Table des matières

Introduction **3**

1 Introduction au contrôle stochastique **6**
1.1 Introduction . . . 6
1.2 Classes des contrôles . . . 7
1.2.1 Contrôle admissible . . . 7
1.2.2 Contrôle optimal . . . 7
1.2.3 Contrôle presque optimal . . . 8
1.2.4 Contrôle feed-back . . . 8
1.2.5 Arrêt optimal . . . 8
1.2.6 Contrôle ergodique et contrôle risk-sensitive . . . 8
1.3 Exemple en finance . . . 9
1.3.1 Planification de la production . . . 9
1.4 Méthodes de resolution en contrôle stochastique . . . 10

2 Le principe du maximum en contrôle stochastique **12**
2.1 Introuction . . . 12
2.2 Cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas du contrôle . . 13
2.2.1 Formulation du problème . . . 13
2.2.2 Perturbation et estimation de la solution . . . 14
2.2.3 Linéarisation de la solution . . . 15
2.2.4 Principe de maximum . . . 18
2.3 Cas où le coefficient de diffusion dépend du contrôle . . . 20
2.3.1 Formulation du problème . . . 21
2.3.2 Développement de deuxième ordre . . . 21
2.3.3 Processus adjoints et l'inégalité variationnelle . . . 24
2.3.4 Principe de maximum . . . 26

3 Principe de la programmation dynamique **28**
3.1 Introduction . . . 28
3.2 Contrôle de processus de diffusion . . . 28

3.3 Principe de la programmation dynamique 31
3.4 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman 33
3.4.1 Dérivation formelle de HJB 33
3.5 Théorème de vérification 36

4 Application en finance **40**
4.1 Exemple 1 : problème de choix de porteffeuille de Merton en horizon fini 40
4.2 Exemple 2 : Consommation investissement 43

Conclusion **47**

Annexe **48**

Bibliographie **52**

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse au contrôle optimal et au principe de Pontriagin stochastique autrement dit, les conditions nécessaires d'optimalité en étudiant les systèmes dynamiques dont l'évolution est aléatoire. L'interêt des problèmes de contrôle réside notamment quand on parvient à optimiser un certain critère de performance appelé fonction côut, à l'aide de contrôle optimal et établir les conditions nécessaires satisfaites par ce contrôle. Historiquement l'étude initiale du problème de contrôle est dûe à Lagrange qui a fondé le calcul des variations, par suite plusieurs auteurs ont mis l'accent sur les problèmes de contrôle optimaux parmi eux : Pontriagin & all Arkin-Saksonov $[1]$, Bensoussan $[8, 9]$, Bismut $[10, 11, 12]$, Elliott $[15]$, Elliott -Kohlmann $[16]$,et Peng $[30]$,Bahlali et all $[2, 3, 4, 5, 6, 7]$....

Dans les problèmes de contrôle déterministe, la dynamique du systeme est modélisée par une équation différentielle ordinaire(EDO) par contre, dans le cas stochastique, l'évolution est décrite par un processus de diffusion solution d'une équation différentielle stochastique(EDS) définie de forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t & = b(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t, u_t)dw_t \\ x(0) & = x_0. \end{cases}$$

L'objectif ciblé par le contrôle optimal est de minimiser la fonction côut $J(t, x, u)$ ou encore maximiser le gain en multipliant par (-1), sur l'ensemble de tous les contrôles admissible U,l'ensemble des processus adaptés de carré intégrable qui prennent des valeurs dans un ensemble $U_a \subset \mathbb{R}^d$.

Le coût associé est donnée par

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}(\int_0^T l(x_t, u_t)dt + h(x_T)),$$

où

$$b\left(x, u\right) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n.$$

$$\sigma\left(x, u\right) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to L\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n\right).$$

La fonction l est supposée continue en (x, u) continûment differentiable en x, h est continûment différentiable en x.

On suppose également que b (resp.σ) est Lipchitz en x et u (resp. en x), continue en (x, u),et continûment différentiable en x.

D'un point de vue mathematique,on constate deux approches dans la resolution du problème de contrôle : La première approche est connue par la programmation dynamique ou encore principe de Bellmann. Elle a été introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la "politique optimale" qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre, non linéaire. La deuxième méthode est "Le principe du maximum de Pontryagin, connue sous le nom "conditions nécessaires d'optimalité" qui a été introduite par Pontryagin [33]. Il s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l' approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à certain paramètre de perturbation θ doit être positif. Ceci entraîne que $\frac{dJ(u_\theta)}{d\theta} \underset{\theta=0}{|} \geq 0.$

On va donner un aperçu général sur ce mémoire

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre nous exposons la structure de base d'un problème de contrôle que nous illustrons à travers plusieurs exemples issus des mathématiques financières. L'analyse et la résolution de ces problèmes seront détaillées plus tard.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre, on va commencer par étudier, le principe du maximum dans le cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas du contrôle. Puis dans la seconde partie, on va présenter le principe général obtenu par Peng [30] (cas où le coefficient de diffusion dépend du contrôl).

L'idée est de partir d'un contrôle optimal minimisant la fonction coût sur l'ensemble des contrôles et de donner des conditions nécessaires d'optimalités vérifiées par ce contrôle

Afin de simplifier les calcules, on va présenter le cas unidimensionnel. Pour le cas multidimensionnel, voir Bensoussan [8] . Dans le même esprit, on suppose que les coefficients sont indépendants du temps.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, nous étudions la méthode de la programmation dynamique pour résoudre un problème de contrôle stochastique. Le cadre adopté dans la section (3.2) est celui des processus de diffusion contrôlés à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et le problème formulé est en horizon fini .

L'idée basique de la méthode est de considérer une famille de problèmes de contrôle à différent états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. Ce principe, appelé "principe de la programmation dynamique" est initié dans les années 50 par Bellman, est énoncé précisément dans la section (3.3) L'équation de la programmation dynamique (en section 3.4) conduit à une équations aux dérivées partielles (EDP) nonlinéaire du second ordre, appelée Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le téorème de vérification, démontré(en section 3.5), valide l'optimalité de ce condidat solution de HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal. Cette approche classique de la programmation dynamique appellée étape de vérification

Chapitre 4 :

Dans ce chapitre,on va appliquer les résultats du chapitre précèdent à la finance. On étudie deux exemples d'optimisation dans des marchés financiers. Le premier exemple est le problème de choix de portefeuille de Merton en horizon fini . Le deuxième exemple concerne le classique problème d'investissement et de consommation de BLack - Scholes.

Chapitre 1

Introduction au contrôle stochastique

1.1 Introduction

La théorie du contrôle stochastique a de nombreuses applications en gestion et en finance. En effet, dans ces domaines, on considère des systèmes dynamiques (c'est à dire évoluant au cours du temps) en avenir incertain et sur lesquels on peut agir en vue d'optimiser un certain critère économique.

De façon générale, un problème de contrôle se formule selon les caractéristiques suivantes :

État du système : On considère un système dynamique caractérisé par son état a tout instant. Le temps peut être discret ou continu. L'horizon (intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description exhaustive du système. On notera $X_t(w)$ l'état du système à l'instant t.

Une fois défini 1'état, il s'agit de décrire les lois dévolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \to X_t$ décrit 1'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.

Contrôle : La dynamique X_t de 1'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée a tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

Critère de côut : Le but du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser s'il s'agit d'un gain) une fonctionnelle

$$J(u)=\mathbb{E}(\int_0^T l(x_t,u_t)dt+h(x_T))\ ,$$

sur l'ensemble de touts les contrôles admissibles U

La fonction valeur associée à ce problème de contrôle stochastique est donnée par :

Pour tout $(t,x)\in[0,\ T]\times\mathbb{R}^n$ et $\forall\ \alpha\in U$:

$$v(t,x)=\inf_{\alpha\in U}J(t,\ x,\ \alpha).$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, au lieu de minimiser un coût, alors on écrira :

$$v(t,x)=\sup_{\alpha\in U}J(t,\ x,\ \alpha)=-\inf_{\alpha\in U}J\left(-(t,\ x,\ \alpha)\right).$$

Un contrôle admissible $\overset{*}{\alpha}\in U$ est dit optimal si :

$$v(t,x)=J(t,x,\overset{*}{\alpha}).$$

1.2 Classes des contrôles

1.2.1 Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus u_t où $t\in[0,T]$ mesurable et adapté à valeur dans un borélien A de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$$U=\{u:[0,T]\times\Omega\to A,\ \text{tel que } u \text{ est mesurable et } F_t-\text{adapté}\}.$$

1.2.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction côut $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U.

On dit que le contrôle u^* est optimal si

$$J(u^*)\leq J(u),\forall u\in U$$

1.2.3 Contrôle presque optimal

Soit $\varepsilon > 0$, le contrôle u^ε est dit presque optimal (ou ε-optimal) si pour tout contrôle $u \in U$ on a

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon, \forall u \in U$$

1.2.4 Contrôle feed-back

Soit u_t un contrôle $\mathcal{F}_t-$adapté, et soit $\{\mathcal{F}_t^x\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X. On dit que u_t est contrôle **feed-back** si u_t est aussi adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t^x\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est **feed-back** si est seulement si u dépend de X.

1.2.5 Arrêt optimal

Généralement, dans les modèles de contrôle en finance, 1'horizon du problème est Fixe, soit fini ou infini. Il existe de nombreuses applications ou le contrôleur a aussi la possibilité de décider 1'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation est appelé problème d'arrêt optimal. Dans la formulation générale de tels problèmes, le contrôle est mixte constitué du couple contrôle-temps d'arrêt (u, τ) et la fonctionnelle à optimiser s'écrit :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau l(t, x_t, u_t)dt + h(x_T)\right].$$

1.2.6 Contrôle ergodique et contrôle risk-sensitive

Certains systèmes stochastiques peuvent Présenter sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante. Cette mesure, si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne d'état du système sur le long terme. Un problème de contrôle ergodique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère prenant en compte cette mesure invariante. Une formulation standard résultant des critères étudiés précédemment consiste à optimiser sur les contrôles u_t une fonctionnelle de la forme :

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\int_0^T l(t, x_t, u_t)dt\right].$$

Ou encore

$$\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbb{E}\left[\exp\int_0^T l(t,x_t,u_t)dt\right].$$

Cette dernière formulation est appelée contrôle **risk-sensitive** dans la littérature et a récemment été utilisée dans plusieurs travaux en mathématiques financières comme un critère de gestion de portefeuille à long terme.

1.3 Exemple en finance

1.3.1 Planification de la production

Considérons le problème de la Planification de la production optimale, et supposons donner un espace de probabilité filtré $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},P\right)$ vérifiant les conditions habituelles, et sur lequel un Mvt-Brownien standard $W(t)$ est défini.

Le processus demande $z(t)$ n'est pas déterministe, plutôt il est donné par :

$$z(t)=z_0+\int_0^t \xi(s)\,ds+\int_0^t \sigma(s)\,dW(s),\, t\epsilon\,[0,T] \tag{i}$$

$\xi(t)$: représente le taux demandé au temps t ,

et le terme $\int_0^t \sigma(s)\,dW(s)$ représente la fluctuation .

Nous supposons que $\xi(t)$ et $\sigma(t)$ sont $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adaptés. Les intégrales dans **(i)** sont bien définies . Pour répondre à la demande l'usine doit fonctionner de façon à répondre à toutes les situations .

Supposons que la machine est digne de confiance (sérieuse : elle ne s'arrête jamais) . Et comme dans le cas déterministe , au temps t le taux de production est $u(t)$ et le niveau d'inventaire est $x(t)$.

Si au temps $t=0$ l'inventaire est x_0 alors le système est modélisé comme suit :

$$\begin{cases} dx(t)=(u(t)-z(t))\,dt, x(0)=x_0 \\ dz(t)=\xi(t)\,dt+\sigma(t)\,dW(t)\,, z(0)=z_0 \end{cases} \tag{a}$$

Une autre fois, le contrôle ou bien le taux du production $u(t)$ est un objet du capacité de production ;

$$0\leq u(t)\leq k, t\epsilon\,[0,T] \quad \textbf{P.p.s} \tag{b}$$

Il y a une autre contrainte implicite sur le taux du production $u(t)$ exigible à l'environnement stochastique du problème à savoir pour tout temps , le manager de production prend une décision basée seulement sur les informations passées, plutôt que sur toute information du futur . C'est à dire qu le contrôle est non anticipatif.

Ici pour éviter une infinité de cumul , la capacité de production maximum soit totalement assez large pour répondre à la demande .

Alors la condition minimum suivante imposée pour que le problème ait une signification :

$$\mathbb{E}\int_0^T z(t)\,dt \equiv z_0 T + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^t \xi(s)\,dsdt < kT \tag{c}$$

De l'autre côté l'état d'inventaire ne dépasse pas nécessairement la taille b :

$$X(t) \leq b, \quad \forall t \epsilon [0,T]\,, \mathbf{P.p.s}$$

Le coût total espéré est le suivant :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left\{\int_0^T e^{-\gamma t} f(x(t), u(t))\,dt + e^{-\gamma T} h(x(T))\right\},$$

où le premier terme représente le coût totale d'inventaire et production , et le deuxième terme est la pénalité d'inventaire à la fin de la production (exemple : disposition du coût) , et finalement γ est le taux de remise .

