République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du :

DIPLÔME DE DOCTORAT SCIENCE EN MATHÉMATIQUES

Option : **Equations Différentielles aux Dérivées Partielles**

Par

M.LATRECHE Smail

Intitulée :

Problème de Goursat non linéaire dans la classe Denjoy-Carleman

Soutenue le :19 / 02 /2025 devant le jury composé de

M.LAIADI Abdelkader	M.C.A	Université de Biskra	Président
M.GUERBATI Kaddour	Dr.Pr.	Université de Ghardaïa	Encadreur
M.CHACHA Ahmed Djamel	Dr.Pr.	Université de Ouargla	Examinateur
M.MEFLAH Mabrouk	Dr.Pr.	Université de Ouargla	Examinateur
M.BERBICHE Mohamed	Dr.Pr.	Université de Biskra	Examinateur

بسم الله الرحمن الرحيم

.

Remerciement

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse le professeur **Guerbati Kaddour** pour sa patience et surtout sa confiance sa disponibilité et sa bienveillance.Qu'il trouve ici le témoignage de de ma profonde gratitude .
Je voudrais également remercier les autres membres du jury
M.LAIADI Abdelkader en tant que Président du jury
M.CHACHA Ahmed ,M.MEFLAH Mabrouk, et M.BERBICHE Mohamed ,

d' avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.Je remercie également le **Dr Dahmani Abdelhakim** et le **Dr Cheikh salah Abdelwaheb** pour leur soutient moral et matériel Sans oublier la personne qui a tout fait pour l'apparition de cette œuvre.
le **Dr Choucha Abdelbaki** de l'université de Laghouat
qui a été à mon coté au moment de désespoir je le remercie infiniment
Merci à vous tous

Dédicace

A la mémoire de mon défunt père

A la plus belle créature que Dieu a créée sur terre

A ma mère

A ma femme

à mes chers filles et fils

Waffa ,Nessrine, Abdelhak, Mohamed Ali

à ma belle-fille **oum-el kheir et ma petite fille Ferdaous**

A mon grand frère et père **Amrane**

à tous mes frères et sœurs,ainsi que leurs enfants

à tous mes amis et collègues du département M.I de l'université de ghardaïa

pour leur soutient

à tous ceux qui par un mot m'ont donné la force pour continuer

S.Latreche

Citation

Certe ,il y'a des travaux pénibles ;

mais la joie de la réussite n'a-t-elle pas

à compenser nos douleurs ?

Jean de la bruyère

ملخص

نهدف في هذه المذكرة الى البرهان عن وجود ووحدانية الحل لمشكل غورسا الغير خطي في فضاء مجموعة الدوال دينجوي- كارلمان بالتحديد في مجموعة الدوال من الصنف مستمر بالنسبة للمتغير الاول ودينجوي- كارلمان بالنسبة للثاني حيث نقوم بتحويل المعادلة التكاملية-التفاضلية الى مسالة نقطة صامدة في جوار مغلق داخل جبر بناخ معرف بسلسلة غير منتهية ركبت بواسطة سلسلة عددية محدبة لوغاريثميا وتملك بعض الخواص الاضافية

،

, الكلمات المفتاحية: مشكل غورسا ، فضاء كارلمان . ، سلسلة غير منتهية ، جبر بناخ النقطة الصامدة

Cette thèse a pour objectif de prouver l’existence et l’unicité d’une solution d’un problème de Goursat non linéaire dans la classe de fonctions quasi-analytiques de type Denjoy-Carleman, plus précisément dans l’ensemble des fonctions continues-Denjoy-Carleman. L’idée est de transformer le problème intégro-différentiel à un problème de point fixe appliqué dans une boule fermée dans une algèbre de Banach définie par une série formelle et une suite numérique logarithmiquement convexe convenablement choisies.

Mots clés: Problème de Goursat, point fixe, Algèbre de Banach, Série formelle, Classe Denjoy-Carleman.

Abstract

This thesis aims to establish the existence and uniqueness of a solution to a nonlinear Goursat problem within the class of quasi-analytic functions of Denjoy-Carleman type, specifically within the set of continuous Denjoy-Carleman functions. The approach involves transforming the integro-differential problem into a fixed-point problem, applied to a closed ball in a Banach algebra defined by a formal series and a suitably chosen logarithmically convex sequence.

Keywords: Goursat problem, fixed point, Banach Algebra, Formal power series,
Denjoy- Carleman space.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{+}^{n}$, $x, y \in \mathbb{C}^{n}$ ou $\mathbb{R}^{n}$

- $\mathbb{K}[X]$ ensemble des polynômes
- $\mathbb{C}[[X]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}\{X\}$ l'algèbre des séries convergentes.
- $\|\cdot\|$ norme
- $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{+}$, pour tout $i = 1 \ldots n$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
- $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \cdots, \alpha_n \pm \beta_n)$ tel que $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{+}$ pour tout $i = 1 \ldots n$
- $\alpha \neq \beta$ signifie $(\exists i, 0 \leq i \leq n : \alpha_i \neq \beta_i)$
- $\alpha \leq \beta$ signifie $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1 \ldots n$
- $\gamma < \alpha$ signifie $\gamma \leq \alpha$ et $\gamma \neq \alpha$
- $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \ldots\ldots\ldots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \dfrac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}; \beta \leqslant \alpha$
- $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- $D_x^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$
- $D_x^{-1} u$ désigne la primitive de u par rapport à x qui s'annule avec x
- $(x.y)^k = \sum\limits_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \dfrac{|\alpha|! x^{\alpha} y^{\alpha}}{\alpha!}$
- $k \in [[0, n]]$, $n \in \mathbb{N}$ désigne les entiers naturels compris entre 0 et n

INTRODUCTION

En 1842,Cauchy énonce, dans [1] un théorème fondamental, les conditions de convergence d'une série formelle à l'aide des fonctions majorantes, puis il décide d'appliquer ce principe à l'intégration par séries des équations aux dérivées partielles. Après il établit dans [17] un théorème d'existence et d'unicité de la solution analytique pour les équations, quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} D_t u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i D_{x_i} u + B \\ u_{|t=0} = u_0(x_1, ..., x_n) \end{cases}, \tag{1}$$

où B, A_i sont des fonctions analytiques de $(n+1)$ variables $t, x_1, ..., x_n$ et de l'inconnue u elle même fonction des mêmes variables, u_0 est une fonction analytique des variables $x_1, ..., x_n$.

L'idée consiste à développer en série formelle la solution de (1), les coefficients de cette série obtenus à l'aide des conditions initiales et de l'équation en déterminent alors l'unicité.

dans un premier temps il étend ce résultat et cette méthode de démonstration pour les systèmes quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} D_t u_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} D_{x_i} u_k + B_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \\ u_{j|t=0} = u_{0,j}(x_1, ..., x_n) \qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \end{cases},$$

où B_j, A_{ik} sont des fonctions analytiques de $(n+1)$ variables $t, x_1, ..., x_n$ et de l'inconnue $u = (u_1, ..., u_N)$ elle même fonction des mêmes variables, $u_{0,j}$ est une fonction analytique de n variables $x_1, ..., x_n$.

Dans un second temps, il généralise le résultat et la méthode de démonstration de [17] pour les équations semi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} D_t u = F(x_1, ..., x_n, t, u, D_{x_1} u, ..., D_{x_n} u) \\ u_{|t=0} = u_0(x_1, ..., x_n) \end{cases},$$

où F, u_0 sont des fonctions analytiques en leurs variables respectives et u une fonction de $t, x_1, ..., x_n$.

Dans le paragraphe 2 de [16], il étend le résultat et la méthode de démonstration du paragraphe 1 pour les systèmes semi-linéaire d'ordre un de la forme :

$$\begin{cases} D_t u_j = F_j(x_1, ..., x_n, t, u_1, ..., u_N, D_x u, D_t u) & \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \\ u_{j|t=0} = u_{0,j}(x_1, ..., x_n) & \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \end{cases},$$

où

$$D_x = \{D_{x_i} u_k\}_{(1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq N)} \quad \text{et} \quad D_t u = \{D_t u_k\}_{1 \leq k \leq N, k \neq j},$$

avec $F_j, u_{0,j}$ sont des fonctions analytiques en leurs variables respectives et u_j une fonction de $t, x_1, ..., x_n$ pour $1 \leq j \leq N$.

Après, il généralise dans [18], le résultat de [17] au équation semi-linéaire d'ordre quelconque de la forme :

$$\begin{cases} D_t^m u = F(x_1, ..., x_n, t, D^A u) \\ D^k u_{|t=0} = u_{0,k}(x_1, ..., x_n) \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases},$$

où

$D^A u = \left\{ D_x^\alpha D_t^\beta u / (\alpha, \beta) \in A \right\}$, A est une partie finie de l'ensemble

$$\left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{n+1} / |\alpha| + \beta \leq m, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, m) \right\},$$

où $F, u_{0,k}$ sont des fonctions analytiques en leurs variables, et u une fonction de $t, x_1, ..., x_n$.

Il réduit ce problème à un système semi-linéaire de première ordre. A la fin de même article [18], il généralise ce résultat et cette méthode de démonstration à des systèmes d'ordre quelconque sans préciser la forme particulière des équations.

Sans jamais faire référence aux résultats de Cauchy précédemment cités sophie Kowalewsky dans [10] généralise les résultats de Cauchy aux systèmes semi-linéaires d'ordre quelconques de la forme :

$$\begin{cases} D_t^{m_i} u_i = F_i(x_1, ..., x_n, t, D^B u) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N \\ D_t^k u_{i|t=0} = g_{i,k}(x_1, ..., x_n) \qquad \text{et} \quad 0 \leq k \leq m_i - 1 \end{cases},$$

où

$D^B u = \left\{ D_x^\alpha D_t^\beta u_k / (k, \alpha, \beta) \in B \right\}$, $B = \bigcup_k \{k\} \times B_k$, B_k est une partie finie de l'ensemble

$$\left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{n+1} / |\alpha| + \beta \leq m_k, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, m_k) \right\},$$

les fonctions F_i sont des fonctions analytiques des variables $t, x_1, ..., x_n$, et de $y \in \mathbb{R}^r$ où $r = cardB$, $g_{i,k}$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1, ..., x_n$ et u_i est une fonction de ces mêmes variables et de t.

Elle démontre directement le résultat sans ramener le système à un système de premier ordre,en suivant le même schéma de Cauchy, c'est -à-dire en développant en série formelle la solution et en montrant sa convergence à l'aide du principe des fonctions majorantes de Cauchy. Ce résultat sera plus connu sous le nom de "Théorème de Cauchy-Kowalewsky".
Cette démonstration fut simplifiée par Goursat qui étend en 1895, ce résultat et cette démonstration au "problème de Cauchy généralisé" de la forme suivante (certains auteurs appellent "problème de Goursat") :

$$\begin{cases} D_x D_t u = f(t, x.u.D_x u., D_t u, t, D_x^2 u D_t^2 u,) \\ u\,(0, x) = \phi\,(x)\,, u\,(t, 0) = \psi\,(t)\,, \phi\,(0) = \psi\,(0) \end{cases},$$

où ϕ, ψ sont des fonctions holomorphes des variables x et t respectivement, f est holomorphe en toute ces variables.
Un demi siècle après, Lednev généralise le résultat de Goursat au "problème de Cauchy généralisé pour les systèmes" de la forme :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_i} u_i = F_i(x_1, ..., x_n, t, D^B u) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq N \\ u_{i|-w_i t=0} = \mathcal{O}\,(x^{\alpha_i}) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq N \end{cases},$$

où $\alpha_i \in \mathbb{N}^n, D^B u = \left\{ D_x^\beta u_k / \,(k, \beta) \in B \right\}$, $B = \bigcup_k \{k\} \times B_k$, B_k est une partie finie de l'ensemble $\{\beta \in \mathbb{N}^n / \,|\beta| \leqslant |\alpha_k|\,, \beta \neq \alpha_k\}$, les fonctions F_i sont des fonctions analytiques des variables $x_1, x_2, ...x_n$ et de $y \in \mathbb{R}^r$ où $r = cardB, w_i$, sont des fonctions analytiques des variables $x_1, x_2, ...x_n$ et u_i est une fonction de ces même variables.

Plus précisément, il définit pour $\xi \in \left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)^{n}$ le rayon spectral $\rho(\xi)$ de la matrice spectrale du système précédent et démontre ,suivant le même schéma de démonstration que Cauchy, que le système précédent admet une unique solution analytique s'il existe un $\xi \in \left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)^{n}$ vérifiant $\rho(\xi) < 1$.
Cette dernière condition est vérifiée pour le problème de "Cauchy -Kowalewsky ce qui prouve que le théorème de Lednev est une généralisation du théorème de "Cauchy -Kowalewsky, que nous appellerons "théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev".
En 1965, Garding donne une démonstration plus élégante du théorème de Lednev, en utilisant une fonction majorante plus fine que celle de Cauchy et la méthode des approximations successives sur une suite récurrente de séries formelles holomorphes.

Persson généralise ce théoème dans l'espace des fonctions partiellement analytiques, c'est-à-dire analytiques en certaines variables (que l'on appellera variables principales et par rapport aux quelles sont dérivées les fonctions inconnues, dans les termes de gauche des équations du système précédent), et de classe de Gevrey d par rapport à toutes les variables , où d est multi-indice, (suivant la terminologie de Persson).
Ce problème de Cauchy partiellement analytique a été introduit par Leroux, et Helmogrem, puis a été étudié par d'autres auteurs comme Salehov, Friedlender, Friedman, Pucci et Talenti.

Persson a utilisé dans sa démonstration la méthode des approximations successives, par une suite récurrente des séries formelles analytiques en les variables principales, et dont les coefficients sont des fonctions adéquates des autres variables.

