MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Option : Analyse et Modèles aléatoires

MEMOIRE

pour l'Obtention du Grade de **Magister** en Mathématiques

présenté par

Farid CHIGHOUB

SUR L'EQUATION DE HAMILTON BELLMANN JACOBI EN CONTROLE OPTIMAL STOCHASTIQUE

devant le jury composé de :

Lamine **MELKEMI**	MC	Univ. Batna	Président
Brahim **MEZERDI**	Pr	Univ. Biskra	Rapporteur
Abdelhakim **NECIR**	MC	Univ. Biskra	Examinateur
Seïd **BAHLALI**	Dr CC	Univ. Biskra	Examinateur

13 avril 2005

REMERCIEMENTS

C'est pour moi un trés grand plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Brahim Mezerdi, Professeur à l'université de Biskra. Ses encouragements et sa disponibilité ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail. La qualité du sujet proposé, les orientations dont j'ai bénéficié se sont avérées toujours pertinentes. Je le remercie du fond du coeur.
Mr Lamine Melkemi, maître de conférence à l'université de Batna a eu la gentillesse d'accepter de présider mon jury, je le remercie vivement.
Mes remerciements vont également à Messieurs Abdelhakim Necir, maître de conférence et Seid Bahlali chargé de cours, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.
Mes vifs remerciement vont également à tous mes enseignants en graduation et en post-graduation.

Résumé

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux problèmes de contrôle optimal stochastique où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique du type Ito. Plus précisémment, notre intérêt s'est porté sur les conditions nécessaires d'optimalité ainsi que sur le principe de la programmation dynamique. Le premier chapitre est une introduction à la théorie des processus stochastiques, on rappelle les principaux outils qui seront utilisés par la suite. Au second chapitre, on définit le problème de contrôle et on étudie en détails l'équation de la programmation dynamique, appelée aussi équation de Hamilton Bellmann Jacobi. Le troisième chapitre est une étude du principe du maximum stochastique. On traite l'approche de Haussmann utilisant la transformation de Girsanov, ainsi que celle de Peng pour les systèmes où le coefficient de diffusion dépend explicitement du contrôle. Au dernier chapitre nous étudions le lien qui existe entre le principe du maximum et le principe de la programmation dynamique. On montre en particulier que le processus adjoint est la dérivée spatiale de la fonction de valeur.

Abstract

In this work, we are interested in stochastic control problems where tyhe system is governed by the solution of a stochastic differential equation of the Ito type. More precisely, our interest was focused on necessary conditions of optimality as well as on the dynamic programming principle. The first chapter is an introduction of the theory of stochastic processes, we recall the main tools which will be used in the sequel. In the seocnd chapter, we define the stochastic control problem and we study in details the dynamic programming equation called Hamilton Bellmann jacobi equation. The third chapter is a study of the stochastic maximum principle. We treat the Haussmann's version using the Girsanov transformation theorem, as well as the Peng's one for systems where the diffusion coefficient is controlled. In the last chapter we study the link between the the maximum principle and the dynamic programming principle. It is proved in particular that the adjoint process is linked in some way to the derivative of the value function.

Key words. Stochastic differential equation- Stochastic control- Maximum principle - Dynamic programming - Viscosity solution - Adjoint process - HJB equation.

Processus stochastiques et Contrôle Optimal.

AMS Subject Classification. Primary 93E20, 60H30. Secondary 60G44, 49N10

Table des matières

0.1 Introduction

La théorie d'optimisation dynamique déterministe introduit dépuis 1940. L'introduction de l'aspect aléatoire offre une modélisation mathématique plus réaliste de la situation. Nous considérons ici seulement les problèmes d'optimisation stochastique (Les travaux de base sont Haussmann [10,11,12,13,14], Bensoussan [4], Kushner [16], Mezerdi [18]). Les objectifs de la théorie sont :

(i) L'obtention des conditions nécessaires (ou nécessaires et suffisantes pour le ou les extrima (ou minina)).

(ii) L'étude de la structure et des propriétés des équations exprimant ces conditions.

On étudie les problèmes de contrôle stochastique dans lesquels la variable de contrôle agit sur l'état du système, ces problèmes d'optimisation sont abordés par la méthode de la programmation dynamique qui permet d'obtenir une caractérisation analytique de la fonction valeur du problème d'optimisation comme solution d'un équation aux derivées partielles dite de Hamilton-Jacobi-Bellman. Naturellement la méthode des semi-groupes est liée à la méthode de la programmation dynamique.

Un autre type de problèmes d'optimisation concerne les cas où la variable de contrôle est un temps d'arrêt. Le critère (a maximiser) s'écrit sous la forme :

$$E\left[\int_0^\tau f\left(X_t\right)dt + g\left(X_\tau\right)\right].$$

A chaque date t, on peut décider d'arrêter le processus ce qui rapporte $g\left(X_\tau\right)$ ou bien de continuer et de recevoir alors $\int_0^t f\left(X_s\right)ds$, en esperant que cela permette d'obtenir un gain plus élevé, on cherchera les contrôles optimaux sous forme feedback, c'est à dire comme fonction déterministe du temps et de l'état du systeme à cet instant. Lorsque le domaine D est connu, le problème obtenue est un problème de Dirichlet, et sous certaines hypothèse de régularité sur la frontiere ∂D et d'ellipticité du coefficient de diffusion, admet une solution régulière. Le travail de Friedeman 1975 contient une étude détaillée de ce problème, main nous n'avons pas pu comprendre tout les points des démonstrations de cet auteur. Mais ici D est bien sûr inconnu et on a besoin d'une condition supplémentaire, sur la frontière ∂D pour identifier le domaine D et la fonction V, cette condition dit que :

$$\nabla_x V(x) = \nabla_x g\left(x\right), \forall x \in \partial D,$$

et qui exprime la continuité de $\nabla_x V$ à travers la frontières ∂D illustre un principe général dans les problèmes d'arrêt optimaux connu sous le nom de "Smoth fit" voir par exemple Shiryayev 1978, Jaka 1993.

On peut également utiliser toutes les méthodes classiques pour la représentation des solutions des EDP parabolique non linéaire de second ordre, une étude plus précise est faite dans Krylov 1987.

Il existe de nombreux cas où la fonction valeur n'est pas suffisamment régulière pour satisfaire l'équation de Bellman au sens classique. La notion de solutions de viscosité introduite par Crandall et Lions 1992 fournit un cadre particulièrement bien adapté à la théorie de l'optimisation dynamique stochastique.

Nous allons donner une démonstration détaillée du principe du maximum en contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équation differentielles stochastique du type d'Itô. Noter a ce sujet les travaux de Haussman 1986 ou l'on considère un problème de contrôle stochastique, en utilisant les solutions faibles des équations différentielles stochastiques données par la transformation de Guirsanov, on a suivi ici une résultat classique appelée "cône de variation" pour transformé le problème des systèmes avec contraintes a un autre sans contraintes, ce résultat est l'une des adaptations à la dimension $m_1 + 1 + m_2$ de la classique théorie des multiplicateurs de Lagrange.

Nous allons donner une démonstration détaillée du principe du maximum des systèmes gouvernés par des processus des diffusions dans le cas où seulement le drift dépend du contrôle, ce résultat a été obtenu par Kushner (voir aussi Bensoussan 1981, Haussmann 1986).

Le travail de Peng 1990 contient une étude détaillée de ce problème dans le cas où le coefficient de diffusion contient aussi un terme contrôle. En utilisant les dérivées de second ordre pour avoir une estimation des solutions de l'équation d'état de l'ordre de $\circ(\varepsilon)$, et le théorème de représentation de Reisz pour les estimations du 1^{er} et 2^{nd} ordre. On peut également utiliser la méthode de Bensoussan pour établir un principe du maximum généralisé cette méthode est basée sur la décomposition d'Itô voir Behlali 2002.

Il serait intéressant aussi d'étudier le lien qui existe entre le principe du maximum et le principe de la programmation dynamique. Le problème est alors d'essayer d'obtenir des relations entre l'équation d'$H.J.B$ et le système Hamiltonian.

Chapitre 1

Processus Stochastiques

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.1. *Etant donné un espace probabilisable* (Ω, F) *et un intervalle de temps* T*, on appelle processus stochastique toute famille de v-a*

$$X_t : (\Omega, F) \underset{w \to X_t(w)}{\longrightarrow} (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})). \tag{1.1}$$

Le processus sera noté $(\Omega, F, P, X_{t \in T})$ *ou même simplement* X_T*,* $X_t(w)$ *étant une fonction de deux variables* t *et* w *est également écrite* $X(t, w)$*.*

En échangeant le rôle de ces variables, on peut aussi dire que le processus stochastique est famille de trajectoires $X : T \underset{t \to X_t}{\longrightarrow} \mathbb{R}$, une telle trajectoire est notée aussi $X(., w)$.

Pour représenter un phénomène aléatoire dépendant du temps, le modèle mathématique adéquat est le processus stochastique. Par analogie au cas des variables aléatoires, il est naturel de chercher à calculer des probabilités d'événements comme :
- $\sup\limits_{t \in T} X(t, w) \leq M$.
- $X(., w)$ appartienne à une certaine région de $\mathbb{R}$.

La réponse a été donnée par le théorème de Kolmogorov qui permet de construire une probabilité sur un espace de dimension infinie.

Remarque 1.2. *La filtration naturelle associée à un processus* $\{X_t, t \geq 0\}$ *est par définition la famille de sous tribus* $F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$*, où* F_t *est la plus petite tribu rendant mesurable les applications* $w \to X_s(w)$ *pour* $s \leq t$*.*

Définition 1.3. *Soit* $\{F_t, t \geq 0\}$ *une filtration, soit* τ *une variable aléatoire positive a valeurs dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, *on dit que* τ *est un temps d'arrêt si pour tout* t, $\{\tau \leq t\} \in F_t$.

Définition 1.4 (Martingales a temps continu). *Soit* $\{F_t, t \geq 0\}$ *une filtration sur un espace* (Ω, F, P), *et* $(M_t, t \geq 0)$ *un processus adapté à cette filtration. On dit que* M_t *est une martingale si pour tout* t, M_t *est intégrable et pour tout* $s \leq t$

$$E[M_t/F_s] = M_s, \tag{1.2}$$

(M_t) est une martingale de carré intégrable si pour tout t

$$E|M_t|^2 < +\infty.$$

Définition 1.5. *On dit que* $\{W_t, t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien (standart) par rapport à une filtration* $\{F_t, t \geq 0\}$, *si* $\{W_t, t \geq 0\}$ *est un processus continu adapté à cette filtration nul en* 0, *et si les accroissements* $W_{t+h} - W_t$ *sont indépendants de* F_t, *de loi Gaussienne centrée de variance* h.

Proposition 1.6 (formule d'Itô). *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *a support compact, donc*

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds. \tag{1.3}$$

1.2 Processus de Markov

Définition 1.7. *Soit* $(X_t)_t$ *un processus a valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$, *on considère la filtration définie pour tout* t *positif par* $F_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$. *On dit que* $(X_t)_t$ *est un processus de Markov si*

i) $\forall B \in \mathcal{E}$, *et* $\forall r > t$, $\quad r, t \in \Im$

$$P(X_r \in B \diagup F_t) = P(X_r \in B \diagup X_t = y), \tag{1.4}$$

ii) Si on note

$$\widehat{P}(s, y, t, B) = P(X_t \in B \diagup X_s = y),\ \forall t \geq s, \quad t,\ s \in \Im.$$

Donc $\forall s,\ t \in \Im$, $s \leq t$, *et* $\forall B \in E$, $\widehat{P}(s, ., t, B)$ *est* $E-$*mesurable, et* $\widehat{P}(s, y, t, .)$ *est une mesure de probabilité sur* $(E, \mathcal{E})$.

iii) L'équation de Chapman-Kolmogorov

$$\widehat{P}(s,y,t,B)=\int_E \widehat{P}(r,x,t,B)\,\widehat{P}(s,y,r,dx)$$

est vérifiée pour tout $s,\ r,\ t\in\Im$, avec $s<r<t$. On dit que $\widehat{P}$ est une probabilité de transition.

Définition 1.8. *On appelle fonction de transition $(P_{s,t})_{s\leq t}$ sur $(E,\mathcal{E})$, une famille de probabilités de transition tels que :*
i) $P_{s,s}=Id$, $\forall s\in\Im$.

ii) $P_{s,t}.P_{t,u}=P_{s,u}$, $\forall s\leq t\leq u$.

Définition 1.9. *Soit $(X_t)_t$ un processus de Markov et $P_{s,t}$ une fonction de transition sur $(E,\mathcal{E})$. On dit que (X_t) admettant la fonction de transition $P_{s,t}$ si et seulement si pour toute f mesurable bornée*

$$E\left[f(X_t)\diagup F_s\right]=P_{s,t}f(X_s)\,,\qquad \forall s<t. \tag{1.5}$$

Définition 1.10. *On dit que le processus de Markov (X_t) est homogène si*

$$P_{s+h,t+h}=P_{s,t}\ ,\qquad \forall s<t,\ \text{et}\ \forall h>0.$$

On change de notation, et on note P_{t-s} pour $P_{s,t}$, $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs positifs sur l'espace des fonctions mesurables bornées appelé semi-groupe de transition de (X_t), on note que

$$P_s.P_t=P_{s+t},\ \text{et}\ P_0=Id,\quad \forall s\leq t.$$

Définition 1.11 (Générateur infinitésimal). *On notera $V(E)$ l'espace des fonctions mesurables bornées. On désignera par $\|f\|=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$ la norme sur $V(E)$, pour toute $f\in V(E)$, et $s,\ t\in\Im$ avec $s<t$, soit*

$$P_{s,t}f(y)=\int_E f(x)\,\widehat{P}(s,y,t,dx)=E_{sy}\left[f(X(t))\right],$$

on considère ensuite

$$\mathcal{L}(t)=\lim_{h\to 0}h^{-1}\left(P_{t,t+h}f-f\right), \tag{1.6}$$

Et on dit que $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $P_{t,s}$, l'opérateur $\mathcal{L}$ est non borné dans $V(E)$, son domaine $D(\mathcal{L})$ est l'ensemble des fonctions $f \in V(E)$ tel que : $h^{-1}(P_{t,t+h}f - f)$ converge dans $V(E)$ lorsque h tend vers 0.

Exemple (Mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$). Supposons que $f \in C^2$, par la formule d'Itô

$$f(W_t) = f(W_0) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(W_s)\, d\left\langle W^i, W^j \right\rangle_s$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{E[f(W_t)] - E[f(W_0)]}{t} = \frac{1}{2} E[\Delta f(W_t)]$$

donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2} \Delta f(x).$$

Théorème 1.12 (formule de Dynkin). *Soit (X_t) un processus de Markov de générateur infinitésimal $\mathcal{L}(t)$, soit $\psi \in C^2(R^n)$, supposons que τ est un temps d'arrêt tel que : $E_y[\tau] < \infty$, donc*

$$E_y[\psi(X_\tau)] = \psi(x) + E_y\left[\int_0^\tau \mathcal{L}(t)\, \psi(X_s)\right] ds.$$

Lemme 1.13. *Considérons l'ensemble $Q^0 = [s,t] \times \mathbb{R}^n$, soit $\psi \in C^{1,2}(Q^0)$. On considère également un processus de Markov (X_t) de générateur infinitésimal $\mathcal{L}(t)$, donc*

$$E_{sy}\psi(t, X(t)) = \psi(s,y) + E_{sy}\left[\int_s^t \psi_t(r, X(r)) + \mathcal{L}(r)\, \psi(r, X(r))\, ds\right]. \tag{1.7}$$

Preuve. Comme (X_t) est un processus de Markov de générateur infinitésimal $\mathcal{L}(t)$, donc $\zeta(t) = (t, X(t))$ est un processus de Markov de générateur infinitésimal $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(t)$, par la formule de Dynkin

$$E_{sy}[\psi(\zeta(t))] = \psi(s,y) + E_{sy}\left[\int_s^T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(r)\right) \psi(\zeta(r))\right] dr,$$

donc

$$E_{sy}[\psi(t, X(t))] = \psi(s,y) + E_{sy}\left[\int_s^T \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathcal{L}(r)\right) \psi(r, X(r))\right] dr.$$

1.3 Processus de diffusion

Définition 1.14. *Soit $(X_t)_{t\in\Im}$ un processus de Markov sur $\mathbb{R}^n$, et $[s,T]$ un intervalle de temps, on dit que (X_t) est un processus de diffusion de dimention n si*

i/ $\forall\varepsilon>0,\ \forall t\in\Im$, et $x\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1}\int_{|x-z|>\varepsilon}\hat{P}\left(t,x,t+h,dz\right)=0,$$

ii/ $\forall\varepsilon>0,\ \forall t\in\Im$, et $x\in\mathbb{R}^n,\ \exists\ a_{ij}(t,x)$ *et* $b_i\left(t,x\right),\ i,\ j=\overline{1,n}$, *tel que :*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} h^{-1}\int_{|x-z|\le\varepsilon}\left(z_i-x_i\right)\hat{P}\left(t,x,t+h,dz\right) &= b_i\left(t,x\right),\\ \lim_{h\to 0^+} h^{-1}\int_{|x-z|\le\varepsilon}\left(z_i-x_i\right)\left(z_j-x_j\right)\hat{P}\left(t,x,t+h,dz\right) &= a_{ij}\left(t,x\right),\end{aligned}$$

le vecteur $b\left(t,x\right)=\left(b_1\left(t,x\right),...,b_n\left(t,x\right)\right)$ est appelé le drift, la matrice $\left(a_{ij}\left(t,x\right)\right)$ est appelée la matrice de covariance. On note que $a=\sigma\sigma^T$ est définie non-négative et symétrique.

Générateur d'un processus de diffusion. On considère une fonction f bornée de classe C^2 avec toutes ses derivées. Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de transition de (X_t), on montre facilement à l'aide de la formule d'Itô que :

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\{P_t f\left(x\right)-f\left(x\right)\}=\mathcal{L}f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

tel que :

$$\mathcal{L}f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)b_i\left(x\right)\ +\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}\left(x\right). \tag{1.8}$$

La matrice $a=\sigma\sigma^T$ est définie positive, on a alors

$$\begin{aligned} f\left(X_t\right) &= f\left(x\right)+\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_s\right)dX_s^i\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(X_s\right)d\left\langle X^i,X^j\right\rangle_s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\left(\sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(X_s)\, dW_s^k\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i}(X_s)\, b_i(X_s)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\left(\sum_{k=1}^{d} \sigma_{i,k}(X_s)\, \sigma_{j,k}(X_s)\right) ds, \\
\lim_{t\to 0} \frac{E_x f(X_t) - f(x)}{t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, b_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{1\le i\le j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x)\, a_{ij}(x),
\end{aligned}
$$

tel que :

$$
a_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}\sigma_{jk}. \tag{1.9}
$$

On note par $C^{1,2}(Q^0)$ l'espace des fonctions $\psi(t,x)$ continues dans Q^0 avec ses dérivées $\psi_t,\ \psi_{x_i},\ \psi_{x_i,x_j},\ i,\ j = \overline{1,n}$. Et par $C_p^{1,2}(Q^0)$ la classe des fonctions $\psi(t,x) \in C^{1,2}(Q^0)$ tel que :

$$
\exists c, k \diagup |\psi(t,x)| \le D\left(1 + |x|^k\right).
$$

Dans les théorèmes (1.15) et (1.16) on suppose que $Q^0 = [s,T] \times \mathbb{R}^n$, et Q est un sous ensemble ouvert de Q^0. On considère X_t la solution de l'EDS

$$
dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \tag{S}
$$

étant donné l'état de système à la date s par $X_s = y$, tel que $(s,y) \in Q$, et en ce donne $\tau > 0$ le temps de sortie de l'ensemble Q.

Théorème 1.15. *Supposons que*
a) $\exists C$ *une constante :* $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le C(1+|x|)$, $\forall (t,x) \in Q$,
b) $\psi(t,x) \in C_p^{1,2}(Q)$, et $\psi(t,x) \in C\left(\overline{Q}\right)$,
c) $\psi_t + \mathcal{L}(t)\psi + M(t,x) \ge 0$, *pour tout* $(t,x) \in Q$, *tel que :*

$$
E_{sy} \int_s^\tau |M(r, X(r))|\, dr < \infty,\ \forall (s,y) \in Q.
$$

Alors

$$
\psi(s,y) \le E_{sy} \int_s^\tau M(r, X(r))\, dr + E_{sy}\psi(\tau, X(\tau)). \tag{1.10}
$$

Preuve. Considérons une suite d'ensemble bornées $(Q_n)_n$, tel que $j \geq 1$, $Q = \underset{j}{\cup} Q_j$, et $\overline{Q_j} \subset Q_{j+1} \subset Q$. Pour $(s,y) \in Q_j$, soit τ_j le temps de sortie de l'ensemble Q_j, donc (τ_j) est une suite croissante tel que : $\tau_j \to \tau$ P.presque sur, la fonction $\psi_j = \psi 1_{Q_j}$ est de classe $C^{1,2}$. D'après le lemme (1.13),

$$\psi(s,y) = -E\int_s^{\tau_j} (\psi_r + \mathcal{L}(r)\psi)\,dr + E\psi(\tau_j, X(\tau_j)),$$

et comme

$$M(t,x) \geq -(\psi_t + \mathcal{L}(r)\psi),$$

donc

$$\psi(s,y) \leq E\int_s^{\tau_j} M(r, X(r))\,dr + E\psi(X(\tau_j)),$$

et

$$\lim_{j\to\infty} E[\psi(\tau_j, X(\tau_j))] = E[\psi(\tau, X(\tau))].$$

Car $\tau_j \underset{j\to\infty}{\to} \tau$ $P.ps$, et $\psi \in C\left(\overline{Q}\right)$, alors

$$\psi(\tau_j, X(\tau_j)) \underset{j\to\infty}{\to} \psi(\tau, X(\tau)) \ \ P.\text{ ps}.$$

Pour $R > 0$ soit

$$I_R = \begin{cases} 1 & \text{si } \|X_t\| \leq R, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{j\to\infty} E[\psi(\tau_j, X(\tau_j)) I_R] = E[\psi(\tau, X(\tau)) I_R],\ \forall R > 0.$$

De plus, $\exists c,\ k$, tel que :

$$|\psi(t,x)| \leq c\left(1 + |x|^k\right),$$

soit

$$H(r) = P(\|X_t\| > r),$$

donc

$$\int_R^\infty r^{K-1} H(r)\,dr < \infty.$$

En intégrant par partie, on obtient par passage à la limite

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^\infty \left(1 + r^k\right) dH(r) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left|\psi\left(\tau_j, X\left(\tau_j\right)\right)\right| &\leq C\left(1+\left|X\left(\tau_j\right)\right|^k\right) \\
&\leq C\left(1+\|X(t)\|^k\right),
\end{aligned}$$

et

$$E\left|\psi\left(\tau_j, X\left(\tau_j\right)\right)\right| \leq -D \int_R^{\infty}\left(1+r^k\right) dH(r),$$

le terme $-D \int_R^{\infty}\left(1+r^k\right) dH(r)$ tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$, ce que prouve que.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E\left[\psi\left(\tau_j, X\left(\tau_j\right)\right)\right]=E[\psi(\tau, X(\tau))].$$

Théorème 1.16. *Supposons que les conditions* (a), (b) *de théorème* (1.15) *ont lieu, ainsi que*

$$E_{sy} \int_s^y\left|\psi_r+\mathcal{L}(r) \psi\right| dr<\infty,\ \forall(s, y) \in Q,$$

donc

$$\psi(s, y)=-E_{sy} \int_s^y\left[\psi_r+\mathcal{L}(r) \psi\right] dr+E[\psi(\tau, X(\tau))]. \tag{1.11}$$

1.4 Equations de Kolmogorov

1.4.1 Equation Backward

Définition 1.17. *Considérons l'opérateur aux dérivées partielles linéaire de seconde ordre*

$$\frac{\partial}{\partial s}+\mathcal{L}(s)=\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(s,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(s,y)\frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{1.12}$$

tel que : $a(s,y)=\sigma(s,y)\,\sigma^T(s,y)$ *. On appele problème backward l'équation aux dérivées partielles satisfaisant*

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}+\mathcal{L}(s)\,\psi+A(s,y)=0, \tag{1.13}$$

(A *est une fonction a valeurs dans* $\mathbb{R}$), *avec*

$$\psi(T,y)=\psi(y),\quad y\in\mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Si la matrice $a(s,y)=(a_{ij}(s,y))_{i,j=\overline{1,n}}$ *est définie positive l'opérateur backward devient parabolique, si de plus il existe une constante* $c>0$, *tel que :* $a_{ij}(s,y)\leq c$, $i,j=\overline{1,n}$, *l'opérateur backward devient uniformément parabolique.*

On se place toujours sur l'ensemble $Q^0=(T_0,T)\times\mathbb{R}$, supposons que b, σ satisfont la condition de croissance linéaire. On désigne par ψ la solution de $(1.13),(1.14)$ avec $\psi\in C_p^{1,2}(Q^0)$, et $\psi\in C\left(\overline{Q^0}\right)$, par le théorème (1.16)

$$\psi(s,y)=E_{sy}\left\{\int_s^T A(r,X(r))\,dr+\psi(X(T))\right\}. \tag{1.15}$$

On considère maintenant l'équation (1.13) sur un sous ensemble ouvert Q de Q^0, avec

$$\psi(s,y)=\Psi(s,y),\quad \text{si } (s,y)\in\partial^*Q, \tag{1.16}$$

tel que : $\partial^*Q=\partial Q$, P.presque sur, où $(\tau,X(\tau))\in\partial^*Q$. On suppose que les conditions de théorème (1.16) ont lieu, ainsi que

$$\psi(s,y)=-E_{sy}\int_s^\tau[\psi_r+\mathcal{L}(r)\,\psi]dr+E_{sy}\left[\psi(\tau,X(\tau))\right],$$

il vient donc que

$$\psi(s,y)=E_{sy}\left\{\int_s^\tau A(r,X(r))\,dr+\psi(\tau,X(\tau))\right\}, \tag{1.17}$$

solution du problème $(1.13),(1.16)$.

1.4.2 Equation Forward

On considére la situation où la solution de (S) avec l'état initial $X_s = y$ admettant une densité de probabilité $p(s, y, t, x)$.

$$\begin{aligned} P_{sy}(X(t) \in B) &= \hat{P}(s, y, t, B) \\ &= \int_B P(s, y, t, x)\, dx,\ \forall B \in B(E^n), \end{aligned}$$

pour $T_0 \leq s \leq t \leq T$. (Sous des conditions convenables) P vérifiant en (t, x) l'EDP (1.18), adjoint de l'équation backward (1.13) avec $A = 0$.

Théorème 1.18. *Considérons $Q_{s,t} = (s, t) \times \mathbb{R}^n$ avec $T_0 \leq t \leq T$, supposons que b, et σ satisfont les conditions de croissance linéaire et de Lipschitz dans $Q^0 = (T_0, T) \times \mathbb{R}^n$, donc si $P(s, y, ., .) \in C^{1,2}(Q_{s,T})$, on a*

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{L}^*(t)\, P = 0, \tag{1.18}$$

avec

$$\mathcal{L}^*(t)\, q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} q) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i q) \tag{1.19}$$

l'EDP (1.18) *est une équation forward.*

Preuve. Soit $\psi \in C^{1,2}$ a support compact dans $Q_{s,t}$, par (1.13) avec $\tau = T$, donc

$$E_{sy}\left[\int_s^T \psi + \mathcal{L}(t)\, \psi dt\right] = 0,$$

i.e.

$$\int_{Q_{s,T}} [\psi_t(t, x) + \mathcal{L}(t)\, \psi(t, x)]\, P(s, y, t, x)\, dx dt = 0.$$

La formule d'intégration par parties $\psi_t P$ en t, et $(\mathcal{L}(t)\, \psi)\, P$ en $x_1, x_2, .., x_n$, donne

$$\int_{Q_{s,T}} \psi(-P_t + \mathcal{L}(t)\, P)\, dt dx = 0.$$

Théorème 1.19. *Supposons que*

1) b, σ vérifiant les conditions (a), (b) *de théorème* (1.15),

2) $\forall (t, x) \in Q^0$, $P(., ., t, x) \in C^{1,2}(Q_T)$, *3) pour $T_0 < s < T$, $P_s(s,y,t,.)$, $P_{y_i}(s,y,t,.)$, $P_{y_iy_j}(s,y,t,.)$ sont intégrables sur tout sous ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, donc $p(.,.,t,x)$ est une solution de probleme backward* (1.13) *avec $A = 0$.*

Preuve. Soit $\psi \in C^2$ a support compact pour $T_0 < s < t$, considérons

$$\begin{aligned} \psi(s,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(s,y,t,x)\,\psi(x)\,dx \\ &= E_{sy}\left[\psi(X(t))\right]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Alors ;

$$\psi_s + \mathcal{L}(s)\,\psi = 0,\ T_0 < s < t$$

D'autre part, par la condition (3) on a

$$\psi_s + \mathcal{L}(s)\,\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(P_s + \mathcal{L}(s)\,P\right)\psi(x)\,dx = 0,$$

donc

$$P_s + \mathcal{L}(s)\,P = 0,\ P.ps.$$

Chapitre 2

Programmation dynamique

L'objectif de cette section est de fournir une première approche aux problèmes d'optimisation stochastique, s'appelle "programmation dynamique". Cette approche se fait à partir des données suivantes :

- L'état X_t du système à contrôler qui est donné pour un contrôle u choisi, le contrôle est un processus F_t-adapté, et prend ses valeurs dans un espace de contrôles U, sous ensemble de $\mathbb{R}^m$, $m \in IN^*$.

- Le critère (à minimiser) s'écrira sous la forme, en horizon fini : $T < +\infty$

$$E\left[\int_0^T f\left(X_t, u_t\right) dt + g(X_T)\right], \tag{2.1}$$

et en horizon infini :

$$E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f\left(X_t, u_t\right) dt\right]. \tag{2.2}$$

f est la fonction de coût intégral, g est le coût final et $\beta > 0$ est un coefficient d'actualisation. Les objectifs seront de déterminer les infima pour ces critères et les contrôles optimaux, s'ils existent. Notons que leur caractérisation explicite ne sera en général possible que dans des cas particuliers le plus souvent pour $n = 1$.

Soit U un espace, dont les éléments seront notés $u, v, w, ..$,dans les applications que nous avons en vue dans les chapitres suivants, U sera l'espace des contrôles feedback $u(.,.) : \Im \times E \rightarrow U$, tel que u peut s'exprimer comme fonction déterministe du temps et de l'état du systéme.

Les données seront pour l'instant les suivantes :

(i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus de Markov admettant $\hat{P}^u(s,y,t,B)$, on suppose ici que tout $u \in U$ (vérifiant des conditions analytique convenable) correspondant à $\hat{P}^u(s,y,t,B)$, on note que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est dépendant du choix de u et de l'état initiale y à la date s.

(ii) L'opérateur $\mathcal{L}^u\left(t\right)$ associe à $\hat{P}^u\left(s,y,t,B\right)$ satisfait :

$$\left[\mathcal{L}^v\left(s\right)\phi\right](y) = \left[\mathcal{L}^u\left(s\right)\phi\right](y)\,,\ \text{si } v = u(s,y). \tag{2.3}$$

(iii) un ensemble $A \subset U$, A sera dans les applications l'ensemble des contrôles admissibles.

2.1 Programmation dynamique et équation d'H.J.B pour les processus de Markov

2.1.1 Formulation du problème

On considère la fonctionnelle

$$J(s,y,u) = E_{sy}\left\{\int_s^T f(t,X(t),u(t))dt + g\left[X\left(t\right)\right]\right\}, \tag{2.4}$$

que l'on cherche à minimiser sur A. Nous décrivons de manière formelle comment le principe de la programmation dynamique permet d'obtenir les relations que doit satisfaire la fonction de valeur:

$$V\left(s,y\right) = \inf_{u\in A} J\left(s,y,u\right). \tag{2.5}$$

Notons par $u^* \in A$, le contrôle optimal vérifiant $V(s,y) = J(s,y,u^*)$, pour tout $(s,y) \in \Im \times E$.