L'objectif de management de production est de choisir une planification de la production convenable $u(.)$ tels que : **(a) , (b)** et **(c)** sont satisfaits et $J(u(.))$ est minimum .

1.4 Méthodes de resolution en contrôle stochastique

Il existe essentiellement deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles dans les cas déterministes ou stochastiques, le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin. La première méthode a été introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la "politique optimale" qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre, non linéaire. La deuxième méthode est le principe du maximum de Pontryagin connue sous le nom "conditions nécessaires d'optimalité" a été introduite par Pontryagin en 1956. Elle s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l' approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à certain paramètre de perturbation θ doit être positive Ceci entraîne que $\frac{dJ\left(u_\theta\right)}{d\theta}\underset{\theta=0}{|} \geq 0$.

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p\left(t\right)$ solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Chapitre 2

Le principe du maximum en contrôle stochastique

2.1 Introuction

Dans un problème de contrôle, on cherche naturellement les conditions nécessaires satisfaites par un contrôle optimal. Ces conditions peuvent être considérées comme une généralisation de la condition élémentaire d'optimalité pour une fonction différentiable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si x_0 a minimum alors $f^{'}(x_0+) \geq 0$ au sens très formel, la question est de différencier le fonctionnelle $J(u)$ qui est le coût associé au contrôle u.

Dans le cas déterministe, Pontriyagin a établi un principe d'optimalité dans les années 40 ce principe est un principe de dualle.Il affirme que si u^* est un contrôle optimal, il existe une fonction p_t. tel que $\forall t.\forall u$.

$$H(p_t, x_t^{u^*}, u^*) \leq H(p_t, x_t^{u^*}, u),$$

où H est l'Hamiltonien du système

Dans les années 70, Bismut[10, 11, 12] Kushner[25] et Bensoussan[8, 9] ont été intéressés par le cas de contrôle stochastique ,qui a été ensuite étudié en profondeur par un grand nombre d'auteurs (Haussmnann[21, 22].) voir Haussmann [21]...

On va commencer par étudier, le principe du maximum dans le cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas du contrôle. Puis dans la seconde partie, on va présenter le principe général obtenu par Peng[30] (cas où le coefficient de diffusion dépend du contrôle).

L'idée est de partir d'un contrôle optimal minimisant la fonction coût sur l'ensemble des contrôles et de donner des conditions nécessaires d'optimalités vérifiées par ce contrôle

Afin de simplifier les calcules on va présenter le cas unidimensionnel. Pour le cas multidimensionnel, voir Bensoussan.[8] . Dans le même esprit, on suppose que les coefficients sont indépendants du temps

2.2 Cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas du contrôle

Dans cette section , on propose d'étudier la structure mathématique rigoureuse pour les problèmes de contrôles stochastiques dans le cas des coefficients differentiables et on va étudier le principe du maximum dans le cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas du contrôle et aussi le domaine du contrôle U est non convexe.

2.2.1 Formulation du problème

Soient T un réel strictement positif, $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$ un espace probabilisé filtré $w = (w_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien de demension n, et U un sous ensemble non convexe de $\mathbb{R}^d$.

On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(w(s), 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.
On considère le problème de contrôle suivant

$$\begin{cases} dx_t & = b(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t)dw_t \\ x(0) & = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Le coût associé est donnée par

$$J(u) = \mathbb{E}(\int_0^T l(x_t, u_t)dt + h(x_T)), \tag{1.2}$$

où

$$b(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n.$$

$$\sigma(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to L\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d\right).$$

Le but est de minimiser ce coût sur un ensemble de contrôles admissibles. Cet ensemble est ici U, l'ensemble des processus adaptés de carré intégrable qui prennent des valeurs dans un ensemble $U_a \subset \mathbb{R}^d$.
La fonction l est supposée continue en (x,u) continûment differentiable en x.
h est continûment différentiable en x.

On suppose également que b (resp.σ) est Lipchitz en x et u (resp. en x), continue en (x,u),et continûment différentiable en x.

2.2.2 Perturbation et estimation de la solution

Soit u un contrôle optimal et soit $t_0 \in [0, T]$ on fixe $\nu \in L^2(\mathcal{F}_{t_0}) \cap U_a$
Pour θ petit, on définit un contrôle u_θ par la perturbation suivante

$$u_\theta(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_0[\\ v, & t \in [t_0, t_0 + \theta[\\ u(t), & t \in [t_0 + \theta, T[\end{cases}$$

Le contrôle u_θ évidemment admissible ,on note $y_\theta(t)$ la trajectoire correspondante.
Etudions maitenant la variation des trajectoire $y_\theta(t)$et $y(t)$,on obtient l'estimation suivante

Lemme 2.1 *Soit* $y_\theta(t)$*et* $y(t)$ *les solutions de l'équation* (1.1)*correspondante à* u_θ*et* u_t *(respectivement), quand* $\theta \longrightarrow 0$ *alors on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \le t \le T} |y_\theta(t) - y(t)|^2\right) \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

Preuve. Pour $t_0 \le t \le t_0 + \theta$ on a

$$\begin{aligned} y_\theta(t) - y(t) &= \int_{t_0}^{t} [b(y_\theta(s), v) - b(y(s), u(s))] \, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} [\sigma(y_\theta(s)) - \sigma(y(s))] \, dW_s, \end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses de Lipchitz et le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt\right) \le K \int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathbb{E}\left(|v - u(t)|^2\right) dt.$$

où K est une constante qui peut changer d'une ligne en prochain.
En utilisant l'inégalité de Doob- Kolmogorov , on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \le t \le T} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt\right) \le K \int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathbb{E}\left(|v - u(t)|^2\right) dt. \tag{1.4}$$

Pour $t_0 + \theta \le t \le T$ on a

$$\begin{aligned} y_\theta(t) - y(t) &= y_\theta(t_0 + \theta) - y(t_0 + \theta) + \int_{t_0+\theta}^{t} [b(y_\theta(s), u(s)) - b(y(s), u(s))] \, ds \\ &+ \int_{t_0+\theta}^{t} [\sigma(y_\theta(s)) - \sigma(y(s))] \, dW_s, \end{aligned}$$

ce qui donne par Lemme de Gronwall et (1.4)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_{t_0+\theta}^{T}|y_\theta(t)-y(t)|^2\,dt\right) &\leq K\mathbb{E}\left(|y_\theta(t_0+\theta)-y(t_0+\theta)|^2\right)\\ &\leq K'\int_{t_0}^{t_0+\theta}|v-u\,(t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Encore par l'inégalité de Doob-Kolmogorov

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0+\theta\leq t\leq T}|y_\theta(t)-y(t)|^2\,dt\right)\leq K''\mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}|v-u(t)|^2\,dt\right),$$

et on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq t\leq T}|y_\theta(t)-y(t)|^2\,dt\right)\leq K'''\mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}|v-u(t)|^2\,dt\right),$$

et cette dernière expression tend vers 0 avec θ, choisit t_0 tels que

$$\underset{\theta\longrightarrow 0}{lim}\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta}\mathbb{E}\left[|b\,(y\,(s)\,,u(s))-b\,(y\,(_{t_0})\,,u\,(t_0))|^2\right]ds=0$$

(Cette convergence est vrai pour presque tous les t_0). ■

2.2.3 Linéarisation de la solution

On veut approcher $(y_\theta(t)-y(t))$ à un autre processus solution de l'équation (1.1), noté par Z_t. Soit $y_\theta(t)$ est la trajectoire correspondante à u_θ et $y(t)$ est la trajectoire correspondante à u_t. D'aprés la définition de $y_\theta(t)$ et $y(t)$, on a :

$$y_\theta(t)=x+\int_0^t b\left(y_s^\theta,u_s^\theta\right)ds+\int_0^t\sigma\left(y_s^\theta\right)dw_s,$$

$$y\,(t)=x+\int_0^t b\,(y_s,u_s)\,ds+\int_0^t\sigma\,(y)\,dw_s.$$

Soit Z_t solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$
\left\{\begin{array}{ll} dz_t & = b_x^{'}(y_t,u_t)z_tdt+\sigma_x^{'}(y_t)z_tdw_t, \quad t_0\leq t\leq T \\ z(t_0) & = b(y\left(t_0\right),v)-b(y\left(t_0\right),u\left(t_0\right)), \end{array}\right. \tag{1.5}
$$

et

$$
\left\{\begin{array}{ll} d\zeta_t & = l_x^{'}(y_t,u\left(t\right))z_tdt, \quad t_0\leq t\leq T \\ \zeta(t_0) & = l(y\left(t_0\right),v)-l(y\left(t_0\right),u\left(t_0\right)). \end{array}\right. \tag{1.6}
$$

On a l'approximation suivante

Lemme 2.2

$$
\underset{\theta\longrightarrow 0}{lim}\,\mathbb{E}\left(\left|\frac{y_\theta(T)-y(T)}{\theta}-z\left(T\right)\right|^2\right)=0 \tag{1.7}
$$

$$
\underset{\theta\longrightarrow 0}{lim}\,\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T}\left[l\left(y_\theta\left(t\right),u_\theta(t)\right)-l\left(y\left(t\right),u\left(t\right)\right)\right]dt-\zeta(T)\right|\right)=0 \tag{1.8}
$$

Preuve. On note

$$
\widetilde{y}_\theta\left(t\right)=\frac{y_\theta(T)-y(T)}{\theta}-z\left(t\right),
$$

on a pour $t\in[t_0,t_0+\theta]$

$$
\begin{aligned}
d\tilde{y}_\theta\left(t\right) &= \frac{1}{\theta}\left[b\left(y\left(t\right)+\theta\left(z(t)+\widetilde{y}_\theta\left(t\right)\right),v\right)-b\left(y\left(t\right),u\right)-\theta b_x^{'}\left(y\left(t\right),u\right)z(t)\right]dt \\
&+\frac{1}{\theta}\left[\left(\sigma\left(y\left(t\right)\right)+\theta\left(z\left(t\right)+\widetilde{y}_\theta\left(t\right)\right)\right)-\sigma\left(y\left(t\right),t\right)-\theta\sigma_x^{'}\left(y\left(t\right)\right)z(t)\right]dW_s,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\widetilde{y}_\theta\left(t_0\right)=-\left[b(y\left(t_0\right),v)-b(y\left(t_0\right),u\left(t_0\right))\right],
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
\widetilde{y}_\theta\left(t_0+\theta\right) &= \frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta}\left[b\left(y\left(s\right)+\theta\left(z(s)+\widetilde{y}_\theta\left(s\right)\right),v\right)-b\left(y\left(s\right),v\right)\right]ds \\
&+\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta}\left[b\left(y\left(s\right),v\right)-b\left(y\left(t_0\right),v\right)\right]ds \\
&-\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta}\left[b\left(y\left(s\right),u\right)-b\left(y\left(t_0\right),u\left(t_0\right)\right)\right]ds \\
&+\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta}\left[\sigma\left(y\left(s\right)+\theta\left(z\left(s\right)+\widetilde{y}_\theta\left(s\right)\right)\right)-\sigma\left(y\left(s\right)\right)\right]dW_s \\
&-\int_{t_0}^{t_0+\theta}b_x^{'}\left(y\left(s\right),u(s)\right)z(s)ds-\int_{t_0}^{t_0+\theta}\sigma_x^{'}\left(y\left(s\right)\right)z(s)dW_s,
\end{aligned}
$$

à partir de laquelle on peut déduire que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\widetilde{y}_{\theta}\left(t_0+\theta\right)\right|^2 &= K\Bigg[\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\theta}\left|y_\theta(t)-y(t)\right|^2\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\theta}\left|y(t)-y(t_0)\right|^2\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}\left|z(t)\right|^2 dt\right) \\
&+\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}\left|b\left(y\left(t\right),u\right)-b\left(y\left(t_0\right),u\right)\right|^2 dt\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

et le terme entre crochets tend. vers 0 en utilisant le choix de t_0 et le lemme (2.1).