Une dizaine d'années après, C.Wagschal dans [26], en se basant sur deux idées dûes à Gevrey réduit la démonstration des résultats analogues à ceux de Garding et Pearsson au théorème du point fixe dans des algèbres de Banach, algèbres définies par l'intermédiaire soit du formalisme des fonctions majorantes de Cauchy, dans le cas holomorphe, soit d'un formalisme de séries formelles dans le cas non holomorphe. La première idée, consiste à utiliser des fonctions majorantes ϕ vérifiant $\phi^2 \ll \phi$,la seconde idée consiste à déduire les propriétés Gevrey de celles des espaces de fonctions analytiques.
Il restreint cependant son étude au "problème de Cauhy généralisés scalaires semi-linéaires.

Dans sa thèse Chantal Moussy a étendue la méthode de Wagschal aux problèmes de Cauchy généralisés pour les systèmes semi-linéaires.

Nous nous proposons dans cette thèse d'étendre les résultats et la méthode de Wagschal (du cas continu-Gevrey) au cas continu-Denjoy-Carleman, c'est-à-dire remplacer la suite $n!^{d-1}$ pour $d > 1$ par une suite M_n logarithmiquement convexe avec $M_0 = 1$ et passer de la classe Gevrey-continue à la classe Denjoy-carleman-continue.

Plan de la thèse

la thèse est composée de 4 chapitres contient chacun :

1. **Le chapitre 1 :** contient toutes les notions sur les séries formelles et propriétés d'une fonction majorante qui jouent un rôle important dans la suite de la thèse .

2. **Le chapitre 2 :** contient quelques rappels sur les algèbres et les algèbres de Banach clôturé par quelques algèbres de Banach construites à partir des séries formelles.

3. **le chapitre 3 :** contient trois sections :

   (a) Dans la première section, on trouve les suites logarithmiquement convexes et toutes les propriétés remarquables de ce type de suites.

   (b) Dans la deuxième section, on trouves les fonctions quasi-analytiques de type Denjoy-Carleman d'une façon général avec un petit aperçu historique sur cette classe de fonctions.

   (c) Dans la troisième section, on trouve la classe de fonctions quasi- analytiques, associée aux suites logarithmiquement convexe ;la stabilité de cette classe par la multiplication et la différentiation.

4. **Le chapitre 4 :** est l'objectif de la thèse qui est une tentative de démonstration de l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Goursat non linéaire dans la

classe Denjoy- Carleman en utilisant le théorème du point fixe de Banach dans une algèbre de Banach construite à partir d'une suite logarithmiquement convexe et une série formelle convenablement choisie .

CHAPITRE 1

SÉRIES ENTIÈRES FORMELLES ET FONCTIONS MAJORANTES

1.1 Séries formelles

1.1.1 Algèbres des polynômes formels

Définition 1.1 (et propriétés). *[3]*

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On considère les polynômes formels à une lettre (ou indéterminée) X à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'addition de deux polynômes, la multiplication d'un polynôme par un scalaire (c'est-à-dire par un élément de $\mathbb{K}$) font de l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ayant la base infinie

$$\{1, X, ..., X^n, ...\}.$$

Chaque polynôme est une combinaison linéaire finie des X^n à coefficients dans $\mathbb{K}$, qu'on écrit

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n,$$

étant entendu que, dans la suite illimitée des coefficients a_n, tous sont nuls sauf un nombre fini.

La table de multiplication $X^p.X^q = X^{p+q}$, définit une multiplication dans $\mathbb{K}[X]$; le produit *de deux polynômes est définit par :*

$$\left(\sum_p a_p X^p\right) \cdot \left(\sum_q b_q X^q\right) = \sum_n c_n X^n, \tag{1.1}$$

où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$*, Cette multiplication est commutative et associative.*

Elle est bilinéaire, en ce sens que

$$\begin{cases} (P_1 + P_2).Q = P_1 Q + P_2 Q \\ (\lambda P).Q = \lambda.(PQ) \end{cases},$$

quels que soient les polynômes P, P_1, P_2, Q *et le scalaire* λ.

Elle admet comme élément unité le polynôme

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n \text{ tel que } a_0 = 1, a_n = 0 \quad \forall n > 0.$$

On exprime toutes ces propriétés en disant que $\mathbb{K}[X]$*, muni de sa structure d'espace vectoriel et de sa multiplication, est une algèbre commutative sur le corps*$\mathbb{K}$

1.1.2 Algèbres des séries formelles

Définition 1.2 (et propriétés). *[3]*

Une série entière formelle en X *est une expression formelle* $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *où cette fois ci on ne suppose plus nécessairement que les coefficients* a_n *soient nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On définit la somme des deux séries formelles*

$$(\sum_{n\geq 0} a_n X^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n X^n) = \sum_{n\geq 0} c_n X^n, \quad c_n = a_n + b_n.$$

Ainsi que le produit d'une série formelle par un scalaire :

$$\lambda\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) X^n.$$

L'ensemble$\mathbb{K}[[X]]$ *des séries formelles forme ainsi un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *.*

On note 0 *l'élément neutre de l'addition, c'est la série formelle dont tous les coefficients sont nuls.*

Le produit de deux séries formelles se définit encore par la formule 1.1, qui conserve un sens car dans le second membre il n'y a qu'un nombre fini de termes à ajouter.

La multiplication est encore commutative et associative, et bilinéaire vis-à-vis de la structure vectorielle.

Ainsi $K[[X]]$ est une algèbre sur le corps K, ayant pour élément unité noté 1 la série

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n \text{ telle que } a_0 = 1 \text{ et } a_n = 0,\ \forall n > 0.$$

1.1.3 Ordre d'une série formelle

Définition 1.3.

Soit $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série formelle. L'ordre $\omega(S)$ de cette série est un entier qui n'est défini que si $S \neq 0$, c'est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$.

On convient que $\omega(0) = +\infty$.

Remarque 1.1. *Les séries formelles S telles que $\omega(S) \geqslant k$ (k entier donné) sont simplement les séries $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ telles que $a_n = 0$ pour $n < k$.*

1.1.4 Familles sommables

Définition 1.4.

Soit une famille $(S_i(X))_{i\in I}$ de séries formelles où $S_i(X) = \sum_{n\geq 0} a_{i,n} X^n$ et I désigne un ensemble d'indices, elle est dite sommables si

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(a_{i,n})_{i\in I}$ ne comprend qu'un nombre fini de coefficients non nuls.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum_{i\in I} a_{i,n}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n X^n$ appelée somme de la famille (S_i) notée $\sum_{i\in I} S_i$.*

1.1.5 Algèbre des séries convergentes

Définition 1.5. *[2]*

Soit $F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ *une série formelle, s'il existe* $\rho > 0$ *tel que* F *converge pour tout* $X \in K$, *tel que* $|X| < \rho$,
alors, $F(X)$ *est dite une fonction holomorphe dans le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* ρ.

L'ensemble des séries convergentes de $K[[X]]$ *forment une algèbre noté* $K\{X\}$.

1.1.6 Substitution d'une série dans une autre

Considérons deux séries formelles

$$S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n, \quad T(Y) = \sum_{p \geqslant 0} b_p Y^p.$$

Supposons ce qui est essentiel que $b_0 = 0$, autrement dit $\omega(T) \geqslant 1$.
A chaque monôme $a_n X^n$ associons la série formelle $a_n (T(Y))^n$, ce qui a un sens puisque les séries formelles en Y forment une algèbre.

Puisque $b_0 = 0$, l'ordre de $a_n (T(Y))^n$ est supérieur à n, donc la famille des $a_n (T(Y))^n$ lorsque n prend les valeurs $0, 1, 2.....$ est sommable et on peut considérer la série formelle

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (T(Y))^n,$$

dont on regroupera les termes en Y.
Cette série formelle en Y est dite obtenue par substitution de $T(Y)$ à X dans $S(X)$, on l'a note $S(T(Y))$, ou encore $(S \circ T)$ lorsqu'on ne spécifie pas l'indéterminée Y.

1.1.7 Dérivation d'une série formelle

Soit $S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ par définition la série dérivée $S'(X)$ est donnée par :

$$S'(X) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n X^{n-1}.$$

On écrit aussi $\frac{dS}{dX}$, ou $\frac{d}{dX} S$ pour la dérivée S'.

1.2 Fonctions majorantes

Si $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha x^\alpha$ et $\Phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Phi_\alpha x^\alpha$ sont deux séries formelles à n variables $(x_1, ..., x_n)$ telles que $u_\alpha \in \mathbb{C}$ et $\Phi_\alpha \in \mathbb{R}_+$.

On note $u \ll \Phi$ la relation $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n)(|u_\alpha| \leq \Phi_\alpha)$.

Si Φ est une série convergente, auquel cas on dit que Φ est une fonction majorante.

Proposition 1.1. *[24]*

Soit $u, v, U, V \in \mathbb{C}[[x]]$. Alors

$$u \ll U \quad et \quad v \ll V \Rightarrow \alpha u + \beta v \ll |\alpha| U + |\beta| V. \tag{1.2}$$

$$u \ll U \quad et \quad v \ll V \Rightarrow u.v \ll U.V. \tag{1.3}$$

$$\partial^\alpha u \ll \partial^{|\alpha|} U. \tag{1.4}$$

$$u \circ v \ll U \circ V. \tag{1.5}$$

Avec :

$$(U \circ V)(x) = \sum_{n=0} \frac{U_n}{n!} [V(x) - V(0)]^n.$$

Fonction de Lax

la fonction majorante de Lax est définie par :

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}, \quad |t| < 1.$$

Dont voici une propriété essentielle

Proposition 1.2. *[26]*

Il existe une constante K telle que

$$\theta^2(t) \ll K\theta(t).$$

Preuve. [26]

D'après le produit de Cauchy on a :

$$\begin{aligned}\theta^2(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2}\right) t^n.\end{aligned}$$

On majore les coefficients de t^n dans $\theta^2(t)$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} &\leq 2 \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}\right) \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}\right) \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

comme $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{\pi}{6}$, donc il nous suffit de prendre K tel que :

$$K \geq \frac{4\pi}{3} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}.$$

On prend par exemple $K = \dfrac{4\pi}{3}$. □

Définition 1.6. *[26]*

Considérons la fonction majorante φ_R définie par :

$$\varphi_R(t) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R}), \quad R > 0. \tag{1.6}$$

Proposition 1.3. *[26]*

$\forall k \geq 1, \forall R > 0$ *on a :*

$$\varphi_R^k(t) \ll \varphi_R(t). \tag{1.7}$$

Preuve. [26]

On a pour $k = 2$

$$\varphi_R^2(t) = K^{-2}\theta^2(\frac{t}{R}) \ll K^{-2} \times K\theta(\frac{t}{R}) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R}).$$

On itère les processus pour les autre ordres.

$$\varphi_R^k(t) \ll \varphi_R^{k-1}(t) \ll \cdots \ll \varphi_R(t).$$ □

Proposition 1.4. *[26]*

Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$D^{-k}\varphi_R(t) \ll cR^k\varphi_R(t), \text{ pour tout } R > 0 \text{ et tout } k \in \mathbb{N}.$$

Preuve. [26]

Par intégration k fois la fonction $\varphi_R(t)$ par rapport à t on a :

$$D^{-k}\varphi_R(t) = K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}.\frac{1}{R^n}.\frac{n!}{(n+k)!}t^{n+k},$$

avec

$$cR^k\varphi_R(t) = cR^k.K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{R^n(n+1)^2}$$

d'où

$$D^{-k}\varphi_R(t) \ll cR^k\varphi_R(t) \Leftrightarrow K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}.\frac{1}{R^n}.\frac{n!}{(n+k)!}t^{n+k} \ll cR^k.K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{R^n(n+1)^2},$$

et l'inégalité cherchée s'ecrit :

$$c \geqslant \left(\frac{n+k+1}{n+1}\right)^2.\frac{n!}{(n+k)!}, (n, k \in \mathbb{N}),$$

cette dernière fonction est décroissante par rapport à n, donc il suffit de choisir

$$c = \sup_k \frac{(k+1)^2}{k!}. \qquad \square$$

Remarque 1.2.

Remarquons que $\sup_k \frac{(k+1)^2}{k!}$ *est atteint car* $u_n = \frac{(k+1)^2}{k!}$ *est le terme général d'une série convergente.*

Lemme 1.1. *[26] Pour tout $\eta > 1$, il existe une constante $c(\eta) > 0$ telle que pour tout $R > 0$, on a :*

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c(\eta)\, \varphi_R(t)\,. \tag{1.8}$$

Preuve.

Pour $|t| < \eta R$ on a :

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(\eta R)^n},$$

et donc

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c(\eta)\, \varphi_R(t)\,,$$

implique :

$$\frac{1}{(\eta R)^n} \leqslant c(\eta)\, K^{-1} \frac{1}{R^n} \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

l'inégalité devient :

$$c(\eta) \geqslant K \frac{(n+1)^2}{\eta^n},$$

qui et le terme général d'une série convergente donc il suffit de prendre

$$c(\eta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} K \frac{(n+1)^2}{\eta^n}. \qquad \square$$

CHAPITRE 2

ALGÈBRES ET ALGÈBRE DE BANACH

2.1 Espace vectoriel

Définition 2.1.

Etant donné un corps commutatif $\mathbb{K}$ d'élément neutre 0 et e. On dit qu'un ensemble E muni d'une opération interne et d'une opération externe dont le domaine des opérateurs est $\mathbb{K}$, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$si :

1. *E est un groupe abélien pour son opération interne.*
2. *L'opération externe est telle que, pour tout x de E et tous λ et μ de $\mathbb{K}$, on ait :*

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad e.x = x.$$

3. *L'opération externe est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$ et par rapport à l'opération interne de E.*

2.1.1 Sous espace vectoriel

Théorème 2.1.

Tout partie non vide F d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$stable par l'addition interne de E et la multiplication externe a pour structure induite sur elle par la structure de E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 2.2.

On dit que F est un sous espace vectoriel de E

Théorème 2.2.

Pour qu'une partie non vide de F d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, soit un sous espace vectoriel de E, il faut et il suffit que :

1. $(\forall x \in F)\,;(\forall y \in F) : x - y \in F.$
2. $(\forall x \in F)\,;(\forall \alpha \in K) : \alpha.x \in F.$

2.2 Espace vectoriel normé

Définition 2.3.

