exercices, université des sciences et technologie d'Oran - Mohamed Boudiaf-, 2015/2016.
- [3] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale - live 2 : dynamique du point matériel, OPU, 2016.
- [4] S. HADJRI MEBARKI, Z. D. IMEM, A. E. K BOUMAZA, Introduction à la mécanique rédigée en arabe (module SEP200), OPU, 1992.
- [5] Alain Gibaud, Michel Henry, Cours de physique Mécanique du point, 2^{ème} édition', Dunod, 2007.
- [6] RAHMANI Ahmed, Cours Mécanique du Point Matériel, UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL-BOUAGHI, 2018.
- [7] Taylor, J.R. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, 1997.
- [8] Hugh Young, Hugh D. Young, Roger A. Freedman Pearson, University Physics with Modern Physics, 2019.
- [9] David Morin, Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions, Cambridge University Press, 2008.
- [10] Kleppner, D. & Kolenkow, R. J., An Introduction to Mechanics, 2nd ed., Cambridge, University Press, 2014.
- [11] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko, Classical Mechanics, 3rd ed., Addison-Wesley, 2002.
- [12] Marion, J. B., & Thornton, S. T., Classical Dynamics of Particles and Systems (5th ed.). Brooks Cole, 2003.