2.1.2 Principe de la programmation dynamique

Lemme 2.1. *On suppose que* $V \in C^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, *donc*

$$V(s,y) = -E_{sy}\int_s^t \left(V_s + \mathcal{L}^u(r)\right)dr + E_{sy}V(t,X(t)),\ \forall s \le t \le T. \tag{2.6}$$

Preuve. En appliquant le lemme (1.13) avec $\psi = V$, et $\mathcal{L} = \mathcal{L}^u$.

Soit $s \leq t \leq T$, supposons que nous exercions un contrôle u_r sur l'intervalle $[s, t]$, supposons que nous connaissions à partir de t le contrôle optimal à appliquer u^*, sachant qu'a l'instant t, l'état du système est $x(t) = X_t^{s,y}$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &= J(t, x(t), u^*) \\ &= E_{sy}\left[\int_t^T f(X_r^{t,x(t)}, u_r^*)dr + g(X_T^{t,x(t)})\diagup x(t)\right], \end{aligned}$$

et d'autre part, considérons

$$\tilde{u}_r = \begin{cases} u_r & \text{si } s < r \leq t, \\ u_r^* & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec la propriété du flot $X_r^{s,y} = X_r^{t,X_t^{s,y}}$ pour $r \geq t$, on a donc

$$J(s, y, \tilde{u}) = E_{sy}\left[\int_s^t f(X_r^{s,y}, u_r)dr + \int_t^T f(X_r^{t,X^{s,y}}, u_r^*)dr + g(X_T^{t,X_t^{s,y}})\right], \tag{2.7}$$

et par la loi des espérances conditionnelles itérées

$$J(s, y, \tilde{u}) = E_{sy}\left[\int_s^t f(X_r^{s,y}, u_r)dr + J(t, X_t^{s,y}, u^*(t, X_t^{s,y}))\right]. \tag{2.8}$$

Le principe d'optimalité de Bellman dit que : si l'on choisit u_r sur $[s, t]$ de façon à minimiser l'expression $J(s, y, \tilde{u})$, on obtient ainsi le contrôle $\tilde{u}$ optimal, ceci signifie que le contrôle optimal sur $[s, T]$ peut être décomposé en u_r^*, $r \in [s, t]$, et u_r^* tel que $r \in [t, T]$. On a donc d'après (2.8)

$$V(s, y) = E_{sy}\left[\int_s^t f(X_r^{s,y}, u_r)dr + V(t, X_t^{s,y})\right].$$

2.1.3 Equation d'H.J.B

Nous construisons maintenant l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman obtenue à partir de (2.6). Soit $v = u(s, y)$, et comme

$$J(s, y, \tilde{u}) = E_{sy}\int_s^t f(r, X_r^{s,y}, v)dr + E_{sy}J\left(t, X_t^{s,y}, u^*\right),$$

alors

$$V(s, y) = J(t, X_t^{s,y}, u^*)$$

et

$$\begin{aligned} V(s,y) &\leq J(s,y,\tilde{u}) \\ &= E_{sy}\left[\int_s^t f(r,X_r^{s,y},v)dr + E_{sy}V(t,X_t^{s,y})\right], \end{aligned} \tag{2.9}$$

d'où, en substituant dans (2.6)

$$E_{sy}\left[\int_s^t V_s(r,X_r^{s,y}) + \mathcal{L}^v(r)\,V(r,X_r^{s,y}) + f(r,X_r^{s,y},v)dr\right] \geq 0.$$

En divisant par $t-s$ et en faisant tender $t-s$ vers 0, on trouve

$$V_s(s,y) + \mathcal{L}^v(s)V(s,y) + f(s,y,v) \geq 0,$$

pour $v = u_r^*$, $s \leq r \leq t$, on obtient

$$0 = V_s(s,y) + \mathcal{L}^{u^*}V(s,y) + f(s,y,u^*), \tag{2.10}$$

ce qui prouve que V satisfait l'équation d'H.J.B

$$0 = V_s(s,y) + \min_{u\in A}\left[\mathcal{L}^u V(s,y) + f(s,y,u_s)\right]. \tag{2.11}$$

Cette équation est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. A cette équation aux dérivées partielles il faut ajouter la condition terminale :

$$V(T,y) = g(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.12}$$

2.2 Programmation dynamique et équation d'H.J.B pour les processus de diffusion

On considère un modèle de contrôle où l'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t,X_t,u_t)dt + \sigma(t,X_t,u_t)\,dW_t,\ \ X_s^{s,y} = y, \tag{2.13}$$

où $X_t \in \mathbb{R}^n$, et W_t est un d-mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, (F_t)_t, P)$, le processus de contrôle (u_t) est $F_t - \textit{adapté}$ et a valeur dans U, les fonctions $b : [s,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [s,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^{n\times d}$, sont supposées continues et bornées sur $[s,T]\times\mathbb{R}^n\times U$. On suppose aussi que $b(x,a)$, et $\sigma(x,a)$ sont des fonctions Lipschitziennes en x uniformément en u, i.e.

$$\exists c \geq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ \ |b(x,a)-b(y,a)| + |\sigma(x,a)-\sigma(y,a)| \leq c\,|x-y|.$$

2.2.1 Formulation du problème

On fixe un horizon fini $0 < T < +\infty$, étant donné un processus de contrôle $u \in U$, et $(t, y) \in [s, T] \times \mathbb{R}^n$, on note par $\{X_t^{s,y}, s \leq t \leq T\}$ la solution de (2.13). Soient $f : [s, T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$, $g : \Im \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, des fonctions continues et bornées, et supposons que $\exists c, k$ tel que : $\forall t \in [s, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, et $u \in A$

$$|f(t, x, u)| \leq c(1 + |x| + |u|)^k, \text{ et } |g(t, x)| \leq c(1 + |x|)^k. \tag{2.14}$$

Etant donné un processus de contrôle $u \in A$, et $(s, y) \in [s, T] \times \mathbb{R}^n$, on définit la fonction coût :

$$J(s, y, u) = E\left[\int_s^T f(X_r^{s,y}, u_r)dr + g\left(X_T^{s,y}\right)\right],$$

l'objectif étant de minimiser cette fonction coût, on introduit la fonction valeur

$$V(s, y) = \inf_{u \in A} J(s, y, u),$$

qu'on cherchera à calculer ainsi qu'un contrôle tel que : $V(s, y) = J(s, y, u^*)$, u^*est appelé contrôle optimal, si de plus le processus u^* peut s'exprimer comme fonction déterministe du temps et de l'état du système $u_r^* = u^*(r, X_r^{s,y})$, on dit que u^* est un contrôle optimal feedback.

Définition 2.2. *Un contrôle feedback $u(t, X_t^{s,y})$ est admissible si*

(a) $\forall (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, il existe un mouvement Brownien W_t tel que l'EDS (2.13) *possède une solution X_t unique* (à l'indistinguabilité prés).

(b) $\forall K > 0$, $E_{sy}|X(t)|^k$ est borné, pour $s \leq t \leq T$, la borne est dépendant de (s, y), et $E_{sy}\int_s^T |u(t)|^k dt < \infty$.

Remarque 2.3. *Les conditions suivantes sont suffisantes pour que le contrôle u devient admissible*

(i) $\exists M_1 : |u(s, y)| \leq M_1(1 + |y|)$, $\forall (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, et $\forall\ B \subset \mathbb{R}^n$, avec $s < t' < T$, et *il existe une constante k_1, tel que:*

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq k_1 |x - y|, \quad \forall x, y \in B, \text{ et } s \leq t \leq t'.$$

(ii) $b(t, x, u) = \tilde{b}(t, x) + \sigma(t, x)\theta(t, x, u)$, tel que : $\tilde{b}, \sigma$ vérifiant les conditions d'Itô, et $\theta \in C^1(\overline{Q_0} \times U)$ bornée dans $\overline{Q^0} \times U_1$, pour tout $U_1 \subset U$ tel que $Q_0 \subset [s, T] \times \mathbb{R}^n$.

2.2.2 Principe de la programmation dynamique et équation d'H.J.B

Nous nous intéressons ici où cas où l'état du système est gouverné par un processus de diffusion, donc tout ce qui suivant n'est qu'application absolument immédiate du section précédent, la seule différence est que la résolution du problème d'optimisation peut être fait par la formule d'Itô. Les problèmes à résoudre sont maintenant les suivants :

(i) écrire les équations fournissant le contrôle optimal u.

(ii) étudier ces équations pour tâcher d'en tire le maximum d'information sur le contrôle optimal.

Ces problémes sont abordés par la méthode de la programmation dynamique qui permet d'obtenir une caractérisation analytique de la fonction valeur du problème d'optimisation comme solution d'équation aux dérivées partielles. Donc évidemment

$$V(s,y) = \inf_{u\in A} E_{sy}\left[\int_s^t f(r, X_r^{s,y}, u_r)dr + V(t, X_t^{s,y})\right], \tag{2.15}$$

et l'équation d'$H.J.B$

$$0 = V_s + \min_{u\in A}\left[\mathcal{L}^u V(s,y) + f(s,y,u)\right]. \tag{2.16}$$

Remarque 2.4. *Pour une étude beaucoup plus précise en utilisant Itô pour la construction de l'équation d'H.J.B*

On suppose que $V \in C^{1,2}\left([s,T]\times\mathbb{R}^n\right)$ par la formule d'Itô entre s et t, il vient

$$V(t, X_t^{s,y}) = V(s,y) + \int_s^t (V_s + \mathcal{L}^u V)(r, X_r^{s,y})dr + \int_s^t V_y(r, X_r^{s,y})^T \sigma(X_r^{s,y}, v)dW_r,$$

en prenant l'espérence et en substituant dans (2.9), d'où

$$0 \leq E_{sy}\left[\int_s^t \left(V_s + \mathcal{L}^u V\right)(r, X_r^{s,y}) + f(X_r^{s,y}, v)dr\right],$$

et dévisant par $t-s$, et en faisant tendre $t-s$ vers 0, on obtient

$$0 \leq V_s(s,y) + \mathcal{L}^u V(s,y) + f(s,y,v),$$

ceci étant valable pour tout $v \in U$, on a alors

$$0 \leq V_s + \min_{u_r\in U}\left[\mathcal{L}^{u_r} V(s,y) + f(s,y,u_r)\right].$$

D'autre part, supposons que u_r^* est optimal alors dans (2.15) on a

$$V(s,y) = E_{sy}\left[\int_s^t f(X_r^*, u_r^*)\,dr + V(t, X_r^*)\right],$$

où X^* est l'état du système solution de l'EDS

$$dX_r^* = b(X_r^*, u_r^*)\,dr + \sigma(X_r^*, u_r^*)\,dW_r,\ \ r \in [s,T], \qquad X_s^* = y. \tag{2.17}$$

Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur V, on obtient

$$V_s(s,y) + \mathcal{L}^{u_s^*} V(s,y) + f(y, u_s^*) = 0,$$

donc V satisfait

$$V(s,y) + \min_{v \in A}\left[\mathcal{L}^v(s)\,V(s,y) + f(s,y,v)\right] = 0.$$

Théorème 2.5. (de vérification) *Soit $V \in C^{1,2}(Q)$, et $V \in C(\overline{Q})$ est à croissance linéaire en y pour tout $u \in U$, et satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$V_s(s,y) + \min_{v \in U}\left[\mathcal{L}^u(s)V(s,y) + f(s,y,v)\right] = 0, \quad (s,y) \in Q, \tag{2.18}$$

$$V(s,y) = g(s,y),\ (s,y) \in \partial^* Q, \quad (\partial^* Q = \partial Q\ P.ps). \tag{2.19}$$

Alors ;

(a) *$V(s,y) \leq J(s,y,u)$, pour tout contrôle admissible u, et $\forall (s,y) \in Q$,*

(b) si *de plus, pour tout $(s,y) \in Q$, il existe $u^*(s,y)$ un contrôle feedback admissible, tel que :*

$$\mathcal{L}^{u^*}(s)V(s,y) + f^{u^*}(s,y) = \min_{v \in U}\left[\mathcal{L}^v(s)V(s,y) + f^v(s,y)\right], \tag{2.20}$$

donc $V(s,y) = J(s,y,u^*)$, $\forall (s,y) \in Q$, et $u^*(s,y)$ est optimal.

Preuve.

(a) Pour tout $v \in U$, et $(s,y) \in Q$, on a

$$0 \leq V_s(s,y) + \mathcal{L}^u(s)V(s,y) + f^v(s,y), \tag{*}$$

en remplaçant s, y, v par t, $X(t)$, $u(t) = u(t, X(t))$ respectivement, on obtient

$$0 \leq V_s(t, X(t)) + \mathcal{L}^u(t)V(t, X(t)) + f^u(t, X(t)).$$

En appliquant le théorème (1.15), avec $M = f^u$, $\psi = V$, pour avoir

$$V(s,y) \leq E_{sy}\left[\int_s^T f(r,X(r),u(r,X(r)))dr + g(T,X(T))\right].$$

La condition (2.14) donne

$$E_{sy}\int_s^t |M(r,X(r))|\, dr < \infty.$$

(b) On note u^* la valeur u qui réalise le minimum, substituant u^* pour u dans (*) on obtient l'EDP non linéaire

$$0 = V_s\,(s,y) + \mathcal{L}^{u^*}V\,(s,y) + f^{u^*}\,(s,y)\,,$$

par un raisonnement similaire, en appliquant le théorème (1.15), donc

$$V(s,y) = J(s,y,u^*).$$

Conclusion. Considérons

$$V(s,y) = \inf_u E_{sy}\left[\int_s^T f(r,X_r^{s,y},u_r)dr + g(T,X_T^{s,y})\right],\ (s,y) \in Q^0,$$

alors V doit "résoudre"

$$\begin{aligned} V_s + \min\left[\mathcal{L}^u(s)V + f^u\right] &= 0, \quad (s,y) \in Q, \\ V(T,y) &= g(T,y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

De plus, si pour tout (s,y), $u^*(s,y)$ est un point de $\min\left[\mathcal{L}^u(s)V + f^u\right]$, alors $\{u^*(t,X_t^*), s \leq t \leq T\}$ est un contrôle optimal feedback, avec

$$dX_t^* = b(X_t^*,u^*(t,X_t^*)) + \sigma\left(X_t^*,u^*(t,X_t^*)\right)dW_t,\ s \leq t \leq T,\ X_s^* = y.$$

Corollaire 2.6. *Soit $V \in C_p^{1,2}(Q)$, et $V \in C(\overline{Q})$ satisfait l'équation d'H.J.B*

$$\begin{aligned} 0 &= V_s + \min_{v\in A}\left[\mathcal{L}^v(s)V + f(s,y,v)\right], \quad (s,y) \in Q \\ V(s,y) &= g\,(s,y)\,, \quad (s,y) \in \partial^* Q. \end{aligned}$$

Et soit u^* un contrôle feedback admissible tel que :

$$\mathcal{L}^{u^*}(s)V + f^{u^*}(s,y) = \min_{v\in A}\left[\mathcal{L}^v(s)V + f(s,y,v)\right],\ (s,y)\in Q.$$

Supposons que la fonction de transition $\hat{P}^{u^*}$ admet une densité de probabilité $P^*(s,y,t,x)$, donc $V(s,y) = J(s,y,u^*)$, $\forall (s,y)\in Q$, et le contrôle u^* est optimal.

Preuve. Il existe un ensemble N de mesure nulle tel que : pour tout $(t, X^*(t)) \in Q - N$, on a

$$\mathcal{L}^{u^*}(t)V + f^{u^*}(t,X^*(t)) = \min\left[\mathcal{L}^v(t)V + f(t,X^*(t),v)\right],$$

par la même méthode que pour le théorème (2.5), il suffait de choisir avec probabilité égale á 1, $(t, X^*(t)) \in N$, donc

$$\begin{aligned} E_{sy}\int_s^T X1_N(t)dt &= \int_s^T P_{sy}((t,X^*(t))\in N)dt \\ &= \iint_N P^*(s,y,t,x)dxdt = 0. \end{aligned}$$

Remarque 2.7. *Dans le cas d'un problème à horizon infini, on cherche à minimiser la fonction de coût*

$$J(x,u) = E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t^x, u_t)dt\right], \tag{2.21}$$

où $X^x = X^{0,x}$, avec une fonction valeur

$$V(x) = \inf_u J(x,u).$$

Le principe d'optimalité de Bellman dit que : pour tout $h > 0$

$$V(x) = \inf_u E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^x, u_s)ds + e^{-\beta h}V(X_h^x)\right], \tag{2.22}$$

et par un argument similaire au cas du problème à horizon fini (en appliquant Itô à $e^{-\beta t}V(X_t^x)$), l'équation de la programmation dynamique devient

$$\beta V(x) + \sup_{u\in A}\left[-\mathcal{L}^u V(x) - f(x,u)\right] = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{2.23}$$

2.3 Cas Autonome

Pour tout contrôle $u \in U$, on définit le coût

$$J(u) = E_y \left\{ \int_0^\tau f(X(r), u(r))dr + g\left(X(\tau)\right) \right\}. \tag{2.24}$$

Le problème de contrôle est alors de trouver $\inf_{v \in U} J(v)$, l'équation d'$H.J.B$ est donné par

$$0 = \min_v \left[\mathcal{L}^v V(y) + f(y,v)\right], \quad y \in G, \tag{2.25}$$

$$V(y) = g(y), \quad y \in \partial^* G, \tag{2.26}$$

où

$$\mathcal{L}^v = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y,v)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n b_i(y,v)\frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{2.27}$$

$\partial G = \partial^* G$ $P.ps$, tel que : $\tau = \inf\left\{t : \ (t, X(t)) \in \partial^* G\right\}$.

Théorème 2.8. *Supposons que* $V \in C^2(G), V \in C(\overline{G})$, *et satisfaisant* (2.25), (2.26), *et il existe* $c > 0$, *tel que :* $f(y,v) \geq c$, $\forall y$, *et* $J(y,u) < \infty$, *donc*

(a)$V(y) \leq J(y,u)$ *pour tout contrôle feedback autonome admissible* u, *et pour tout* $y \in G$.

(b) *Si de plus, pour tout* $y \in G$, *il existe* u^* *mesurable a valeurs dans* A *tel que :*

$$\mathcal{L}^{u^*} V(y) + f^{u^*}(y) = \min_{v \in U}\left[\mathcal{L}^v V(y) + f(y,v)\right], \quad \forall y \in G,$$

et l'EDS

$$\begin{aligned} dX_r^* &= b\left(X_r^*, u_r^*\right)dr + \sigma\left(X_r^*, u_r^*\right)dW_r, \quad r \in [s,T], \\ X_s^* &= y, \end{aligned}$$

admet une solution $V(y) = J(y, u^*)$, u^* *est un contrôle optimal feedback.*

2.4 Solution classique

Les théorèmes suivantes suggèrent la stratégie pour résoudre l'équation d'$H.J.B$, fixer $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ (cas problème à horizon fini) et résoudre

$$\sup_{u \in A}\left[-\mathcal{L}^u V(s,y) - f(y,u)\right].$$

Comme un problème de maximum en $u \in A$, on note

$$u^* = u^*\left(s, y, V, \nabla_y V(s,y), D_y^2 V(s,y)\right), \tag{2.28}$$

la valeur de u qui réalise le maximum, substituant u^* pour u dans l'équation d'$H.J.B$, on obtient l'EDP non linéaire

$$V_s - \mathcal{L}^{u^*} V(s,y) - f(y, u^*) = 0, \tag{2.29}$$

avec la condition terminale $V(T,y) = g(y)$. Si cette EDP non linéaire avec condition terminale admet une solution régulière V, alors V est la fonction valeur du problème de contrôle stochastique et u^* est un contrôle optimal feedback. Cette méthode se justifie donc si l'EDP (2.18) où (2.29) admet une solution $C^{1,2}$, satisfaisant les conditions d'application du théorème de vérification.

Une condition suffisante d'existence de solution régulière à (2.29) est la suivante : $\sigma\sigma^T$ est uniformément élliptique, c'est à dire

$$\exists c > 0,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \forall u \in A,\ y^T \sigma(x,u)\sigma^T(x,u) y \geq c\,|y|^2 .$$

2.4.1 Théorèmes d'existence

Supposons que $\sigma(t,x)$ ne dépend pas du contrôle u, G est borné dans $\mathbb{R}^n$, avec les conditions

(A1) $Q = (T_0, T) \times G$, $\partial^* G = ([T_0, T] \times \partial G) \cup (\{T\} \times G)$,

(A2) U est compact.

(A3) $\sigma \in C^{1,2}(\overline{Q^0})$ une matrice $n \times n$, et σ^{-1} existe et bornée dans $\overline{Q}$.

(A4) $b,\ f \in C^1(\overline{Q^0} \times U)$, $g(T,x) \in C^2(\overline{G})$, $g(t,x) = \widetilde{g}(t,x)$, tel que $\widetilde{g} \in C^{1,2}(\overline{Q})$, pour $T_0 \leq t \leq T$, $x \in \partial G$. La matrice $a(t,x) = \sigma(t,x)\,\sigma^T(t,x)$ est supposée définie symétrique non-négative, et $\exists c$ une constante tel que : $a_{ij}(t,x) \leq c$, donc (2.31) devient uniformément parabolique dans Q.

Soit $(s,y) \in \overline{Q}$, et $p \in \mathbb{R}^n$, en définissant le hamiltonien H par

$$H(s,y,p) = \min_{v \in U} \left[\grave{p}.b(s,y,v) + f(s,y,v)\right], \tag{2.30}$$

cette équation est vérifiant les conditions de croissance linéaire et de Lipschitz. Comme $\sigma(s,y)$ est ne dépend pas de u alors l'équation d'$H.J.B$ devient semi-linéaire sous la forme

$$0 = V_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y) V_{y_i y_j} + H(s,y,V_y). \tag{2.31}$$

Lemme 2.9. *Supposons que V_y est continue dans Q, il existe donc une fonction mesurable $u^* : Q \to U$, tel que* (2.32) *est vérifiée pour presque tout* $(s,y) \in Q$.

$$\mathcal{L}^{u^*}(s)V + f^{u^*}(s,y) = \min_{v\in U}\left[\mathcal{L}^{v}(s)V\left(s,y\right) + f(s,y,v)\right]. \qquad (2.32)$$

Preuve. L'équation d'$H.J.B$ devient maintenant sous la forme (2.31), soit

$$H(s,y,V_y) = \min_{v\in U}\left[V_y\left(s,y\right).b(s,y,v) + f(s,y,v)\right], \qquad (2.33)$$

la fonction

$$\Theta(s,y,v) = V_y(s,y).b(s,y,v) + f(s,y,v)$$

est continue dans $Q\times U$, et comme U est compact par (A2), donc $\exists u^* : Q \to U$ une fonction mesurable tel que :

$$\Theta(s,y,u^*(s,y)) = \min_{v\in U}\Theta(s,y,v).$$

Théorème 2.10. *On suppose que* (A1), (A3), *et* (A4) *ont lieu, donc* (2.31) *admet une solution unique $V \in C^{1,2}(Q)$ et $V \in C(\overline{Q})$, avec $V(s,y) = g(s,y)$, $(s,y) \in \partial^*Q$.*

Preuve. Considèrons $V^1, V^2, \ldots.$ une suite de fonctions bornées dans $\overline{Q}$, on considère ensuite une suite de contrôle feedback $u^0, u^1, \ldots$ prenant u^0 arbitrairement, donc V^{m+1} est solution du problème

$$\begin{aligned}
V_s^{m+1} + \mathcal{L}^{u^m}(s)V^{m+1} + f^{u^m} &= 0,\ m \geq 0, & (2.34)\\
V^{m+1}(s,y) &= g\left(s,y\right) \text{ sur } \partial^*Q,\ \forall (s,y) \in Q, &\\
\mathcal{L}^{u^m}(s)W^m + f^{u^m} &= \min_{v\in U}\left[\mathcal{L}^{v}(s)V^m + f(s,y,v)\right] &\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y)V^m_{y_iy_j} + H(s,y,V^m_y). &
\end{aligned}$$

On applique le principe du maximum pour les équations parabolique (voir Fleming [7]), donc $V^1 \geq V^2 \geq \ldots$, d'où (2.31) en passant à la limite lorsque $m \to +\infty$.

Considérons maintenant le cas où $Q = Q^0$, et

$$J(s, y, u) = E_{sy} \left\{ \int_s^T f(t, X(t), u(t))dt + g\left(X(T)\right) \right\},$$

et on suppose que $(A2)$ est lieu, avec les conditions :

(a) $b(t, x, u) = \widetilde{b}(t, x) + \sigma\left(t, x\right) \theta\left(t, x, u\right)$,

(b) $\widetilde{b}$, $\sigma \in C^{1,2}(\overline{Q_0})$, σ, σ^T, $\sigma_x, \widetilde{b_x}$ sont des fonctions bornées dans $\widetilde{Q_0}$, $\theta \in C^1(\overline{Q^0} \times U)$, θ, θ_x, sont bornées,

(c) $L(t, x, u) \in C^1(\overline{Q^0} \times U)$, et $\exists k, c$, tel que :

$$|f(t, x, u)| + |f_x(t, x, u)| \leq c(1 + |x| + |u|)^k,$$

(d) $g\left(x\right) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, et $\exists c, k$, tel que :

$$|g\left(x\right)| + |g_x(x)| \leq c\left(1 + |x|\right)^k.$$

L'équation (2.31) admet donc une solution unique $V \in C_p^{1,2}(Q)$, étant donnée une condition terminale

$$V(T, y) = g\left(y\right).$$

Théorème 2.11. *Sous les conditions du théorème* (2.10)*, il existe un contrôle optimal feedback admissible u^*, tel que :*

$$\mathcal{L}^{u^*}(s)V(s, y) + f^{u^*}(s, y) = \min_v \left[\mathcal{L}^v(s)V(s, y) + f(s, y, v)\right], \ \forall (s, y) \in Q.$$

La preuve consiste à utiliser le corollaire (2.6) avec le lemme (2.9).

Remarque 2.12. *Soit $(s, y) \in Q$ un point de discontinuité de u^*, donc*

$$\Theta = V_y f + L$$

n'admet pas un unique minimum dans U en (s, y), par contre si $\Theta\left(s, y, .\right)$ admet un unique minimum dans U, $\forall\left(s, y\right) \in Q$ et comme U est compact, donc u^* est continue dans Q.

Lemme 2.13. *Soit U un espace compact et convexe, et $Q' = (T_0, T') \times G'$, soit $\Theta\left(s, y, u\right)$ une fonction satisfaisant*

(i) $\Theta\left(s, y, .\right) \in C^2$, $\forall\left(s, y\right) \in \overline{Q'}$,

(ii) $\Theta_u\left(s, ., u\right)$ *est uniformément Lipschitzienne en s et u,*

(iii) *Les caractéristique de la matrice* Θ_{uu} *sont bornées par* $\gamma > 0$.

Soit $u^*(s,y)$ *l'unique contrôle tel que :* $\Theta(s,y,u^*) = \min\limits_{v\in A}\Theta(s,y,v)$, *donc* $u^*(s,y)$ *est Lipschitz dans* $\overline{G'}$ *uniformément pour* $s \in [T_0, T']$.

Preuve. La condition (iii) implique que $\Theta(s,y,.)$ est convexe, donc admet un unique minimum dans U, $\forall\,(s,y) \in Q'$, pour cela considérons $y_1,\ y_2 \in G'$ et prenons $v_1 = u^*(s,y_1)$, $v_2 = u^*(s,y_2)$, il vient alors

$$\Theta(s,y_1,v_1) = \min_{v\in U}\Theta(s,y_1,v), \text{ et } \Theta(s,y_2,v_2) = \min_{v\in U}\Theta(s,y_2,v),$$

appliquant le développement de Taylor, on obtient

$$\Theta(s,y_1,v_2) - \Theta(s,y_1,v_1) \geq \Theta_u(s,y_1,v_1)(v_2-v_1) + \frac{\gamma}{2}\left|v_2-v_1\right|^2,$$

et comme $\Theta_u(s,y_1,v_1)(v_2-v_1)$ est nonnégative, donc

$$\int_0^1 \Theta_u(s,y_1,v_1+\lambda(v_2-v_1))(v_2-v_1)d\lambda \geq \frac{\lambda}{2}\left|v_2-v_1\right|^2 \qquad (*)$$

et

$$-\int_0^1 \Theta_u(s,y_2,v_1+\lambda(v_2-v_1))\,d\lambda \geq \gamma\left|v_2-v_1\right|^2. \qquad (**)$$

En additionnant (*), et (**), il vient

$$\int_0^1 (\Theta_u(p_1(\lambda)) - \Theta_u(p_2(\lambda)))(v_2-v_1)d\lambda \geq \gamma\left|v_2-v_1\right|^2,$$

tel que :

$$p_1(\lambda) = (s,y_1,v_1+\lambda(v_2-v_1)) \text{ et } p_2(\lambda) = (s,y_2,v_1+\lambda(v_2-v_1)).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schoirz, on obtient

$$\int_0^1 \left|\Theta_u(p_1(\lambda)) - \Theta_u(p_2(\lambda))\right| d\lambda \geq \gamma\left|v_2-v_1\right|.$$

D'après la condition (ii), et le fait que $|p_1(\lambda) - p_2(\lambda)| = |y_1-y_2|$, on a

$$\left|\Theta_u(p_1(\lambda)) - \Theta_u(p_2(\lambda))\right| \leq M\left|y_1-y_2\right|,$$

tel que M est une constante de Lipschitz pour $\Theta_u(s,.,v)$, donc

$$M\left|y_2-y_1\right| \geq \gamma\left|v_2-v_1\right|.$$

D'autre terme ; $\forall y_1, y_2 \in G'$

$$\left|u^*(s,y_2) - u^*(s,y_1)\right| \leq \gamma^{-1}M\left|y_2-y_1\right|,$$

alors $\gamma^{-1}M$ est une constante de Lipschitz pour $u^*(s,.)$ dans G'.