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Une application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée norme si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- *pour tout $x \in E; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$*
- *pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda.x\| = |\lambda|\, \|x\|.$*
- *pour tout $x, y \in E; \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$*

Définition 2.4.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé, noté $(E, \|.\|)$.

Définition 2.5.

On dit que deux normes N_1, N_2 sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ telles que :

$$c_1 N_1 \leqslant N_2 \leqslant c_2 N_1.$$

Proposition 2.1.

Deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E définissent la même topologie sur E.

2.2.1 Espace complet

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé,

Définition 2.6.

On appelle suite de Cauchy d'éléments de E toute suite $(x_n) \subset E$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que }, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant n_0 : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Définition 2.7.

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Définition 2.8.

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit de Banach s'il est complet pour la norme associée.

2.2.2 Point fixe et principe de contraction

De nombreuse questions, liées à l'existence et à l'unicité des solutions de certains types d'équations (par exemple des équations différentielles) peuvent être ramenées à la questions d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application de l'espace métrique correspondant dans lui même. Parmi les différents critères d'existence et d'unicité d'un point fixe pour de telles applications, l'un des plus simples et à la fois des plus importants et celui qui porte le nom de principe de contractions.

Définition 2.9.

On dit que x est un point fixe pour une application f si $f(x) = x$.
Autrement solution de l'equation $f(x) = x$.

Définition 2.10.

Soit (E, d) un espace métrique.
Une application $f : (E, d) \longrightarrow (E, d)$ est appelée application contractante ou simplement une contraction, s'il existe une constante k, $0 < k < 1$ tel que pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a l'inégalité :

$$d(f(x), f(y)) \leqslant k.d(x, y).$$

Théorème 2.3 (Théorème de Point fixe de Banach). *[4]*

Soit (E,d) un espace métrique complet, A un sous ensemble fermé de E, soit une application $f : A \to E$ telle que $f(A) \subset A$ et

$$d(f(u),f(v)) \leq kd(u,v) \quad \forall u,v \in A, \qquad \text{et } 0 \leq k < 1,$$

alors, f admet un point fixe unique.

Corollaire 2.1.

Si f est dérivable sur le segment $[a,b]$et si $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant k < 1$ alors :
f est contractante.

2.3 Formule de Stirling et formule de Leibnitz

2.3.1 Formule de Stirling

Historiquement Abraham de Moivre qui a initialement démontré la formule suivante,

$$n! \sim c.n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},$$

oú c est une constante réelle non nulle.

L'apport de Stirling fut d'attribuer la valeur $c = \sqrt{2\pi}$ la formule devient

$$n! \sim \sqrt{2\pi.n}.n^n e^{-n}, \text{ portant le nom de Stirling.} \tag{2.1}$$

2.3.2 Formule de Leibnitz

Proposition 2.2.

Si u,v deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de la variable $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\partial^\alpha (u.v) = \sum_{\beta \leq \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}u.\partial^\beta v. \tag{2.2}$$

2.4 Algèbres

Définition 2.11.

Un espace vectoriel E s'appelle algèbre s'il est muni d'une troisième opération, nommée multiplication et satisfaisant aux axiomes suivants :

- *pour tout* $x, y, z \in E : x\,(y.z) = (x.y)\,z,$
- *pour tout* $x, y, z \in E : x\,(y+z) = x.y + x.z;\ \ (y+z)\,.x = y.x + z.x,$
- *pour tout* $x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K} :\ \ \alpha\,(x.y) = x.\,(\alpha.y) = (\alpha.x)\,.y,$
- *S'il existe un élément* $e \in E$ *tel que* $e.x = x.e = x$ *quel que soit* $x \in E$ *on dit que* e *est l'unité de l'algèbre et que* E *est une algèbre avec unité,*
- *si la multiplication est commutative on dit que* E *est une algèbre commutative.*

Remarque 2.1. *L'élément unité lorsqu'il existe il est unique.*

Définition 2.12.

Un espace vectoriel normé s'appelle algèbre normée s'il est une algèbre avec unité qui vérifie en plus les deux axiomes :

- $\|e\| = 1,$
- *pour tout* $x, y \in E : \|x.y\| \leqslant \|x\|\,.\,\|y\|.$

Définition 2.13.

Une algèbre normée est dite de Banach si elle est complète pour la norme associée

Définition 2.14.

Une application $p : E \longrightarrow F$ *s'appelle homomorphisme de l'algèbre* E *dans l'algèbre* F *si elle vérifie les conditions suivantes :*

- $p\,(x+y) = p\,(x) + p\,(y),$
- $p\,(\alpha.x) = \alpha p\,(x),$
- $p\,(x.y) = p\,(x)\,.p\,(y).$

2.5 Quelques algèbres de Banach définies par des séries formelles

Dans un article Wagschal a démontré l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Goursat non linéaire dans différentes classes de fonctions en le réduisant à un problème de point fixe dans des algèbres de Banach définies par l'intermédiaire de séries formelles convenablement choisies dont :

1. **Algèbre de Banach des fonctions holomorphes**

   Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n, \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

   On note $\xi.x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.x_i$

   $$\mathcal{B}_R(\xi) = \{u \in \mathbb{C}\{x\}; (\exists c \geqslant 0)(u(x) \ll c\phi_R(\xi.x))\},$$

   et pour $u \in \mathcal{B}_R(\xi), \|u\| = \min\{c \geqslant 0; u(x) \ll c\phi_R(\xi.x)\}$.

   Les espaces $\mathcal{B}_R(\xi)$ munis de cette norme sont alors des algèbres de Banach de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, associées la fonctions majorante ϕ_R.

2. **Algèbre de Banach des fonctions partiellement holomorphes**

   Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^p,\ y = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{C}^q,\ |x| = (|x_1|, |x_2|, ..., |x_p|)$, $|y| = (|y_1|, |y_2|, ..., |y_q|),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^p$,

   $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ...\zeta_q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^q$, On note

   $$\xi.|x| = \sum_{i=1}^{p} \xi_i |x_i|, \quad \zeta|y| = \sum_{i=1}^{q} \zeta_i |y_i|,$$

   Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_x^p \times \mathbb{C}_y^q$,

   $$\Omega_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q, \xi.|x| + \zeta|y| < R\}, R > 0,$$

   on note

   $\mathcal{C}^{0,\omega}(\Omega_R) = \{u : \Omega_R \longrightarrow \mathbb{C},$ holomorphe par rapport à y et continue par rapport à $x\}$, l'ensemble noté

   $$\mathcal{E}_R(\xi, \zeta) = \left\{u \in \mathcal{C}^{0,\omega}(\Omega_R); (\exists c \geqslant 0)(u \ll c\phi_R)(\xi.|x| + \zeta|y|)\right\},$$

   munis de la norme $\|u\| = \inf\{c \geqslant 0, u \ll c\phi_R(\xi.|x| + \zeta|y|)\}$ est une algèbre de Banach de fonctions partiellement holomorphes associée à la fonction majorante ϕ_R.

3. **Algèbre de Banach de fonctions de classe de Gevrey $\mathcal{G}^{\alpha,d}$**

On note

$$\mathcal{C}^{0,\infty}(U\times\Omega)=\left\{u:U\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R};\forall\delta\in\mathbb{N}^q,\mathcal{D}_y^\delta u \text{ soit continue sur U}\times\Omega\right\},$$

et on note

$$\mathcal{G}^{0,d}(U\times\Omega)=\left\{u\in\mathcal{C}^{0,\infty}(U\times\Omega)/\exists c>0,\forall\delta\in\mathbb{N}^q,\sup_{U\times\Omega}\left|D_y^\delta u\right|\leqslant c^{|\delta|+1}\delta!^d\right\},$$

l'espace $\mathcal{G}^{0,d}(U\times\Omega)$ est appelé espace des fonctions de classe Gevrey sur $U\times\Omega$.
Considérons la série formelle en $y,\phi(t,y)=\sum_{\delta\in\mathbb{N}^q}\frac{y^\delta}{\delta!}\phi_\delta(t)$ où,
$\phi_\delta:|U|\longrightarrow\mathbb{R}^+$ sont continues.

Définition 2.15.

On note

$$\mathcal{C}_\phi^{0,\infty}(U_R\times\Omega)=\left\{u\in\mathcal{C}^{0,\infty}(U_R\times\Omega);(\exists c\geqslant 0)(u\ll c.\phi)\right\},$$

avec la notation

$$u\ll c\phi\Leftrightarrow\forall\delta\in\mathbb{N}^q,\forall x\in U_R,\sup_\Omega\left|\mathcal{D}_y^\delta u(x,y)\right|\leqslant c\phi_\delta(t),(t=|x|).$$

On munit cet espace de la norme

$$\|u\|=\min\{c\geqslant 0;u\ll c\phi\}.$$

Proposition 2.3.

Les espaces $\mathcal{C}_\phi^{0,\infty}(U_R\times\Omega)$ sont des espaces de Banach.

En considérant la série formelle suivante :

$$\Phi_R^{0,d}(t,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta.y)^k}{k!}k!^{d-1}\mathcal{D}^k\phi_R(\xi.t),$$

cette série formelle est bien définie pour $t\in|U_R|$,

Corollaire 2.2.

On note

$$\mathcal{G}_R^{0,d}(\Omega_R)=\left\{\mathcal{C}_\phi^{0,\infty}(U_R\times\Omega/\exists c\geqslant 0,u\ll c\Phi_R^{0,d}\right\},$$

où

$$u \ll c\Phi_R^{0,d} \Leftrightarrow \forall\delta \in \mathbb{N}^{q,\forall x\in U_R}, \sup_{\Omega} \left|\mathcal{D}_y^{\delta} u\,(x,y)\right| \leqslant c\zeta^{\delta}\,(|\delta|!)^{d-1}\,\mathcal{D}^{|\delta|}\phi_R\,(\xi.t)\,,$$

muni de la norme

$$\|u\| = \min\left\{c \geqslant 0; u \ll c\Phi_R^{0,d}\right\}.$$

Les espaces $\mathcal{G}_R^{0,d}(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach de classe Gevrey associées à la série formelle $\Phi_R^{0,d}$.

4. **Algèbre de Banach de fonctions de classe de Gevrey $\mathcal{G}^{\omega,d}$**

Soit d un nombre plus grand ou égal à 1,

$x = \left(x_1, x_2....x_p\right) \in \mathbb{C}^p,\ y = \left(y_1, y_2....y_q\right) \in \mathbb{R}^q,$

$\xi = \left(\xi_1, \xi_2....\xi_q\right) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^p, \zeta = \left(\zeta_1,\ \zeta_2....\zeta_q\right) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^q,$

$U \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}_x^p \times \mathbb{R}_y^q$,

pour $R > 0$, on note

$$U_R = \{x \in \mathbb{C}^p; \xi.\,|x| < R\}\,, \quad \Omega_R = U_R \times \Omega.$$

$\mathcal{C}^{\omega,\infty}(U \times \Omega) = \left\{u : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; \forall\delta \in \mathbb{N}^q, \mathcal{D}_y^{\delta} u \text{ soit holomorphe en x et continue en y}\right\}.$

Et :

$$\mathcal{G}^{\omega,d}(U \times \Omega) = \left\{u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(U \times \Omega) / \exists c > 0, \forall\delta \in \mathbb{N}^q, \sup_{U\times\Omega} \left|\mathcal{D}_y^{\delta} u\right| \leqslant c^{|\delta|+1}\delta!^d\right\}.$$

En considérant la série formelle $\Phi_R^{\omega,d}(x,y)$, vérifiant $\Phi_R^{\omega,d}(x,y)^2 \ll \Phi_R^{\omega,d}(x,y)$ définie par :

$$\Phi_R^{\omega,d}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} k!^{d-1} \mathcal{D}^k \phi_R(\xi.x)\,.$$

Corollaire 2.3.

On note

$$\mathcal{G}_R^{\omega,d}(\Omega_R) = \left\{u \in \mathcal{C}^{\omega,\infty}(U_R \times \Omega)\,; (\exists c \geqslant 0) \left(u \ll c\Phi_R^{\omega,d}\right)\right\},$$

où :

$$u \ll c\Phi_R^{\omega,d} \Leftrightarrow \forall\delta \in \mathbb{N}^q, y \in \Omega, \mathcal{D}_y^{\delta} u\,(x,y) \ll c\zeta^{\delta}\,|\delta|!^{d-1}\mathcal{D}^{|\delta|}\phi_r\,(\xi.x)\,.$$

muni de la norme

$$\|u\| = \min\left\{c \geqslant 0; \left(u \ll c\Phi_R^{\omega,d}\right)\right\},$$

les espaces $\mathcal{G}_R^{\omega,d}(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach de fonctions de classe Gevrey $\mathcal{G}_R^{\omega,d}$ associées à la série formelle $\Phi_R^{\omega,d}$.

CHAPITRE 3

SUITES LOGARITHMIQUEMENT CONVEXES ET QUASI-ANALYCITÉ

3.1 Suites convexes et log-convexes

Définition 3.1.

Soit (a_k) une suite de nombres réels et M_k une suite de nombres réels strictement positifs,

1. *on dit que (a_k) est convexe si :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_k + a_{k+2}\right). \tag{3.1}$$

2. *On dit que (M_k) est logarithmiquement convexe si la suite $(logM_k)$ est convexe.*

Proposition 3.1.

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et (M_k)une suite de nombres réels strictement positifs alors :

1. *$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si : $(a_{k+1} - a_k)$ est croissante.*
2. *Si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convexe, alors quel que soit $p \in \mathbb{N}$; $\left(\dfrac{a_k - a_p}{k-p}\right)$ est croissante.*
3. *Si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convexe et si*

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \frac{a_k}{k} = \infty.$$

alors : $\left(\dfrac{a_k}{k}\right)$est croissante à partir d'un certain rang

4. *(M_k) est log-convexe si et seulement si pour tout*

$$k \in \mathbb{N}: \; M_k^2 \leqslant M_{k-1}.M_{k+1}. \tag{3.2}$$

5. *(M_k) est log-convexe si et seulement si pour tout : $k \in \mathbb{N}$: $\left(\dfrac{M_{k+1}}{M_k}\right)$ est croissante.*
6. *Si (M_k) est log-convexe et $M_0 = 1$ alors :*

$$M_m.M_n \leqslant M_{n+m}, \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

7. *Si (M_k) est log-convexe alors pour $k \in \mathbb{N}$: $(M_k)^{\frac{1}{k}}$ est croissante.*

Preuve.