Pour $t_0+\theta\leq t\leq T$

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right) &= \Big[\frac{1}{\theta}b\left(y\left(t\right)+\theta\left(z(t)+\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right),u(t)\right) \\
&-b\left(y\left(t\right),u(t)\right)-\theta b_x^{'}\left(y\left(t\right),u(t)\right)z(t)\Big]\,dt \\
&+\frac{1}{\theta}\left[\left(\sigma\left(y\left(t\right)\right)+\theta\left(z\left(t\right)+\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right)\right)\right. \\
&\left.-\sigma\left(y\left(t\right)\right)-\theta\sigma_x^{'}\left(y\left(t\right)\right)z(t)\right]dW_s,
\end{aligned}
$$

après un développement de premier ordre on obtient

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right) &= \int_0^1 d\lambda b_x^{'}\left(y(t)+\lambda\theta\left(z(t)+\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right)u(t)\right)\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)dt \\
&+\int_0^1 d\lambda\sigma_x^{'}\left(y(t)+\lambda\theta\left(z(t)+\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right)\right)\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)dW_t \\
&+\int_0^1 d\lambda\left[b_x^{'}\left(y(t)+\lambda\theta\left(z(t)+\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right),u(t)\right)-b_x^{'}\left(y\left(t\right),u(t)\right)\right]z(t)dt \\
&+\int_0^1 d\lambda\left[\sigma_x^{'}\left(t\right)\left(y(t)+\lambda\theta z(t)+\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right)-\sigma_x^{'}\left(y(t)\right)\right]z(t)dW_t.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right|^2\right)\leq\mathbb{E}\left(\left|\widetilde{y}_{\theta}\left(t_0-\theta\right)\right|^2\right)+K\mathbb{E}\left(\int_{t_0+\theta}^{T}\left|\widetilde{y}_{\theta}(s)\right|^2 ds+\right) \\
&+\mathbb{E}\left\{\int_{t_0}^{T}\left|z(s)\right|\int_0^1 d\lambda\left[b_x^{'}\left(y(s)+\lambda\left(y_\theta\left(s\right)-y\left(s\right)\right),u(s)\right)-b_x^{'}\left(y\left(s\right),u(s)\right)\right]ds\right\}^2 \\
&+\mathbb{E}\int_{t_0}^{T}\left|\left|z(s)\right|^2\int_0^1 d\lambda\left[\sigma_x^{'}\left(y(s)+\lambda\left(y_\theta\left(s\right)-y\left(s\right)\right),u(s)\right)-\sigma_x^{'}\left(y\left(s\right),u(s)\right)\right]\right|^2 ds,
\end{aligned}
$$

en utilisant la continuité de $\sigma_x^{'}$ et lemme (2.1) et lemme de Gronwall on obtient

$$
\underset{\theta\longrightarrow 0}{lim}\sup_{t_0+\theta\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|\widetilde{y}_{\theta}\left(t\right)\right|^2\right)=0,
$$

■
(1.8) peut être prouvé d'une manière similaire.
On déduit d'après lemme (2.2) une première expression du coût dérivé

Corollaire 2.3

$$\frac{d}{d\theta}\, J(u_\theta)|_{\theta=0} = \mathbb{E}\left[h_x^{'}\left(y(T)\right) z(T) + \zeta(T)\right] \tag{1.9}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\left[J(u_\theta) - J(u)\right] &= \frac{1}{\theta}\Big[\mathbb{E}h\left(y_\theta(T)\right) - h\left(y(T)\right) \\
&+ \int_{t_0}^{T} l\left(y_\theta(t) + u_\theta\left(t\right)\right) dt - \int_{t_0}^{T} l\left(y(t) + u\left(t\right)\right) dt\Big] \\
\frac{1}{\theta}\left[J(u_\theta) - J(u)\right] &= \mathbb{E}\left(\int_0^1 h_x^{'}\left(y(T) + \lambda\left(y_\theta\left(T\right) - y(T)\right)\right) \tfrac{y_\theta(T) - y(T)}{\theta} d\lambda \right.\\
&\left. + \frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T} \left[l\left(y_\theta(t) + u_\theta\left(t\right)\right) - l\left(y(t) + u\left(t\right)\right)\right] dt\right),
\end{aligned}$$

et ce qui reste est d'appliquer le lemme (2.2) pour obtenir le résultat ■

2.2.4 Principe de maximum

On va chercher une autre expression de cette dérivée.
On introduit l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases} d\phi_t &= b_x^{'}\phi_t dt + \sigma_x^{'}\phi_t dW_t \\ \phi_0 &= 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

et

$$\begin{cases} d\psi_t &= \left(\psi_t \sigma_x^{'2} - \psi_t b_x^{'}\right) dt - \psi_t \sigma_x^{'} dW_t \\ \psi_0 &= 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

On vérifie facilement que $\forall t, \phi_t \psi_t = 1$ et que

$$\eta_t = \psi_t z_t = \psi_{t_0} z_{t_0} = \psi_{t_0}\left[b\left(y_{t_0}, v\right) - b\left(y_{t_0}, u_{t_0}\right)\right].$$

On présente

$$\pi_t = \phi_T h_x^{'}\left(y_T\right) + \int_t^T \phi_s l_x^{'}\left(y_s, u_s\right) ds, \tag{1.12}$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} J(u_\theta)|_{\theta=0} &= \mathbb{E}\left(h_x'(y_T) z_T + \zeta_T\right) = \mathbb{E}\left(\pi_T \eta_T + \zeta_T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\pi_{t_0}\eta_{t_0}\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^T \frac{d\pi}{dt}\eta_{t_0} dt\right) + \mathbb{E}\left(\zeta_T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\pi_{t_0}\eta_{t_0}\right) - \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^T \bigcirc_s l_x'(y_s, u_s, s)\, ds \eta_{t_0}\right) + \mathbb{E}\left(\zeta_T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\pi_{t_0}\eta_{t_0}\right) + \mathbb{E}\left(\zeta_T - \int_{t_0}^T l_x'(y_s, u_s) z_s ds\right) = \mathbb{E}\left(\pi_{t_0}\eta_{t_0} + \zeta t_0\right) \\
&= \mathbb{E}\left(l(y_{t_0}, v) + \psi_{t_0}\pi_{t_0} b(y_{t_0}, v) - l(y_{t_0}, u_{t_0}) - \psi_{t_0}\pi_{t_0} b(y_{t_0}, u_{t_0})\right) \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Si nous désignons $p_t = (\psi_t \mathbb{E}(\pi_t \mid \mathcal{F}_t))$ (ce processus s'appelle le processus adjoint), on peut définir le principe du maximum par le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Avec une probabilité de 1,$\forall v \in U_a$ on a :*

$$H(y_t, v, p_t) = l(y_t, v) + p_t b(y_t, v) \geq H(y_t, v, p_t) = l(y_t, u_t) + p_t b(y_t, u_t). \tag{1.14}$$

Preuve. Posons $t = t_0$.comme avant et $\frac{d}{d\theta} J(u_\theta)|_{\theta=0} \geq 0$ car u est optimal ,on a d'aprée (1.13)

$$\mathbb{E}\left(l(y_t, v) + p_t b(y_t, v) - l(y_t, u_t) + p_t b(y_t, u_t)\right) \geq 0 \quad \forall v \in L^2(F_t),$$

on déduit facilement que $\forall v \in U_a \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{E}\left(l_A\left[l(y_t, v) + p_t b(y_t, v) - l(y_t, u_t) + p_t g(y_t, u_t)\right]\right) \geq 0,$$

qui donne le résultat souhaité. ■

On attend maintenant une équation vérifiée par p_t. On a

$$\mathbb{E}(\pi_t \mid \mathcal{F}_s) = -\int_{t_0}^t \phi_s l_x'(y(s), u(t)) ds + \mathbb{E}\phi_T h_x'(y_T) + \int_{t_0}^T \phi_s l_x'(y(s), u(t)\, ds \mid \mathcal{F}_t)$$

Le deuxième terme, qui est un carré intégrable $\mathcal{F}_t-$martingale peut être représenté de la façon suivante

$$\mathbb{E}\left(\phi_T h_x'(y_T) + \int_{t_0}^T \phi_s l_x'(y(s), u(t)\right) + \int_{t_0}^T G_s dW_s,$$

où G est un processus adapté. On obtient alors

$$-dp_t = \left(\sigma_x' p_t - \psi_t G_t\right) dW_t + \left(g_x' p_t + l_x' - \sigma_x'\left(\sigma_x' p_t - \psi_t G_t\right)\right) dt \tag{1.15}$$

c'est-à-dire aussi dénotant que $K_t = \sigma'_x p_t - \psi_t G_t$ et p est la solution de l'équation retrograde

$$\begin{cases} -dp_t & = \left(g'_x p_t + l'_x - \sigma'_x K_t\right) dt + K_t dW_t \\ p_T & = h'_x \left(y_T\right). \end{cases} \tag{1.16}$$

Et par le théorème de Riesz pour interpréter le couple (p, K) on a

$$l\left(\phi, \psi\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T l'_x \zeta\left(t\right) dt + h'_x\left(T\right) \zeta\left(T\right)\right), \tag{1.17}$$

où

$$\begin{cases} -d\zeta\left(t\right) & = \left(b'_x \zeta\left(t\right) + \phi\left(t\right)\right) dt + \left(\sigma'_x \zeta\left(t\right) + \psi(t)\right) dW_t \\ \zeta\left(0\right) & = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\forall \phi, \forall \psi$

$$l\left(\phi, \psi\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \left[p\left(t\right) \phi\left(t\right) dt + K\left(t\right) \psi(t)\right] dt\right).$$

Ou en déduisant par écrit $\mathbb{E}\left(p_T z_T\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T d\left(pz\right)_t\right)$ et en appliquant la formule d'Itô
Il n'est pas difficile de voir que la méthode précédente ne fonctionne pas lorsque le processus de contrôle est présent dans σ. En effet, ce qui est nécessaire est une estimation d'une limite quand $\theta \to 0$ de l'expression $\frac{1}{\theta}\int_t^{t+\theta} \left[\sigma\left(y_s, u_s\right) - \sigma\left(y_t, u_t\right)\right]$ et cela ne peut être fait en général.

L'idée de Bensoussan pour ce problème est de supposer que l'ensemble U_a est convexe et de remplacer u_θ par $u_\theta = u + \theta\left(v - u\right)$ ou v un contrôle admissible, il obtient alors un principe du maximum, mais dans un cas particulier voir [9].

Peng a formulé un principe plus général que nous exposons maintenant dans le cas unidimensionnel pour le cas multidimensionnel voir [30]

2.3 Cas où le coefficient de diffusion dépend du contrôle

Dans cette section , on se propose d'étudier la structure mathématique rigoureuse pour les problèmes de contrôles stochastiques dans le cas des coêfficients differentiables et on va étudier le principe du maximum dans le cas où le coêfficient de diffusion dépend du contrôle avec le domaine du contrôle U est non convexe

2.3.1 Formulation du problème

Soient T un réel strictement positif, $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $w = (w_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien de dimension n, et U un sous ensemble non convexe de $\mathbb{R}^d$.

On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(w(s), 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.
Nous considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} dx_t & = b(x_t, u_t)\,dt + \sigma(x_t, u_t)\,dW_t \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

L'objectif est de minimiser le coût

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\int_0^T l(x_t, u_t)dt + h(x_T)\right). \tag{2.2}$$

Où

$$b(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to L\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d\right)$$

2.3.2 Développement de deuxième ordre

On fait des hypothèses sur la même régularité de coefficients comme avant, mais cette fois avec des dérivés de deuxième ordre.
Soit (y_t, u_t) un contrôle optimal on introduit le contrôle modifié (perturbé) u^ε de la même manière comme avant. Soit $0 \leq \tau \leq T$ et $\varepsilon \geq 0$,

et v un variable aléatoire à valeurs dans U_a, $\mathcal{F}_t-$mesurable.
On suppose que

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} v & \tau \leq t \leq \tau + \varepsilon \\ u(t) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où y_ε est la solution de (2.1) associée à u^ε.
On veut déduire une inégalité variationnelle de$J(u_\varepsilon) - J(u) \geq 0$.
L'idée est d'aller jusqu'au deuxième ordre dans les développements de Taylor.
Considérons le processus suivant

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \int_0^t \left[b_x^{'}\left(y_s,u_s\right)y_1(s)+\left(b_x\left(y_s.u_s^{\varepsilon}\right)-b\left(y_s.u_s\right)\right)\right]ds \\
&+\int_0^t \left[\sigma_x^{'}\left(y_s,u_s\right)y_1(s)+\left(\sigma\left(y_s.u_s^{\varepsilon}\right)-\sigma\left(y_s.u_s\right)\right)\right]dW_s,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= \int_0^t \left[b_x^{'}\left(y_s,u_s\right)y_2(s)+\frac{1}{2}\sigma_{xx}^{''}\left(y_s.u_s\right)y_1(s)^2\right]dW_s \\
&+\int_0^t \left[b_x^{'}\left(y_s,u_s^{\varepsilon}\right)+b_x^{'}\left(y_s,u_s\right)\right]y_1(s)ds \\
&+\int_0^t \left[\sigma_x^{'}\left(y_s.u_s^{\varepsilon}\right)-\sigma_x^{'}\left(y_s,u_s\right)\right]y_1(s)dW_s \\
&+\int_0^t \left[b_x^{'}\left(y_s,u_s\right)y_2(s)+\tfrac{1}{2}b_{xx}^{"}\left(y_s.u_s\right)y_1^2(s)\right]ds
\end{aligned}
$$

On obtient l'estimation du second ordre suivante

Lemme 2.5 *Il existe $C>0$ tel que*

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\left|y^{\varepsilon}\left(t\right)-y\left(t\right)-y_1\left(t\right)-y_2\left(t\right)\right|\leq C\epsilon^2. \tag{2.3}
$$

Preuve. Il est facile de vérifier par le lemme Gronwall et les inégalités de Doob qu'il existe $C>0$ tel que l'estimation à priori suivante soit vraie

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|y_1\left(t\right)\right|^2\right) &\leq C\epsilon \\
\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|y_2\left(t\right)\right|^2\right) &\leq C\epsilon^2 \\
\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|y_1\left(t\right)\right|^4\right) &\leq C\epsilon^2 \\
\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|y_2\left(t\right)\right|^4\right) &\leq C\epsilon^4 \\
\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|y_1\left(t\right)\right|^8\right) &\leq C\epsilon^4.
\end{aligned}
$$