2.5 Application : Problème de Merton en horizon fini

On considère un marché financier a deux actifs, l'un sans risque représentant le compte d'éparge et l'un risque, typiquement représenté par une action, le processus des prix d'actif sans risque évolue selon :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt,$$

celui de l'actif risqué est

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

r, μ, et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$. Pour un investisseur ou agent qui investit dans ces deux actifs, avec une proposition de sa richèsse π_t dans l'actifs risqué et donc $1-\pi_t$ dans l'actif sans risque à la date t, son processus de richèsse évolue selon :

$$\begin{aligned} dX_t &= (1-\pi_t)\frac{X_t}{S_t^0}dS_t^0 + \pi_t \frac{X_t}{s_t} dS_t \\ &= (\pi_t X_t \mu + (1-\pi_t) X_t r)\, dt + \pi_t X_t \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Le contrôle est le processus π a valeurs dans $\mathbb{R}$, on suppose que la richèsse initiale $X_t = x > 0$ au temps t l'agent veut maximiser l'espérance de l'utilité de sa richèsse terminal à un horizon $T > t$, on note par $X^{t,x}$ le processus de richèsse partant de x en t, la fonction valeur est donnée par :

$$V(t,x) = \sup_{\pi \in A} \left[U(X_T^{t,x}) \right], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+,$$

où $U(x)$ est une fonction d'utilité, A l'ensemble des processus π $F-adapt\acute{e}$ et borné, la fonction U est croissante et concave, $V(t,.)$ est croissante et concave en x ?, soit $0 < x \leq y$, π un processus de contrôle, on note :

$$\begin{aligned} Z_s &= X_s^{t,x} - X_s^{t,y}, \\ dZ_s &= \left\{ \left(\pi_s X_s^{t,x}\mu + (1-\pi_s) X_s^{t,x} r\right) ds + \pi_s X_s^{t,x} \sigma dW_s \right\} \\ &\quad - \left\{ \left(\pi_s X_s^{t,y}\mu + (1-\pi_s) X_s^{t,y} r\right) ds + \pi_s X_s^{t,y} \sigma dW_s \right\} \\ &= Z_s \left[\left(\pi_s \mu + (1-\pi_s) X_s^{t,y} r\right) ds + \pi_s \sigma dW_s \right], \end{aligned}$$

$Z_t = y - x$ donc $Z_s \geq 0$, comme U est croissante, donc $U\left(X_T^{t,x}\right) \leq U\left(X_T^{t,y}\right)$, d'où

$$E\left[U\left(X_T^{t,x}\right)\right] \leq E\left[U\left(X_T^{t,y}\right)\right] \leq V(t,y), \quad \forall \pi.$$

Alors $V(t,X) \leq V(t,y)$, soit (π_1, x_1), (π_2, x_2) deux processus de contrôle positives et $\lambda \in [0,1]$, posons $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2$, X^{t,x_1} (resp X^{t,x_2}) le processus de richèsse partant de x_1 (resp x_2) et contrôler par π_1 (resp π_2), posons

$$\pi_s^\lambda = \left\{\lambda X_s^{t,x_1}\pi_s^1 + (1-\lambda)\, X_s^{t,x_2}\pi_s^2\right\} / \left\{\lambda X_s^{t,x_1} + (1-\lambda)\, X_s^{t,x_2}\right\},$$

d'après la structure linéaire de l'EDS de la richèsse, donc le processus

$$X^\lambda = \lambda X^{t,x_1} + (1-\lambda)\, X^{t,x_2}$$

est gouverné par :

$$dX_s^\lambda = X_s^\lambda\left(\pi_s^\lambda \mu + \left(1-\pi_s^\lambda\right) r\right) ds + X_s^\lambda \pi_s^\lambda \sigma dW_s,\ \ s \geq t,\ \ X_t^\lambda = x_\lambda,$$

c'est à dire : X^λ est un processus de richèsse partant de x_λ en t et contrôler par π^λ comme U est concave, on a

$$U\left(\lambda X_T^{t,x_1} + (1-\lambda)\, X_T^{t,x_2}\right) \geq \lambda U\left(X_T^{t,x_1}\right) + (1-\lambda)\, U\left(X_T^{t,x_2}\right),$$

donc

$$V\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right) \geq \lambda E\left[U\left(X_T^{t,x_1}\right)\right] + (1-\lambda)\, E\left[U\left(X_T^{t,x_2}\right)\right],\ \forall \pi^1,\ \pi^2.$$

Alors ;

$$V\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right) \geq \lambda V(x_1) + (1-\lambda)\, V(x_2),$$

l'équation d'HJB associée à ce problème est

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathbb{R}}\left[\mathcal{L}^\pi V(t,x)\right] = 0, \tag{2.35}$$

$$\mathcal{L}^\pi V(t,x) = x\left(\pi\mu + (1-\pi)\, r\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\pi^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Comme V est croissante et concave, on cherche une solution tel que : $\dfrac{\partial V}{\partial x} > 0$, et $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$, d'après la condition de 1^er^ ordre on a

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = (\mu - r)\frac{\partial V}{\partial x} + x^2\pi\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

on pose : $\dfrac{\partial V}{\partial \pi} = 0$, donc

$$\pi^* = \frac{(r-\mu)\dfrac{\partial V}{\partial x}}{x^2\sigma^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}}. \tag{2.36}$$

(un condidat pour le maximum de $\sup_{\pi \in \mathbb{R}} [\mathcal{L}^{\pi} V(t,x)]$), donc pour π^* l'équation (2.35) devient sous la forme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{(\mu - r)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}{2\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}} = 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+, \tag{2.37}$$

avec la condition terminale :

$$V(T,x) = U(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Pour obtenir une solution explicite, on prend $U(x) = x^p$, $0 < p < 1$, cherchons une solution de la forme : $V(t,x) = \phi(t)\, x^p$ en substituant dans (2.37), on obtient

$$\phi'(t) + \left(r.p + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}.\frac{p}{1-p}\right)\phi(t) = 0$$

$\phi(T) = 1$, on obtient alors

$$\phi(t) = \exp(\lambda(T - t)),$$

avec

$$\lambda = rp + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}.\frac{p}{1-p},$$

alors une solution de (2.37) est

$$V(t,x) = \exp(\lambda(T-t))\, x^p, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+. \tag{2.38}$$

La fonction donnée par (2.38) est régulière, strictement croissante et strictement concave, donc le contrôle donné par (2.36) réalise bien le maximum dans (2.35), et est explicitement donné par

$$\pi^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2 (1-p)}. \tag{2.39}$$

Notons que π^* est constant, de plus l'équation de la richèsse associée

$$dX_t = X_t(\pi^* \mu(1 - \pi^*) r)\, dt + X_t \pi^* \sigma dW_t,$$

admet bien une unique solution, étant donnée une condition initiale.

2.6 Problèmes d'arrêt optimaux

2.6.1 Formulation du problème

L'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique :

$$dX_s = b(X_s)ds + \sigma(X_s)\,dW_s, \quad X_0 = x, \tag{2.40}$$

où $X_s \in \mathbb{R}^n$, et W un d-mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, (F_t)_t, P)$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, satisfont les conditions d'Itô qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution à (2.40). On note par $\Im$ l'ensemble des temps d'arrêts, on considère alors le problème

$$V(x) = \sup_{\tau\in\Im} E_x\left[\int_0^\tau e^{-\beta s} f(X_s)ds + e^{-\beta\tau} g(X_\tau)\right], \tag{2.41}$$

où $\beta > 0$ est un facteur d'actualisation, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. L'objectif est de calculer cette fonction valeur V et de déterminer un temps d'arrêt optimal, c'est à dire : un temps d'arrêt τ^* tel que :

$$V(x) = E_x\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\beta s} f(X_s)ds + 1_{\{\tau^*<+\infty\}} e^{-\beta\tau^*} g(X_{\tau^*})\right]. \tag{2.42}$$

2.6.2 Programmation dynamique et équation d'H.J.B

A la date $t = 0$, l'état du système est $X_0 = x$, soit $h > 0$, supposons que l'on ne stoppe pas le processus sur $[0, h]$, l'état du système à la date h est $X_h^x = x(h)$.

$$V(h, X_h^x) = \sup_{\tau\in\Im} E_x\left[\int_h^\tau f(s, X_s^{x(h)})ds + g(\tau, X_\tau^{x(h)}) \diagup x(h)\right], \tag{2.43}$$

tel que :

$$f(s, X_s^x) = e^{-\beta s} f(X_s^x), \text{ et } g(\tau, X_\tau^x) = e^{-\beta\tau} g(X_\tau^x),$$

où

$$V(X_h^x) = V(0, X_h^x).$$

Donc

$$\begin{aligned} V(h, X_h^x) &= e^{-\beta h} V(0, X_h^x) \\ &= e^{-\beta h} V(X_h^x), \quad \forall\tau \in \Im. \end{aligned} \tag{2.44}$$

On a

$$V(x) \geq E_x\left[\int_0^h f(s, X_s^x)ds + \int_h^\tau f(s, X_s^{x(h)})ds + g(\tau, X_\tau^{x(h)})\right],$$

et comme $\tau^* \in \Im$, donc

$$V(x) \geq E_x \left[\int_0^h f(s, X_s^x) ds + \int_h^{\tau^*} f(s, X_s^{x(h)}) + g(\tau^*, X_{\tau^*}^{x(h)}) \right],$$

où $x(h)$ est l'état du système à la date h. D'après la propriété des espérances conditionnelles itérées et avec (2.44), on a

$$V(x) \geq E_x \left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s) ds + e^{-\beta h} V(X_h^x) \right]. \tag{2.45}$$

Pour $h > 0$ (suffisamment petit), on obtient approximativement

$$E_x \left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s) ds + (1-\beta) V(X_h) - V(x) \right] + \circ(h) \leq 0, \tag{2.46}$$

on suppose que $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, et en appliquant la formule d'Itô entre 0 et h, on a

$$V(X_h) = V(x) + \int_0^h \mathcal{L}^u V(X_s) ds + \int_0^h \nabla_x V(X_s)^T \sigma\left(X_s\right) dW_s,$$

où $\mathcal{L}^u$ est l'opérateur donné par

$$\mathcal{L}^u V\left(x\right) = b(x) \nabla_x V\left(x\right) + \frac{1}{2} tr\left(\sigma\left(x\right) \sigma^T\left(x\right) D_x^2 V\left(x\right)\right).$$

En prenant l'espérance, on a

$$E_x\left[V(X_h)\right] = V(x) + E_x \left[\int_0^h \mathcal{L}^u V(X_s) ds \right].$$

Soit en substituant dans (2.46), et en divisant par h

$$E_x \left[\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\beta s} f(X_s) ds + \frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{L}^u V(X_s) ds - \beta V(X_h) \right] \leq 0,$$

en faisant tendre h vers 0, on obtient

$$\beta V(x) - \mathcal{L}^u V(x) - f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En prenant $\tau = 0$ dans le supremum sur $\Im$, donc

$$V(x) > g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Supposons maintenant qu'à la date $t = 0$, $V(x) > g(x)$, soit τ^* le temps d'arrêt

$$\tau^* = \inf\{s \geq 0 : V(X_s) = g(X_s)\}.$$

Alors sur l'intervalle de temps infinitésimal $[0, h \wedge \tau[$, on a $V(X_s) > g(X_s)$, il n'est donc évidemment pas optimal de stopper le processus sur $[0, h \wedge \tau[$, par contre si $V(X_s) = g(X_s)$ on peut obtenir comme gain $V(X_s)$ en arrêtant à cet instant. Ainsi le temps d'arrêt τ^* est optimal.

On introduit l'ouvert de $\mathbb{R}^n$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) > g(x)\}$ qui est appelée région de continuation, puisque si $X_s \in D$ il n'est pas optimal de le stopper, le temps d'arrêt $\tau^* = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin D\}$ est le temps de sortie de D, τ^* est le plus petit des temps d'arrêts. On a donc

$$\beta V(x) - \mathcal{L}V(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in D. \tag{2.47}$$

De plus par définition de D, on a

$$V(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial D, \tag{2.48}$$

lorsque le domaine D est connu le problème (2.47)-(2.48) est un problème de Dirichlet. Mais ici D est bien sur inconnu et on a besoin d'une condition supplémentaire sur la frontière ∂D.

$$\nabla_x V(x) = \nabla_x g(x), \quad \forall x \in \partial D. \tag{2.49}$$

Théorème 2.14. *Supposons que l'on trouve un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$, et une fonction W satisfaisant : $W \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, $g \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(\mathbb{R}^n \backslash D)$, $W > g$ sur D, $\beta g - \mathcal{L}g - f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n \backslash D$, tel que :*

(i) $\beta W(x) - \mathcal{L}W(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in D,$

(ii) $W(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial D,$

(iii) $\nabla_x W(x) = \nabla_x g(x), \quad \forall x \in \partial D.$

Alors en étendant la fonction W par $W(x) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n \backslash D$ on a

$$W(x) = V(x) = \sup_{\tau \in \Im} E_x \left[\int_0^\tau e^{-\beta s} f(X_s) ds + 1_{\{\tau < \infty\}} e^{-\beta \tau} g(X_\tau) \right].$$

De plus le temps de sortie de l'ouvert D, $\tau_D = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin D\}$ est un temps d'arrêt optimal et D est une région de continuation.

Preuve. Comme $W \in C^2(D)$ de plus sur $\mathbb{R}^n \backslash D$, $W = g \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash D)$, donc $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^2 par morceaux. Les conditions (ii), (iii) impliquant que la fonction W est différentiable à travèrs la frontiere ∂D, et $W \in C^1(\mathbb{R}^n)$, en appliquant la formule d'Itô, pour tout $\tau \in \Im$,

$$\begin{aligned} e^{-\beta\tau}W(X_\tau) &= W(x) + \int_0^\tau e^{-\beta s}\left[-\beta W(X_s) + \mathcal{L}W(X_s)\right] ds \\ &\quad + \int_0^\tau e^{-\beta s}\nabla_x W\left(X_s\right)^T \sigma\left(X_s\right) dW_s, \end{aligned}$$

donc

$$E_x\left[e^{-\beta\tau}W(X_\tau)\right] = W(x) + E_s\left[\int_0^\tau e^{-\beta s}\left[-\beta W(X_s) + \mathcal{L}W(X_s)\right] ds\right]. \quad (2.50)$$

D'après la condition (i), et le fait que $W = g$ sur $\mathbb{R}^n \backslash D$, on a

$$\beta W(x) - \mathcal{L}W(x) - f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

on déduit d'après (2.50)

$$W(x) \geq E_x\left[\int_0^\tau e^{-\beta s} f(X_s) ds + e^{-\beta\tau}W(X_\tau)\right].$$

Comme $W \geq g$, donc

$$W(x) \geq E_x\left[\int_0^\tau e^{-\beta s} f(X_s) ds + e^{-\beta\tau}g(X_\tau)\right], \quad \forall \tau \in \Im,$$

donc

$$W(x) \geq V(x). \quad (2.51)$$

Par définition de τ_D (temps de sortie), on a par (i) pour tout $0 \leq s \leq \tau_D$, et $X_s \in D$,

$$\beta W(X_s) - \mathcal{L}W(X_s) - f(X_s) = 0,$$

la relation (2.50) pour $\tau = \tau_D$, devient

$$W(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\beta s} f(X_s) ds + e^{-\beta\tau_D}W(X_{\tau_D})\right].$$

D'après (ii)

$$W(X_{\tau_D}) = g(X_{\tau_D}),$$

alors

$$W(x) = E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\beta s} f(X_s) ds + e^{-\beta\tau_D}g(X_{\tau_D})\right] \leq V(x), \quad (2.52)$$

donc (2.51), et (2.52) impliquant que $W(x) = V(x)$, et que τ_D est un temps d'arrêt optimal, avec D comme région de continuation.

2.7 Solution de Viscosité

Exemple de singularité. On considère le cas d'un problème de contrôle déterministe $\sigma \equiv 0$, avec $b(x,a) = a \in [-1,1]$, $n = 1$, l'état du système est gouverné par

$$dX_t = \alpha_t dt, \quad X_0 = x.$$

Soit f une fonction paire C^2 a support compact avec f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on considère la fonction valeur d'un problème à horizon infini :

$$V(x) = \inf_{\alpha \in A} \int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(x + \int_0^t \alpha_s ds\right) dt.$$

Soit

$$V(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)dt, & x > 0, \quad (\alpha_s^* = 1), \\ \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x-t)dt, & x \leq 0, \quad (\alpha_s^* = -1), \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} V'(0^+) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} f'(t)dt = -f(0) + \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt < 0. \\ V`(0^-) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} f'(-t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t} f'(t)dt = -V'(0^+). \end{aligned}$$

Donc V n'est pas dérivable en $x = 0$, comme f est paire, V est aussi paire, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc V aussi. Notons que l'équation d'HJB s'écrit :

$$V + \sup_{a \in [-1,1]} [-aV'] = f,$$

et cette EDP n'admet pas des solution régulière sur tout $\mathbb{R}$.

Cette exemple illustre la nécessité d'introduire des fonctions peu régulières solutions d'équations du type HJB, et adaptées à la théorie du contrôle stochastique.

2.7.1 Notion de solution de viscosité

Suivant le type de problème à horizon fini ou infini, on considère des équations de Bellman paraboliques :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sup_{a \in A} [-\mathcal{L}^u V(t,x) - f(x,u)] = 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n, \quad (2.53)$$

ou elliptiques :

$$\beta V(x)+\sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^{u}V(x)-f(x,u)\right]=0,\quad x\in\mathbb{R}^{n}, \tag{2.54}$$

l'opérateur $\mathcal{L}^{u}$ étant défini par :

$$\mathcal{L}^{u}V\left(x\right)=b(x,u)\nabla_{x}V\left(x\right)+\frac{1}{2}tr\left(\sigma\left(x,u\right)\sigma^{T}(x,u)D_{x}^{2}V\left(x\right)\right). \tag{2.55}$$

Définitions 2.15.
1) Soit $V\in C^{0}\left([0,T]\times\mathbb{R}^{n}\right)$, on dit que V est une sur-solution (resp sous-solution) de viscosité de (2.53) si pour toute fonction $\varphi\in C^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^{n}\right)$, on a

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\bar{t},\overline{x}\right)+\sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^{u}\varphi\left(\bar{t},\overline{x}\right)-f(\overline{x},u)\right]\geq0,\ (\text{resp}\leq0), \tag{2.56}$$

en tout point $\left(\bar{t},\overline{x}\right)\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$ minimum (resp maximum) globale de $V-\varphi$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$.
2) Soit $V\in C^{0}(\mathbb{R}^{n})$, on dit que V est une sur-solution (resp sous-solution) de viscosité de (2.54) *si pour toute fonction $\varphi\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, on a*

$$\beta V(\overline{x})+\sup_{a\in A}\left[-\mathcal{L}^{u}\varphi\left(\overline{x}\right)-f(\overline{x},u)\right]\geq0,\ (\text{resp}\leq0), \tag{2.57}$$

en tout point $\overline{x}\in\mathbb{R}^{n}$ minimum (resp maximum) globale de $V-\varphi$ sur $\mathbb{R}^{n}$.
On dit que V est une solution de viscosité de (2.54) *si V est à la fois sur-solution et sous-solution de viscosité de* (2.54)*.*

Proposition 2.16. *Soit $V\in C^{1,2}\left([0,T],\mathbb{R}^{n}\right)\cap C^{0}\left([0,T]\times\mathbb{R}^{n}\right)$, (resp $C^{2}(\mathbb{R}^{n})\cap C^{0}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$), alors V est solution de viscosité de* (2.53) *(resp* (2.54)*) si et seulement si V est solution classique de* (2.53) (resp (2.54))*.*

Preuve. On montre le résultat dans le cas de l'EDP (2.53).
Soit $V\in C^{1,2}\left([0,T],\mathbb{R}^{n}\right)\cap C^{0}\left([0,T]\times\mathbb{R}^{n}\right)$, supposons que V est solution de viscosité de (2.53), comme $V\in C^{1,2}\left([0,T],\mathbb{R}^{n}\right)$, donc $\varphi\equiv V$ peut être choisit comme fonction test, de plus tout point $(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$est un maximum et minimum global de $V-\varphi\equiv0$, donc on a par définition de solution de Viscosité : $\forall\left(t,x\right)\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$.

$$-\frac{\partial V}{\partial t}\left(t,x\right)+\sup_{u\in A}\left[-\mathcal{L}^{u}V(t,x)-f(x,u)\right]=0,$$

i.e. V est solution classique de l'EDP (2.53).

Soit $\varphi \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^n)$ et $(\bar{t}, \overline{x}) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n$ un minimum global de $V - \varphi$, alors on a

$$\frac{\partial (V-\varphi)}{\partial t}(\bar{t}, \overline{x}) = 0, \quad \nabla_x V(\bar{t}, \overline{x}) = \nabla_x \varphi(\bar{t}, \overline{x}),$$

et

$$D_x^2 V(\bar{t}, \overline{x}) \geq D_x^2 \varphi(\bar{t}, \overline{x}).$$

Donc (utilisant le fait que : si $p \leq q$, et B matrice définie positive alors $tr\,(pB) \leq tr\,(qB)$), on obtient

$$\begin{aligned} & b(\overline{x}, u)\nabla_x V(\bar{t}, \overline{x}) + \frac{1}{2} tr\left(D_x^2 \varphi(\bar{t}, \overline{x})\sigma(\overline{x}, u)\sigma^T(\overline{x}, u)\right) \\ \leq \; & b(\overline{x}, u)\nabla_x V(\bar{t}, \overline{x}) + \frac{1}{2} tr\left(D_x^2 V(\bar{t}, \overline{x})\sigma(\overline{x}, u)\sigma^T(\overline{x}, u)\right), \end{aligned}$$

alors

$$\sup_{u \in A}\left[-\mathcal{L}^u \varphi(\bar{t}, \overline{x}) - f(\overline{x}, u)\right] \geq \sup_{u \in A}\left[-\mathcal{L}^u V(\bar{t}, \overline{x}) - f(\overline{x}, u)\right],$$

donc

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\bar{t}, \overline{x}) + \sup_{u \in A}\left[-\mathcal{L}^u \varphi(\bar{t}, \overline{x}) - f(\overline{x}, u)\right] \\ \geq \; & -\frac{\partial V}{\partial t}(\bar{t}, \overline{x}) + \sup_{u \in A}\left[-\mathcal{L}^u V(\bar{t}, \overline{x}) - f(\overline{x}, u)\right] = 0, \end{aligned}$$

i.e. V est sur-solution de viscosité de (2.54). La propriété de sous-solution est prouvée de la même manière.

Lemme 2.17.
1) $\exists c \geq 0 / \forall t \in [0,T]$, $s \in [t,T]$ et $x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$E\left|X^{t,x} - x\right|^2 \leq c\,(s-t).$$

2)$\forall t \geq 0$, $\forall s \in [t,T]$ *et* x, $y \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$E\left|X_s^{t,x} - X_s^{t,y}\right| \leq \exp\{\beta_0 (s-t)\} |x-y|.$$

Théorème 2.18.
1) Horizon fini : La fonction valeur

$$V(t,x) = \inf_{u\in A} E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x}, u_s)ds + g(X_T^{t,x})\right],$$

est l'unique fonction bornée , uniformément continue en x solution de viscosité de (2.53) *et satisfaisant la condition terminale $V(T,x) = g(x)$.*
2) Horizon infini : La fonction valeur

$$V(x) = \inf_{u\in A} E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^x, u_s)ds\right],$$

est l'unique fonction bornée, uniformément continue, solution de viscosité de (2.54).

Preuve. Nous montrons que la propriété de viscosité de la fonction valeur découle du principe de la programmation dynamique. On montre le résultat dans le cas d'un problème à horizon infini, soit $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction test et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}(V-\varphi)(x) = (V-\varphi)(\overline{x}) = 0. \tag{2.58}$$

D'après le principe de la programmation dynamique, on a

$$V(x) = \inf_{u\in A} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^x, u_s)ds + e^{-\beta h} V(X_h^x)\right],\ \forall h > 0, \tag{2.59}$$

donc

$$\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^{\overline{x}}, u_s)ds + e^{-\beta h} V(X_h^{\overline{x}}) \geq \int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^{\overline{x}}, u_s)ds + e^{-\beta h}\varphi\left(X_h^{\overline{x}}\right), \tag{2.60}$$

comme

$$\varphi(\overline{x}) = V(\overline{x}) = \inf E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^{\overline{x}}, u_s)ds + e^{-\beta h} V(X_h^{\overline{x}})\right],$$

d'après (2.60), on a

$$\varphi(\overline{x}) \geq \inf_{u\in A} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^{\overline{x}}, u_s)ds + e^{-\beta h}\varphi\left(X_h^{\overline{x}}\right)\right].$$

Comme $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, on a par la formule de Taylor au voisinage de $(t=0, y=x)$, appliqué au $(t,y) \to e^{-\beta t}\varphi(y)$, $\forall h>0$

$$\begin{aligned} e^{-\beta h}\varphi(X_h^x) &= \varphi(x) - \beta h\varphi(x) + (X_h^x - x)\nabla_x\varphi(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}D_x^2\varphi(x)(X_h^x - x)(X_h^x - x) + \circ\left(|X_h^x - x|^2\right). \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi_0(y) = \varphi(x) + (y-x)\nabla_x\varphi(x) + \frac{1}{2}D_x^2\varphi(x)(y-x)(y-x), \; y \in \mathbb{R}^n,$$

donc

$$e^{-\beta h}\varphi(X_h^x) = -\beta h\varphi(x) + \varphi_0(X_h^x) + \circ(h) + \circ\left(|X_h^x - x|^2\right), \forall h>0.$$

D'après le lemme (2.17) on a

$$E\left\{\circ(|X_h^x - x|^2)\right\} = \circ(h),$$

donc

$$E\left|e^{-\beta h}\varphi(X_h^x) - (-\beta h\varphi(x) + \varphi_0(X_h^x))\right| \leq \circ(h)$$

uniformément en $a \in A$, et on a

$$\begin{aligned} E\left|\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^x, u_s) - f(x,u_s)ds\right| &\leq cE\int_0^h |X_s^x - x|\,ds + c\int_0^h \left(1 - e^{-\beta s}\right)ds \\ &\leq ch^{\frac{3}{2}} + ch^2, \end{aligned}$$

où c est une constante ne dépend pas de $u \in A$.

On prend maintenant $x = \overline{x}$, donc $X_s^x = X_s^{\overline{x}}$, et

$$E\left|e^{-\beta h}\varphi\left(X_h^{\overline{x}}\right) - (-\beta h\varphi(\overline{x}) + \varphi_0(X_h^x))\right| \leq \circ(h) \tag{2.61}$$

$$E\left|\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^{\overline{x}}, u_s) - f(x,u_s)ds\right| \leq ch^{\frac{2}{3}} + ch^2. \tag{2.62}$$

Comme

$$\varphi(\overline{x}) \geq \inf_{u\in A} E\left[\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^{\overline{x}}, u_s)ds + e^{-\beta h}\varphi\left(X_h^{\overline{x}}\right)\right],$$

en utilisant (2.61), et (2.62), on obtient

$$\varphi(\overline{x}) \geq \inf_{u\in A} E\left[\int_0^h f(\overline{x}, u_s)ds - \beta h\varphi(\overline{x}) + \varphi_0(X_h^{\overline{x}})\right] + \circ(h),$$

notant que $\varphi(\overline{x}) = \varphi_0(\overline{x})$, ceci s'écrit encore

$$\beta h\varphi(\overline{x}) \geq \inf_{u\in A} E\left[\int_0^h f(\overline{x}, u_s)ds + \varphi_0(X_h^{\overline{x}}) + \varphi_0(\overline{x})\right] + \circ(h).$$

Comme

$$\nabla_{\overline{x}}\varphi_0(y) = \nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) + D^2_{\overline{x}}V(x)(y-\overline{x}), \text{ et } D^2_{\overline{x}}\varphi_0(y) = D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}),$$

par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} E\left[\varphi_0(X_h^{\overline{x}}) - \varphi_0(\overline{x})\right] &= E[\int_0^h b(X_s^{\overline{x}}, u_s)\left(\nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) + D^2_{\overline{x}}\varphi(x)\left(X_s^{\overline{x}} - \overline{x}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr\left(D^2_x\varphi(\overline{x})\,\sigma(X_s^{\overline{x}}, u_s)\sigma^T(X_\alpha^{\overline{x}}, u_s)\right)ds], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \beta h\varphi(\overline{x}) &\geq \inf_{u\in A} E[\int_0^h f(\overline{x})ds + b(X_s^{\overline{x}})\left(\nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) + D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x})\left(X_s^{\overline{x}} - \overline{x}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr\left[\left(D^2_x\varphi(\overline{x})\,\sigma(X_s^{\overline{x}})\sigma^T(X_s^{\overline{x}})\right)ds\right] + \circ(h)]. \end{aligned}$$

Comme b et $\sigma\sigma^T$ sont bornées et Lipschitz en $\overline{x}$, uniformément en u, on a

$$\begin{aligned} &|E[\int_0^h b(\overline{x}, u_s)\nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) + \frac{1}{2}tr\left(D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x})\,\sigma(\overline{x}, u_s)\sigma^T(\overline{x}, u_s)\right)ds \\ &-\int_0^h b(X_s^{\overline{x}}, u_s)\left(\nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) + D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x})\left(X_s^{\overline{x}} - \overline{x}\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}tr\left(\sigma(X_s^{\overline{x}}, u_s)\sigma^T(X_s^{\overline{x}}, u_s)D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x})\right)ds]| \\ \leq\ & cE\int_0^h \left|X_s^{\overline{x}} - \overline{x}\right|ds = ch^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

uniformément en $u \in A$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \beta h\varphi(\overline{x}) &\geq \inf_{u\in A} E[\int_0^h f(\overline{x}, u_s)ds + b(\overline{x}, u_s)\nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr\left(D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x})\,\sigma(\overline{x}, u_s)\,\sigma^T(\overline{x}, u_s)\right)ds + \circ(h)]. \end{aligned}$$

En divisant par h et on passe à la limite lorsque h tend vers 0

$$\beta\varphi(\overline{x}) \geq \inf_{\alpha\in A} E\left[f(\overline{x}, u) + b(\overline{x}, u)\nabla_{\overline{x}}\varphi(\overline{x}) + \frac{1}{2}tr\left(\sigma(\overline{x}, u)\,\sigma^T(\overline{x}, u)\,D^2_{\overline{x}}\varphi(\overline{x})\right)\right],$$

et de manière équivalente

$$\beta\varphi\left(\overline{x}\right)+\sup_{u\in A}\left[-\mathcal{L}^{u}\varphi\left(\overline{x}\right)-f(\overline{x},u)\right]\geq 0, \tag{2.63}$$

Donc V est sur-solution de viscosité de (2.54).

Soit $\overline{x}\in\mathbb{R}^{n}$, tel que :

$$0=\left(V-\varphi\right)\left(\overline{x}\right)=\max_{x\in\mathbb{R}^{n}}\left(V-\varphi\right)\left(x\right),$$

alors d'après le principe de la programmation dynamique, on a

$$\forall h>0,\ \varphi\left(\overline{x}\right)\leq\inf_{u\in A}E\left[\int_{0}^{h}e^{-\beta s}f\left(X_{h}^{\overline{x}},u_{s}\right)ds+e^{-\beta h}\varphi\left(X_{h}^{\overline{x}}\right)\right],$$

donc

$$\beta\varphi\left(\overline{x}\right)+\sup_{u\in A}\left[-\mathcal{L}^{u}\varphi\left(\overline{x}\right)-f(\overline{x},u)\right]\leq 0, \tag{2.64}$$

V est une solution de viscosité de (2.54).

On montre maintenant un résultat d'unicité ce qui soulignera que la définition de solution de viscosité est une notion parfaitement adaptée à la théorie du contrôle stochastique.

Théorème 2.19.

1) *Soient V et W deux fonctions bornées, uniformément continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}^{n}$, on suppose que V est une sous-solution de viscosité de* (2.53) *et W est une sur-solution de viscosité de* (2.53)*, et $V(T,x)\leq W(T,x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{n}$, alors $V(t,x)\leq W(t,x)$, $\forall\,(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{n}$.*

2) Soient V et W deux fonctions bornées, uniformément continues sur $\mathbb{R}^{n}$, on suppose que V est une sous-solution de viscosité de (2.54) *et W est une sur-solution de viscosité de* (2.54)*. Alors $V(t,x)\leq W(t,x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^{n}$.*

Preuve. On considère le cas où V et W sont seulement supposées continues, on ne peut donc pas utiliser les conditions de dérivation classique pour caractériser un extremum de fonction, l'idée est basée sur l'éstimation suivant :

On suppose que $(M,N,\alpha)\in S^{n}\times S^{n}\times\mathbb{R}_{+}^{*}$. On pose :

$$G(x,M)=-tr[A(x)A^{T}(x)M].$$

Alors

$$\begin{aligned}G(y,N)-G(x,M) &= tr(A(x)A^{T}(x)M)-tr(A(y)A^{T}(y)N)\\ &= tr\left[A(x)A^{T}(x)M-A(y)A^{T}(y)N\right]\\ &\leq 3\alpha\left|A\left(x\right)-A\left(y\right)\right|^{2},\end{aligned}$$

car la matrice
$$C := \begin{pmatrix} A(y)A^T(y) & A(y)A^T(x) \\ A(x)A^T(y) & A(x)A^T(x) \end{pmatrix}$$
est une matrice non-négative dans S^n, on a

$$\begin{aligned} tr(A(x)A^T(x)M - A(y)A^T(y)N) &= tr\left[C\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix}\right] \\ &\leq 3\alpha tr\left[C\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\right] \\ &\leq 3\alpha tr\left[(A(x)-A(y))\left(A^T(x)-A^T(y)\right)\right] \\ &= 3\alpha\left|A(x)-A(y)\right|^2. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction
$$F : (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to F(x,y) = V(x) - W(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2$$
où $\varepsilon > 0$. Supposons que F admet un maximum en $(\overline{x},\overline{y})$, donc $x \to F(x,\overline{y})$ admet un maximum en $\overline{x}$ on obtient que :
$$x \in \mathbb{R}^n \to V(x) - \left(\frac{1}{2\varepsilon}|x-\overline{y}|^2\right)$$
admet un maximum en $\overline{x}$.