1. $(a_{k+1} - a_k)$ est croissante si et seulement si :
   $\forall k \in \mathbb{N}\,;\, (a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) > 0$ si et seulement $a_{k+2} + a_k > 2a_{k+1}$ ce qui est équivalent à (a_k) convexe.
2. Supposons (a_k) convexe. Soit $p \in \mathbb{N}$, quelque soit $k > p$ on a :

$$\frac{a_{k+1} - a_p}{k+1-p} - \frac{a_k - a_p}{k-p} = \frac{(a_{k+1} - a_p)(k-p) - (a_k - a_p)(k+1-p)}{(k-p)(k+1-p)},$$

   or :

$$\begin{aligned}
&(a_{k+1} - a_p)\,(k-p) - (a_k - a_p)\,(k-p+1) \\
&\qquad\qquad = \left(\sum_{n=p}^{k} (a_{n+1} - a_n)\right)(k-p) - \left(\sum_{n=p}^{k-1} (a_{n+1} - a_n)\right)(k-p+1) \\
&\qquad\qquad \geqslant (k-p+1)\,(a_{p+1} - a_p)\,(k-p) - (a_{p+1} - a_p)\,(k-p+1)\,(k-p) \\
&\qquad\qquad = 0,
\end{aligned}$$

   par la croissance de $(a_{k+1} - a_k)$ on a : $\left(\dfrac{a_k - a_p}{k-p}\right)_{k>p}$ croit.
3. Supposons $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convexe et $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} \dfrac{a_k}{k} = \infty$ alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{a_m}{m} = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{a_k}{k} \text{ et si } \quad k \in \mathbb{N}^* : \frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k} = \frac{k a_{k+1} - (k+1)\,a_k}{k\,(k+1)}.$$

   d'autre part :

$$[(k+1)\,a_{k+2} - (k+2)\,a_{k+1}] - [k a_{k+1} - (k+1)\,a_k] = (k+1)\,(a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k) \geqslant 0.$$

par convexité de (a_k). et donc pour tout $k \geqslant m$:

$$ka_{k+1} - (k+1)\,a_k \geqslant m.a_{m+1} - (m+1)\,a_m = m\,(m+1)\left(\frac{a_{m+1}}{m+1} - \frac{a_m}{m}\right) \geqslant 0.$$

Par choix de m, ainsi, $\dfrac{a_{k+1}}{k+1} - \dfrac{a_k}{k} \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant m$, d'où le résultat.

4. Immédiat s'obtient par passage à l'exponentielle dans la définition de log-conv de (M_k).
5. S'obtient immédiatement à partir de (4) en notant que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{M_{k+2}}{M_{k+1}}.\frac{M_k}{M_{k+1}} = \frac{M_{k+2}.M_k}{M_{k+1}^2}.$$

6. par récurrence sur m,

   pour $m = 0$ on a : $M_n M_0 = M_n \leqslant M_{n+0}$,

   supposons maintenant qu'elle est vraie pour m, d'après (5) la suite $\left(\dfrac{M_{k+1}}{M_k}\right)$ est croissante on a :

$$\begin{aligned} M_n.M_{m+1} &= M_n.M_m.\frac{M_{m+1}}{M_m} \\ &\leqslant .M_{n+m}.\frac{M_{m+1}}{M_m} \\ &\leqslant .M_{n+m}.\frac{M_{m+2}}{M_{m+1}} \\ &\vdots \\ &\leqslant .M_{n+m}.\frac{M_{m+n+1}}{M_{m+n}}, \end{aligned}$$

   d'où

$$M_n.M_{m+1} \leqslant M_{m+n+1}.$$

7. On a

$$M_n = \frac{M_n}{M_0} = \prod_{j=1}^{j=n} \frac{M_j}{M_{j-1}} \leqslant \left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right)^n,$$

   ce qui est équivalent à $M_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \leqslant M_n^{\frac{1}{n}}$.

□

3.2 Régularisée convexe

3.2.1 Ensembles convexes

La notion de convexité est à la base de nombreuses questions de la théorie des espaces vectoriels. Elle est fondée sur des considérations géométriques intuitives, mais peut être formulée aussi en termes purement analytiques.

Définition 3.2.

Soit E un espace vectoriel réel et soient x, y deux points de cet espace. On appelle segment fermé joignant les points x et y dans E l'ensemble de tous les éléments

$$\{\alpha x + \beta y, \quad \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1\}.$$

Définition 3.3.

Un segment privé de ses extémités $x$et y s'appelle segment ouvert.

Définition 3.4.

Un ensemble $M \subset E$ est dit convexe si pour tout couple de points $x, y \in M$, le segment joignant les points x et y est contenu dans M.

Définition 3.5.

On appelle noyau $J(M)$ d'un ensemble $M \subset E$ l'ensemble des points $x \in M$ possédant la propriété suivante :
Pour tout $y \in E$ il existe un nombre $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tel que $x + ty \in M$ pour $|t| < \varepsilon$.
Un ensemble convexe dont le noyau n'est pas vide s'appelle corps convexe.

Proposition 3.2.

Si M est un ensemble convexe son noyau $J(M)$ est convexe.

Preuve.

Soient $x, y \in J(M)$ et $z = \alpha x + \beta y, \alpha, \beta, \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$.
Alors pour $a \in E$ donnée, on peut trouver deux nombres $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ tels que pour tous $|t_1| < \varepsilon_1$ et $|t_2| < \varepsilon_2$, les points $x + t_1 a$ et $y + t_2 a$ appartiennent à l'ensemble M, par conséquent si $|t| < \varepsilon$ pour $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, le point

$$\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = z + ta \in M, \text{ c-à-d. } z \in J(M). \qquad \square$$

Théorème 3.1.

L'intersection de toute famille d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

Preuve.

Soit $M = \bigcap_{\alpha} M_\alpha$ tous les ensembles M_α étant convexes.
Soient d'autre part, x et y deux points quelconques de M.
Le segment joignant ces points ces points appartient à chacun des ensembles M_α donc à M par conséquent, M est bien un ensemble convexe. □

Remarque 3.1. *Remarquons que l'intersection des corps convexes (qui constitue un convexe) n'est pas nécessairement un corps convexe .*

Définition 3.6.

Pour tout ensemble A d'un espace vectoriel E, il existe un plus petit ensemble convexe qui le contient.
C'est l'intersection de tous les convexes contenant A (il existe au moins un ensemble convexe contenant A par exemple l'espace E tout entier), le plus petit convexe contenant A s'appelle l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

Proposition 3.3.

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \frac{a_k}{k} = \infty$, alors
La suite (α_k) définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = \sup\left\{\beta_k, (\beta_n) \text{ suite convexe de réels minorant } (a_n)\right\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *(α_k) est une suite de réels convexe qui minore (a_k).*
2. *Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que*

$$\varphi(0) = 0, a_{\varphi(k)} = \alpha_{\varphi(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

   et (α_k) est arithmétique sur $[\varphi(i), \varphi(i+1)]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On dira que (α_k) est la régularisée convexe de (a_k).
On appellera régularisée log-convexe d'une suite (M_n) de réels strictement positifs l'exponentielle de la régularisée convexe de $(\log M_n)$.

Preuve.

Supposons que $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} \dfrac{a_k}{k} = \infty$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $C_k = \{\beta_k, (\beta_n) \text{ suite convexe de réels minornat } (a_n)\}$.
   comme $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} \dfrac{a_k}{k} = \infty$, alors à fortiori, $a_k \longrightarrow \infty$ et donc, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k$.

   La suite constante et egale à (a_m) est une suite convexe minorant (a_n), donc $a_m \in C_k$ et $C_k \neq \phi$.

   En outre, C_k est clairement majoré par a_k, ainsi α_k est un réel.

   La convexité de (α_k), et le fait qu'elle minore (a_k) sont par construction.
2. Comme (α_k) est convexe, alors quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{\alpha_k - \alpha_p}{k-p}\right)_{k>p}$ est croissante, donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant p, a_k \geqslant \alpha_k \geqslant \alpha_p + (\alpha_{p+1} - \alpha_p)(k-p).$$

   Soit $p \in \mathbb{N}$, montrons qu'il existe $q > p$ tel que $a_q = \alpha_p + (\alpha_{p+1} - \alpha_p)(q-p)$.
   La suite $\left(\dfrac{a_k - \alpha_p}{k-p}\right)_{k>p}$ tend vers l'infinie, car

$$\begin{aligned}\frac{a_k - \alpha_p}{k-p} &= \frac{a_k}{k-p} - \frac{\alpha_p}{k-p} \\ &= \frac{a_k}{k} \cdot \frac{k}{k-p} - \frac{\alpha_p}{k-p} \\ &\xrightarrow{k \longrightarrow \infty} \infty.\end{aligned}$$

   Ainsi, il existe $r > p$ tel que

$$\frac{a_r - \alpha_p}{r-p} = \inf_{k>p} \frac{a_k - \alpha_p}{k-p} = c.$$

   La suite (h_k) définit par $h_k = \begin{cases} \alpha_k & si \quad k \leqslant r \\ \alpha_r + c(k-r), & si \quad k \geqslant r \end{cases}$,

   est un minorant convexe de (a_k),

   En effet on a : $h_k = \alpha_k \leqslant a_k$ pour $k \leqslant r$, et pour $k \geqslant r, \alpha_r + c(k-r) \leqslant a_k$ par définition de c.

   pour la convexité, on calcule pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$h_{k+2} - 2h_{k+1} + h_k = \begin{cases} \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k & si \quad k+2 \leqslant r \\ \alpha_{r-1} - \alpha_r + c & si \quad k = r-1 \\ 0 & si \quad k \geqslant r \end{cases}$$

cette quantité est clairement positive pour $k \neq r-1$.

Étudions le cas restant,

comme (α_k) minore (a_k) et $\left(\dfrac{\alpha_k - \alpha_r}{k-r}\right)_{k>r}$ est croissante on a :

$$k > r, \frac{a_k - \alpha_r}{k-r} \geqslant \frac{\alpha_k - \alpha_r}{k-r} \geqslant \alpha_{r+1} - \alpha_r,$$

d'où $c \geqslant \alpha_{r+1} - \alpha_r \geqslant \alpha_r - \alpha_{r-1}$, c'est -à-dire $h_{k+2} - 2h_{k+1} + h_k \geqslant 0$ pour $k = r-1$.

On obtient donc bien la convexité de (h_k).

Donc par définition de (α_k), il vient $h_k \leqslant \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En particulier, $\alpha_r + c\,(r+1-r) \leqslant \alpha_{r+1}$. Or, on a déjà $c \geqslant \alpha_{r+1} - \alpha r$, d'où :

$$c = \alpha_{r+1} - \alpha_r.$$

Donc, on choisissant $q = r$, on obtient

$$\forall k \in [[p,q]]\,, \alpha_k \geqslant \alpha_p + c\,(k-p)\,,$$

avec l'égalité pour le cas $k = p$, car

puisque $\dfrac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p} \leqslant \dfrac{a_q - \alpha_p}{q-p} = c$, on a $\alpha_q \leqslant \alpha_p + c\,(q-p)$.

En particulier, $\alpha_q = \alpha_p + \dfrac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p}\,(q-p) = a_q$.

Montrons que (α_k) est arithmétique sur $[[p,q]]$.

Quel que soit $k \in [[p,q]]$, on a la relation :

$$\frac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p}\,(k-p) + \alpha_p \leqslant \alpha_k,$$

puisque

$$\frac{\alpha_q - \alpha_p}{q-p}\,(k-p) \geqslant \frac{\alpha_k - \alpha_p}{k-p}.$$

Or $\alpha_q = \alpha_p + c\,(q-p)$.

D'où $c\,(k-p) + \alpha_p \geqslant \alpha_k$, pour tout $k \in [[p,q]]$.

Or on sait déjà que $\alpha_k \geqslant \alpha_p + c\,(k-p)$, ainsi (α_k) est arithmétique sur $[[p,q]]$.

Posons enfin $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k+1) = \min\left\{q > \varphi(k) \text{ t.q} : \alpha_q = a_q \text{et } (\alpha_n) \text{ arithmétique sur } [[\varphi(k), q]]\right\}.$$

Par ce qui précède, φ est bien définie par construction elle vérifie les propriétés voulues. □

Inégalité arithmético-géométrique

Lemme 3.1. *Soient $a_1, a_2, ...a_n$, n réels strictement positifs, alors on a :*

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}. \tag{3.4}$$

On peut aussi minorer la moyenne géométrique par la moyenne harmonique :

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n} + ... + \dfrac{a_n}{n}}. \tag{3.5}$$

Dans les deux cas l'égalité aura lieu si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Preuve.

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

est équivalente à

$$\ln \sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n} \leqslant \ln\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)$$

ensuite utiliser la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le résultat. □

Lemme 3.2 (Inégalité de Carleman-Collingwood)**.**

soit $(a_n)_{n\mathbb{N}} \subset \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1......a_n)\,\frac{1}{n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \tag{3.6}$$

Preuve.

cette inégalité est enfaite une conséquence de l'inégalité arthmético-géométrique, Pour toute suite (c_n) strictement positive, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 .....a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_1 a_1 c_2 a_2 .....c_n a_n}{c_1 .c_2 .....c_n} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 .c_2 ....c_n)^{\frac{-1}{n}} . \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \text{ :inégalité arthmético-géométrique} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} (c_1 .c_2 ....c_n)^{\frac{-1}{n}} .
\end{aligned}$$

En particulier si l'on prend, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, on obtient

$$c_1 .c_2 ....c_n = (n+1)^n .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 .....a_n)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \\
&\leqslant e. \sum_{k=1}^{\infty} a_k .
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle de l'inégalité de convexité $1 + \dfrac{1}{k} \leqslant e^{\frac{1}{k}}$.
La proposition suivante jouent un rôle important dans la démonstration d'un résultat principal à savoir le théorème de Denjoy-Carleman. □

Proposition 3.4.