Posons $y_3=y_1+y_2$ (pour simplifier, nous omettons le temps t). On a alors :

$$\int_0^t b\left(y+y_3,u^\varepsilon\right)ds+\int_0^t \sigma\left(y+y_3,u^\varepsilon\right)dW_s =$$
$$= \int_0^t \left[b\left(y,u^\varepsilon\right)+b_x^{'}\left(y,u^\varepsilon\right)y_3+\int_0^1\int_0^1 \lambda b_{xx}^{''}\left(y+\lambda u_3,u^\varepsilon\right)y_3^2 d\lambda du\right]ds+$$
$$+\int_0^t \left[\sigma\left(y,u^\varepsilon\right)+\sigma_x\left(y,u^\varepsilon\right)y_3+\int_0^1\int_0^1 \lambda \sigma_{xx}^{''}\left(y+\lambda u_3,u^\varepsilon\right)y_3^2 d\lambda du\right]dW_s =$$
$$= y\left(t\right)+y_3\left(t\right)-x_0+\int_0^t G^\varepsilon\left(s\right)ds+\int_0^t \wedge^\varepsilon\left(s\right)dW_s$$

Où

$$\begin{aligned} G^\varepsilon\left(s\right) &= \frac{1}{2}b_{xx}^{''}\left(y_s,u_s\right)\left(y_2^2\left(s\right)+2y_1\left(s\right)y_2\left(s\right)\right)+\left[b_x^{'}\left(y_s,u_s^\varepsilon\right)-b_x^{'}\left(y_s,u_s\right)\right]y_2\left(s\right) \\ &+\int_0^1\int_0^1 \lambda\left[b_{xx}^{''}\left(y+\lambda u y_3,u^\varepsilon\right)-b_{xx}^{''}\left(y,v\right)\right]y_3^2(s)d\lambda du \qquad (2.4) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \wedge^\varepsilon\left(s\right) &= \frac{1}{2}\sigma_{xx}^{''}\left(y_s,u_s\right)\left(y_2^2\left(s\right)+2y_1\left(s\right)y_2\left(s\right)\right)+\left[\sigma_x^{'}\left(y_s,u_s^\varepsilon\right)-\sigma_x^{'}\left(y_s,u_s\right)\right]y_2\left(s\right) \\ &+\int_0^1\int_0^1 \lambda\left[\sigma_{xx}^{''}\left(y+\lambda u y_3,u^\varepsilon\right)-\sigma_{xx}^{''}\left(y,v\right)\right]y_3^2(s)d\lambda du. \qquad (2.5) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente, on obtient

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left(\left|G^\varepsilon\left(s\right)ds\right|^2+\left|\int_0^1 \wedge^\varepsilon\left(s\right)dB_s\right|^2\right)=O(\varepsilon^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} (y^\varepsilon-y-y_3)(t) &= \int_0^t \left[b\left(y^\varepsilon\left(s\right),u^\varepsilon\left(s\right)\right)-b\left(y\left(s\right)+y_3\left(s\right),u^\varepsilon\left(s\right)\right)\right]ds \\ &+\int_0^t \left[\sigma\left(y^\varepsilon\left(s\right),u^\varepsilon\left(s\right)\right)-\sigma\left(y\left(s\right)+y_3\left(s\right),u^\varepsilon\left(s\right)\right)\right]dW_s \\ &+\int_0^1 G^\varepsilon\left(s\right)ds+\int_0^1 \wedge^\varepsilon\left(s\right)dW_s. \end{aligned}$$

Et ainsi. en utilisant l'hypothèse de Lipschitz, lemme Gronwal et l'estimation précédente, on obtient le résultat désiré. ■
On déduit le résultat suivant d'après lemme précédent (2.5), qui donne une évaluation sur la variation du coût.

Lemme 2.6

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \left[l_x'\left(y\left(s\right).u\left(s\right)\right)\left(y_1\left(s\right)+y_2\left(s\right)\right)+\frac{1}{2}l_{xx}^{"}\left(y\left(s\right).u\left(s\right)\right)y_1^2\left(s\right)\right]ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \left[l_x'\left(y\left(s\right).u^{\varepsilon}\left(s\right)\right)-l\left(y\left(s\right).u\left(s\right)\right)ds\right] \\
&+\mathbb{E}\left(h_x'y_1\left(T\right)+y_2\left(T\right)+\frac{1}{2}\left(h_{xx}^{"}\left(y\left(T\right)\right)y_1^2\left(T\right)\right)\right)\geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Preuve. Par l'optimalité de (y,u), on a

$$
\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l_x\left(y^{\varepsilon}\left(t\right).u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-l\left(y\left(t\right).u\left(t\right)\right)\right]dt\right)+\mathbb{E}\left(h\left(y^{\varepsilon}\left(T\right)\right)+h\left(y\left(T\right)\right)\right)\geq 0,
$$

et d'après le lemme (2.5),

$$
\begin{aligned}
0 \; &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l\left(y+y_1+y_2,u^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-l\left(y\left(t\right).u\left(t\right)\right)dt\right]\right) \\
&+\mathbb{E}\left(h\left(y+y_1+y_2\left(T\right)\right)-h\left(y\left(T\right)\right)\right)+O(\varepsilon) \\
&=\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l\left(y+y_1+y_2,u\right)-l\left(y.u\right)\right]dt\right) \\
&+\mathbb{E}\left(h\left(y+y_1+y_2\left(T\right)\right)-h\left(y\left(T\right)\right)\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l\left(y+y_1+y_2,u^{\varepsilon}\right)-l\left(y+y_1+y_2,u\right)\right]dt+O(\varepsilon)\right) \\
&=\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l_x'\left(y,u\right)\left(y_1+y_2\right)+\frac{1}{2}l_{xx}^{"}\left(y.u\right)\left(y_1+y_2\right)^2\right]ds\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l\left(y,u^{\varepsilon}\right)-l\left(y,u\right)\right]ds\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l_{xx}^{"}\left(y,u^{\varepsilon}\right)-l_x'\left(y,u\right)\right]\left(y_1+y_2\right)ds\right) \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[l_{xx}^{"}\left(y,u^{\varepsilon}\right)-ll_{xx}^{"}\left(y,u\right)\right]y_1^2\left(s\right)ds\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\left(h_x'y\left(T\right)\right)\left(y_1\left(T\right)-y_2\left(T\right)\right)\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(h_{xx}^{"}\left(y\left(T\right)\right)y_1\left(T\right)\right)+O(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

D'où le résultat suivant en utilisant les estimations a priori ■

2.3.3 Processus adjoints et l'inégalité variationnelle

On va traiter maintenant l'inégalité précédente (2.6) par la dualité, afin d'obtenir une inégalité variationnelle.
Il n'est pas très difficile (voir Peng [30] pour plus de détails) pour voir que la partie linéaire de l'équation peut être traitée avec la même technique que dans la partie précédente. On obtient un couple (p,K) de processus adaptées dans $L^2\times L^2$ tels que l'inégalité précédente est

$$
\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[H\left(y(s),u^{\varepsilon}(s),p(s),K(s)\right)-H\left(y(s),u(s),p(s),K(s)\right)\right]ds\right)
$$
$$
+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^T H_{xx}^{"}\left(\left(y(s),u(s),p(s),K(s)y_1^2\left(s\right)\right)ds\right)\right)
$$
$$
+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(h_{xx}^{"}\left(y\left(T\right)\right)y_1\left(T\right)^2\right)\geq O(\varepsilon),
$$

où l'Hamiltonien H est défini par

$$
H\left(x,v,p,K\right)=l(x,v)+pb(x,v)+K\sigma(x,v)
$$

Ce qui reste est d'étudier les termes quadratiques . l'idée de Peng est de traiter aussi avec une méthode de dual, avec la formule d'Ito :
Il prouve que $y_1^2\left(t\right)$ apparaît comme une fonctionnelle linéaire sur $L^2\times L^2$.
Avec $Y(t)=y_1^2\left(t\right)$ on obtient :

$$
dY_t=2\left[\left(Y(t)b_x'(t)+\sigma_x^{'}\left(t\right)Y(t)+\phi^{\varepsilon}(t)\right]dt+\left[2\sigma_x^{'}(t)Y(t)+\psi^{\varepsilon}(t)\right]dW_t, \tag{2.7}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\phi^{\varepsilon}(t) &= 2b\left(y(t),u^{\varepsilon}(t)\right)-b\left(y(t),u(t)\right)y_1\left(t\right)+2\sigma_x^{'}\left(t\right)y_1\left(t\right)\left(\sigma\left(y(t),u^{\varepsilon}(t)\right)\right)\\
&\quad+\left[\sigma\left(y(t),u^{\varepsilon}(t)\right)-\sigma\left(y(t),u(t)\right)\right]^2\\
\psi^{\varepsilon}(t) &= 2\left(\sigma\left(y(t),u^{\varepsilon}(t)\right)-\sigma\left(y(t),u^{\varepsilon}(t)\right)\right)y_1(t)
\end{aligned}
$$

Considérons maintenant la forme linéaire sur $L^2\times L^2$ définie par

$$
M\left(\phi,\psi\right)=\mathbb{E}\left(\int_0^T Z(t)H_{xx}^{''}(t)+Z(T)h_{xx}^{''}(y(T)\right)
$$

Où Z est la solution de l'équation linéaire

$$
\begin{cases}
dZ(t) &= \left[2b_x^{'}\left(t\right)Z(t)+b_x^{'}\left(t\right)^2Z(t)+\phi(t)\right]dt+\left[2Z(t)\sigma_x^{'}\left(t\right)+\psi(t)\right]dW_t\\
Z(0) &= 0
\end{cases}
$$

En utilisant le théorème de Riesz, il existe un unique couple $[P,Q]\in L^2\times L^2$ tel que M peut être représenter comme suite

$$
M\left(\phi,\psi\right)=\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[P(t)\phi(t)+Q(t)\psi(t)\right]dt\right)
$$

L'inégalité variationnelle peut être écrite comme suite

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[H\left(y(s),u^\varepsilon(s),P(s),K(s)\right)-H\left(y(s),u(s),P(s),K(s)\right)\right]\right)ds\\&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[P(t)\phi^\varepsilon(t)+Q(t)\psi(t)^\varepsilon\right]dt\right)\geq O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.8}$$

en utilisant la définition de ϕ^ε etψ^εon obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\int_0^T \left[H\left(y(s),u^\varepsilon(s),P(s),K(s)\right)-H\left(y(s),u(s),P(s),K(s)\right)\right]\right)ds\\&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\sigma\left(y(s),u^\varepsilon(s)\right)-\sigma\left(y(s),u(s)\right)\right)^2 P(t)ds\right)\geq O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3.4 Principe de maximum

Sur cette base, on obtient le principe du maximum

Théorème 2.7 *$\forall v\in U_a$ avec la probabileté 1 et pour tous τ on a*

$$\begin{aligned}&H(y(\tau),v,p(\tau),K(\tau)-p(\tau)\sigma\left(y(\tau),u(\tau)\right)+\frac{1}{2}P(\tau)\sigma^2\left(y(\tau),v\right)\geq\\&H(y(\tau),u(\tau),p(\tau),K(\tau)-p(\tau)\sigma\left(y(\tau),u(\tau)\right)+\frac{1}{2}P(\tau)\sigma^2\left(y(\tau),u(\tau)\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

De plus , le couple (P,Q),le procesuss adjoint de second ordre, est une solution de l'équation de retrograde suivante

$$\begin{cases}-dP(t) &= \left[2b'_x\left(y\left(t\right),u\left(t\right)\right)P\left(t\right)+\sigma'^2_x\left(y\left(t\right),u\left(t\right)\right)P\left(t\right)\right.\\ &\quad\left.+2\sigma'_x\left(y\left(t\right),u\left(t\right)\right)Q(t)+H''_{xx}\left(y(t),u\left(t\right),P(t),K(t)\right)\right]dt-Q(t)dW_t\\ P(T) &= h''_{xx}\left(y(T)\right)\end{cases} \tag{2.11}$$

Remarque 2.8 *Si U convexe et J qui est convexe, continue ,on peut appliquer ce théorème pour établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour notre problème de contrôle.*

Théorème (Principe de l'optimisation convexe) : *Soit* G *un espace de Banach réflexif et* H *un convexe fermé non vide de* G*. soit* f *une fonction de* H *dans* $\mathbb{R}$ *convexe et semi continue inférieurement (SCI), Gâteaux-différentiable de différentielle* f' *continue. Alors, on a :*

$$f(u) = \inf_{v \in H} f(v) \Longleftrightarrow \left\langle f'(u), v - u \right\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in H.$$

Preuve. Voir Ekeland-Temam [14]

Chapitre 3

Principe de la programmation dynamique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la méthode de la programmation dynamique pour résoudre un problème de contrôle stochastique. Le cadre adopté dans la section (3.2) est celui des processus de diffusion contrôlées à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et le problème formulé est en horizon fini .

L'idée basique de la méthode est de considérer une famille de problèmes de contrôle à différent états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. Ce principe, appelé principe de la programmation dynamique et initié dans les année 50 par Bellman, est énoncé précisément dans la section 3.3. L'équation de la programmation dynamique (en section 3.4) conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire du second ordre, appelée Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le téorème de vérification, démontré(en section 3.5), valide l'optimalité de ce condidat solution de HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal. Cette approche classique de la programmation dynamique appelée étape de vérification.