D'autre part, $y \to -F(\overline{x},y)$ admet un minimum en $\overline{y}$, on obtient que
$$y \in \mathbb{R}^n \to W(y) - \left(\frac{1}{2\varepsilon}|\overline{x}-y|^2\right)$$
admet un minimum en $\overline{y}$. Appliquant la définition de sous-solution de viscosité pour V à la fonction test : $x \to \dfrac{1}{2\varepsilon}|x-\overline{y}|^2$ au point $\overline{x}$, on a
$$\frac{\partial}{\partial t}V(\overline{x}) + \sup_{u\in A}\left[-b(\overline{x},u)\left(\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}tr\left(\sigma\sigma^T(\overline{x},u)\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)\right) - f(\overline{x},u)\right] \geq 0.$$

En appliquant la définition de sur-solution de viscosité pour W à la fonction test $y \to -\dfrac{1}{2\varepsilon}|\overline{x}-y|^2$ au point $\overline{y}$, on a
$$\frac{\partial}{\partial t}W(\overline{y}) + \sup_{u\in A}\left[-b(\overline{y},u)\left(\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}tr\left(\sigma\sigma^T(\overline{y},u)\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)\right) - f(\overline{y},u)\right] \leq 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(V\left(\overline{x}\right)-W\left(\overline{y}\right)\right)\\
\leq\ &\sup_{u\in A}[\left|b(\overline{x},u)-b(\overline{y},u)\right|\frac{\left|\overline{x}-\overline{y}\right|}{\varepsilon}+\left|f(\overline{x},u)-f(\overline{y},u)\right|\\
&+\frac{1}{2}\left|tr\left(\sigma\sigma^{T}\left(\overline{x},u\right)\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)\right)-tr\left(\sigma\sigma^{T}\left(\overline{y},u\right)\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)\right)\right|],
\end{aligned}$$

et comme b, f, $\sigma\sigma^T$, sont Lipschitziennes en x, uniformément en u, et d'après l'estimation de trace, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(V\left(\overline{x}\right)-W\left(\overline{y}\right)\right)\leq\frac{c\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}}{\varepsilon}+c\left|\overline{x}-\overline{y}\right|+3\alpha'\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}. \tag{2.65}$$

D'autre part, comme $F(x,x)\leq F(\overline{x},\overline{y})$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned}
V(x)-W(x)\ &\leq\ V(\overline{x})-W(\overline{y})-\frac{\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}}{2\varepsilon}\\
&\leq\ V\left(\overline{x}\right)-W(\overline{y}),
\end{aligned} \tag{2.66}$$

comme $F(\overline{x},\overline{y})\geq F(\overline{x},\overline{x})$ on a

$$V\left(\overline{x}\right)-W\left(\overline{y}\right)-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\geq V\left(\overline{x}\right)-W(\overline{x}).$$

Donc

$$W\left(\overline{x}\right)-W\left(\overline{y}\right)-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\geq 0, \tag{2.67}$$

puisque $F(\overline{x},\overline{y})\geq F(\overline{y},\overline{y})$, on a

$$V\left(\overline{x}\right)-V\left(\overline{y}\right)-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\geq 0, \tag{2.68}$$

Donc

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\leq\left(V+W\right)\left(\overline{x}\right)-\left(V+W\right)\left(\overline{y}\right), \tag{2.69}$$

et comme V, et W sont bornées donc $\frac{1}{\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\leq c$, c'est à dire

$$\left|\overline{x}-\overline{y}\right|\leq c\sqrt{\varepsilon}. \tag{2.70}$$

En notant par m le module de continuité de $V+W$, (V et W sont uniformément continue). Donc

$m\left(\eta\right)=\sup\left\{\left|\left(V+W\right)\left(x\right)-\left(V+W\right)(y)\right|,\left|x-y\right|\leq\eta\right\}$, avec : $m\left(\eta\right)\underset{\eta\to 0}{\to}0$.

D'après (2.69), on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\leq m\left(\left|\overline{x}-\overline{y}\right|\right),$$

et d'après (2.70), on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\overline{x}-\overline{y}\right|^{2}\leq m\left(c\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{2.71}$$

En substituant (2.70) et (2.71) dans (2.65), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(V\left(\overline{x}\right)-W\left(\overline{y}\right)\right)\leq c\sqrt{\varepsilon}+c'\varepsilon+m(c\sqrt{\varepsilon})=\circ\left(\varepsilon\right),$$

d'après (2.66) on a

$$\forall x\in\mathbb{R}^{n},V(x)-W(x)\leq V(\overline{x})-W(\overline{y})\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,$$

donc

$$V(x)\leq W(x).$$

Chapitre 3

Principe du maximum

On étudie la 2^{nd} approche d'optimisation dynamique stochastique dans laquelle la variable de décision est un contrôle $F_t - adapté$, on commence par un résultat de Haussmann pour le principe du maximum pour des systèmes avec contraintes, utilisant le théorème de Guirsanov et un résultat analytique s'appelle "cône de variation" pour la transformation de probleme a un autre probleme sans contraints mais avec les multiplicateurs de Lagrange.

3.1 Principe du maximum pour des systèmes avec contraintes

3.1.1 Théorème de Guirsanov

On se place toujours sur un espace probabilisé complet, disons (Ω, F, F_t, P), et on se donne $\{W_t\}$ un d-mouvement brownien sur cet espace, on considère également un processus $\{\theta_t : 0 \leq t \leq T\}, T < +\infty$, F_t-*adapté* a valeur dans $\mathbb{R}^n$, tel que :

$$\int_0^T |\theta_t|^2 \, dt < \infty, \ \ P.ps. \tag{3.1}$$

Posons

$$\zeta_t^s(\theta) = \exp\left\{\int_s^t \theta_r dw_r - \frac{1}{2}\int_s^t |\theta_r|^2 \, dr\right\}_{s \leq t \leq T}, \quad \zeta_t(\theta) \text{ si } s = 0. \tag{3.2}$$

Par le lemme d'Itô, $\zeta_t(\theta)$ est une solution F_t-*adapté* de l'EDS

$$d\zeta_r = \zeta_r \theta_r dW_r, \quad \zeta_s = 1. \tag{3.3}$$

Remarque 3.2. *Si* $\int_s^T E\left|\zeta_t\theta_t\right|^2 dt < \infty$, *donc* $\{\zeta_t^s(\theta) : s \leq t \leq T\}$ *est une martingale.*

Lemme 3.3. *Si* $\sup_{t,w}\left|\theta_t(w)\right|^2 = C < \infty$, *donc* $\{\zeta_t^s(\theta) : s \leq t \leq T\}$ *est une martingale dans* $[s, T]$, *et* $E\zeta_t^s(\theta) = 1$.

Preuve. Posons

$$\tau_m = \inf\left\{t \geq s : \int_0^t \theta_r dW_r \geq m\right\},$$

par (3.2), on a

$$E\int_s^T \left|\zeta_{r\wedge\tau_m}^s\theta_r\right|^2 dr \leq \int_s^T e^{2m}Cdr < \infty,$$

en utilisant (3.3), on a $\zeta_{r\wedge\tau_m}^s = \zeta_t^s(1_{\tau_m}\theta)$ est une martingale

$$E\zeta_{t\wedge\tau_m}^s(\theta) = E\zeta_{s\wedge\tau_m}^s(\theta) = 1.$$

Le lemme de Fatou donne alors

$$\begin{aligned} E\zeta_t^s(\theta) &= E\lim\zeta_{t\wedge\tau_m}^s \\ &\leq \liminf E\zeta_{t\wedge\tau_m}^s = 1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \zeta_t^s(\theta)^2 &= \exp\left\{\int_s^t 2\theta dW - \frac{1}{2}\int_s^t \left|2\theta\right|^2 dr\right\}\exp\int_s^t \left|\theta\right|^2 dr \\ &\leq \zeta_t^s(2\theta)\exp\left[c(t-s)\right]. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.4) appliqué à $\zeta_t^s(2\theta)$, donne alors

$$E\int_s^T \left|\zeta_t^s(\theta)\theta_t\right|^2 dt \leq \int_s^T e^{cT}cdt < +\infty. \tag{3.5}$$

Ce que termine la preuve (en utilisant (3.3)).

Corollaire 3.4. *Supposons que* (3.1) *a lieu, donc* $\zeta_t^s(\theta)$ *est une surmartingale dans* $[s, T]$.

Corollaire 3.5. *Supposons que* (3.1) *a lieu, si* $E\zeta_t^s(\theta) = 1$, *donc* $\zeta_t^s(\theta)$ *est une martingale dans* $[s, T]$.

Preuve. Comme ξ_t^s est un sur-martingale, et $E\zeta_t^s(\theta) = E\zeta_s^s = 1$, donc ζ_T^s est une martingale sur $[s,T]$.

Théorème 3.6.(Guirsanov) *Supposons que* (3.1) *a lieu, et* $E\zeta_T(\theta) = 1$, *donc* $\overline{P}$ *donné par* $\dfrac{d\overline{P}}{dP} = \zeta_T(\theta)$ *est une mesure de probabilité sur* $(\Omega, F, \{F_t\})$, *et*

$$\overline{W}_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds \tag{3.6}$$

est un mouvement Brownien sur $\left(\Omega, F, \{F_t\}, \overline{P}\right)$.

Preuve. Voir (Haussmann 1986).

3.1.2 Solution d'équation différentielle stochastique

Considèrons $C^n \equiv C\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)$: l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^n$, soient $G^n = B(C(0,T;\mathbb{R}^n))$, et G_t^n le σ-algèbre engendré par la famille d'ensembles

$$\left\{\{X \in C(0,T;\mathbb{R}^n) : X_s \text{ dans } B\}, 0 \leq s \leq t, \text{et } B \in B(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Sur $(\Omega, F, \{F_t\}, P)$ on considère l'EDS suivante :

$$dX_t = b(t,X_t)dt + a(t,X_t)dW_t, \quad X_0 = x, \tag{3.7}$$

où X_0 est F_0-mesurable, et

$$b\left(t,x\right) : [0,T] \times C^n \to \mathbb{R}^n,\ a\left(t,x\right) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}.$$

Une solution de (3.7) est un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, F_t-adapté et a trajectoires continues, c'est à dire : $X \in C^n \equiv C^n(0,T;\mathbb{R}^n)$, tel que :

$$\forall t \geq 0,\ E\left(\int_0^t \left|a(X_s)\right|^2 ds\right) < +\infty,\ \text{et } E\left(\int_0^t \left|b(X_s)\right| ds\right) < +\infty.$$

On notera : $\|X\|_t = \sup\left\{\ |X\left(s\right)|\ : 0 \leq s \leq t\right\}$, pour X dans C^n.

Lemme 3.7. *On suppose qu'il existe* K_0, K_1, *tel que :*

$(C1)$ $\int_0^T \left|a\left(t,x\right)\right|^2 dt \leq K_0, \quad x \in \mathbb{R}^n$,

$(C2)$ $\left|b\left(t,X\right)\right|^2 \leq K_1\left(1 + \|X\|_t^2\right), \quad X \in C^n$.

Si $M_t = \int_0^t a\left(s,X_s\right)dW_s$, *et* $p \geq 1$, *donc il existe une constante* K, *tel que :*

$$\|X\|_t^p \leq K\left(1 + |X_0|^p + \|M\|_t^p\right) \quad P.ps. \tag{3.8}$$

Preuve. D'après (C2), on a $\{M_t\}$ est une martingale de carré intégrable, et par (C1) il existe une constante $\overline{K}$, tel que :

$$\|X\|_t^2 \leq 3\left\{|X_0|^2 + T\int_0^t |b|^2\, ds + \|M\|_t^2\right\},$$

(utilisant le fait que $(a+b+c)^2 \leq 3\,(a^2+b^2+c^2)$). Par (C2) on a

$$\|X\|_t^2 \leq \overline{K}\left(1 + |X_0|^2 + \int_0^t \|X\|_s^2\, ds + \|M\|_t^2\right).$$

Le lemme de Gronwall donne alors

$$\begin{aligned}
\|X\|_t^2 &\leq \overline{K}\left(1+|X_0|^2+\|M\|_t^2\right) + \overline{K}\int_0^t e^{\overline{K}(t-s)}\overline{K}\left(1+|X_0|^2+\|M\|_t^2\right) ds \\
&\leq \overline{K}\left(1+|X_0|^2+\|M\|_t^2\right) e^{\overline{K}t}.
\end{aligned}$$

Pour $p > 2$ utilisant le fait que $(1+a)^q \leq 2^q\,(1+a^q)$ si $a > 0$.

Théorème 3.8. *Supposons que* (C1),(C2) *ont lieu, et il existe* $\varepsilon > 0$, et ξ, $K_0 < \infty$, *tel que :* $\forall s \in [0,T]$

(C3) $E\exp\varepsilon\,|X_0|^2 < \infty$,

(C4) $\int_0^s |\theta_t|^2\, dt \leq \xi\left(1+\|X\|_s^2\right)$, $|\theta_s|^2 \leq K_0\left(1+\|X\|_s^2\right)$ *P.ps.*

Donc il existe une constante $\xi_0 > 0$, *(dépendant de* $\varepsilon, K_0, K_1,$ *et* n*), tel que : si* $(p^2-p)\,\xi < \xi_0$*, alors* $E\zeta_T(\theta)^p \leq K$*, (dépendant de* ε, n *et* p*).*

Preuve. Voir Haussmann 1986.

Corollaire 3.9. *Supposons que* (C1), (C2), et (C3) *ont lieu, et que :*

$$|\theta_t|^2 \leq K_0\left(1+\|X\|_t^2\right),$$

donc il existe $p > 1$*, et* $K < \infty$ *(dépendant de* ε *et* p*), tel que :*

$$E\left\{\zeta_T(\theta)\right\}^p \leq K.$$

Preuve. La preuve consiste à utiliser le théorème (3.8), avec $\xi = K_0 T$, et p est prouche de 1.

Corollaire 3.10. *Sous les conditions de corollaire précédent, on a*

$$E\zeta(\theta) = 1.$$

Théorème 3.11 (Itô). *Si les fonctions b, a sont Lipschitziennes en x,* i.e.

$$\exists K_1 : |a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq K\,|x - y|\,,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

alors (3.7) *admet une solution unique.*

La solution construit au théorème précédent est appelée solution forte de (3.7).

Définition 3.12(**Solution faible**). *On dit que l'EDS*

$$dX_t = \widetilde{b}(t,x)dt + \widetilde{a}(t,x)dW_t,\ X_s = x, \tag{*}$$

admet une solution faible, s'il existe un espace de probabilité filtré (Ω, F, P, F_t), et $\{W_t\}$ un d-mouvement brownien tel qu'il existe X_t dans (Ω, F, F_t, P) satisfaisant à (*). Insistons sur le fait que $(\Omega, F, F_t, P, \{W_t\})$ n'est pas donné à priori, et X_t est F_t-mesurable mais non nécessairement F_t^w-mesurable.

Notre objet est maintenant de donner une relation entre le théorème de Guirsanov et l'EDS d'Itô. Nous allons établir le résultat suivant.

Théorème 3.13 (Cameron-Martin-Guirsanov formula). *Considérons*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,\ X_0 = x, \tag{3.9}$$

tel que $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times d}$. On définit

$$\overline{W_t} = W_t - \int_0^t \theta_s ds,$$

tel que $\theta_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction bornée. Soit

$$\overline{P}(F) = \int_F \zeta_t(\theta)\,dP, \tag{3.10}$$

pour $F \in H_t$, tel que H_t est une σ-algèbre engendré par $\left\{\overline{W_s},\ s \leq t\right\}$, et

$$\zeta_t = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(X_s)ds - \int_0^t \theta\left(X_s\right)dW_s\right\}. \tag{3.11}$$

Donc $\overline{W_t}$ est un mouvement Brownien. On obtient

$$dX_t = \left(b\left(X_t\right) + \sigma(X_t)\theta(X_t)\right)dt + \sigma(X_t)d\overline{W_t}, \tag{3.12}$$

et $\left(X_t, \overline{W_t}, \overline{P}\right)$ est une solution faible de (3.12)*, si X_t est une solution* (*faible où forte*) *de l'EDS* (3.9).

3.1.3 Formulation de problème

Considérons l'ensemble U, que nous supposons non vide. Soient

$$\begin{aligned} f_i &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},\ i = -m_1, ..., -1, 0, 1, ..., m_2, \\ b &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n,\ \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n\times d}, \end{aligned}$$

des fonctions mesurables.

On notera U_0 : l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \times C^n \rightarrow U$, $u\,(t,x)$ est $\{G_n\} - mesurable$, et il existe un espace de probabilité $(\Omega, F, \{F_t\}, P, \{W_t\})$ constitué des processus X_t vérifiant :

(i) $P \circ X_0^{-1} = \mu$,

(ii) $dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$,

(iii) $E \int_0^T |X_t|^q \,dt < \infty$, $E \int_0^T |u_t|^q \,dt < \infty$, avec $u_t = u(t, X)$.

Dans le paragraphe suivant, nous étudierons un résultat pour le principe du maximum pour des systèmes avec contraintes, pour cela on cherche à résoudre :

$$J_i(u) = E \left\{ \int_0^T f_i(t, X_t, u_t)dt + g_i(X_T) \right\},\ i = -m_1, ..., 0, ..., m_2. \tag{3.13}$$

On suppose qu'il existe $q < \infty$, tel que :

$$|f_i(t, X, u)| + |g_i(X)| \leq K_2\left(1 + |X|^q + |u|^q\right).$$

Pour $U \subset U_0$, définissons

$$\inf\left\{J_0(u) : u \in U,\ J_i(u) \leq 0 \text{ si } i > 0,\ J_i(u) = 0 \text{ si } i < 0\right\}, \tag{3.14}$$

alors $u \in U$ est admissible si : $J_i(u) \leq 0$ si $i > 0$, et $J_i(u) = 0$ si $i < 0$. Supposons que u^* est donné par la résolution du problème (3.13). Notre objet est maintenant de donner les conditions nécessaires d'optimalité.

Supposons que:

$$F\,(t, X) = span\left\{b\,(t, X, u) - b\,(t, X, v) : u,\ v \in U\right\}, \tag{3.15}$$

.

$$b(t,x,u) = \begin{bmatrix} g(t,x) \\ h(t,x,u) \end{bmatrix},\ \sigma\,(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2(t,x) \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Tel que : $\sigma_2(t,X)$ est mesurable, et

$$\pi(t,x)\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix},\ \sigma(t,x)^+\xi = \sigma_2(t,x)^{-1}\xi_2, \tag{3.17}$$

$\pi(t,x)$ est une projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $F(t,x)$,

(D1) $\int_0^T |\sigma(t,x)|^2 dt \leq K_0$, $|b(t,x,u)|^2 \leq K_1(1+|x|^2+|u|^2)$,

$\sigma(t,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sur $F(t,x)$, $\left|\sigma(t,x)^+\right| \leq K_0$, $\forall (t,x)$,

(D2) $\exists \widehat{K} : |u^*(t,x)| \leq \widehat{K}(1+\|X\|_t)$ $P.ps$,

(D3) $\exists \varepsilon > 0 : E\left\{\exp\left(\varepsilon |X_0|^2\right)\right\} < \infty$.

Lemme 3.15. *Sous les hypothèses* (D1), et (D3)*, on a* $E\|X\|_T^p < \infty$*, tel que :* $1 \leq p < \infty$.

Preuve. Voir Haussmann 1986.

Prenant U_G : l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \times C^n \to U$, $u(t,x)$ est $\{G_n\} - mesurable$, tel que :

$$\exists K_u : |u_t| \leq K_u(1+\|X\|_t),\ u_t = u(t,x), \tag{3.18}$$

pour $u \in U_G$.

Et on prend la situation du théorème (C.M.G), l'état X est donc donné par le théorème de Guirsanov, avec

$$\theta_t^u = \sigma(t,X_t)^+ \left[b(t,X_t,u_t) - b(t,X_t,u_t^*)\right]. \tag{3.19}$$

Les conditions (D1), (D2), (3.18), impliquant que :

$$|\theta_t^u|^2 \leq \overline{K}_u(1+\|X\|_t^2),\ P.ps,$$

d'après les corollaires (3.9), (3.10), et le théorème de Guirsanov, on a

$$dX_t = b(t,X_t,u_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t^u,$$

et

$$E\{\zeta_T(\theta^u)^p\} \leq K_u,$$

tel que : $p > 1$ dépandant de $\overline{K}_u$, et

$$W_t^u = W_t - \int_0^t \theta_s^u ds$$

est un mouvement Brownien sur $(\Omega, F, \{F_t\}, P^u)$, avec

$$dP^u = \zeta_T(\theta^u)dP.$$

De plus si $p' = p/(p-1)$, donc

$$\begin{aligned} E^u \int_0^T |X_t|^q \, dt &= E\left\{\zeta_T(\theta^u) \int_0^T |X_t|^q \, dt\right\} \\ &\leq K_u^{\frac{1}{p}} T E\left\{\|X\|_T^{qp'}\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

D'après le lemme (3.15), la condition (3.18) résulte de ce que :

$$E^u \int_0^T |u_t|^q \, dt \leq T K_u^{\frac{1}{p}} E\left\{\|X\|_T^{p'q}\right\}^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Théorème 3.16 (Kunita-Watanabe). *Soit* $\{W_t\}$ *un d-mouvement Brownien sur* $(\Omega, F, \{F_t\}, P)$, *si* $\{X_t\}$ *un* $\{\overline{F}_{t^+}\}$*-martingale de carré intégrable a valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, *donc il existe un processus* χ_t, $\{\overline{F}_{t^+}\}$ *−mesurable, et* $\{M_t\}$ *une martingale de carré intégrable orthogonale à* $\{W_t\}$, *tel que :*

$$\int_0^T E|\chi_t|^2 \, dt < \infty, \text{ et } X_t = \int_0^t \chi_s dW_s + M_t.$$

Lemme 3.17. *On suppose que* (D1), (D3) *ont lieu, donc* $U_G \subset U_0$, *et* $u^* \in U_G$.

Preuve. Voir Haussmann 1986.

Pour $u \in U_G$, prenons comme fonction coût

$$\begin{aligned} J(u) &= E^u\left\{\int_0^T f(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right\} \\ &= E^u\left\{\int_0^T [f(t, X_t, u_t) - f(t, X_t, u_t^*)] \, dt + \int_0^T f(t, X_t, u_t^*)dt + g(X_T)\right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\phi_t^u = f(t, X_t, u_t) - f(t, X_t, u_t^*), \text{ et } L = \int_0^T f(t, X_t, u_t^*)dt + g(X_t),$$

donc

$$J(u) = E^u \int_0^T \phi_t^u dt + E^u L. \tag{3.20}$$

D'après (D1), (D3), on a $E|L|^2 < \infty$, alors $L_t \equiv E\left\{L/\overline{F}_{t^+}\right\}$ est une martingale de carré intégrable, et d'après le théorème de décomposition du martingale, il existe un processus mesurable χ_t, tel que :

$$\int_0^T E|\chi_t|^2 dt < \infty, \tag{3.21}$$

et M_t une martingale de carré intégrable "orthogonale" a $\{W_t\}$, avec $M_0 = 0$, tel que :

$$L_t = L_0 + \int_0^t \chi_s dW_s + M_t,\ P.ps. \tag{3.22}$$

Théorème 3.18. Sous les conditions (3.16), (3.17), (D1), il existe deux constantes c_p, C_p, tel que :

$$\begin{aligned} c_p E\left\|\int_0^{\cdot} \sigma dW\right\|_T^p &\leq E\left[\left(\int_0^T |\sigma|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ &\leq C_p E\left\|\int_0^{\cdot} \sigma dW\right\|_T^p, \end{aligned}$$

pour $p < \infty$, c'est à dire que : $\left|\left[\int_0^{\cdot} \sigma dW\right]_T\right|$, et $\int_0^T |\sigma|^2 dt$ sont equivalente.

Lemme 3.19. $E^u \int_0^T |\chi|^2 dt < \infty$, et $E^u M_T = 0$.

Preuve. Soit $p' > 1$, d'après (3.22), et le théorème (3.18), on a

$$\begin{aligned} E\left\{\left[\int_0^T |\chi|^2 dt + |[M]_T|\right]^{p'}\right\} &= E\left\{|[L_t - L_0]_T|^p\right\} \\ &\leq c_1 E\left\{\|L - L_0\|_T^{2p'}\right\} \\ &\leq c_2 E|L_T - L_0|^{2p'} < \infty, \end{aligned}$$

et

$$|L_T| = |L| \leq K_2\left\{\int_0^T (1 + |X_t|^q + |u_t|^q)\, dt + |X_T|^q\right\}.$$

Soit $p' = p/p-1$, donc

$$\begin{aligned} E^u \int_0^T |\chi|^2 \, dt &= E\left\{\zeta_T(\theta^u) \int_0^T |\chi|^2 \, dt\right\} \\ &\leq E\left\{\zeta_T(\theta^u)^p\right\}^{\frac{1}{p}} E\left\{\left(\int_0^T |\chi|^2 \, dt\right)^{p'}\right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq K_u^{\frac{1}{p}} \left\{c_2 E \left|L_T - L_0\right|^{2p'}\right\}^{\frac{1}{p'}} < \infty. \end{aligned}$$

Inégalité de Doob. Soit $\{m_t\}$ une martingale et $p < 1$, donc il existe une constante c, tel que :

$$E \left\|m\right\|_T^p \leq cE \left|m_T\right|^p. \tag{3.23}$$

Preuve. Voir Doob 1953 pages 317, 354.

Lemme 3.20.

$$E^u L = EL + E^u \int_0^T \chi_t \theta_t^u dt, \; u \in U_G.$$

Preuve. D'après (3.6), et (3.22), il vient

$$E^u L = EL + E^u \int_0^T \chi dW^u + E^u \int_0^T \chi \theta^u dt + E^u M_T.$$

Comme

$$E^u \int_0^T |\chi|^2 \, dt < \infty.$$

alors $E^u \int_0^T \chi dW^u = 0$, et $E^u M_T = 0$.

Conclusion. Le contrôle optimal u^* est donné par la résolution de

$$\inf\left\{J_0(u) : u \in U \cap U_G, \; J_i(u) \leq 0, \text{ si } i > 0, \; J_i = 0 \text{ si } i < 0\right\}, \tag{3.24}$$

tel que :

$$\begin{aligned} J(u) &= E^u \int_0^T \left(\phi_t^u + \chi_t \theta_t^u\right) dt + J(u^*), && (3.25) \\ \phi_t^u &= f(t, X_t, u_t) - f(t, X_t, u_t^*), && (3.26) \\ \theta_t^u &= \sigma\left(t, X_t\right)^+ \left[b(t, X_t, u_t) - b(t, X_t, u_t^*)\right]. && (3.27) \end{aligned}$$

3.1.4 Cône de variation et transformation du problème

Définition 3.21. *Considérons Le simplex dans* $\mathbb{R}^n$

$$C = \left\{ (p_1, ..., p_n) : p_i \geq 0, \ \sum_1^n p_i \leq 1 \right\}. \tag{3.28}$$

Soit $u \in U$, $\eta > 0$, *et* $Z : \eta C \to U$, *tel que :* $Z(0) = u$, *on dit que* $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$ *est un différentiel conique de* J *au voisinage de* Z *au point* u *si*

$$J(Z(p)) = J(u) + Mp + \circ(|p|) . \tag{3.29}$$

Tel que : $p \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$, *et* $|\circ(|p|)| / |p| \underset{|p|\to 0}{\to} 0.$

Définition 3.22. *Un cône convexe* $D \subset \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$ *de sommet* 0 *est un cône de variation de* J *au point* u, *si pour tout* $(d^1, ..., d^n) \subset D$, $\exists \eta > 0$, *et* $Z : \eta C \to U$, $Z(0) = u$, *tel que :* $J \circ Z$ *est continue, et* $M = (d^1, d^2, ..., d^n)$ *est un différentiel conique de* J *au voisinage de* Z *au point* u.

Lemme 3.23. *Supposons que le problème* (3.24) *possède une solution* u^*, *soit* D *un cône de variation de* J *au point* u^*, *donc* $\exists \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$, $\widetilde{\lambda} \neq 0$, *tel que :*

$$\widetilde{\lambda}.d \leq 0, \ \forall d \in D \cap (\mathbb{R}^{m_1} \times L), \ \text{si } u^* \in U.$$

On note que :

$$I_+ = \{i > 0 : J_i(u^*) < 0\}, I_- = \{i > 0 : J_i(u^*) = 0\},$$

et

$$L = \left\{ y \in \mathbb{R}^{1+m_2} : y_0 < 0, y_i < I_i, i = \overline{1, m_2} \right\},$$

avec $I_i = +\infty$ *si* $i \in I_-$, $I_i = 0$ *si* $i \in I_+$.

Théorème 3.24. *Supposons que le problème* (3.24) *possède une solution* u^*, *soit* D *un cône de variation de* J *en* u^*, *donc* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda_i \leq 0$, *si* $i \geq 0$, *tel que :*

$$\lambda J(u^*) = \lambda_0 J_0(u^*),$$

et $\lambda.d \leq 0$, $\forall d \in D$.

Utilisant maintenant les résultats précédents pour la construction d'un cône de variation pour le problème (3.24). Supposons que $\exists K_0, K_1, K_{2,} \widehat{K}$, tel que :

(D4) $\exists q \in (0,\infty) : |f(t,x,u)| + |g(x)| \leq K_2(1+|x|^q+|u|^q)$,

(D5) $dX_t = b(t,X_t,u_t^*)dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t$,

(D6) $\int_0^T |\sigma(t,X_t)|^2\,dt \leq K_0$, et $|b(t,x,u)|^2 \leq K_1(1+|x|^2+|u|^2)$,

$\sigma(t,x) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ sur $F(t,x)$, $|\sigma(t,x)^+| \leq K_0, \forall\,(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$,

(D7) $E\left\{\exp\left(\varepsilon\,|X_0|^2\right)\right\} < 0, \forall\varepsilon > 0$,

(D8) $|u^*(t,x)| \leq \widehat{K}\left(1+\|X\|_t\right)$,

(D9) $\{u \in U_G : u(t,.) \text{ est } H_t \text{ mesurable}\} \subset U$, et $u^*(t,.)$ est $H_t-mesurable$, tel que : $\{H_t\}_{T\geq t\geq 0}$ est une famille de σ-algèbre, $H_t \subset G_t^n$.

Considérons U^t : l'ensemble des contrôles perturbé à l'instant t. Et soit $\overline{q} > \max\{2,q\}$, et prenons $U^t = L_q(C^n, H_t, P\circ X^{-1}, U)$, dépuis $H_t \subset C_t^n$, donc U^t séparable, (voir Halmos (1950) pp 168-177) pour obtenir la séparabilité uniforme et on introduit les conditions suivants :

$(D10)$ $\exists V$ un ensemble dénombrable des fonctions mesurables de $(A,\mathcal{F})$ dans $(U, B(U))$.

$(D11)$ Pour chaque t dans $[0,T]$, $\exists i_t : (C^n, H_t) \to (A,\mathcal{F})$, tel que i_t mesurable et pour v dans V, $v \circ i_t$ est une fonction bornée dans C^n et $\{v\circ i_t : v \in V\}$ est dense dans U^t.

Exemple.

U : l'ensemble du contrôle -en utilisant l'information complet- ici $U = U_0$, et $H_t = G_t^n$. Soit B_t une σ-algèbre engendré par

$$\left\{\{X : X_s \text{dans } B\},\ s \leq t,\ s \text{ rationnel},\ B \subset \mathbb{R}^n\right\}.$$

$\widetilde{U}$: ensemble dénombrable dense dans U. Et soit $V = V^T$, tel que :

$$V^t = \left\{\sum_{i=1}^N u_i 1_{A_i}(x) : N \text{ finie} : u_i \in \widetilde{U},\ A_i \cap A_j \neq \varnothing,\ i,j = \overline{1,n}\right\}.$$

$i_t(x) = X^t$, tel que : $X^t(s) = X(t\wedge s)$, on prend $(A,\mathcal{F}) = (C^n, G^n)$, donc

$$v : (C^n, G^n) \to (U, B(U))$$

est mesurable si $v \in V$. Il est claire que :

$$|v \circ i_t(x)| \leq \max\left\{|u_i|\,,\ i = \overline{1,n}\right\},$$

donc $v \circ i_t$ est bornée, et V^t est dense dans U^t (Halmos 1950), dépuis

$$V^t = \{v \circ i_t : v \in V^t\},$$

et $V^t \subset V$.

