

Sur l'estimation de la Prime de la
Réassurance pour les Risques Extrêmes

FATIMA MEDDI

25 mai 2006

Table des matières

0.1	Introduction	6
0.2	Notations	8
1	Théorie des Valeurs Extrêmes	10
1.1	Rappels et définitions	10
1.1.1	Statistique d'ordre	10
1.1.2	Distribution empirique	11
1.1.3	Distribution à variations régulières	12
1.1.4	Distribution heavy-tailed	13
1.2	Le modèle EVD	14
1.2.1	Distribution des valeurs extrêmes	14
1.2.2	Caractérisation des domaines d'attraction	16
1.2.3	Estimateur de Hill	17
1.3	Le modèle GEV	19
1.3.1	Distribution des valeurs extrêmes généralisée	19
1.3.2	Estimation des paramètres de la $GEV(\mu, \sigma, \gamma)$	22
1.4	Le modèle POT	24
1.4.1	Distribution de Pareto généralisée	24
1.4.2	Loi des excès	25
1.4.3	Théorème de Pickands [39]	25
1.4.4	Stabilité du seuil	26
1.4.5	Choix du seuil	26
1.4.6	Estimation des paramètres de la $GPD(\mu, \sigma, \gamma)$	28
1.5	Estimation des quantiles extrêmes	29
1.5.1	Approche EVD	30
1.5.2	Approche POT	30
1.5.3	Approche des quantiles	31
2	Généralités sur la Théorie de Risque	33
2.1	Introduction	33
2.2	Processus du nombre de revendications	35
2.2.1	Processus de renouvellement	35

2.2.2	Processus de Poisson homogène	36
2.2.3	Processus de Poisson mélangé	36
2.3	Montant global de revendications	37
2.3.1	Le modèle individuel	38
2.3.2	Le modèle collectif	39
2.4	La prime	39
2.4.1	Principe de calcul de prime	40
2.4.2	Propriétés de bonnes primes	40
2.4.3	Quelques principes de base	41
2.5	Processus de la réserve de risque	42
2.5.1	Probabilité de ruine	43
2.5.2	Conclusion	44
3	Assurance et Réassurance	45
3.1	Introduction	45
3.2	Généralités sur l'assurance	46
3.2.1	Principe de l'assurance	46
3.2.2	Types de l'assurance	47
3.2.3	Pourquoi la nécessité de la réassurance?	47
3.3	La réassurance	48
3.3.1	Les fonctions d'un réassureur	49
3.3.2	Principe du contrat d'un réassureur	50
3.3.3	Techniques de la réassurance	51
3.3.4	La réassurance financière	55
3.3.5	Conclusion	55
3.4	Un mot sur l'actuariat	56
4	Estimation de la Prime de Risque-Ajustée	57
4.1	Introduction	57
4.1.1	Principe de la prime de Wang	58
4.2	Approche de distribution empirique	59
4.2.1	Construction de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^1$	59
4.2.2	Normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^1$	61
4.3	Approche des excès (<i>POT</i>)	65
4.3.1	Construction de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^2$	65
4.3.2	Normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^2$	67
4.4	Approche des quantiles extrêmes	72
4.4.1	Construction de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^3$	72
4.4.2	Normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^3$	73
4.5	Simulation des résultats	78

4.5.1	Génération d'une loi connue	78
4.5.2	Simulation pour $\hat{\Pi}_{u_n}^1$	80
4.5.3	Simulation pour $\hat{\Pi}_{u_n}^2$	88
4.5.4	Simulation pour $\hat{\Pi}_{u_n}^3$	91
4.5.5	Comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$	99
4.6	Conclusion	104

Table des figures

1.1	Densité de Φ_γ, Ψ_γ et Λ	14
1.2	Estimateur de Hill	18
1.3	Densité de la distribution $h(0, 1, \gamma = \xi)$	20
1.4	Densité de la distribution $h(0, 1, \gamma = \xi)$	21
1.5	Densité de la distribution $h(0, 2, \gamma = \xi)$	21
1.6	Graphe de densité, <i>Pareto</i> , <i>Béta</i> et <i>Exponentielle</i>	24
1.7	Graphe des fonction moyennes des dépassements théoriques	27
3.1	Traité de quote-part	52
3.2	Traité de surplus	53
3.3	Traité de l'excédent de sinistres	54
4.1	Résultat pour Pareto $\gamma = 0.6$	81
4.2	Résultats pour Pareto $\gamma = 0.9$	82
4.3	Résultat pour Fréchet $\gamma = 0.7$	83
4.4	Résultat pour Fréchet $\gamma = 1$	84
4.5	Résultat pour GEV $\gamma = 0.8$	85
4.6	Résultat pour GEV $\gamma = 1.4$	86
4.7	Données simulées du $GPD(0.25, 1e + 005)$	89
4.8	La prime estimée avec intervalles de confiance, $N = 15$	89
4.9	Évolution de la différence	90
4.10	CDF empirique de la différence	90
4.11	Résultats pour Pareto $\gamma = 0.7$	92
4.12	Résultats pour Pareto $\gamma = 1$	93
4.13	Résultats pour Fréchet $\gamma = 0.8$	94
4.14	Résultats pour Fréchet $\gamma = 1.2$	95
4.15	Résultats pour GEV $\gamma = 0.9$	96
4.16	Résultats pour GEV $\gamma = 1.5$	97
4.17	Comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$ pour $\gamma = 0.6, \dots$	100
4.18	Comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$ pour $\gamma = 1.2, \dots$	101
4.19	Comparaison entre $\hat{\Pi}_{u_n}^1$ et $\hat{\Pi}_{u_n}^3$	102

Liste des tableaux

1.1	Exemples de distributions Heavy-Tailed.	13
1.2	Exemples de fonctions moyenne des dépassement	27
3.1	Coûts financiers à l'industrie d'assurance des dix pertes d'assurance les plus chères dans moins de dix ans - de 1987 à 1995	48
3.2	Classement des 15 plus importants groupes de réassurance 2000	49
4.1	Algorithme de simulation pour $\hat{\Pi}_{u_n}^1$	80
4.2	Algorithme de simulation pour $\hat{\Pi}_{u_n}^2$	88
4.3	Algorithme de simulation pour $\hat{\Pi}_{u_n}^3$	91
4.4	Algorithme de comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$	99
4.5	Récapitulation des estimateurs de la <i>prime de risque-ajustée</i> .	104

0.1 Introduction

Dans tous les cas, le risque s'analyse comme le croisement entre un aléa et une vulnérabilité. La causalité d'un évènement réside dans l'aléa, qui est dû, soit au déclenchement d'un phénomène naturel d'une exceptionnelle intensité (séisme, cyclone, tempête, précipitations diluviennes ou sécheresse....), soit à un important dysfonctionnement affectant un système technique et pour lequel un défaut de vigilance humaine n'est jamais à exclure [26]. A titre d'illustration, les marchés financiers ont connu de nombreux Krachs, comme celui de 1929, annonciateur de la grande crise, et celui du «lundi noir» d'octobre 1987. En 1992 le sud-est des Etats-Unis fait désastre par l'ouragan Andrew, un cyclone tropical d'une intensité maximale. Pour le secteur de l'assurance, cet événement qui a engendré quelque 20 milliards de dollars de dommages a été la catastrophe naturelle la plus chère de tout les temps. L'année 2004 restera marquée par le séisme et le tsunami du 26 décembre en Asie du Sud. Provoqué par un séisme marin de 9 sur l'échelle de Richter sur huit pays d'Asie. Le bilan provisoire fait état d'au moins 217000 morts ou disparus. Munich Re estime ainsi que l'année 2004 était, dès avant le 26 décembre, la plus coûteuse de l'histoire de l'assurance en matière de catastrophes naturelles, avec des pertes de 40 milliards de dollars. Plus récemment en Août 2005 l'ouragan Katrina, qui a dévasté les régions américaines qui bordent le golfe du Mexique, pourrait coûter aussi cher qu'Andrew en 1992 et pourrait se révéler l'un des plus coûteux de l'histoire des États-Unis. Le leader mondial de la réassurance, Munich Re, évalue le coût du sinistre entre 15 et 20 milliards de dollars. Ces exemples illustrent l'importance cruciale pour les assureurs et les réassureurs d'une évaluation correcte du potentiel de sinistre inhérent à des catastrophes certes rares, mais tout à fait envisageables notamment la nécessité de se doter d'une théorie de gestion du risque pour les événements extrêmes.

Les mathématiciens ont mis au point un outil pour mesurer la probabilité de réalisation d'évènement dû au hasard. Il s'agit de la théorie des probabilités. Les données qui relient cette théorie aux événements de tous les jours sont issues des statistiques. Ces deux branches des mathématiques, qui constituent la stochastique, ont produit des outils puissants qui sont non seulement employés dans de nombreux domaines scientifiques, mais également dans l'assurance et la finance.

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) [7], [21], [29] est l'un de ces outils issus de la stochastique, débute dans les années 28 par les travaux de Fisher et Tippett, elle est la base des mathématiques souhaitant se diriger pour l'assurance (en particulier pour la réassurance) [8], elle introduit les outils et les concepts utiles pour la modélisation des événements rares et l'estimation des

quantiles extrêmes. Ces problématiques concernent de nombreux domaines comme l'environnement (par exemple pour la prévision de pics de pollution), la climatologie (en particulier l'étude de l'évolution du climat), l'industrie (notamment en fiabilité des structures) ou l'analyse financière (par exemple pour la prévision de Krachs boursiers ou de crises monétaires).

D'autre part, la modélisation des événements extrêmes par des distributions de type Pareto et d'autres distributions à queues lourdes attirent plus d'attention. Le nombre de publications dans ce secteur grandit systématiquement ; voir par exemple la liste de références pour quelques livres récents et papiers avec l'accent spécial sur des applications actuarielles [18], [37], [2]. Plusieurs méthodes importantes dans le secteur étaient sous l'influence du papier de Benktander et Segerdahl *on the analytical representation of claim distributions with special reference to excess-of-loss distributions* (le Congrès XVIth International d'Actuaires, Bruxelles, 1960).

L'industrie de la réassurance est probablement une des plus concernées par la Théorie des Valeurs Extrêmes. Ceci est dû principalement au fait que les traités sur le marché se font de plus en plus sur une base non proportionnelle. La volatilité des résultats associés est importante et la méthodologie d'évaluation concernant la prime pure et les densités de probabilités doit être la plus adéquate possible, ce qui consiste le but de ce mémoire [28], [31], [32] qui s'articule autour du plan du travail suivant :

Chapitre 1 "Théorie des Valeurs Extrêmes" : dans ce chapitre nous présentons tout d'abord quelques rappels et définitions essentiels, ensuite nous décrivons les modèles existants dans cette théorie, et une de ces applications concernant quelques méthodes classiques sur l'estimation des quantiles extrêmes.

Chapitre 2 "Généralités sur la Théorie de Risque" : Ce chapitre définit les composants d'un portefeuille d'assurance en fonction du temps ceux qui sont de nature stochastique ainsi de nature déterministe dans le cas discret.

Chapitre 3 "Assurance et Réassurance" : Nous donnons dans ce chapitre quelques généralités sur le domaine de l'assurance et la réassurance or les traités conçus dans ce domaine afin de prouver qu'elle sera l'importance d'évoluer des outils appropriés pour faire face aux risques bien rares et extrêmes en exploitant la TVE.

Chapitre 4 "Estimation de la Prime de Risque-Ajustée" : C'est le chapitre beurre des trois premiers chapitres. En se basant sur des distributions Heavy-Tailed pour répondre à des revendications extrêmes de la réassurance, on présente en détails trois estimateurs d'une prime nette adéquate dite "*Prime de Risque-Ajustée*", au-delà d'un seuil élevé ainsi, leur étude asymptotique et quelques simples simulations pour illustrer des intervalles de confiance et quelques comparaisons significatives.

0.2 Notations

EVT	extreme value theory
F	fonction de répartition
Q	fonction inverse généralisée de F
F_n	fonction de répartition empirique
Q_n	fonction des quantiles empiriques
G_n	fonction de répartition empirique uniforme
V_n	fonction des quantiles empiriques uniformes
α_n	processus empirique uniforme
β_n	processus empirique des quantiles uniformes
L	fonctions à variations lentes
$EV D$	extreme value distribution
H_γ	distribution de valeur extrême
$D(H_\gamma)$	domaine d'attraction de H_γ
γ	indice de valeur extrême
x_F	le point terminal de F
Φ_γ	distribution de Fréchet
$D(\Phi_\gamma)$	domaine d'attraction de Fréchet
Ψ_γ	distribution de Weibull
$D(\Psi_\gamma)$	domaine d'attraction de Weibull
Λ	distribution de Gumbel
$D(\Lambda)$	domaine d'attraction de Gumbel
$\hat{\gamma}_{n,k}^H$	estimateur de Hill
iid	indépendantes et identiquement distribuées
u	seuil
k_n	nombre de statistiques d'ordres extrêmes
GEV	generalized extreme value
$H_{\mu,\sigma,\gamma}$	distribution des valeurs extrêmes généralisée
ML	maximum likelihood
PWM	probability weighted moments
POT	Peaks-Over-Threshold
GPD	generalized Pareto distribution
$G_{\mu,\sigma,\gamma}$	distribution de Pareto généralisée
F_u	fonction de répartition des excès
e	fonction moyenne de dépassement
e_n	fonction moyenne empirique
N_u	nombre des excédents
ω_r	moment pondéré généralisé
x_p	quantiles extrêmes
σ_n	époques d'arrivées de revendications

T_n	temps inter-arrivée de revendications
$N(t)$	processus de nombre de revendications
U_i	processus de taille de revendications
σ^2	variance
$X(t)$	montant global de revendications survenues dans un temps t
$\Pi(t)$	primes revenues dans le temps courant de 0 à t
$R(t)$	processus de la réserve de risque dans un temps t
$p_k(t)$	fonction de probabilité du processus du comptage $N(t)$
$I(t)$	l'indice de dispersion
$F_{X(t)}$	fonction de distribution du montant global de revendications
u	capital initial
$\Psi(u)$	probabilité de ruine
<i>SCOR</i>	société de Réassurance Française
$h(X)$	fonction de rétention ou déductible
$k(X)$	fonction de compensation (ou rémunération)
$m_X(t)$	fonction de taux d'hasard
W_n	mouvement Brownien
B_n	pont Brownien
$S_X(s)$	fonction de survie
$p \geq 1$	coefficient de distorsion
<i>RAP</i>	Risk-Adjusted-Premium
\xrightarrow{D}	convergence en distribution
\xrightarrow{p}	convergence en probabilité
$\stackrel{D}{=}$	égalité en distribution
E	espérance
$N(0,1)$	loi normale d'espérance 0 et de variance 1
$N(0,\sigma^2)$	loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2
<i>s.o</i>	statistique d'ordre

Chapitre 1

Théorie des Valeurs Extrêmes

La *théorie des valeurs extrêmes* notée *TVE* "*extreme value theory*" a été développée pour l'estimation de probabilités d'occurrences d'évènements rares. Elle permet d'extrapoler le comportement de la queue de distribution des données à partir des plus grandes données observées voir par exemple (Galambos, chapitre 1 et 2, [21] ; Gumbel, 1958). Durant ces quelques dernières années plusieurs auteurs (Embrechts et Klüppelberg 1993, Mc Neil, 1996, Embrechts et al, 1997, chapitre 3, [18]) ont noté que la théorie des valeurs extrêmes est appropriée au modélisation des coûts extrêmes de l'assurance. On fait ici une brève introduction sur l'étude du comportement asymptotique du maximum F_n d'un échantillon quand il est dégénéré ainsi que sur les modèles existants dans la théorie des valeurs extrêmes après avoir présenté quelques rappels et définitions importants.

1.1 Rappels et définitions

1.1.1 Statistique d'ordre

On considère ici une suite de n observations $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et identiquement distribuées. Les statistiques d'ordre représentent ces variables aléatoires "ordonnées" : i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, on peut ranger par ordre croissant les réalisations des X_i , i.e. $x_1^{(\omega)} \leq x_2^{(\omega)} \leq \dots \leq x_n^{(\omega)}$.

Définition 1.1 : *On appelle statistiques d'ordre les variables aléatoires $(X_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ ordonnées, telles que pour tout entiers i , $X_{i,n}(\omega) = x_i^{(\omega)}$. On a donc, $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$, et $X_{i,n}$ est la $i^{\text{ième}}$ statistique d'ordre.*

Dans un échantillon de taille n deux statistiques d'ordre sont particulièrement intéressantes pour l'étude des événements extrêmes ce sont : $X_{1,n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{n,n} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Loi de $X_{i,n}$

$$F_{i,n} = P\{X_{i,n} < x\} = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} (F(x))^r (1 - F(x))^{n-r}.$$

Nous en déduisons que la fonction de densité est :

$$f_{i,n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x),$$

où $f(x)$ est la densité de probabilité de X_i et F sa fonction de répartition associée. En utilisant la propriété d'indépendance des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , on obtient :

Loi de $X_{1,n}$

$$F_{1,n}(x) = P\{X_{1,n} \leq x\} = 1 - (1 - F(x))^n, \text{ d'où } f_{1,n}(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$$

Loi de $X_{n,n}$

$$F_{n,n}(x) = P(X_{n,n} \leq x) = (F(x))^n, \text{ d'où } f_{n,n} = n f(x) (F(x))^{n-1}. \quad (1.1)$$

Remarque 1 : $P(X_{n,n} \leq x) = (F(x))^n \rightarrow 0$ ou 1 quand $n \rightarrow \infty$.

1.1.2 Distribution empirique

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon issu d'une fonction de répartition commune F telle que, $F(x) = P(X_i < x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, et on note Q la fonction inverse généralisée de F telle que, $Q(t) = F^{-1}(t) = \inf\{s, F(s) \geq t\}$, $0 < t < 1$, on a :

La fonction de répartition empirique : notée F_n et donnée par :

$$F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, x[}(X_i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il existe une autre version de la définition de F_n en utilisant les (s.o) comme suit :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si, } x \leq X_{1,n} \\ \frac{i-1}{n} & \text{si, } X_{i-1,n} < x \leq X_{i,n}, 2 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si, } x > X_{n,n} \end{cases}. \quad (1.2)$$

La fonction des quantiles empiriques : notée Q_n et donnée par :

$$Q_n(t) = F_n^{-1}(t) = \sup\{s : F_n(s) > t\}, \quad 0 \leq t < 1.$$

De même on obtient une autre version de Q_n en utilisant les $(s.o)$ comme suit :

$$Q_n(t) = \begin{cases} X_{i,n} & \text{si, } (i-1)/n < t \leq i/n, \\ X_{n,n} & \text{si, } (1-1)/n < t \leq n/n \end{cases} . \quad (1.3)$$

Soit ξ_1, ξ_2, \dots une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$, pour chaque entiers $n \geq 1$, on a,

La fonction de répartition empirique uniforme : notée G_n et donnée par :

$$G_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{\xi_i \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La fonction des quantiles empiriques uniformes : notée V_n et donnée par :

$$V_n(t) = \inf \{s \geq 0 : G_n(s) \geq t\}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Le processus empirique uniforme : noté α_n et donné par :

$$\alpha_n(t) = n^{1/2} (G_n(t) - t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.4)$$

Le processus empirique des quantiles uniformes : noté β_n et donné par :

$$\beta_n(t) = n^{1/2} (V_n(t) - t), \quad 0 < t \leq 1. \quad (1.5)$$

1.1.3 Distribution à variations régulières

Définition 1.2. *On dit qu'une fonction F est à variations régulières d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ (à l'infini) si F est positive à l'infini (i.e. s'il existe A tel que pour tout $x \geq A$, $F(x) > 0$) et si pour tout $t > 0$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(x)} = t^\rho. \quad (1.6)$$

Dans le cas particulier où, $\rho = 0$ on dit que F est une fonction à **variations lentes** (à l'infini). Dans la suite, les fonctions à variations lentes sont notées l (et parfois L). En remarquant que si F est à variations régulières d'indice ρ alors $F(x)/x^\rho$ est à variations lentes, il est facile de montrer qu'une fonction à variations régulières d'indice ρ peut toujours s'écrire sous la forme $x^\rho l(x)$. Comme exemple de fonctions à variations lentes, citons la fonction constante, les fonctions $\ln(1+x)$, $\ln[1+1/\ln(1+x)]$, etc...

1.1.4 Distribution heavy-tailed

Dans ce mémoire nous considérons seulement des variables aléatoires positives.

1. On dit que F sur R_+ est heavy-tailed si¹, $\widehat{m}_F(s) = \infty$, $s > 0$.
2. F est dite light-tailed si et seulement si pour tout $a, b > 0$, $\overline{F}(x) \leq a \exp^{-bx}$, $x \geq 0$.
3. Pour cela on arrive immédiatement que, si F est heavy-tailed alors, $\limsup_{x \rightarrow \infty} \exp^{sx} \overline{F}(x) = \infty$, pour tout $s > 0$.

Théorème 1.1 [37, Théorème 2.5.2] : *toutes distributions Subexponentielles² est heavy-Tailed.*

Théorème 1.2 [37, Théorème 2.5.5] : *si F est de type Pareto, alors F est une distribution Subexponentielle.*

Remarque 2 : Nous concluons d'après le théorème 1.1 et 1.2 que toutes distributions de type Pareto est heavy-tailed.

Les distributions lognormal, Pareto et Weibull sont des exemples importants de distributions heavy-tailed, dont le paramètre de forme est plus petit que 1. Les actuaires croient que les distributions Lognormal sont des modèles plausibles pour l'assurance automobile, tandis qu'ils estiment que les distributions Pareto sont aptes pour modéliser des données de revendications de feu. Nous présentons ci-après quelques exemples de distributions heavy-tailed.[18]

Non	Queue \overline{F} , ou densité f	Paramètres
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{(2\sigma^2)}\right\}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Pareto	$\overline{F}(x) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa+x}\right)^\alpha$	$\alpha, \varkappa > 0$
Weibull	$\overline{F}(x) = \exp(-cx^\tau)$	$c > 0, 0 < \tau < 1$
loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$
Burr	$\overline{F}(x) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa+x^\tau}\right)^\alpha$	$\alpha, \varkappa, \tau > 0$

TAB. 1.1 – Exemples de distributions Heavy-Tailed.

¹Soit $I = \{s \in \mathbb{R} : Ee^{sX} < \infty\}$. la fonction du moment généré $\widehat{m} : I \rightarrow \mathbb{R}$ de X est défini par $\widehat{m}(s) = Ee^{sX}$.

² F sur \mathbb{R}_+ est dite Subexponentielle si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-F^{*2}(x)}{1-F(x)} = 2$

1.2 Le modèle EVD

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F . Comme avant, on note $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ l'échantillon ordonné correspondant. Le résultat principal de la théorie des valeurs extrêmes est le suivant :

1.2.1 Distribution des valeurs extrêmes

Théorème 1.3 [Gnedenko [22]] :

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction de répartition F , il existe un réel γ et deux suites a_n et $b_n > 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p \left[\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x \right] = H_\gamma(x), \quad (1.7)$$

avec,

$$\begin{aligned} \text{type Fréchet : } \text{ si } \gamma > 0, \quad H_\gamma(x) = \Phi_\gamma(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \exp \left[-(x)^{-1/\gamma} \right] & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \\ \text{type Weibull : } \text{ si } \gamma < 0, \quad H_\gamma(x) = \Psi_\gamma(x) &= \begin{cases} \exp \left[-(-x)^{-1/\gamma} \right] & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \\ \text{type Gumbel : } \text{ si } \gamma = 0, \quad H_0(x) = \Lambda(x) &= \exp \left[-\exp(-x) \right], \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

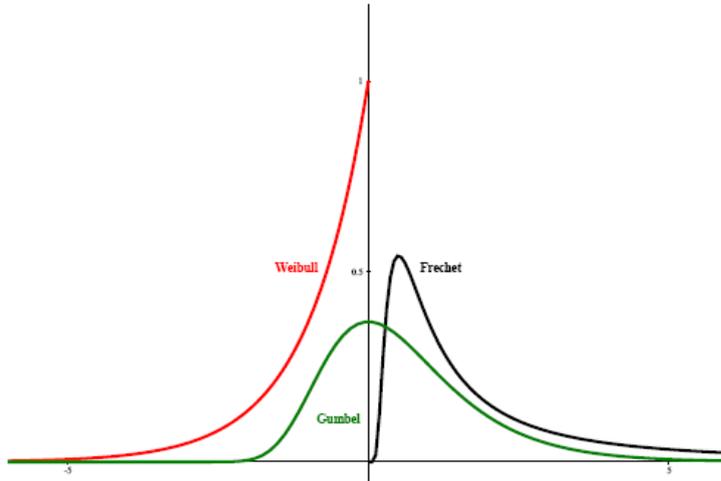


FIG. 1.1 – Densité de Φ_γ , Ψ_γ et Λ

Ce théorème présente un intérêt important, car si l'ensemble des distributions est grand, l'ensemble des distributions des valeurs extrêmes est lui très petit. Ce théorème n'est valable que si les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ existent et admettent une limite.

Remarque 3 :

1-*Le théorème 1.3 est vrai pour la majorité des lois usuelles. Pour plus de précision sur les conditions de régularité sur la fonction de répartition F nécessaires pour avoir le théorème 1.3, voir par exemple Castillo [7, p.108] et Galambos [21, p.54]*

2-*La fonction de répartition H_γ est appelée loi des valeurs extrêmes. (que l'on note (EVD) "extreme value distribution"). Le paramètre γ est appelée indice de valeur extrême.*

3-*Si F vérifie le théorème 1.3, on dit alors que F appartient au domaine d'attraction de H_γ et on note $F \in D(H_\gamma)$. Selon le signe de γ , on distingue trois domaines d'attraction : $\gamma > 0 \Rightarrow F \in D(\Phi_\gamma)$, $\gamma < 0 \Rightarrow F \in D(\Psi_\gamma)$, $\gamma = 0 \Rightarrow F \in D(\Lambda)$.*

4-*Les suites de normalisation a_n et $b_n > 0$ ne sont pas uniques.*

Khintchine (voir [13]) a prouvé que par un choix concédérable des suites (a_n) et (b_n) on peut réécrire les fonctions de (1.7) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{loi de Gumbel} \quad H_0(x) &= \exp(-e^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \\ \text{loi de Fréchet et Weibull} \quad H_\gamma(x) &= \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)) & 1+\gamma x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \gamma \neq 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Propriétés

1. $H_\gamma = H_0$ quand $\gamma \rightarrow 0$ (par valeurs positives ou négatives.)
2. pour $\gamma > 0$, H_γ est la loi de fréchet, tandis que pour $\gamma < 0$ elle est Weibull.
3. Les densités correspondantes sont données par :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \exp(-e^{-x}) \exp(-x) \\ h_\gamma(x) &= \begin{cases} H_\gamma(x) (1+\gamma x)^{-(1+1/\gamma)} & 1+\gamma x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \gamma \neq 0 \end{aligned}$$

4. $h_\gamma = h_0$ quand $\gamma \rightarrow 0$.

1.2.2 Caractérisation des domaines d'attraction

Nous allons donner des conditions sur la fonction de répartition F pour qu'elle appartienne à l'un des trois domaines d'attraction. Dans la suite, on note $x_F = \sup \{x/F(x) < 1\}$ le *point terminal* de F et F^\leftarrow l'*inverse généralisée* de F (avec la convention $\inf \{\emptyset\} = \infty$).

Domaine d'attraction de Fréchet :

Si $\gamma > 0$, on dit que $F \in D(\Phi_\gamma)$. Ce domaine d'attraction contient les fonctions de répartition à queues lourdes (décroissance polynomiale), par exemple *la loi de Cauchy, la loi de Pareto, etc.*

Théorème 1.4 : $F \in D(\Phi_\gamma)$ avec $\gamma > 0$ si et seulement si $x_F = +\infty$ et $1 - F$ est une fonction à variations régulières d'indice $-1/\gamma$ (i.e $1 - F = x^{-1/\gamma}l(x)$, (où l est une fonction à variations lentes). Dans ce cas, un choix possible pour les suites a_n et b_n est : $a_n = F^\leftarrow\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $b_n = 0$.

Domaine d'attraction de Weibull :

Si $\gamma < 0$, on dit que $F \in D(\Psi_\gamma)$. Ce domaine d'attraction contient la majorité des fonctions de répartition dont le point terminal est fini, par exemple *la loi uniforme, etc.*

Théorème 1.5 : $F \in D(\Psi_\gamma)$ avec $\gamma < 0$ si et seulement si $x_F < +\infty$ et $1 - F^*$ est une fonction à variations régulières d'indice $1/\gamma$ (i.e., $1 - F(x) = (x_F - x)^{-1/\gamma}l[(x_F - x)^{-1}]$ avec,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \leq 0 \\ F(x_F - x^{-1}) & \text{Si } x > 0. \end{cases}$$

Dans ce cas un choix possible pour les suites a_n et b_n est : $a_n = x_F - F^\leftarrow\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $b_n = x_F$.

Domaine d'attraction de Gumbel :

Si $\gamma = 0$, on dit que $F \in D(\Lambda)$. Ce domaine d'attraction contient les fonctions de répartition à décroissance exponentielle, par exemple, *loi normale, exponentielle, gamma, lognormal, etc.* Rappelons tout d'abord la définition d'une fonction de Von-Mises.

Définition 1.3 : Soit F une fonction de répartition d'une fonction de point terminal x_F . S'il existe $z < x_F$ tel que $1 - F(x) = c \exp\left\{-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\right\}$,

$z < x < x_F$, où $c > 0$ et a est une fonction positive absolument continue de densité à vérifiant $\lim_{x \uparrow x_F} a(x) = 0$. Alors F est une fonction de Von-Mises et a sa fonction auxiliaire.

Théorème 1.6 : $F \in D(\Lambda)$ si et seulement si, il existe une fonction de Von-Mises F^* telle que pour $z < x < x_F$ on ait : $1 - F(x) = c(x) [1 - F^*(x)] = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}$, où $c(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow x_F$.

Plusieurs estimateurs ont été proposés pour estimer le paramètre de valeur extrême qu'on a déjà noté γ (voir Hill, 1975; Pickands, 1975; de Haan et Resnick, 1980; Hall, 1982; Mason, 1982, Davis et Resnick, 1984; Csörgő et al, 1985; Hall et Welsh, 1985; Dekkers et al, 1989; Grübél et de Wolf, 1994). Nous présentons dans ce qui suit l'estimateur le plus pratique et le plus exploité dans la théorie des valeurs extrêmes, celui de Hill (1975) [24] (pour γ positif), et notons que ce dernier intervient dans notre nouveau estimateur de la prime de risque-ajustée que nous allons présenter dans le chapitre 4.