Soit $(M_k) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} M_k^{\frac{1}{k}} = \infty$. *On note* $\left(M_k'\right)$ *la régularisée log-convexe de* (M_k). *On pose pour tout* $k \in \mathbb{N}^*, \beta_k = \inf\limits_{p \geqslant k} M_p^{\frac{1}{p}}$.
Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} < \infty.$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k'^{\frac{1}{k}}} < \infty.$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k'}{M_{k+1}'} < \infty.$

Preuve.

On note $\left(M'_{\varphi(n)}\right)$ une sous suite de $\left(M'_n\right)$ telle que :
$\varphi(0) = 0, M_{\varphi(k)} = M'_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $\left(\log M'_k\right)$ est arithmétique sur $[[\varphi(i), \varphi(i+1)]]$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$.
Comme $\frac{\log M'_k}{k} \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} \infty$ et $\left(M'_k\right)$ log-convexe, et que $\frac{\log M'_k}{k}$ est croissante àpartir d'un certain rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\forall k \geqslant k_0, \beta_k = \inf_{n \geqslant k} M_n^{\frac{1}{n}} \geqslant \inf_{n \geqslant k} M_n'^{\frac{1}{n}} \geqslant M_k'^{\frac{1}{k}} > 0.$$

D'où :

$$\forall k \geqslant k_0, 0 \leqslant \frac{1}{\beta_k} \leqslant \frac{1}{M_k'^{\frac{1}{k}}}.$$

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \widetilde{M_{\varphi(k)}} = M_{\varphi(k)}, \widetilde{M}_k = \infty$ si $k \notin \varphi(\mathbb{N})$, puis $\gamma_k = \inf_{n \geqslant k} \widetilde{M_n}^{\frac{1}{n}}$.
Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \beta_k \leqslant M_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \widetilde{M_n}^{\frac{1}{n}}$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \beta_k \leqslant \gamma_k.$$

D'autre part, si $i > k_0$ et $n \in]\varphi(i-1), \varphi(i)]$, alors

$$\gamma_n = M_{\varphi(i)}^{\frac{1}{\varphi(i)}},$$

car ($\widetilde{M}_n = \infty$ pour $n \in]\varphi(i-1), \varphi(i)]$ et $\left(M_k'^{\frac{1}{k}}\right)_{k \geqslant k_0}$ est croissante),
en outre,
pour tous $i > k_0$ et $n \in]\varphi(i-1), \varphi(i)]$:

$$\frac{\log M_{\varphi(i)}}{\varphi(i)} \leqslant \frac{\log M_{\varphi(i)} - \log M_{\varphi(i-1)}}{\varphi(i) - \varphi(i-1)} = \log M'_n - \log M'_{n-1}.$$

En effet : on a $\frac{\log M_{\varphi(i)}}{\varphi(i)} \geqslant \frac{\log M_{\varphi-1(i)}}{\varphi(i-1)}$ par croissance de $\left(\frac{\log M'_k}{k}\right)_{k \geqslant k_0}$.
Donc

$$\varphi(i-1) \log M_{\varphi(i)} \geqslant \varphi(i) \log M_{\varphi(i-1)}.$$

d'où :

$$\left(\varphi\left(i-1\right)-\varphi\left(i\right)\right)\log M_{\varphi(i)}\geqslant\varphi\left(i\right)\left(\log M_{\varphi(i-1)}-\log M_{\varphi(i)}\right).$$

On en déduit l'inégalité voulue, l'égalité qui suit étant due au fait que $\left(\log M_k^{'}\right)$ est arithmétique sur $[[\varphi\left(i-1\right),\varphi\left(i\right)]]$.
On obtient alors que

$$M_{\varphi(i)}^{\frac{1}{\varphi(i)}}\leqslant\frac{M_n^{'}}{M_{n-1}^{'}}.$$

D'où :

$$\sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)}\frac{1}{\gamma_n}=\sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)}\frac{1}{M_{\varphi(i)}^{\frac{1}{\varphi(i)}}}\geqslant\sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)}\frac{M_{n-1}^{'}}{M_n^{'}}=\sum_{n=\varphi(i-1)}^{\varphi(i)-1}\frac{M_n^{'}}{M_{n+1}^{'}}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=\varphi(k_0+1)}^{\infty}\frac{M_n^{'}}{M_{n+1}^{'}}\leqslant\sum_{i=k_0+1}^{\infty}\sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)}\frac{1}{\gamma_n}\leqslant\sum_{i=k_0+1}^{\infty}\sum_{n=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)}\frac{1}{\beta_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n},$$

car : $\beta_n\leqslant\gamma_n$.
Enfin on applique l'inégalité de Carleman-Collingwood à la suite

$$a_n=\frac{M_{n-1}^{'}}{M_n^{'}},n\geqslant 1,$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_0^{'}}{M_1^{'}}\frac{M_1^{'}}{M_2^{'}}.....\frac{M_{n-1}^{'}}{M_n^{'}}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant e.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_{n-1}^{'}}{M_n^{'}}.$$

Ou encore :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{M_n^{'\frac{1}{n}}}\leqslant e.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_{n-1}^{'}}{M_n^{'}}.$$

On obtient finalement la chaine d'implications suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k^{'}}{M_{k+1}^{'}}<\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M_k^{'\frac{1}{k}}}<\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}<\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k^{'}}{M_{k+1}^{'}}<\infty.$$

ce qui finalise la preuve. $\square$

3.3 Quasi-analycité et théorème de Denjoy-Carleman

Le concept des fonctions quasi-analytique a été introduit pour la première fois par Borel, a prédit qu'il ya une plus grande classe de fonctions, que les fonctions analytiques ayant la propriété de n'être complètement déterminée que par les valeurs de leurs dérivées en un seul point. Motivé par la théorie des équations aux dérivées partielles, Hadamard a proposé le problème et donne une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite (M_n) telle que la classe de toutes les fonctions infiniment différentiables dont la dérivée n-ieme est bornée par $M = (M_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est quasi-analytique.

Denjoy a été le premier à fournir des conditions suffisantes et puis Carleman généralisant le théorème de Denjoy et donne des conditions nécessaires suffisante le traité de Carleman a jeté un nouvel éclairage sur la théorie des fonctions quasi analytiques. Le théorème de Denjoy -Carleman fournit un critère pour obtenir une propriété importante de certaines classes de fonctions que nous allons définir.

3.3.1 Classes quasi-analytiques

Étant donnée une suite $M = (M_n)$ de nombres réels strictement positifs. On notera :

$$\mathcal{C}(M) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, |D^\alpha f(x)| \leqslant a.b^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \right\}.$$

Proposition 3.5.

Soit $M = (M_n)$ une suite de nombres réels strictement positifs, alors on a

1. *$\mathcal{C}(M)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*
2. *$\mathcal{C}(M)$ est stable par composition à droite par les fonctions affines.*
3. *Si $M_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors tout élément est analytique.*
4. *Si $M_k = k!^d$ pour tout $d > 1$, alors tout élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une fonction de classe Gevrey.*

Preuve.

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \geqslant 0$ tels que, pour tout

$n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned} \left|D^\alpha (f + \lambda g)\right| &= \left|D^\alpha f + \lambda D^\alpha g\right| \\ &\leqslant a_1 b_1^{|\alpha|} M_{|\alpha|} + |\lambda|\, a_2 b_2^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \\ &\leqslant 2 \max(a_1, |\lambda|\, a_2).(\max(b_1, b_2))^{|\alpha|} M_{|\alpha|}. \end{aligned}$$

2. Soient $f \in \mathcal{C}(M), (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\begin{cases} \varphi : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x \longmapsto ax + b \end{cases}$

   alors il existe $c, d \geqslant 0$ tels que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, \left|D^\alpha (f \circ \varphi)(x)\right| = \left|a^{|\alpha|} D^\alpha f(ax+b)\right| \leqslant c\,(|a|\,.d)^{|\alpha|}\,.M_{|\alpha|}.$$

3. Si $M_{|\alpha|} = |\alpha|!$ soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que il existe $a, b \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, \left|D^\alpha f(x)\right| \leqslant \left(a.b^{|\alpha|}\right) |\alpha|!.$$

   On envisage deux cas :

   (a) $a = b = 0$ alors f est identiquement nulle, donc analytique sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) si $a.b > 0$ soit $r \in]0\ ,\ \frac{1}{b}[$ par la formule de Taylor avec reste intégral on a : pour tout $x \in]0; r[$:

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k\right| &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(t)\right| dt \\ &\leqslant a.b^{n+1} \int_0^x (n+1)(x-t)^n\, dt \\ &= a.b^{n+1} x^{n+1} \\ &\leqslant a\,(br)^{n+1}. \end{aligned}$$

   De manière analogue, pour tout $x \in [-r, 0]$,

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k\right| &\leqslant a.b^{n+1} |x|^{n+1} \\ &\leqslant a\,(br)^{n+1}. \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\sup_{|x| \leqslant r} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k\right| \leqslant a.\,(b.r)^{n+1} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Donc la série de Taylor de f converge uniformément vers f au voisinage de 0 :

f est analytique en 0.

Si x_0 est un réel quelconque, alors, en considérant $f(. + x_0)$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on en déduit que f est analytique sur $\mathbb{R}$. $\square$

Définition 3.7.

Soit $M \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$, on dit que $\mathcal{C}(M)$ est quasi-analytique lorsque tout élément de $\mathcal{C}(M)$ s'annulant, ainsi que toutes ses dérivées en un point de $(\mathbb{R})^n$ est identiquement nul sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.3. *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$.*

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$. Alors :$\mathcal{C}(M)$ est quasi analytique.

Preuve.

Supposons que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$. Soit $g \in \mathcal{C}(M)$.

On suppose que $g$ainsi que toutes ses dérivées s'annulent en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$,

on se ramène en 0 en posant $f(x) = g(x + x_0)$ de sorte que :

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}, D^\alpha f = D^\alpha g(. + x_0)$ il existe $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, D^\alpha f(0) = 0, \left\|D^k f\right\|_\infty \leqslant \left\|D^k g\right\|_\infty \leqslant a.b^k M_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va établir par récurrence descendante sur $k \in [0, n]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|f^k(x)\right| \leqslant M_n a.b^n \frac{|x|^{n-k}}{(n-k)!}.$$

On remarque que l'inégalité est vérifiée pour $k = n$.

Supposons la relation est vraie pour $k \in [[0, n]]$ et établissons-la alors au rang $k - 1$ soit $x \in \mathbb{R}^+$, (on raisonne symétriquement pour $x \in \mathbb{R}^-$),

$$\begin{aligned}
\left|f^{k-1}(x)\right| &= \left|\int_0^x f^k(t)\, dt\right|, car f^k(0) = 0 \\
&\leqslant \int_0^x \left|f^k(t)\right| dt \\
&\leqslant M_n a.b^n \int_0^x \frac{|t|^{n-k}}{(n-k)!}, \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= M_n a.b^n \frac{x^{n-k+1}}{(n-k+1)(n-k)!} \\
&= M_n a.b^n \frac{x^{n-(k+1)}}{(n-(k-1))!}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour $k = 0$ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M_n a.b^n \frac{x^n}{(n!)}.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$, si $f(x) \neq 0$, il vient par la formule de Stirling

$$|f(x)|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{M_n^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}}.b\,|x|}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \; n \overset{\sim}{\longrightarrow} \infty \; \frac{M_n^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}}.b\,|x|}{(2\pi)^{\frac{1}{n}} \dfrac{n}{e}}.$$

Passons à la limite inférieure on obtient l'absurdité $1 \leqslant 0$.

Donc f puis g sont identiquement nulles Nous énonçons le théorème principal de cette section qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe donnée soit quasi-analytique. □

3.3.2 Théorème de Denjoy-Carleman

Théorème 3.2.

Soit $M \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$, on pose
pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \beta_n = \inf_{k \geqslant n} M_k^{\frac{1}{k}}$, alors :

$$\mathcal{C}(M) \textit{ est quasi analytique si et sreulement si } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty.$$

3.4 Quasi -analytique associé aux suites log-convexes

Considérons l'espace $\mathcal{C}(M)$ où M est une suite log-convexe de premier terme $M_0 = 1$.

3.4.1 Propriétés algebriques

Proposition 3.6.

Une condition nécessaire pour que l'espace $\mathcal{C}(M)$soit stable pour la multiplication est que l'une de deux conditions suivantes soit vérifiées

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n^2 \leqslant M_{n-1}.M_{n+1}$.*
2. $\underline{\lim}_n \dfrac{M_n^{\frac{1}{n}}}{n} > 0.$

Preuve.

1. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}(M)$ donc il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$tels que :

$$\|D^{\alpha} f(x)\| \leqslant a_1.b_1^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \text{ et } D^{\alpha} g(x) \leqslant a_2.b_2^{|\alpha|} M_{|\alpha|}.$$

En utilisant la formule de Leibnitz

$$\begin{aligned}
\left|D^{(n)}(f.g)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \left|f^{(k)} g^{(p-k)}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a_1.b_1^k a_2.b_2^{n-k} M_n \\
&= a_1.a_2 M_n. \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} .b_1^k.b_2^{n-k} \\
&= a_1.a_2 M_n. (b_1 + b_2)^k .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left|D^{(n)}(f.g)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \left|f^{(k)} g^{(p-k)}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a_1.b_1^k a_2.b_2^{n-k} M_n \\
&= a_1.a_2 M_n. (b_1 + b_2)^k .
\end{aligned}$$

2. Rappelons les inégalités de Cartan-Gorny

Soit $I = [-1; 1]$ et pour tout naturel n, A_n un nombre positif tel que

$$A_n \geqslant \left\|f^{(n)}\right\|_I .$$

Alors, pour tout naturel p et tout naturel $k \leqslant p$ on a :

$$\left\|f^{(k)}\right\|_I \leqslant \max \left\{ 2 \left(\frac{e^2.p}{k}\right)^k A_0^{1-\frac{k}{p}} A_p^{\frac{k}{p}}, 2 \left(\frac{e^2.p}{k}\right)^k A_0 \right\}. \tag{3.7}$$

Remarquons que cette inégalité peut s'écrire :

$$\left\|f^{(k)}\right\|_I \leqslant 2 \left(\frac{e^2.p}{k}\right)^k A_0 \max \left\{ \left(\frac{A_p}{A_0}\right)^{\frac{k}{p}}, \left(\frac{p}{2}\right)^k \right\}, \tag{3.8}$$

et en posant $B_p = \max \left\{ \left(\frac{A_p}{A_0}\right), \left(\frac{p}{2}\right)^p \right\}$ il vient que

$$\left\|f^{(k)}\right\|_I \leqslant 2A_0 \left(\frac{e^2.p}{k}\right)^k .B_p^{\frac{k}{p}}.$$

Soient f et g éléments de $\mathcal{C}(M, I)$, il existe A, B deux nombres positifs tels que : pour tout naturel n on ait

$$\left\|f^{(n)}\right\|_I \leqslant A.B^n M_n, \quad \left\|g^{(n)}\right\|_I \leqslant A.B^n M_n.$$

Définissons pour tout naturel r :

$$A_r = AB^r M_r,$$

et par la formule de Leibnitz on a :

$$(f.g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} f^{(k)}.g^{(p-k)}.$$

il vient en utilisant l'inégalité de Cartan-Gorny que :

$$\begin{aligned} \left\|(f.g)^{(p)}\right\|_I &\leqslant \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} \left(2A_0\left(\frac{e^2p}{k}\right)^k .B_p^{\frac{k}{p}}\right)\left(2A_0\left(\frac{e^2p}{p-k}\right)^{p-k} .B_p^{\frac{p-k}{p}}\right) \\ &\leqslant 4e^{2p}A_0^2.B_P \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} \frac{p^p}{k^k (p-k)^{p-k}}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, il existe une constante c vérifiant : pour tout k et $p, k \leqslant p$

$$\frac{p^p}{k^p (p-k)^{k\binom{p}{k}}} < \frac{p!}{k!\,(p-k)!}.c.\sqrt{p}.$$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k}^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k}\right)^2 = 4,$$

donc :

$$\left\|(f.g)^{(p)}\right\|_I \leqslant 4c\,(4e)^{2p} \sqrt{p} A_0 \max\left\{\frac{A_P}{A_0}, \left(\frac{p}{2}\right)^p\right\}.M_p.$$

Du fait que : $\varliminf_n \dfrac{(M_n)^{\frac{1}{n}}}{n} > 0$, il existe $a \geqslant 1$ tel que quelque soit p,

$$\left(\frac{p}{2}\right)^p \leqslant a^p.\frac{A_p}{A_0}.$$

Donc

$$\left\|(f.g)^{(p)}\right\|_I \leqslant A.'\left(B'\right)^p M_p \text{ avec } A.' = 4cAA,\ B' = 2a.(4e)^2.B.$$

et en remarquant que :$\sqrt{p} < 2^p$.

Le cas où $I = [a, b]$ se ramène par un changement de variable affine, au cas $I = [-1, 1]$. □

CHAPITRE 4

PROBLÈME DE GOURSAT DANS LA CLASSE DENJOY-CARLEMAN

4.1 La classe Denjoy- Carleman

Définition 4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante positive et $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on note $C^{\alpha,M}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, admettant :*

1. *$\forall \gamma \in \mathbb{N}^p$ $\gamma \leq \alpha$ et $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$ des dérivées partielles*
$$D_x^\gamma D_y^\delta u : \Omega \to \mathbb{R},$$
continues,
2. *il existe $c > 0$ telles que :*
$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}, \quad \forall \gamma \leq \alpha \text{ et } \forall \delta \in \mathbb{N}^q.$$

L'espace $C^{\alpha,M}(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^\alpha$ par rapport à x est de classe Denjoy-Carleman par rapport à y.

Remarque 4.1. *Les suites $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ considérées doivent satisfaire les hypothèses suivantes :*

1. *$M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement-convexe,*
$$\text{i.e. } M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ et } M_0 = 1. \tag{4.1}$$

2.

$$\sup_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Lemme 4.1. *[11]*

Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement-convexe et $M_0 = 1$, alors :

$$M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_n} \leq M_1^n M_k, \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{N}^*, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k. \tag{4.3}$$

Preuve.

Par récurrence sur k :

- Si $n = k$, l'inégalité est évidente.
- Si $n < k$, alors $\exists i$ tel que $\alpha_i \geq 2$, on pose $\alpha_i' = \alpha_i - 1$; l'hypothèse de récurrence sera :

$$M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_i'} \cdots M_{\alpha_n} \leq M_1^n M_{k-1},$$

d'après (4.1) on a :

$$\begin{aligned} M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_n} &= M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_i'} \cdots M_{\alpha_n} \frac{M_{\alpha_i}}{M_{\alpha_i'}} \\ &\leq M_1^n M_{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}} \\ &\leq M_1^n M_k. \end{aligned}$$

□

4.2 Hypothèses et résultats

On s'intéresse au problème de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, On cherche à prouver l'existence et l'unicité d'une solution de type Denjoy-Carleman associée à une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère alors le problème de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, avec $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_x^\alpha u(x,y) &=& f(x,y,D^B u(x,y)) \\ u &=& O(x^\alpha) \end{array}\right. , \tag{4.4}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^p$, et B est une partie finie de l'ensemble

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q, |\gamma| + |\delta| \leq |\alpha|, \quad \gamma < \alpha\},$$

$$D^B u = (D_x^\gamma D_y^\delta u)_{(\gamma,\delta)\in B}.$$

et f est une fonction de $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $z \in \mathbb{R}^r$ où $r = Card(B)$, qu'on suppose de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$; f est donc continue en x et de classe Denjoy-Carleman C^M en (y,z).

Théorème 4.1. *S'il existe $c_{\gamma,\delta} > 0$ tel que :*

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|+|\alpha|)!} \leq c_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0. \tag{4.5}$$

Alors le problème de Goursat (4.4) admet une solution unique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$,

Remarque 4.2. *Lorsque $M_n = n!^{d-1}$ ce théorème coïncide avec le théorème 5.1 dans [26]; dans ce même cas si $d = 1$ le théorème 4.1 est contenu dans le théorème 4.1 de la même référence.*

En effet avec $M_n = n!^{d-1}$, $\forall k \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{(k+|\delta|)!^{d-1}}{k!^{d-1}}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|+|\alpha|)!} &= \frac{(k+|\delta|)^{d-1}\cdots(k+1)^{d-1}}{(k-|\gamma|+|\alpha|)\cdots(k+|\delta|+1)} \\ &\leq \frac{(k+|\delta|)^{(d-1)|\delta|}}{(k+|\delta|)^{-|\gamma|-|\delta|+|\alpha|}} \\ &\leq 1 \quad (\text{ si } |\gamma| + d|\delta| \leq |\alpha|).\end{aligned}$$

Remarque 4.3. *Si la suite* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ou la suite* $\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée on retrouve le cas holomorphe par rapport à* y*.*
En effet : si $u \in C^{\alpha,M}(\Omega)$ *alors :* $\forall\gamma \leq \alpha$ *et* $\forall\delta \in \mathbb{N}^q, \exists c > 0,$*tel que :*

$$\sup_{\Omega} |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}.$$

1. *Si* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée alors :* $\exists c_4 > 1$ *tel que :*

$$\sup_{\Omega} |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|} \leq (cc_4)^{|\delta|+1}\delta!.$$

   d'autre part :

2. *Si* $(\dfrac{M_{n+1}}{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée :*

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega} |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| &\leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}\\ &\leq c^{|\delta|+1}\delta! \frac{M_{|\delta|}}{M_{|\delta|-1}}\cdots\frac{M_2}{M_1}\frac{M_1}{M_0}M_0\\ &\leq c^{|\delta|+1}\delta! c_4^{|\delta|+1}\\ &\leq (cc_4)^{|\delta|+1}\delta!.\end{aligned}$$

Réduction du problème 4.4

Pour prouver le théorème 4.1 on peut supposer $\alpha = 0$ et $f(0,0) = 0$, il s'agit donc d'étudier le problème

$$u(x,y) = f(x,y,D^B u(x,y)), \tag{4.6}$$

avec B le sous ensemble fini de

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q; |\gamma| + |\delta| \leq 0, \quad \gamma < 0\},$$

et la condition (4.5) devient

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!} \leq c_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0. \tag{4.7}$$

Nous allons vérifier que l'application

$$T : u \to f(x,y,D^B u(x,y)),$$

est une contraction stricte dans une boule fermée d'une algèbre de Banach, qui sera définie dans le paragraphe suivant en utilisant des séries formelles de type Denjoy-Carleman.

Considérons d'abord une série formelle à q indéterminées $y = (y_1, ..., y_q)$:

$$\Phi = \sum_{\delta \in \mathbb{N}^q} \frac{y^\delta}{\delta!} \Phi_\delta.$$

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^q$ et une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. on note $u \ll \Phi$ la relation

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad \sup_\Omega |D_y^\delta u| \leq \Phi_\delta.$$

On a bien

$$u \ll \Phi \Rightarrow D_y^\delta u \ll D_y^\delta \Phi \text{ pour tout } \delta \in \mathbb{N}^q.$$

Étant donné un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$.
Notons $\mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \mathcal{U} \times \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues par rapport à y

$$D_y^\delta u : \mathcal{U} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \forall \delta \in \mathbb{N}^q.$$

Pour assurer que les coefficients de y dans Φ ne prennent que des valeurs positives. Posons $t = |x| = (|x_1|, \cdots, |x_p|)$, notons $|\mathcal{U}|$ l'image de $\mathcal{U}$ par l'application $x \to |x|$ considérons la séries formelle en y :

$$\Phi \equiv \Phi(t, y) = \sum_{\delta \in \mathbb{N}^q} \frac{y^\delta}{\delta!} \Phi_\delta(t),$$

où les fonctions $\Phi_\delta : |\mathcal{U}| \to \mathbb{R}_+$ sont continues.
On considère alors le sous espace

$$\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega); \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi\},$$

et on le munit de la norme

$$\|u\| = \|u\|_\Phi = \min\{c \geq 0; u \ll c\Phi\}.$$

Remarque 4.4. *Dire que $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ signifie donc*

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \sup_\Omega |D_y^\delta u(x, y)| \leq \|u\| \Phi_\delta(t) \quad (\text{où} \quad t = |x|). \tag{4.8}$$

Proposition 4.1. *[26]*

L'espace $\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ *est un espace de Banach.*

Dans ce qui suit, on va prendre des primitives par rapport à x_i, et pour faciliter le travail on ajoute l'hypothèse

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{U} \text{ pour tout } \lambda \in [0,1]^p, \tag{4.9}$$

où $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_p x_p)$, et évidemment $|\mathcal{U}|$ conserve la même propriété.

Pour $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times (\mathbb{N})^q$, on définit la série formelle

$$D_t^\gamma D_y^\delta \Phi(t,y) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{N}^q \\ \varepsilon \geq \delta}} \frac{y^{\varepsilon-\delta}}{(\varepsilon-\delta)!} D_t^\gamma \Phi_\varepsilon(t), \qquad t \in |\mathcal{U}|.$$

tel que $D_{t_i}^{-1}$ désigne la primitive par rapport à t_i qui s'annule avec t_i.

On a alors : pour tout $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ et pour tout $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times (\mathbb{N})^q$ on a

$$D_t^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\|_\Phi D_t^\gamma D_y^\delta \Phi. \tag{4.10}$$

Considérons la série formelle dépendant de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des paramètres

$$\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathbb{R}_+^*)^p, \qquad \zeta = (\zeta_i)_{1\leq i\leq q} \in (\mathbb{R}_+^*)^q \text{ et } R > 0.$$

suivante

$$\Phi_R^M(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k D^k \phi_R(\xi.t). \tag{4.11}$$

où

$$\xi.t = \sum_{i=1}^{p} \xi_i t_i \ , \ \zeta.y = \sum_{i=1}^{q} \zeta_i y_i,$$

cette série formelle est bien définie pour :

$$t \in |\mathcal{U}_R| \quad \text{où} \quad |\mathcal{U}_R| = \{x \in \mathbb{R}^p; \xi|x| < R\}.$$

L'espace de Banach associé à la série formelle Φ_R^M sera noté $C_R^M(\Omega_R)$ avec $\Omega_R = \mathcal{U}_R \times \Omega$. c'est-à-dire :

$$C_R^M(\Omega_R) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\Omega_R); \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi_R^M\}.$$

Notons que

$$\frac{(\zeta.y)^k}{k!} = \sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N}^q \\ |\delta|=k}} \frac{\zeta^\delta y^\delta}{\delta!} \quad \text{binôme de Newton généralisé.} \tag{4.12}$$

D'après 4.8 et (4.12) on peut redéfinir les éléments de $C_R^M(\Omega_R)$ comme suit

$$u \in C_R^M(\Omega_R) \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \sup_{\Omega} |D_y^\delta u(x,y)| \leq \|u\| \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|}\phi_R(\xi.t). \tag{4.13}$$

4.2.1 Relations entre $C^{0,M}$ et C_R^M

Lemme 4.2.

Pour $0 < R' < R$ *on a*

$$C_R^M(\Omega_R) \subset C^{0,M}(\Omega_{R'}).$$

Preuve.