3.2 Contrôle de processus de diffusion

On considère un modèle de contrôle où l'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$$
\left\{ \begin{array}{ll} dX_s & = b\left(X_s, \alpha_s\right) ds + \sigma\left(X_s, \alpha_s\right) dW_s, \quad t \leq s < T \\ X_t & = x \end{array} \right. \tag{3.1}
$$

où W est un mouvement brownien d-dimensionnel sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in[0,T]}, P\right)$ satisfaisant les conditions habituelles .Plus généralement, on peut aussi considérer des coefficients $b\left(t, x, a\right)$ et $\sigma\left(t, x, a\right)$ dépendants du temps t.

Mais dans le cas des problèmes à horizon infini , il est important de supposer que ces coefficients ne dépendent pas du temps afin d'avoir la stationnarité du problème et une fonction valeur indépendante du temps.

Le contrôle $\alpha = (\alpha_s)$ est un processus progressivement mesurable par raport à $\mathcal{F}$ et à valeur dans A, sous espace de $\mathbb{R}^m$.

Les fonctions mésurables $b : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^{n\times d}$ satisfont une condition de Lipschitz uniforme en $A : \exists K \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall a \in A$,

$$
\left|b\left(x, a\right) - b\left(y, a\right)\right| + \left|\sigma\left(x, a\right) - \sigma\left(y, a\right)\right| \leq K\left|x - y\right| \tag{3.2}
$$

Dans la suite pour $0 \leq t \leq T \leq +\infty$,on note $\tau_{t,T}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t, T]$ .Lorsque $t = 0$ et $T = +\infty$ on note simplement $\tau = \tau_{0,+\infty}$

Problème à horizon fini.

On fixe un horizon fini $0 \prec T \prec +\infty$. On note par A l'ensemble des processus de contrôle α tel que :

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|b\left(0, \alpha_t\right)\right|^2 + \left|\sigma\left(0, \alpha_t\right)\right|^2 dt\right] \prec +\infty. \tag{3.3}
$$

Le point $x = 0$ est une valeur arbitaire de la diffusion et si ce point n'est pas dans le support de la diffusion, on peut choisir n'importe quelle autre valeur dans ce support.

Les conditions (3.2) et (3.3) assurent pour tout $\alpha \in A$ et pour toute condition initiale $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ l'existence et l'unisité d'une solution forte à l'EDS (à coefficients aléatoires) (3.1) partant de x en $s = t$. .On note alors par $\{X_s^{t,s}, t \leq s \leq T\}$ cette solution qui est $p.s.$ à trajectoires continues. On rappelle aussi, que sous ces conditions sur b, σ et α, on a

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T}\left|X_s^{t,x}\right|^2\right] \prec +\infty. \tag{3.4}
$$

$$
\underset{h\downarrow 0^+}{lim}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,t+h]}\left|X_s^{t,x} - x\right|^2\right] \tag{3.5}
$$

Critère de minimisation.

Soient $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On suppose que

$(Hg)\,(i)$ g est borné inférieurement,

ou (ii) g est à croissance quadratique : $|g(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$,

pour une constante C indépendante de x.

Pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, on note par $A(t,x)$ le sous ensemble des contrôles α de A tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|f\left(s, X_s^{t,s}, \alpha_s\right)\right| ds\right] \prec +\infty. \tag{3.6}$$

On peut alors définir sous (Hg) la fonction de coût :

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, X_s^{t,s}, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T^{t,x}\right)\right].$$

Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in A(t,x)$. L'objectif étant de minimiser cette fonction coût, on introduit la fonction valeur :

$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in A(t,x)} J(t,x,\alpha). \tag{3.7}$$

Pour un état initial $(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n$, on dit que $\tilde{\alpha} \in A(t,x)$ est un contrôle optimal si $v(t,x) = J(t,x,\tilde{\alpha})$.

Un processus de contrôle α de la forme $\alpha_s = a\left(s, X_s^{t,x}\right)$ pour une fonction mesurable a de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ dans A, est appelée contrôle markovien.

Dans la suite, on supposera implicitement que la fonction valeur v est mesurable en ses arguments. Ces points nesont pas triviaaux à priori pour plus de détail voir (Appendice dans Dellacherie et Meyer [13]) pour des conditions assurantes cette mesurabilité.

Remarque 3.1 *Lorsque f est à croissance quadratique en x, i.e. il existe une constante positive C et une fonction positive $k : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que :*

$$|f(s,x,a)| \leq C\left(1+|x|^2\right) + k(a), \qquad \forall (t,x,a) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A, \tag{3.8}$$

alors l'estimation (3.4) *montre que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, pour tout contrôle constant $\alpha = a$ dans A :*

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|f\left(s, X_s^{t,s}, a\right)\right| ds\right] \prec +\infty.$$

Ainsi, les contrôle constants a sont dans $A(t,x)$ *. De plus, s'il existe une constante positive* C *telle que* $k(a) \leq C\left(1+|b(0,a)|^2+|\sigma(0,a)|^2\right)$ *, pour tout a dans A, alors les conditions* (3.3) *et* (3.4) *montrent que pour tout* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$*, pour tout contrôle* $\alpha \in A$ *:*

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|f\left(s, X_s^{t,s}, \alpha_s\right)\right| ds\right] \prec +\infty.$$

Autrement dit, dans ce cas, $A(t,x) = A$*.*

3.3 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique (PPD) est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique .Dans le contexte de contrôle de processus de diffusion décrit au paragraphe précédent , et même plus généralement pour des contrôles de processus de Markov .

Il s'énonce ainsi :

Théorème 3.2 (*Principe de la programmation dynamique*)

Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$*.Alors on a*

$$v(t,x) \;\; = \inf_{\alpha \in A(t,x)} \inf_{\theta \in \tau_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right] \tag{3.9}$$

$$= \inf_{\alpha \in A(t,x)} \sup_{\theta \in \tau_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right] \tag{3.10}$$

Remarque 3.3 *Le principe de la programmation dynamique énoncé ci- dessus peut formuler de manière équivalente dans le cas à horizon fini*

(i) *Pour tout* $\alpha \in A(t,x)$*et* $\theta \in \tau_{t,T}$ *:*

$$v(t,x) \;\; \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right] . \tag{3.11}$$

(ii) *Pour tout* $\delta > 0$ *il existe* $\alpha \in A(t,x)$ *tel que pour tout* $\theta \in \tau_{t,T}$ *:*

$$v(t,x) + \delta \;\; \geq \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right] . \tag{3.12}$$

C'est une version plus forte que la version traditionnelle de principe de la programmation dynamique , qui s'écrit en horizon fini :

$$v(t,x) \;\; = \inf_{\alpha \in A(t,x)} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{3.13}$$

Pour tout temps d'arrêt $\theta \in \tau_{t,T}$ *.On a une remarque analogue dans le cas à horizon infini.*

L'idée intuitive de ce principe est qu'un contrôle optimal $\overset{\curlywedge}{\alpha}$ sur $[t,T]$ peut être recollé en deux contrôles optimaux ,l'un sur $[t,\theta]$ et l'autre sur $[\theta,T]$, et ceci quel que soit le temp d'arrêt θ .La preuve rigoureuse de ce résultat dans ce contexte stochastique est trés technique .Nous donnons ici une preuve formelle de ce principe

Preuve formelle du PPD. On considère le cas de problème à horizon fini.

1 - Etant donné un contrôle $\alpha \in A(t,x)$, on a par unicite du flot de l'EDS gouvernant X ,la stucture maskovienne :

$$X_s^{t,x} = X_s^{\theta, X_\theta^{t,x}} \qquad ,s \geq \theta,$$

où θ est un temps d'arrêt à valeur dans $[t,T]$ .Par la loi des espérances conditionnelles itérées ,on a alors :

$$J(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + J(\theta, X_\theta^{t,x}, \alpha)\right],$$

d'ou puisque $J(.,.,\alpha) \geq v$ et comme θ est quelconque dans $\tau_{t,T}$:

$$\begin{aligned} J(t,x,\alpha) &\geq \sup_{\theta \in \tau_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x}, \alpha)\right] \\ &\geq \inf_{\alpha \in A(t,x)} \sup_{\theta \in \tau_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \end{aligned}$$

En passant à l'infimum sur α dans le terme de gauche ,on obtient l'inégalité :

$$v(t,x) \geq \inf_{\alpha \in A(t,x)} \sup_{\theta \in \tau_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right] \qquad (3.14)$$

2 - On considère pour tout $\varepsilon > 0$,et $\theta \in \tau_{t,T}$ un contrôle ε-optimal α^εde $v(\theta, X_\theta^{t,x})$

$$J(\theta, X_\theta^{t,x}) \leq v(\theta, X_\theta^{t,x}) + \varepsilon.$$

Etant donné $\alpha \in A(t,x)$ on définit le processus :

$$\hat{\alpha}_s = \begin{cases} \alpha_s, & s \in [0,\theta] \\ \alpha_s^\varepsilon, & s \in [\theta,T] \end{cases}.$$

Le piont délicat est de vérifier que $\hat{\alpha}$ est progressivement mesurable et alors bien dans $A(t,x)$ .Dans ce cas , on a :

$$
\begin{aligned}
v(t,x) \leq J(t,x,\hat{\alpha}) \quad &= \mathbb{E}\left[\int_t^{\theta} f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + J(\theta, X_\theta^{t,x}, \alpha^{\varepsilon})\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_t^{\theta} f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right] + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ceci étant valable pour tout $\alpha \in A(t,x)$, $\theta \in \tau_{t,T}$ et $\varepsilon > 0$,on a l'inégalité :

$$
v(t,x) \leq \inf_{\alpha \in A(t,x)} \sup_{\theta \in \tau_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^{\theta} f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{3.15}
$$

En combinant les deux inégalités (3.14) et (3.15), on obtient le résultat voulu ■

3.4 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique : elle décrit le comportement local de fonction valeur $v(t,x)$ lorsqu'on fait tendre le temps d'arrêt θ dans (3.11) vers t.

Dans cette section ,nous dérivons formellement l'équation d'HJB en supposant que la fonction valeur v est sufisamment régulière.L'obtention rigoureuse de cette équation sera dévloppée grâce à la théorie des solutions de viscosité.

3.4.1 Dérivation formelle de HJB

Considérons le temps $\theta = t + h$ et un contrôle constant $\alpha_s = a$ arbitraire dans A ,dans la relation (3.11) de la programmation dynamique :

$$
v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, X_s^{t,x}, a\right) ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right] \tag{3.16}
$$

En suposant que v est suffisamment régulière, on a par la formule d'Itô entre t et $t+h$:

$$
v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = v(t,x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + L^a v\right)\left(s, X_s^{t,x}\right) ds + \text{martingale (locale)}
$$

où L^a est l'opérateur associé à la diffusion (3.1) pour le contrôle constant a est défini par

$$
L^a v = b(x,a) D_x v + \frac{1}{2} tr\left[\sigma(x,a)\sigma'(x,a) D_x^2 v\right]
$$

En susbstituant dans(3.16) on obtient alors :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+L^a v\right)\left(s, X_s^{t,x}\right)+f\left(s, X_s^{t,x}, a\right) ds\right]$$

En divisant par h et en faisant tendre h ver 0,on a :

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+L^a v(t,x)+f(t,x,a).$$

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a l'inégalité :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\sup_{a\in A}\left[-L^a v(t,x)-f(t,x,a)\right] \leq 0. \tag{3.17}$$

D'autre part,supposont que α^* est un contrôle optimal.Alors dans (3.13),on a :

$$v(t,x)=\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f\left(s, X_s^*, \alpha^*\right) ds+v(t+h, X_{t+h}^*)\right],$$

ou X *est l'état du systéme solution de (3.1) partant de x en t avec le contrôle α^*.Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur v ,on obtient :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)-L^{\alpha_t^*} v(t,x)-f\left(t,x,\alpha_t^*\right)=0, \tag{3.18}$$

ce qui est combiné avec (3.17) suggére que v doit satifaire :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\sup_{a\in A}\left[-L^a v(t,x)-f(t,x,a)\right]=0 \quad \forall (t,x) \in [0,T[\times R^n, \tag{3.19}$$

si le supremum ci-dessus en a est fini.On réecrit souvent cette équation aux dérivées partielles (EDP) sous la forme

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+H\left(t,x,-D_x v(t,x)-D_x^2(t,x)\right)=0,\ \forall (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n, \tag{3.20}$$

où pour $H(t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S_n$,S_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétrique) :

$$H(t,x,p,M)=\sup_{a\in A}\left[-b(x,a)p-\frac{1}{2}tr\left(\sigma\sigma'(x,a)M\right)-f(t,x,a)\right].$$

Cette fonction H est appelée Hamitonien du probléme de contrôle considéré

Cette équation (3.20) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).A cette équation aux derivées partielles,il faut ajouter la condition terminale :

$$v\left(T,x\right)=g(x),\qquad\forall x\in\mathbb{R}^{n}.$$

Qui résulte immédiatement de la définition (3.7) de la fonction valeur v.