1.2.3 Estimateur de Hill

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires (*iid*) de fonction de répartition commune F et soit $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ les statistiques d'ordre correspondantes. On suppose que F satisfait la condition du domaine d'attraction de Fréchet (voir le théorème 1.4), en terme de variations régulières, ceci est équivalent à : pour $\gamma > 0$

$$(1 - F(x)) = x^{-1/\gamma} L(x), \quad x > 0, \quad (1.10)$$

c'est-à-dire que F est de type Pareto et d'après la remarque 2, F est heavy-tailed. En général, les distributions que nous considérons ne sont pas tous de type Pareto. Néanmoins, il existe des classes de distributions qui apparaît fréquemment en pratique et dont le comportement à l'infini est similaire à celui d'une distribution Pareto. La construction de l'estimateur de Hill est basée sur la méthode du Maximum de Vraisemblance où on se sert des statistiques d'ordre supérieur à un certain seuil u , pour ne garder que les observations les plus grandes, de façon à ce quelles suivent approximativement une distribution Pareto i.e., Si on suppose que F vérifie (1.10) on peut écrire :

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(u)} = \left(\frac{x}{u} \right)^{-1/\gamma}, \quad x > u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Si k désigne le nombre de statistiques d'ordre qui dépassent le seuil u , on estime alors u par X_{n-k} et en utilisant les statistiques d'ordre $X_{n-k+1,n}, \dots, X_{n,n}$, la fonction de log-vraisemblance sera alors :

$$L(\gamma, X_{n-k+1}, X_{n,n}) = -k \log(\gamma u) + k \log(1 - F(u)) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \sum_{i=1}^k (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n}).$$

En maximisant la fonction log-vraisemblance par rapport à γ , on obtient l'estimateur de Hill pour $\gamma > 0$

$$\hat{\gamma}_{n,k}^H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n}). \quad (1.11)$$

Notons que cet estimateur peut être représenté en terme des espacements de logarithmes des observations,

$$\hat{\gamma}_{n,k}^H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-i,n}).$$

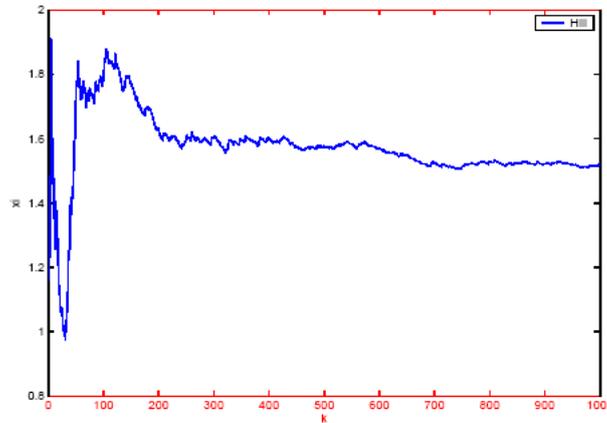


FIG. 1.2 – Estimateur de Hill

Mason (1982) a prouvé la consistance faible de $\hat{\gamma}_{n,k}^H$ pour toute suite $k = k(n)$ satisfaisant $k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) ont établie la consistance forte pour toute suite $k = k(n)$ satisfaisant $k/\log \log n \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. De nombreux articles traitent de la normalité asymptotique de l'estimateur de Hill ; Davis et

Resnick (1984) l'ont prouvé en utilisant les domaines d'attraction et sous les conditions de Von Mises, sous d'autres hypothèses Csörgő et Mason (1985) ont démontré cette normalité asymptotique en introduisant l'approximation des processus empiriques par des ponts browniens. Resnick et de Haan (1995) et Geluk et al (1995) ont montré la normalité asymptotique sous les conditions de Von Mises et l'hypothèse de variations régulières au second ordre et même une équivalence entre la normalité asymptotique et la variations régulières au second ordre moyennant une hypothèse supplémentaire sur $k(n)$. On peut aussi obtenir cette normalité asymptotique comme un cas particulier de la démonstration de Dekkers, Einmahl et de Haan (1989) à partir de la normalité asymptotique de leur estimateur des moments (voir par exemple De Wolf (2001), *p*, 36 – 40, [9]).

Nous concluons que l'estimateur de Hill dépend du choix précis de la suite k_n i.e., du nombre de statistiques d'ordre extrêmes dont son estimation est basé. Le choix de k_n consiste un problème essentiel à résoudre pour exploiter l'estimateur de Hill en pratique, notamment au domaine de la réassurance comme on va voir dans le chapitre 4. Plusieurs méthodes, procédures et algorithmes ont été appropriés pour le choix optimal de k_n (voir par exemple Danielsson et al (2001) [12] ou [33])

1.3 Le modèle GEV

La distribution des valeurs extrêmes notée *GEV* est simplement une re-paramétrisation des distributions appaissant dans le théorème 1.3.

1.3.1 Distribution des valeurs extrêmes généralisée

En fait, nous pouvons caractériser les trois types de distributions par une distribution unique :

$$H_{\mu,\sigma,\gamma}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma} \right\} \quad (1.12)$$

définit sur le support $\Delta = \left\{ x : 1 + \frac{\gamma}{\sigma} (x - \mu) > 0 \right\}$, et que nous notons $GEV(\mu, \sigma, \gamma)$.

Cette fonction de distribution est connue sous le nom de "*generalized extreme value distribution*" et notée (*GEV*).

Nous avons alors, les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{si } \gamma > 0, & \quad \text{Fréchet} : H_{1,\gamma,\gamma}(x) = \Phi_\gamma(x) \\
 \text{si } \gamma < 0, & \quad \text{Weibull} : H_{-1,-\gamma,\gamma}(x) = \Psi_\gamma(x) \\
 \text{si } \gamma \rightarrow 0, & \quad \text{Gumbel} : H_{0,1,0}(x) = \Lambda(x).
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Remarque 4 :

1. Le quantile α de la distribution $GEV(\mu, \sigma, \gamma)$ est donné par la formule suivante :

$$H_{\mu,\sigma,\gamma}^{-1}(\alpha) = Q(\alpha) = \mu - \sigma \frac{1 - (-\ln \alpha)^{-\gamma}}{\gamma}.$$

Intuitivement, nous comprenons que plus γ est grand, plus le quantile est élevé.

2. Remarquons que : $H_{\mu,\sigma,\gamma}(x) = H_\gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$

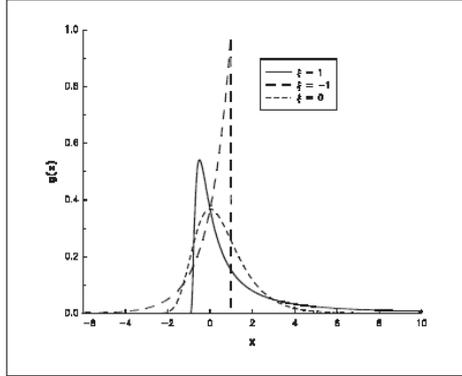


FIG. 1.3 – Densité de la distribution $h(0, 1, \gamma = \xi)$

Nous pouvons facilement montrer que la fonction de densité correspondante est $h_{\mu,\sigma,\gamma}$ (notée sur les graphes par $g(x)$) :

$$h_{\mu,\sigma,\gamma}(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}.$$

Les graphiques (1.3), (1.4), (1.5) représentent des fonctions de densité pour différentes valeurs de paramètres. Lorsque μ varie, nous remarquons une

translation des fonctions, μ est donc un paramètre de localisation. σ joue le rôle d'une variance, c'est pourquoi nous le considérons comme un paramètre de dispersion. Enfin, le paramètre γ est lié à la queue de distribution. C'est pourquoi on lui donne généralement le nom d'indice de queue lorsque $\gamma > 0$ ou l'indice de valeur extrême.

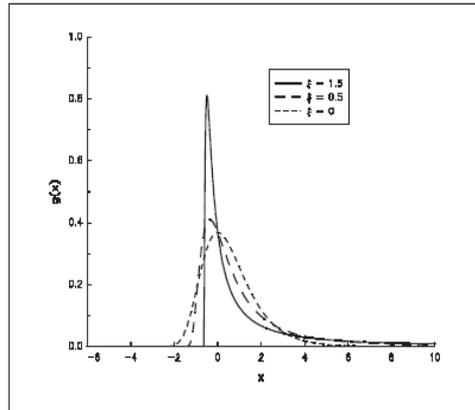


FIG. 1.4 – Densité de la distribution $h(0, 1, \gamma = \xi)$

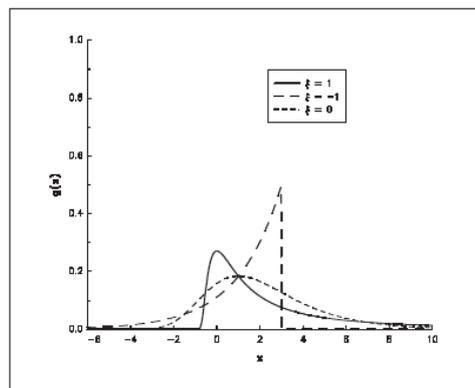


FIG. 1.5 – Densité de la distribution $h(0, 2, \gamma = \xi)$

1.3.2 Estimation des paramètres de la GEV (μ, σ, γ)

Méthode du Maximum de Vraisemblance (ML)

Afin d'estimer les paramètres intervenant dans la distribution (1.12), nous déterminons la fonction de vraisemblance comme suit :

$$\begin{aligned} \log L_{\mu, \sigma, \gamma}(x_1, \dots, x_n) &= -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \log \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

Les équations des dérivées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\gamma}{\sigma \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right]} - \left(\frac{1}{\sigma}\right) \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right]^{-\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \right\} \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{\sigma} + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\gamma (x_i - \mu)}{\sigma^2 \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right]} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right]^{-\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \right\} \\ \frac{\partial L}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right]} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma^2} \log \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right] - \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{-1}{\gamma} \right) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \frac{1}{1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} + \frac{1}{\gamma^2} \log \left[1 + \gamma \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)\right] \right] \right\} \end{aligned}$$

On arrive donc à une fonction non linéaire $\Psi(\mu, \sigma, \gamma) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de variables μ, σ et γ dont on doit trouver un zéro. Cette fonction n'est pas prête analytiquement de donner des zéros ; donc on peut précéder par des méthodes numériques, à voir la méthode itérative de Newton (ou quasi-newtonienne). L'estimateur de maximum de vraisemblance conduit à un estimateur non biaisé, analytiquement normal (Prescott et Walden, 1980, 1983, Tiago de Oliveira, 1980, Smith, 1985, Hougaard, 1986 ou Smith, 1987).

Méthode des moments pondérés (PWM)

On définit le r^{ieme} moment pondéré généralisé noté ω_r par :

$$\omega_r = \int_0^1 Q(\xi) \xi^r d\xi = E [Q(\xi) \xi^r],$$

ou ξ est une variable aléatoire issue d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Le principe de la méthode des moments pondérés généralisés est d'exprimer les paramètres du loi $GEV(\mu, \sigma, \gamma)$ approximante en fonction des trois *PWM* (moments with probability weighted moments) $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et de déduire ensuite des estimateurs de μ, σ, γ à partir des $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$. Soit les statistiques d'ordre $X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n,n}$ associées à un échantillon de variables aléatoires de taille n . L'échantillon des estimateurs des moments pondérés a les valeurs suivantes :

$$\hat{\omega}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n X_{j,n} \xi_{j,n}^r, \text{ pour } 0 \leq r \leq n$$

avec,

$$\begin{cases} \xi_{j,n} = \frac{n-j+\frac{1}{2}}{n} \text{ ou } \frac{n-j+1}{n+1} \text{ (ou, } E[V_{j,n}]) \text{ ,} \\ \xi_{j,n}^r = (\xi_{j,n})^n \text{ ou } E[(V_{j,n})^r] \end{cases}$$

et $\{V_{j,n}\}$ sont les statistiques d'ordre $V_{1,n} < V_{2,n} < \dots < V_{n,n}$ associée à un échantillon de variables aléatoires de taille n issues d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Les estimateurs de μ, σ et γ sont trouvés en substituant la valeur simple $\hat{\omega}_0$ par \bar{x} et $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$ par leur valeurs théoriques. Soit : $m_1 = 2\omega_1 - \omega_0, m_2 = 2\omega_2 - \omega_0$, si $\gamma < 1$, γ est la solution de

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{3^\gamma - 1}{2^\gamma - 1}, \text{ ie } \xi = 7,8590c - 2,9554c^2$$

approximativement $c = \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{m_1}{m_2}$.

$$\sigma = \frac{m_1 \gamma}{(2^\gamma - 1) \Gamma(1 - \gamma)}, \quad \mu = \omega_0 + \frac{\sigma}{\gamma} (1 - \Gamma(1 - \gamma)) \text{ ,}$$

avec $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-\nu t} dt$ $\Gamma(\nu)$ est la fonction Gamma, et après estimation on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \hat{\omega}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} (1 - \Gamma(1 - \hat{\gamma})) \\ \hat{\sigma} = \frac{m_1 \hat{\gamma}}{(2^{\hat{\gamma}} - 1) \Gamma(1 - \hat{\gamma})} \end{cases}$$

La théorie des valeurs extrêmes fournit un groupe de modèles récents qui sont les modèles *POT* "*Peaks-Over-Threshold*". Ces modèles paramétriques sont basés sur la distribution de Pareto généralisée (*GPD*). Nous présentons la définition et une description complète de cette distribution et de ces principales propriétés. Le résultat clé de cette modélisation est le théorème de Pickands Balkema-de Haan qui stipule que pour un large éventail de distributions, les pertes qui dépassent un seuil suffisamment élevé, suivent la distribution Pareto généralisée.

1.4 Le modèle POT

Le principe de la méthode (*POT*) est d'estimer la distribution des excès au-delà d'un seuil u par une loi *GPD* dépendant des deux paramètres $(\sigma(u), \gamma)$ après estimation de ces derniers à partir de la loi des excès au-delà de u .

1.4.1 Distribution de Pareto généralisée

La loi de Pareto généralisée notée $GPD(\mu, \sigma, \gamma)$, pour $\sigma > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ *GPD* (*generalized Pareto distribution*) est défini par la fonction de répartition $G_{\mu, \sigma, \gamma}$ où :

$$G_{\mu, \sigma, \gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\gamma} & \text{si, } \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) & \text{si, } \gamma = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

où $x \geq 0$ si, $\gamma > 0$ et $0 < \frac{\sigma}{\gamma}$ si, $\gamma < 0$. On a les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \text{si } \gamma > 0 & \quad GPD(\mu, \sigma, \gamma) \rightarrow \text{loi Pareto} \\ \text{si } \gamma < 0 & \quad GPD(\mu, \sigma, \gamma) \rightarrow \text{loi Béta} \\ \text{si } \gamma \rightarrow 0 & \quad GPD(\mu, \sigma, \gamma) \rightarrow \text{loi Exponentielle.} \end{aligned} \quad (1.15)$$

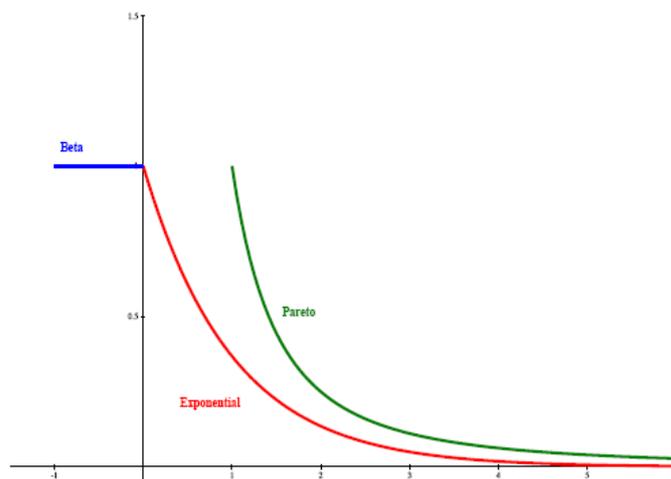


FIG. 1.6 – Graphe de densité, *Pareto*, *Béta* et *Exponentielle*

1.4.2 Loi des excès

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et de point terminal x_F . Pour tout $u < x_F$, la fonction

$$F_u(x) = P[X - u \leq x | X > u] = 1 - \frac{1 - F(u+x)}{1 - F(u)}, \quad x \geq 0, \quad (1.16)$$

pour $0 \leq x \leq x_F - u$ avec $x_F = \sup \{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$ est appelé *fonction de répartition des excès*. La fonction de distribution des excès représente la probabilité que la variable X dépasse le seuil u d'au plus une quantité x , sachant qu'elle dépasse u . Remarquons que l'on peut écrire cette fonction de distribution sous la forme

$$F_u(x) = \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (1.17)$$

Le théorème de Pickands est très utile lorsqu'on travaille avec des observations qui dépassent un seuil fixé, puisque il assure que la loi des excès peut être approchée par une loi de Pareto généralisée (loi asymptotique des excès).

1.4.3 Théorème de Pickands [39]

F appartient au domaine d'attraction de H_γ si et seulement si,

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\sigma(u), \gamma}(x)| = 0 \quad (1.18)$$

où σ est une fonction strictement positive et $G_{\sigma(u), \gamma}(x)$ est une GPD $(0, \sigma(u), \gamma)$.

Alors, nous déduisons que le deuxième paramètre est en fonction du seuil choisi et cela veut : l'estimation de σ dépend de l'estimation du seuil u .

Preuve. d'après l'approximation de la loi de maxima F^n par une GEV (μ, σ, γ) i.e.,

$$F^n(x) \approx H_{\mu, \sigma, \gamma}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma} \right\},$$

nous en déduisons que :

$n \ln F(x) \approx - \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma}$. or, $\ln F(x) \approx -(1 - F(x))$ pour x grand.

Nous avons donc,

$$1 - F(x) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma}. \quad (1.19)$$

En remplaçant (1.19) dans (1.16), nous obtenons le résultat final,

$$\begin{aligned} F_u(x) &= 1 - \frac{1 - F(u+x)}{1 - F(u)} = 1 - \left(1 + \gamma \frac{x}{\sigma + \gamma(u - \mu)}\right)^{-1/\gamma} \\ &= 1 - \left(1 + \gamma \frac{x}{\sigma(u)}\right)^{-1/\gamma} = G_{\sigma(u), \gamma}(x), \end{aligned}$$

avec, $\sigma(u) = \sigma + \gamma(u - \mu)$. Nous pouvons enfin énoncer le résultat suivant :

1.4.4 Stabilité du seuil

Une variable aléatoire de loi *GPD* est stable par rapport au seuil u , i.e. : Soit $x \rightarrow G_{\mu, \sigma, \gamma}$ et soit $u > 0$, alors pour $x > 0$, on a $F_u(x) = G_{0, \sigma + \gamma(u - \mu), \gamma}(x)$ où $G_{0, \sigma + \gamma(u - \mu), \gamma}(x)$ sera notée $G_{\sigma(u), \gamma}(x)$.

-si $\mu = 0$ alors, $\sigma(u) = \sigma + \gamma u$.

-si $\mu \neq 0$ alors $\sigma(u) = \sigma + \gamma(u - \mu)$.

1.4.5 Choix du seuil

L'estimation de σ et γ pose le problème de la détermination du seuil u . Il doit être suffisamment grand pour que l'on puisse appliquer le résultats précédent, mais ne doit pas être trop grand afin d'avoir suffisamment de données pour obtenir des estimateurs de bonne qualité. Il n'existe pas de méthodes qui proposent une minimisation automatique du biais et de la variance du modèle. Une méthode utilisée par plusieurs auteurs (voir par exemple, Mc Neil et Frey) consiste à choisir un seuil aléatoire qui est la $(k+1)^{ième}$ statistique d'ordre. Il y a donc k observations excédentaires. Généralement, le seuil u est déterminé graphiquement en exploitant le résultat suivant :

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\sigma(u) + \gamma u}{1 - \gamma}, \text{ pour } \gamma \neq 0, \quad (1.20)$$

appelé *fonction moyenne des dépassements* de X . Si l'approximation *GPD* est valide pour un seuil u_0 , alors elle est valide pour $u > u_0$ donc, pour $u > u_0$, la fonction moyenne d'excès $e(u)$ est linéaire en u . Pour déterminer u_0 , on utilise donc un graphique appelé *mean excess plot* qui consiste à représenter $\hat{e}(u)$ en fonction de u avec

$$\hat{e}(u) = e_n(u) = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} (X_i - u) \quad (1.21)$$

avec N_u est le nombre des X_i qui dépassent le seuil u i.e., $N_u = \sum_{i=1}^n 1(X_i - u)$ avec n taille de l'échantillon et $e_n(u)$ est appelée *fonction moyenne empirique*.

Si l'on choisi $u = X_{n-k}$ alors $N_u = k$ et $\hat{e}(X_{n-k}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_i - X_{n-k})$ et $e_n(u)$ doit être linéaire pour chaque $u > u_0$. L'estimation graphique de u_0 n'est pas aisée dans la pratique même lorsque nous travaillons avec des données simulées.

Voir quelques exemples sur la fonction $e(u)$ [29].

distribution	densité	$e(u)$
Pareto	$\frac{\alpha x^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$\frac{x+u}{\alpha-1}, \alpha > 0$
Lognormal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{\sigma^2 u}{\ln(u)-\mu} (1 + o(1))$
Weibull	$\alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta)$	$\frac{u^{1-\tau}}{c\tau} (1 + o(1))$
Gamma	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \text{ pour } x, \alpha, \beta > 0$	$\beta^{-1} \left(1 + \frac{\alpha-1}{\beta u} + o\left(\frac{1}{u}\right)\right)$

TAB. 1.2 – Exemples de fonctions moyenne des dépassement

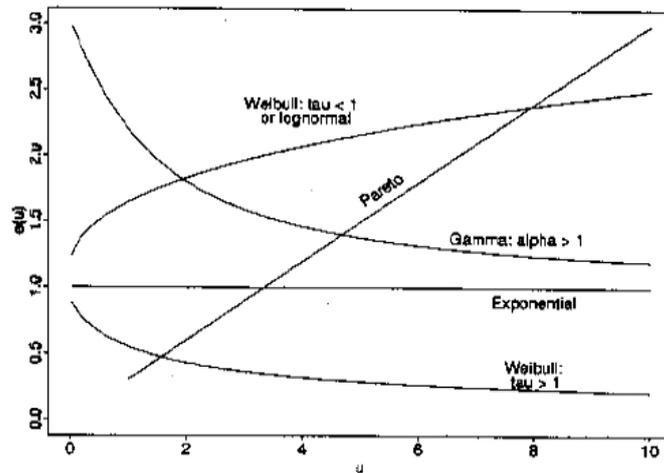


FIG. 1.7 – Graphe des fonction moyennes des dépassements théoriques

1.4.6 Estimation des paramètres de la $GPD(\mu, \sigma, \gamma)$

On cite deux méthodes

Méthode du Maximum de Vraisemblance (ML)

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ Un n -échantillon d'une loi GPD , la fonction log-vraisemblance associée est donnée par

$$\log(L(X; \sigma, \gamma)) = -n \log(\sigma) - ((1 + \gamma) / \gamma) \sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma x_i / \sigma),$$

où les estimateurs du Maximum de vraisemblance $(\hat{\sigma}, \hat{\gamma})$ de (σ, γ) sont les solutions du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \gamma \frac{x_i}{\sigma}\right) = \gamma \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i / \sigma}{1 + \gamma x_i / \sigma} = \frac{1}{1 + \gamma} \end{cases}.$$

Ce système n'admet pas de solutions explicites, et il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour calculer les valeurs de $\hat{\sigma}$ et $\hat{\gamma}$. Pour des échantillons de petite taille, la procédure du maximum de vraisemblance ne donne pas une estimation précise de (σ, γ) , et parfois elle ne conduit à aucune estimation (Hoking et Wallis 1987) [25]. Smith (1987) a montré que les estimateurs du ML sont asymptotiquement normaux pour $\gamma > -1/2$. et ont montré aussi par des essais numériques et des simulations que pour un échantillon de taille supérieur à 500 environ les estimateurs ML sont plus efficaces. Rotzén et Tajvids (1996) ont montré que pour des données heavy-tailed, pour $\gamma \geq 1/2$ les estimateurs ML sont consistants. Comme on s'intéresse à modéliser des données heavy-tailed de l'assurance, les estimateurs ML sont les plus efficaces à adopter.

Méthode des moments pondérés (PWM)

On définit le r^{ieme} moment pondéré généralisé noté ω_r par :

$$\omega_r = \int_0^1 Q(\xi) \xi^r d\xi = E[Q(\xi) \xi^r],$$

où ξ est une variable aléatoire issue d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Le principe de la méthode des moments pondérés généralisé est d'exprimer les paramètres de la loi $GEV(\mu, \sigma, \gamma)$ approximante en fonction des trois PWM (moments with probability weighted moments) $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et de déduire ensuite

des estimateurs de μ, σ, γ à partir des $\widehat{\omega}_0, \widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2$. Soit les statistiques d'ordre $X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n,n}$ associées à un échantillon de variables aléatoires de taille n . L'échantillon des estimateurs des moments pondérés a les valeurs suivantes :

$$\widehat{\omega}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n X_{j,n} \xi_{j,n}^r, \text{ pour } 0 \leq r \leq n$$

avec,

$$\begin{cases} \xi_{j,n} = \frac{n-j+\frac{1}{2}}{n} \text{ ou } \frac{n-j+1}{n+1} \text{ (ou, } E[V_{j,n}]) , \\ \xi_{j,n}^r = (\xi_{j,n})^n \text{ ou } E[(V_{j,n})^r] \end{cases}$$

et $\{V_{j,n}\}$ sont les statistiques d'ordre $V_{1,n} < V_{2,n} < \dots < V_{n,n}$ associée à un échantillon de variables aléatoires de taille n issues d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Les estimateurs de μ, σ et γ sont trouvés en substituant la valeur simple $\widehat{\omega}_0$ par \bar{x} et $\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2$ par leur valeurs théoriques. Soit : $m_1 = 2\omega_1 - \omega_0, m_2 = 2\omega_2 - \omega_0$. Si $\gamma < 1$,

$$\gamma = 3 - 2 \left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right)^{-1}, \quad \sigma = m_1 (2 - \gamma) (1 - \gamma), \quad \mu = \omega_0 - \frac{\sigma}{1 - \gamma},$$

après estimation on obtient :

$$\begin{cases} \widehat{\gamma} = 3 - \left(\frac{2\widehat{\omega}_1 - \widehat{\omega}_0}{\widehat{\omega}_2 - \widehat{\omega}_1} \right) \\ \widehat{\sigma} = (2\widehat{\omega}_1 - \widehat{\omega}_0) (2 - \widehat{\gamma}) (1 - \widehat{\gamma}) \\ \widehat{\mu} = \widehat{\omega}_0 - \frac{\widehat{\sigma}}{1 - \widehat{\gamma}} \end{cases}$$

Hosking et Wallis (1987) [25] ont montré que pour $\gamma < 1/2$ et particulièrement pour un échantillon de taille petite les estimateurs *PWM* ont plus d'avantages que les estimateurs *ML*, puisque ils représentent moins de dispersion autour de la valeur juste. Jean Dielbot et al [15] ont proposé une généralisation de la méthode *PWM* pour estimer les paramètres de la *GPD* afin d'élargir le domaine de validité de γ de $(\gamma < 1/2)$ à $(\gamma < 3/2)$.

1.5 Estimation des quantiles extrêmes

On considère X_1, X_2, \dots, X_n la réalisation de n variables aléatoires réelles indépendantes et de fonction de répartition commune F supposée continue. On définit les quantiles extrêmes notés x_p par :

$$x_p = F^{\leftarrow}(1-p) = Q(1-p), \text{ quand } p \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

On s'intéresse généralement à estimer les quantiles extrêmes dans la modélisation des événements rares, Nous décrivons dans cette section quelques méthodes alternatives. Plus récemment Necir et Meddi (2006) ont utilisé un estimateur de quantile extrême, celui basé sur l'estimateur de Hill pour estimer une prime nette de réassurance que nous décrivons dans le dernier chapitre.

1.5.1 Approche EVD

Cette méthode consiste à réécrire l'équation (1.7) dans le théorème 1.3 sous la forme

$$\ln F(a_n x + b_n) = \frac{1}{n} \ln H_\gamma(x).$$

D'après la définition de $H_\gamma(x)$ dans (9) or $\ln F(z) = \bar{F}(z)$ pour z grand on obtient :

$$F(a_n x + b_n) = 1 - \left(\frac{1}{n} (1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \right),$$

ce qui implique

$$a_n x + b_n = Q \left(1 - \left(\frac{1}{n} (1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \right) \right).$$

Si on pose $p = \frac{1}{n} (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$, on obtient :

$$Q(1 - p) = b_n + a_n \frac{(np)^{-\gamma} - 1}{\gamma},$$

ce qui permet d'estimer x_p ,

$$\hat{x}_p = b_n + a_n \frac{(np)^{-\hat{\gamma}} - 1}{\hat{\gamma}}. \quad (1.23)$$

Pour l'estimateur $\hat{\gamma}$ voir la section (1.2.3) et pour un choix convenable des suites a_n et b_n , voir la section (1.2.2)

1.5.2 Approche POT

Cette méthode consiste à réécrire l'équation (1.16) sous la forme :

$$F(x) = F_u(x - u) (1 - F(u)) + F(u)$$

D'après le théorème de Pickands (section (1.4.3))on obtient :

$$F(x) = G_{\mu,\sigma,\gamma}(x-u)(1-F(u)) + F(u),$$

or $G_{\mu,\sigma,\gamma}(x-u) = G_{u,\sigma,\gamma}(x)$, on aura

$$F(x) = G_{u,\sigma,\gamma}(x)(1-F(u)) + F(u),$$

ce qui implique,

$$x = Q(G_{u,\sigma,\gamma}(x)(1-F(u)) + F(u)).$$

Si on pose $1-p = G_{u,\sigma,\gamma}(x)(1-F(u)) + F(u)$, on obtient :

$$Q(1-p) = \left(\frac{1-F(x)}{p}\right)^\gamma \frac{\sigma}{\gamma} + u,$$

ce qui permet d'estimer x_p ,

$$\hat{x}_p = \hat{Q}(1-p) = \left(\frac{1-F_n(x)}{p}\right)^{\hat{\gamma}} \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} + u,$$

avec F_n l'estimateur standard de F . Si N_n dénote le nombre des excédents du seuil u et n le nombre total des réalisations, on obtient finalement la forme finale de l'estimateur, pour $p < \frac{N_n}{n}$

$$\hat{x}_p = \left(\frac{N_n}{np}\right)^{\hat{\gamma}} \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} + u. \quad (1.24)$$

Pour les estimateurs $\hat{\sigma}$, $\hat{\gamma}$ voir la section (1.4.6), pour le choix du seuil u voir la section (1.4.5). Pour plus de détails sur l'étude asymptotique de cet estimateur (voir par exemple Alexander J.McNeil et Thomas Saladin (1997)). Dans les travaux de Necir et al. (2005), notons que cet estimateur de quantile extrême a été la base de construire un nouveau estimateur de la *Prime de Risque Ajusté* à partir d'un certain seuil u , qu'on va présenter en détails dans le chapitre 4.