Précisons tout dabord ce que nous entendons par la transformation du problème (des systemes avec contraintes) a un problème avec les multiplicateurs de Lagrange.

Pour $v \in V$, on définit

$$\phi_s^v = f(s, X_s, v \circ i_s(x)) - f(s, X_s, u^*(s, X_s)), \tag{3.30}$$

et

$$\theta_s^v = \sigma(s, X_s)^+ \left[b(s, X_s, v \circ i_s(x)) - b(s, X_s, u^*(s, X_s))\right]. \tag{3.31}$$

Soit

$$\overline{p} = \min\left\{2\overline{q}(2+\overline{q})^{-1},\ \overline{q}q^{-1}\right\}. \tag{3.32}$$

Considérons à présent les fonctions

$$\psi_s^v = E\left\{\phi_s^v + \chi_s \theta_s^v\right\},\ \text{et } \overline{\psi}_s^v = E\left\{\left|\phi_s^v + \chi_s \theta_s^v\right|^{\overline{p}}\right\}^{\frac{1}{\overline{p}}}. \tag{3.33}$$

D'après (D4), (D6), (D7), et le fait que v est borné dans V, on a $\exists k(v)$ tel que :

$$\begin{aligned}
|\psi_s^v| &\leq K(v)\left[(1 + E\left\|X\right\|_s^q) + E\left\{|\chi_s|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1 + E\left\|X\right\|_s^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \\
\left|\overline{\psi}_s^v\right| &\leq K(v)\left[\left(1 + E\left\|X\right\|_s^{\overline{q}}\right)^{\frac{1}{\overline{p}}} + E\left\{|\chi_s|^2\right\}^{\frac{1}{2}}(1 + E\left\|X\right\|_s^{\overline{q}})^{\frac{1}{\overline{q}}}\right],
\end{aligned}$$

ψ^v, et $\overline{\psi}^v$ sont intégrables en s, et il existe $T(v)$ un ensemble de mesure nulle, tel que : pour $t \notin T(v)$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \psi_s^v ds = \psi_t^v,\ \text{et } \frac{d}{dt}\int_0^t \overline{\psi}_s^v ds = \overline{\psi}_t^v.$$

Soit $T_0 = \underset{v \in V}{\cup} T(v)$, T_0 est de mesure nulle. Soit D un cône convexe engendré par

$$\left\{\psi_t^v : t \in [0, T]/T_0, \quad v \in V\right\}. \tag{3.34}$$

Nous allons établir le résultat suivant.

Théorème 3.25. *D est un cône de variation de J au point u^* pour le problème* (3.24).

Preuve. Voir Haussmann 1986.

Théorème 3.26. *Supposons que* (D4), (D10), (D11) *ont lieu, et $b(t,x,.)$, $f(t,x,.)$ sont continues pour tout (t,x), donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda_i \leq 0$ si $i \geq 0$, $\lambda_i J_i(u^*) = 0$ si $i > 0$, et un ensemble de mesure nulle T_0, tel que pour tout $t \in [0,T] \backslash T_0$, et $v \in U^t$*

$$E\left\{H(t, \chi_t, v(x), \widetilde{P}_t, \lambda)\right\} \leq E\left\{H(t, \chi_t, u^*(t,x), \widetilde{P}_t, \lambda)\right\}, \tag{3.35}$$

où

$$\widetilde{P}_t' = \lambda' \chi_t \sigma(t, X_t)^+ . \tag{3.36}$$

Preuve. Les théorèmes (3.24) et (3.25) conduisent à l'existence de λ, tel que (3.35) est vérifiée $\forall v \in V$.

Soit maintenant $v \in \{\overline{v} \circ i_t : \overline{v} \in V\}$, sous les conditions (D10), (D11) pour v dans U^t, il existe une suite $\{\overline{v}_m\}_m$ dans V tel que : $\overline{v}_m \circ i_t \to v$ dans $L_q(C^n, H_t, P \circ X^{-1}, u)$, on peut alors extraire une sous suite notée $\overline{v}_m \circ i_t \to v$ P.presque sur, et par définition de $\overline{q}$, $\exists \overline{p} > 1$, tel que :

$$\sup_m E\left|H(t, X_t, \overline{v}_m \circ i_t(x), \widetilde{P}_t, \lambda)\right|^{\overline{p}} < \infty.$$

Utilisant (D4), (D6), (D8), et le fait que

$$\sup_m E\left|\overline{v}_m \circ i_t(x)\right|^{\overline{q}} < \infty, \text{ et } E\left|\overline{v}_m \circ i_t(x)\right|^{\overline{q}} \to E\left|v(x)\right|^{\overline{q}} < \infty.$$

le théorème de convergence dominée fournit (3.35) pour tout $v \in U^t$.

Corollaire 3.27. *Sous les conditions du théorème* (3.26), $\forall t \in [0,T] \backslash T_0$, *et $u \in U$*

$$E\left\{H\left(t, X_t, u, \widetilde{P}_t, \lambda\right) \diagup \widetilde{F}_t\right\} \leq E\left\{H(t, X_t, u_t^*, \widetilde{P}_t, \lambda) \diagup \widetilde{F}_t\right\}. \tag{3.37}$$

Tel que :

$$\widetilde{F}_t = X^{-1}(H_t).$$

3.2 Principe du maximum de premier ordre

On principe le théorème (3.26) constitue un principe de maximum, mais parce que le processus adjoint P contient χ (inconnu), ce résultat n'est pas très utile. On va maintenant étudier de manière plus approfondie le cas sans contrainte, on donne un résultat de principe du maximum basé sur la solution forte de l'EDS, l'avantage de cette étude est qu'on donnera la formule explicite de processus adjoint.

3.2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, F, \{F_t\}_t, P)$ un espace probabilisé filtré, $W = \{W_t\}_t$ un mouvement Brownien, $\widetilde{U}$: l'ensemble des contrôles admissibles. Supposons que le problème (sans contraintes) (3.39) possède une solution u^*, et pour chaque contrôle u, soit

$$X = (X(t),\ 0 \leq t \leq T)$$

une solution de l'EDS suivante

$$dX_t = b(t, X_t, u_t^*)dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t,\ X_s = x. \tag{3.38}$$

Maintenant soit $\overline{q} > \max\{2, q\}$, tel que : $\widetilde{U} \subset L_{\overline{q}}([0,T] \times \Omega; U)$, et supposons que :

$(E1)$ $\sigma(t,x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ sur $F(t,x)$,

$(E2)$ $\left|\sigma(t,x)^+\right| \leq K_0$, $\int_0^T |\sigma(t,x)|^2\, dt \leq K_0$,

$(E3)$ $|u^*(t,x)| \leq \widehat{K}\,(1 + \|x\|_t)$,

$(E4)$ $|f(t,x,u)| + |g(x)| \leq K_2\,(1 + |x|^q + |u|^q)$,

$(E5)$ $E \exp\left\{\varepsilon\,|X_0|^2\right\} = \exp\left\{\varepsilon\,|x|^2\right\}\mu(dx) < \infty$, f est continue en u, $\forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,

$(E6)$ g est continue, f est continue en (x,u), $\forall t \in [0,T]$,

$(E7)$ $|b(t,x,u) - b(t,y,u)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_1\,|x - y|$,

$(E8)$ $|b(t,x,u)|^2 \leq K_1\left(1 + |x|^2 + |u|^2\right)$,

Remarque 3.28.

1) X_t est solution forte de l'équation (3.38)*,*

2) X_t est appelée la réponse du contrôle u_t.

On suppose que le problème

$$\inf\left\{J(u) : u \in \widetilde{U}\right\} \tag{3.39}$$

possède une solution u^*, avec

$$J(u) = E\left\{\int_0^T f(t, X_t^u, u_t)dt + g(X_T^u)\right\},$$

$(E9)$ $\forall\,(t,u)$, b, σ, f, g sont continûment différentiables en x, et

$$|g_x(x)| + |f_x(t,x,u)| \leq K\left(1 + |x|^{q-1} + |u|^q\right).$$

Considérons

$$\widetilde{U}^t = \left\{u\left(X^*(.)\right) : u \in U^t\right\} \subset L^{\overline{q}}\left(\Omega, F_t, P, U\right).$$

Pour $v \in V$ fixé, on définit le processus $\{\widetilde{v}_t\}$ par $\widetilde{v}_t(w) = (v \circ i_t)(X(w))$, et on considère $\widetilde{V} = \{\widetilde{v} : v \in V\}$ un ensemble dense dans $\widetilde{U}^t$, avec $\widetilde{V} \subset \widetilde{U}$, soient maintenant :

$$F^v(t,x) = b(t,x,v_t) - b(t,x,u_t^*), \text{ et } G^v(t,x) = f(t,x,v_t) - f(t,x,u_t^*).$$

On note que : $F^v(t,X_t)$, $G^v(t,X_t)$, et $|F^v(t,X_t)|^{\overline{q}}$, sont intégrables.

3.2.2 Principe du maximum et processus adjoint

Supposons que le contrôle u_s^* est optimal, $s \notin N_0$, N_0 un ensemble de mesure nulle, donc

$$J(u_s) \geq J(u_s^*), \ \forall u \in \widetilde{V}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, posons :

$$u_\varepsilon = \begin{cases} u_t & \text{si } s - \varepsilon < t \leq s, \\ u_t^* & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u_\varepsilon) - J(u^*)}{\varepsilon} \geq 0,$$

donc

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u_\varepsilon)\,|_{\varepsilon=0} \geq 0.$$

On considère les fonctions

$$F^{\varepsilon}(t,x) = b(t,x,u_t^{\varepsilon}) - b(t,x,u_t^*),$$

et

$$G^{\varepsilon}(t,x) = f(t,x,u_t^{\varepsilon}) - f(t,x,u_t^*).$$

Donc

$$F^{\varepsilon}(t,x) = \begin{cases} F^{u}(t,x) & \text{si } t \in [s-\varepsilon, s], \\ 0 \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$G^{\varepsilon}(t,x) = \begin{cases} G^{u}(t,x) & \text{si } t \in [s-\varepsilon, s], \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$\xi_t^{\varepsilon} = X_t^{\varepsilon} - X_t^*, \quad \xi_t^{\varepsilon} = 0, \tag{3.40}$$

donc

$$\begin{aligned} d\xi_t^{\varepsilon} &= [(b(t, X_t^* + \xi_t^{\varepsilon}, u_t^*) - b(t, X_t^*, u_t^*)) - F^{\varepsilon}(t, X_t^* + \xi_t^{\varepsilon})]\, dt \\ &\quad + (\sigma(t, X_t^* + \xi_t^{\varepsilon}) - \sigma(t, X_t^*))\, dW_t. \end{aligned}$$

Lemme 3.29.

$$\forall p \in [1, \overline{q}], \ E\, \|\xi^{\varepsilon}\|_t^p = O(\varepsilon^p). \tag{3.41}$$

Preuve. Par (3.40), $(E7)$, et le fait que F^u est Lipschitzienne, et d'après le théorème (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} |\xi_t^{\varepsilon}|^{\overline{q}} &\leq K \int_0^t |\xi_r^{\varepsilon}|^{\overline{q}}\, dr + K \left| \int_0^t [\sigma(t, X_t^* + \xi_t^{\varepsilon}) - \sigma(t, X_t^*)]\, dW_t \right|^{\overline{q}} \\ &\quad + K \left| \int_{(s-\varepsilon)\wedge t}^{s} F^u(r, X_r^*)\, dr \right|^{\overline{q}}, \end{aligned}$$

alors

$$E\, \|\xi^{\varepsilon}\|_t^{\overline{q}} \leq \overline{K} \left\{ \int_0^t E\, \|\xi^{\varepsilon}\|_r^{\overline{q}}\, dr + O(\varepsilon^{\overline{q}}) \right\},$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{s-\varepsilon}^{s} E\, |F^u|^{\overline{q}}\, dr \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} E\, |F^u(s, X_s^*)|^{\overline{q}} < \infty.$$

Le lemme de Gronwall donne alors $E\, \|\xi^{\varepsilon}\|_t^{\overline{q}} = O(\varepsilon^{\overline{q}})$, et l'inégalité de Jensen fournit (3.41) pour tout $p \in [1, \overline{q}]$.

Corollaire 3.30. *Si* $1 \leq p \leq \overline{q}$, *donc*

$$E \left\| \triangle F^{\varepsilon} \right\|_{T}^{P} = O(\varepsilon^{p}), \text{ et } E \int_{0}^{T} \left| \triangle G^{\varepsilon} \right| dt = \circ \left(\varepsilon \right). \tag{3.42}$$

On note : $\triangle \phi^{\varepsilon} = \phi^{\varepsilon} \left(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon} \right) - \phi^{\varepsilon} \left(t, X_{t}^{*} \right)$, pour $\phi^{\varepsilon} = \phi^{\varepsilon} \left(t, x \right)$.

Preuve.
1)$|\triangle F_{t}^{\varepsilon}| = |F^{\varepsilon}(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon}) - F^{\varepsilon}(t, X_{t}^{*})|$

$$\begin{aligned} &= \left| b\left(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon}, u_{t}^{\varepsilon}\right) - b\left(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon}, u_{t}^{*}\right) + b\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{\varepsilon}\right) - b\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{*}\right) \right| \\ &\leq \left| b\left(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon}, u_{t}^{\varepsilon}\right) - b\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{\varepsilon}\right) \right| + \left| b\left(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon}, u_{t}^{*}\right) - b\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{*}\right) \right|, \end{aligned}$$

comme b est Lipschitzienne, donc $|\triangle F_{t}^{\varepsilon}| \leq 2K_{1} \left| \xi_{t}^{\varepsilon} \right|$, ce qui termine la preuve -utilisant le lemme (3.29)-.

2) Sous les conditions $(E4), (E7)$, et le fait que u_{t} est borné, alors

$$\left| \triangle G^{\varepsilon} \right| = \left| G^{\varepsilon}(t, X_{t}^{*} + \xi_{t}^{\varepsilon}) - G^{\varepsilon}(t, X_{t}^{*}) \right| \leq \left| f_{x}\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{\varepsilon}\right) - f_{x}\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{*}\right) \right| \left| \xi_{t}^{\varepsilon} \right|.$$

Donc

$$\begin{aligned} E \int_{0}^{T} \left| \triangle G^{\varepsilon} \right| dt &\leq K \int_{s-\varepsilon}^{s} E \left| \xi_{t}^{\varepsilon} \right| \left(1 + \left\| X \right\|_{t}^{q} + \left| \xi_{t}^{\varepsilon} \right|^{q-1} \right) dt \\ &\leq \overline{K} \varepsilon \left[E \left\{ \left\| \xi^{\varepsilon} \right\|_{T}^{q} \right\} + E \{ \left\| \xi^{\varepsilon} \right\|_{T}^{\overline{q}} \}^{\overline{q}^{-1}} \right] = \circ \left(\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Soit ζ^{ε} la solution de l'EDS suivante

$$\begin{cases} d\zeta^{\varepsilon} = \left[b_{x}\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{*}\right) \zeta^{\varepsilon} + F^{\varepsilon}\left(t, X_{t}^{*}\right) \right] dt + \sum\limits_{k=1}^{d} \sigma_{x}^{k}\left(t, X_{t}^{*}\right) \zeta^{\varepsilon} dW_{t}^{k}, \\ \zeta_{0}^{\varepsilon} = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Lemme 3.31. $E \left\| \xi^{\varepsilon} - \zeta^{\varepsilon} \right\|_{T}^{p} = \circ \left(\varepsilon^{p} \right)$, *pour* $2 \leq p < \overline{q}$.

Preuve. Soit $\widetilde{\zeta} = \xi^{\varepsilon} - \zeta^{\varepsilon}$, donc

$$\begin{aligned} d\widetilde{\zeta} &= d\xi^{\varepsilon} - d\zeta^{\varepsilon} \\ &= \left\{ b\left(t, X_{t}^{\varepsilon}, u_{t}^{*}\right) dt + \sigma\left(t, X_{t}^{\varepsilon}\right) dW_{t} \right\} - \left\{ b\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{*}\right) dt + \sigma\left(t, X_{t}^{*}\right) dW_{t} \right\} \\ &\quad - \left\{ b\left(t, X_{t}^{*}, u_{t}^{*}\right) \zeta^{\varepsilon} + F^{\varepsilon}\left(t, X_{t}^{*}\right) \right\} dt + \sum_{k=1}^{d} \sigma^{k}\left(t, X_{t}^{*}\right) \zeta^{\varepsilon} dW_{t}^{k}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de la valeur moyenne, il existe un processus $\left\{\phi_t^i\right\}_{i=0,1,.,d}$ a valeurs dans $[0,1]$, tel que :

$$d\widetilde{\zeta} = b(t, X_t^*, u_t^*)\widetilde{\zeta}dt + \sum_k \sigma_x^k\left(t, X_t^*\right)\widetilde{\zeta}dW_t^k + de_1 + de_2 + de_3,$$

où : $de_1 = \left[b\left(t, X_t^* + \phi_t^0\xi_t^\varepsilon, u_t\right) - b\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\right]\xi_t^\varepsilon dt,$

$de_2 = \sum\limits_{k=1}^{d}\left[\sigma_x^k\left(t, X_t^* + \phi_t^k\xi_t^\varepsilon\right) - \sigma_x^k\left(t, X_t^*\right)\right]\xi_t^\varepsilon dW_t^k,$

$de_3 = \triangle F^\varepsilon\left(t, X_t^*\right)dt.$

Par le corollaire (3.30), on a

$$\begin{aligned} E\left\|e_3\right\|_T^p &= \left\|\triangle F^\varepsilon\left(t, X_t^*\right)dt\right\|_T^p \\ &= O\left(\varepsilon^p\right). \end{aligned}$$

D'après le théorème (3.18), il existe une constante c_0, tel que :

$$E\left\|e_2\right\|_T^p \leq c_0 E\left\{\left\|\xi_t^\varepsilon\right\|_T^p\left(\int_0^T\left|\triangle\sigma_x\right|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}\right\},$$

le lemme (3.29) conduit à

$$\begin{aligned} E\left\|e_2\right\|_T^p &\leq c_1 E\left\{\left\|\xi_t^\varepsilon\right\|_T^{\overline{q}}\right\}^{\frac{p}{\overline{p}}} E\left\{\int_0^T\left|\triangle\sigma_x\right|^{\frac{p\overline{q}}{(\overline{q}-p)}}dt\right\}^{1-\frac{p}{q}} \\ &= \circ\left(\varepsilon^p\right). \end{aligned}$$

or $\int_0^T E\left|\triangle\sigma_x\right|^{\frac{p\overline{q}}{(\overline{q}-p)}}dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, σ_x est bornée, et $x \to \sigma_x(t,x)$ est continue. De la même manière on a $E\left\|e_1\right\|_T^p = \circ\left(\varepsilon^p\right)$, ce qui termine la preuve (utilisant l'inégalité de Gronwall).

Soit $\phi(t,\tau)$ la solution fondamentale de

$$dY_t = b_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right)Y_t dt + \sum_{k=1}^{d}\sigma_x^k\left(t, X_t^*\right)Y_t dW_t^k, \tag{3.44}$$

i.e. $\phi(.,\tau)$ est solution de (3.44) si $t > \tau$, et $\phi(\tau,\tau) = Id$.

Lemme 3.32. *Soit $p < \infty$, donc $E\left|\phi(t,\tau)\right|^p$ est uniformément borné en t,τ.*

La preuve consiste à utiliser (3.44), et le fait que b_x et σ_x sont bornées.

Lemme 3.33. *Soit $s \leq t \leq T$, donc pour $p \in [2, \overline{q}]$*

$$E\left|\zeta_t^\varepsilon - \varepsilon\phi\left(t,s\right)F^u(s,X_s)\right|^p = \circ\left(\varepsilon^p\right)$$

uniformément en t.

Preuve. Comme $F^\varepsilon\left(t, X_t^*\right) = 0$ pour $t > s$, $\zeta_t^\varepsilon = \phi\left(t,s\right)\zeta_s^\varepsilon$, tel que :

$$\zeta_s^\varepsilon = \int_{s-\varepsilon}^s b_x(r, X_r^*, u_r^*)\zeta_r^\varepsilon dr + \sum_k \int_{s-\varepsilon}^s \sigma_x^k\left(r, X_r^*\right)\zeta_r^\varepsilon dW_r^k + \int_{s-\varepsilon}^s F^u\left(r, X_r^*\right)dr, \tag{3.45}$$

par le théorème (3.18)

$$\begin{aligned} E\left|\int_{s-\varepsilon}^s b_x\left(r, X_r^*, u_r^*\right)\zeta_r^\varepsilon dr + \sum_k \int_{s-\varepsilon}^s \sigma_x^k\left(r, X_r^*\right)\zeta_r^\varepsilon dW^k\right|^p &= O(\varepsilon^{\frac{p}{2}})E\left\|\zeta^\varepsilon\right\|_s^p \\ &= \circ\left(\varepsilon^p\right), \end{aligned} \tag{3.46}$$

car $E\left\|\zeta^\varepsilon\right\|_s^p = E\left\|\zeta^\varepsilon - \xi^\varepsilon + \xi^\varepsilon\right\|_s^p = \circ\left(\varepsilon^p\right)$,(utilisant les lemmes (2.29) et (3.31)). D'autre part, on a

$$E\left|\int_{s-\varepsilon}^s F^u\left(r, X_r^*\right)dr - \varepsilon F^u\left(s, X_s^*\right)\right|^p = \circ\left(\varepsilon^p\right), \tag{3.47}$$

car

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^s F^u\left(r, X_r^*\right)dr\right] = E\left[F^u\left(s, X_s^*\right)\right],$$

et

$$\left|E\frac{1}{\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^s F^u dr\right|^q \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^s E\left|F^u\right|^{\overline{q}} dr,$$

i.e. $\left|E\frac{1}{\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^s F^u dr\right|^{\overline{q}}$ est uniformément borné en ε, les relations (3.45), (3.46), (3.47), et le lemme (3.32) impliquant que :

$$\begin{aligned} E\left|\zeta_t^\varepsilon - \varepsilon\phi\left(t,s\right)F^u\left(s, X_s^*\right)\right|^p &\leq E\left|\phi\left(t,s\right)\right|^p\left|\zeta_t^\varepsilon - \varepsilon F^u\left(s, X_s^*\right)\right|^p \\ &= \circ\left(\varepsilon^p\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.34. *Si $t \geq s$ donc*

$$\xi_t^\varepsilon = \varepsilon\phi\left(t,s\right)F^u\left(s, X_s^*\right) + \overline{\rho}_t,$$

tel que : $\sup E\left|\overline{\rho}_t\right|^p = \circ\left(\varepsilon^p\right)$.

Preuve. Utilisant les lemmes (3.31) et (3.33).

Retournant maintenant au fonction J, on a

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) - J(u^*) &= E\int_0^T \left[f(t, X_t^* + \xi_t^\varepsilon, u_t^*) - f(t, X_t^*, u_t^*) + G^\varepsilon(t, X_t^* + \xi_t^\varepsilon)\right] dt \\ &\quad + E\left[g\left(X_T^* + \xi_T^\varepsilon\right) - g(X_T^*)\right]. \end{aligned}$$

Lemme 3.35.

$$J(u^\varepsilon) - J(u^*) = E\left\{\int_0^T \left[f_x(t, X_t^*, u_t^*)\xi_t^\varepsilon + G^\varepsilon\left(t, X_t^*\right)\right] dt + g_x\left(X_t^*\right)\xi_T^\varepsilon\right\} + E\rho_1, \tag{3.48}$$

tel que : $E\left|\rho_1\right| = \circ\left(\varepsilon\right).$

Preuve. D'après le théorème de la valeur moyenne $\exists \phi_t \in [0,1]$, tel que :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \int_0^T \left\{\left[f_x(t, X_t^* + \phi_t \xi_t^\varepsilon, u_t^*) - f_x(t, X_t^*, u_t^*)\right]\xi_t^\varepsilon + \triangle G^\varepsilon\right\} dt \\ &\quad + \left[g_x(X_t^* + \phi_t \xi_T^\varepsilon) - g_x\left(X_t^*\right)\right]\xi_T^\varepsilon. \end{aligned}$$

Soit p, tel que : $\overline{q}\left(p-1\right)^{-1} > p > \overline{q}\left(\overline{q}-1\right)^{-1}$, donc $p\left(p-1\right)^{-1} < \overline{q}$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Shoirtz et le corollaire (3.30)

$$E\left|\rho_1\right| \leq KE\left\{\|\xi^\varepsilon\|_T^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{\frac{p-1}{p}} E\left\{\int_0^T \left|\triangle f_x^\varepsilon\right|^p dt + \left|\triangle g_x^\varepsilon\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \circ\left(\varepsilon\right),$$

le lemme (3.29) donne alors

$$E\left\{\|\xi^\varepsilon\|_T^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{\frac{p-1}{p}} = \circ\left(\varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il existe donc une sous suite ε_{n_k}, tel que $\|\xi^{\varepsilon_{n_k}}\|_T \to 0$ $P.ps$, et $\left|\triangle f_x^{\varepsilon_{n_k}}\right| \underset{n_k\to\infty}{\to} 0$, car $x \to f_x$ est continue. Sous les conditions $(E3)$, $(E5)$, $(E7)$, $(E8)$, on a

$$\exists \overline{K} : E\int_0^T \left|\triangle f_x^\varepsilon\right|^{\frac{\overline{q}}{(q-1)}} dt \leq KE\left\{1 + \|X^*\|_T^{\frac{q\overline{q}}{q-1}} + \|\xi^\varepsilon\|_T^{\overline{q}}\right\} \leq \overline{K}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, tel que : $E\left\|\xi^{\varepsilon}\right\|_{T}^{\overline{q}} < 1$, (i.e. ε petit comme dans le lemme (3.29)). Par l'intégrabilité uniforme

$$E\int_0^T \left|\triangle f_x^{\varepsilon_{n_k}}\right|^p dt \to 0.$$

Donc

$$E\int_0^T \left|\triangle f_x^{\varepsilon}\right|^p dt \to 0.$$

De la même manière, pour $\left|\triangle g_x^{\varepsilon}\right|^p$, et d'après (3.28), on a

$$\begin{aligned}\int_0^T G^{\varepsilon}\left(t, X_t\right) dt &= \int_{s-\varepsilon}^{s} G^{u}\left(t, X_t^*\right) dt \\ &= \varepsilon G^{u}\left(s, X_s^*\right) + \rho_2,\end{aligned}$$

avec $E\left|\rho_2\right| = \circ\left(\varepsilon\right).$

Lemme 3.36.

$$\begin{aligned}J_0\left(u^{\varepsilon}\right) - J_0\left(u^*\right) &= \varepsilon E\left[\int_s^T f_x\left(X_t^*, u_t^*\right)\phi\left(t,s\right) dt + g_x\left(X_T^*\right)\phi\left(T,s\right)\right] F^{u}\left(s, X_s^*\right) \\ &\quad + \varepsilon E G^{u}\left(s, X_s^*\right) + \circ\left(\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme (3.35), on a

$$J_0\left(u^{\varepsilon}\right) - J_0\left(u^*\right) = E\left\{\int_s^T \left[f_x\left(X_t^*, u_t^*\right)\xi_t^{\varepsilon} + G^{\varepsilon}\left(t, X_t^*\right)\right] dt + g_x\left(X_t^*\right)\xi_t^{\varepsilon}\right\} + E\left[\rho_1\right],$$

par le corollaire (3.34)

$$\xi_t^{\varepsilon} = \varepsilon\phi\left(t,s\right) F^{u}\left(s, X_s^*\right) + \overline{\rho}_t, \quad t \geq s.$$

Tout d'abord on montre que

$$E\int_0^s f_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\zeta_t^{\varepsilon} dt = \circ\left(\varepsilon\right).$$

On a

$$\begin{aligned}E\int_0^s \left|f_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\zeta_t^{\varepsilon}\right| dt &= E\int_{s-\varepsilon}^s \left|f_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\right|\left|\zeta_t^{\varepsilon}\right| dt \\ &\leq \left\{E\int_{s-\varepsilon}^s \left|f_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\right|^2 dt E\left\|\zeta^{\varepsilon}\right\|_T^2 \varepsilon\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \circ\left(\varepsilon\right),\end{aligned}$$

en utilisant les lemmes (3.29) , et (3.31), il vient

$$\int E\left|f_x\right|^2 dt<\infty,$$

et

$$E\left\|\zeta^{\varepsilon}\right\|_T^2 \leq 2E\left\|\xi^{\varepsilon}\right\|_T^2+2E\left\|\xi^{\varepsilon}-\zeta^{\varepsilon}\right\|_T^2=O(\varepsilon^2),$$

donc

$$\begin{aligned} J\left(u^{\varepsilon}\right)-J\left(u^*\right) &= E\int_0^T\left[f_x\left(X_t^*, u_t^*\right)\left(\varepsilon\phi\left(t,s\right)F^u\left(X_s^*\right)+\overline{\rho}_t\right)+G^{\varepsilon}\left(X_t^*\right)\right]dt \\ & +Eg_x\left(X_t^*\right)\left(\varepsilon\phi\left(t,s\right)F^u\left(X_s^*\right)+\overline{\rho}_t\right)+E\rho_1, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \int_0^T G^{\varepsilon}\left(t, X_t^*\right)dt &= \int_{s-\varepsilon}^s G^u\left(t, X_t^*\right)dt \\ &= \varepsilon G^u\left(s, X_s^*\right)+\rho_2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J\left(u^{\varepsilon}\right)-J\left(u^*\right) &= \varepsilon E\left[\int_s^T f_x\left(X_t^*, u_t^*\right)\phi\left(t,s\right)dt+g_x\left(X_T^*\right)\phi\left(T,s\right)\right]F^u\left(s, X_s^*\right) \\ & +\varepsilon EG^u\left(s, X_s^*\right)+\circ\left(\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Théorème 3.37. *Supposons que (E3), (E6), (E7), (E8), et (E9), ont lieu, si u^* est optimal, donc il existe un ensemble N_0 de mesure nulle, tel que :*

$$\forall t\notin N_0\ ,\ \max_{u\in U}H(t, X_t^*, u, p_t)=H(t, X_t^*, u_t^*, p_t),\ P.ps, \tag{3.49}$$

où

$$H(t,x,u,p)=p'b(t,x,u)-f(t,x,u),$$

avec

$$p_t'=-E\left\{\int_0^T f_x(s, X_s^*, u_s^*)\phi\left(s,t\right)ds+g_x\left(X_T^*\right)\phi\left(T,t\right)/F_t\right\}.$$

Preuve. On prend

$$\overline{p}_t'=-\left\{\int_0^T f_x\left(s, X_s^*, u_s^*\right)\phi\left(s,t\right)ds+g_x\left(X_T^*\right)\phi\left(T,t\right)\right\},$$

par le lemme (3.36), on a

$$\begin{aligned}
J(u^{\varepsilon})-J(u^{*}) &= \varepsilon E\left[\int_s^T f_x(X_t^*,u_t^*)\,\phi(t,s)\,dt+g_x(X_T^*)\,\phi(T,s)\right]F^u(s,X_s^*) \\
&\quad +\varepsilon E G^u(s,X_s^*)+\circ(\varepsilon) \\
&= \varepsilon E\left\{\overline{p}_t'\left[b(X_s^*,u_s)-b(X_s^*,u_s^*)\right]-\left[f_x(X_s^*,u_s)-f_x(X_s^*,u_s^*)\right]\right\} \\
&\quad +\circ(\varepsilon) \\
&= \varepsilon E\left\{H(s,X_s^*,u_s,\overline{p}_s)-H(s,X_s^*,u_s^*,\overline{p}_t)\right\}+\circ(\varepsilon),
\end{aligned}$$

pour $t\notin N_0$, et $u\in\widetilde{V}$

$$E\left\{H(t,X_t^*,u_t,\overline{p}_t)\right\}\leq E\left\{H(t,X_t^*,u_t^*,\overline{p}_t)\right\}. \tag{3.50}$$

Soit maintenant $v\in\widetilde{U}_t$, donc il existe une suite $\{u^n\}$, tel que : u_t^n tend vers v dans $L^{\overline{q}}(\Omega,F_t,P,U)$, alors on peut extraire une sous suite $u_t^n\rightarrow v$ presque sur, comme u_t^n est borné dans $L^{\overline{q}}(\Omega,F_t,P,U)$, donc $E\left|f(t,X_t^*,u_t^n)\right|^{\frac{\overline{q}}{q}}$ est uniformément borné en n, et

$$E\left(\left|\overline{p}'b(t,X_t^*,u_t^n)\right|\right)^{\frac{\overline{q}}{2}}\leq\left\{E\left(\left|\overline{p}_t\right|^{\overline{q}}\right)E\left|b(t,X_t^*,u_t^n)\right|^{\overline{q}}\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

car $E\left|\overline{p}_t\right|^{\overline{q}}<\infty$, et par l'intégrabilité uniforme

$$E\left|H(t,X_t^*,u_t^n,\overline{p}_t)-H(t,X_t^*,v,\overline{p}_t)\right|\rightarrow 0.$$

Donc (3.50) est vérifiée pour tout u_t dans $\widetilde{U}_t$. On obtient à l'aide de corollaire (3.27), $\forall u\in U$

$$E\left\{H(t,X_t^*,u,\overline{p}_t)/F_t\right\}\leq E\left\{(t,X_t^*,u_t^*,\overline{p}_t)/F_t\right\},\ P.ps,$$

i.e.

$$H(t,X_t^*,u,E\left\{\overline{p}_t/F_t\right\})\leq H(t,X_t^*,u_t^*,E\left\{\overline{p}_t/F_t\right\}),\quad P.ps.$$

En utilisant les théorème (3.26), (3.37) pour avoir un principe du maximum plus général.