Remarque 3.4 *1) L'orsque l'ensemble des contrôles est réduit à un singleton $\{a_0\}$,c'est à dire qu'il n'y a pas de contrôle sur l'etat de système l'EDP d'HJB se réduit au problème d'EDP linnéaire de Cauchy :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}\left(t,x\right)-L^{a_0}v\left(t,x\right)=f\left(t,x,a_0\right),\qquad\forall\left(t,x\right)\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}\tag{3.21}$$

$$v\left(T,x\right)=g(x),\qquad\forall x\in\mathbb{R}^{n}\tag{3.22}$$

2) L'argument d'optimalité de la programmation dynamique suggère que si l'on peut trouver un contrôle $\alpha^*\left(t,x\right)$ tel que

$$\sup_{a\in A}\left[-L^{a_0}v\left(t,x\right)-f\left(x,a\right)\right]=-L^{\alpha^*(t,x)}v\left(t,x\right)-f\left(x,\alpha^*\left(t,x\right)\right),$$

c'est à dire que

$$\alpha^*\left(t,x\right)\in\arg\min_{a\in A}\left[-L^{a}v\left(t,x\right)-f\left(x,a\right)\right],$$

alors on aura :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}\left(t,x\right)-L^{\alpha^*(t,x)}v\left(t,x\right)-f\left(x,\alpha^*\left(t,x\right)\right)=0,$$

et donc :

$$v\left(t,x\right)=\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(X_s{}^*,\alpha^*\left(t,X_s{}^*\right)\right)ds+g(X_T{}^*)\right],$$

ou $X\,^*$est solusion de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{array}{ll}dX_s{}^* & =b\left(X_s{}^*,\alpha^*\left(s,X_s{}^*\right)\right)+\sigma\left(X_s{}^*,\alpha^*\left(s,X_s{}^*\right)\right)dW_s\\ X_s{}^* & =x\end{array},t\leq s\leq T$$

ou α^* est un contrôle optimale markovien.

3.5 Théorème de vérification

L'étape cruciale dans l'approche classique de la programmation dynamique consiste à montrer, étant donné une solution réguliére à l'équation d'HJB, que ce condidat, sous des conditions suffisantes, coincide avec la fonction valeur. Ce résultat est appelé théorème de vérification et permet aussi d'obtenir un contrôle optimal. Il repose essentiellement sur la formule d'Itô. Les énoncés peuvent varier d'un problème à l'autre au niveau des conditions suffisantes requises. Celles-ci doivent être adaptées au cadre des hypothèses du problème particulier considéré. Nous proposons ici une version assez générale compte tenu du contexte défini au paragraphe (3.2).

Théorème 3.5 (Horizon fini) *Soit* $w \in C^{1,2}\left([0,T[\times\mathbb{R}^n\right) \cap C^0\left([0,T]\times\mathbb{R}^n\right)$ *à croissance quadratique, i.e. il existe une constante* C *telle que :*

$$|w(t,x)| \leq C\left(1+|x|^2\right), \qquad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

(i) Supposons que :

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}\left[L^a w(t,x) - f(t,x,a)\right] \leq 0, \qquad (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \quad (3.23)$$

$$w(T,x) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.24)$$

Alors $w \leq v$ *sur* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

(ii) De plus supposons que $w(T,.) = g$ *,et pour tout* $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$ *,il existe* $\hat{\alpha}(t,x)$ *mesurable à valeur dans* A *tel que :*

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in A}\left[L^a w(t,x) - f(t,x,a)\right] = -\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) - L^{\hat{\alpha}(t,x)} w(t,x) - f(t,x,\hat{\alpha}(t,x)) = 0,$$

L'EDS :

$$dX_s = b\left(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s)\right)ds + \sigma\left(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s)\right)dW_s,$$

admette une solution , noté $\hat{X}_s^{t,x}$ *étant donné une condition initial* $X_t = x$ *et* $\left\{\hat{\alpha}\left(t,\hat{X}_s^{t,x}\right) t \leq s \leq T\right\} \in A(t,x)$ *.Alors* $w = v$ *sur* $[0,T[\times\mathbb{R}^n$ *et* $\hat{\alpha}$ *est un contrôle optimal markovien*

Preuve. (i) Puisque $w \in C^{1,2}\left([0,T[\times\mathbb{R}^n\right)$, on a pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$,$\alpha \in A(t,x)$, $s \in [t,T[$ et pour tout temps d'arrêt τ a valeurs dans $[t,+\infty[$,par la formule d'Itô :

$$
\begin{aligned}
w\left(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{t,x}\right) = w(t,x) \quad & + \int_t^{s\wedge\tau} \frac{\partial w}{\partial t}\left(u, X_u^{t,x}\right) + L^{\alpha_u} w\left(u, X_u^{t,x}\right) du \\
& + \int_t^{s\wedge\tau} D_x w\left(u, X_u^{t,x}\right)' \sigma\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) dW_u
\end{aligned} .
$$

On choisit $\tau = \tau_n = \inf\left\{ s \geq t : \int_t^s \left| D_x w\left(u, X_u^{t,x}\right)' \sigma\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) \right|^2 du \geq n \right\}$ en notant que $\tau_n \nearrow +\infty$ quand n tend vers l'infini.Le processus arrêté $\left\{ \int_t^{s\wedge\tau_n} D_x w\left(u, X_u^{t,x}\right)' \sigma\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) dW_u \ , t \leq s \leq T \right\}$est donc une martingale et on a en prenant l'espérance :

$$
\mathbb{E}\left[w\left(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x}\right)\right] = w(t,x) \quad + \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \frac{\partial w}{\partial t}\left(u, X_u^{t,x}\right) + L^{\alpha_u} w\left(u, X_u^{t,x}\right) du\right]
$$

Puisque w satisfait (3.23) on a :

$$
\frac{\partial w}{\partial t}\left(u, X_u^{t,x}\right) + L^{\alpha_u} w\left(u, X_u^{t,x}\right) + f\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) \geq 0, \qquad \forall \alpha \in A\left(t,x\right),
$$

d'ou :

$$
\mathbb{E}\left[w\left(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x}\right)\right] \geq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) du\right], \qquad \forall \alpha \in A\left(t,x\right). \tag{3.25}
$$

On a

$$
\left| \int_t^{s\wedge\tau_n} f\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) du \right| \leq \left| \int_t^T f\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) \right| du,
$$

et le terme de droite est intégrable d'après la condition d'intégrabilité sur $A\left(t,x\right)$.Comme w est à croissance quadratique ,on a :

$$
w\left(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x}\right) \leq C\left(1 + \sup_{s\in[t,T]} \left|X_s^{t,x}\right|^2\right),
$$

et le terme de droite est intégrable d'après (3.4) .On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et faire tendre n vers l'infini dans (3.25) :

$$
\mathbb{E}\left[w\left(s, X_s^{t,x}\right)\right] \geq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(X_u^{t,x}, \alpha_u\right) du\right], \qquad \forall \alpha \in A\left(t,x\right),
$$

et donc $w(t,x) \leq v(t,x), \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

(ii) On applique la formule d'Ito à $w(u,\hat{X}_s^{t,x})$ entre $t \in [0,T[$ et $s \in [t,T[$(aprés avoir localisé avec τ_n) :

$$\mathbb{E}\left[w\left(s,\hat{X}_s^{t,x}\right)\right] = w(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial t}\left(u,\hat{X}_u^{t,x}\right) + L^{\hat{\alpha}\left(u,\hat{X}_u^{t,x}\right)} w\left(u,\hat{X}_u^{t,x}\right) du\right].$$

Par définition de $\hat{\alpha}\,(t,x)$,on a :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - L^{\hat{\alpha}\left(u,\hat{X}_u^{t,x}\right)} w\,(t,x) - f\,(t,x,\hat{\alpha}\,(t,x)) = 0,$$

d'où :

$$\mathbb{E}\left[w\left(s,\hat{X}_s^{t,x}\right)\right] = w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f\left(\hat{X}_u^{t,x},\hat{\alpha}\left(u,\hat{X}_u^{t,x}\right)\right) du\right].$$

En faisant tendre s vers T , on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(\hat{X}_u^{t,x},\hat{\alpha}\left(u,\hat{X}_u^{t,x}\right)\right) du + g\left(\hat{X}_T^{t,x}\right)\right] \\ &= J\,(t,x,\hat{\alpha})\,. \end{aligned}$$

Donc $w(t,x) = J\,(t,x,\hat{\alpha}) \geq v(t,x)$ et finalement $w = v$ avec $\hat{\alpha}$ comme contrôle optimal markovien ■

Remarque 3.6 *Dans le cas particulier où l'espaces des contrôles$A$ est réduit à un singleton* $\{a_0\}$*, ce théorème de vérification est une version du théorème de représentation de Feynman-Kac : il stipule que si w est une fonction* $C^{1,2}\,([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^0\,([0,T[\times \mathbb{R}^n)$ *à croissance quadratique solution du problème de Cauchy* $(3.21)-(3.22)$ *,alors w admet la représentation* .

$$w(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(X_s^{t,x},a_0\right) ds + g\left(X_T^{t,x}\right)\right]$$

Le théorème précédent suggère la stratégie suivante pour résoudre le probléme de contrôle stochastique .Dans le cas horizon fini , résoudre l'EDP non linéaire d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + \sup_{a\in A}\left[-L^a w\,(t,x) - f\,(t,x,a)\right] = 0, \qquad (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n \tag{3.26}$$

avec la condition terminale $w(T,x) = g(x)$.Fixer $(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n$ et résoudre $\sup_{a\in A} - [L^a w(t,x) - f(x,a)]$ comme un problème de maximum en $a \in A$

On note $a^*(t,x)$ la valeur de a qui réalise le maximum en $a \in A$.On note $a(t,x)$ la valeur de a qui réalise le maximum .Si cette EDP non linéaire avec condition terminale admet une solution régulière w , alors w est la fonction valeur du problème de contrôle stochastique et a est un contrôle optimal markovien .Cette méthode se justifie donc si L'EDP d'HJB (3.26) admet une solution $C^{1,2}$ satisfaisant les conditions d'application du théorème de vérification.Des résultats d'éxistance de solutions régulières à des équations de type HJB paraboliques (horizon fini)ou elliptiques (horizon infini) sont établies dans Fleming et Rishel [18],Gibarg et Trudinger [20] ou encore Krylov[26]. La condition principale imposée est une condition d'uniforme elliptique :

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$y^{'} \sigma(x,a) \sigma^{'}(x,a) y \geq c |y|^2$$

Soulignons aussi dans la vérification des conditions (ii) des théorèmes (3.5) qu'il n'est pas toujours facile et parfois problèmatique

d'obtenir l'existance d'une solution à l'EDS associée au condidat a pour être le contrôle optimal

Chapitre 4

Application en finance

Dans ce chapitre, on va appliquer les résultats du chapitres précèdents à la finance. On étudie deux exemples d'optimisation dans des marchés financiers. Le premier exemple est le problème de choix de porteffeuille de Merton en horizon fini. Le deuxième exemple concerne le classique problème d'investissement et de consommation de BLack - Scholes.

4.1 Exemple 1 : problème de choix de porteffeuille de Merton en horizon fini

On considère un marché financier avec un actif sans risque de processus de prix S^0 strictement positif représentant le compte d'épargne et n actifs risqués de processus de prix S représentant des actions

Soit un agent investi à chaque date t une proportion α_t de sa richesse dans un actif risqué S et $1-\alpha_t$ dans un actif sans risque S^0,avec la contrainte qu'a toute date,α_t doit être à valeur dans A ensemble fermé convexe de R .Son processus de richesse évolué selon l'EDS :

$$\begin{array}{ll} dX_t & = \frac{X_t\alpha_t}{S_t}dS_t + \frac{X_t(1-\alpha_t)}{S_t}dS_t^0 \\ & X_t\left(\alpha_t\mu + (1-\alpha_t)\,r\right)dt + X_t\alpha_t\sigma dW_t. \end{array}$$

Partant d'une richesse initial $X_t = x > 0$ au temps t, l'agent veut maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse teminale à un horizon $T > t$ .Notons par $X^{t,x}$ le processus de richesse partant de x en t .

Observons que les coefficients de X ne vérifient pas la condition de Lipschitz uniforme en les contrôle a .

En fait, on se ramène usuellement à ce cadre en considérant le logarithme de la richesse positive .La fonction valeur du problème de maximisation est donc :

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}\left[U\left(X_T^{t,x}\right)\right], \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+$$

Où A est l'ensemle des processus α progrissifs à valeur dans A et tels que $\mathbb{E}\left[\int_0^T |\alpha_t|^2 \, ds\right] < +\infty$.

La fonction d'utilité U est croissante et concave sur $\mathbb{R}_+$.Vérifions que $v(t,.)$ est croissante et concave en x .

Soit $0 \leq x \leq y$ et α un processus de contrôle dans A.

Notons $Z_s = X_s^{t,x} - X_s^{t,y}$.alors

$$dZ_s = Z_s \left[(\alpha_s \mu + (1-\alpha_s) r) \, dt + \alpha_s \sigma dW_t\right], Z_s = y - x \geq 0.$$

Eet donc $Z_s \geq 0$ ou encore $X_s^{t,x} \geq X_s^{t,y}$ pour tout $s \geq t$.puisque U est croissante,on a $U\left(X_T^{t,x}\right) \leq U\left(X_T^{t,y}\right)$ d'ou $\mathbb{E}\left[U\left(X_T^{t,x}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[U\left(X_T^{t,y}\right)\right] \leq v(t,y) \qquad \forall \alpha \in A_t$,

et donc $v(t,x) \leq v(t,y)$.