1.5.3 Approche des quantiles

Plusieurs estimateurs ont été conçus par cette méthode, citons les plus connues comme, l'estimateur basée sur Hill qui a été introduit par Smith et Weissman (1978) ; Dekkers et de Haan (1989) ; Ferreira et al (2002), l'estimateur de Pickands introduit par Dekkers et de Haan (1989) et l'estimateur des

moment introduit par Dekkers, Einmahl et de Haan (1989). Nous définissons dans cette section celui basé sur l'estimateur de Hill :

Soit F une distribution de Pareto, i.e.,

$$1 - F(t) = t^{-1/\gamma} L(t), \quad \text{avec,} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1, \quad x > 0$$

On terme de l'inverse généralisée de F on obtient :

$$Q(1-s) = s^{-1/\gamma} \tilde{L}(s) \quad \text{avec,} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{L}(\lambda s)}{\tilde{L}(s)} = 1, \quad \lambda > 0$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{Q(1-\lambda s)}{Q(1-s)} = \lambda^{-1/\gamma},$$

ce qui implique

$$Q(1-\lambda s) = Q(1-s) \lambda^{-1/\gamma}.$$

Si on pose $\lambda s = p$ et $s = k/n$, on obtient :

$$Q(1-p) = Q(1-k/n) \left(\frac{np}{k}\right)^{-1/\gamma},$$

ce qui permet d'estimer x_p par :

$$\hat{x}_p = \hat{Q}(1-p) = Q_n(1-k/n) \left(\frac{np}{k}\right)^{-1/\hat{\gamma}_{n,k}^H},$$

avec $Q_n(1-k/n) = X_{n-k,n}$ est l'estimateur standard de $Q(1-k/n)$ et $\hat{\gamma}_{n,k}^H$ représente l'estimateur de Hill (voir Section 1.2.3). ce qui mène enfin à :

$$\hat{x}_p = X_{n-k,n} \left(\frac{np}{k}\right)^{-1/\hat{\gamma}_{n,k}^H}, \quad (1.25)$$

Récemment Ferreira et Vries (2004) [19] ont proposé un intervalle de confiance pour l'estimateur de Hill aussi bien que l'estimateur de quantile extrême qu'on a déjà défini dans cette section, au fait que la meilleur vitesse de convergence de l'estimateur de Hill est atteint quand sa moyenne est différente de zéro, ceci pour obtenir un choix optimal de la suite k_n .

Chapitre 2

Généralités sur la Théorie de Risque

2.1 Introduction

La théorie de risque fournit toujours une base essentielle pour la plupart des problèmes traités dans les mathématiques d'assurance, où la base du modèle de risque de ces dernières revient au premiers travaux de Filip Lundberg qui dans sa fameuse thèse Uppsala en (1903) a mis la fondation de la théorie de risque actuariel. Lundberg s'est rendu compte que le processus de poisson était au cœur du modèle d'assurance non-vie. Par une transformation de temps, il était capable de restreindre son analyse en un processus de Poisson homogène. Cette découverte est similaire à l'identification de Bachelier en 1900 que le mouvement brownien est la composante clef pour les modèles financiers. Il a été alors laissé à Harald Cramér et à son école à Stokhom pour incorporer les idées de Lundberg dans la théorie naissante du processus stochastique. Avec cela Cramér a contribué considérablement à la mise de la base de toutes les deux mathématiques d'assurance non-vie aussi bien que la théorie de probabilité. Le modèle de base sortant de ces premières contributions est mentionné dans la suite par le modèle de Cramér-Lundberg. Nous allons se limiter dans ce chapitre à donner des concepts de base sur la théorie de risque seuls qui ont un intérêt actuariel, et au commencement, cette simple question. Que désigne le mot risque en assurance ?

Définition 2.1 *Le risque est la raison de l'assurance. Il s'agit d'un événement incertain qui ne dépend pas exclusivement de la volonté des parties et à la survenance duquel est subordonnée l'obligation de l'assurance d'exécuter la prestation convenue.*

Un portefeuille est caractérisé par un nombre d'ingrédients d'entre eux de

nature déterministe et autre stochastique, parmi les premiers on mentionne la position du départ où on s'intéresse à la réserve initiale (dite aussi capital initial), définit comme somme du capital mis à coté pour couvrir les dépenses arrivant pendant la période initiale du portefeuille quand la société n'a pas encore reçu les primes annuelles. Dans la suite la réserve initiale sera notée u .

- a. Epoque d'arrivée de revendications (temps d'arrivée de revendications) : notées $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Les revendications sont survenues dans un instant aléatoire du temps $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3, \dots$. Parfois on considère un temps d'arrivée secondaire de revendications dans un instant zéro noté $\sigma_0 = 0$.
- b. Temps inter-arrivée de revendications : noté T_n , avec $T_1 = \sigma_1$, et $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, n \geq 1$ et $\{T_n\}_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires.
- c. Processus du nombre de revendications : noté $N(t)$ où nous avons $N(t) = \sup \{n \geq 1, \sigma_n \leq t\}, t \geq 0$, et par convention $\sup \{\emptyset\} = 0$. Une relation essentielle entre les suites des époques d'arrivées de revendications $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots\}$ et le processus du comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est donnée par $\{N(t) = n\} = \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$.
- d. Processus de la taille de revendications : noté $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. la taille des revendications $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires positives indépendantes et de fonction de répartition commune F avec une espérance finie $\mu = E[U_1]$ et une variance $\sigma^2 = var[U_1] \leq \infty$.
- e. Montant global de revendications survenues dans un temps t : donné par : $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$, où $X(0) = 0$ si $N(0) = 0$, à travers sa définition, le montant global de revendications est en générale une somme aléatoire.
- f. Primes revenues dans le temps courant de 0 à t : on suppose que le totale de primes est notées $\Pi(t)$.
- g. Processus de la réserve de risque dans un temps t : donné par $R(t) = u + \Pi(t) - X(t)$.

On appelle processus aléatoire à temps continu une famille $\{X_t; t \in T\}$ de variables aléatoires indicées par un paramètre réel positif. L'ensemble T représente un intervalle de temps, et le plus souvent la demi-droite \mathbb{R}_+ . Les variables sont définies sur un même espace probabilisé. Nous identifierons parfois, de manière abusive et lorsque les ambiguïtés seront impossibles, processus et variables en notant (X_t) ou $\{X_t\}$ pour désigner le processus.

Pour une éventualité du hasard ω fixée, l'application qui à t associe la valeur $X_t(\omega)$ s'appelle une trajectoire du processus. Les trajectoires constituent généralement les observations concrètes que l'on peut faire d'un processus.

Un processus est à valeurs entières si

$$X_t \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Les exemples de processus à valeurs entières sont les processus de Poisson, les processus de renouvellement liés au comptage d'événements survenus au hasard.

Dans les sections suivantes nous donnerons plus de détails sur les concepts présentés ci-dessus et sur des quantités actuarielles liées avec eux.

2.2 Processus du nombre de revendications

Intuitivement, il s'agit de compter le nombre d'événements qui surviennent au cours du temps. Ce processus est noté $\{N(t), t > 0\}$, et est défini comme suit :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\sigma_n \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

avec $\{N(t), t > 0\}$ est un processus de comptage i.e., $N(t)$ satisfait les trois conditions suivantes. Pour tout $t, h \geq 0$

1. $N\{0\} = 0$
2. $N(t) \in \mathbb{N}$
3. $N(t) \leq N(t+h)$

Nous avons $N(t) \leq N(t+h)$ modélise le nombre de revendications arrivant dans l'intervalle du temps $(t, t+h)$. On note que les réalisations du processus du comptage (trajectoires) sont des fonctions monotones, non décroissantes et continues à droite.

Soit $(p_k(t), k = 0, 1, \dots)$ définit par

$$p_k(t) = p(N(t) = k) = p\left(\sum_{i=1}^k T_i \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} T_i\right) \quad (2.2)$$

la fonction de probabilité du processus du comptage $N(t)$. Dans certains cas le temps ne joue pas un rôle significatif. Il existe plusieurs expressions pour calculer les probabilités $p_k(t)$ comme, la distribution récursive de Panjer, le processus du Poisson composé, ect. Nous indiquons dans ce qui suit quelques choix possibles d'entre eux.

2.2.1 Processus de renouvellement

Dépendant du type du portefeuille l'assureur pourra faire une variété de différentes suppositions sur la suite des temps d'inter-arrivée de revendications $\{T_n, n \geq 1\}$. Dans certain cas particulier, il pourra être utile de supposer que cette suite est générée comme un processus de renouvellement $\{\sigma_n, n \geq 1\}$ des époques d'arrivée de revendications i.e., si $\{N(t)\}_{t \geq 0}$

est un processus de comptage avec $N(t) = \sup \{n \geq 1, \sigma_n \leq t\}$, $t \geq 0$, $\sigma_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, où T_1, T_2, \dots, T_n sont des variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées alors $N(t)$ est un processus de renouvellement. Noter que tous processus de comptage généré par la somme de processus T_n indépendants et identiquement distribués est aussi appelé processus de renouvellement.

Définition 2.2 (*modèle de renouvellement "Sparre Aderson"*) : Le modèle de renouvellement est donné par (a), (b), (c), (d) avec $N(t)$ processus de renouvellement où $ET_1 = 1/\lambda$ et les deux processus U_i, T_i sont indépendants.

Mathématiquement le plus simple des processus de renouvellements est celui de Poisson homogène où T_1, T_2, \dots, T_n sont exponentiellement distribuées. Le processus de Poisson a des propriétés particulières qui le distingue des autres processus de renouvellements. Cette dernière joue un rôle crucial dans les applications actuarielles du processus stochastique semblable à la distribution Normale en statistique.

2.2.2 Processus de Poisson homogène

On dit que $N(t)$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ s'il vérifie les conditions suivantes :

1. Il commence à zéro $N(0) = 0$
2. Il a des accroissements indépendants stationnaires
3. Pour tout $t > 0$ $N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt .

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = \left(\frac{\lambda t}{k!}\right)^k e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

avec $EN(t) = \lambda t$, $VarN(t) = \lambda t$ pour tout $t \geq 0$. Où $ET = 1/\lambda$ est l'espérance des temps d'inter-arrivée et $I(t) = VarN(t)/EN(t)$ l'indice de dispersion égale à 1.

Définition 2.3 (*modèle de Cramér-Lundberg*) : le modèle de Cramér-Lundberg est donné par (a), (b), (c), (d) avec $N(t)$ processus de Poisson homogène et les deux processus U_i, T_i sont indépendants.

2.2.3 Processus de Poisson mélangé

En 1948 les actuaires ont noté que la variabilité dans le portefeuille exprimée par exemple par $I(t)$ est souvent supérieur à 1. Le processus de Poisson homogène est apparu dans la littérature actuarielle en 1959(Thyryon 1959).

Soit $\tilde{N}(t)$ un processus de Poisson homogène avec intensité 1 et Λ une variable aléatoire avec $\Lambda(\lambda > 0) = 1$, indépendante de $\tilde{N}(t)$, donc le processus $N(t) = \tilde{N} \circ \Lambda = \left(\tilde{N}(\lambda t) \right)_t$ est appelé processus de Poisson mélangé. La variable aléatoire Λ est appelée variable de structure et cela mène à la distribution du nombre de revendications suivante :

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda), \quad (2.4)$$

où $F_\Lambda(\lambda) = P(\lambda \leq \Lambda)$ est la fonction de distribution de la variable aléatoire de structure Λ . L'indice de dispersion est donné par $I(t) = 1 + t(Var\Lambda/E\Lambda)$. Le cas où F_Λ est une distribution de gamma a été introduit par Ammer (1948) où la densité est donnée par $f_\Lambda(x) = \frac{\delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\delta x}$, $x \geq 0$, où,

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = \binom{\gamma + k - 1}{k} \left(\frac{\delta}{\delta + t} \right)^\gamma \left(\frac{t}{\delta + t} \right)^k \quad (2.5)$$

i.e., $N(t)$ est une distribution binomiale négative avec $N(t)$ appelé processus de Pólya ou processus de Pascal. Le modèle de risque correspond est connu par le modèle Pólya-Eggenberger. Cependant d'autres choix sont possibles par exemples le cas où F_Λ est l'inverse d'une distribution Normale.

2.3 Montant global de revendications

Soit N une variable aléatoire positive qui prend des valeurs entières et U_1, U_2, \dots une suite de variables aléatoires positives, donc la variable aléatoire

$$X(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} U_i & \text{si, } N(t) \geq 1, t \geq 0 \\ 0 & \text{si, } N(t) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

est appelée le composé, est décrit le montant global de revendications dans le modèle individuel aussi bien que dans le modèle collectif. X a la fonction de distribution suivante :

$$F_{X(t)}(x) = P(X(t) \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} U_i \leq x\right). \quad (2.7)$$

Il est plus souvent assumé que les processus $\{N(t)\}$ et $\{U_n\}$ sont stochastiquement indépendants et que U_1, U_2, \dots sont identiquement distribuées, cependant, il y a des cas où ces deux processus ne sont pas indépendants,

prenez comme exemple un portefeuille d'accidents de la route, ou un portefeuille d'accidents sur les plat-formes pétrolières d'un certain type. Il y a une variété d'approches différentes pour déterminer le montant global de revendications et ces dernières ont une adaptation commune pour examiner le comportement de $F_{X(t)}(x)$ pour t fixé. Si on suppose que les processus $\{N(t)\}$ et $\{U_i\}$ sont indépendants, nous avons que X a une distribution composée déterminée par la fonction de probabilité $\{P_k, k \in \mathbb{N}\}$ de N et par la distribution F_U de U_i , où la relation fondamentale suivante :

$$F_{X(t)}(x) = P(X(t) \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) F_U^{*k}(x) \quad (2.8)$$

où F_U^{*k} dénote la $k^{\text{ième}}$ convolution de F_U i.e., $F_U^{*k} = P(U_1 + U_2 + \dots + U_k \leq x)$, la fonction de distribution de la somme de k variables aléatoires indépendantes avec la même distribution que U .

Si le nombre de revendications est très grand, donc on peut prédire que l'effet du centrale limite sera dominant. Une approximation à grande échelle (large scale) comme,

$$F_{X(t)}(x) \simeq \phi\left(\frac{x - E[X(t)]}{\sqrt{\text{var} X(t)}}\right), \quad (2.9)$$

où $\phi(x)$ note la fonction de distribution normale standard, d'autre part l'approximation de grande échelle peut être plutôt incertain. Les praticiens ont essayé de remédier à ce défaut en employant les versions raffinées du théorème de centrale limite. Les théorèmes de centrale limite donnent souvent des résultats médiocres puisque le nombre de revendications qui déterminent le portefeuille entier est en réalité (et heureusement) très petit. C'est en particulier vrai dans le cas de grande revendications. Le résultat est qu'une centralisation véritable des revendications est totalement absente et n'importe quelle approximations de centrale limite est sans signification.

Pour investir la distribution du montant global de revendications, il est comode d'adapter l'un des deux modèles suivants :

2.3.1 Le modèle individuel

On considère un portefeuille consistant de n polices avec des risques individuels U_1, U_2, \dots sur une période donnée. Nous supposons que les variables aléatoires positives U_1, U_2, \dots sont indépendantes, mais non nécessairement identiquement distribuées. Soit la distribution F_{U_i} de U_i une mixture $F_{U_i} = (1 - \theta_i) \delta_0 + \theta_i F_{V_i}$, où $0 < \theta_i \leq 1$ et où F_{V_i} est la distribution

d'une variable aléatoire strictement positive V_i , $i = 0, \dots, n$. Dans des applications actuarielles, les probabilités θ_i sont petites et peuvent être interprétées comme les probabilités que le i^{ieme} police produit une revendication positive V_i . Le montant global de revendications dans ce modèle, que nous appelons le modèle individuel est : $X^{ind} = \sum_{i=1}^n U_i$, avec la distribution $F_{U_1} * \dots * F_{U_n}$.

Un portefeuille est appelé homogène si $F_{v_i} = \dots = F_{v_n}$

2.3.2 Le modèle collectif

Nous supposons qu'un portefeuille consiste en quelques polices anonymes que nous n'observerons pas séparément. Le nombre total N de revendications arrivant dans une période donnée est aléatoire. Les tailles de revendications U_i sont strictement positives et sont assumées des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous supposons que les suites U_1, U_2, \dots des tailles de revendications individuelles sont indépendantes de la revendication numéro N . Typiquement N est une distribution de Poisson, binomiale ou binomiale négative. D'autre choix sont aussi possible. Ce modèle est appelé le modèle collectif et le montant global de revendications est

la variable aléatoire suivante : $X^{col} = \sum_{i=1}^N U_i$, avec la convention $\sum_{i=1}^0 U_i = 0$.

L'idée est de rapprocher le modèle individuel par un modèle collectif convenablement choisi si, la taille de portefeuille n est grande. se fait parce que le modèle collectif est souvent mathématiquement plus facile pour manipuler. Dans ce rapport, un problème crucial comment spécifier les paramètres d'un modèle collectif pour avoir une bonne approximation.

2.4 La prime

On a employé l'abréviation $\Pi(t)$ pour noter la totalité de primes rassemblées des assurés dans le portefeuille jusqu'au temps t . D'habitude les primes sont individuellement rassemblées une fois par ans. La détermination d'une expression fonctionnelle pour $\Pi(t)$ est une des choses où l'assureur peut intervenir dans le processus complet. La fonction $\Pi(t)$ doit être déterminée d'une telle façon que l'on peut garantir la solvabilité du portefeuille. Cela exige que $\Pi(t)$ soit grande pour augmenter assez vite le capital pour faire face aux revendications entrantes. D'autre part une très haute valeur de $\Pi(t)$ peut être plutôt indésirable puisque les compagnies d'assurances pourraient attirer des client en offrant des primes inférieurs en couvrant le même risque.

Pour une étude exhaustive sur le calcul de prime voir par exemple Goovarert, De Vylder et Haezendonck (1984). Notons que le plus souvent, ces primes sont non aléatoires même si leur calcul implique l'information sur les éléments stochastiques dans le portefeuille. la forme la plus populaire de la fonction de prime $\Pi(t)$ est la suivante :

$$\Pi(t) = (1 + \eta) E[N(t)] E[U], \quad (2.10)$$

où $EN(t)$ est le nombre espéré de revendications jusqu'au temps t , tandis que EU_i , est la taille moyenne des revendications. Le constant η est le chargement de sécurité (safety loading) qui doit faire attention non seulement des dépenses administratives pour traiter le portefeuille mais aussi, du gain nécessaire que la société veut faire en fin de compte. Si $N(t)$ est un processus de Poisson, la fonction de la prime $\Pi(t)$ donnée dans (2.10) aura la forme $\Pi(t) = \beta t$, pour tout $\beta > 0$. La prime de la forme (2.10) avec η indépendant du portefeuille est appelé principe de la valeur espérée "expected value principle". Ce dernier ne tient pas compte de la variabilité du portefeuille, donc, des principes alternatives incluent par exemple la variance de $N(t)$ et la variance de U peuvent être adaptées.

2.4.1 Principe de calcul de prime

Définition 2.4 *Le principe de calcul de prime est une règle qui assigne un nombre non négatif Π (la prime) à n'importe quel risque donné X (une variable aléatoire positive) i.e. déterminer la prime comme un fonctionnel en assignant une valeur $\Pi(F_X) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ à la distribution de risque $F_X(t)$.*

Désormais on note $\Pi(X)$ à la place de $\Pi(F_X)$.

Typiquement la prime $\Pi(X)$ dépend de certains caractéristiques de F_X comme l'espérance EX ou la variance $varX$. La différence $\Pi(X) - EX$ est appelée le chargement de sécurité, et ce dernier doit être positif. Dans ce qui suit le risque est modélisé comme une variable aléatoire positive.

2.4.2 Propriétés de bonnes primes

On suppose toujours que la prime $\Pi(X)$ est finie. Soit X, Y, Z des risques assurables arbitraires pour les quelles les primes ci-dessous sont bien définies.

1. aucun chargement de sécurité injustifié si, pour tout constant $a \geq 0$, $\Pi(a) = 0$
2. proportionnalité si, pour tout constant $a \geq 0$, $\Pi(aX) = a\Pi(X)$.
3. sous-additivité si, $\Pi(X + Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$.

4. additivité si, $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$.
5. consistance si, pour tout $a \geq 0$, $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$.
6. conservation d'ordre stochastique si, $X \leq_{st} Y$ implique que $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$.
7. compatibilité sous mélange, pour tout $P \in [0, 1]$ et pour tout Z , $\Pi(X) = \Pi(Y)$ implique $\Pi(PF_X + (1 - p)F_Z) = \Pi(PF_Y + (1 - p)F_Z)$

Remarques 5

1. *le principe de calcul de prime additif avec aucun chargement de sécurité injustifié est aussi consistant.*
2. *typiquement, l'additivité est exigée pour des risques indépendants.*
3. *en générale $\Pi(X + Y)$ dépend de la distribution conjointe de X et Y .*

2.4.3 Quelques principes de base

Parmi les principes de calcul de prime les plus simple on cite :

- *principe de la valeur espérée* : pour tout $a \geq 0$, $\Pi(X) = (1 + a)EX$, ce principe paraît bon mais, il ne tiens pas compte de la variabilité du risque subordonné X , et cela peut être dangereux pour l'assureur. On présente des principes où le chargement de sécurité $\Pi(X) - EX$ dépend de la variabilité du risque X . Dans Bühlmann(1970) on trouve quatre principes de calcul de prime, les suivant : pour tout $a > 0$.
- *principe de la prime nette* : $\Pi(X) = EX$
- *principe de l'écart-type* : $\Pi(X) = E(X) + a\sqrt{var(X)}$.
- *principe de la variance* : $\Pi(X) = E(X) + a, var(X)$.
- *principe de l'utilité nulle* : soit $u(x)(x \in \mathbb{R})$ une fonction deux fois différentiable avec $u'(x) > 0$. Donc Π est défini par l'équation $E[u(\Pi(X) - X)] = u(0)$. En supposant que $u(0) = 0, u'(0) = 1$. Gerber (1974) a mentionné d'autre principes :
- *principe de la valeur moyenne* : soit $u(x)(x \in \mathbb{R}^*)$ une fonction strictement croissante et continue. Donc on définit $\Pi(X) = u^{-1}E[u(X)]$, où u^{-1} note la fonction inverse de u
- *principe de la perte maximale* : pour $p \geq 0, q = 1 - p$ on a $\Pi(X) = pE(X) + q \max(X)$ où, $\max(X)$ note le point terminal à droite du rang de X .
- Bühlmann, Gagliardi, et Strauts (1977) ont introduit une certaine famille de principe de calcul de prime. Pour tout risque la prime Π est défini

comme la solution de l'équation $E(u(X - z\Pi(X))) = (1 - z)\Pi(X)$ où $u(t)$ est une fonction deux fois différentiable avec $u'(t) > 0$, $u''(t) \geq 0$, pour $t \in \mathbb{R}^*$. Pour $z = 1$, ce principe coïncide avec le principe d'utilité nulle. Pour $t = 0$ le principe de valeur espéré et un cas spécial.

- *Prime de la variance modifiée* : $\Pi(X) = EX + avarX/EX$ si, $EX > 0$, avec $\Pi(X) = 0$ si, EX .
- *Principe exponentiel* : $\Pi(X) = a^{-1} \log Ee^{ax}$. Ce principe n'est pas approprié pour les risques Heavy Tailed.
- *Principe de risque ajusté* : $\Pi(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))^{1/p} dx$, où $p \geq 1$ appelé *coefficient de distorsion*. Ce principe a un chargement de sécurité non négatif, mais aucun chargement de sécurité injustifié, en plus, ce principe de prime est proportionnel, consistant, sous additif et stochastiquement monotone.
- *Principe de quantile* : $\Pi(X) = F_X^{-1}(1 - \varepsilon)$ i.e., la prime la plus petite tel que la probabilité d'une perte est à la plus part ε . Noter que $F_X^{-1}(1/2)$ est une médiane de X . Concédons la déviation espérée absolue $k_X = E|X - F_X^{-1}(1/2)|$. Alors, pour des risques arbitraires X, Y , nous avons $k_{X+Y} = k_X + k_Y$ une modification de principe d'écart type est la suivante :
- *Principe de l'écart absolu* : $\Pi(X) = EX + ak_X$, où $a \geq 0$ est un constant.

2.5 Processus de la réserve de risque

Rappelons d'après l'introduction que la réserve de risque au temps t est donnée par :

$$R(t) = u + \Pi(t) - X(t), \quad (2.11)$$

où u est la réserve initiale. La raison ultime devrait être avoir quelques informations sur la distribution $R(t)$ ou si cela est impossible, sur les premiers moments de $R(t)$. Comme s'est déjà désigné ci dessus, la distribution de $X(t)$ est très compliquée. Si nous ajoutons plus qu'il n'en faut un caractère probablement aléatoire du revenu de primes, donc la situation complète devient de plus en plus mauvaise. Il y a une seule situation particulière, cependant, où on peut donner une étude complète de la nature stochastique de la réserve de risque. Supposons que le temps est mesuré par des entiers. Donc nous additionnons tout les primes collectées dans une période n en un seul nombre $\Pi_n = \Pi(n) - \Pi(n-1)$ qui est supposé aléatoire. De même nous additionnons tout les revendications arrivées dans une période n et notons ce montant par X_n , où $X_n = X(n) - X(n-1)$. La réserve de risque après la période n est

donc égale à

$$R_n = R(n) = u + \Pi(n) - X(n) = u - \sum_{i=1}^n (X_i - \Pi_i) \quad (2.12)$$

Le processus stochastique résultant des sommes partielles $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ est appelé le processus de revendications de surplus. En particulier si on suppose que la suite $\{Y_n, n \geq 1\}$ avec $Y_n = X_n - \Pi_n$ représentent des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées alors $\{S_n\}$ est une marche aléatoire. Si les primes ne sont pas aléatoires on peut écrire

$$P(R(t) \geq x) = P(X(t) \leq u + \Pi(t) - x) = F_{X(t)}(u + \Pi(t) - x), \quad (2.13)$$

ce qui montre l'importance d'avoir une expression pratique de la distribution du montant global de risque

2.5.1 Probabilité de ruine

En actuariat, la théorie de la ruine s'intéresse à décrire le comportement du surplus d'une compagnie d'assurance et au problème de l'évaluation de la probabilité que ce surplus devienne négatif. Considérons le processus $R(t) = u + \Pi(t) - X(t)$ et définissons la variable aléatoire τ avec $\tau = \inf \{t \geq 0, R(t) < 0\}$. L'instant τ nous donne le temps de ruine du portefeuille, où nous interprétons la ruine dans un sens technique. La probabilité de survie où de non ruine dans un temps finie sera définie et notée par

$$\bar{\Psi}(u, x) = P\left(\inf_{0 < t \leq x} R(t) \geq 0\right) = P(\tau(u) > x), \quad (2.14)$$

La probabilité de survie sur un horizon de temps infini est définie par

$$\bar{\Psi}(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} R(t) \geq 0\right) = P(\tau(u) = \infty). \quad (2.15)$$

Les notations alternatives qui sont dans l'utilisation constante se réfèrent aux probabilités de ruine qui sont définies par les égalités

$$\Psi(u, x) = 1 - \bar{\Psi}(u, x), \quad \Psi(u) = 1 - \bar{\Psi}(u). \quad (2.16)$$

Par définition du processus de risque, la ruine peut arriver seulement dans la revendication des temps σ_i , de là pour $u \geq 0$, et si $\Pi(t) = ct$, on a

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= P(u + ct - X(t) < 0, \text{ pour tout } t \geq 0) \\ &= P(u + c\sigma_n - X(\sigma_n) < 0, \text{ pour tout } n \geq 1) \\ &= P\left(u + \sum_{k=1}^n (cT_k - U_k) < 0, \text{ pour tout } n \geq 1\right) \\ &= P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (U_k - cT_k) > u\right).\end{aligned}$$

Donc, $\Psi(u) < 1$ est équivalente à la condition

$$1 - \Psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (U_k - cT_k) \leq u\right) > 0, \quad u \geq 0. \quad (2.17)$$

Cette dernière expression a un rôle significatif pour trouver d'autres formes de la probabilité de ruine dans par exemple des processus de renouvellements. L'estimation de $\Psi(u)$ peut être mise au point pour une grande catégorie de modèles en appliquant une variété de techniques. Nous trouvons dans [18] un traitement exhaustif concernant l'estimation de $\Psi(u)$ dans le cas du modèle de Cramér-Ludberg ainsi que le modèle de renouvellement. Les tailles de revendications et le capital initial ont une influence sur l'estimation de $\Psi(u)$.

2.5.2 Conclusion

Dans la section 2.4 nous avons déjà mentionné que le calcul de primes constitue une partie essentielle du savoir faire (professionnel) actuariel. Bien que ces primes soient non aléatoires pour un certain horizon de temps, leur calcul implique l'information sur les éléments stochastiques dans le portefeuille et dans l'environnement économique. Cependant, même une fois que les primes sont fixées, le revenu futur de prime d'un assureur n'est pas déterminé. Pour une raison, le nombre de clients peut augmenter ou diminuer dans le temps hors du contrôle de l'assureur. Comme l'assureur investit l'excédent aux marchés financiers, il y a toujours une autre source d'incertitude qui est causée par les fluctuations aléatoires de ces marchés. On remarque généralement, avec les revendications arrivantes, l'intérêt et les taux d'inflation changent de pas beaucoup plus petits que ceux de la réserve de risque du portefeuille. Cette situation est modélisée en utilisant des processus stochastiques bien définies. Une étude détaillée se trouve par exemple dans [37].

Chapitre 3

Assurance et Réassurance

3.1 Introduction

Les compagnies de réassurance assurent un rôle économique essentiel par la fourniture d'une couverture des risques assumés par les compagnies d'assurance pour leurs clients. En plus d'assurer les assureurs, les compagnies de réassurance sont également des intermédiaires financiers et des investisseurs institutionnels de premier ordre. Leur intégrité est essentielle à la stabilité du secteur financier. Ils opèrent dans un marché global où leurs activités ne font le plus souvent pas l'objet d'un contrôle prudentiel.

Une année 2004 particulièrement meurtrière et coûteuse. Munich Re estime ainsi que l'année 2004 était, dès avant le 26 décembre, la plus coûteuse de l'histoire de l'assurance en matière de catastrophes naturelles, avec des pertes de 40 milliards de dollars ; la deuxième année la plus coûteuse étant 1992, marquée par le cyclone Andrew, avec des pertes assurées de 26 milliards de dollars.

L'attention se porte en priorité sur les risques qualifiés de majeurs – caractérisés par une faible fréquence et une extrême gravité - et sur les dommages qu'ils provoquent. À l'échelle mondiale, et en moyenne annuelle, on estime que les quarante catastrophes les plus importantes sont responsables d'environ 60 000 pertes humaines ³, tandis que le total des pertes matérielles subies, assurées donc indemnisées, se situe annuellement aux alentours de 14 milliards de dollars ⁴. Lors de chaque catastrophe, à la tragédie humaine

³La catastrophe de 2004 en Asie du Sud-Est bouscule ces moyennes, le nombre est estimé à environ 270 000 victimes, principalement en Indonésie, Thaïlande, Sri-Lanka, Inde du Sud. Les dégâts matériels sont considérables, mais compte tenu du faible pourcentage d'assurés, on ne prévoit de couvrir par l'assurance qu'environ 10 milliards de dollars de pertes matérielles

⁴Le record atteint en 1992 lors du cyclone Andrew aux États-Unis, de près de 21

et au choc émotionnel qui frappent les populations sinistrées et les opinions publiques alertées par une couverture médiatique intense, s'ajoutent les atteintes immédiates ou prolongées à l'environnement, le poids des pertes économiques et, dans les pays les plus développés, le coût des indemnisations que doivent assumer les sociétés d'assurance et de réassurance[26].