Soit $u \in C_R^M(\Omega_R)$ on a :

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega} \left|D_y^\delta u\,(x,y)\right| &\leqslant \|u\|\, \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|}\phi_R\,(\xi.t)\\ &\leqslant c^{|\delta|+1} M_{|\delta|},\end{aligned}$$

où

$$c = \max\left(\|u\|\,, \max_{1\leqslant i\leqslant q}\{\zeta_i\}\right).$$

d'après l'analycité de de la fonction ϕ_R sur $]-R,R[$ si $0 < R^{'} < R$, il existe une constante $c_1 \geqslant 0$ telle que :

$$\left|D^k\phi_R\,(x)\right| \leqslant c_1^{k+1}k!, \text{ pour } |x| \leqslant R^{'}.$$

En substituant ceci dans l'inégalité précédente on obtient :

$$\sup_{\Omega}\left|D_y^\delta u\,(x,y)\right| \leqslant (cc_1)^{|\delta|+1}\,|\delta|!M_{|\delta|}\text{pour } x \in \mathcal{U}_{R^{'}}.$$

c'est -à-dire $u \in C^{0,M}(\Omega_{R'})$. □

Pour établir l'inclusion inverse, on considère la série formelle Θ_R^M définie par :

$$\Theta_R^M(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{R^k}M_k. \tag{4.14}$$

Lemme 4.3.

Pour tout $\eta > 1$*, il existe une constante* $c = c(\eta) > 0$ *telle que*

$$\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \ll c\Phi_R^M(t,y).$$

Preuve.

On commence par établir l'inégalité suivante :

$$\Theta_{\eta R}^{M}(\zeta.y) \ll c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta y)^{k}}{k!}M_{k}D^{k}\phi_{R}\left(0\right).$$

Notons que :

$$D^{k}\phi_{R}\left(0\right)=K^{-1}\frac{k!}{R^{k}\left(k+1\right)^{2}},$$

donc l'inégalité devient : chercher c telle que :

$$c \geqslant \frac{K\left(k+1\right)^{2}}{\eta^{k}},$$

qui est vérifiée pour

$$c\left(\eta\right)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{K\left(k+1\right)^{2}}{\eta^{k}},$$

d'où :

$$\Theta_{\eta R}^{M}(\zeta.y) \ll c\Phi_{R}^{M}(0,y) \ll c\Phi_{R}^{M}(t,y). \qquad \square$$

Lemme 4.4.

Si $c\eta R\leq\min\limits_{1\leqslant i\leqslant q}\zeta_{i}$, *alors*

$$C^{0,M}(\Omega_{R})\subset C_{R}^{M}(\Omega_{R}),$$

où c est la constante du lemme 4.3

Preuve.

Soit $u\in C^{0,M}(\Omega_{R})$, c'est-à-dire pour tout $x\in\mathcal{U}_{R}$

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega}|D_{y}^{\delta}u(x,y)| &\leq c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}\\ &\leq c\frac{\zeta^{\delta}}{(\eta R)^{|\delta|}}|\delta|!M_{|\delta|}.\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $\forall x\in\mathcal{U}_{R},u(x,y)\ll c\Theta_{\eta R}^{M}(\zeta.y)$,

et d'après le lemme précédent on a pour tout $x\in\mathcal{U}_{R}$

$$u(x,y)\ll c\Theta_{\eta R}^{M}\ll c\Phi_{R}^{M}(t,y). \qquad \square$$

4.2.2 Propriétés de l'espace C_R^M

Pour toute série formelle

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k,$$

on pose

$$[\phi] = \phi - \phi(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k \quad \text{et} \quad \phi^M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k X^k.$$

On a alors

Lemme 4.5.

Soit $\phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ une série formelle $\gg 0$ telle que $\phi^2 \ll \phi$. Alors on a

$$(\phi^M)^2 \ll \phi^M. \tag{4.15}$$

et

$$[\phi^M]^n \ll \frac{M_1^n}{M_n}[\phi^M] \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{4.16}$$

Preuve. 1. D'après le produit de Cauchy il s'agit de vérifier que :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} M_i . M_{k-i} \leqslant a_k M_k.$$

Comme la suite (M_k) vérifie

$$M_i . M_{k-i} \leqslant M_k,$$

cela revient à prouver

$$\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} \leqslant a_k,$$

qui est vérifiée d'après l'hypothèse $(\phi)^2 \ll \phi$.

2. On a :

$$\left[\phi^M\right]^n = \sum_{k=n}^{\infty} X^k \left(\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \in (\mathbb{N}^*)^n}} a_\alpha M_\alpha \right),$$

où

$$a_\alpha = \prod_{i=1}^{n} a_{\alpha_i}, \ M_\alpha = \prod_{i=1}^{n} M_{\alpha_i},$$

or :

$$M_\alpha = \prod_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} \leqslant \frac{M_1^k}{M_n} M_k, \text{ telle que } k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

de plus on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha\in(\mathbb{N}^*)^n}} a_\alpha \leqslant a_k,$$

car :$[\phi] \ll \phi$, d'où $[\phi]^2 \ll \phi^2$ ce qui prouve que $[\phi]^2 \ll [\phi]$ par conséquent $[\phi]^n \ll [\phi]$.

$\square$

Remarque 4.5. *Comme étant donné que pour tout $t \in |\mathcal{U}_R|$:*

$$\phi_R^2(\xi.t+\zeta.y) \ll \phi_R(\xi.t+\zeta.y),$$

on peut appliquer le lemme précédent à la série formelle Φ_R^M.
car :Φ_R^M est le développement de $\phi_R^M(\xi.t+\zeta.y)$ par rapport à y en 0

Grâce à la propriété (4.16), qui peut majorer la composée de deux fonctions de classe de Denjoy- Carleman. On a donc :

Corollaire 4.1.

Les espaces $C_R^M(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach.

Preuve.

La démonstration est un résultat direct des propositions 1.1, 4.1 et de l'inégalité (4.15) $\square$

Corollaire 4.2.

Pour $0 \leq cM_1 < R'$, on a

$$\Theta_{R'}^M \circ [c\Phi_R^M] \ll \max\left(K, \frac{cM_1}{R'-cM_1}\right)\Phi_R^M.$$

Preuve.

D'après (4.16) du lemme 4.5 on a

$$\begin{aligned}
\Theta^M_{R'} \circ [c\Phi^M_R] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{R'^n} M_n [\Phi^M_R]^n \\
&\ll 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cM_1)^n}{R'^n} [\Phi^M_R] \\
&\ll 1 + \frac{cM_1}{R' - cM_1} [\Phi^M_R] \\
&\ll \max\left(K, \frac{cM_1}{R' - cM_1}\right) \Phi^M_R .
\end{aligned}$$

car

$$1 = K\phi_R(0) \ll K\phi_R(\xi.t) = K\Phi^M_R(t,0).$$

□

Théorème 4.2. *[23]*

Soit $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite logarithmiquement-convexe, I un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction $\nu(x) \in C^M(I)$ telle que $|\nu^{(k)}(0)| \geq k!M_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Preuve.

Voir le théorème 1 dans [23] ou bien la proposition 3.1.2 dans [22]. □

Corollaire 4.3.

Il existe une fonction $g \in C^{0,M}(\Omega_R)$ telle que

$$|D^\delta_y g(0,0)| \geq \delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q.$$

Preuve.

Pour I convenablement choisi.

Considérons $g(x,y) = \nu(y_1)\nu(y_2)\cdots\nu(y_q)$, on a bien $g \in C^{0,M}(\Omega_R)$,

en effet $\forall x \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sup_\Omega |D^\delta_y g(x,y)| &= \sup_\Omega |\nu^{(\delta_1)}(y_1)\nu^{(\delta_2)}(y_2)\cdots\nu^{(\delta_q)}(y_q)| \\
&\leq \left(c^{\delta_1+1}\delta_1! M_{\delta_1}\right)\left(c^{\delta_2+1}\delta_2! M_{\delta_2}\right)\cdots\left(c^{\delta_q+1}\delta_q! M_{\delta_q}\right) \\
&\leq c^{|\delta|+q}\delta! M_{|\delta|} \\
&\leq (\max(c^q, c))^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}.
\end{aligned}$$

Et

$$|D_y^\delta g(0,0)| = |\nu^{(\delta_1)}(0)\nu^{(\delta_2)}(0)\cdots\nu^{(\delta_q)}(0)| \geq \delta! M_{\delta_1}M_{\delta_2}\cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q.$$

. $\square$

Proposition 4.2. *[23]*

L'espace $C^{0,M}(\Omega_R)$ est stable par différentiation par rapport à la deuxième variable y si et seulement si l'hypothèse (4.2) est vérifiée.

Preuve.

Supposons que $\sup\limits_k \left(\dfrac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}}$ n'est pas borné.

On choisit une fonction g comme dans 4.3, alors la stabilité de l'espace $C^{0,M}(\Omega_R)$ par dérivation par rapport à la deuxième variable y implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall \delta, \delta' \in \mathbb{N}^q$ avec $\delta = (\delta'_1, \cdots, \delta'_i + 1, \cdots, \delta'_q)$ où i arbitraire, on a

$$\frac{|D_y^\delta g(x,y)|}{\delta'! M_{|\delta'|}} \leq c^{|\delta'|+1}, \tag{4.17}$$

d'autre part, d'après le corollaire 4.3 on a

$$|D_y^\delta g(0,0)| \geq \delta! M_{\delta_1}M_{\delta_2}\cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q,$$

d'où

$$\frac{|D_y^\delta g(0,0)|}{\delta'! M_{|\delta'|}} \geq \frac{\delta! M_{\delta_1}M_{\delta_2}\cdots M_{\delta_q}}{\delta'! M_{|\delta'|}}. \tag{4.18}$$

En particulier pour $\delta' = (0, \cdots, \delta'_i, \cdots, 0)$ et $\delta = (0, \cdots, \delta'_i + 1, \cdots, 0)$, alors (4.17) devient

$$\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(x,y)|}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \leq c^{\delta'_i+1}.$$

Et (4.18) devient

$$\begin{aligned}
\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} &\geq \frac{\delta! M_0 \cdots M_{\delta_i} \cdots M_0}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \\
&\geq \frac{\delta_i! M_{\delta_i}}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \\
&= (\delta'_i + 1)\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}}.
\end{aligned}$$

D'où
$$\sup_{\delta'_i}\left(\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1}g(0,0)|}{\delta'_i!M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}} \geq \sup_{\delta'_i}\left\{(\delta'_i+1)^{\frac{1}{\delta'_i}}\left(\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}}\right\}.$$
mais $\sup_{\delta'_i}\left(\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}}$ est non borné par hypothèse et $\lim_{\delta'_i\to\infty}(\delta'_i+1)^{\frac{1}{\delta'_i}}=1$ d'où $\sup_{\delta'_i}\left(\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1}g(0,0)|}{\delta'_i!M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}}$ est non borné, contradiction avec (4.17).

Inversement, On va établir la démonstration inverse pour une dérivation d'ordre un seulement par rapport à y_i où i arbitraire, toute généralisation à d'autre ordres de dérivation est évidente.

Si (4.2) est satisfaite et $f \in C^{0,M}(\Omega)$ donc $\exists c > 0$ tel que
$$\forall \delta, \delta' \in \mathbb{N}^q \text{ tel que } \delta = (\delta'_1, \cdots, \delta'_i+1, \cdots, \delta'_q),$$
on a
$$\begin{aligned}\sup_{\Omega}|D_y^{\delta}f(x,y)| &\leq c_1^{|\delta|+1}\delta!M_{|\delta|}\\ &\leq c_1^{|\delta|+1}c_2^{|\delta'|}\delta_i\delta'!M_{|\delta'|}\\ &\leq c_1^{|\delta'|+2}c_2^{|\delta'|}c_3^{|\delta'|+1}\delta'!M_{|\delta'|}\\ &\leq c^{|\delta'|+1}\delta'!M_{|\delta'|}.\end{aligned}$$
Notons que
$$\delta_i \leq |\delta| \leq e^{|\delta|} \leq c_3^{|\delta'|+1}.$$
$$\frac{M_{|\delta|}}{M_{|\delta'|}} \leq c_2^{|\delta'|}.$$
$$c_1^{|\delta'|+2}c_2^{|\delta'|}c_3^{|\delta'|+1} \leq c_1^{|\delta'|+1}c_1c_2^{|\delta'|}c_3^{|\delta'|+1} \leq c_1^{|\delta'|+1}\left(\max(c_1;c_2)\right)^{|\delta'|+1}c_3^{|\delta'|+1}.$$
donc on prend
$$c = c_1c_3\left(\max(c_1;c_2)\right).$$
□

Indiquons maintenant comment opèrent les dérivations dans les algèbres C_R^M.

Proposition 4.3.

Pour tout $(\gamma,\delta) \in B$ tel que (4.5), il existe une constante $c'_{\gamma,\delta} \geq 0$ telle que

$$D_x^\gamma D_y^\delta : C_R^M \to C_R^M,$$

soit linéaire, continue de norme $\leq c'_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$.

Preuve.

Soit $u \in C_R^M$, on a d'après(4.10)

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\| D_t^\gamma D_y^\delta \Phi_R^M(t,y),$$

d'où

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{k=|\delta|} \frac{(\zeta.y)^{k-|\delta|}}{(k-|\delta|)!} M_k D^{|\gamma|} D^k \phi_R(\xi.t).$$

Le développement de Taylor de $D^k\phi_R(\xi.t)$ au voisinage de zéro est

$$D^k\phi_R(\xi.t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\xi.t)^l}{l!} D^{k+l}\phi_R(0).$$

Comme $|\gamma| < 0$ donc l'opérateur $D^{|\gamma|}$ devient une intégration et on a

$$D^{|\gamma|}D^k\phi_R(\xi.t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\xi.t)^{l-|\gamma|}}{(l-|\gamma|)!} D^{k+l}\phi_R(0),$$

d'où :

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{k=|\delta|} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^{k-|\delta|}}{(k-|\delta|)!} M_k \frac{(\xi.t)^{l-|\gamma|}}{(l-|\gamma|)!} D^{k+l}\phi_R(0).$$

En effectuant un changement d'indice tel que $k = j + |\delta|$ et $l - |\gamma| = m$

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{m=-|\gamma|}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^j}{j!} M_{j+|\delta|} \frac{(\xi.t)^m}{m!} D^{j+m+|\gamma|+|\delta|}\phi_R(0),$$

d'où :

$$\begin{aligned} D_x^\gamma D_y^\delta u &\ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{l=-|\gamma|}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_{k+\delta} \frac{(\xi.t)^l}{l!} D^{k+l+|\gamma|+|\delta|}\phi_R(0) \\ &\ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|} \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{l=-|\gamma|}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_{k+\delta} \frac{(\xi.t)^l}{l!} \frac{K^{-1}(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{R^{k+l}(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2}. \end{aligned}$$

notons que

$$D^{k+l}\phi_R(0) = \frac{K^{-1}(k+l)!}{R^{k+l}(k+l+1)^2}.$$

Après un développement analogue de Φ_R^M on a

$$\Phi_R^M(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k \frac{(\xi.t)^l}{l!} \frac{K^{-1}(k+l)!}{R^{k+l}(k+l+1)^2}.$$

Et la démonstration devient :

chercher l'existence d'une constante $c'_{\gamma,\delta}$ telle que :

$$M_{k+|\delta|} \frac{(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} M_k \frac{(k+l)!}{(k+l+1)^2} \quad \forall k \geq 0, \forall l \geq -|\gamma|.$$

Si $|\gamma| + |\delta| \leq 0$, alors la fonction

$$\frac{(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{(k+l)!} \frac{(k+l+1)^2}{(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2},$$

est décroissante par rapport à l et atteint son maximum pour $l = -|\gamma|$.