Théorème 3.38. *Supposons que b, f sont continues en u pour tout (t,x), et $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$, $g(x)$, sont continûment différentiables en x pour tout (t,u), avec*

$$|b_x|+|\sigma_x|\leq K_1,\ \text{et}\ |b|^2+|\sigma|^2\leq K_1\left(1+|x|^2+|u|^2\right),$$

(1) $\forall(t,x)$, $\sigma(t,x)\ :\ \mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}^n$ sur $F(t,x)$, $\int_0^T|\sigma(t,x)|^2\,dt\leq K_1$, et $\left|\sigma(t,x)^+\right|\leq K_0$.

(2) $\exists q \in [1, \infty[$, *tel que :*

$$|f| + |g| \leq K_2 \left(1 + |x|^q + |u|^q\right), \text{ et } |f_x| + |g_x| \leq K_2 \left(1 + |x|^{q-1} + |u|^q\right),$$

(3) $\exists \varepsilon > 0,\ E\left\{\exp\left(\varepsilon\, |X_0|^2\right)\right\} < \infty,$

(4) U *fermé, contient l'ensemble des contrôles* u_t G_t^n*-adapté, tel que :* $|u(t,x)| \leq K_1 \left(1 + \|X\|_t\right)$, *et supposons que* u^* *est un contrôle optimal pour le problème* (3.39).

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$: $\lambda \neq 0,\ \lambda_i \leq 0$ *si* $i \geq 0$, $\lambda_i J_i(u^*) = 0$ *si* $i > 0$, *et un ensemble* N_0 *de mesure nulle tel que : pour* $t \in (0, T] \setminus N_0$

$$\max_{u \in U} H\left(t, X_t, u, p_t, \lambda\right) = H\left(t, X_t, u_t^*, p_t, \lambda\right), \ P.ps,$$

où

$$H\left(t, X, u, p, \lambda\right) = \lambda f\left(t, x, u\right) + pb\left(t, x, u\right),$$

et

$$p_t' = \lambda' E\left\{g_x\left(X_T\right)\phi\left(T, t\right) + \int_t^T f_x\left(s, X_s, u_s^*\right)\phi\left(s, t\right) ds / F_t^x\right\}.$$

3.3 Principe du maximum de Peng

Dans cette section on donne une généralisation du principe du maximum de premier ordre dans le cas où σ est dépendant du contrôle u. Dans le cas particulier ou $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$, et le domaine A est convexe ce résultat a été obtenue par A-Bensoussan.

S-Peng a formulé un principe plus général que nous exposons maintenant, on introduit l'équation (3.54) pour avoir une estimation de solution de l'équation d'état de l'ordre de $\circ(\varepsilon)$, car si on utilise seulement l'équation (3.53) on aura une estimation de l'ordre $O(\varepsilon)$.

3.3.1 Formulation de problème

Soit (Ω, F, F_t, P) un espace de probabilité filtré, $\{W_t\}_t$ un d-mouvement brownien standard, tel que $F_t = \sigma\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$, on considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} dX(t) &= b\left(X(t), u(t)\right) dt + \sigma\left(X(t), u(t)\right) dW_t, \\ X(0) &= x, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$b(x, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(x, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n\right)$, $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^d\right)$.

Un contrôle admissible v est un processus F_t-adapté a valeurs dans U, tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left|v(t)\right|^m < \infty, m = 1, 2, ...$$

U : un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Supposons que la fonction coût J soit de la forme

$$J(u) = E\left[\int_0^T f\left(t, X(t), u(t)\right) dt + g\left(X(T)\right)\right], \tag{3.52}$$

$f(x, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, et $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

L'objectif est de calculer

$$V\left(t, x\right) = \inf_{v\in U} J\left(x, v\right).$$

(F) On suppose que : b, σ, f, g , sont deux fois dérivables par rapport à la variable d'état x, et b_x, b_{xx}, σ_x, σ_{xx}, f_{xx}, g_{xx}, sont continues en (x, v), b_x, b_{xx}, σ_x, σ_{xx}, f_{xx}, g_{xx} sont bornées, et b, σ, f_x, g_x, sont bornées par $c\left(1 + |x| + |v|\right)$.

Remarque 3.39. *On pose* $\varphi\left(x, u^\varepsilon\left(t\right)\right) = \varphi^\varepsilon\left(x\right)$, *pour* $\varphi = b,\ \sigma,\ b_x,\ b_{xx},\ \sigma_x,\ \sigma_{xx}$, *et* $\varphi\left(x, u\left(t\right)\right) = \varphi\left(x\right)$, *pour* $\varphi = b,\ \sigma,\ b_x,\ b_{xx},\ \sigma_x,\ \sigma_{xx},\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Soit (X, u) une solution optimale de l'équation (3.51), et soit la perturbation suivante :

$$u^\varepsilon\left(t\right) = \begin{cases} v & \text{si } t \in \left[\tau, \tau + \varepsilon\right], \\ u\left(t\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\varepsilon \leq \tau < T$ est fixé, ε suffisament petit, et v est F_t-adapté.

On considère les équations suivantes :

$$\begin{aligned} dX_1\left(t\right) &= \left[b^\varepsilon\left(X\left(t\right)\right) - b\left(X\left(t\right)\right) + b_x\left(X\left(t\right)\right)X_1\left(t\right)\right]dt & (3.53)\\ &\quad + \left[\sigma^\varepsilon(X\left(t\right)) - \sigma(X\left(t\right)) + \sigma_x(X\left(t\right))X_1\left(t\right)\right]dW_t, \\ dX_2\left(t\right) &= \left[\left(b_x^\varepsilon(X\left(t\right)) - b_x(X\left(t\right))\right)X_1\left(t\right) + \sigma_x(X\left(t\right))X_2\left(t\right)\right. & (3.54)\\ &\quad + \frac{1}{2}b_{xx}(X\left(t\right))X_1\left(t\right)X_1\left(t\right)]dt \\ &\quad + [\left(\sigma_x^\varepsilon(X\left(t\right)) - \sigma_x(X\left(t\right))\right)X_1\left(t\right) + \sigma_x(X\left(t\right))X_2\left(t\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_{xx}\left(X\left(t\right)\right)X_1\left(t\right)X_1\left(t\right)]dW_t. \end{aligned}$$

Lemme 3.40.(S.Peng) *Supposons que (F) ont lieu, donc on a l'estimation suivante*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X^\varepsilon\left(t\right) - X(t) - X_1\left(t\right) - X_2(t)\right|^2\right] \leq c\varepsilon^2. \tag{3.55}$$

Preuve. On montre que

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_1(t)\right|^2\right]\leq c\varepsilon,\ \text{ et } E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_2(t)\right|^2\right]\leq c\varepsilon^2.$$

On a

$$\begin{aligned}E\left|X_1\left(t\right)\right|^2 &\leq 4E\int_0^t\left[\left|b^\varepsilon\left(X\left(s\right)\right)-b\left(X\left(s\right)\right)\right|^2\right]ds\\&+4E\int_0^t\left|\sigma^\varepsilon\left(X\left(s\right)\right)-\sigma\left(X\left(s\right)\right)\right|^2ds\\&+4E\int_0^t\left|b_x\left(X\left(s\right)\right)X_1\left(s\right)\right|^2ds+4E\int_0^t\left|\sigma_x\left(X\left(s\right)\right)X_1\left(s\right)\right|^2ds,\end{aligned}$$

(en utilisant l'inégalité $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$). Par (F) il existe une constante M, tel que :

$$\begin{aligned}&E\int_0^t\left[\left|b_x\left(X\left(s\right)\right)X_1\left(s\right)\right|^2ds\right]+E\int_0^t\left[\left|\sigma_x\left(X\left(s\right)\right)X_1\left(s\right)\right|^2\right]ds\\\leq\ &M\int_0^tE\left|X_1\left(s\right)\right|^2ds.\end{aligned}$$

Par définition de $u^\varepsilon\left(t\right)$, on a
$\int_0^TE\left|b^\varepsilon\left(X\left(s\right)\right)-b\left(X\left(s\right)\right)\right|^2ds+\int_0^TE\left|\sigma^\varepsilon\left(X\left(s\right)\right)-\sigma\left(X\left(s\right)\right)\right|^2ds$

$$\begin{aligned}&=\int_\tau^{\tau+\varepsilon}E\left|b\left(X\left(s\right),v\right)-b\left(X\left(s\right),u(s)\right)\right|^2ds\\&\quad+\int_\tau^{\tau+\varepsilon}E\left|\sigma\left(X\left(s\right),v\right)-\sigma\left(X\left(s\right),u\left(s\right)\right)\right|^2ds\\&\leq\int_\tau^{\tau+\varepsilon}c\left(1+\sup_{0\leq t\leq T}E\left|X\left(s\right)\right|^2\right)ds,\end{aligned}$$

donc

$$E\left|X_1\left(t\right)\right|^2\leq\alpha\left[\int_0^tE\left|X_1\left(t\right)\right|^2ds+\left(1+M\right)\varepsilon\right].$$

Les inégalités de Gronwall, et Bukholder-Davis-Gundy, conduit à

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_1\left(t\right)\right|^2\right]\leq c\varepsilon,\tag{3.56}$$

De la même manière, il vient

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_2(t)\right|^2\right]\leq c\varepsilon^2. \tag{3.57}$$

Remarque 3.41. *On pose $X_3 = X_1 + X_2$ pour la simplicité.*

Il s'agit souvent d'utiliser les inégalités (3.56), (3.57), dans la suite. En appliquant le développment de Taylor au point X, et à l'ordre 1 aux fonctions $b^\varepsilon(X+X_3)$, et $\sigma^\varepsilon(X+X_3)$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t b^\varepsilon(X(s)+X_3(s))\,ds+\int_0^t \sigma^\varepsilon(X(s)+X_3(s))\,dW_s\\
=\ &\int_0^t b^\varepsilon(X(s))+b_x^\varepsilon(X(s))\,X_3(s)\,ds\\
&+\int_0^t \sigma^\varepsilon(X(s))+\sigma_x^\varepsilon(X(s))\,X_3(s)\,dW_s\\
&+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}^\varepsilon(X(s)+\lambda\mu X_3(s))\,d\lambda d\mu X_3(s)\,X_3(s)\,ds\\
&+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda \sigma_{xx}^\varepsilon(X(s)+\lambda\mu X_3(s))\,d\lambda d\mu X_3(s)\,X_3(s)\,dW_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\int_0^t b(X(s))\,ds+\int_0^t\sigma(X(s))\,dW_s\\
&+\int_0^t b_x(X(s))\,X_3(s)\,ds+\int_0^t \sigma_x(X(s))\,X_3(s)\,dW_s\\
&+\int_0^t\left[b^\varepsilon(X(s))-b(X(s))\right]ds+\int_0^t\left[\sigma^\varepsilon(X(s))-\sigma(X(s))\right]dW_s\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t b_{xx}(X(s))\,X_3(s)\,X_3(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t\sigma_{xx}(X(s))\,X_3(s)\,X_3(s)\,dW_s\\
&+\int_0^t(\sigma_x^\varepsilon(X(s))-\sigma_x(X(s)))\,X_3(s)\,dW_s\\
&+\int_0^t\int_0^1\int_0^1\lambda\left[b_{xx}^\varepsilon(X(s)+\lambda\mu X_3(s))-b_{xx}(X(s))\right]d\lambda d\mu X_3(s)\,X_3(s)\,ds\\
&+\int_0^t\int_0^1\int_0^1\lambda\left[\sigma_{xx}^\varepsilon(X(s)+\lambda\mu X_3(s))-\sigma_{xx}(X(s))\right]d\lambda d\mu X_3X_3(s)\,dW_s\\
=\ &X(t)+X_1(t)+X_2(t)-X_0+\int_0^t G^\varepsilon(s)\,ds+\int_0^t A^\varepsilon(s)\,dW_s.
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G^{\varepsilon}(s) &= \frac{1}{2}b_{xx}(X(s))(X_2(s)X_2(s)+2X_1(s)X_2(s)) \\ &+(b_x^{\varepsilon}(X(s))-b_x(X(s)))X_2(s) \\ &+\int_0^1\int_0^1 \lambda\left[b_{xx}^{\varepsilon}(X(s)+\lambda\mu X_3(s))-b_{xx}(X(s))\right]d\lambda d\mu X_3(s)X_3(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{\varepsilon}(s) &= \frac{1}{2}\sigma_{xx}(X(s))(X_2(s)X_2(s)+2X_1(s)X_2(s)) \\ &+(\sigma_x^{\varepsilon}(X(s))-\sigma_x(X(s)))X_2(s) \\ &+\int_0^1\int_0^1 \lambda\left[\sigma_{xx}^{\varepsilon}(X(s)+\lambda\mu X_3(s))-\sigma_{xx}(X(s))d\lambda d\mu X_3(s)X_3(s)\right], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} X(t)+X_3(t) &= X_0+\int_0^t b^{\varepsilon}(X(s)+X_3(s))ds+\int_0^t \sigma^{\varepsilon}(X(s)+X_3(s))dW_s \\ &-\int_0^t G^{\varepsilon}(s)ds-\int_0^t A^{\varepsilon}(t)dW_s. \end{aligned}$$

Comme

$$X^{\varepsilon}(t)=X_0+\int_0^t b^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(t))ds+\int_0^t \sigma^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(s))dW_s,$$

donc

$$\begin{aligned} X^{\varepsilon}(t)-X(t)-X_3(t) &= \int_0^t\left[b^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(s))-b^{\varepsilon}(X(s)+X_3(s))\right]ds \\ &+\int_0^t\left[\sigma^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(s))-\sigma^{\varepsilon}(X(s)+X_3(s))\right]dW_s \\ &+\int_0^t G^{\varepsilon}(s)ds+\int_0^t A^{\varepsilon}(s)dW(s). \end{aligned}$$

Comme b et σ sont Lipschitziennes, donc il existe une constante α, tel que :

$$\begin{aligned} E\left|X^{\varepsilon}(t)-X(t)-X_3(t)\right|^2 &\leq 6\alpha\int_0^t E\left|X^{\varepsilon}(s)-X(s)-X_3(s)\right|^2 ds \\ &+6\int_0^t E\left|G^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds+6\int_0^t E\left|A^{\varepsilon}(s)\right|^2 ds. \end{aligned}$$

D'après (F), on a

$$\begin{aligned}E\left|G^{\varepsilon}(s)\right|^{2} &\leq CE\left|X_{3}(s)X_{3}(s)\right|^{2}+CE\left|X_{2}(s)X_{2}(s)\right|^{2}+CE\left|X_{1}(s)X_{2}(s)\right|^{2}\\&+CE\left|X_{2}(s)\right|^{2},\end{aligned}$$

par (3.56), (3.57), et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a $E\left|G^{\varepsilon}(s)\right|^{2}=\circ(\varepsilon)$. De la même manière et comme σ_x et σ_{xx} sont bornées, on a $E\left|A^{\varepsilon}(s)\right|^{2}=\circ(\varepsilon)$, donc

$$E\left|X^{\varepsilon}(t)-X(t)-X_{3}(t)\right|^{2}\leq K\int_{0}^{t}E\left|X^{\varepsilon}(s)-X(s)-X_{3}(s)\right|^{2}ds+\circ(\varepsilon).$$

Par le lemme de Gronwall, on a

$$E\left|X^{\varepsilon}(t)-X(t)-X_{3}(t)\right|\leq\circ(\varepsilon)\,exp\,(KT)=\circ(\varepsilon).$$

Et par l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy on obtient (3.55).

Lemme 3.42. *Sous les conditions de lemme* (3.40)*, on a*

$$\begin{aligned}\circ(\varepsilon) &\leq E\left[\int_{0}^{T}f_{x}(X(t),u(t))X_{3}(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{T}f_{xx}(X(t),u(t))X_{1}X_{1}(t)\,dt\right]\\&+E\left[g_{x}(X(T))X_{3}(T)+\frac{1}{2}g_{xx}(X(T))X_{1}(T)X_{1}(T)\right]\\&+E\left[\int_{0}^{T}\left(f(X(t),u^{\varepsilon}(t))-f(X(t),u(t))\right)dt\right].\end{aligned}\tag{3.58}$$

Remarque 3.43. *Dans le cas où σ est ne dépend pas de u, on utilise seulement l'équation (3.53), et la relation* (3.58) *devient sous la forme*

$$\begin{aligned}\circ(\varepsilon) &\leq E\int_{0}^{T}f_{x}(X(s),u(s))X_{1}(s)\,ds+E\left[g_{x}(X(T))X_{1}(T)\right]\\&+E\int_{0}^{T}\left[f(X(s),u^{\varepsilon}(s))-f(X(s),u(s))\right]ds.\end{aligned}\tag{3.59}$$

Preuve. Comme u est optimal, on a

$$\begin{aligned}0 &\leq E\left[\int_{0}^{T}f(X^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))\,dt+g(X^{\varepsilon}(T))\right]\\&-E\left[\int_{0}^{T}f(X(t),u(t))\,dt+g(X(T))\right],\end{aligned}$$

par le lemme (3.40)

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_0^T [f(X(t)+X_3(t),u^\varepsilon(t))-f(X(t),u(t))]\,dt \\ &\quad +E[g(X(T)+X_3(T))-g(X(T))]+\circ(\varepsilon), \end{aligned}$$

en appliquant le développement de Taylor aux fonctions $f(X(t)+X_3(t),u^\varepsilon(t))$, et $g(X(T)+X_3(T))$ en $X(t)$, et à l'ordre 2, il vient

$$\begin{aligned} & f(X(t)+X_3(t),u^\varepsilon(t))-f(X(t),u(t)) \\ &= f(X(t),u^\varepsilon(t))-f(X(t),u(t))+f_x(X(t),u^\varepsilon(t))X_3(t) \\ &\quad +\frac{1}{2}f_{xx}(X(t),u^\varepsilon(t))X_3(t)X_3(t)+\circ\left(|X_3(t)|^2\right), \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} & g(X(T)+X_3(T))-g(X(T)) \\ &= g_x(X(T))X_3(T)+\frac{1}{2}g_{xx}(X(T))X_3(T)X_3(T)+\circ\left(|X_3(t)|^2\right), \end{aligned} \tag{3.61}$$

d'après (3.56) et (3.57), on a

$$\circ\left(|X_3(t)|^2\right)=\circ(\varepsilon),$$

par (3.60) et (3.61), l'inégalité (3.58) devient sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_0^T [f(X(t),u^\varepsilon(t))-f(X(t),u(t))]\,dt \\ &\quad +E\int_0^T f_x(X(t),u(t))X_3(t)\,dt+E[g_x(X(T))X_3(T)] \\ &\quad +\frac{1}{2}E\left[\int_0^T f_{xx}(X(t),u(t))X_1(t)X_1(t)\,dt\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}[g_{xx}(X(T))X_1(T)X_1(T)]+\delta(T)+\circ(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.62}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \delta(T) &= E\int_0^T (f_x(X(t),u^\varepsilon(t))-f_x(X(t),u(t)))X_3(t)\,dt \\ &\quad +\frac{1}{2}E\int_0^T (f_{xx}(X(t),u^\varepsilon(t))-f_{xx}(X(t),u(t)))X_3(t)X_3(t)\,dt \\ &\quad +\frac{1}{2}E\int_0^T f_{xx}(X(t),u(t))(X_1(t)X_2(t)+X_2(t)X_1(t)+X_2X_2(t))\,dt \\ &\quad +\frac{1}{2}E[g_{xx}(X(t))(X_1(T)X_2(T)+X_2(T)X_1(T)+X_2(T)X_2(T))]. \end{aligned}$$

Par (F), on a

[1] $E\left[f_x\left(X(t),u^{\varepsilon}(t)\right)-f_x(X(t),u(t))\right]X_3\left(t\right)dt\leq K\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}E\left[X_3\left(t\right)\right]dt.$

[2] $E\int_0^T\left(f_{xx}(X(t),u^{\varepsilon}(t))-f_{xx}\left(X(t),u(t)\right)\right)X_3\left(t\right)X_3\left(t\right)dt$

$\leq K\int_0^T E\left[X_3\left(t\right)X_3\left(t\right)\right]dt.$

[3] $E\int_0^T\left[f_{xx}\left(X(t),u(t)\right)\left(X_1\left(t\right)X_2\left(t\right)+X_2\left(t\right)X_1\left(t\right)+X_2\left(t\right)X_2(t)\right)\right]dt.$

$\leq K\int_0^T E\left(X_1\left(t\right)X_2\left(t\right)\right)dt+K\int_0^T E\left(X_2\left(t\right)X_1\left(t\right)\right)dt$

$+K\int_0^t E\left(X_2\left(t\right)X_2(t)\right)dt.$

Par (3.56), et (3.57), avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\delta\left(T\right)\leq K\left[\varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\right)+\varepsilon\left(\varepsilon+2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon^2\right)+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\right]+K\varepsilon^2=\circ\left(\varepsilon\right).$$

En substituant dans (3.62) on conclut.

3.3.2 Inégalité variationelle et processus adjoints

Grâce à (3.58), on a deux estimations à faire, on calcule en premier l'estimation du premier ordre :

$$E\left[\int_0^t f_x\left(X(t),u(t)\right)X_3(t)dt+g_x(X(T))X_3\left(T\right)\right],\tag{3.63}$$

puis celle du second ordre :

$$E\left[\int_0^T f_{xx}\left(X\left(t\right),u(t)\right)X_1(t)X_1(t)dt+g_{xx}\left(X\left(T\right)\right)X_1(T)X_1(T)\right],\tag{3.64}$$

On considère l'EDS suivante :

$$dz(t)=\left(b_x\left(t\right)z(t)-\phi\left(t\right)\right)dt+\left(\sigma_x\left(t\right)z\left(t\right)+\psi\left(t\right)\right)dW_t,\quad z(0)=0\tag{3.65}$$

$$\left(\phi\left(.\right),\psi\left(.\right)\right)\in L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)\times\left(L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)\right)^d,$$

tel que : $\psi=\left(\psi_1,...,\psi_d\right)$, et $L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)$: l'espace des processus adapté et de carré intégrable a valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Voici une forme linéaire continue sur $L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)\times\left(L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)\right)^d$

$$I\left(\phi\left(.\right),\psi\left(.\right)\right)=E\int_0^T f_x\left(t\right)z(t)dt+Eg_x(T)z(T).\tag{3.66}$$

$L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n)\times(L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n))^d$ est un espace de Hilbert, donc par le théorème de représentation de Riesz, il existe un couple unique $(p(.),q(.))$ dans $L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n)\times(L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n))^d$, $q=(q_1,...,q_d)$, tel que :

$$E\int_0^T\left[(p(t),\phi(t))+\sum_{j=1}^d\left(q_j(t),\psi_j(t)\right)\right]dt=I(\phi(.),\psi(.)), \tag{3.67}$$

$\forall(\phi(.),\psi(.))\in L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n)\times(L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n))^d$.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz avec (3.53), (3.54) pour estimer (3.63), et (3.64), il vient

$$\begin{aligned}&E\int_0^T f_x(X(s),u(s))X_1(s)ds+E[g_x(X(T))X_1(T)] \qquad (3.68)\\ =\;&E\int_0^T[p(s),(b^\varepsilon-b)(X(s))]ds+E\int_0^T tr\left[q^T(s)(\sigma^\varepsilon-\sigma)(X(s))\right]ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E\int_0^T f_x(X(s),u)X_2(s)ds+E[g_x(X(T))X_2(T)] \qquad (3.69)\\ =\;&E\int_0^T p^T(s)(b_x^\varepsilon(X(s))-b_x(X(s)))X_1(s)ds\\ &+E\int_0^T\frac{1}{2}\left[\left(p(s).b_{xx}(s)+\sum_{j=1}^d q_j(s).\sigma_{xx}^j(s)\right)X_1(s)X_1(s)\right]ds\\ &+E\int_0^T\sum_{j=1}^d q_j^T(s)\left(\sigma_x^{j\varepsilon}(X(s))-\sigma_x^j(X(s))\right)X_1(s)ds.\end{aligned}$$

Donc (3.58) devient sous la forme

$$\begin{aligned}\circ(\varepsilon)\;\le\;&E\int_0^T(H(X(s),u^\varepsilon(s),p(s),q(s))-H(X(s),u(s),p(s),q(s)))ds\\ &+\frac{1}{2}E\int_0^T X_1^T(s)H_{xx}(X(s),u(s),p(s),q(s))X_1(s)ds\\ &+\frac{1}{2}EX_1^T(T)g_{xx}(X(T))X_1(T),\end{aligned} \tag{3.70}$$

tel que :

$$H(x,v,p,q)=f(x,v)+(p,b(x,v))+\sum_{j=1}^d\left(q_j,\sigma^j(x,v)\right). \tag{3.71}$$

Ensuite on doit linéariser la quantité :

$$\frac{1}{2}E\int_0^T X_1^T(s)H_{xx}(X(s),u(s),p(s),q(s))X_1\left(s\right)ds,$$

et pour cela on pose : $Y(s)=X_1(s)X_1^T(s)$, et en appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} dY(t) &= [Y\left(t\right)b_x^T(t)Y(t)+\sum_{j=1}^{d}\sigma_x^j(X\left(t\right))Y(t)\sigma_x^{jT}(X\left(t\right))]dt \qquad (3.72)\\ &\quad +\left[Y\left(t\right)\sigma_x^T\left(X\left(t\right)\right)+\sigma_x\left(X\left(t\right)\right)Y(t)+\psi^{\varepsilon}\left(t\right)\right]dW\left(t\right)\\ &\quad +\phi^{\varepsilon}\left(t\right)dt, \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \phi^{\varepsilon}\left(t\right) &= X_1\left(t\right)\left(b^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-b\left(X(t)\right)\right)^T+\left(b^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-b\left(X(t)\right)\right)X_1(t)\\ &\quad +\sigma_x\left(X\left(t\right)\right)X_1(s)\left(\sigma^{\varepsilon}(X\left(t\right))-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)^T\\ &\quad +\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)X_1^T(t)\sigma_x^T\left(X\left(t\right)\right)\\ &\quad +\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)^T, \end{aligned}$$

$$\psi^{\varepsilon}\left(t\right)=X_1(t)\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)^T+\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X(t)\right)\right)X_1^T(t).$$

D'après (F), on a

$$\begin{aligned} E\int_0^T\phi^{\varepsilon}\left(t\right)dt &\leq E\int_0^T\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)\left(\sigma^{\varepsilon}\left(X\left(t\right)\right)-\sigma\left(X\left(t\right)\right)\right)^T dt\\ &\quad +\circ\left(\varepsilon\right),\\ E\int_0^T\psi^{\varepsilon}\left(t\right)dt &\leq \circ\left(\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Consédérons l'équation linéaire associée à (3.72)

$$\begin{aligned} dZ\left(t\right) &= \{Z\left(t\right)b_x^T(X\left(t\right))+b_x\left(X\left(t\right)\right)Z(t)+\sum_{j=1}^{d}\sigma_x^j\left(X\left(t\right)\right)Z\left(t\right)\sigma_x^{jT}(X\left(t\right))\}dt\\ &\quad +\phi\left(t\right)dt+\{Z\left(t\right)\sigma_x^T\left(X\left(t\right)\right)+\sigma_x\left(X\left(t\right)\right)Z(t)+\psi\left(t\right)\}dW_t, \qquad (3.73) \end{aligned}$$

$Z\left(0\right)=0, \left(\phi\left(.\right),\psi\left(.\right)\right)\in L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^{n,n}\right)\times(L_F^2\left(0,T;\mathbb{R}^{n,n}\right))^d, \psi=\left(\psi_1,\psi_2,...,\psi_d\right).$

$\mathbb{R}^{n,n}$: l'espace des matrices symétriques, muni d'un produit scalaire

$$\left(A_1,A_2\right)_*=tr\left(A_1,A_2\right),\quad \forall A_1,A_2\in\mathbb{R}^{n,n}.$$

Voici une forme linéaire continue sur $L_F^2(0,T;\mathbb{R}^{n,n}) \times \left(L_F^2(0,T;\mathbb{R}^{n,n})\right)^d$

$$M(\phi(.),\psi(.)) = E\int_0^T (Z(t), H_{xx}(t))_* \, dt + E\left[(Z(t), g_{xx}(X(T)))_*\right], \tag{3.74}$$

donc il existe $(P(.), Q(.))$ unique dans $L_F^2(0,T;\mathbb{R}^{n,n}) \times \left(L_F^2(0,T;\mathbb{R}^{n,n})\right)^d$, tel que :

$$\begin{aligned} M(\phi(.),\psi(.)) &= E\int_0^T \left[(P(t), \phi(t))_* + \sum_{j=1}^d \left(Q^j(t), \psi^j(t)\right)_*\right] dt \\ &= E\int_0^T X_1^T(s) f_{xx}(X(s), u(s), p(s), q(s)) X_1(s) \, ds \\ &\quad + E X_1^T(T) g_{xx}(X(T)) X_1(T) \\ &\geq \circ(\varepsilon). \end{aligned}$$

Donc (3.70) devient sous la forme

$$\begin{aligned} \circ(\varepsilon) &\leq E\int_0^T (H(X(s), u^\varepsilon(s), p(s), q(s)) - H(X(s), u(s), p(s), q(s))) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} E\int_0^T \left[(P(t), \phi^\varepsilon(t))_* + \sum_{j=1}^d \left(Q^j(t), \psi_j^\varepsilon(t)\right)_*\right] dt. \end{aligned}$$

D'après (3.70), on a

$$\begin{aligned} \circ(\varepsilon) &\leq E\int_0^T (H(X(t), u^\varepsilon(t), p(t), q(t)) - H(X(t), u(t), p(t), q(t))) \, dt \\ &\quad + \frac{1}{2} E\int_0^T tr\left[(\sigma^\varepsilon(X(t)) - \sigma(X(t)))^T P(t) (\sigma^\varepsilon(X(t)) - \sigma(X(t)))\right] dt, \end{aligned}$$

en utilisant la définition de u^ε, et en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq H(X(t), v, p(t), q(t)) - H(X(t), u(t), p(t), q(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} tr\left[(\sigma(X(t), v) - \sigma(X(t), u(t)))^* P(t) (\sigma(X(t), v) - \sigma(X(t), u(t)))\right] \end{aligned}$$

pour tout $u \in U$, où d'une manière équivalente : $\forall v \in U$

$$\begin{aligned} & H(X(\tau), v, p(\tau), q(\tau) - P(\tau)\sigma(X(\tau), u(\tau))) + \frac{1}{2} tr\left(\sigma\sigma^T(X(\tau), v) P(\tau)\right) \\ \geq\ & H(X(\tau), u(\tau), p(\tau), q(\tau) - P(\tau)\sigma(X(\tau), u(\tau))) \\ & + \frac{1}{2} tr\left(\sigma\sigma^T(X(\tau), u(\tau)) P(\tau)\right). \end{aligned}$$

Et les processus adjoints $p\,(t)$, et $P\,(t)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} -dp\,(t) &= \{b_x\,(t, X(t), u(t))^T\, p(t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^j\,(t, X(t), u(t))^T\, q_j\,(t) \\ &\quad -f_x(t, X(t), u(t))dt\} \; + q(t)dW(t),\; t \in [s, T]\,, \\ &\qquad p(T) = -f_x\,(X\,(T)) \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} -dP(t) &= b_x\,(t, X(t), u(t))^T\, P(t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^j\,(t, X(t), u(t))^T\, P(t)\sigma_x^j\,(t, X(t), u(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \{\sigma_x^j\,(t, X(t), u(t))^T\, Q_j(t) + Q_j(t)\sigma_x^j\,(t, X(t), u(t)) \\ &\quad + f_{xx}\,(t, X(t), u(t), p(t), q(t))\}dt + P(t)b_x\,(t, X(t), u(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} Q_j\,(t)\, dW^j\,(t)\,,\; t \in [s, T]\,, \\ &\qquad P(T) = -f_{xx}(X(T)) \end{aligned} \tag{3.76}$$

Remarque 3.44. *Sous les conditions (S6), (S7), (S8) l'équation (3.75) (resp (3.76)) admet une solution* $(p\,(.)\,, q(.))$*, (resp* $(P(.), Q(.))$*) unique.*

Chapitre 4

Lien entre PD et PM

Nous avons étudie dans les chapitres 1 et 2, les deux approches d'optimisation dynamique stochastique PM et PD. Il serait intéressant maintenant d'étudier le lien entre ces deux approches. Le problème est alors d'essayer d'obtenir des relations entre l'équation d'$H.J.B$, et le système Hamiltonian, c'est à dire entre la fonction valeur V et les processus adjoints p_t, P_t.