3.2 Généralités sur l'assurance

définition 3.1 *assurance, opération par laquelle une personne, l'assureur, s'engage à indemniser une autre personne, l'assuré, en cas de réalisation d'un risque déterminé, moyennant le paiement préalable d'une prime ou d'une cotisation.*

Le terme « *risque* » désigne à la fois la cause du risque, l'objet du risque ou encore les conséquences du sinistre. Donc le risque est à la fois, *la chose garantie* (l'automobile) *l'événement dommageable*, contre la survenance duquel on veut se protéger (l'accident, incendie) et *l'enjeu financier* duquel est confronté l'assureur.

Techniquement, le rôle de l'assureur est d'évaluer le prix de ce risque à partir des garanties offertes et des paramètres statistiques. Il tiendra compte à la fois du montant moyen des sinistres, de ses valeurs extrêmes, de sa répartition, de sa probabilité de survenance,...

La difficulté- et le métier pourrait-on dire – pour l'assureur consiste à donner le juste prix à ce risque qui satisfasse les parties dans la durée.

3.2.1 Principe de l'assurance

Le mécanisme de l'assurance s'appuie sur la compensation des risques : si tous les assurés sont soumis à un risque, la probabilité de voir celui-ci se réaliser pour tous les assurés est faible. Les victimes sont dédommagées grâce aux contributions versées par la collectivité des cotisants. L'assureur doit donc être capable de prévoir les charges qu'il aura à supporter du fait des risques qu'il couvre lorsqu'il établit ses polices d'assurance. Ces évaluations sont effectuées grâce au calcul de probabilités réalisé par un actuaire. La loi des grands nombres permet, en effet, d'établir les lois de survenance des risques, ce qui permet, en fonction de la probabilité de leur survenance et de leur fréquence, de déterminer le montant des polices d'assurance, auquel s'ajoute les frais de gestion de l'assureur. La valeur de l'indemnisation varie selon la fréquence des sinistres et la valeur assurée.

milliards de dollars, risque d'être dépassé après les tempêtes tropicales (Frances, Charley, Jeanne) qui ont dévasté les Caraïbes et le sud des États-Unis en septembre 2004.

3.2.2 Types de l'assurance

Il existe deux grands types d'assurance : *les assurances de dommages* et *les assurances de personnes*. Les assurances de dommages couvrent la réparation d'un préjudice, qu'il soit direct, c'est-à-dire qu'il porte sur un bien appartenant à l'assuré (assurance de choses), ou indirect, c'est-à-dire qu'il soit subi par un tiers du fait de l'assuré (assurance de responsabilité). Les contrats d'assurance combinent souvent ces deux aspects, comme le fait, par exemple, l'assurance-automobile multirisques. Pour leur part, les assurances de personnes garantissent l'individu contre les événements qui touchent à son existence et à sa santé : il s'agit principalement des assurances sur la vie, ou encore de celles qui couvrent les risques liés à la maladie ou aux accidents.

3.2.3 Pourquoi la nécessité de la réassurance ?

La réassurance est une activité principale de presque tous les assureurs. Nous exposons d'abord pourquoi la réassurance peut être nécessaire. Comme exprimé par Broch (1960), une société fait l'accord sur la réassurance quand elle cherche à réduire la probabilité des pertes souffrantes qui peuvent mettre en danger la position de la société. Parmi les raisons de peser la réassurance,

- l'apparition excessive de grandes revendications ; ici nous pensons aux revendications résultant d'accidents sévères comme avec des centrales atomiques ou les cas de mauvais traitements médicaux sérieux.

- Exceptionnellement un grand nombre de revendications, grand ou non, des feux de forêt vastes peuvent temporairement mener à un très grand nombre de plus ou moins grandes revendications. Des ouragans, des tremblements de terre et des inondations peuvent causer des accumulations considérables de revendications.

- Changements inattendus de collection de prime comme dans le cas d'une inflation soudaine ou augmentation imprévue de traitement de dépenses.

- Il y a des restrictions légales forçant la société d'avoir des réserves pour couvrir une certaine partie de revendications futures. Pour une société plus petite ces restrictions causeraient une prime non compétitive. La prise de la réassurance est une voie confortable de résolution de ce problème.

- Si une société peut prendre la réassurance, il peut aussi offrir plus de services à ses clients. La réassurance peut donc être considérée un moyen d'augmenter la capacité de la société.

Par exemple le tableau suivant présente quelques exemples de sinistres (prix de 1996)[35]

	Revendications en US \$ Million	Morts	Année	Evènement	Région
1	17.945	38	1992	Ouragan Andrew	USA
2	13.277	60	1994	Tremblement de terre Northridge Californie	USA
p	6.420	51	1991	Tourbillon Mireille	Japan
3	5.788		1995	Prime brute Allianz	
4	5.531	95	1990	Tempête d'hiver Daria (Ocrane)	Europe
5	5.326	61	1989	Ouragan Hugo	Puerto Rico
6	4.451	13	1987	Tempête d'automne	Europe
7	3.844	64	1990	Tempête d'hiver Vivian (Orkan)	Europe
8	2.662	167	1988	Explosion Piper Alpha	UK
9	2.554	6.000	1995	Tremblement de terre Hanshin Kobe	Japan
10	2.170	59	1995	Ouragan Opal	USA

TAB. 3.1 – Coûts financiers à l'industrie d'assurance des dix pertes d'assurance les plus chères dans moins de dix ans - de 1987 à 1995

3.3 La réassurance

La réassurance dans son principe ne diffère pas de l'assurance. Mais au lieu de couvrir directement des risques humains ou matériels, elle assure les compagnies d'assurance; ses activités, cumulant la diversité des situations particulières de ces dernières, sont donc plus complexes et son champ d'application est plus vaste que le leur, puisque c'est le monde entier. Une compagnie d'assurance émit un contrat. Elle est l'assureur direct d'un particulier ou d'une entreprise. C'est son nom qui figure sur le contrat et c'est elle qui porte la responsabilité de tous les sinistres qu'il couvre. Elle est le seul interlocuteur de l'assuré. Mais elle convient avec un ou plusieurs réassureurs de leur transférer tout ou partie du risque auquel ce contrat l'expose; c'est pourquoi, dans le jargon du métier on l'appelle «*la cédante*». Si un sinistre survient, elle doit à son client la totalité de l'indemnisation à charge

pour elle de récupérer auprès de ses réassureurs les sommes correspondant au risque qu'elle lui a transféré. Au début de chaque année la compagnie d'assurance souscrit ainsi auprès de ses réassureurs le ou les contrats qui la protégeront pour ses exercices. En général, chaque réassureur cède à son tour à d'autres réassureurs, appelés les «*rétrocessionnaires*», une partie de risque en question.

Le tableau suivant présente les principaux réassureurs mondiaux (classement 2000)[4].

Compagnie	Pays	Primes nettes (USD \$ M)
Munich Re	Allemagne	15277
Swiss Re	Suisse	14479
Berkshire Hathaway Group	USA	8575
Employers Re Group	USA	7924
Hannover Re Group	Allemagne	4994
Gerling Globale Re	Allemagne	4117
Lloyd's	Grande-Bretagne	3953
Allianz Re	Allemagne	3727
SCOR	France	2810
Zurich Re	Suisse	2485
Transtlantic Re	USA	1659
AXA Re	France	1425
PARTNER Re	Bermudes	1380
ST PAUL Re	USA	1252
EVEREST Re	USA	1219

TAB. 3.2 – Classement des 15 plus importants groupes de réassurance 2000

3.3.1 Les fonctions d'un réassureur

Pratiquée à l'échelle mondiale, la réassurance remplit trois fonctions essentielles :

1-Consolider la sécurité financière du mécanisme d'assurance en aidant l'assureur direct à faire face aux risques les plus lourds.

2-Accroître le montant maximal qu'il peut assumer pour un sinistre ou une catégorie des sinistres et l'autoriser à souscrire des risques plus nombreux.

3-Lui permettre de disposer de liquidités importantes en cas de sinistre grave.

La réassurance offre aussi à ses clients un certain nombre d'autres services, par exemple un grand réassureur comme *SCOR* joue aussi après des cédantes un rôle de conseiller.

-En les aidant à construire leur plan de réassurance. Le choix et la nature des couvertures pouvant avoir un impact considérable sur la rentabilité et la solvabilité des cédantes.

-En leur fournissant une gamme très variée d'assistance. Formation de cadres techniques et administratifs, assistance sur place en matière d'organisation, de comptabilité ou d'informatique, inspection des risques, et notamment coopération en matière de règlement de sinistre.

-En leur apportant sa compétence. Dans certains domaines très spécialisé tels que l'assurance des grandes chantiers de travaux publics ou l'assurance-décès des personnes ayant survécu à des maladies graves, un assureur dispose à la fois des statistiques concernant ces risques, de la connaissance des tarifs pratiques sur les marchés et de la capacité permanente de couvrir ses engagements pour le compte des cédantes.

3.3.2 Principe du contrat d'un réassureur

Un contrat de réassurance indique la partie $X - h(X)$ du montant de revendication X qui doit être indemnisé par le réassureur (soustraire le montant du rétention $h(X)$ du montant X). Ici $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, la fonction de rétention, est assumée pour avoir les propriétés suivantes :

- $h(x)$ et $x - h(x)$ sont croissantes,
- $0 \leq h(x) \leq x$ et en particulier $h(0) = 0$.

Il est raisonnable de supposer que la fonction de rétention $h(x)$ et la fonction de compensation (ou rémunération) $k(x) = x - h(x)$ sont croissantes, en pratique, les fonctions de rétention sont souvent continues. Les choix possibles d'une fonction de rétention $h(x)$ sont :

- $h(x) = ax$ pour un contrat proportionnel, où $0 < a \leq 1$,
- $h(x) = \min\{a, x\}$ pour un contrat stop-loss où $a > 0$.

Considérons les risques de la forme $X = \sum_{i=1}^N U_i$, où N est une variable aléatoire entier et où les variables aléatoires positives U_i sont interprétées comme des risques locaux. On peut modéliser la *réassurance locale* avec des

fonctions de rétention locales $h_i(x)$ comme suit : Pour la i ème revendication de taille U_i la partie $U_i - h_i(U_i)$ est portée par le réassureur. Les fonctions de rétention locales $h_i(x)$ sont supposées pour avoir les mêmes propriétés que leurs alternatives globales $h(x)$.

Soit $u(x)$ une fonction d'utilité. Si $\Pi(X)$ est la prime payée au réassureur, l'utilité du réassureur est $u\left(\Pi(X) - \sum_{i=1}^N k_i(U_i)\right)$, où $k_i(x) = x - h_i(x)$ sont les fonctions de compensation locales correspondantes. Si un contrat global est employé avec la fonction de rétention $h(x)$ l'utilité du réassureur est $u(\Pi(X) - k(X))$, où $k(x) = x - h(x)$ est la fonction de compensation correspondante. Le résultat suivant suggère que dans quelques cas un contrat global soit meilleur pour le réassureur.

Théorème 3.1[37] : *Soit X un risque assurable de la forme $X = \sum_{i=1}^N U_i$ et soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave croissante. Pour une réassurance locale avec les fonctions de compensations k_i ($i = 1, 2, \dots$), il existe une fonction $k(x)$ telle que*

$$Ek(X) = E\left(\sum_{i=1}^N k_i(U_i)\right)$$

et

$$Eu\left(\Pi(X) - \sum_{i=1}^N k_i(U_i)\right) \leq Eu(\Pi(X) - k(X)).$$

Preuve. Voir [37]

3.3.3 Techniques de la réassurance

Il existe deux types de couvertures de réassurance : les facultatives et les traités.

-Les facultatives sont appliquées essentiellement pour les grands risques industriels et les grands ouvrages d'équipement. Le réassureur propose un traité spécifique pour chaque risque pris individuellement.

-Le traité de réassurance est une forme de couverture globale que les cédantes achètent, directement ou par l'intermédiaire d'un courtier de réassurance, pour protéger tout ou partie de leur portefeuille dans une branche donnée. Tous les contrats par un traité sont automatiquement protégés, sans qu'il soit besoin d'autorisation, au cas par cas, du réassureur. Les traités peuvent être non-proportionnels ou proportionnels.

-Dans les traités proportionnels les risques sont fendus entre l'assureur direct et le réassureur selon une proportion de responsabilité - dans la plupart des cas mesurés par la somme assurée. Une fois que cette proportion est déterminée, le réassureur est responsable de sa proportion de risques assurés et obtient donc une proportion de primes originales et paye une proportion de revendications originales. On présente deux types de ces traités :

1. *Traité de quote-part* : dans un traité de quote-part, la rétention de l'assureur direct est exprimée comme un pourcentage de la somme originale assurée noté a . Cela signifie que la fonction de rétention prend la forme $h(x) = ax$, i.e

$$h(X(t)) = aX(t) = a \sum_{i=1}^{N(t)} U_i = \sum_{i=1}^{N(t)} h(U_i)$$

où $0 < a < 1$ est le *facteur de proportionnalité*. Avec une *quote-part* la responsabilité du réassureur est limitée par une somme absolue assurée appelé *la limite de traité*. Cette forme de réassurance est très populaire dans la plupart de toutes branches d'assurance vraisemblablement à cause de sa simplicité conceptuelle et administrative. De plus cette sorte de réassurance est souvent employée au début de petites compagnies pour élargir leurs chances avec des polices de garantie (source du graphe[35]).

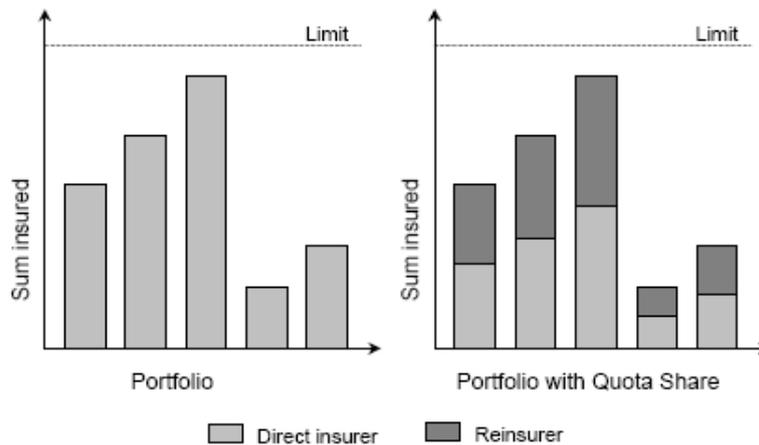


FIG. 3.1 – Traité de quote-part

2. *Traité de surplus* : en cas de la réassurance de surplus le réassureur prend une part de seulement ces risques qui excèdent la ligne de rétention de l'assureur direct. Cette ligne est exprimée comme un montant exprimé dans des unités monétaires [par exemple en [e]]. On ne cède pas de risques avec des sommes assurées plus bas que la ligne de l'assureur direct. Les risques avec des sommes assurées qui excèdent la ligne sont partagés entre la cédante et le réassureur proportionnellement à la ligne et la partie de la somme assurée qui l'exécède. Dans le cas de l'excédent la responsabilité du réassureur est limitée par un nombre consenti de lignes (source du graphe[35]).

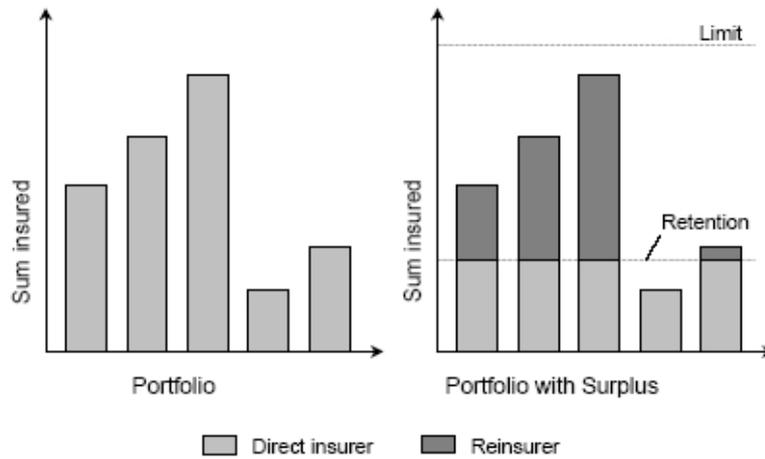


FIG. 3.2 – Traité de surplus

-Dans les traités non-proportionnels au lieu de la division des risques entre l'assureur direct et le réassureur selon les sommes assurées, les revendications sont partagées. La responsabilité de l'assureur direct est étendue à un certain montant appelé le déductible. Le réassureur paye ce qui excède ce montant et la prime non-proportionnelle est calculée séparément de la prime originale. On distingue trois types principales :

1. *l'excédent de sinistres (excess of loss)* : c'est une forme importante de réassurance. Elle est déterminée par un nombre positif b , appelé *le niveau de rétention*. Le montant réassuré est alors égale à $\sum_{i=1}^{N(t)} (U_i - b)_+$, où $x_+ = \max \{x, 0\}$. La réassurance de *l'excédent de sinistres* est en particulier intéressante si relativement un petit nombre de risques est

assuré et les distributions des tailles de revendications individuelles sont à queues lourdes. Nous trouvons dans cette forme $-WXL/R$: excédent de sinistre par risque (working excess of loss per risk) et $-XL/E$: excédent de sinistre par événement (working excess of loss per event) (source du graphe[35]).

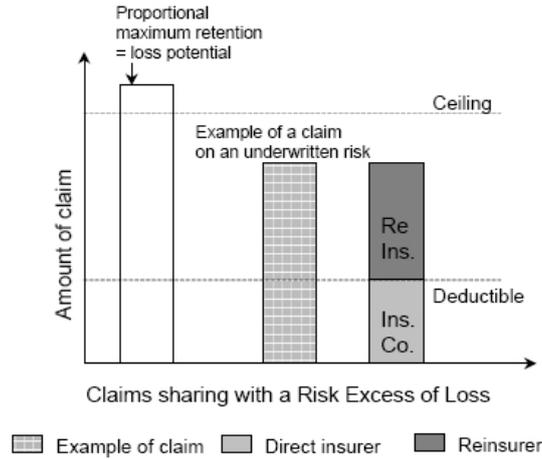


FIG. 3.3 – Traité de l'excédent de sinistres

2. *l'excédent de perte annuelle (stop loss)* : avec un excédent de perte annuelle, le réassureur paye si les pertes nettes globales de la société directe pendant une année de compte excèdent un montant prédéterminé ou une proportion de revenu de prime. L'excédent de perte annuelle est la forme la plus complète des couvertures de réassurance
3. *l'excédent de sinistres cumulés (accumulation excess of loss)* : cela fournit la protection si un événement de perte affecte plusieurs risques. Le réassureur paye pour cette partie de l'accumulation la somme excédent le deductible, sa responsabilité étant étonné par la limite de traité comme $-CAT/XL$ (catastrophe excess of loss).
4. dans le cas des revendications de grande envergure, il semble désirable de chercher des traités basés sur les plus grandes revendications dans le portefeuille.

Si nous dénotons par $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{N(t)}$ les statistiques d'ordre du vecteur aléatoire $U_1, U_2, \dots, U_{N(t)}$ de la tailles des revendications, alors

$$Z(t) = \sum_{i=1}^r U_{(N(t)-i+1)} - rU_{(N(t)-r)} = \sum_{i=1}^r (U_i - U_{(N(t)-r)})_+$$

composeraient un traité de réassurance plutôt propre. Il a été présenté par Thépaut (1950) et est appelé excédent du coût moyen relatif (*ECOMOR*). Le montant $Z(t)$ couvre que la partie des plus grandes revendications r qui dépassent la rétention aléatoire $U_{(N(t)-r)}$ où $U_{(N(t)-r)} = 0$ si $N(t) \leq r$. Dans quelque sens le traité *ECOMOR* reformule le traité de l'excédent de sinistres, mais avec une rétention aléatoire.

3.3.4 La réassurance financière

Dans le domaine financier le réassureur peut rendre des services particulièrement précieux aux compagnies directes par exemple, dans la plupart des pays, la réglementation prévoit un ratio minimum entre les fonds propres de l'assureur et le chiffre d'affaires qu'il conserve, ce ratio est la marge de solvabilité. Il en découle qu'un assureur dynamique, mais peu capitalisé, ne peut progresser que s'il a largement recours à la réassurance; le réassureur joue parfois aussi un rôle de financier plus direct. Ainsi, en assurance-Vie, le lancement d'une nouvelle gamme de produits nécessite des investissements très importants, pour la création et le développement de réseaux de vendeurs entre autres. Souvent le réassureur est appelé à partager le financement de de cet investissement, en tant que partenaire; il sera alors rémunéré comme tel; vis-à-vis des cédantes des pays à monnaie faible, le réassureur joue souvent le rôle d'un fournisseur de devises. En effet, ces pays, souvent en voie de développement, réassurent les biens d'équipement qu'ils importent dans le souci d'obtenir sans délai, en cas de sinistre, des devises fortes permettant le remplacement de l'installation.

3.3.5 Conclusion

Les pertes se constituant comme de grandes pertes sont caractérisées par les conditions suivantes :

- râpe que certaine somme d'argent ;
- ont des effets défavorables financiers ;
- l'événement qu'une si grande perte arrive est rare ;
- résident à la queue droite d'une fonction de distribution.

3.4 Un mot sur l'actuariat

Actuariat, discipline mathématique faisant appel aux théories des probabilités, aux statistiques et au calcul financier appliqués au domaine de l'assurance, des retraites, de la démographie, ainsi qu'à d'autres domaines connexes.

L'actuaire établit des tables de probabilités de réalisation d'un risque (accidents, maladies, sinistres) à partir desquels il détermine le montant des primes à payer pour tout contrat dont l'objet est de garantir la survenance de ces risques. Ceci peut être le cas pour le contrat d'assurance par exemple.

La science actuarielle repose sur l'hypothèse fondamentale que la fréquence avec laquelle des événements sont survenus dans le passé peut être réutilisée pour prévoir ou mesurer la probabilité de leur réalisation dans le futur. Né de l'étude des lois concernant la mortalité, l'actuariat a permis de définir les règles applicables à la capitalisation et est à l'origine du développement du mécanisme de l'assurance vie.

Principalement utilisés dans le secteur de l'assurance, les actuaires sont maintenant largement employés par les organismes gouvernementaux qui réglementent le secteur de l'assurance et qui sont liés aux programmes de la Sécurité sociale. Au-delà, cette méthode de calcul est désormais couramment usitée dans le domaine bancaire, ainsi qu'en matière de gestion d'opérations financières reposant sur un calcul d'actualisation du résultat (afin d'arbitrer entre des choix d'investissement, par exemple).

Chapitre 4

Estimation de la Prime de Risque-Ajustée

4.1 Introduction

Actuellement, les actuaires trouvent que le secteur entier de la réassurance est une application très importante de la théorie des valeurs extrêmes, puisque on doit toujours sauvegarder une compagnie d'assurance contre les revendications excessives qui peuvent mettre en danger la solvabilité du portefeuille (voir par exemple Cebrián et al. (2003) [8], Beirlant et al. (2001) et Reiss et Thomas (1999, 2001). Pour déterminer un prix (prime) adéquat pour ces risques extrêmes on doit utiliser un principe de tarification approprié. Clairement, la prime ne peut pas être aussi basse parce que cela aboutirait à des grandes pertes inadmissibles pour l'assureur, d'autre part, la prime ne peut pas être trop haute pour des raisons de compétition entre les assureurs. Il y a plusieurs variantes pour définir des principes de prime (voir par exemple, Bühlman (1980), Kaas, van Heerwaarden et Goovaerts (1994) et Wang (1996, 1998, 2001).

Wang (1996) [40] a proposé un principe de prime basé sur une transformation proportionnelle de la fonction d'hasard. Cette approche de tarification des contrats d'assurance considère les pertes de l'assurance comme des variables aléatoires positives et engendre des primes qui sont plus hautes que la valeur attendue de la perte d'assurance.

Définition 4.1 *une fonction de distorsion g est une fonction définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$*

Définition 4.2 *soit X une variable aléatoire positive de fonction de distribution absolument continue F et de fonction de densité f , alors, la fonction*

défini par $m_X(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ est appelée fonction de taux d'hasard.

Remarque 6 : dans les mathématiques d'assurance-vie, $m(t)$ est appelé la fonction de taux de mortalité de F .

Remarque 7 : rappelons que si W_n est un mouvement Brownien et B_n un pont Brownien alors, $B_n(s) = W_n(s) - sW_n(1)$. Le mouvement brownien est le plus célèbre des processus aléatoires. Il doit son appellation au biologiste anglais Brown qui le découvre en 1828 lors de l'observation du mouvement extrêmement désordonné des particules de pollen dans un fluide. La théorie mathématique a débuté en 1900-1905 (Bachelier, Einstein) et s'est poursuivie vers 1930 jusqu'à nos jours. Ce processus intervient maintenant dans de nombreux modèles de phénomènes naturels, physiques ou économiques.

4.1.1 Principe de la prime de Wang

Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de risques *iid* positifs de fonction de distribution commune $F_X(s) = P(X < s)$ avec $S_X(s) = 1 - F_X(s)$ est la fonction de survie. Le principe de prime de Wang (Wang, 1995, 1996) donne la prime comme suit :

$$\Pi_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(s)) ds,$$

où g est une fonction de distorsion. Si g est une fonction puissance i.e. pour tout $p \geq 1$, $g(s) = s^{1/p}$, alors la fonction $g(S_X(s))$ est appelé transformation d'hasard proportionnelle et

$$\Pi(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(s))^{1/p} ds \quad (4.1)$$

est appelé prime d'hasard proportionnel (*PHpermium*) de X , avec $p \geq 1$ appelé coefficient de distorsion où (*coefficient d'aversion*). Remarquons que si $F_X(s)$ a une densité, alors la prime donnée dans (4.1) peut être interprétée comme une prime nette d'un autre risque Y dont, sa fonction queue est $\bar{F}_Y(s) = (1 - F_X(s))^{1/p}$ et dont sa fonction de taux d'hasard est proportionnellement inférieur à celle du risque X car $m_Y(t) = d/dt \log \bar{F}_Y(t) = p^{-1}m_X(t)$. C'est-à-dire, on peut voir Y comme le risque correspondant à X après le dégonflement de la fonction de taux d'hasard de X par le facteur constant p^{-1} . La prime présentée dans (4.1) appelée *Prime de Risque Ajustée* et noté *RAP (Risk-Adjusted-Premium)* a un chargement de sécurité non négatif, mais aucun chargement de sécurité injustifié, en plus, ce principe de prime est proportionnel, consistant, sous additif et stochastiquement monotone. Ce qui fait, ce principe sera une bonne statistique pour tarifier des risques extrêmes.

Par différentes approches, récemment Necir et Boukhetala (2004) [32]; Necir et al (2005) [31]; Meddi et Necir (2006) [28] se sont intéressés à estimer la prime mentionnée ci-dessous pour tarifier des risques dépassant un seuil élevé u_n sachant que ces risques suivent des distributions *heavy-tailed*. la *prime de risque ajustée* défini dans (4.1) correspondant à des pertes arrivées à partir d'un seuil élevé u est défini comme suit :

$$\Pi_u(X) := \int_u^{+\infty} (1 - F(s))^{1/p} ds. \quad (4.2)$$

Notons que le seuil u doit être aussi grand et dépend de la taille de l'échantillon des revendications produites $n \geq 1$. Pour cette raison on va supposer dans ce qui suit $u = u_n$, ce qui mène à réécrire (4.2) comme suit :

$$\Pi_{u_n}(X) := \int_{u_n}^{+\infty} (1 - F(s))^{1/p} ds. \quad (4.3)$$

Nous présentons dans les trois sections suivantes trois approches pour estimer la statistique (4.3) aussi que la distribution limite de chaque estimateur obtenu.

4.2 Approche de distribution empirique

Pour les plus grandes couvertures de la réassurance en modélisant les risques par des distributions heavy-tailed et en se basant sur la fonction de distribution empirique du montant de revendications, récemment Necir et Boukhetala (2004) ont proposé un nouveau estimateur pour (4.3),

4.2.1 Construction de l'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$

Soit $k = k_n$ une suite des entiers satisfaisant $1 \leq k \leq n, k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ telle que : $u_n = Q(1 - k/n)$. où Q est la fonction inverse généralisée de F telle que, $Q(t) = F^{-1}(t) = \inf \{s, F(s) \geq t\}$, $0 < t < 1$, ce qui donne,

$$\Pi_{u_n}(X) := \int_{Q(1-k/n)}^{+\infty} (1 - F(s))^{1/p} ds,$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ les statistiques d'ordre basées sur X_1, X_2, \dots, X_n . En substituant $Q(1 - k/n)$ et $F(\cdot)$ par leur estimateurs ap-

propriétés $Q_n(1 - k/n)$ et $F_n(\cdot)$, on obtient :

$$\widehat{\Pi}_{u_n}(X) = \int_{X_{n-k,n}}^{+\infty} (1 - F_n(s))^{1/p} ds,$$

où $Q_n(\cdot)$ et $F_n(\cdot)$ sont donnés dans (1.1) et (1.2). Avec $Q_n(0) = X_{1,n}$, observons que,

$$\widehat{\Pi}_{u_n}(X) := - \int_0^{k/n} s^{1/p} dQ_n(1 - s).$$

Par une intégration par partie on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_{u_n}(X) &= p^{-1} \int_0^{k/n} s^{(1/p)-1} Q_n(1 - s) ds - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} \\ &= p^{-1} \sum_{i=1}^k \left(\int_{(i-1)/n}^{i/n} \right) X_{n-i+1,n} - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} \\ &= p^{-1} \sum_{i=1}^k \left\{ \left(\frac{i}{n} \right)^{1/p} - \left(\frac{i-1}{n} \right)^{1/p} \right\} X_{n-i+1,n} - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} \\ \widehat{\Pi}_{u_n}^1(X) &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n} \right)^{1/p} \{X_{n-i+1,n} - X_{n-i,n}\}, \quad \text{pour } p \geq 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Notons que, pour $p = 1$, les Statistiques $n\widehat{\Pi}_{u_n}^1$ correspondent au plus grande revendications des traités de la réassurance *ECOMOR* (Excédent du Coût Moyen Relatif) introduit par Thépaut, (1950) (voir, Rolski et al. (1999), page 17). Puisque on s'intéresse aux événements rares, on va supposer que la queue de la fonction de distribution $1 - F$ est heavy-tailed ou à variations régulières à l'infini. pour γ positif i.e.,

$((1 - F) \in D(\Phi_\gamma))$, à savoir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-1/\gamma}, \text{ pour tout } x > 0 \quad (4.5)$$

Nous avons une autre définition équivalente à (4.5), en terme de la fonction des quantiles

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(1 - tx)}{Q(1 - t)} = x^{-\gamma} \text{ pour tout } x > 0 \quad (4.6)$$

(voir par exemple Embrechts et al. (1997)). Pour le paramètre γ on appropriera l'estimateur de Hill (1976), voir la section.(1.2.3) . De plus, on suppose que la distribution queue $1 - F$ est à variations régulières au second ordre avec $-1/\gamma$ est le premier paramètre et $\rho \leq 0$ est le deuxième paramètre, telle que : il existe une fonction $A(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ de signe constant à l'infini. Ceci donne le raffinement de (4.6) comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow 0} (A(t))^{-1} \left\{ \frac{Q(1-tx)}{Q(1-t)} - x^{-\gamma} \right\} := x^{-\gamma} \frac{x^{\rho\gamma} - 1}{\rho\gamma}, \text{ pour tout } x \geq 0 \quad (4.7)$$

Si $\rho = 0$, on interprète $\frac{x^{\rho\gamma} - 1}{\rho\gamma}$ comme $\log x$ (voir par exemple, de Haan et Stadtmüller, (1996)).