Soit $0 < x_1, x_2, \alpha^1, \alpha^2$ deux processus de contrôle dans A et $\lambda \in [0,1]$.

Posons $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, X^{t,x_1}$ le processus de richesse partant de x_1 et controlé par α^1, X^{t,x_2} le processus de richesse partant de x_2 et controlé par α^2.Posons :

$$\alpha_s^\lambda = \frac{\lambda X_s^{t,x_1} \alpha_s^1 + (1-\lambda) X_s^{t,x_2} \alpha_s^2}{\lambda X_s^{t,x_1} + (1-\lambda) X_s^{t,x_2}}.$$

Notons que par convexité de A, le processus $\alpha^\lambda \in A$.De plus , d'après la structure linéaire de l'évolution l'équation de la richesse , le processue $X^\lambda \triangleq \lambda X_s^{t,x_1} + (1-\lambda) X_s^{t,x_2}$ est gouverné par

$$\begin{aligned} dX_s^\lambda &= X_s^\lambda \left(\left(\alpha_s^\lambda \mu + \left(1-\alpha_s^\lambda\right) r\right) ds + X_s^\lambda \alpha_s^\lambda \sigma dW_s\right), \quad s \geq t, \\ X_s^\lambda &= x_\lambda. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\lambda X_s^{t,x_1} + (1-\lambda) X_s^{t,x_2}$ est un processus de richesse partant de x_λ en t est contrôlé par α^λ .D'après la concavité de la fonction U, on a :

$$U\left(\lambda X_T^{t,x_1} + (1-\lambda) X_T^{t,x_2}\right) \geq \lambda U\left(X_T^{t,x_1}\right) + (1-\lambda) U\left(X_T^{t,x_2}\right),$$

d'où :

$$v(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda \mathbb{E}\left[U\left(X_T^{t,x_1}\right)\right] + (1-\lambda) \mathbb{E}\left[U\left(X_T^{t,x_2}\right)\right],$$

et ceci pour tout α^1, α^2 dans A .On en déduit que

$$v\left(\lambda x_1+(1-\lambda)\,x_2\right)\geq \lambda v\left(x_1\right)+(1-\lambda)\,v\left(x_2\right).$$

En fait, on voit que si U est strictement concave et s'il existe un contrôle optimal, alors les arguments ci-dessus montrent que la fonction v est aussi strictement concave en x.

On va donc chercher à résoudre l'équation de Bellman :

$$-\frac{\partial w}{\partial t}+\inf_{a\in A}\left[-L^a w\left(t,x\right)\right]=0, \tag{4.1}$$

avec la condition terminale

$$w\left(T,x\right)=U\left(x\right) \qquad x\in\mathbb{R}_+. \tag{4.2}$$

Ici

$$L^a w\left(t,x\right)=x\left(a\mu+(1-a)\,r\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2}x^2a^2\sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Le problème (4.1)-(4.2) n'a en générale pas de solution explicite pour une fonction d'unité U quelconque .Cependant ,dans le cas particulier d'une fonction puissance :

$$U\left(x\right)=x^p, \qquad x\geq 0, p<1.$$

On peut résoudre explicitement ce problème .Cherchons une solution de la forme :

$$w\left(t,x\right)=\phi\left(t\right)x^p.$$

En substtituant dans (4.1)-(4.2), on obtient que ϕ satisfait

$$\begin{aligned}\phi^{'}\left(t\right)+\rho\phi\left(t\right)&=0\\ \phi\left(T\right)&=1,\end{aligned}$$

où

$$\rho=\inf_{a\in A}\left[-ap\left(\mu-r\right)-pr+\frac{1}{2}a^2p\left(1-p\right)\sigma^2\right]. \tag{4.3}$$

On obtient alors $\phi\left(t\right)=\exp\left(-\rho\left(T-t\right)\right)$ .Ansi , la fonction donnée par :

$$w\left(t,x\right)=\exp\left(-\rho\left(T-t\right)\right)x^p, \qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

est régulière, strictement croissante et strictement concave ,et est solution de (4.1)-(4.2).De plus, la fonction $a \in A \rightarrow -ap\left(\mu - r\right) - rp + \frac{1}{2}a^2 p\left(1-p\right)\sigma^2$ est strictement convexe sur l'ensemble convexe A donc atteint son minimum en $\hat{a}$ constant .

Par construction,$\hat{a}$ atteint l'infimum de $\inf_{a \in A}\left[-L^a w\left(t, x\right)\right]$ .De plus, l'équation de la richesse associée au contrôle constant $\hat{a}$ et :

$$dX_t = X_t\left(\hat{a}\mu + \left(1-\hat{a}\right)r\right)dt + X_t\hat{a}\sigma dW_t,$$

admet bien une unique solution, étant donné une condition initiale.Ceci prouve donc finalement d'aprèes le théorème de vérification, que la fonction valeur du problème de maximisation est donner par (4.4) et que la proportion optimale de richesse à investir dans l'actif risqué est constante est donner par $\hat{a}$.

Notons que lorsque $A = \mathbb{R}$, on a

$$\hat{a} = \frac{\mu - r}{\sigma^2\left(1-p\right)},$$

et

$$\rho = -\frac{\left(\mu - r\right)^2}{2\sigma^2}\frac{p}{1-p} - rp$$

4.2 Exemple 2 : Consommation investissement

Supposons qu'un portefeuille est investit dans un marché constitué de capitaux risque-libres avec un taux d'intérêt r_t et de capitaux risqués avec le taux de rendement μ_t et de volatilité σ_t.

Supposons qu'on a deux possibilités d'investissement

i) le prix $S_0(t)$ au temps t est donné par :

$$dS_0(t) = r_t S_0(t)dt, \quad S_0(0) > 0, \tag{4.5}$$

ii) le prix $S_1(t)$ au temps t est donné par :

$$dS_1(t) = S_1(t)\left(\mu_t dt + \sigma_t dW_t\right), \quad S_1(0) > 0. \tag{4.6}$$

Où $\mu_t > r_t,\ \sigma_t \neq 0$ sont bornées et déterministe.

Définition *Un portefeuille ζ est un processus prévisible $\zeta_t = \left(\zeta_0\left(t\right), \zeta_1\left(t\right)\right) \in R^2$. La richesse correspondante X_t^{ζ} est donné par :*

$$X_t^{\zeta} = \zeta_0\left(t\right)S_0\left(t\right) + \zeta_1\left(t\right)S_1\left(t\right), \ t \geq 0. \tag{4.7}$$

Le portefeuille est auto-finançant si :

$$dX_t = \zeta_0 (t) \, dS_0(t) + \zeta_1 (t) \, dS_1(t). \tag{4.8}$$

Soit $\pi_t = \zeta_1 (t) \, S_1 (t)$ la quantité de monnaies investis dans la sécurité risquée.

On suppose que l'agent retire la consommation de son capital et on note par c_t le taux de consommation.

En combinant les quatre dernières équations, on obtient l'équation du capital richesse et qui est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = [r_t X_t + (\mu_t - r_t) \, \pi_t - c_t] \, dt + \pi_t \sigma_t dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{4.9}$$

Définition *Une stratégie admissible est une pair de processus adaptés* (π, c) *telle que*

$$\mathbb{E} \, |X_t|^2 < \infty.$$

On note par A l'ensemble de toutes les stratégies admissibles.

Le problème de l'investisseur est d'assigner une quantité (π_t) telle que à chaque instant t, on obtient une stratégie $(\widehat{\pi}_t, \widehat{c}_t)$ qui maximise la consommation et l'investissement représenté par une fonction d'utilité F est compté à un taux d'escompte constant β. Plus précisément, le problème consiste à choisir une stratégie optimale $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ qui maximise la fonction :

$$J (\pi, c) = \mathbb{E} \left[e^{-\beta T} F(X_T) + \int_0^T e^{-\beta t} F(c_t) dt \right]. \tag{4.10}$$

On suppose que la fonction d'utilité est de type HARA (hyperbolic absolute risk aversion). C'est à dire, $F(X) = \dfrac{X^\gamma}{\gamma}$, où $\gamma \in (0, 1)$.

La fonction d'utilité doit vérifier :

$$\begin{aligned} & F \text{ est strictement croissante, concave et } C^1 (0, +\infty), \\ & F (X) \leq C (1 + X)^\gamma \text{ avac } 0 < \gamma < 1 \text{ et } F (0) \geq 0, \\ & \lim_{X \to \infty} F^{'} (X) = 0 \\ & \lim_{X \to 0} F^{'} (X) = \infty. \end{aligned}$$

Les fonctions d'utilité de type HARA sont souvent utilisées en finance.

Le paramètre γ peut être interprété comme une mesure de sensitivité du risque. Si $\gamma = 0$, la HARA utilité est $F (X) = \ln X$.

En analogie avec le problème de contrôle du chapitre 2, on a :

$$J(\pi, c) = \mathbb{E}\left[-e^{-\beta T}\frac{X_T^{\gamma}}{\gamma} - \int_0^T e^{-\beta t}\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}dt\right]. \tag{4.11}$$

Une stratégie $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est optimale si

$$J(\widehat{\pi}, \widehat{c}) = \min_{(\pi,c)\in\mathcal{A}} J(\pi, c). \tag{4.12}$$

Le Hamiltonien est donné par :

$$H(t, x, \pi, c, p, P) = -\frac{c^{\gamma}}{\gamma}e^{-\beta t} + p\left[rx + (\mu - r)\pi - c\right] + P\sigma\pi. \tag{4.13}$$

L'équation adjointe est de la forme :

$$\begin{cases} dp_t = -r_t p_t dt + P_t dW_t, \\ p_T = e^{-\beta T}X_T^{\gamma-1}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Soit $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ une stratégie candidate à être optimale et $\widehat{x}$ la solution de l'équation correspondante associée. On note par $\left(\widehat{p}, \widehat{P}\right)$ la solution de l'équation adjointe associée.

La principale idée pour obtenir un optimale stratégie $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est d'utiliser les conditions suffisantes du remarque (2.8) du chapitre 2.

En utilisant remarque (2.8) , $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est optimale si ;

$$H\left(t, \widehat{X}_t, \widehat{\pi}_t, \widehat{c}_t, \widehat{p}_t, \widehat{P}_t\right) \leq H\left(t, \widehat{X}_t, \pi_t, c_t, \widehat{p}_t, \widehat{P}_t\right), \ \forall (\pi, c) \in \mathcal{A}. \tag{4.15}$$

Le Hamiltonien H est linéaire en π et convexe en c. Alors, les valeurs de $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ qui minimisent $H\left(t, \widehat{X}_t, ., ., \widehat{p}_t, \widehat{P}_t\right)$ sont données par les équations suivantes :

$$\widehat{p}_t + e^{-\beta t}\widehat{c}_t^{\gamma-1} = 0,$$

$$\widehat{p}_t(\mu_t - r_t) + \widehat{P}_t\sigma_t = 0.$$

Puisqu'on devine que la consommation est proportionnelle à la richesse $\widehat{X}_t$, alors pour tout fonction déterministe différentiable A_t, on pose :

$$\widehat{p}_t = -A_t\widehat{x}_t^{\gamma-1}, \quad A_T = -e^{-\beta T}.$$

En appliquant la formule d'Itô à $\widehat{p}_t$ et en comparant avec l'équation adjointe et en identifiant les termes en dt et dW_t, on obtient :

$$\left(A_t' + \gamma r_t A_t\right)\widehat{X}_t + (\gamma - 1)A_t\left[(\mu_t - r_t)\widehat{\pi}_t - \widehat{c}_t\right] = 0,$$

$$\widehat{P}_t = -(\gamma - 1)\,\widehat{\pi}_t \sigma_t A_t \widehat{X}_t^{\gamma-2},$$

Substituant les valeurs de $\widehat{p}_t$ et $\widehat{P}_t$, on aura :

$$A_t\left[(\mu_t - r_t)\,\widehat{X}_t + (\gamma - 1)\,\widehat{\pi}_t \sigma_t^2\right] = 0,$$

En comparant les termes en $\widehat{X}_t$, on aura :

$$\begin{aligned} A_t^{'} + \gamma r_t A_t &= 0. \\ (\gamma - 1)\,A_t\left[(\mu_t - r_t)\,\widehat{\pi}_t - \widehat{c}_t\right] &= 0, \end{aligned}$$

Par un simple calcul, on aura :

$$A_t = -\exp\left(-\beta T + \int_t^T \gamma r_s ds\right).$$

Ceci prouve que $A_t \neq 0$. Donc, en combinant ces dernières équations, l'optimal stratégie est donnée par :

$$\widehat{\pi}_t = \frac{\mu_t - r_t}{(1-\gamma)\,\sigma_t^2}\widehat{x}_t, \tag{4.16}$$

$$\widehat{c}_t = \frac{(\mu_t - r_t)^2}{(1-\gamma)\,\sigma_t^2}\widehat{x}_t. \tag{4.17}$$

La relation entre $\widehat{\pi}_t$ et $\widehat{c}_t$ est donnée par :

$$\widehat{c}_t = (\mu_t - r_t)\,\widehat{\pi}_t. \tag{4.18}$$

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés aux problèmes de contrôle optimal de système gouverne par des équations différentielles stochastique du type Itô .En particulier, l'accent a été mis sur les deux approches les plus connues dans la littérature sur le contrôle : le principe du maximum stochastique ainsi que sur la programmation dynamique .