On définit U : un espace métrique, la variable t désigne le temps, on suppose que $t \in [s, T]$, avec $0 \leq s$, et $T < \infty$, on considère l'EDS contrôlée suivante :

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))\, dW(t),\ t \in [s, T], \quad (4.1) \\ X(s) &= y. \end{aligned}$$

La fonction coût est de la forme :

$$J(s, y, u(.)) = E\left\{ \int_s^T f(t, X(t), u(t))\, dt + g(X(T)) \right\}. \tag{4.2}$$

On note par $U^w[s, T]$ l'ensemble de tout $(\Omega, F, P, W(.), u(.))$, satisfaisant :

(S1) (Ω, F, P) un espace probabilisé complet,

(S2) $\{W(t)\}_{t \geq s}$un d-mouvement Brownien sur (Ω, F, P), on suppose que

$$F_t^s = \sigma\{W(r), s \leq r \leq t\},$$

(S3) $u : [s, T] \times \Omega \to U$ est $\{F_t^s\}$-adapté dans (Ω, F, P),

(S4) L'équation (4.1) possède une unique solution dans (Ω, F, F_t^s, P),

(S5) $f(., X(.), u(.)) \in L_F^1(0, T; \mathbb{R})$, $g(X(T)) \in L_F^1(\Omega, \mathbb{R})$.

4.1 Formulation de problème $\mathbf{S}_{sy}$

On définit

$$\begin{aligned} V(s,y) &= \inf_u J(s,y,u(.)),\ \forall (s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \qquad (4.3) \\ V(T,y) &= g(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Remarque 4.1. *Pour simplifier l'écriture, on pose*

$$\nabla_x V(t,x) = V_x(t,x),\ D_{xx}V(t,x) = V_{xx}(t,x),$$

on note : $\varphi(t, X^*(t), u^*(t)) = \varphi^*(t)$, *pour* $\varphi = b,\ b_x,\ b_{xx},\ \sigma,\ \sigma_x,\ \sigma_{xx},\ f,\ f_x,\ f_{xx},\ g,\ g_x,\ g_{xx}$, *tel que :* u^* *est un contrôle optimal.*

On suppose que

(S6) (U,d) un espace métrique séparable complet,

(S7) $b, \sigma, f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbb{R}$ (respectivement), $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sont uniformément continues, et $\exists L > 0$, tel que : pour $\varphi = b,\ \sigma,\ f,\ g$, on a

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\widehat{x},u)| \le L|x - \widehat{x}|, & \forall t \in [s,T],\ x,\ \widehat{x} \in \mathbb{R}^n,\ u \in U, \\ |\varphi(t,0,u)| \le L, \quad \forall (t,u) \in [0,T] \times U, \end{cases} \qquad (4.4)$$

(S8) $b,\ \sigma,\ f,\ g$ sont C^2 en x, et il existe $L > 0$, et $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$, ($\eta$: module de continuité) tel que : pour $\varphi = b,\ \sigma,\ f,\ g$

$$\begin{cases} |\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\widehat{x},\widehat{u})| \le L|x - \widehat{x}| + \eta(d(u,\widehat{u})), \\ |\varphi_{xx}(t,x,u) - \varphi_{xx}(t,\widehat{x},\widehat{u})| \le \eta(|x - \widehat{x}| + d(u,\widehat{u})), \end{cases} \qquad (4.5)$$

$\forall t \in [0,T]$, $x,\ \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, $u,\ \widehat{u} \in U$.

On considère l'équation d'$H.J.B$ associée au problème (S^{sy})

$$\begin{cases} -V_t(t,x) + \sup_{u\in U} G(t,x,u,-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) = 0,\ (t,x) \in [s,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V\diagup_{t=T} = g(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \qquad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned} G(t,x,u,-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) &= \mathcal{L}^u V(t,x) - f(x,u) \\ &= -V_x(t,x).b(x,u) - \frac{1}{2} tr\left(\sigma^T V_{xx} \sigma(x,u)\right) \\ &\quad - f(x,u). \qquad (4.7) \end{aligned}$$

Et d'autre part, on associé à toute couple admissible $(X(.), u(.))$ les deux couples $(p(.), q(.))$, et $(P(.), Q(.))$

$$\begin{cases}(p(.), q(.)) \in L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n) \times \left[L_F^2(0,T;\mathbb{R}^n)\right]^m, \\ (P(.), Q(.)) \in L_F^2(0,T;S^n) \times \left[L_F^2(0,T;S^n)\right]^m. \end{cases} \tag{4.8}$$

Si (X_t^*, u_t^*) est une solution optimale pour le problème (S_{sy}), et $(p(.), q(.))$ (resp $(P(.), Q(.))$) est l'unique solution adapté de (3.75) (resp (3.76)), donc : $(X^*(.), u^*(.), p(.), q(.), P(.), Q(.))$ est le 6-solution pour le problème (S_{sy}), et $(X^*(.), u^*(.), p(.), q(.))$ est le 4-solution pour le problème (S_{sy}),

Nous allons maintenant faire un calcul formel à partir de (S_{sy}), on déduit une relation entre PD et PM, (autrement dit : entre V, et les processus adjoints p_t et P_t), calcul qui sera justifié plus loin, et montrer comment les propriétés connues dans le cas où $V \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, décrits dans le cas où $V \notin C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. La notion de solution de viscosité joue un rôle crucial.

4.2 1^er^ cas : $V(.,.) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$

Théorème 4.2. *Supposons que les conditions* (S6), (S7) *ont lieu, soit* $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, *et* $(X^*(.), u^*(.), p(.), q(.))$ *le 4-solution optimale pour le problème* (S_{sy}), *on suppose que* $V \in C^{1,2}([s,T] \times \mathbb{R}^n)$, *donc* $\forall t \in [s,T]$

$$\begin{aligned} V_t(t, X^*(t)) &= G(t, X^*(t), u^*(t), -V_x(t, X^*(t)), V_{xx}(t, X^*(t))), \qquad (4.9) \\ &= \max_{u \in U} G(t, X^*(t), u, -V_x(t, X^*(t)), V_{xx}(t, X^*(t))). \end{aligned}$$

De plus, si $V \in C^{1,3}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, *et* V_{tx} *est continue, donc*

$$\begin{cases} V_x(t, X^*(t)) = -p(t), \ \forall t \in [s,T], \quad P.ps, \\ V_{xx}(t, X^*(t))\sigma^*(t) = -q(t), \forall t \in [s,T], \ P.ps. \end{cases} \tag{4.10}$$

Preuve. On a

$$V(t, X^*(t)) = E\left[\int_t^T f^*(r)dr + g(X^*(T))/F_t^s\right], \ \forall t \in [s,T], \ P.ps. \tag{4.11}$$

On définit

$$m(t) = E\left\{\int_s^T f^*(r)dr + g(X^*(T))/F_t^s\right\}, \tag{4.12}$$

donc

$$V(t,X^*(t)) = m(t) - \int_s^t f^*(r)dr,$$

$m(t)$ est F_t^s-martingale de carré intégrable, donc par le théorème de représentation du martingale

$$m(t) = m(s) + \int_s^t M(r)dW(r). \tag{4.13}$$

Donc

$$V(t,X^*(t)) = V(s,y) + \int_s^t M(r)dW(r) - \int_s^t f^*(r)dr. \tag{4.14}$$

Et d'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $V(t,X^*(t))$, on a

$$\begin{aligned} dV(t,X^*(t)) &= \{V_t(t,X^*(t)) + V_x(t,X^*(t)).b^*(t)\}dt \\ &\quad + \frac{1}{2}tr\left(\sigma^*(t)^T V_{xx}(t,X^*(t))\sigma^*(t)\right)dt \\ &\quad + V_x(t,X^*(t))^T \sigma^*(t)dW(t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Par comparaison entre (4.14), et (4.15) on obtient

$$\begin{aligned} -f(t,X^*(t),u^*(t)) &= V_t(t,X^*(t)) + V_x(t,X^*(t)).b^*(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr\left(\sigma^*(t)^T V_{xx}(t,X^*(t))\sigma^*(t)\right), \\ M(t) &= V_x(t,X^*(t))^T \sigma^*(t). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ce que prouve la 1^{er} égalité dans (4.9). Comme $V \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ satisfaisant l'équation d'$H.J.B$, donc la 2^{nd} égalité est vérifiée aussi par (4.6), on a

$$\begin{aligned} &G(t,X^*(t),u^*(t),-V_x(t,X^*(t)),-V_{xx}(t,X^*(t))) - V_t(t,X^*(t)) = 0 \\ &\geq G(t,x,u^*(t),-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) - V_t(t,x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{4.17}$$

si $V \in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, et V_{tx} est continue, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\{G(t,x,u^*(t),-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) - V_t(t,x)\}/_{x=X^*(t)} = 0, \tag{4.18}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} 0 &= V_{tx}(t,X^*(t)) + V_{xx}(t,X^*(t))b^*(t) + b_x^*(t)^T V_x(t,X^*(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}tr\left(\sigma^*(t)^T V_{xxx}(t,X^*(t))\sigma^*(t)\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left(\sigma_x^{j*}(t)\right)^T (V_{xx}(t,X^*(t))\sigma^*(t))^j + f_x^*(t), \end{aligned} \tag{4.19}$$

tel que :

$$tr\left(\sigma^T V_{xxx}\sigma\right)=\left(tr\left(\sigma^T\left((V_x)^1\right)\right)_{xx}\sigma\right),...,tr\left(\sigma^T\left((V_x)^n\right)_{xx}\sigma\right)^T, \tag{4.20}$$

avec

$$V_x\equiv\left((V_x)^1,...,(V_x)^n\right)^T. \tag{4.21}$$

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $V_x(t,X^*(t))$, on obtient

$$\begin{aligned} dV_x(t,X^*) &= \{V_{tx}(t,X^*(t))+V_{xx}(t,X^*(t))\,b^*(t)\}\,dt \\ &\quad +\frac{1}{2}tr\left(\sigma^*(t)^T V_{xxx}(t,X^*(t))\,\sigma^*(t)\right)dt \\ &\quad +V_{xx}(t,X^*(t))\,\sigma^*(t)dW(t), \qquad (4.22)\\ &= -\{b_x^*(t)^T V_x(t,X^*)+\sum_{j=1}^m\left(\sigma_x^{j*}(t)\right)^T\left(V_{xx}^T(t,X^*(t))\sigma^*(t)\right)^j \\ &\quad +f_x^*(t)\}dt+V_{xx}(t,X^*(t))\,\sigma^*(t)\,dW(t), \qquad (4.23) \end{aligned}$$

on note que

$$-V_x(T,X^*(t))=-g_x(X^*(T)).$$

Donc par unicité des solutions de l'équation (3.75) on obtient (4.10) -par comparaison entre (4.23), et (3.75)-

Corollaire 4.3. *Soit* $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$*, supposons que les conditions* (*S6*)*, et* (*S7*) *ont lieu, soit* $(X^*(.),u^*(.))$ *le couple optimal pour le problème* (S_{sy})*, on suppose que* $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$*, donc*

$$V(t,X^*(t))=V(s,y)-\int_s^t f^*(r)\,dr+\int_s^t V_x(r,X^*(r))^T\sigma^*(r)\,dW_r.$$

Remarque 4.4. *le corollaire précédent donne une représentation explicite pour le processus d'Itô* $V(t,X^*(t))$*, en particulier :*

$$t\to V(t,X^*(t))+\int_s^t f^*(r)\,dr,\ t\in[s,T]$$

est une martingale.

Exemple. On prend $U=[-1,1]$, et $n=m=1$. L'état est donné par

$$\begin{cases} dX_t=2u_t dt+\sqrt{2}dW_t,\ t\in[0,T], \\ X_s=y. \end{cases}$$

On considère la fonction coût

$$J\left(s,y;u(.)\right)=E\left\{\int_{s}^{T}\left(u^{2}\left(t\right)+1\right)dt-\log chX(T)\right\},$$

où : $chx=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$, pour (s,y) fixé, et $u\left(.\right)\in U^{w}\left[s,T\right]$. En appliquant la formule d'Itô à : $\log chX(t)$.

Posons $f(x)=\log chx$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= sh.\frac{1}{chx}=thx, \\ f''(x) &= (thx)' \\ &= \frac{chx\,(shx)'-shx\,(chx)'}{ch^{2}x} \\ &= 1-th^{2}x=th^{-2}x. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d\left(\log chX(t)\right) &= thX(t)dX(t)+\frac{1}{2}ch^{-2}X(t)d\left\langle X,X\right\rangle_{t}, \\ d\left\langle X,X\right\rangle_{t} &= \left\langle 2u(t)dt+\sqrt{2}dW(t),2u(t)dt+\sqrt{2}dW(t)\right\rangle \\ &= 2dt. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \log chX(t) &= \log chy+\int_{s}^{T}thX(t)\left[2u\left(t\right)dt+\sqrt{2}dW_{t}\right]+\int_{s}^{T}\left[chX(t)\right]^{-2}dt \\ &= \log chy+\int_{s}^{T}2u(t)thX(t)+\left[chX(t)\right]^{-2}dt+\int_{s}^{T}\sqrt{2}thX(t)dW(t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J\left(s,y,u(.)\right)+\log chy &= E\int_{s}^{T}\left[\left(u^{2}\left(t\right)+1\right)-2u(t)thX(t)-\left[chX(t)\right]^{-2}\right]dt \\ &= E\int_{s}^{T}\left(u\left(t\right)-thX\left(t\right)\right)^{2}dt\geq 0, \end{aligned}$$

car

$$\left(1-\left[chx\right]^{-2}\right)=thx.$$

Et comme

$$E\int_{s}^{T}\left(u\left(t\right)-thX(t)\right)^{2}dt\geq 0,$$

donc

$$\begin{aligned} V(s,y) &= -\log chy \\ &= -\log\left(\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\right), \end{aligned}$$

et

$$u^*(t) = thX^*(t),$$

tel que :

$$\begin{aligned} dX^*(t) &= 2thX^*(t)dt + \sqrt{2}dW(t),\ t\in[0,T], \\ X^*(0) &= 0, \end{aligned}$$

On obtient, en appliquant la formule d'Itô à : $g(X^*(t)) = thX^*(t)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (thx)' = \frac{1}{ch^2x}, \\ g''(x) &= \left[\frac{1}{ch^2x}\right]' = -2\frac{thx}{ch^2x}, \\ d(thX^*(t)) &= \frac{1}{ch^2X^*(t)}dX^*(t) - \frac{thX^*(t)}{ch^2X^*(t)}d\langle X^*,X^*\rangle_t, \\ d\langle X^*,X^*\rangle_t &= \left\langle 2thX^*(t)dt+\sqrt{2}dW_t, 2thX^*(t)dt+\sqrt{2}dW_t\right\rangle = 2dt, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} d(thX^*(t)) &= \frac{1}{ch^2X^*(t)}dX^*(t) - \frac{2thX^*(t)}{ch^2X^*(t)}dt \\ &= \frac{1}{ch^2X^*(t)}\left[2thX^*(t)dt+\sqrt{2}dW(t)\right] - \frac{2thX^*(t)}{ch^2X^*(t)}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{ch^2X^*(t)}dW(t). \end{aligned} \tag{4.24}$$

donc

$$\begin{cases} d[thX^*(t)] = \sqrt{2}\,[chX^*(t)]^{-2}\,dW(t),\ t\in[0,T], \\ \quad thX^*(T) \text{ à la date } T. \end{cases}$$

Par l'unicité des solutions $(p(.), q(.))$ de l'équation (3.75), donc

$$\begin{cases} p(t) = thX^*(t),\ t\in[0,T], \\ q(t) = \sqrt{2}\,[chX^*(t)]^{-2}. \end{cases}$$

Et d'autre part, d'après le théorème de représentation du martingale, on a $\exists Q \in L_F^2(0,T;\mathbb{R})$, tel que :

$$E\left[(chX^*(T))^{-2}/F_t^s\right] = E\left[(chX^*(T))^{-2}\right] + \int_s^T Q(t)dW(t),$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} dE\left[(chX^*(T))^{-2}/F_t^s\right] = Q(t)dW(t),\ t\in[0,T]\,, \\ E\left[(chX^*(T))^{-2}/F_T^s\right] = \left[chX^*(T)\right]^{-2}, \end{array}\right. \tag{4.25}$$

par l'unicité des solutions de l'équation (3.76), et par comparaison avec (4.25), on a

$$P(t) = E\left[(chX^*(T))^{-2}/F_t^s\right].$$

Par la formule d'Itô

$$\begin{aligned} (chX^*(T))^{-2} &= (chX^*(t))^{-2} - 2\int_t^T \left[chX^*(r)\right]^4 dr \\ &\quad -2\sqrt{2}\int_t^T shX^*(r)\left[chX^*(r)\right]^{-3} dW_r, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} P(t) &= E\left[(chX^*(T))^{-2}/F_t^s\right], \\ &\leq \left[chX^*(t)\right]^{-2} \equiv V_{xx}(t,X_t^*)\,. \end{aligned}$$

4.3 $2^{\mathbf{em}}$ cas : $\mathbf{V}(.,.) \notin C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$

On va maintenant étudier le cas où $V \notin C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, et donnant une généralisation de (4.10), où $V \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Considérons les ensembles suivantes

$$D_{t+,x}^{1,2,+}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right) = \left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S^n : \overline{\lim_{t\searrow\widehat{t},x\to\widehat{x}}}\frac{I\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)}{\left|t-\widehat{t}\right|+\left|x-\widehat{x}\right|^2}\leq 0\right\}, \tag{4.26}$$

$$D_{t+,x}^{1,2,-}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right) = \left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S^n : \underline{\lim_{t\searrow\widehat{t},x\to\widehat{x}}}\frac{I\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)}{\left|t-\widehat{t}\right|+\left|x-\widehat{x}\right|^2}\geq 0\right\}, \tag{4.27}$$

tel que :

$$I\left(\widehat{t},\widehat{x}\right) = V(t,x) - V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right) - \alpha(t-\widehat{t}) - \beta(x-\widehat{x}) - \frac{1}{2}(x-\widehat{x})^T\gamma(x-\widehat{x})\,.$$

$D_{t+,x}^{1,2,+}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)$: le 2^nd ordre sous-différentiel (à droite) de $V \in C\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, au point $\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

$D_{t+,x}^{1,2,-}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)$: le 2^nd ordre sur-différentiel (à droite) de $V \in C\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, au point $\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

Nous définissons

$$D_x^{2,+}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)=\left\{(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^n\times S^n:\ \overline{\lim_{x\to\widehat{x}}}\frac{J\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)}{\left|x-\widehat{x}\right|^2}\leq 0\right\}, \tag{4.28}$$

$$D_x^{2,-}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)=\left\{(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^n\times S^n:\ \underline{\lim_{x\to\widehat{x}}}\frac{J\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)}{\left|x-\widehat{x}\right|^2}\geq 0\right\}, \tag{4.29}$$

tel que :

$$J\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)=V\left(\widehat{t},x\right)-V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)-\beta\left(x-\widehat{x}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\widehat{x}\right)^T\gamma\left(x-\widehat{x}\right).$$

$$D_{t+}^{1,+}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{R}\ /\ \overline{\lim_{t\searrow\widehat{t}}}\frac{1}{\left|t-\widehat{t}\right|}\left[V(t,\widehat{x})-V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)-\alpha\left(t-\widehat{t}\right)\right]\leq 0\right\}, \tag{4.30}$$

$$D_{t+}^{1,-}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{R}/\underline{\lim_{t\searrow\widehat{t}}}\frac{1}{\left|t-\widehat{t}\right|}\left(V\left(t,\widehat{x}\right)-V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)-\alpha\left(t-\widehat{t}\right)\right)\geq 0\right\}, \tag{4.31}$$

$D_x^{2,+}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)$ (resp $D_x^{2,-}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)$) est le 2^nd ordre sous-différentiel (resp sur-différentiel) partiel de V au point $\widehat{x}$, ($\widehat{t}$ fixé), $D_t^{1,+}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)$ (resp $D_t^{1,-}V\left(\widehat{t},\widehat{x}\right)$) est le 1^er ordre sous-différentiel (resp sur-différentiel) partiel de V au point $\widehat{t}$, ($\widehat{x}$ fixé).

Sous les conditions (S1)-(S2), la fonction V (uniformément continue) est l'unique solution de viscosité de l'équation d'$H.J.B$, on obtient alors $\forall\,(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} -\alpha+\sup\limits_{u\in U}G\left(t,x,u,-\beta,-\gamma\right)\leq 0,\ \ \forall\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\in D_{t+,x}^{1,2,+}V\left(t,x\right), \\ -\alpha+\sup\limits_{u\in U}G\left(t,x,u,-\beta,-\gamma\right)\geq 0,\ \ \forall\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\in D_{t+,x}^{1,2,-}V\left(t,x\right), \\ \qquad V\left(T,x\right)=g(x). \end{cases} \tag{4.32}$$

Notation. $[s,\infty)=\{\widehat{s}\in S^n/\widehat{s}\geq s\}$, $(-\infty,s]=\{\widehat{s}\in S^n/\widehat{s}\leq s\}$, pour tout $s\in S^n$. On note

$\varphi(t, X^*(t), u^*(t)) = \varphi^*(t)$, pour $\varphi = b,\ b_x,\ b_{xx},\ \sigma,\ \sigma_x,\ \sigma_{xx},\ f,\ f_x,\ f_{xx},\ g,$ $g_x,\ g_{xx}$, et

$\varphi(t, X^*(t) + \theta\xi^z(t), u^*(t)) = \varphi^*(t, \theta)$, pour $\varphi = b,\ b_x,\ b_{xx},\ \sigma,\ \sigma_x,\ \sigma_{xx}$.

4.3.1 a)$\mathbf{V}(t, .) \notin C^2(\mathbb{R}^n)$

Théorème 4.5. *Soit $(s, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$, et soit (X^*, u^*, p, q, P, Q) une solution optimale pour le problème (S_{sy}). Sous les conditions* (S6), (S7), (S8), *on a $\forall t \in [s, T]$*

$$\begin{aligned} \{-p(t)\} \times [-P(t), \infty) &\subseteq D_x^{2,+}V(t, X^*(t)), \quad P.ps, & (4.33)\\ D_x^{2,-}V(t, X^*(t)) &\subseteq \{-p(t)\} \times (-\infty, -P(t)], \quad P.ps. & (4.34) \end{aligned}$$

Preuve. On fixe $t \in [s, T]$, $z \in \mathbb{R}^n$, $t \le r \le T$. On note par $X^z(.)$ la solution de l'EDS

$$X^z(r) = z + \int_t^r b(\alpha, X^z(\alpha), u^*(\alpha))\, d\alpha + \int_t^r \sigma(\alpha, X^z(\alpha), u^*(\alpha))\, dW(\alpha). \tag{4.35}$$

Posons $\xi^z(r) = X^z(r) - X^*(r)$. Nous allons maintenant indiquer que (4.35) est une EDS sur $\left(\Omega, F, \{F_r^s\}_{r \ge s}, P(./F_t^s)\right)$. Donc on a l'estimation suivante

$$E\left\{\sup_{t \le r \le T} |\xi^z(r)|^{2K} / F_t^s\right\} \le K\,|z - X^*(t)|^{2K}, \ P.ps, \tag{4.36}$$

où K est une constante, tel que : $K \ge 1$. Considérons les deux E.D.S

$$\begin{aligned} d\xi^z(r) &= \left\{b_x^*(r)\,\xi^z(r) dr + \frac{1}{2}\xi^z(r)^T b_{xx}^*(r)\,\xi^z(r)\right\} dr + \varepsilon_{z3}(r)\, dr \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left\{\sigma_x^{j*}(r)\,\xi^z(r) + \frac{1}{2}\xi^z(r)^T \sigma_{xx}^{j*}(r)\,\xi^z(r)\right\} dW^j(r) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{z4}^j(r)\, dW^j(r), & (4.37)\\ \xi^z(t) &= z - X^*(t). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\xi^{z}(r) &= b_{x}^{*}(r)\,\xi^{z}(r)\,dr+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{x}^{j*}(r)\,\xi^{z}(r)\,dW^{j}(r)+\varepsilon_{z1}(r)\,dr \\
&\quad +\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{z2}^{j}(r)\,dW^{j}(r), \qquad (4.38)\\
\xi^{z}(t) &= z-X^{*}(t).
\end{aligned}
$$

Où les quantités $\xi^{z}(r)^{T}b_{xx}^{*}(r)\,\xi^{z}(r)$, $\xi^{z}(r)^{T}\sigma_{xx}^{j*}(r)\,\xi^{z}(r)$, $\varepsilon_{z1}(r)$, $\varepsilon_{z2}^{j}(r)$, $\varepsilon_{z3}(r)$, $\varepsilon_{z4}^{j}(r)$, sont données par

$$
\begin{aligned}
\xi^{z}(r)^{T}b_{xx}^{*}(r)\,\xi^{z}(r) &= \left(\xi^{z}(r)^{T}b_{xx}^{*}(r)\,\xi^{z}(r),...,\xi^{z}(r)^{T}b_{xx}^{*}(r)\,\xi^{z}(r)\right),\\
\xi^{z}(r)^{T}\sigma_{xx}^{j*}(r)\,\xi^{z}(r) &= \left(\xi^{z}(r)^{T}\sigma_{xx}^{1j*}(r)\,\xi^{z}(r),...,\xi^{z}(r)^{T}\sigma_{xx}^{nj*}(r)\,\xi^{z}(r)\right),\\
\varepsilon_{z1}(r) &= \int_{0}^{1}\{b_{x}(r,\theta)-b_{x}^{*}(r)\}\,\xi^{z}(r)\,d\theta,\\
\varepsilon_{z2}^{j}(r) &= \int_{0}^{1}\left\{\sigma_{x}^{j}(r,\theta)-\sigma_{x}^{j*}(r)\right\}\xi^{z}(r)\,d\theta,\\
\varepsilon_{z3}(r) &= \int_{0}^{t}(1-\theta)\,\xi^{z}(r)^{T}\{b_{xx}(r,\theta)-b_{xx}^{*}(r)\}\,\xi^{z}(r)\,d\theta,\\
\varepsilon_{z4}^{j}(r) &= \int_{0}^{1}(1-\theta)\,\xi^{z}(r)^{T}\left\{\sigma_{x}^{j}(r,\theta)-\sigma_{xx}^{j*}(r)\right\}\xi^{z}(r)\,dr.
\end{aligned}
$$

1^er^ étape (estimation). *On montre que pour une constante $K\geq 1$, il existe une fonction croissante continue $\delta:[0,\infty)\to[0,\infty)$, indépendant de $z\in\mathbb{R}^{n}$, tel que : $\delta(r)\diagup r\underset{r\to 0}{\to}0$, et*

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_{t}^{T}|\varepsilon_{z1}(r)|^{2K}dr/F_{t}^{s}\right] &\leq \delta\left(|z-X^{*}(t)|^{2K}\right) P.ps,\\
E\left[\int_{t}^{T}\left|\varepsilon_{z2}^{j}(r)\right|^{2K}dr/F_{t}^{s}\right] &\leq \delta\left(|z-X^{*}(t)|^{2K}\right) P.ps,\\
E\left[\int_{t}^{T}|\varepsilon_{z3}(r)|^{K}dr/F_{t}^{s}\right] &\leq \delta\left(|z-X^{*}(t)|^{2K}\right) P.ps,\\
E\left[\int_{t}^{T}\left|\varepsilon_{z4}^{j}(r)\right|^{K}dr/F_{t}^{s}\right] &\leq \delta\left(|z-X^{*}(t)|^{2K}\right) P.ps.
\end{aligned}
$$

On pose $E\left[./F_{t}^{s}\right]=E^{t}[.]$, il vient
1)

$$
E^{t}\int_{t}^{T}|\varepsilon_{z1}(r)|^{2K}dr=E^{t}\int_{t}^{T}\left|\int_{0}^{1}\{b_{x}(r,\theta)-b_{x}^{*}(r)\}\,d\theta\xi^{z}(r)\right|dr,
$$

en utilisant (4.36) et (4.5), on obtient

$$\begin{aligned} E^t \int_t^T \left|\varepsilon_{z1}(r)\right|^{2K} dr &\leq \int_t^T E^t \left\{ \int_0^1 \left|b_x(r,\theta) - b_x^*(r)\right|^{2K} d\theta \left|\xi^z(r)\right|^{2K} \right\} dr \\ &\leq K \int_t^T E^t \left|\xi^z(r)\right|^{4K} dr \\ &\leq K \left|z - X^*(t)\right|^{4K}. \end{aligned}$$

2) De la même manière, on a

$$E^t \int_t^T \left|\varepsilon_{z2}^j(r)\right|^{2K} dr \leq K \left|z - X^*(t)\right|^{4K}.$$

3) En utilisant (4.36), et (4.5), il vient

$$\begin{aligned} E^t \int_t^T \left|\varepsilon_{z3}(r)\right|^{K} dr &\leq \int_t^T E^t \left\{ \int_0^1 \left|b_{xx}(r,\theta) - b_{xx}^*(r)\right|^{K} d\theta \left|\xi^z(r)\right|^{2K} dr \right\} \\ &\leq \int_t^T \left\{ E^t \left[\overline{\eta}\left(\left|\xi^z(r)\right|\right)^{2K} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ E^t \left|\xi^z(r)\right|^{4K} \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\ &\leq K \left|z - X^*(t)\right|^{2K} \int_t^T \left\{ E^t \left[\eta\left(\left|\xi^z(r)\right|\right)^{2K} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} dr \\ &\leq K \left|z - X^*(t)\right|^{4K}. \end{aligned}$$

4) De la même manière, on a

$$E^t \left[\int_t^T \left|\varepsilon_{z4}^j(r)\right|^{K} dr \right] \leq K \left|z - X^*(t)\right|.$$