La section suivante traite de la normalité asymptotique de l'estimateur (4.4) qu'on a noté $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$.

4.2.2 Normalité asymptotique de l'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$

Théorème 4.1 [32]. Supposons que (4.7) est vérifiée et $s^{1/p}Q(1-s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ pour chaque $\gamma - 1/2 < 1/p \leq 1$. Soit $k = k_n$ tel que $k \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$ et $(k/n)^{1/2} A(k/n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc,

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1-k/n)} \left\{ \widehat{\Pi}_{u_n}^1(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} \xrightarrow{D} N(0, \sigma_1^2(p, \gamma)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

où

$$\sigma_1^2(p, \gamma) := \gamma^2 \left[2p^{-2} \frac{1}{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)} - 2p^{-1} \frac{1}{\alpha + 1} + 1 \right],$$

avec $\alpha := 1/p - \gamma$.

Preuve du théorème (4.1).

Soit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction de quantile empirique est défini par

$$V_n(t) = \xi_{i,n}, \quad \text{pour } (i-1)/n < t \leq i/n, \quad i = 1, \dots, n,$$

avec $V_n(0) = \xi_{1,n}$, où $\xi_{1,n} \leq \xi_{2,n} \leq \dots \leq \xi_{n,n}$ dénote les statistiques d'ordre basées sur $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Supposons que les variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ sont définies dans un espace de probabilité (Ω, A, p) où on donne la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$, telle que $X_n = Q(\xi_n)$, pour $n = 1, 2, \dots$, et, par conséquence, $X_{i,n} = Q(\xi_{i,n})$

pour tout $1 \leq i < n$ et $n \geq 1$. Observe que pour chaque entier $n \geq 1$, on a $V_n(1 - i/n) = \xi_{n-i+1,n}$ et $Q(V_n(1 - i/n)) = X_{n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Il s'ensuit que

$$\widehat{\Pi}_{u_n}^1(X) = p^{-1} (k/n)^{1/p} \left\{ \int_0^1 s^{(1/p)-1} Q_n(1 - ks/n) ds - X_{n-k,n} \right\}.$$

D'autre part, comme $s^{1/p} Q_n(1 - s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$, il est facilement vérifié que, par une intégration par parties nous arrivons à

$$\Pi_{u_n}(X) = p^{-1} (k/n)^{1/p} \int_0^1 s^{(1/p)-1} Q(1 - ks/n) ds - (k/n)^{1/p} Q(1 - k/n).$$

Observons maintenant que

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \left\{ \widehat{\Pi}_{u_n}^1(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} = T_n^* - S_n^*,$$

où

$$T_n^* := p^{-1} k^{1/2} \int_0^1 s^{(1/p)-1} \frac{Q(1 - ks/n) - Q(1 - k/n)}{Q(1 - k/n)} ds,$$

et

$$S_n^* := k^{1/2} \frac{X_{n-k,n} - Q(1 - k/n)}{Q(1 - k/n)}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} T_n^* &= p^{-1} k^{1/2} \int_0^1 s^{(1/p)-1} \frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} \left[\frac{Q_n(1 - ks/n)}{Q(1 - ks/n)} - 1 \right] ds \\ &= \widetilde{T}_n + T_n \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{T}_n := p^{-1} k^{1/2} \int_0^{1/k} s^{(1/p)-1} \frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} \left[\frac{Q_n(1 - ks/n)}{Q(1 - ks/n)} - 1 \right] ds,$$

et

$$T_n := p^{-1} k^{1/2} \int_{1/k}^1 s^{(1/p)-1} \frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} \left[\frac{Q_n(1 - ks/n)}{Q(1 - ks/n)} - 1 \right] ds$$

de plus, pour le terme T_n , nous pouvons écrire

$$T_n := T_{n1} + T_{n2} + T_{n3},$$

où

$$\begin{aligned} T_{n1} &: = p^{-1} k^{1/2} \int_{1/k_n}^1 s^{(1/p)-1} \frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} \times \\ &\quad \left[\frac{Q_n(1 - ks/n)}{Q(1 - ks/n)} - \left(\frac{1 - V_n(1 - ks/n)}{ks/n} \right)^{-\gamma} \right] ds, \\ T_{n2} &: = p^{-1} \int_{1/k_n}^1 s^{(1/p)-1} \left[\frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} - s^{-\gamma} \right] \times \\ &\quad \left[\left(\frac{1 - V_n(1 - ks/n)}{ks/n} \right)^{-\gamma} - 1 \right] ds, \\ T_{n3} &: = p^{-1} k^{1/2} \int_{1/k_n}^1 s^{(1/p)-1} s^{-\gamma} \left[\left(\frac{1 - V_n(1 - ks/n)}{ks/n} \right)^{-\gamma} - 1 \right] ds. \end{aligned}$$

Pour le terme T_{n3} nous avons

$$T_{n3} := p^{-1} k^{1/2} (k/n)^\gamma \int_{1/k_n}^1 s^{(1/p)-1} \left\{ (1 - V_n(1 - ks/n))^{-\gamma} - (ks/n)^{-\gamma} \right\} ds.$$

Observons que T_{n3} peut être écrit comme suit :

$$T_{n3} := p^{-1} (k/n)^{\gamma-(1/p)} k^{1/2} \int_{1/n}^{k/n} s^{(1/p)-1} \left\{ (1 - V_n(1 - s))^{-\gamma} - s^{-\gamma} \right\} ds.$$

Notons que $1 - V_n(1 - s) \stackrel{D}{=} V_n(s)$. En utilisant le théorème des valeurs moyennes, nous obtenons

$$T_{n3} \stackrel{D}{=} p^{-1} (k/n)^{\gamma-(1/p)} k^{1/2} \int_{1/n}^{k/n} s^{(1/p)-1} (s + \zeta_{s,n})^{-\gamma-1} \times \{V_n(s) - s\} ds,$$

avec $|\zeta_{s,n}| \leq |V_n(s) - s|$, $1/n \leq s \leq k/n$. Soit maintenant $\theta_n := (k/n) k^{\frac{-\delta-1/2}{(1/p)-\gamma}}$, $0 < \delta < 1/2$, une suite de nombres réels positifs satisfaisant $1/n < \theta_n < k/n$. alors T_{n3} peut être décomposé en parties comme suit

$$T_{n3} \stackrel{D}{=} -p^{-1}\gamma (k/n)^{\gamma-(1/p)} k^{1/2} \int_{1/n}^{\theta_n} s^{(1/p)-1} (s + \zeta_{s,n})^{-\gamma-1} \{V_n(s) - s\} ds$$

$$-p^{-1}\gamma (k/n)^{\gamma-(1/p)} k^{1/2} \int_{\theta_n}^{k/n} s^{(1/p)-1} (s + \zeta_{s,n})^{-\gamma-1} \{V_n(s) - s\} ds$$

Suivant maintenant les mêmes arguments qui ont été employés dans la preuve du lemme 4.1 de Greneboom et al. (2003) et en employant le théorème 2.1 de Csörgő, Csörgő, Horavàth et Mason (1986), nous arrivons à : pour tout n grand

$$T_{n3} \stackrel{D}{=} (1 + o_p(1)) p^{-1}\gamma \int_0^1 s^{(1/p)-\gamma} W_n(s) ds.$$

De même nous montrons que, pour n grand

$$S_n^* \stackrel{D}{=} (1 + o_p(1)) \gamma W_n(1).$$

où $W_n(\cdot)$ est une suite de mouvement brownien standard. D'autre part, en employant la variations régulières au second ordre (4.7), l'inégalité de Potter (voir par exemple la section 3.1 de Danielsson et al. (2001)), et les théorèmes de limite de Wellner (1978) ensemble, nous omettons les détails, nous montrons que, pour n grand nous avons

$$\tilde{T}_n = T_{n1} = T_{n2} = o_p(1)$$

Donc, nous arrivons à

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \left\{ \hat{\Pi}_{u_n}^1(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} \stackrel{D}{=} \gamma \left\{ p^{-1} \int_0^1 s^{(1/p)-\gamma-1} W_n(s) ds - W_n(1) \right\}$$

$$+ o_p(1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Cela implique, puisque $W_n(\cdot)$ est une suite de mouvements Browniens que,

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \left\{ \hat{\Pi}_{u_n}^1(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} \stackrel{D}{\rightarrow} N(0, \sigma^2(p, \gamma)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où

$$\sigma^2(p, \gamma) := \gamma^2 C^2(p, \gamma),$$

avec

$$C^2(p, \gamma) := \text{var} \left\{ p^{-1} \int_0^1 s^{(1/p)-\gamma-1} W_n(s) ds - W_n(1) \right\}.$$

Soit $\alpha := 1/p - \gamma$. Puisque $E\{W_n(s)W_n(t)\} = \min(s, t)$, alors

$$\begin{aligned} C^2(p, \gamma) &= p^{-2} \int_0^1 \int_0^1 t^{(1/p)-\gamma-1} s^{(1/p)-\gamma-1} E\{W_n(t)W_n(s)\} ds dt \\ &\quad + E\{W_n(1)\}^2 \\ &\quad - 2p^{-1} \int_0^1 s^{(1/p)-\gamma-1} E\{W_n(s)W_n(1)\} ds \\ &= p^{-2} \int_0^1 \int_0^1 t^{(1/p)-\gamma-1} s^{(1/p)-\gamma-1} \min(s, t) ds dt + 1 \\ &\quad - 2p^{-1} \int_0^1 s^{(1/p)-\gamma-1} s ds, \end{aligned}$$

$$\sigma_1^2(p, \gamma) = \gamma^2 \left[2p^{-2} \frac{1}{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)} - 2p^{-1} \frac{1}{\alpha + 1} + 1 \right].$$

Cela achève la preuve du théorème (4.1). ■

4.3 Approche des excès (*POT*)

Récemment Necir et al (2005) ont proposé une autre méthode pour estimer (4.3) en utilisant la méthode des excès (*POT*) c'est-à-dire, via l'adaptation de la *GPD*.

4.3.1 Construction de l'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$

Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de risques indépendants et identiquement distribués de distribution commune F , telle que

$$\overline{F}(x) = cx^{-1/\gamma} (1 + x^{-\delta} L(x)), \text{ quand } x \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

pour $\gamma \in [0,1]$, $\delta > 0$, c une constante et L une fonction à variations lentes. Pour connaître plus de propriétés sur ces fonctions voir le chapitre 0 dans Reznik (1987) ou Seneta (1976). Ce type de fonctions de distributions contient un nombre considérable de distributions comme *log-normal*, *log-gamma*, *Pareto*, *Weibull*, *Benktander*, et *Burr* (voir par exemple, Rolski et al. (1999), page 33). Cette classe de distribution est appropriée pour des risques dangereux. On peut écrire la prime ajustée définit dans l'équation (4.3) comme.

$$\Pi_{u_n}(X) := \int_{u_n}^{+\infty} (1 - F(x+u))^{1/p} dx.$$

Par définition on a

$$\bar{F}(x+u) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(x).$$

Il en découle,

$$\Pi_{u_n}(X) = \int_0^{+\infty} (\bar{F}(u) \bar{F}_u(x))^{1/p} dx.$$

L'estimateur de la prime ajustée s'écrira :

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \int_0^{+\infty} (\hat{\bar{F}}(u) \hat{\bar{F}}_u(x))^{1/p} dx.$$

Un estimateur naturel de $\bar{F}(u)$ est donné en fonction de la distribution empirique,.

$$\hat{\lambda} = \hat{\bar{F}}(u) = \hat{\bar{F}}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(X_i > u)} = \frac{N_n}{n}$$

où N_n est le nombre des excès au-delà du seuil u . Dans l'autre coté l'approximation de la queue des excès est donnée par

$$\hat{\bar{F}}_n(u) \approx \bar{G}_{\hat{\sigma}, \hat{\gamma}}(x)$$

est un résultat direct du théorème de Pickands (Pickands 1975) (voir la section 1.4) Alors,.

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \hat{\lambda}^{1/p} \int_0^{+\infty} (\bar{G}_{\hat{\sigma}, \hat{\gamma}}(x))^{1/p} dx.$$

Ce qui revient à écrire,.

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \hat{\lambda}^{1/p} \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \hat{\gamma} \frac{x}{\hat{\sigma}} \right)^{-1/\hat{\gamma}} \right]^{1/p} dx.$$

En faisant apparaître la densité de la loi GPD , on peut écrire cet estimateur sous forme d'une espérance.

$$\widehat{\Pi}_{u_n}(X) = \widehat{\lambda}^{1/p} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\widehat{\sigma}} \left(1 + \widehat{\gamma} \frac{x}{\widehat{\sigma}}\right)^{(-1/\widehat{\gamma})-1} \widehat{\sigma} \left(1 + \widehat{\gamma} \frac{x}{\widehat{\sigma}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}((1/p)-1)+1} dx.$$

D'où

$$\widehat{\Pi}_{u_n}(X) = \widehat{\sigma} \widehat{\lambda}^{1/p} E \left[\left(1 + \widehat{\gamma} \frac{x}{\widehat{\sigma}}\right)^{-r} \right].$$

Où $x \sim GPD(\widehat{\sigma}, \widehat{\gamma})$ et $r = \frac{1}{\widehat{\gamma}} \left(\frac{1}{p} - 1\right) - 1$. Sous la condition que $r > -\frac{1}{\widehat{\gamma}}$, on a :

$$E \left[\left(1 + \widehat{\gamma} \frac{x}{\widehat{\sigma}}\right)^{-r} \right] = \frac{1}{1 + \widehat{\gamma}r}.$$

Alors le domaine de variation de p est

$$\widehat{\gamma} \leq \frac{1}{p} \leq 1.$$

Ainsi le résultat final sera :

$$\widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) = \widehat{\lambda}^{1/p} \frac{\widehat{\sigma}}{(1/p) - \widehat{\gamma}}, \quad \text{avec,} \quad \widehat{\gamma} \leq \frac{1}{p} \leq 1. \quad (4.9)$$

La section suivante décrit la normalité asymptotique de l'estimateur (4.9) noté $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$.

4.3.2 Normalité asymptotique de l'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$

Théorème 4.2 [31]. Supposons que (4.8) est vraie pour $\gamma \in [1/2, 1]$ et $\delta > 0$, et que $x \rightarrow x^{-\delta} L(x)$ est une fonction non croissante. Soit $u = u_n$ tel que $u \rightarrow \infty$ et $\sqrt{n}u^{-\delta} L(u) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors,

$$\frac{\sqrt{n} \left(\widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) - \Pi_{u_n}(X) \right)}{\sqrt{\lambda^{(2/p)-1} (1 - \lambda)}} \xrightarrow{D} N \left(0, \sigma_2^2(p, \gamma, \beta) \right), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où

$$\sigma_2^2(p, \gamma, \beta) = \frac{(1 + \gamma) \sigma^2}{((1/p) - \gamma)^2} \left(\frac{((1/p) - 1)^2}{1 + \gamma} + \frac{1 + \gamma}{((1/p) - \gamma)^2} - \frac{2}{(1/p) - \gamma} + 2 \right).$$

Preuve du théorème (4.2)

Les quatres lemmes suivantes seront instrumental pour nos besoins

Lemme 4.1. Sous les hypothèses du théorème 4.2, pour tout $\gamma \in (1/2, 1)$, nous avons

$$\lambda = P(X_1 > u) = O(u^{-1/\gamma}), \quad \text{quand } u \rightarrow \infty$$

Preuve. Voir la proposition A.1 dans Johansson (2003).□

Lemme 4.2. Sous la supposition du lemme 2, pour tout $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} \phi(t_1, t_2) & : = E \left[i\sqrt{n}\lambda M^{1/2} \left(t_1, t_2 \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_N - \sigma \\ \widehat{\gamma}_N - \gamma \end{pmatrix} + it_3 \frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} \right) \right] \\ & \rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_1, t_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} - \frac{t_3^2}{2} \right\}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

où

$$M^{-1} := (1 + \gamma) \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & -\sigma \\ -\sigma & 1 + \gamma \end{pmatrix}.$$

où $i^2 = -1$.

Preuve. Voir la preuve du lemme A.2 dans Johansson (2003).□

Lemme 4.3. Pour chaque constant $p > 1$, on a,

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}^{1/p} - \lambda^{1/p})}{(1/p - 1)^{(1/p) - (1/2)} \sqrt{(1-\lambda)}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Preuve. C'est direct en employant le théorème des Valeurs Moyens pour $\widehat{\lambda}^{1/p} - \lambda^{1/p}$ et le théorème de central Limite pour $\widehat{\lambda}$ qui est

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

On évite les détails.□

Par convention soit,

$$R_n := \lambda^{1/p} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{u}\right)^{-1/p\gamma} \left[\left\{ \frac{1 + (u+x)^{-\delta} L(u+x)}{1 + u^{-\delta} L(u)} \right\}^{1/p} - 1 \right] dx$$

On commence d'abord à donner le comportement asymptotique de R_n

Lemme 4.4. Sous les hypothèses du théorème 4.2, nous avons

$$\frac{\sqrt{n}R_n}{\lambda^{(1/p)-(1/2)}\sqrt{(1-\lambda)}} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Preuve. Par convention, pour chaque $\delta > 0$, on établit

$$\Delta_n(\delta, x) := \frac{1 + (u+x)^{-\delta} L(u+x)}{1 + u^{-\delta} L(u)}.$$

Par le développement de Taylor, on écrit,

$$\{\Delta_n(\delta, x)\}^{1/p} - 1 = p^{-1} \{\vartheta_n(\delta, x)\}^{(1/p)-1} \{\Delta_n(\delta, x) - 1\}$$

où

$$\min\{\Delta_n(\delta, x), 1\} < \vartheta_n(\delta, x) < \max\{\Delta_n(\delta, x), 1\}$$

Il s'ensuit que

$$R_n := p^{-1} \lambda^{1/p} \int_0^\infty \left(\frac{u+x}{u}\right)^{-1/p\gamma} \{\vartheta_n(\delta, x)\}^{1/p} \{\Delta_n(\delta, x) - 1\} dx.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \Delta_n(\delta, x) - 1 &= \frac{(u+x)^{-\delta} L(u+x) - u^{-\delta} L(u)}{1 + u^{-\delta} L(u)} \\ &= \frac{u^{-\delta} L(u)}{1 + u^{-\delta} L(u)} \left[\left(\frac{u+x}{u}\right)^{-\delta} \frac{L(u+x)}{L(u)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

L'utilisation de la représentation de Karamat (voir, par exemple, Seneta, 1976), pour chaque $0 < \varepsilon < \delta$, uniformément sur $x > 0$, on arrive à

$$\frac{L(u+x)}{L(u)} = \left(\frac{u+x}{u}\right)^{-\delta}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Il s'ensuit que, uniformément sur $x > 0$, pour grand, on a

$$\Delta_n(\delta, x) - 1 = \frac{u^{-\delta} L(u)}{1 + u^{-\delta} L(u)} \left[\left(\frac{u+x}{u}\right)^{-\delta+\varepsilon} - 1 \right].$$

Substituant l'équation précédente dans la dernière forme de R_n , nous arrivons

$$R_n = \frac{p^{-1}\lambda^{1/p}u^{-\delta}L(u)}{1+u^{-\delta}L(u)} \int_0^\infty \{\vartheta_n(\delta, x)\}^{1/p-1} \times \left[\left(\frac{u+x}{u}\right)^{-\delta-1/p\gamma+\varepsilon} - \left(\frac{u+x}{u}\right)^{-1/p\gamma} \right] dx$$

Puisque $\sqrt{n}u^\delta L(u) \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow \infty$, donc $\sqrt{n}u^\delta L(u) = o(1)$, $u \rightarrow \infty$. Cela implique aisément que, uniformément $x > 0$, $(u+x)^{-\delta}L(u+x) = \delta(1)$, quand $u \rightarrow \infty$. Il s'ensuit que, uniformément sur $x > 0$, $\Delta_n(\delta, x) = O(1)$, quand $u \Rightarrow \infty$, donc, $\{\vartheta_n(\delta, x)\}^{1/p-1} = O(1)$, uniformément sur $x > 0$. Par conséquent, pour tout n grand, on a

$$R_n = O(1) \lambda^{1/p} u^{-\delta} L(u) \int_0^\infty \left[\left(\frac{u+x}{u}\right)^{-\delta-1/p\gamma+\varepsilon} - \left(\frac{u+x}{u}\right)^{-1/p\gamma} \right] dx$$

Par un changement de variables, nous arrivons

$$R_n = O(1) \lambda^{1/p} u^{-\delta} L(u) \int_u^\infty \left[\left(\frac{x}{u}\right)^{-\delta-1/p\gamma+\varepsilon} - \left(\frac{x}{u}\right)^{-1/p\gamma} \right] dx.$$

Après l'intégration nous arrivons

$$R_n = O(1) \lambda^{1/p} u^{-\delta} L(u) u.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\sqrt{n}R_n}{\lambda^{(1/p)-(1/2)}\sqrt{(1-\lambda)}} = O(1) [\sqrt{n}u^\delta L(u)] [\lambda^{1/2}u].$$

Rapellons que d'après le lemme 1 nous avons $\lambda = O(u^{1/\gamma})$. Cela implique que

$$\frac{\sqrt{n}R_n}{\lambda^{(1/p)-(1/2)}\sqrt{(1-\lambda)}} = o(1) u^{-(1/2\gamma)+1}.$$

Vu que $\gamma \in (1/2, 1)$, alors $-1/2\gamma+1 < 0$, il s'ensuit que $u^{-1/2\gamma+1} \rightarrow 0$ quand $u \Rightarrow \infty$. Cela accomplit la preuve du lemme 4. \square

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour montrer la normalité asymptotique de $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$.

Rappelons que

$$\begin{aligned}
\Pi_{u_n}(X) &= \int_{u_n}^{+\infty} \{\bar{F}(x+u)\}^{1/p} dx = \int_{u_n}^{+\infty} \{\bar{F}(u)\bar{F}_u(x)\}^{1/p} dx \\
&= \{\bar{F}(u)\}^{1/p} \int_0^{+\infty} \{\bar{F}_u(x+u)\}^{1/p} dx \\
&= \{\bar{F}(u)\}^{1/p} \int_0^{+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{u}\right)^{-1/\gamma} \frac{1 + (u+x)^{-\delta} L(u+x)}{1 + u^{-\delta} L(u)} \right\}^{1/p} dx \\
&= \lambda^{1/p} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{u}\right)^{-1/p\gamma} dx + R_n
\end{aligned}$$

Où R_n est celle défini dans le lemme 4. En d'autre part nous avons :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) - \Pi_{u_n}(X) &= \widehat{\lambda}^{1/p} \frac{\widehat{\sigma}}{(1/p) - \widehat{\gamma}} - \int_{u_n}^{+\infty} (1 - F(s))^{1/p} ds \\
&= \left[\widehat{\lambda}^{1/p} \frac{\widehat{\sigma}}{(1/p) - \widehat{\gamma}} - \lambda^{1/p} \frac{\sigma}{(1/p) - \gamma} \right] + R_n \\
&= \frac{\widehat{\sigma}}{(1/p) - \widehat{\gamma}} \left(\widehat{\lambda}^{1/p} - \lambda^{1/p} \right) + \frac{\lambda^{1/p}}{(1/p) - \gamma} (\widehat{\sigma} - \sigma) \\
&\quad + \frac{\lambda^{1/p}}{((1/p) - \widehat{\gamma})((1/p) - \gamma)} (\widehat{\gamma} - \gamma) + R_n.
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{\sigma} \xrightarrow{P} \sigma$ et $\widehat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma$ quand $n \rightarrow \infty$, cela implique que, pour n grand

$$\sqrt{n} \left\{ \widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} = (1 + o_p(1)) \frac{1}{1/p - \gamma} \{A_n + B_n\} + \sqrt{n} R_n,$$

où

$$A_n := \sigma \sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}^{1/p} - \lambda^{1/p} \right),$$

et

$$B_n := \sqrt{\lambda^{(2/p)-1}} \left[\sqrt{n\lambda} (\widehat{\sigma} - \sigma) + \frac{\sigma}{(1/p) - \gamma} \sqrt{n\lambda} (\widehat{\gamma} - \gamma) \right].$$

Utilisons maintenant le lemme 1, 2, 3 et 4 ensemble nous déduisons que

$$\frac{\sqrt{n} \left(\widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) - \Pi_{u_n}(X) \right)}{\sqrt{\widehat{\lambda}^{(2/p)-1} (1 - \lambda)}} \xrightarrow{D} N(0, a^2),$$

où

$$\begin{aligned}
a^2 & : = \frac{1}{((1/p) - \gamma)^2} + [\sigma^2 (((1/p) - 1)^2 + (1 + \gamma)) (2\sigma^2) \\
& \quad + (1 + \gamma)^2 \frac{\sigma^2}{((1/p) - \gamma)^2} - 2(1 + \gamma) \frac{\sigma^2}{(1/p) - \gamma}] \\
& = \frac{(1 + \gamma) \sigma^2}{((1/p) - \gamma)^2} \left(\frac{((1/p) - 1)^2}{1 + \gamma} + \frac{1 + \gamma}{((1/p) - \gamma)^2} - \frac{2}{(1/p) - \gamma} + 2 \right). \\
& = \sigma_2^2(p, \gamma, \beta)
\end{aligned}$$

Cela achève la preuve du théorème (4.2) ■

4.4 Approche des quantiles extrêmes

Plus récemment, en se basant sur les quantiles extrêmes, Meddi et Necir (2006) ont proposé un nouveau estimateur de (4.3) pour tarifier des risques rares qui suivent une distribution *heavy-tailed* pour les plus grandes couvertures de la réassurance.

4.4.1 Construction de l'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^3$

Soit $k = k_n$ une suite des entiers satisfaisant $1 \leq k \leq n, k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ telle que : $u_n = Q(1 - k/n)$, où Q est la fonction inverse généralisée de F telle que, $Q(t) = F^{-1}(t) = \inf \{s, F(s) \geq t\}$, $0 < t < 1$. Soit x_{p_n} un quantile extrême définit comme suit :

$$x_{p_n} = Q(1 - p_n), \text{ quand } p_n \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

où, on propose l'estimateur des quantiles extrêmes celui basé sur l'estimateur de Hill (1975) dont on a présenté dans l'équation (1.25) (Dekkers et de Haan, 1989 ; Ferreira et al. 2002) qui est définit par,

$$\widehat{x}_{p_n} = X_{n-k,n} \left(\frac{k}{np_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n^H}.$$

Pour des raisons attendues on écrit.

$$\begin{aligned}
\text{si } p_n = k/n & \Rightarrow \widehat{x}_{k/n} := X_{n-k,n} \\
\text{si } p_n = s & \Rightarrow \widehat{x}_s := X_{n-k,n} \left(\frac{k}{ns} \right)^{\widehat{\gamma}_n^H}
\end{aligned} \quad (4.11)$$

(4.3) s'écrira comme suit

$$\Pi_{u_n}(X) := - \int_0^{k/n} s^{1/p} dQ(1-s)$$

D'après la définition (4.10) on écrit.

$$\Pi_{u_n}(X) := - \int_0^{k/n} s^{1/p} dx_s$$

Effectuant une intégration par partie ensuite remplacer le quantile x_s par son estimateur \hat{x}_s , et utiliser (4.11),.

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{u_n}(X) &= - \int_0^{k/n} s^{1/p} d\hat{x}_s \\ &= - [s^{1/p} \hat{x}_s]_0^{k/n} + \int_0^{k/n} (1/p) s^{(1/p)-1} \hat{x}_s ds \\ &= - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} + (1/p) X_{n-k,n} (k/n)^{\hat{\gamma}_n^H} \int_0^{k/n} s^{(1/p)-1-\hat{\gamma}_n^H} ds \end{aligned}$$

$$\hat{\Pi}_{u_n}^3(X) = \frac{\hat{\gamma}_n^H}{(1/p) - \hat{\gamma}_n^H} \left(\frac{k}{n}\right)^{1/p} X_{n-k,n}, \quad \text{pour } \hat{\gamma}_n^H < 1/p. \quad (4.12)$$

La section suivante décrit la normalité asymptotique de notre estimateur (4.12) dont on a noté $\hat{\Pi}_{u_n}^3$.

4.4.2 Normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^3$

Théorème 4.3 [28]. Supposons que (4.7) est vérifié avec $s^{1/p}Q(1-s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ pour tout $\hat{\gamma}_n^H < 1/p$. Soit $k = k_n$ tel que $k \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$ avec $(k/n)^{1/2} A(k/n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc,

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1-k/n)} \left\{ \hat{\Pi}_{u_n}^3(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} \xrightarrow{D} N(0, \sigma_3^2(p, \gamma))$$

où,

$$\sigma_3^2(p, \gamma) = \frac{\gamma^2}{\alpha^4} [\gamma^4 - 2\gamma^3 p^{-1} + \gamma^2 p^{-2} + p^{-2}] \quad \text{pour } 1/p \neq \gamma,$$

avec $\alpha := 1/p - \gamma$.

Preuve du théorème (4.3).