Nous avons présenté en détails l'approche de Bensoussan (cas où le coefficient de diffusion ne dépend pas de la variable du contrôle) pour le principe du maximum, nous avons présenté aussi l'approche de Peng pour les systèmes (cas où le coefficient de diffusion dépend de la variable du contrôle).La deuxieme approche a la quelle nous nous sommes intéressés est celle de la programmation dynamique qui nous amène à étudier une équation parabolique fortement non linéaire vérifiée par la fonction de valeur

Nous avons aussi pris soin d'illustrer chacune des méthodes de résolution sur de nombreux issus de la finance

Finalement nous éspérons ainsi que ce mémoire puisse être utile aussi bien pour les étudiants que pour des chercheurs intéressés par ce domaine

Annexe

Les variables aléatoires

on consirère une suite de variable aléatoite X_n définies sur un espace probabilisé,Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé

Convergence en moyenne (**convergence** L_1)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|\right) = 0$$

convergence quadratique (**convergence** L_2)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^2\right) = 0$$

Equations différentielles stochastiques

Inégalités

Lemme de Gronwall

Soient ϕ et f deux fonctions continues sur $[0, T]$ non négatives, c_0 une constante positive.

Si

$$\phi(t) \leq c_0 + \int_0^t f\phi(s)ds; \quad 0 \leq t \leq T$$

Alors :

$$\phi(t) \leq c_0 e^{\int_0^t f\ ds}; 0 \leq t \leq T$$

Preuve. Soit

$$\Phi(t) = c_0 + \int_0^t f\ \phi(s)\ ds$$

Alors :

$$\Phi^{'}(t) = f\ \phi(t) \leq f\ \Phi(t)$$

et alors :

$$\begin{aligned}(e^{-\int_0^t f\ ds}\Phi(t))' &= (\Phi'(t) - f\Phi(t))e^{-\int_0^t f\ ds} \\ &\leq (f\ \phi(t) - f\ \phi(t))e^{-\int_0^t f\ ds} = 0\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi(t)e^{-\int_0^t f\ ds} \leq \Phi(0)e^{-\int_0^0 f\ ds} = c_0$$

et alors

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq c_0 e^{-\int_0^t f\ ds}$$

Ce qui achève la démonstration ■

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Pour tout $m > 0$, il existe C_m tel que pour tout temps d'arrêt τ on a :

$$E\left[\sup_{t\leq\tau}\left|\int_0^t f(s)\ dB_s\right|^m\right] \leq C_m E\left[\left(\int_0^t |f(s)|^2\ ds\right)^{\frac{m}{2}}\right]$$

En particulier pour $m = 2$ et $\tau = T$ on a :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t f(s)\ dB_s\right|^2\right] \leq CE\left[\int_0^t |f(s)|^2\ ds\right]$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient f, g deux fonctions carrées intégrable, alors on a

$$E(fg) \leq \left(E(f^2)E(g^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Processus de Markov

soit $X(t)_t$ un processus à valeurs dans un espace $(\Omega, \mathcal{F})$; on considére la filtration définie pour tout $t > 0$ par : $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, s \leq t)$.

On dit que $X(t)_t$ est un processus de Markov si :

i) $\forall\ \beta\epsilon\mathcal{F}$, et $\forall\lambda > t, \lambda, t\epsilon T$

$$P(X_\lambda\epsilon\beta\backslash\mathcal{F}_t) = P(X_\lambda\epsilon\beta\backslash X_t)$$

ii) Si on note

$$\overset{*}{P}(s, y; t; \beta) = P(X_t\epsilon\beta\backslash X_s = y)\,\forall s \leq t\quad s, t\epsilon T$$

i.e : $\overset{*}{P}(s,.,t;\beta)$ est Ω-mesurable , et $\overset{*}{P}(s,y;t;.)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$.

On appelle fonction de transition $(P_{s,t})_{s\leq t}$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ une famille de probabilité de transition telle que :

1) $P_{s,s}=I_d, \forall s\epsilon T.$

2) $P_{u,t}.P_{t,s}=P_{u,s}, \forall u\leq t\leq s.$

Théorème d'arrêt

Ayant à l'esprit l'interprétation de $\mathcal{F}_t$ comme l'information connue jusqu'à la date t , on s'intéresse à savoir si un évènement donné,caractérisé par sa première date $\tau(\omega)$ d'apparition , a eu lieu ou non avant la date t sachant l'observation de l'information $\mathcal{F}_t$. Ceci conduit à la notion de Temps d'arrêt .

(Temps d'arrêt)

1)-une variable aléatoire $\tau:\Omega\rightarrow[0,+\infty]$ est appelé Temps d'arrêt (par rapport à la filtration $F=(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon T}$) si pour tout $t\epsilon T$:

$$\{\tau\leq t\} := \{\omega\epsilon\Omega : \tau(\omega)\leq t\}\ \epsilon\ \mathcal{F}_t$$

Un Temps d'arrêt τ est dit prévisible s'il existe une suite de Temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ telle que l'on ait **p.s** :

i) $\lim\tau_n=\tau.$

ii)$\tau_n<\tau$ pour tout n sur $\{\tau>0\}$.

il est facile de vérifié que tout temps aléatoire égale à une constante positive t est un Temps d'arrêt

si τ_1 et τ_2 sont deux Temps d'arrêt alors :$\tau_1\wedge\tau_2$,$\tau_1\vee\tau_2$ et $\tau_1+\tau_2$ sont des Temps d'arrêt .

Etant donnée un processus $(X_t)_{t\epsilon T}$ et un Temps d'arrêt τ , on définit la variable aléatoire X_τ sur $\{\tau\epsilon T\}$ par :

$$X_\tau(\omega)=X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

on vérifie que si X est mesurable alors X_τ est une variable aléatoire sur $\{\tau\epsilon T\}$ on introduit alors le processus arrêté (en τ) X^τdéfini par :

$$X_t^\tau=X_{\tau+t}, \quad t\epsilon T$$

soit $(X_t)_{t\epsilon T}$ un processus progressif et τ un Temps d'arrêt alors :

$X_\tau 1_{\tau\epsilon T}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et le processus arrêté X^τ est progressif.

Soit $M=(M(t))_t$,une $\mathcal{F}$-martingale continue à droite et τ un Temps d'arrêt bornée , avec : $0\leq s\leq t\ \leq cste<\infty$, alors :

$$\mathbb{E}(M(s)\backslash\mathcal{F}_s)=M(s)$$

Si S est une $\mathcal{F}$-sur-martingale continue à droite , on a :

$$\mathbb{E}\left(S\left(\tau\right)\backslash\mathcal{F}_{s}\right)\leq S\left(s\right)$$

Et par conséquent on a :

$$\mathbb{E}M\left(\tau\right)=\mathbb{E}M\left(0\right)$$

(Arrêt des martingales bornées)

Soit M une martingale , τ un temps d'arrêt **p.s.**fini "$P\left(\tau=\infty\right)=0$" tq :

$$\left|M\left(\tau\cap n\right)\right|\leq K,\forall n$$

pour une cste $K<\infty$ ona :

$$\mathbb{E}M\left(\tau\right)=\mathbb{E}M\left(0\right)$$

Formule d'Itô

Première formule d'Itô

Soit $\phi\epsilon C_{b}^{2}$alors on a **p.s** :

$$\phi\left(B\left(t\right)\right)=\phi\left(B\left(0\right)\right)+\int_{0}^{t}\phi'\left(B\left(s\right)\right)dB\left(s\right)+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\phi''\left(B\left(s\right)\right)ds\quad\forall t$$

Deuxième formule d'Itô

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R}$ de class C^{1}par rapport à t ,de classe C^{2} par rapport à x ,on a :

$$\phi\left(t,B_{t}\right)=\phi\left(0,B_{0}\right)+\int_{0}^{t}\phi_{t}'\left(s,B_{s}\right)ds+\int_{0}^{t}\phi_{x}'\left(s,B_{s}\right)dB_{s}+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\phi_{xx}''\left(s,B_{s}\right)ds.$$

Théorème de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert

Soient :

H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle .,.\rangle$

une $f\in H'$une forme linéaire continue sur H.

Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on a

$f(x)=\langle y,x\rangle$

$\exists!y\in H,\forall x\in H,\quad f(x)=\langle y,x\rangle$

Bibliographie

[1] V.I. Arkin, M.T. Saksonov (1979), *Necessary optimality conditions for stochastic differential équations*, Soviet. Math. Dokl. 20, pp 1-5.

[2] S. Bahlali and A. Chala, *The stochastic maximum principle in optimal contrôl of singular diffusions with non linear coefficients*, Rand. Operat. and Stoch. Equ, Vol. 18, 2005, no 1, pp 1-10.

[3] S. Bahlali and B. Mezerdi, (2005), *A general stochastic maximum principle for singular contrôl problems,* Elect. J. of Probability, Vol. 10, Paper no 30, pp 988-1004.

[4] S. Bahlali and B. Labed, *Necessary and sufficient conditions of optimality for optimal contrôl problem with initial and terminal costs*, Rand. Operat. and Stoch. Equ, 2006, Vol 14, No3, pp 291-301.

[5] S. Bahlali, B. Djehiche and B. Mezerdi, *The relaxed maximum principle in singular contrôl of diffusions*, SIAM J. Contrôl and Optim, 2007, Vol 46, Issue 2, pp 427-444.

[6] S. Bahlali, *Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict contrôl problems*, SIAM J. Control and Optim, 2008, Vol. 47, No. 4, pp. 2078–2095.

[7] S. Bahlali, *Necessary and sufficient condition of optimality for optimal contrôl problem of forward and backward systems*, Theory of Probability and Its Applications (TVP), To Appear (2009).

[8] A.Bensoussan.(1981). *Lectures on Stochastic Contrôle. in Non linear Filtereng and Stochastic Contrôle.Proceedings of the 3rd 1981 Session.CIME Lect.Notes in Maths.972.*

[9] A. Bensoussan (1982), *Non linear filtering and stochastic contrôl.* Proc. Cortona *1981, Lect. notes in Math. 972, Springer Verlag.*

[10] J.M Bismut (1973), *Conjugate convex functions in optimal stochastic contrôl.* J. Math. Anal. Appl. 44, 384-404..

[11] J.M Bismut (1976), *Théorie probabiliste du contrôle des diffusions.* Mem. AMS 4, N°167.

[12] J.M Bismut (1978), *An introductory approach to duality in optimal stochastic contrôl.* SIAM Review 20, pp. 62-78.

[13] C. Dellacherie et P.A. Meyer (1980) : *Probabiliés et Potentiel ,ch.V à VIII , Théorie de Martingales , Hermann.*

[14] I. Ekeland and R. Temam (1974) : *Analyse convexe et problème variationnel*, Dunod.

[15] R.J. Elliott, *The optimal contrôl of diffusions*, Appl. Math. Optim., 1990, 22, pp.229-240.

[16] R.J. Elliott and M. Kohlmann, *The second order minimum principle and adjoint process.* Stochastics and Stoch. Rep., 1994, Vol. 46, pp.25-39.

[17] N. El Karoui (1981), *Aspects probabilistes du contrôle stochastique.* L.N.M 876, Springer Verlag.

[18] W. Fleming et r rishel (1975) :*Deteministic and stochastic optimal contrôl ,Springer Verlag.*

[19] N.F. Framstad, B. Oksendal and A. Sulem, *A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance*, J. Optim. Theory and applications. 121, 2004, pp 77-98.

[20] D. Gilbarg D .et N. Trudinger (1985) *Elliptic differential equations of second order , Springer Verlag.*

[21] U G. Haussmann [1986], *A stochastic maximum principle for optimal contrôl of diffusions.* Pitman Reseearch Notes in Math. Series 151.

[22] U.G Haussmann (1976), *General necessary conditions for optimal contrôl of stochastic systems*, Math. Programming Studies 6, pp 30-48

[23] Ikeda, S. Watanabe (1989), *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Kodansha North Holland, 2nd Edition.

[24] I. Karatzas, S. Shreve (1989), *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer Verlag.

[25] H.J. Kushner (1973), *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimisation problèms, SIAM J. Contrôl Optim., Vol. 10, pp 550-565.*

[26] N krylov (1976) : *Nonlinear Elliptic and parabolic equation of second order Bonston , D.Reidel.*

[27] N.V Krylov (1980), *Controlled diffusion processes.* Springer Verlag.

[28] L.Mazliak (1997) *The maximum principle in stochastique contrôle and backward equations. (in* Backward Stochastic Differential Equations N. El karoui and L.Mazliak), CRC Press Inc, Pitman Research Notes in Mathematics Series .

[29] R.C Merton (1990), *Continuous time finance*, Blackwell.

[30] S. Peng (1990). *A general stochastic maximum principle for optimal contrôl problems* SIAM J. Contr. Optim. 28, N° 4, pp. 966-979.

[31] H. Pham (2009) *Continuous-time stochastic contrôl and optimization with financial applications.* Springer-Verlag Berlin

[32] H. Pham (2007) *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance. Springer*

[33] L.S. Pontryagin, V.G. Boltanski and R.V. Gamkrelidze (1962), *The mathematical theory of optimal processes.* Intersciene N.Y.

[34] J-.M. Yong et X.Y. Zhou (1999) Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and Hjb Equations. Springer-Verlag New York Inc