2^{nd} étape (relation du dualité). Appliquant la relation du dualité entre $\xi^z(.)$, et $p(.)$, utilisant (4.38) et (3.75), on obtient

$$\begin{aligned} & E^t \left\{ \int_t^T f_x^*(r).\xi^z(r) dr + h_x^*(T).\xi^z(T) \right\} \qquad (4.39) \\ = \; & -p(t).\xi^z(t) - E^t \left\{ \int_t^T \left\{ p(r).\varepsilon_{z3}(r) + \sum_{j=1}^m q_j(r).\varepsilon_{z4}^j(r) \right\} dr \right\} \\ & -E^t \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T p(r).\xi^z(r)^T b_{xx}^*(r)\xi^z(r) + \sum_{j=1}^m q_j(r).\xi^z(r)^T \sigma_{xx}^{j*}(r)\xi^z(r) dr \right\} \end{aligned}$$

Et d'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $\phi^z(r) = \xi^z(r)\,\xi^z(r)^T$, il vient

$$\begin{aligned}
& d\phi^z(r) \\
= & \left\{ b_x^*(r)\,\phi^z(r) + \phi^z(r)\,b_x^*(r)^T + \sum_{j=1}^m \sigma_x^{j*}(r)\,\phi^z(r)\,\sigma_x^{j*}(r)^T + \varepsilon_{z5}(r)\,dr \right\} \\
& + \sum_{j=1}^m \left\{ \sigma_x^{j*}(r)\,\phi^z(r) + \phi^z(r)\,\sigma_x^{j*}(r)^T + \varepsilon_{z6}^j(r)\,dW^j(r) \right\}, \qquad (4.40) \\
\phi^z(t) = & \ \xi(t)\,\xi(t)^T.
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{z5}(r) &= \varepsilon_{z1}(r)\,\xi^z(r)^T + \xi^z(r)\,\varepsilon_{z1}(r)^T \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \left\{ \sigma_x^{j*}(r)\,\xi^z(r)\,.\varepsilon_{z2}^j(r)^T + \varepsilon_{z2}^j(r)\,\xi^z(r)^T\,\sigma_x^{j*}(r)^T + \varepsilon_{z2}^j\varepsilon_{z2}^j(r)^T \right\}, \\
\varepsilon_{z6}^j(r) &= \varepsilon_{z2}^j(r)\,\xi^z(r)^T + \xi^z(r)\,\varepsilon_{z2}^j(r)^T.
\end{aligned}$$

En appliquant la relation du dualité aussi entre $\phi^z(.)$ et $P(.)$, en utilisant (4.40) et (3.76), il vient :

$$\begin{aligned}
& -E^t \left\{ \int_t^T \xi^z(r)^T H_{xx}(r)\xi^z(r)\,dr + \xi^z(T)\,g_{xx}^*(t))\,\xi^z(t) \right\} \qquad (4.41) \\
= & -\xi^z(t)^T P(t)\xi^z(t) - E\left\{ \int_t^T tr\left[P.\varepsilon_{z5} + \sum_{j=1}^m Q_j.\varepsilon_{z6}^j \right](r)\,dr \right\}, \ P.ps.
\end{aligned}$$

Rappelons que : $z \in \mathbb{R}^n$ est rationnel si touts ses coordonné sont rationnels, et que l'ensemble des nombrs rationnels est dénombrable, donc

$$V(t, X^*(t)) = E\left\{ \int_t^T f(r, X^*(r), u^*(r))\,dr + g(X^*(T))\,/F_t^s \right\},$$

et (4.36), (4.39), (4.41), sont vérifiées pour tout z rationnel, et

$$\left(\Omega, F, P(./F_t^s), W(.) - W(t); u^*(.)\,/_{[t,T]}\right) \in U^w([t,T]),$$

avec : $\sup\limits_{s \le r \le T} (|p(r)| + |P(r)|) < +\infty.$

3$^{\text{em}}$ **étape Completion de preuve.** Soit z rationnel, donc

$$\begin{aligned}
V(t,z) - V(t, X^*(t)) \ \le \ & E^t \int_t^T \{ f(X^z(r), u^*(r)) - f(X^*(r), u^*(r)) \}\,dr \\
& + E^t \{ g(X^z(T)) - g(X^*(T)) \}. \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

D'après le développement de Taylor, on a

$$\begin{aligned}
V(t,z)-V(t,X^*(t)) &\leq E^t\left\{\int_t^T f_x^*(r).\xi^z(r)\,dr+g_x^*(T).\xi^z(T)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}E^t\int_t^T \xi^z(r)^T f_{xx}^*(r)\,\xi^z(r)\,dr\\
&\quad+\frac{1}{2}E^t\xi^z(T)^T g_{xx}^*(T)\,\xi^z(T)\\
&\quad+\circ\left(|z-X^*(t)|^2\right), \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

comme

$$H_{xx}=p.b_{xx}+\sum_{j=1}^m q_j.\sigma_{xx}^j-f_{xx},$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}E^t\left\{\int_t^T \xi^z(r)^T f_{xx}^*(r)\,\xi^z(r)\,dr\right\}\\
=&-\frac{1}{2}E^t\left\{\int_t^T \xi^z(r)^T H_{xx}(r)\,\xi^z(r)\,dr+p(r).\xi^z(r)^T b_{xx}^*(r)\,\xi^z(r)\,dr\right\}\\
&+\frac{1}{2}E^t\sum_{j=1}^m\int_t^T q_j\xi^z(r)^T\sigma_{xx}^{j*}\xi^z(r)\,dr. \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Substituant (4.39), et (4.44) dans (4.43), il vient

$$\begin{aligned}
&V(t,z)-V(t,X^*(t))\\
\leq\;&-p(t).\xi^z(t)-E^t\frac{1}{2}\int_t^T \xi^z(r)^T H_{xx}(r)\,\xi^z(r)\,dr \qquad (4.45)\\
&-\frac{1}{2}E^t\xi^z(T)^T g_{xx}^*(T))\,\xi^z(T)+\circ(|z-X^*(t)|).
\end{aligned}$$

Maintenant d'après (4.41), on a

$$\begin{aligned}
&V(t,z)-V(t,X^*(t))\\
\leq\;&-p(t).\xi^z(t)-\frac{1}{2}\xi^z(t)^T P(t)\xi^z(t)+\circ\left(|z-X^*(t)|^2\right)\\
=\;&-p(t).(z-X^*(t))-\frac{1}{2}(z-X^*(t))^T P(t)(z-X^*(t))\\
&+\circ\left(|z-X^*(t)|^2\right). \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

Comme $V(t,x)$ est continue donc (4.46) est vérifié pour tout $z\in\mathbb{R}^n$, alors

$$(-p(t),-P(t))\in D_x^{2,+}V(t,X^*(t)). \qquad (4.47)$$

Et d'après (4.28), on obtient (4.33), i.e.

$$\{-p(t)\} \times [-P(t), \infty) \subset D_x^{2,+}V(t, X^*(t)). \tag{4.48}$$

Pour (4.34), on fixe $w \in \Omega$, tel que (4.46) est vérifiée, $\forall z \in \mathbb{R}^n$. Par définition on a, pour $(\beta, \gamma) \in D_x^{2,-}V(t, X^*(t))$

$$0 \leq \varliminf_{z \to X^*(t)} \frac{1}{|z-X^*|^2} \left(V(t,z) - V(t, X^*) - \beta(z - X^*) - \frac{1}{2}(z-X^*)^T \gamma(z-X^*) \right), \tag{4.49}$$

donc

$$0 \leq \varliminf_{z \to X^*(t)} \frac{1}{|z-X^*|^2} (-p(t) + \beta) . (z - X^*) - \frac{1}{2}(z-X^*)^T (P(t) + \gamma)(z - X^*). \tag{4.50}$$

i.e. $p = -p(t)$, et $P \leq -P(t)$, ce qui prouve (4.34).

Remarque 4.6. *Si $V \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, par* (4.33) *et* (4.34), *on obtient*

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x(t, X^*(t)) = -p(t), \\ V_{xx}(t, X^*(t)) \leq -P(t). \end{array} \right. \tag{4.51}$$

4.3.2 b) $\mathbf{V}(.,x) \notin C^1([0,T])$

On étudie maintenant le sous et le sub-différentiel de la fonction valeur au point t, On considère la fonction H donnée par

$$H(t,x,u) = G(t,x,u,p(t), P(t) + tr\left(\sigma^T(t,x,u)\left[q(t) - P(t)\sigma^*(t)\right]\right)), \tag{4.52}$$

$(p(.), q(.))$, $(P(.), Q(.))$: les solutions des équations (3.75), (3.76) associées avec $(X^*(.), u^*(.))$.

Théorème 4.7. Sous les conditions de théorème (4.4), on a

$$H(t, X^*(t), u^*(t)) \in D_{t+}^{1,+}V(t, X^*(t)), \ \forall t \in [s,T], \ P.ps. \tag{4.53}$$

Preuve. Soit $\tau \in [t,T]$, tel que : $t \in [s,T]$, on note par $X_\tau(.)$ la solution de l'EDS

$$X_\tau(r) = X^*(t) + \int_\tau^r b(\theta, X_\tau(\theta), u^*(\theta))\, d\theta + \int_\tau^r \sigma(\theta, X_\tau(\theta), u^*(\theta))\, dW(\theta). \tag{4.54}$$

Posons : $\xi_\tau = X_\tau(r) - X^*(r)$ pour $r \in [\tau, T]$, et avec la probabilité $P(./F_\tau^s)$, il vient

$$E\left\{\sup_{\tau \leq r \leq T} |\xi_\tau(r)|^{2K} / F_\tau^s\right\} \leq K |X^*(\tau) - X^*(t)|^{2K}, \quad P.ps, \tag{4.55}$$

en prenant l'espérance $E[./F_t^s]$ on obtient, (on note que $F_t^s \subseteq F_\tau$)

$$E\left\{\sup_{\tau \leq r \leq T} |\xi_\tau(r)|^{2K} / F_t^s\right\} \leq K |\tau - t|^{K}, \quad P.ps. \tag{4.56}$$

Pour le processus $\xi_\tau(.)$, on introduit les équation variationnelles de premier, et de second ordre (en appliquant les formules de Taylor du premier et du seconde ordre), pour $r \in [\tau, T]$, on a

$$\begin{aligned} d\xi_\tau(r) &= b_x^*(r)\,\xi_\tau(r)\,dr + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^{j*}(r)\,\xi_\tau(r)\,dW^j(r) + \varepsilon_{\tau 1}(r)\,dr \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{z2}^{j}(r)\,dW^j(r), \\ \xi_\tau(\tau) &= -\int_t^\tau b^*(r)\,dr - \int_t^\tau \sigma^*(r)\,dW(r). \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} d\xi_\tau(r) &= \left\{b_x^*(r)\,\xi_\tau(r) + \frac{1}{2}\xi_\tau(r)^T\, b_{xx}^*(r)\,\xi_\tau(r)\right\} dr + \varepsilon_{\tau 3}(r)\,dr \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \left\{\sigma_x^{j*}(r) + \frac{1}{2}\xi_\tau(r)^T\, \sigma_{xx}^{j*}(r)\,\xi_\tau(r)\right\} dW^j(r) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{\tau 4}^{j}(r)\,dW^j(r), \\ \xi_\tau(\tau) &= -\int_t^\tau b^*(r)\,dr - \int_t^\tau \sigma^*(r)\,dW(r). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Nous montrons une estimation pour $\varepsilon_{\tau i}$, $i = 1, 3$, et $\varepsilon_{\tau i}^{j}$, $i = 2, 4$; et $j = 1, 2, ..., m$.

Il existe $K \geq 1$, et une fonction $\delta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ avec $\delta(r) \diagup r \underset{r \to 0}{\to} 0$, tel que :

$$\begin{aligned}
E\left\{\int_\tau^T |\varepsilon_{\tau 1}(r)|^{2K} / F_t^s\right\} &\leq \delta\left(|\tau-t|^K\right) \ P.ps, \\
E\left\{\int_\tau^T \left|\varepsilon_{\tau 2}^j(r)\right|^{2K} / F_t^s\right\} &\leq \delta\left(|\tau-t|^K\right) \ P.ps, \\
E\left\{\int_\tau^T |\varepsilon_{\tau 3}(r)|^{K} / F_t^s\right\} &\leq \delta\left(|\tau-t|^K\right) \ P.ps, \\
E\left\{\int_\tau^T \left|\varepsilon_{\tau 4}^j(r)\right|^{K} / F_t^s\right\} &\leq \delta\left(|\tau-t|^K\right) \ P.ps.
\end{aligned}$$

On note que :

$$\left(\Omega, F, P\left(./F_\tau^s\right), W(.) - W(\tau), \overline{u}(.)/_{[\tau,T]}\right) \in U^w[\tau, T], \quad P.ps. \tag{4.59}$$

Maintenant par définition de la fonction valeur, on a

$$V(\tau, X^*(t)) \leq E\left\{\int_\tau^T f(r, X_\tau(r), u^*(r))\, dr + g(X_\tau(T)) / F_t^s\right\}, \ P.ps, \tag{4.60}$$

pour tout rationnel $\tau > t$, on a

$$V(t, X^*(t)) = E\left\{\int_\tau^T f(r, X^*(r), u^*(r))\, dr + g(X^*(T)) / F_t^s\right\}, \tag{4.61}$$

et (4.56), (4.59), (4.60), sont vérifiées, avec

$$\left(\Omega, F, P\left(./F_\tau^s\right), W(.) - W(\tau); u^*(.)/_{[\tau,T]}\right) \in U^w[\tau, T], \ \forall \tau > t, \tag{4.62}$$

et $\sup\limits_{s\leq r\leq T}(|p(r)| + |P(r)|) < +\infty$, ($\tau$ rationnel).

On note $E\left(./F_s^t\right)$ par $E^t[.]$, donc pour $\tau > t$, on a

$$\begin{aligned}
& V(\tau, X^*(t)) - V(t, X^*(t)) \\
\leq\ & E^t\left\{-\int_t^\tau f^*(r)\, dr + \int_\tau^T \left[f(r, X_\tau(r), u^*(r)) - f^*(r)\right] dr\right\} \\
& + E^t\left\{g(X_\tau(T)) - g^*(T)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ & -E^t\int_t^\tau f^*(r)\, dr + E^t\int_\tau^T f_x^*(r).\xi_\tau(r)\, dr + E^t g_x^*(T).\xi_\tau(T) \\
& + \frac{1}{2}E^t\int_\tau^T tr\left(f_{xx}^*(r)\,\xi_\tau(r)\,\xi_\tau(r)^T\right) dr + \frac{1}{2}E^t tr\left(g_{xx}^*(T).\xi_\tau(T)\,\xi_\tau(T)^T\right) \\
& + \circ(|\tau - t|),
\end{aligned}$$

donc

$$V(\tau, X^*(t)) - V(t, X^*(t)) \leq -E^t \left\{ p(\tau) . \xi_\tau(\tau) + \frac{1}{2} \xi_\tau(\tau)^T P(\tau) \xi_\tau(\tau) \right\} - E^t \int_t^\tau f^*(r)\, dr + \circ(|\tau - t|) . \tag{4.63}$$

Pour le terme de droite de (4.63) on a l'estimation suivante, on note que pour $\varphi, \psi \in L_F^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, il vient

$$\begin{aligned} & E^t \left\{ \int_t^\tau \varphi(r)\, dr . \int_t^\tau \psi(r)\, dr \right\} \\ \leq & \left\{ E^t \left| \int_t^\tau \varphi(r)\, dr \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \left\{ E^t \left| \int_t^\tau \psi(r)\, dr \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = & (\tau - t) \left\{ \int_t^\tau E^t |\varphi(r)|^2\, dr \int_t^\tau E^t |\psi(r)|^2\, dr \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = & \circ(|\tau - t|), \quad \forall t \in [s, \tau), \quad P.ps, \end{aligned} \tag{4.64}$$

et

$$\begin{aligned} & E^t \left\{ \int_t^\tau \varphi(r)\, dr . \int_t^\tau \psi(r)\, dW(r) \right\} \\ \leq & \left\{ E \left| \int_t^\tau \varphi(r)\, dr \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \left\{ E \left| \int_t^\tau \psi(r)\, dW(r) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = & (\tau - t) \left\{ \int_t^\tau E^t |\varphi(r)|^2\, dr \int_t^\tau E^t |\psi(r)|^2\, dr \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = & \circ(|\tau - t|), \quad \forall t \in [s, T), \ P.ps. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Donc d'après (4.57), et (3.75)

$$\begin{aligned} & E^t (p(\tau) . \xi_\tau(\tau)) = E^t (p(t) . \xi_\tau(\tau) + (p(\tau) - p(t)) . \xi_\tau(\tau)), \\ = & E^t p(t) . \left(- \int_t^\tau b^*(r)\, dr - \int_t^\tau \sigma^*(r)\, dW(r) \right) \\ & - E^t \left(\int_t^\tau \left[b_x^*(r)^T P(r) + \sum_{j=1}^m \sigma_x^{j*}(r)^T q_j(r) - f_x^*(r)\, dr \right] - \int_t^\tau q(r) dW(r) \right) . \\ & \left(- \int_t^\tau b^*(r)\, dr - \int_t^\tau \sigma^*(r)\, dW(r) \right) . \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$E^t\xi_\tau(\tau)^T P(\tau)\xi_\tau(\tau) = E^t\int_t^\tau tr\left(\sigma^*(r)^T P(t)\sigma^*(r)\right)dr + \circ(|\tau - t|). \quad (4.66)$$

D'après $(4.63),(4.64),(4.66)$, il vient pour tout τ rationnel $\tau > t$

$$\begin{aligned} & V(\tau, X^*(t)) - V(t, X^*(t)) \\ \leq\ & E^t\left\{p(t).\int_t^\tau b^*(r)\,dr + \sum_{j=1}^m \int_t^\tau q_j(r).\sigma^{j*}(r)\,dr\right\} \\ & +E^t\left\{-\frac{1}{2}\int_t^\tau tr\left(\sigma^*(r)^T P(t)\sigma^*(r)\right)dr - \int_t^\tau f^*(r))\,dr\right\} \\ & +\circ(|\tau - t|), \\ =\ & (\tau - t)\,H(t, X^*(t), u^*(t)) + \circ(|\tau - t|), \end{aligned} \quad (4.67)$$

alors

$$H(t, X^*(t), u^*(t)) \in D_{t+}^{1,+}V(t, X^*(t)),$$

Theoreme 4.8. *Sous les conditions de théorème* (4.5), *on a* $\forall t \in [0, T]$,

$$[H(X^*(t), u^*(t)), \infty) \times \{-p(t)\} \times [-P(t), \infty) \subseteq D_{t+,x}^{1,2,+}V(t, X^*(t)),\ P.ps \quad (4.68)$$

$$D_{t+,x}^{1,2,-}V(t, X^*(t)) \subseteq (-\infty, H(X^*(t), u^*(t))] \times \{-p(t)\} \times (-\infty, -P(t)],\ P.ps \quad (4.69)$$

Remarque 4.9. *D'après le théorème* (4.2), *on a*

$$q(t) = -V_{xx}(t, X^*(t))\,\sigma^*(t). \quad (4.70)$$

Et d'après (4.51), *on a*

$$V_{xx}(t, X^*(t)) \leq P(t).$$

Nous allons établir maintenant une relation générale entre $q, P,$ *et* σ^*.

Proposition 4.10. *Sous les conditions de théorème* (4.5), *on a*

$$\forall t \in [s, T],\ tr\left(\sigma^*(t)^T\left(q(t) - P(t)\sigma^*(t)\right)\right) \geq 0,\ P.ps, \quad (4.71)$$

c'est à dire :

$$H(t, X^*(t), u^*(t)) \geq G(t, X^*(t), u^*(t), p(t), P(t)),\ P.ps.$$

Preuve. D'après (4.68), et le fait que V est solution de viscosité de l'équation d'$H.J.B$, on a

$$-H\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) + \sup_{u \in U} G\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p(t), P(t)\right) \leq 0,$$

alors

$$\begin{aligned} 0 &\geq -G\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p(t), P(t)\right) + \sup_{u \in U} G\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p(t), P(t)\right) \\ &\quad -tr\left[\sigma^*\left(t\right)^T\left(q\left(t\right) - P(t)\sigma^*\left(t\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Et comme

$$\sup_{u \in U} G\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p(t), P(t)\right) \geq G\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p(t), P(t)\right),$$

donc

$$tr\left[\sigma^*\left(t\right)^T\left(q\left(t\right) - P(t)\sigma^*\left(t\right)\right)\right] \geq 0.$$

Lemme 4.11. *Soit $g \in C\left([0, T]\right)$, tel que : $g\left(t\right) = g(T)$ pour $t \geq T$, $g\left(t\right) = g\left(0\right)$ pour $t \leq 0$. Supposons que $\exists \rho \in L^1\left(0, T\right)$, tel que :*

$$\overline{\lim_{h \to 0}}\left[g\left(t+h\right) - g(t)\right]\frac{1}{h} \leq \rho\left(t\right), \quad \forall t \in [0, T],$$

donc

$$\int_\alpha^\beta \overline{\lim_{h \to 0^+}}\left[g\left(r+h\right) - g(r)\right]\frac{1}{h}dr \geq \overline{\lim_{h \to 0^+}}\int_\alpha^\beta \left[g\left(r+h\right) - g(r)\right]\frac{1}{h}dr, \tag{4.72}$$

tel que : $0 \leq \alpha \leq \beta \leq T$.

Preuve. En utilisant le lemme de Fatou

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \overline{\lim_{h \to 0^+}}\left[g\left(r+h\right) - g(r)\right]\frac{1}{h}dr &\geq \overline{\lim_{h \to 0^+}}\int_\alpha^\beta \left[g\left(r+h\right) - g(r)\right]\frac{1}{h}dr \\ &= \overline{\lim_{h \to 0^+}}\left[\int_{\alpha+h}^{\beta+h} g\left(r\right)\frac{1}{h}dr - \int_\alpha^\beta g\left(r\right)\frac{1}{h}dr\right] \\ &= \overline{\lim_{h \to 0^+}}\left[\int_\beta^{\beta+h} g\left(r\right)\frac{1}{h}dr + \int_\alpha^{\alpha+h} g\left(r\right)\frac{1}{h}dr\right] \\ &= g\left(\beta\right) - g\left(\alpha\right), \end{aligned} \tag{4.73}$$

ce que preuve (4.72).

Nous terminons ce paragraphe en précisant une théorème de vérification dans le cas où V$\notin C^{1.2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$.

Théorème 4.12. *Supposons que les conditions (S6), (S7) ont lieu. Soit $V\in C\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, la solution de viscosité de l'équation d'H.J.B, donc*

$$V\left(s,y\right)\leq J\left(s,y;u(.)\right),\quad \left(s,y\right)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \tag{4.74}$$

et *de plus, soit $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, et $\left(X^*\left(.\right),u^*(.)\right)$ un couple admissible du problème $\left(S_{sy}\right)$ tel que :*

$$\exists\left(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}\right)\in L^2_\tau\left(s,T;\mathbb{R}\right)\times L^2_F\left(s,T;\mathbb{R}^n\right)\times L^2\left(s,T;S^n\right),$$

avec

$$\left(\overline{\alpha}(t),\overline{\beta}(t),\overline{\gamma}(t)\right)\in D^{1,2,+}_{t+,x}V\left(t,X^*(t)\right),\ \forall t\in[s,T]\ \ P.ps, \tag{4.75}$$

et

$$E\int_s^T\overline{\alpha}(t)dt\leq E\int_s^T G\left(t,X^*\left(t\right),u^*\left(t\right),-\overline{p}(t),-\overline{P}(t)\right)dt, \tag{4.76}$$

donc $\left(X^*\left(.\right),u^*\left(.\right)\right)$ est optimal.

Preuve. $(4,74)$ est vérifie, (utilisant le fait que la solution de viscosité de l'équation d'$H.J.B$ est unique).

Maintenant pour $V(.,.)\in C\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, il existe $\varphi\left(.,.\right)\in C^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$, tel que : $\varphi\left(t,x\right)\equiv\varphi\left(t,x,\alpha,\beta,\gamma\right)$, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S^n$, et $(\alpha,\beta,\gamma)\in D^{1,2,+}_{t+,x}V(t,x)$, avec

$$\left(\varphi_t\left(t,x\right),\varphi_x\left(t,x\right),\varphi_{xx}\left(t,x\right)\right)=\left(\alpha,\beta,\gamma\right), \tag{4.77}$$

tel que : $V-\varphi$ admet un maximum en $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$. Soit

$$\phi\left(r,z\right)\equiv\varphi\left(r,z,t,X^*(t),\overline{\alpha}\left(t\right),\overline{\beta}(t),\overline{\gamma}(t)\right),$$

où $\left(\overline{\alpha}\left(t\right),\overline{\beta}(t),\overline{\gamma}(t)\right)$ satisfaisant à (4.76), et (4.77) dans l'espace probabilisé $\left(\Omega,F,P\left(./F^s_t\right)\right)$. En appliquant la formule d'Itô à $\phi\left(r,\overline{x}\left(r\right)\right)$, il vient

$$\begin{aligned}
&E^t\left\{V\left(t+h,X^*\left(t+h\right)\right)-V(t,X^*\left(t\right))\right\}\\
\leq\ &E^t\left\{\phi\left(t+h,X^*\left(t+h\right)\right)-\phi(t,X^*\left(t\right))\right\}\\
=\ &E^t\left\{\int_t^{t+h}\left[\phi_t\left(r,X^*\right)+\phi_x\left(r,X^*\right).b^*\left(r\right)\right]dr\right\}\\
&+E^t\left\{\frac{1}{2}tr\left(\sigma^*\left(r\right)^T\phi_{xx}\left(r,X^*(r)\right)\sigma\left(r\right)^*\right)\right\},\quad P.ps,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
& E\left\{V\left(t+h, X^*\left(t+h\right)\right)-V\left(t, X^*\left(t\right)\right)\right\} \\
\leq\ & hE\{\phi_t\left(t, X^*(t)\right)+\phi_x\left(t, X^*(t)\right).b^*\left(t\right) \\
& +\frac{1}{2} tr\left(\sigma^*\left(t\right)^T \phi_{xx}\left(t, X^*(t)\right) \sigma^*\left(t\right)\right)\}+\circ\left(h\right) \\
=\ & hE\{\overline{\alpha}\left(t\right)+\overline{\beta}\left(t\right).b\left(t, X^*(t), u^*(t)\right) \qquad (4.78)\\
& +\frac{1}{2} tr\left[\sigma^*\left(t\right)^T \overline{\gamma}(t) \sigma^*\left(t\right)\right]\}+\circ\left(h\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \overline{\lim_{h \rightarrow 0^+}} \frac{1}{h}\left[EV\left(t+h, X^*\left(t+h\right)\right)-EV\left(t, X^*\left(t\right)\right)\right] \\
\leq\ & E[\overline{\alpha}\left(t\right)+\overline{\beta}\left(t\right).b^*\left(t\right)+\frac{1}{2}\{tr\sigma^*\left(t\right)^T \overline{\gamma}(t) \sigma^*\left(t\right)\}], \qquad (4.79)
\end{aligned}$$

Utilisant le lemme (4.11), il vient avec $g(t)=EV\left(t, X^*\left(t\right)\right)$

$$\begin{aligned}
& EV\left(T, X^*(T)\right)-V(s, y) \\
\leq\ & E\int_s^T\{\overline{\alpha}\left(t\right)+\overline{\beta}\left(t\right).b^*\left(t\right)+\frac{1}{2} tr\left[\sigma^*\left(t\right)^T \overline{\gamma}(t) \sigma^*\left(t\right)\right]\} \\
\leq\ & -E\int_s^T f\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) dt, \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

donc

$$V(s, y) \geq J(s, y, u^*(.)).$$

Alors (4.74) équivant à : $V(s, y)=J(s, y, u^*(.))$, c'est à dire : $\left(u^*\left(.\right), X^*\left(.\right)\right)$ est optimal.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux problème de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques du type Itô. En particulier, l'accent a été mis sur les deux approches les plus connues dans la littérature sur le contrôle : le principe du maximum stochastique ainsi que sur la programmation dynamique. Nous avons présenté en détails l'approche de Haussmann pour le principe du maximum pour des systèmes avec contraintes. Celle ci est basée essentiellement sur le théorème de Guirsanov et le théorème de représentation des martingales. Nous avons aussi présenté l'approche de Peng pour les systèmes où le coefficient de diffusion dépend explicitement de la variable de contrôle. La deuxième approche à laquelle nous nous sommes intéressé est celle de la programmation dynamique qui nous amène à étudier une équation parabolique fortement non linéaire vérifiée par la fonction de valeurs. La notion de solution de viscosité y joue un rôle crucial. Enfin nous nous sommes intéressés au lien qui existe entre les deuc approches. Il a été montré en particulier que le processus adjoint est intimement lié à la dérivée de la fonction de valeurs.

Il serait intéressant de voir ce qui se passe quand il s'agit de diffusions avec sauts. C'est ce que nous envisageons de faire dans un proche avenir.

Bibliographie

[1] V.I. Arkin, M.T. Saksonov (1979), *Necessary optimality conditions for stochastic differential équations*, Soviet. Math. Dokl. 20, pp 1-5.

[2] K. Bahlali, B. Mezerdi, Y. Ouknine (1996), *Maximum principle in optimal control of a diffusion with non smooth coefficients,* Stochastics & Stoch. Reports, Vol. 57, 303-316.

[3] S. Bahlali (2002), *Thèse de Doctorat,* Université de Batna.

[4] A. Bensoussan (1982), *Non linear filtering and stochastic control.* Proc. Cortona 1981, Lect. notes in Math. 972, Springer Verlag.

[5] N. Bouleau (1988), *Processus stochastiques et applications.* Ed. Hermann.

[6] M. Crandall, H. Ishii, P.L Lions (1992), "*User's Guide to Viscosité solutions of second order partial differential equations*" Bull. Amer. Math, Soc. 27, 1-67.

[7] W.H Fleming, R.W Rishel (1975), *Deterministic and stochastic control.* Springer Verlag.

[8] W.H Fleming, H.M Soner (1993), *Viscosity solutions and control of Markov processes.* Springer Verlag.

[9] I. Gikhman, A.V Skorokhod (1974), *Stochastic differential equations*, Springer Verlag.

[10] U.G Haussmann (1976), *General necessary conditions for optimal control of stochastic systems*, Math. Programming Studies 6, pp 30-48.

[11] U.G Haussmann (1982), *Extremal and optimal controls.* Proc. Cocoyoc, Lect.Notes Cont. Inf. Sc.,61 ,Springer Verlag.

[12] U.G Haussmann (1982), *Optimal control of partially observed diffusions via the separation principle*, in Lect. Notes in Cont. Inf. Sc., 43, 302-311 Springer Verlag.

[13] U.G Haussmann (1983), *Some examples of optimal stochastic control or : The stochastic maximum principle at work.* SIAM Review, Vol. 23, N°3.

[14] U.G Haussmann (1986), *A Stochastic maximum principle for optimal control of diffusions.* Pitman Research Notes in Math. Series 151.

[15] N. Ikeda, S. Watanabe (1989), *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Kodansha North Holland, 2nd Edition.

[16] I. Karatzas, S. Shreve (1989), *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer Verlag.

[17] H.J. Kushner (1973), *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimisation problèms,* SIAM J. Control Optim., Vol. 10, pp 550-565.

[18] B. Mezerdi (1988), *Necessary conditions for optimality for a diffusion with a non smooth drift,* Stochastics, Vol. 24, 305-326.

[19] B. Mezerdi, S. Bahlali (2000), *Approximation in optimal control of diffusion processes.* Rand. Operat. and Stoch. Equ. Vol.8, No 4, pp 365-372.

[20] B. Mezerdi, S. Bahlali (2002), *Necessary conditions for optimality in relaxed stochastic control problems,* Stochastics and Stoch. Rep. Vol. 73.

[21] B. ∅ksendal (1998), *Stochastic differential equations : an introduction with applications,* 5th Edition, Springer verlag.

[22] S. Peng (1990), *A general stochastic maximum principle for optimal control problems.* SIAM Jour.Cont. Optim.28, N° 4, pp 966-979.

[23] L.S Pontriagin, V.G Boltyanskii, R.V Gamkrelidze (1962), *The mathematical theory of optimal processes.* Interscience N.Y.

[24] J. Yong, X.Y Zhou (1999), *Stochastic controls : Hamiltonian systems and H.J.B equations,* Springer Verlag.