Soit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction de quantile empirique est définie par

$$V_n(t) = \xi_{i,n}, \quad \text{pour } (i-1)/n < t \leq i/n, \quad i = 1, \dots, n,$$

avec $V_n(0) = \xi_{1,n}$, où $\xi_{1,n} \leq \xi_{2,n} \leq \dots \leq \xi_{n,n}$ dénote les statistiques d'ordres

basées sur $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Supposons que les variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ sont définies dans un espace de probabilité (Ω, A, p) où on donne la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$, telle que $X_n = Q(\xi_n)$, pour $n = 1, 2, \dots$, et, par conséquence, $X_{i,n} = Q(\xi_{i,n})$ pour tout $1 \leq i < n$ et $n \geq 1$. Observe que pour chaque entier $n \geq 1$, on a $V_n(1 - i/n) = \xi_{n-i+1,n}$ et $Q(V_n(1 - i/n)) = X_{n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Le processus des quantiles empiriques uniformes est donné dans (1.5), est donné par le résultat suivant dans Csörgő, Csörgő, Horváth et Mason (1986). Il existe une suite de ponts Brownien $B_n(s)$, $0 \leq s \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$, telle que pour chaque ν avec $0 \leq \nu < 1/2$,

$$\sup_{1/n < s \leq 1-1/n} \left| \frac{\beta_n(s) - B_n(s)}{s^{1/2-\nu}} \right| = O_p(n^{-\nu}). \quad (4.13)$$

Soit

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_{u_n}^3(X) - \Pi_{u_n}(X) &= (k/n)^{1/p} \frac{\widehat{\gamma}_n}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n} X_{n-k,n} \\ &\quad - (k/n)^{1/p} \frac{\gamma}{(1/p) - \gamma} Q(1 - k/n) + C_n, \end{aligned}$$

avec

$$C_n = (k/n)^{1/p} \frac{\gamma}{(1/p) - \gamma} Q(1 - k/n) - \Pi_{u_n}.$$

Ce qui mène à écrire

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \left\{ \widehat{\Pi}_{u_n}^3(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} := G_{n1} + G_{n2} + G_{n3} + G_{n4} + G_{n5},$$

où

$$\begin{aligned}
G_{n1} &: = k^{1/2} \frac{\widehat{\gamma}_n}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n} \left[\frac{X_{n-k,n}}{Q(1-k/n)} - \left(n \frac{1 - \xi_{n-k,n}}{k} \right)^{-\gamma} \right], \\
G_{n2} &: = k^{1/2} \frac{\widehat{\gamma}_n}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n} \left[\left(n \frac{1 - \xi_{n-k,n}}{k} \right)^{-\gamma} - 1 \right] \\
G_{n3} &: = k^{1/2} \frac{1/p}{((1/p) - \gamma) ((1/p) - \widehat{\gamma}_n)} \frac{1}{k} \times \\
&\quad \sum_{i=1}^k \left(\log \frac{Q(\xi_{n-i+1,n})}{Q(\xi_{n-k,n})} - \log \left(\frac{1 - \xi_{n-i+1,n}}{1 - \xi_{n-k,n}} \right)^{-\gamma} \right) \\
G_{n4} &: = k^{1/2} \frac{1/p}{((1/p) - \gamma) ((1/p) - \widehat{\gamma}_n)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\log \left(\frac{1 - \xi_{n-i+1,n}}{1 - \xi_{n-k,n}} \right)^{-\gamma} - \gamma \right) \\
G_{n5} &: = \frac{1/p}{(1/p) - \gamma} \frac{Q(1-k/n) - (1/p) \int_0^1 s^{1/p-1} Q(1-ks/n) ds}{Q(1-k/n)}.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.7) nous pouvons montrer que pour n

$$G_{n1} \stackrel{D}{=} o_p(1).$$

Pour le terme G_{n2} nous avons :

$$G_{n2} := \frac{\widehat{\gamma}_n}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n} \widetilde{T}_n,$$

où

$$\widetilde{G}_n := k^{1/2} \left[\left(n \frac{1 - \xi_{n-k,n}}{k} \right)^{-\gamma} - 1 \right].$$

En appliquant le développement de Taylor nous obtenons :

$$\widetilde{G}_n := -\gamma \{ \lambda_n(k) \}^{-1-\gamma} k^{1/2} \left\{ \frac{n}{k} (1 - \xi_{n-k,n}) - 1 \right\},$$

où $\lambda_n(k)$ est une suite de variables aléatoires dans l'intervalle ouvert avec les points terminaux 1 et $n(1 - \zeta_{n-k,n})/k$. Puisque wpl (with probability one),

$$n(1 - \zeta_{n-k,n})/k = 1 + o_p(1), \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

ceci implique que, wpl , $\lambda_n(k) = 1 + o_p(1)$. donc,

$$\widetilde{G}_n = -(1 + o_p(1)) \gamma k^{1/2} \left\{ \frac{n}{k} (1 - \xi_{n-k,n}) - 1 \right\} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Il est facile de vérifier que pour chaque $n \geq 1$,

$$- \left\{ \frac{n}{k} (1 - \xi_{n-k,n}) - 1 \right\} = \frac{1}{k^{1/2}} (n/k)^{1/2} \{n^{1/2} (V_n (1 - k/n) - (1 - k/n))\}.$$

Il s'ensuit que $w p 1$

$$G_{n2} = \frac{\widehat{\gamma}_n \gamma}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n} (1 + o_p(1)) (n/k)^{1/2} \beta_n (1 - k/n).$$

En utilisant (4.13) et pour n grand nous arrivons à :

$$G_{n2} = \frac{\widehat{\gamma}_n \gamma}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n} (1 + o_p(1)) (n/k)^{1/2} \left\{ O_p(n^{-\alpha}) (1 - k/n)^{1/2-\alpha} + B_n (1 - k/n) \right\}.$$

$$G_{n2} \stackrel{D}{=} \frac{\gamma^2}{(1/p) - \gamma} (1 + o_p(1)) (n/k)^{1/2} B_n (1 - k/n).$$

En utilisant l'inégalité de Potter (voir par exemple la section (3.1) de Danielsson et al.(2001)), nous montrons que pour n grand

$$G_{n3} \stackrel{D}{=} o_p(1).$$

G_{n4} s'écrira comme suit

$$G_{n4} = \frac{(1/p) \gamma}{((1/p) - \gamma) ((1/p) - \widehat{\gamma}_n)} \sqrt{k} \left\{ -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\log \left(\frac{1 - \xi_{n-i+1,n}}{1 - \xi_{n-k,n}} \right)^{-\gamma} - \gamma \right) \right\}.$$

Utilisant les théorèmes (2.3) et (2.4) de Csörgő et Mason (1985), nous avons (D'après Liang Peng .(2001)) :

$$\begin{aligned} \sqrt{k} \left\{ -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\log \left(\frac{1 - \xi_{n-i+1,n}}{1 - \xi_{n-k,n}} \right)^{-\gamma} - \gamma \right) \right\} &= (n/k)^{1/2} B_n (1 - k/n) - (n/k)^{1/2} \\ &\times \int_{1-k/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds + o_p(1). \end{aligned}$$

Alors nous obtenons pour n grand.

$$\begin{aligned} G_{n4} &= \frac{(1/p) \gamma}{((1/p) - \gamma) ((1/p) - \widehat{\gamma}_n)} \times \\ &\left\{ (n/k)^{1/2} B_n (1 - k/n) - (n/k)^{1/2} \int_{1-k/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds + o_p(1) \right\}. \end{aligned}$$

$$G_{n4} \stackrel{D}{=} \frac{(1/p)\gamma}{((1/p) - \gamma)^2} \left\{ (n/k)^{1/2} B_n(1 - k/n) - (n/k)^{1/2} \int_{1-k/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds + o_p(1) \right\}$$

Finallement, en se référant à (32). nous montrons pour n grand :

$$G_{n5} \stackrel{D}{=} o_p(1).$$

Donc, si nous posons $a_0 := \frac{(1/p)\gamma}{((1/p) - \gamma)^2}$ nous obtenons pour n grand.

$$\begin{aligned} & \frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \left\{ \widehat{\Pi}_{u_n}^3(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} \stackrel{D}{=} a_0 (\gamma - \gamma^2 p + 1) (n/k)^{1/2} \times \\ & B_n(1 - k/n) - a_0 (n/k)^{1/2} \int_{1-k/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds + o_p(1). \end{aligned}$$

Puisque $B_n(\cdot)$ est une suite de Ponts Brwoniens, ceci implique que,

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \left\{ \widehat{\Pi}_{u_n}^3(X) - \Pi_{u_n}(X) \right\} \stackrel{D}{\rightarrow} N(0, \sigma_3^2(p, \gamma)), \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_3^2(p, \gamma) & : = \text{var} \left\{ a_0 (\gamma - \gamma^2 p + 1) (n/k)^{1/2} B_n(1 - k/n) \right. \\ & \quad \left. - a_0 (n/k)^{1/2} \int_{1-k/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds. \right\} \end{aligned}$$

Soit $\alpha := 1/p - \gamma$. Puisque $E[B_n(s)B_n(t)] = \min(s, t) - st$, alors.

$$\begin{aligned} \sigma_3^2(p, \gamma) & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_0^2 (\gamma - \gamma^2 p + 1)^2 (n/k) E[(B_n(1 - k/n))^2] \right. \\ & \quad + a_0^2 (n/k) \int_{1-k/n}^1 ds \int_{1-k/n}^1 \frac{E[B_n(t)B_n(s)]}{(1-t)(1-s)} dt \\ & \quad \left. - 2a_0^2 (n/k) (\gamma - \gamma^2 p + 1) \int_{1-k/n}^1 \frac{E[B_n(1 - k/n)B(s)]}{1-s} ds \right\} \\ & = a_0^2 (\gamma - \gamma^2 p + 1)^2 + 2a_0^2 - 2a_0^2 (\gamma - \gamma^2 p + 1)^2 \\ & = \frac{\gamma^2}{\alpha^4} [\gamma^4 - 2\gamma^3 p^{-1} + \gamma^2 p^{-2} + p^{-2}] \quad \text{pour } 1/p \neq \gamma \end{aligned}$$

Cela achève la preuve du théorème (4.3). ■

La section suivante est consacrée à donner quelques simples simulations concernant les trois résultats obtenus ci-dessus, ainsi qu'une comparaison graphique entre la variance des deux estimateurs $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$ et $\widehat{\Pi}_{u_n}^3$ sur la base de la similarité des conditions de leur étude asymptotique et l'utilisation des k plus grandes observations de l'échantillon de risque.

4.5 Simulation des résultats

4.5.1 Génération d'une loi connue

Transformation des quantiles.

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires *i.i.d* de distribution F , et ξ_1, \dots, ξ_n une suite de variables aléatoires *i.i.d*. uniformément distribuées sur $[0, 1]$ et notant par $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}$ la statistique d'ordre correspondante, alors

- $F^{-1}(\xi_{1,n}) \stackrel{D}{=} X_{1,n}$
- Pour tout $n \in N$,

$$(X_{1,n}, \dots, X_{n,n}) \stackrel{D}{=} (F^{-1}(\xi_{1,n}), \dots, F^{-1}(\xi_{n,n})).$$

- La variable aléatoire $F(X_{1,n})$ a une distribution uniforme sur $[0, 1]$ si et seulement si F est une fonction continue.

Nous avons remarqué, que pour générer un échantillon de variables aléatoires de taille n de loi connue F il faut tout d'abord calculer la fonction inverse généralisée F^{-1} , ensuite déterminer cet échantillon à partir d'un échantillon issu d'une loi uniforme.

Dans le but d'étudier le comportement des estimateurs de la prime de risque ajustée, on a généré des échantillons de taille n issus de lois heavy-tailed et on a calculé les estimateurs correspondants avec les intervalles de confiance. Les distributions utilisées dans la simulation sont :

- **La distribution de Pareto.**

$$F(x) = 1 - x^{-1/\gamma}$$

qui sera simulée par la procédure suivante :

1-générer ξ de la loi uniforme $U[0, 1]$
2-calculer X tel que $X = (1 - \xi)^{-\gamma}$.

- **La distribution de Fréchet.**

$$F(x) = \exp(-x^{-1/\gamma})$$

qui sera simulée par la procédure suivante :

1-générer ξ de la loi uniforme $U[0, 1]$
2-calculer X tel que $X = (-\log(\xi))^{-\gamma}$.

- **La distribution *GEV*.**

$$F(x) = \exp(-(1 + \gamma x))^{-1/\gamma}$$

qui sera simulée par la procédure suivante :

1-générer ξ de la loi uniforme $U[0, 1]$
2-calculer X tel que $X = -\frac{1 - (-\log \xi)^{-\gamma}}{\gamma}$.

- **La distribution *GPD*.**

$$F(x) = 1 - (1 + \gamma(x))^{-1/\gamma}$$

qui sera simulée par la procédure suivante :

1-générer ξ de la loi uniforme $U[0, 1]$
2-calculer X tel que $X = \frac{-1 + (-\log(\xi - 1))^{-\gamma}}{\gamma}$.

4.5.2 Simulation pour $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$

Dans cette section nous allons simuler des variables aléatoires à partir des distributions citées plus haut pour observer les valeurs extrêmes et tracer ainsi la prime estimée encadrée par les deux bornes de l'intervalle de confiance (à partir du théorème 4.1), en traçant à chaque fois la variance empirique correspondante. Pour satisfaire les conditions théoriques on doit suivre les étapes de simulation suivantes :

-Choisir la taille de l'échantillon n
-Choisir γ et calculer son estimateur celui de Hill ($\widehat{\gamma}_n^H$)
-Générer un échantillon de variables aléatoires issue d'une loi F telle que $F \in D(\Phi_\gamma)$ (Pareto, Fréchet, GEV)
-Choisir le nombre de valeurs extrêmes k où on adopte la procédure suivante : $k = [n]^\theta$, $0 < \theta < 1$
-Déterminer le domaine de variation de p là où la normalité asymptotique est vérifiée $p \geq 1$, $\gamma - 1/2 \leq 1/p \leq 1$
-Plotter les variables aléatoires générées pour observer les valeurs extrêmes de l'échantillon
-Tracer la variance théorique en fonction de p localisé $\sigma_1^2(p, \gamma)$
-Calculer et tracer $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$ avec les deux bornes de l'intervalle de confiance au niveau 0.95 en fonction de p localisé
-Calculer et tracer la variance empirique correspondante $\sigma_1^2(p, \widehat{\gamma}_n^H)$ en fonction de p localisé
-Tracer $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$ avec les deux bornes de l'intervalle de confiance au niveau 0.95 en fonction de p varie Jusqu'à 200
-Calculer et tracer la variance empirique correspondante $\sigma_1^2(p, \widehat{\gamma}_n^H)$ en fonction de p varie Jusqu'à 200

TAB. 4.1 – Algorithme de simulation pour $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$

Lors de simulation on a fait varier la taille de l'échantillon n , le nombre de valeurs extrêmes k , et d'autres paramètres rentrants dans la simulation, nous avons eu plusieurs commentaires seuls les schémas significatifs sont présentés.

L'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^1$ est en fonction du nombre de valeurs extrêmes k , d'autre part les statistiques de ces derniers interviennent ainsi dans le calcul des valeurs de l'estimateur à savoir,

$$\widehat{\Pi}_{u_n}^1(X) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n}\right)^{1/p} \{X_{n-i+1,n} - X_{n-i,n}\}, \quad \text{pour } p \geq 1$$