Il suffit de vérifier

$$M_{k+|\delta|} \frac{(k+|\delta|)!}{(k+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} M_k \frac{(k-|\gamma|)!}{(k-|\gamma|+1)^2} \quad \forall k \geq 0.$$

c'est-à-dire

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k} \frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!} \frac{(k-|\gamma|+1)^2}{(k+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0.$$

D'après l'hypothèse (4.5) du théorème 4.1 il existe $c_{\gamma,\delta} \geq 0$ tel que $\forall k \geq 0$ on a :

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k} \frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!} \leq c_{\gamma,\delta}.$$

D'autre part

$$\left(\frac{k-|\gamma|+1}{k+|\delta|+1}\right)^2 \leq c''_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0 \qquad \text{pour } c''_{\gamma,\delta} = \left(\frac{-|\gamma|+1}{|\delta|+1}\right)^2.$$

Il suffit de prendre $c'_{\gamma,\delta} = c_{\gamma,\delta} c''_{\gamma,\delta}$. □

Lemme 4.6.

Soit f une fonction : $(x,y,z) \to f(x,y,z)$ de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$ alors il existe des fonctions G_σ avec $\sigma \in B$ telles que :

$$G_\sigma : (x,y,z,z') \to G_\sigma(x,y,z,z'),$$

est de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ et telle que pour (x,y,z,z') assez petit dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ on a

$$f(x,y,z) = f(x,y,z') + \sum_{\sigma \in B} G_\sigma(x,y,z,z')(z_\sigma - z'_\sigma).$$

Preuve.

Pour simplifier l'écriture on introduit la nouvelle variable $z^i \in \mathbb{R}^r$ avec $0 \leq i \leq r$ tel que $z^0 = z$, $z^i = (z'_1, \cdots, z'_i, z_{i+1}, \cdots, z_r)$ et $z^r = z'$.

Rappelons que $r = Card(B)$.

D'après la formule de Taylor-Lagrange et pour un i arbitraire il existe ξ_{i+1} strictement compris entre z_{i+1} et z'_{i+1} où $z_\xi^{i+1} = (z'_1, \cdots, z'_i, \xi_{i+1}, z_{i+2}, \cdots, z_r)$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y,z^i) - f(x,y,z^{i+1}) &= \frac{\partial f(x,y,z^{i+1})}{\partial z_{i+1}}(z_{i+1} - z'_{i+1}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y,z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})^2 \\ &= \left(\frac{\partial f(x,y,z^{i+1})}{\partial z_{i+1}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y,z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})\right)(z_{i+1} - z'_{i+1}), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(x,y,z) - f(x,y,z') &= \sum_{i=0}^{r-1} f(x,y,z^i) - f(x,y,z^{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{\partial f(x,y,z^{i+1})}{\partial z_{i+1}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y,z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})\right)(z_{i+1} - z'_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} G_i(x,y,z,z')(z_{i+1} - z'_{i+1}). \end{aligned}$$

$G_i(x,y,z,z')$ est de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ est une conséquence directe de la proposition 4.2. □

4.3 Démonstration du théorème 4.1

On fixe les valeurs des paramètres $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ selon les besoins rencontrés. On écrit d'après le lemme 4.6.

$$f(x,y,z) - f(x,y,z') = \sum_{\sigma \in B} G_\sigma(x,y,z,z')(z_\sigma - z'_\sigma), \tag{4.19}$$

les fonctions G_σ sont de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$.

Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbb{R}^q$ et des nombres $h_0 > 0$, $h_1 > 0$ tels que les fonctions f et G_σ soient définies dans l'ouvert

$$\mathcal{D} := \{(x,y,z,z') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}; \xi.|x| < h_0, \quad y \in \Omega, \quad |z_\sigma| < h_1, \quad |z'_\sigma| < h_1\},$$

étant donné $\eta > 1$, il existe des constantes $c > 0,\ R > 0,\ R' > 0$ telles que pour tout $(x, y, z, z') \in \mathcal{D}$, et pour tout $\delta \in \mathbb{N}^q,\ \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{N}^r$:

$$|D_y^\delta D_z^\varepsilon f(x, y, z)| \le c \frac{\zeta^\delta \delta! M_\delta}{(\eta R)^{|\delta|}} \frac{\varepsilon! M_\varepsilon}{R'^{|\varepsilon|}}.$$

$$|D_y^\delta D_z^\varepsilon D_{z'}^{\varepsilon'} G_\sigma(x, y, z, z')| \le c \frac{\zeta^\delta \delta! M_\delta}{(\eta R)^{|\delta|}} \frac{\varepsilon! M_\varepsilon}{R'^{|\varepsilon|}} \frac{\varepsilon'! M_{\varepsilon'}}{R'^{|\varepsilon'|}}.$$

Ceci signifie que pour tout x vérifiant $\xi.|x| < h_0$:

$$f(x, y, z) \ll c\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \prod_{\sigma \in B} \Theta_{R'}^M(z_\sigma).$$

$$G_\sigma(x, y, z, z') \ll c\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \prod_{\nu \in B} \Theta_{R'}^M(z_\nu)\Theta_{R'}^M(z'_\nu).$$

D'après le lemme 4.3 on a :

Il existe un $R_0 > 0$ tel que pour tout $R \in]0, R_0]$ on ait

$$\begin{cases} f(x, y, z) \ll c\Phi_R^M(t, y) \prod_{\sigma \in B} \Theta_{R'}^M(z_\sigma) \\ G_\sigma(x, y, z, z') \ll c\Phi_R^M(t, y) \prod_{\nu \in B} \Theta_{R'}^M(z_\nu)\Theta_{R'}^M(z'_\nu) \end{cases}. \tag{4.20}$$

On a alors :

Proposition 4.4.

Il existe $a_0 > 0$ tel que, pour tout $a \ge a_0$ et tout $R \in]0, R_0]$ suffisamment petit, l'application

$$T : u \to f(x, y, D^B u(x, y)),$$

est une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0; a)$ de l'algèbre de Banach $C_R^M(\Omega_R)$.

Preuve.

Soit $u \in B'(0; a) \subset C_R^M(\Omega_R)$, $0 < R \le R_0$, on $|\gamma| + |\delta| < 0$ pour tout $(\gamma, \delta) \in B$, car si $|\gamma| + |\delta| = 0$ la suite $\dfrac{M_k + 1}{M_k}$ soit bornée, c'est le cas holomorphe, voir la remarque 4.3,

Alors la proposition 4.3 montre qu'il existe une fonction $\varepsilon :]0, R_0] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{R \to 0} \varepsilon(R) = 0,$$

et

$$z_\sigma = D_x^\gamma D_y^\delta u \ll a\varepsilon(R)\Phi_R^M(t, y), \forall \sigma = (\gamma, \delta) \in B,$$

d'où

$$\sup_{\Omega} |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq a\varepsilon(R)\phi_R(\xi.|x|) \text{ pour } \xi.|x| < R.$$

Comme $\phi_R(\xi.|x|) \leq \phi_R(R) = \phi_1(1)$, d'où l'existence d'une constante $c_1 > 0$ pour laquelle on a :

$$a\ \varepsilon(R) \leq c_1 \tag{4.21}$$

d'après (4.21), le corollaire 4.2 et en choisissant convenablement R, on a :

$$\Theta_{R'}^M \circ [a\varepsilon(R)\Phi_R^M] \ll K\Phi_R^M.$$

Finalement grâce à (4.20) on en déduit que

$$Tu = f(x,y,D^B u) \ll c_2\Phi_R^M(t,y),$$

ce qui prouve que $T(B'(0;a)) \subset B'(0;a)$ si

$$c_2 \leq a, \tag{4.22}$$

De plus, si $u, u' \in B'(0;a)$, on a

$$z_\nu - z'_\nu = D_x^\gamma D_y^\delta (u - u') \ll \|u - u'\|\varepsilon(R)\Phi_R^M(t,y), \quad \nu = (\gamma,\delta) \in B,$$

d'où

$$Tu - Tu' \ll c_3\varepsilon(R)\|u - u'\|\Phi_R^M(t,y).$$

donc T est une contraction stricte si $c_3\varepsilon(R) < 1$.

Pour que $T : B'(0;a) \to B'(0;a)$ soit une contraction stricte, il suffit que

$$a\varepsilon(R) \leq c_1, \quad c_2 \leq a, \quad c_3\varepsilon(R) < 1.$$

Comme on peut prendre R suffisamment petit pour satisfaire la première, la troisième inégalité et en prenant $a_0 = c_2$.

La proposition 4.4, le corollaire 4.1 et le théorème du point fixe de Banach 2.3 prouve l'existence mais dans l'espace C_R^M et avec le lemme 4.2 on conclue.

Pour l'unicité, dans l'espace $C^{0,M}$ on raisonne comme suit :

- ► Soit u, u' deux fonctions de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ telles que $u = f(x,y,D^B u), u' = f(x,y,D^B u')$, alors il existe un voisinage ouvert $O \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbb{R}^q$ et un nombre $R_1 \in]0, R_0]$ tels que $u, u' \in C_{R_1}^M(O_{R_1})$.

- Donc pour tout $R \in]0, R_1]$ on a $u, u' \in C_R^M(O_R)$, et si on note $\|\cdot\|_R$ la norme de l'espace $C_R^M(O_R)$ alors :

$$\|u\|_R \leq \|u\|_{R_1}, \quad \|u'\|_R \leq \|u'\|_{R_1}.$$

- On choisit alors $a \geq \max(a_0, \|u\|_{R_1}, \|u'\|_{R_1})$, et $R \in]0, R_1]$ suffisamment petit pour que T soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0; a) \subset C_R^M(O_R)$.
- Finalement T a deux point fixes u et u' ce qui prouve l'égalité dans O_R.

. $\square$

CONCLUSION

Ce travail est une généralisation de la démonstration de l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Goursat non linéaire dans la classe Gevrey-continu. En suivant le même formalisme de C.Wagschal ;on a démontré l'existence et l'unicité d'une solution dans l'espace de Denjoy-Carleman associé à une suite logorithmiquement convexe et une série formelle convenablement choisie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cauchy Augustin-Louis. Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral. *Comptes Rendus Acad. Sci*, 14 :1020–1026, 1842.

[2] Werner Balser. *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations.* Springer, 1946.

[3] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables.* Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 6 edition, juin 1985.

[4] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP sciences, 4 edition, 2016.

[5] Goursat Edouard. Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 26 :129–134, 1898.

[6] Moncef Elghribi, Hakeem A Othman, and Al-Hossain Ahmed Al-Nashri. Homogeneous functions : New characterization and applications. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 171(2) :171–181, 2017.

[7] E. Goursat. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires. *Acta Math.*, 19 :285–340, 1895.

[8] S Iyanaga and Y Kawada. Encyclopedic dictionary of mathematics distribution of typical random variables, 1980.

[9] Persson Jan. New proofs and generalizations of two theorems by lednev for goursat problems. *Mathematische Annalen*, 178(3) :184–208, 1968.

[10] Sof'ja V Kovalevskaja. *Zur theorie der partiellen differentialgleichungen.* 1874.

[11] Andreas Kriegl, Peter W Michor, and Armin Rainer. The convenient setting for non-quasianalytic denjoy–carleman differentiable mappings. *Journal of Functional Analysis*, 256(11) :3510–3544, 2009.

[12] Gårding Lars. Une variante de la méthode de majoration de cauchy. *Acta Mathematica*, 114(1) :143–158, 1965.

[13] Christine Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables - Une introduction.* savoirs actuels. edp Sciences, 2012.

[14] Peter D Lax. Nonlinear hyperbolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 6 :231–258, 1953.

[15] Nikolai Andreevich Lednev. A new method for the solution of partial differential equations. *Matematicheskii Sbornik*, 64(2) :205–266, 1948.

[16] Cauchy Augustin Louis. *Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles.* 1842.

[17] Cauchy Augustin Louis. *Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles.* 1842.

[18] Cauchy Augustin Louis. *Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques, et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre.* 1842.

[19] Chantal Moussy. Théorème du point fixe et théorème de cauchy-kowalewsky-lednev pour les systèmes semi-linéaires. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, 6e série, 8(3) :491–535, 1999.

[20] Federica Pieroni. On the real algebra of denjoy–carleman classes. *Selecta Mathematica*, 13(2) :321, 2007.

[21] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[22] Gerhard Schindl. *Spaces of smooth functions of Denjoy-Carleman-type*. PhD thesis, University of Vienna, jan 2009.

[23] Vincent Thilliez. On quasianalytic local rings. *Expositiones Mathematicae*, 26(1) :1–23, 2008.

[24] Joris van der Hoeven. *Majorants for formal power series*. Université de Paris-Sud. Département de Mathématique, 2003.

[25] Claude Wagschal. Une généralisation du problème de goursat pour des systèmes d'équations intégro-differentielles holomorphes ou partiellement holomorphes. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, p :147–164, 1974.

[26] Claude Wagschal. Le problème de goursat non linéaire. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, p :309–337, 1979.