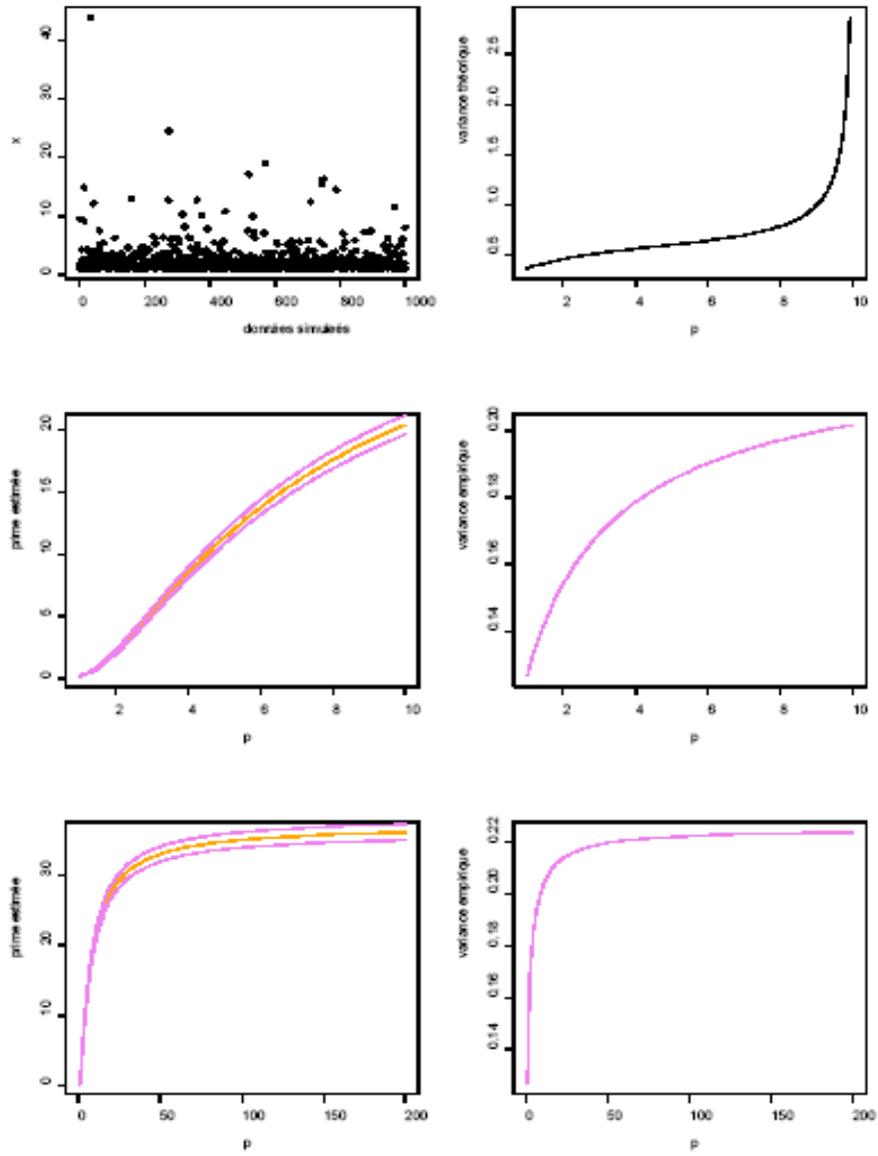


FIG. 4.1 – Résultats pour Pareto $\gamma = 0.6$

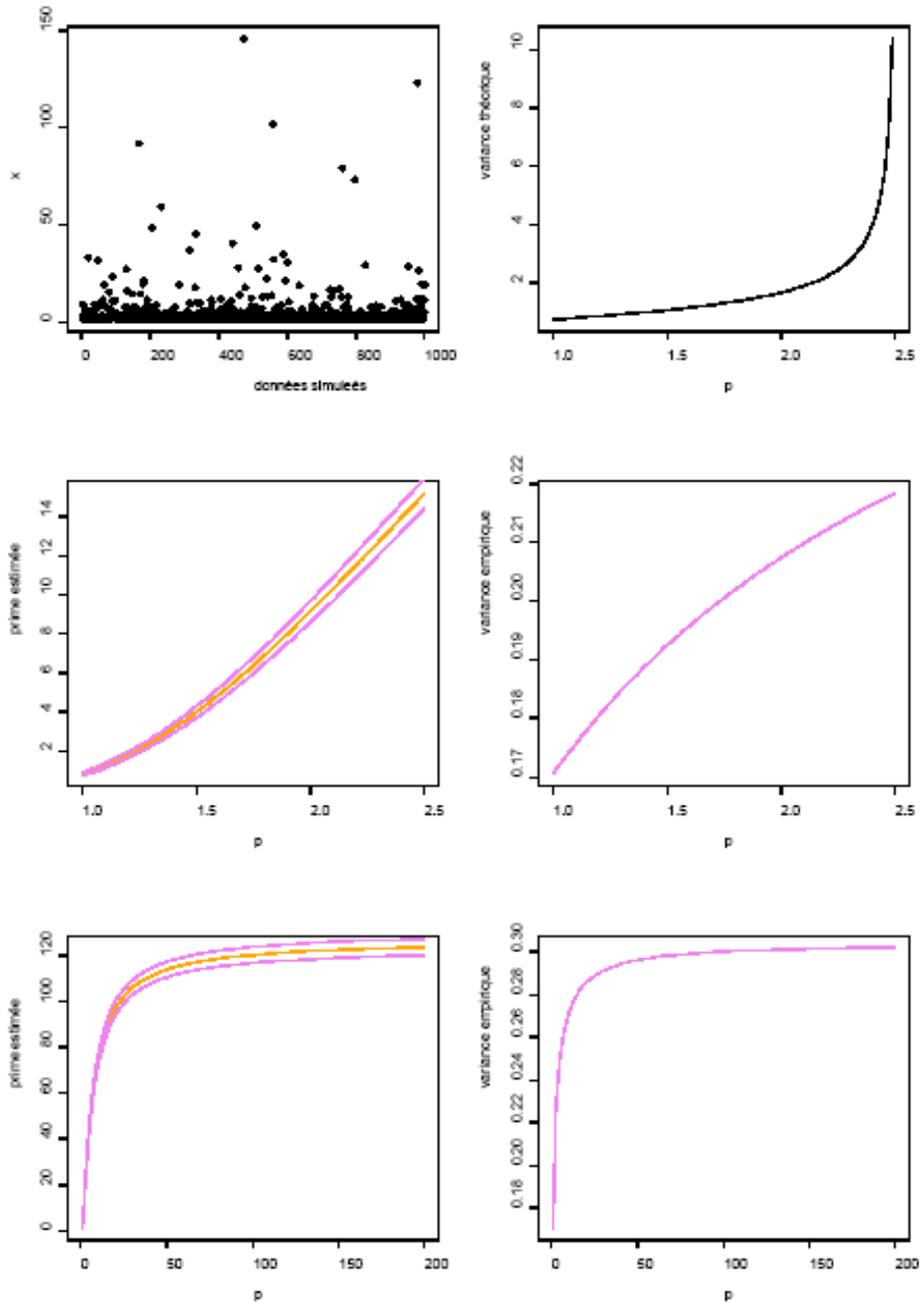


FIG. 4.2 – Résultats pour Pareto $\gamma = 0.9$

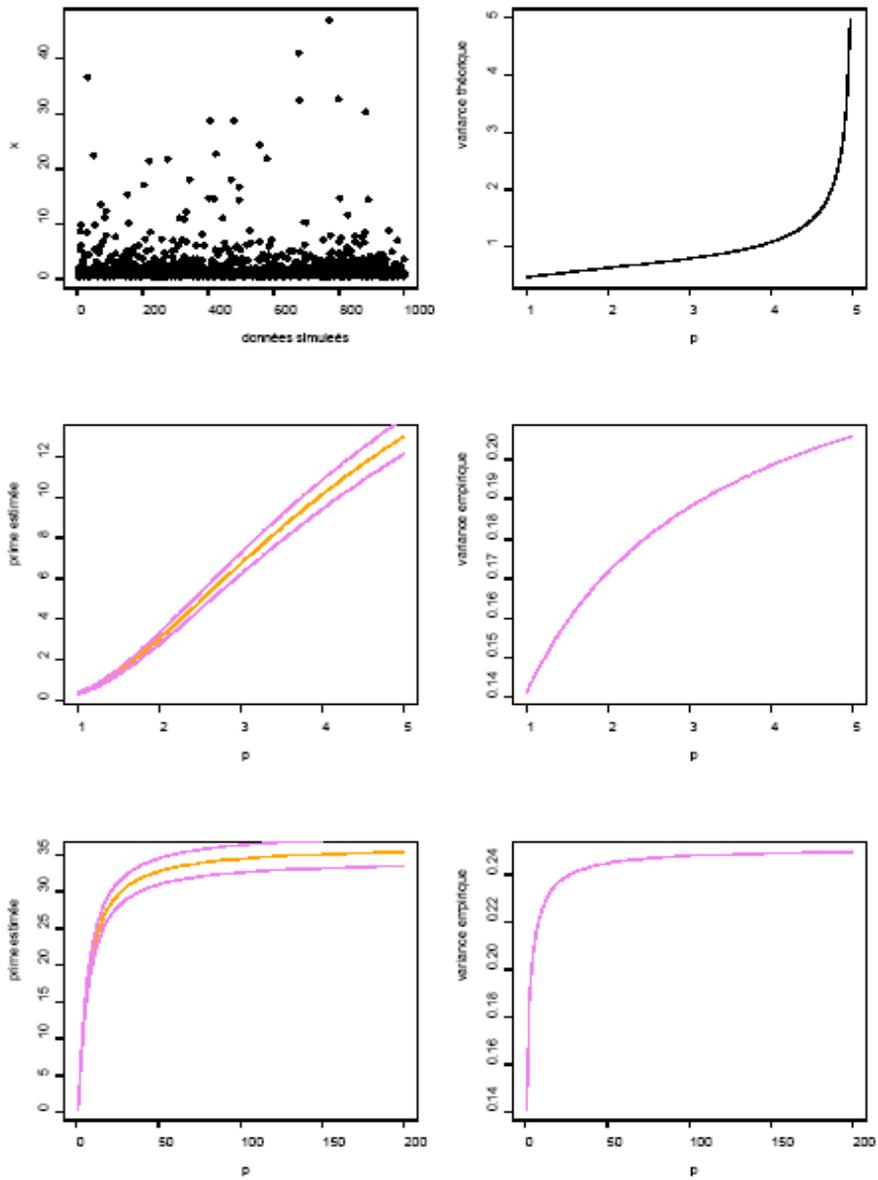


FIG. 4.3 – Résultats pour Fréchet $\gamma = 0.7$

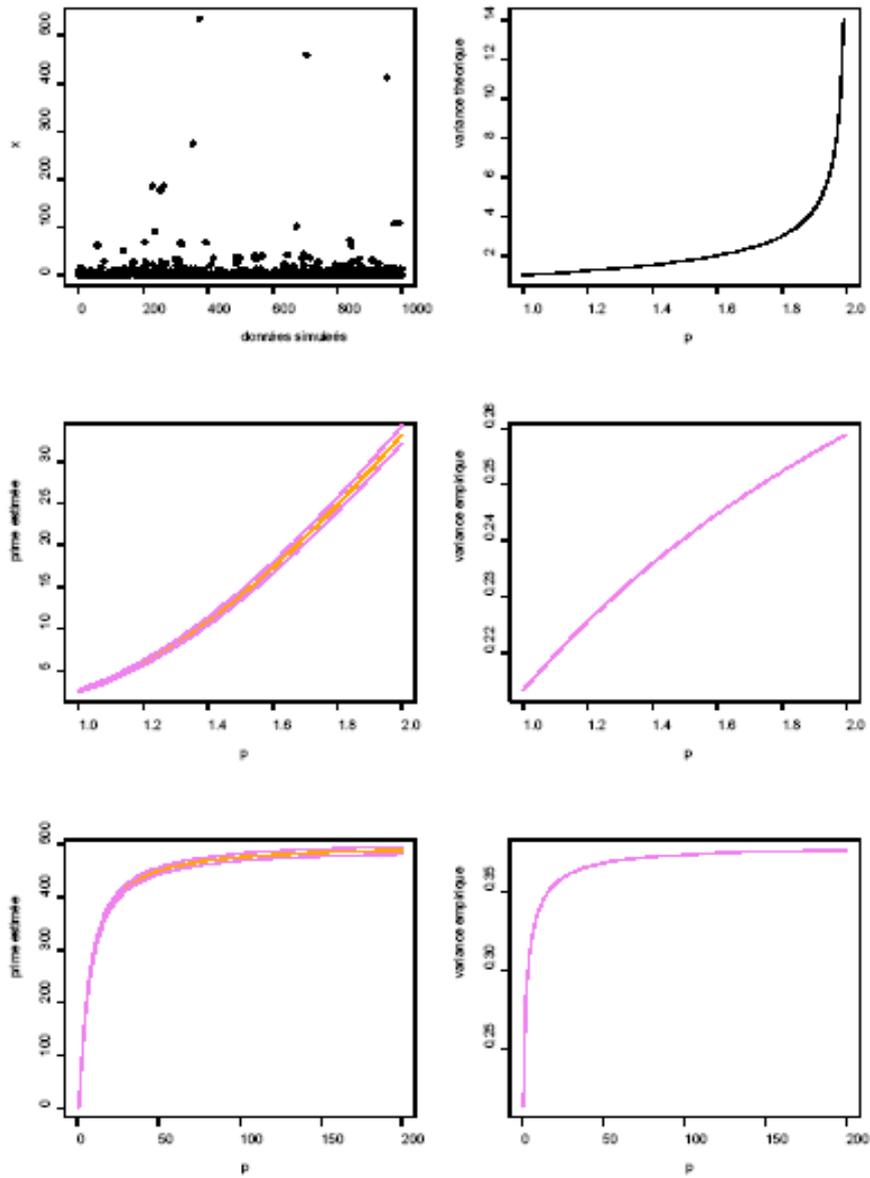


FIG. 4.4 – Résultats pour Fréchet $\gamma = 1$

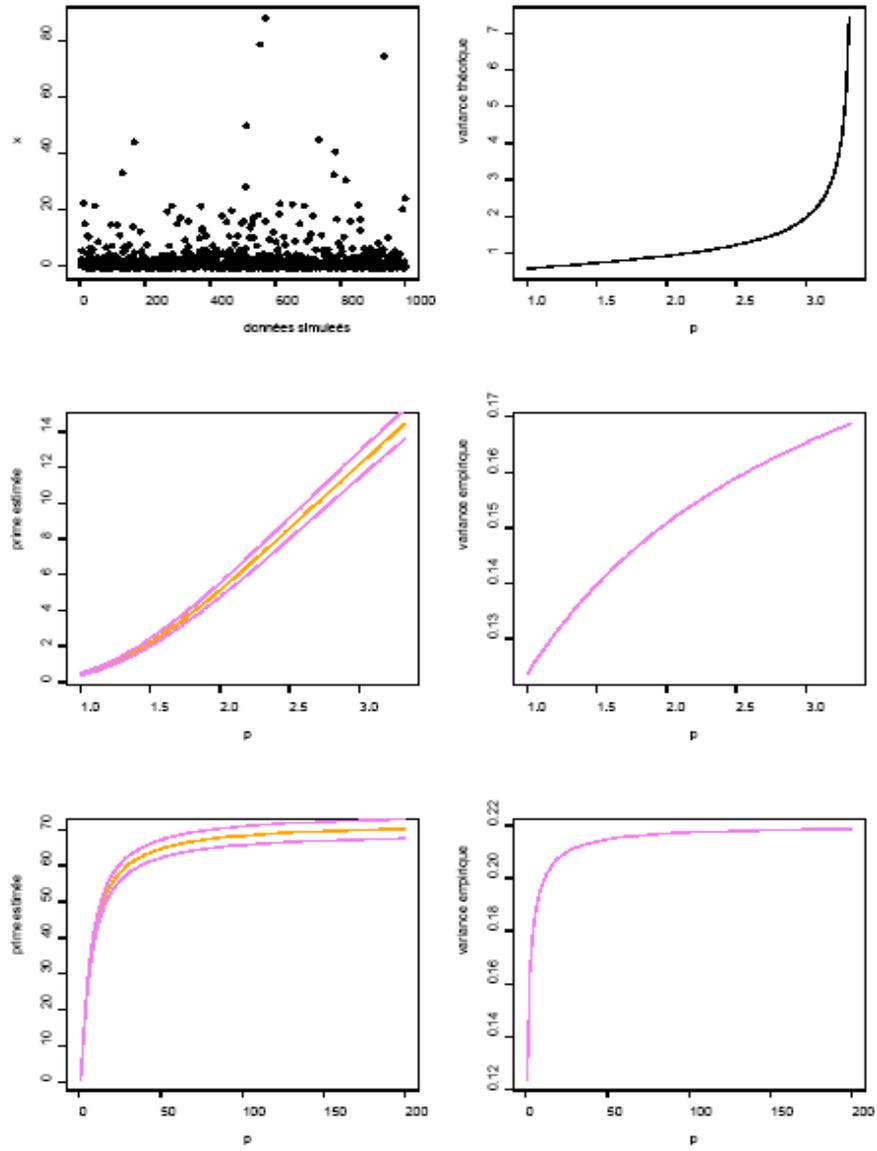


FIG. 4.5 – Résultat pour GEV $\gamma = 0.8$

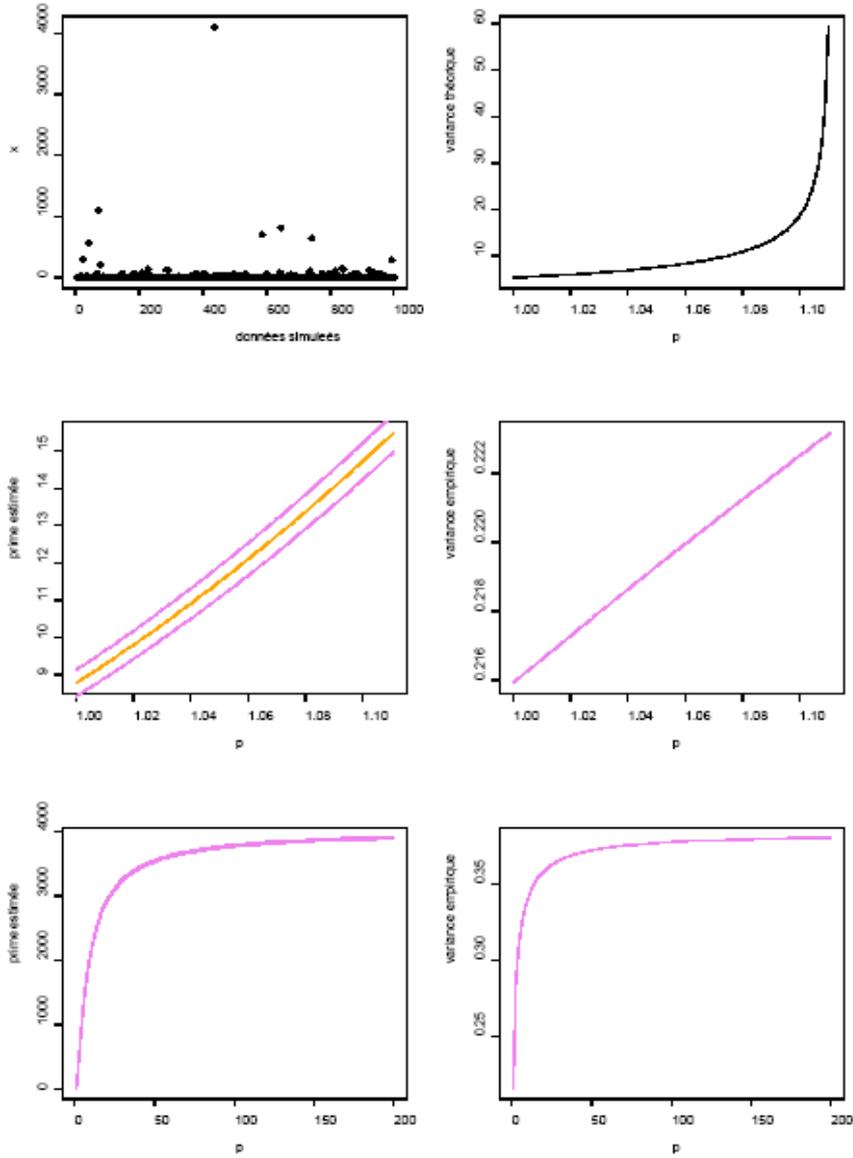


FIG. 4.6 – Résultat pour GEV $\gamma = 1.4$

Problème

L'inconvénient que présente la simulation dans cette section, constitue la détermination du k optimal, nous avons observé sur les graphes des données simulées selon différentes lois ; Pareto, Fréchet, GEV, que le nombre k change à chaque fois qu'on génère un échantillon de variables aléatoires tandis que nous avons utiliser la même procédure pour calculer ce nombre k i.e. lors de simulation, k est fixé : $k = [n]^\theta$, $0 < \theta < 1$, $n = 1000$, $\theta = 0.5$. Changer n ou θ ne justifie pas le bon choix, la seule alternative doit être une procédure prenant en compte la vraie valeur de k . Ceci pose le problème de détermination du k optimal suivant les paramètres de simulation (la taille n , la loi générée, les statistiques extrêmes,...). On se restreint donc, à observer le comportement de cet estimateur ainsi que sa variance loin de ce problème. Dans le but de présenter des résultats de simulation optimaux pour l'estimateur $\hat{\Pi}_{u_n}^1$ nous disons que dans une tentation de présenter de meilleurs résultats notre objectif sera dans l'avenir de créer un algorithme pour déterminer le nombre de valeurs extrêmes optimal où intervient notamment dans l'estimateur de Hill. Plusieurs auteurs se sont intéressés dans leurs recherches à résoudre ce problème qui a eu une grande importance dans la *TVE*, voir par exemple [12] ou Neves, C. Fraga Alves, M. I. (2004) [33]

Commentaire

Les variables aléatoires générées n'influent pas sur la valeur théorique de la variance $\sigma_1^2(p, \gamma)$. Nous observons qu'elle est en fonction de p et γ . D'après les figures (les graphes en noir) (4.1), ..., (4.6), nous avons remarqué que pour différentes valeurs de γ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.4) la variance théorique augmente quand p s'approche de $\frac{1}{\gamma - 1/2}$, tandis qu'elle est très petite lorsque p s'approche du 1.

La variance empirique $\sigma_1^2(p, \hat{\gamma}_n^H)$ augmente en fonction de p mais dans la plupart du temps inférieur à 1 c'était le cas, même lorsqu'on l'a tracé pour p varie jusqu'à 200, à cet égard on conclue que cet estimateur présente une variance empirique très petite.

Les valeurs de la prime estimée dépend des valeurs des statistiques d'ordre extrêmes, donc plus ces statistiques sont grandes, la prime est grande ce qui peut être vu logique puisque de les quelles on cherche à couvrir ces risques extrêmes, d'autre part d'après les visualisations graphiques la prime estimée est bien encadrée par les deux bornes de l'intervalle de confiance (sur les graphes en orange et rose), pratiquement on a observé la même chose lorsqu'on a tracé cette prime estimée hor du domaine de variation de p excepté que sa valeur est si grande, ce qui peut être vu comme un moyen d'ajustement pour obtenir des primes plus basses ou plus hautes.

4.5.3 Simulation pour $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$

Dans cette section nous exécuterons une étude de simulation pour analyser le comportement de l'estimateur $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$, quand le montant global de revendications est produit selon une distribution de Pareto généralisée avec

$$\widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) = \widehat{\lambda}^{1/p} \frac{\widehat{\sigma}}{(1/p) - \widehat{\gamma}}, \quad \text{avec,} \quad \widehat{\gamma} \leq \frac{1}{p} \leq 1.$$

Pour satisfaire les conditions théoriques on doit suivre les étapes de simulation suivantes :

-Choisir la taille de l'échantillon n
-Générer un échantillon de variables aléatoires issue d'une loi <i>GPD</i> en déterminant ses paramètres
-Choisir le nombre d'excès N_n
-Plotter les variables aléatoires générées
-Tracer $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$ avec les deux bornes de l'intervalle de confiance de niveau 0.95 en fonction de p varie Jusqu'à 200
-Plotter la différence $\Pi_{n+1} - \Pi_n$ et la fonction cumulative de la différence

TAB. 4.2 – Algorithme de simulation pour $\widehat{\Pi}_{u_n}^2$

Commentaire

La figure (4.7) montre des données de taille n générées selon une distribution *GPD*(0.25; $1e+0005$). Le modèle montré sur la figure (4.8) caractérise le comportement de l'estimateur en fonction de p . Nous observons que la prime augmente quand p augmente, et pour p près de $1/\gamma$ nous obtenons des primes extrêmement hautes avec un grand intervalle de confiance, ce qui signifie une haute variance comme nous pouvons le voir sur la figure (4.8).

Dans la figure (4.9) nous avons plotter $\Pi_{n+1} - \Pi_n$ pour p fixé, la figure (4.10) montre la fonction de distribution de cumulation de la différence, nous observons que la différence décroît assez vite quand n dépasse 200, ce qui impliquerait que la prime estimée converge vers la valeur réelle de la prime quand n augmente

Comme une conclusion et pour les petites valeurs de p , nous pouvons dire que pour des tailles grandes de l'échantillon, l'estimateur fournit de bons résultats : comme pour des valeurs petites de la variance la prime est bien encadrée par des intervalles de confiance, et elle converge vers la valeur réelle de la prime.

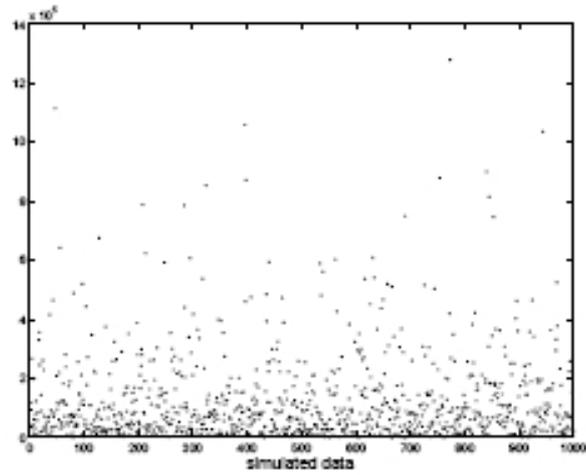


FIG. 4.7 – Données simulées du $GPD(0.25, 1e + 005)$

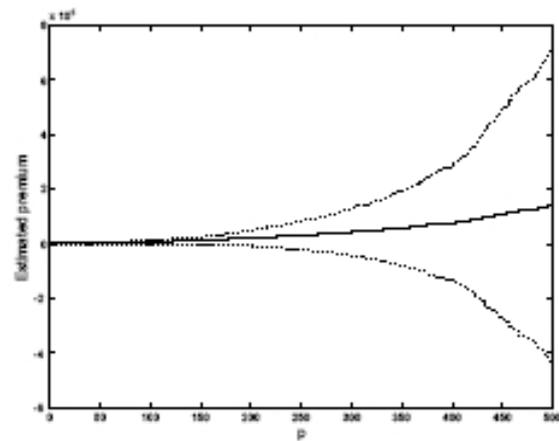


FIG. 4.8 – La prime estimée avec intervalles de confiance, $N = 15$

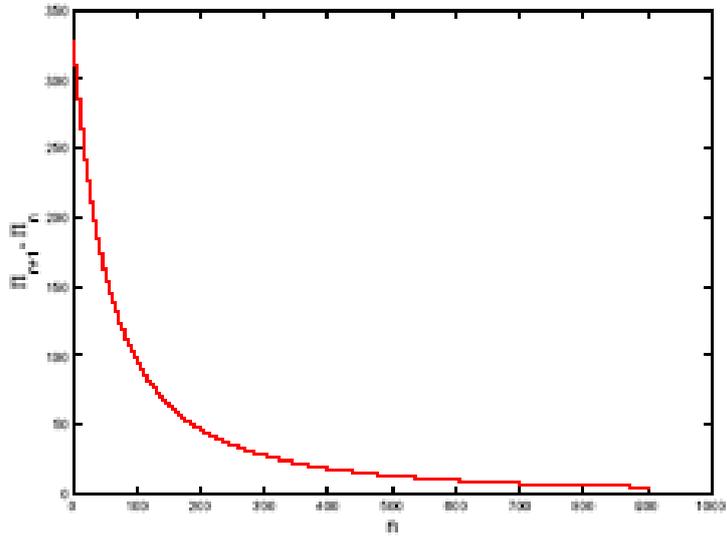


FIG. 4.9 – Évolution de la différence

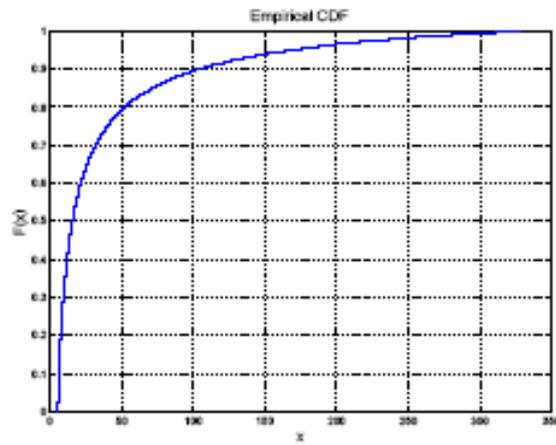


FIG. 4.10 – CDF empirique de la différence

4.5.4 Simulation pour $\widehat{\Pi}_{u_n}^3$

Dans cette section nous présentons quelques simulations pour analyser le comportement de notre nouveau estimateur

$$\widehat{\Pi}_{u_n}^3(X) = \frac{\widehat{\gamma}_n^H}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n^H} \left(\frac{k}{n}\right)^{1/p} X_{n-k,n}, \quad \text{pour } \widehat{\gamma}_n^H < 1/p.$$

Nous remarquons que cet estimateur est en fonction de l'estimateur de Hill $\widehat{\gamma}_n^H$, le nombre de valeur extrêmes k , la valeur du seuil qu'on doit déterminé $X_{n-k,n}$, et le coefficient d'aversion p , ce qui revient à poser le même problème de la détermination du nombre k . Pour satisfaire les conditions théoriques on doit suivre les étapes de simulation suivantes :

-Choisir la taille de l'échantillon n
-Choisir γ et calculer son estimateur celui de Hill ($\widehat{\gamma}_n^H$)
-Générer un échantillon de variables aléatoires issue d'une loi F telle que $F \in D(\Phi_\gamma)$ (Pareto, Fréchet, GEV)
-Choisir le nombre de valeurs extrêmes k où on adopte la procédure suivante : $k = [n]^\theta$, $0 < \theta < 1$
-Déterminer le domaine de variation de p là où la normalité asymptotique est vérifiée $p \geq 1$, $p < 1/\widehat{\gamma}_n^H$
-Plotter les variables aléatoires générées pour observer les valeurs extrêmes de l'échantillon
-Tracer la variance théorique en fonction de p localisé $\sigma_1^2(p, \gamma)$
-Calculer et tracer $\widehat{\Pi}_{u_n}^3$ avec les deux bornes de l'intervalle de confiance en fonction de p localisé
-Calculer et tracer la variance empirique correspondante $\sigma_3^2(p, \widehat{\gamma}_n^H)$ au niveau 0.95 en fonction de p localisé
-Tracer $\widehat{\Pi}_{u_n}^3$ avec les deux bornes de l'intervalle de confiance au niveau 0.95 en fonction de p varie Jusqu'à 200
-Calculer et tracer la variance empirique correspondante $\sigma_3^2(p, \widehat{\gamma}_n^H)$ en fonction de p varie Jusqu'à 200

TAB. 4.3 – Algorithme de simulation pour $\widehat{\Pi}_{u_n}^3$

Commentaire

Pour $\gamma < 1$ la variance théorique augmente jusqu'à atteindre un maximum (de grandes valeurs) ensuite on remarque une décroissance jusqu'au 0 (figure (4.11), ..., (4.16), graphes en vert). Sur les même figures, pour $\gamma \geq 1$ on voit que la variance théorique décroît jusqu'à atteindre des valeurs inférieures.

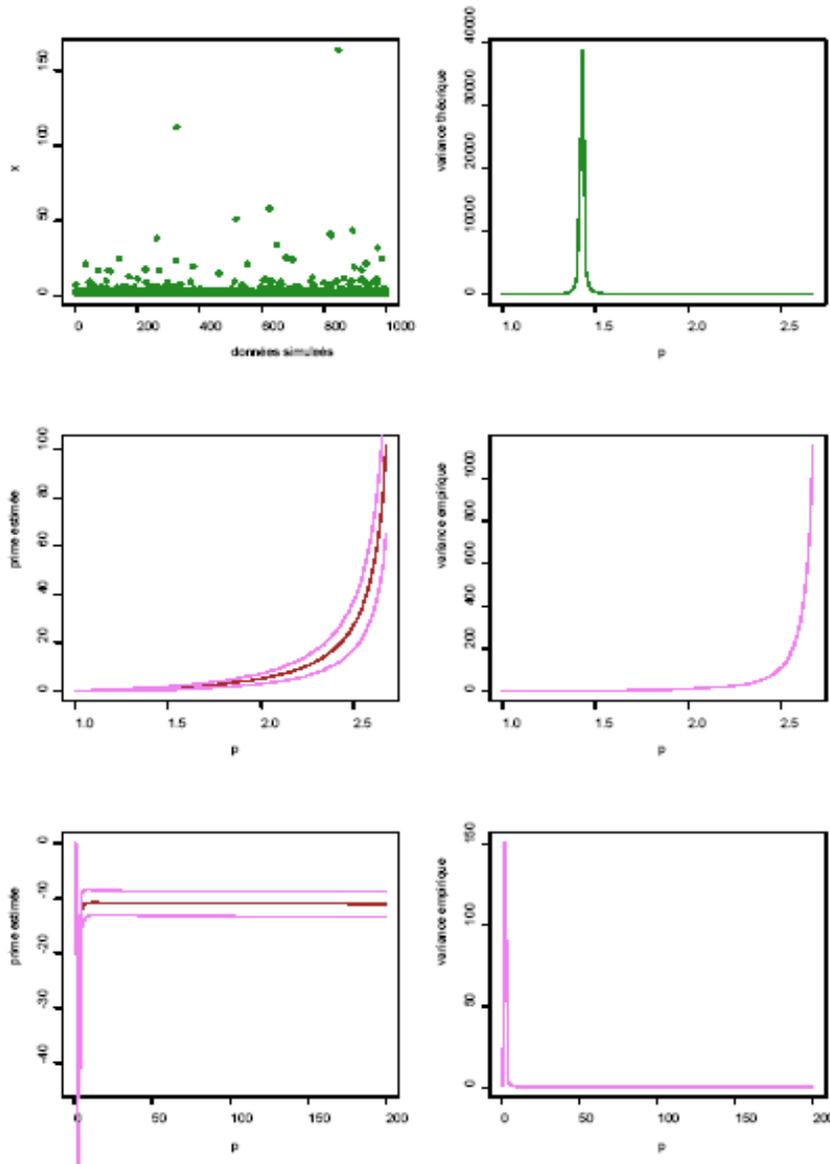


FIG. 4.11 – Résultats pour Pareto $\gamma = 0.7$

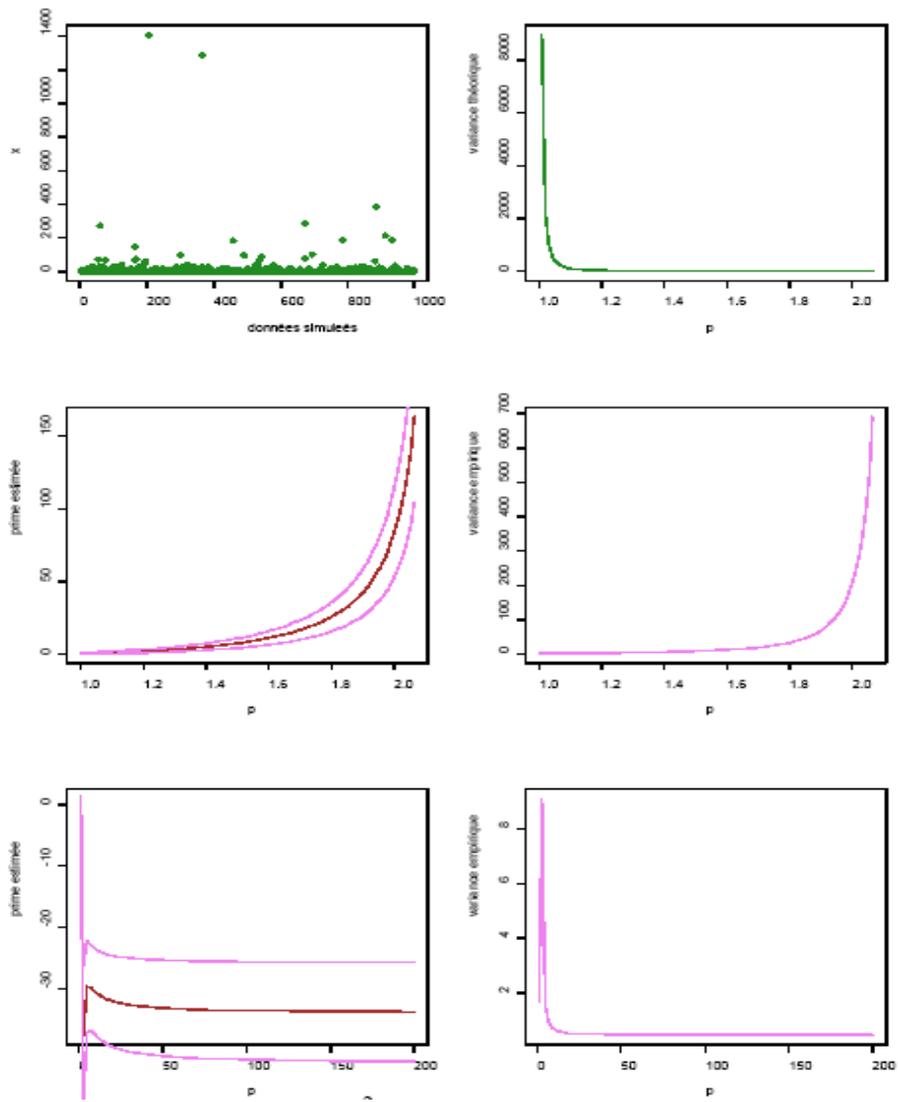


FIG. 4.12 – Résultats pour Pareto $\gamma = 1$

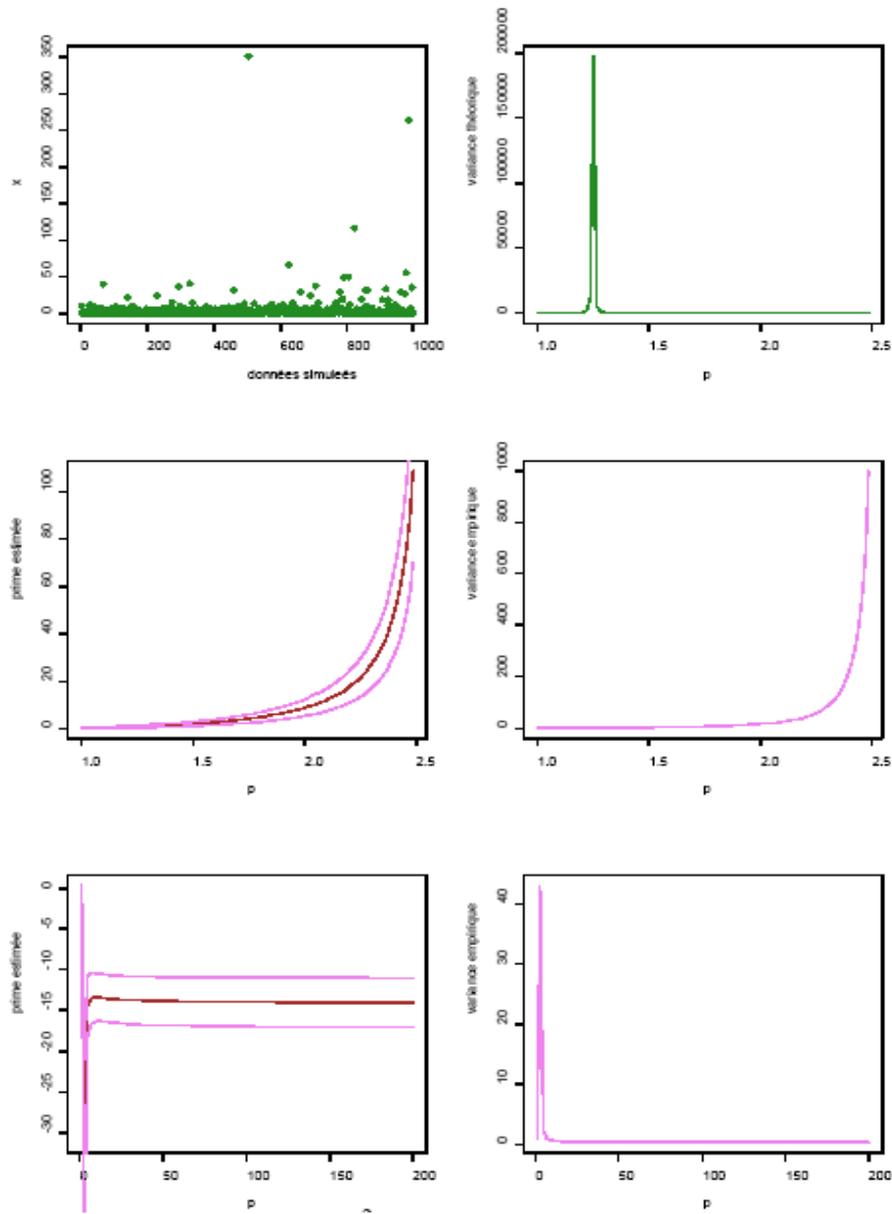


FIG. 4.13 – Résultats pour Fréchet $\gamma = 0.8$

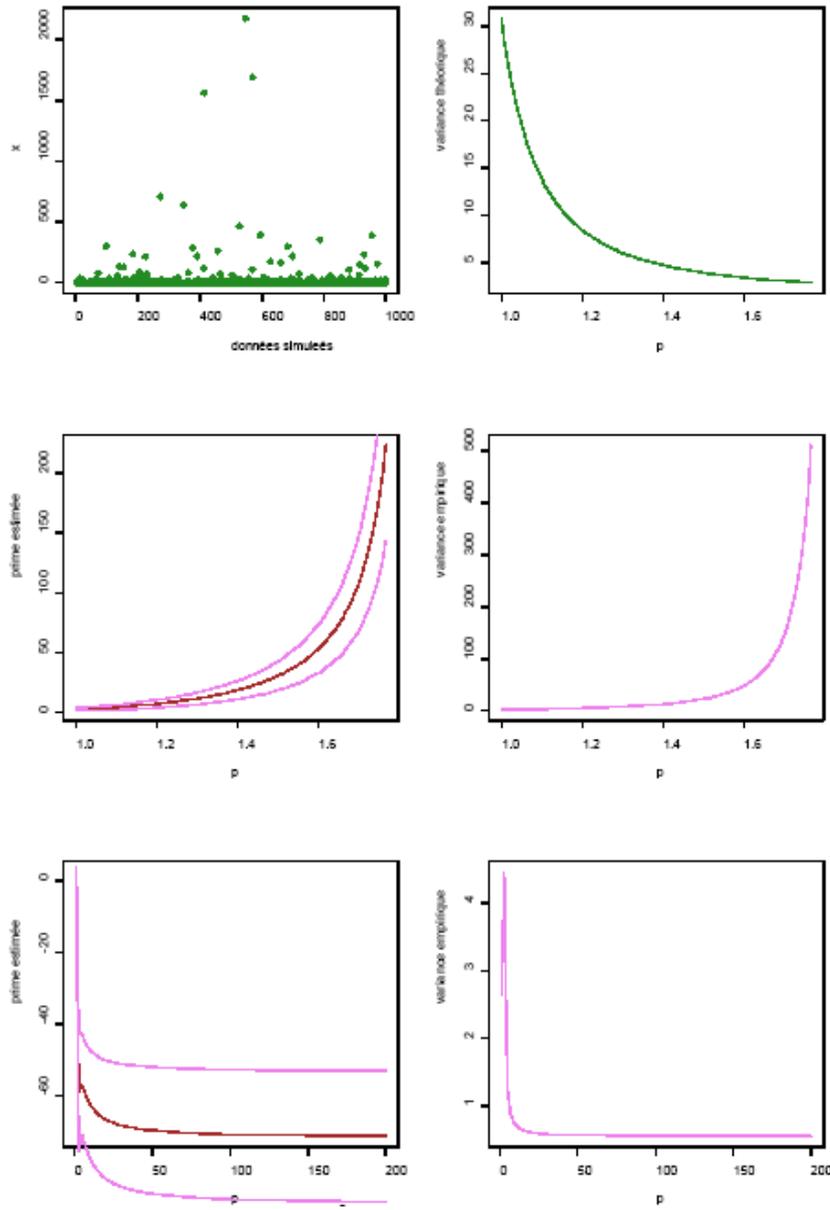


FIG. 4.14 – Résultats pour Fréchet $\gamma = 1.2$

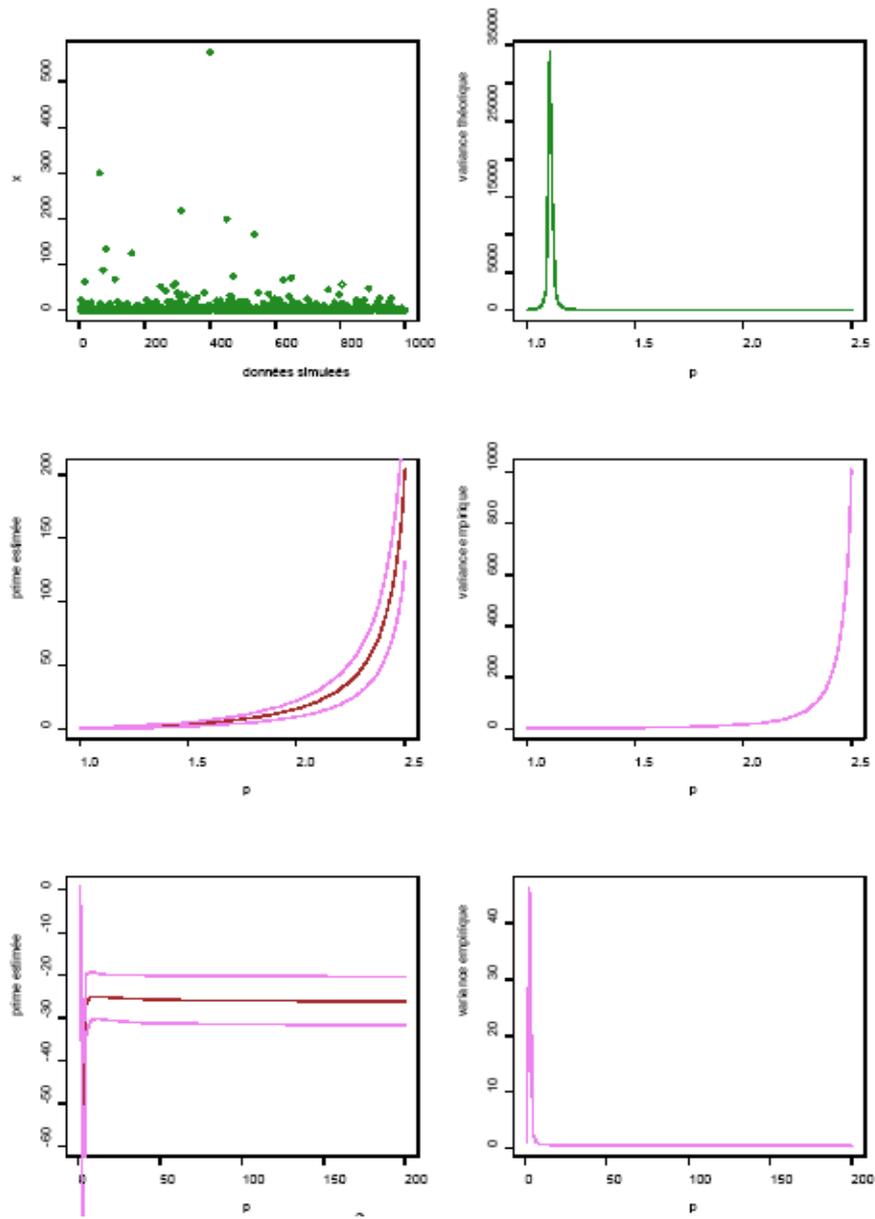


FIG. 4.15 – Résultats pour GEV $\gamma = 0.9$

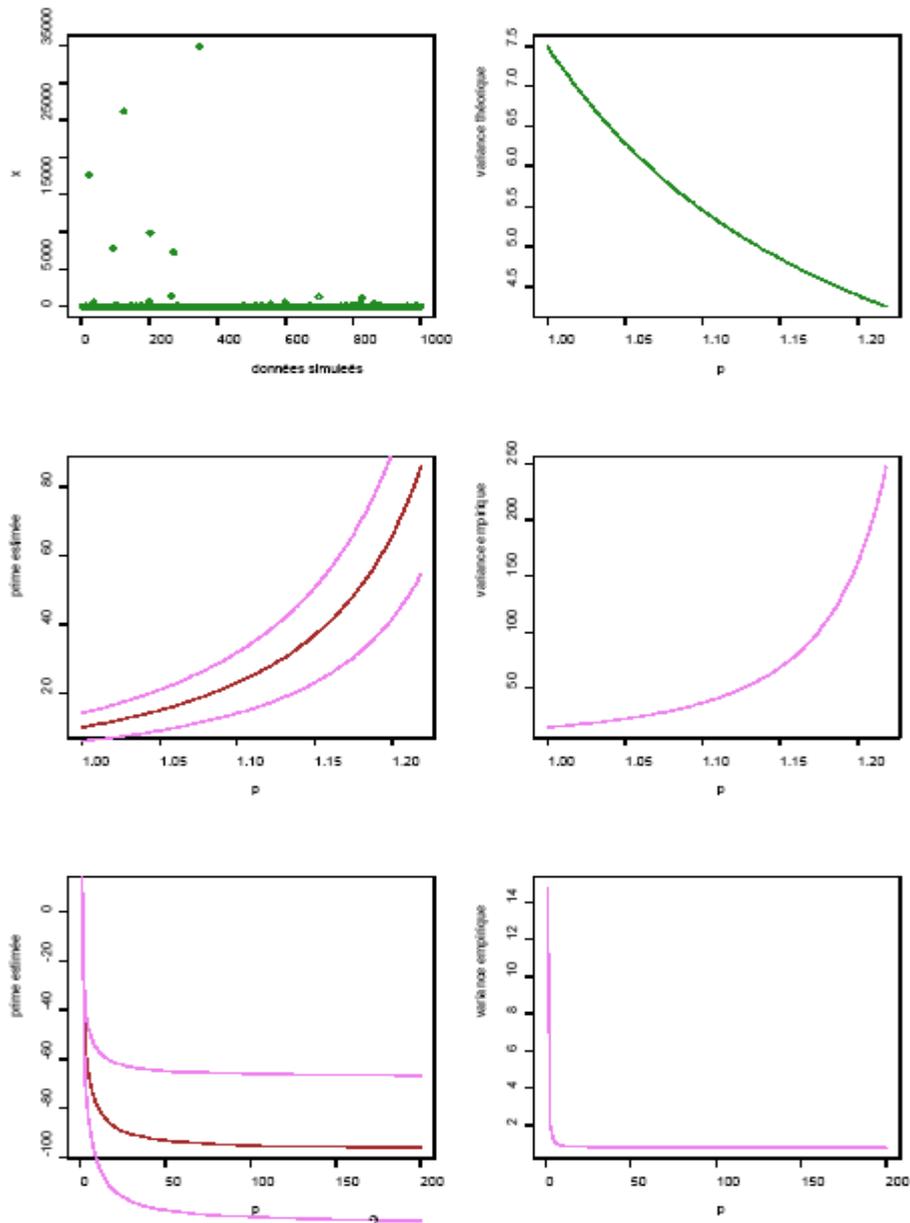


FIG. 4.16 – Résultats pour GEV $\gamma = 1.5$

Selon le domaine de variation de p la prime estimée est bien encadrée par les deux bornes de l'intervalle de confiance, on aperçoit une légère variation

de ces deux derniers pour certaines valeurs de p lorsque la variance empirique commence à augmenter clairement, ensuite rapidement les bornes se superposent de nouveau. Pratiquement la valeur de $\widehat{\gamma}_n^H$ est plus petite que γ la raison pour laquelle la variance empirique $\sigma_3^2(p, \widehat{\gamma}_n^H)$ a la même allure que celle de la variance théorique $\sigma_3^2(p, \gamma)$ lorsqu'on varie γ , même si les graphes en rose montrent qu'elle est en croissance dans la plus part du temps (i.e. elle croit ensuite elle décroît).

Pour p varie jusqu'à 200, on remarque que la prime estimée atteint un maximum déterminé ensuite elle décroît pour prendre des valeurs négatives ce qui peut être vu comme une justification graphique des conditions théoriques et de la localisation des valeurs du coefficient d'aversion p , tandis que pour la variance, la variation de p nous permet d'avoir plus de détails sur ces valeurs, elle est en croissance ce qui justifie aussi la divergence des bornes de l'intervalle de confiance.

4.5.5 Comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$

Cette section est consacrée à comparer les deux variances où

$$\sigma_1^2(p, \gamma) := \gamma^2 \left[2p^{-2} \frac{1}{(2\alpha + 1)(\alpha + 1)} - 2p^{-1} \frac{1}{\alpha + 1} + 1 \right], \quad p \geq 1$$

et

$$\sigma_3^2(p, \gamma) := \frac{\gamma^2}{\alpha^4} [\gamma^4 - 2\gamma^3 p^{-1} + \gamma^2 p^{-2} + p^{-2}] \quad \text{pour} \quad 1/p \neq \gamma,$$

avec $\alpha = 1/p - \gamma$. Ces deux variances sont en fonction de p et γ . Alors on peut effectuer une comparaison par rapport à l'un des deux variables en fixant l'autre. En variant à chaque fois la valeur de γ , une comparaison graphique est présentée en fonction du coefficient d'aversion p après avoir fixé son domaine de variation selon les conditions de la normalité asymptotique des deux estimateurs ainsi que leur valeur.

-Varier γ entre 0.5 et 1.5
-Le domaine de variation de p est : $p \in \left[1, \min \left(\frac{1}{\gamma - 0.5}, \frac{1}{\widehat{\gamma}} \right) \right]$
-Tracer $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$ sur le même plan en fonction de p
-Calculer le point d'intersection s'il existe

TAB. 4.4 – Algorithme de comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$

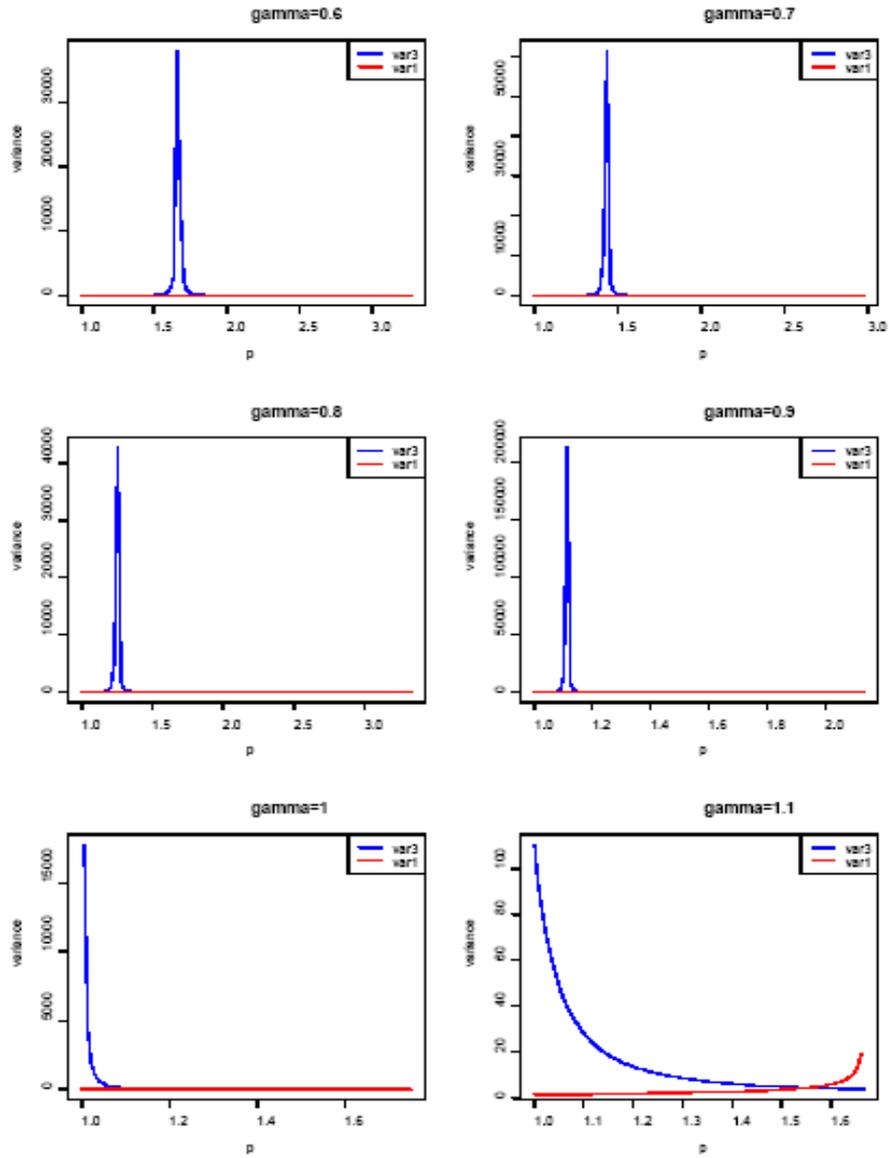


FIG. 4.17 – Comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$ pour $\gamma = 0.6, \dots$

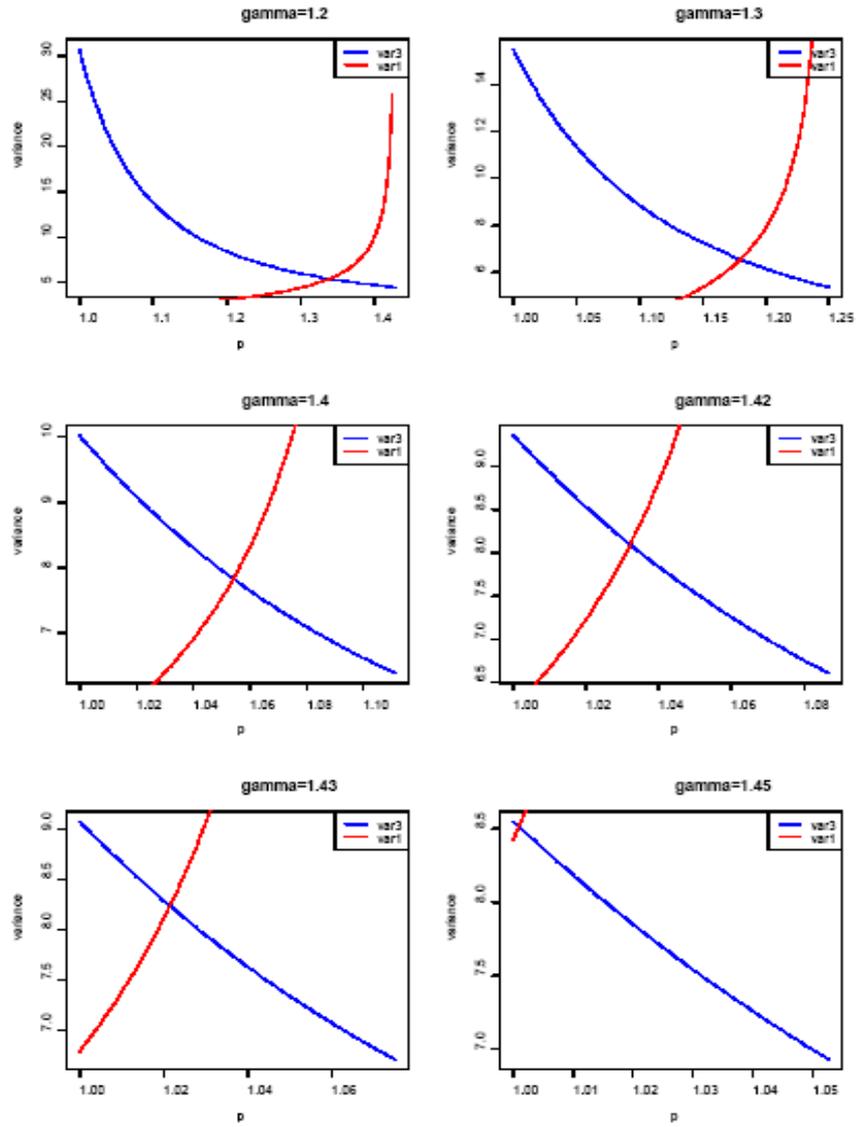


FIG. 4.18 – Comparaison entre $\sigma_1^2(p, \gamma)$ et $\sigma_3^2(p, \gamma)$ pour $\gamma = 1.2, \dots$

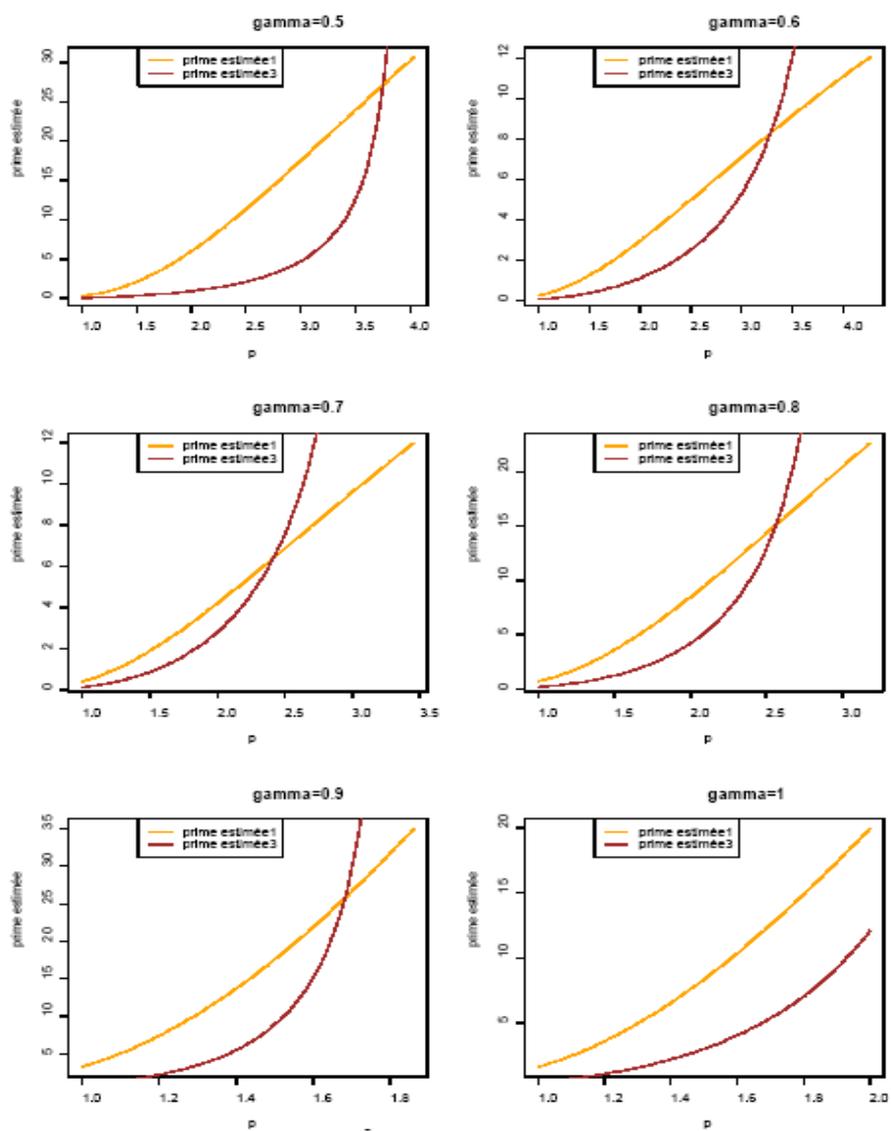


FIG. 4.19 – Comparaison entre $\hat{\Pi}_{u_n}^1$ et $\hat{\Pi}_{u_n}^3$

Commentaire

D'après la figure (4.17) et selon le domaine de variation de p on voit que pour $\gamma = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$, la variance $\sigma_3^2(p, \gamma)$ commence à partir de valeurs inférieures et proche de 0 et augmente jusqu'à atteindre un maximum (de grandes valeurs), ensuite ça décroît pour s'approcher une autre fois de 0, tandis que les valeurs de $\sigma_1^2(p, \gamma)$ chutent devant celles de $\sigma_3^2(p, \gamma)$ sur tout l'intervalle de p .

Selon la figure (4.18) on voit que pour $\gamma = 1.1, \dots$ la variance $\sigma_3^2(p, \gamma)$ est en décroissance tandis que la variance $\sigma_1^2(p, \gamma)$ est en croissance, en se croisant en un point déterminé (la solution de l'équation $\sigma_1^2(p, \gamma) = \sigma_3^2(p, \gamma)$) et là, la comparaison est plus pratique et plus significative. Comme conclusion et loin des valeurs de chaque prime estimée plus la variance est inférieure plus les bornes de l'intervalle de confiance sont superposées. Les comparaisons des variances consistent un outil d'aide pour se confirmer le choix de la prime estimée appropriée selon les risques exposés. Un choix convenable pour les paramètres d'estimation doit être laissé aux actuaires.

Sur la figure (4.19) nous présentons des graphiques contenant les deux primes estimées $\hat{\Pi}_{u_n}^1$ et $\hat{\Pi}_{u_n}^3$ en utilisant les mêmes paramètres de simulation pour une loi Pareto. Selon le domaine de variation de p nous remarquons que pour les premières valeurs de p la prime estimée $\hat{\Pi}_{u_n}^3$ présente des valeurs plus petites que celles de la prime estimée $\hat{\Pi}_{u_n}^1$. Pour $\gamma = 0.5, \dots, 0.9$, on remarque que les deux primes se croisent pour une valeur déterminée de p . A partir de $\gamma = 1$ les valeurs de $\hat{\Pi}_{u_n}^3$ sont plus petites que les valeurs de $\hat{\Pi}_{u_n}^1$. Comme conclusion, la simulation nous a permis de voir et comprendre avec plus d'objectivité les résultats théoriques obtenus. Pour un choix signifiant on doit prendre en compte non seulement les valeurs de primes estimées mais aussi leur variances qui influent directement sur les intervalles de confiance.

La mise en oeuvre d'un algorithme d'estimation de la prime ajustée avec intervalles de confiance, qui est une étape nécessaire pour la validation de l'application de l'estimateur de prime, est un outil simple à comprendre et à employer pour le développement de système de tarification notamment en réassurance. La visualisation graphique de la prime estimée encadrée par l'intervalle de confiance, permet au décideur de choisir la prime estimée adéquate en fixant les différents paramètres qui influent sur la prime.

Dans les applications une simulation pareille ne sera jamais définitive et complète, on sera souvent besoin d'un actuair pour fixer les paramètres des estimateurs ainsi pour effectuer un choix convenable qui soit compatible pour faire face aux risques exposés avant d'intégrer le taux d'intérêt pour calculer

en fin de compte le gain de la société, ce qui veut dire que ces primes estimées sont considérées comme des primes nettes pour couvrir exactement le risque exposé. On conclut enfin que ces primes estimées seront la base du calcul de primes commerciales

Récapitulation : la prime de risque ajustée à partir d'un seuil élevé u_n est donné par :

$$\Pi_{u_n}(X) := \int_{u_n}^{+\infty} (1 - F(s))^{1/p} ds, \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Le tableau suivant résume les trois résultats obtenus pour estimer Π_{u_n} :

1-Approche de distribution empirique	
estimateur	$\widehat{\Pi}_{u_n}^1(X) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n}\right)^{1/p} \{X_{n-i+1,n} - X_{n-i,n}\}$
variance	$\sigma_1^2(p, \gamma) := \gamma^2 \left[2p^{-2} \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)} - 2p^{-1} \frac{1}{\alpha+1} + 1 \right]$
variation de p	$\gamma - 1/2 < 1/p \leq 1$
seuil	$X_{n-k,n}$ (aléatoire)
2-Approche des excès	
estimateur	$\widehat{\Pi}_{u_n}^2(X) = \widehat{\lambda}^{1/p} \frac{\widehat{\sigma}}{(1/p) - \widehat{\gamma}}$
variance	$\sigma_2^2(p, \gamma, \beta) = \frac{(1+\gamma)\sigma^2}{((1/p) - \gamma)^2} \left(\frac{((1/p) - 1)^2}{1+\gamma} + \frac{1+\gamma}{((1/p) - \gamma)^2} - \frac{2}{(1/p) - \gamma} + 2 \right)$
variation de p	$\widehat{\gamma} \leq 1/p \leq 1$
seuil	déterministe
3-Approche des quantiles	
estimateur	$\widehat{\Pi}_{u_n}^3(X) = \frac{\widehat{\gamma}_n^H}{(1/p) - \widehat{\gamma}_n^H} \left(\frac{k}{n}\right)^{1/p} X_{n-k,n}$
variance	$\sigma_3^2(p, \gamma) := \frac{\gamma^2}{\alpha^4} [\gamma^4 - 2\gamma^3 p^{-1} + \gamma^2 p^{-2} + p^{-2}], 1/p \neq \gamma$
variation de p	$\widehat{\gamma}_n^H < 1/p$
seuil	$X_{n-k,n}$ (aléatoire)

TAB. 4.5 – Récapitulation des estimateurs de la prime de risque-ajustée

4.6 Conclusion

Généralement, les actuaires s'intéressent beaucoup à la stabilité du portefeuille d'une compagnie d'assurance dont la prime est l'un des éléments où l'assureur peut intervenir. De grandes revendications probablement suivent

des distributions à queues lourdes pouvant toucher la solvabilité du portefeuille, alors, il va falloir transférer ces risques extrêmes aux réassureurs où la couverture nécessite des tarifications significatives pour ces réclamations excessives, par l'exploitation des primes les plus adéquates et les plus rationnelles. Ce qui permet d'éviter un dumping préjudiciable à la solvabilité à long terme des entreprises d'assurance. Dans ce contexte, on a présenté trois approches d'estimation pour *la prime de risque ajustée*. La première et la troisième $(\hat{\Pi}_{u_n}^1, \hat{\Pi}_{u_n}^3)$ sont *non paramétriques* et *consiste à utiliser les k plus grandes observations de l'échantillon de risque*, et la deuxième $(\hat{\Pi}_{u_n}^2)$ est *semie-paramétrique* et *consiste à utiliser les observations qui dépassent un seuil déterministe u* . Ces estimateurs nous permettent des primes estimées indicées, ce qui donne le moyen d'ajustement où de balance pour le réassureur. Entre autres, des intervalles de confiance, des simulations et des comparaisons significatives, par l'obtention des graphiques et des schémas numériques appropriés comme un outil simple et interactif dans les applications pour la conception d'un système d'aide à la tarification en réassurance.

Conclusion

En calcul actuariel, la théorie des **probabilités** et la **statistique** sont l'outil primordial dans la modélisation mathématique des risques assurables, dans la détermination d'indices de prime et dans le développement de systèmes de tarification scientifique appropriés. Les risques se classent en fonction de leurs niveaux de gravité. Un contrat d'assurance, accord entre assuré et assureur, constitue l'élément "produit" d'une entreprise d'assurance. Une entreprise rationnelle possède une stratégie optimale, en terme de couverture des risques, et cherche souvent à maintenir son équilibre économique (sinistralité/ prime). Cet équilibre lui permettra d'atteindre ses objectifs financiers, par l'investissement et le placement profitable.

Bibliographie

- [1] Alexander, J., McNeil & Thomas, S. (1997). The Peaks over Thresholds Method for Estimating high Quantiles of Loss Distributions. Eth Zentrum CH-892 Zürich.
- [2] Beirlant, J. Matthys, G and Dierckx. (2001). Heavy-Tailed Distribution and Rating. *Astin Bultetin*, vol 31, No.1, pp. 37-58.
- [3] Beirlant, J. et Matthys, G. (2001). Extreme Quantile Estimation for Heavy-Tailed Distributions. Working Paper. Katholieke University Leuven, University Center of Statistics, www.kuleuven.ac.be/ucs/research/publi.htm.
- [4] Blondeaux, J. et Partrat, C. (2003). La Réassurance Approche technique. *Economica*
- [5] Caboussat, A. Théorie des valeurs extrêmes et application. Projet de semestre, Ecole polytechnique fédérale de lausanne.
- [6] Cassabalian, J.-Louis. (2000). Mathématiques et calculs de l'assurance Sur tableur et Internet. Edition ESKA.
- [7] Castillo, E. (1988). Extreme value theory in engineering. *Statistical Modeling and Decision Science*. Academic Press, Inc.
- [8] Ceberían, Ana C., Denuit, M., Lambert, P.(2004). Generalized Pareto Fit to the Society of Actuaries' Large Claims Database. *North American Actuarial Journal*, 7, 18-36.
- [9] Colmen, R. (2002). Modelling extremes. *Statistical Research Center for Complex Systems, International Workshop*.
- [10] Corradin, S. (2002). Economic Risk Capital and Reinsurance. an Extreme Value Theory's Application to Fire Claims of an Insurance Company. *Pianificazione Redditività di Cruppo*.
- [11] Csörgő, M. Csörgő, S., S., Horaváth, L. and Mason, D. (1986). Weighted empirical and quantile processes. *Ann. Proba.*, 14,31-85.
- [12] Danielsson, J., de Hann, L., Peng, L. and de Vries, C.G. (2001). Using a bootstrap Method to chose the sample fraction in tail estimation. *J. Multivariate Annal.*, 76, 226-248.

- [13] De Wolf, P.P. (1999). Estimating the extreme value index, PhD thesis, TU Delft, 1999.
- [14] Dekkers, A.L.M et de Haan. L.(1989). On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Annals of Statistics*, 17,1795-1832.
- [15] Diebolt, J. Cuillou. A, Rached. I. Généralisation de la méthode des moments pondérés, Application à la loi des excès.
- [16] Diebolt, J. Mhamed-Ali El Aroui. (1997) Modélisation de Queue de distribution et Estimation de quantiles extrêmes
- [17] Embrechts, P., Frey, R. Furrer, H. (1999). *Stochastic Processes in Insurance and Finance*. ETH Zürich, Switzerland.
- [18] Embrechts, P. Klüpperg. C, et Milkosch. T. (1997). *Modeling Extremal Events*. Springer.
- [19] Ferreira, A., de Vries, C.G. (2004). Optimal Confidence Intervals for the Tail Index and High Quantiles. Tinbergen Institute Discussion Paper TI24-090/2
- [20] Ferreira, A. de Haan, L et Peng, L. (1999). Adaptive estimators for the endpoint and high quantiles of a probability distribution. Eurandom technical report 99-042, Eindhoven.
- [21] Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. Krieger, Malabar, Florida.
- [22] Gnedenko, B.(1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*,44 :423—453.
- [23] Goovaert, M. J, De Vylder, F. A not on iterative premium calculation Principles
- [24] Hill, B. M. (1975). A simple approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.*, 3,1136-1174
- [25] Hosking, J.R.M et Wallis, J. R. (1987) Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution. *Technometrics* 2,pp. 339-349.
- [26] Jocelyne Dubois-Maury. (2005). Les risques naturels et technologiques et leur prévention - Enjeux pour les sociétés contemporaines. Extrait de : Dubois-Maury (J.) (2005) « Les risques naturels et technologiques » Problèmes politiques et sociaux n° 908, -La Documentation Française- janvier 2005
- [27] Lecoutre, J. P et Ph. Tassi. (1987). Statistique non paramétrique et robustesse. *Economica*.

- [28] Meddi, F. , Necir, A. Estimating the Risk-Adjusted-Premium For the Largest Reinsurance Covers Via High Quantiles, (à apparaître)
- [29] Menkens, O. (2004). Extreme Value Theory. CCFEA/ Department of Economics. University of Essex.
- [30] Matthys, G., Delfosse, E., Guillou, A., Beirlant, J. (2004). Estimating catastrophic quantile levels for heavy-tailed distributions. Insurance Mathematics and Economics 34 571-537. Elsevier.
- [31] Necir, A. and Boukhetala. K., Cherfi, M. Estimating the Risk-Adjusted Premium of Loss Using the POT Model. , (à apparaître)
- [32] Necir, A. and Boukhetala. K. (2004). Estimating the Risk-Adjusted Premium for The Largest Claims Reinsurance Covers. COMPSTAT'2004. Proceeding in Computational Statistics. ISBN 3-7908-1554-3, Physica-Verlag, Heidelberg, New York.
- [33] Neves, C. Fraga Alves, M. I.. (2004).Reiss and Thomas, Automatic selection of the number of extremes.Computational Statistics & Data Analysis 47 689-704. Elsevier.
- [34] Peng, L., (2001). Estimating the mean of a heavy tiled distribution. Statistic & Probability Letters 52 255-264
- [35] Reinsurance. (2000). European Property & Casualty Simulation « The riva Insurance Playground ». version 1.3.1E
- [36] Rolski, T. (1999).Some Problems in the Theory of Risk.Tokyo Institute of Technology and University of Wroclaw.
- [37] Rolski, T.,Schimidli,H., Schmidt, V. and Teugels, JL. (1999). Stochastic Processes for Insurance and Finance. John Wiley & Sons,Chichester.
- [38] Ruffinen, T. Z. (2002). Théorie du risque appliquée à la gestion de portefeuilles. Institut des Sciences Actuarielles. Ecole des Hautes Etudes Commerciales. Université de Lausanne BFSH-1 CH-1015 Lausanne Suisse
- [39] Segers, J. (2001). Residual estimators. Journal of Statistical Planning and Inference, 98 :15-27.
- [40] Wang, S. (1996). Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density, Astin Bulletin, 26, 71-92..

Résumé : La motivation principale de notre mémoire de Magister est l'estimation de la prime nette pour les plus grandes couvertures des revendications actuarielles de la réassurance, c'est-à-dire au-delà d'un seuil élevé du risque. En exploitant les modèles existants dans la théorie des valeurs extrêmes, on propose quelques estimateurs à cette prime en décrivant leur comportement asymptotique.

Mots clés : Queues lourdes, Théorie des valeurs extrêmes, Calcul de prime, Grandes revendications, Traité de réassurance.

Abstract : The main motivation of our memory of Magister is the estimation of the net premium for the largest actuarial claim covers of reinsurance that is beyond a high threshold of risk. By the exploitation of models existing in the theory of extreme values, one proposes some estimators to this premium by describing their asymptotic behaviour..

Cey words : Heavy tails, Extreme value theory, Premium calculation, Large claims, Reinsurance treaty.