

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

POUR L'OBTENTION DU TITRE DE

DOCTEUR EN SCIENCES

En Systèmes dynamiques

Présentée par :

LAADJAL Baya

ETUDE DES DIFFÉOMORPHISMES  
QUARTIQUES DANS LE PLAN

Soutenue le 14 Juin 2015 devant le jury composé de :

Pr.	MEZERDI	Brahim	U. Biskra	Président
Pr.	DJELLIT	Ilhem	U. Annaba	Rapporteur
Pr.	NECIR	Abdelhakim	U. Biskra	Examineur
Dr.	MOKHTARI	Zouhir	U. Biskra	Examineur
Dr.	FERCHICHI	Mohamed Redha	U. Annaba	Examineur
Dr.	DIABA	Fatma	U. Annaba	Examineur

## DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail aux êtres les plus chers dans ma vie :

A ma famille,

A mes amis (es).

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction de Madame I. DJELLIT, Professeur à l'Université de Badji Mokhtar, Annaba. Sa compétence scientifique, ses conseils et sa disponibilité ont été essentiels à l'aboutissement de ce travail. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur le Professeur B. MEZERDI, Professeur à l'Université Mohamed Khider, Biskra, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse de Doctorat. Je lui exprime mes profonds respects et toute ma gratitude.

Je remercie profondément Monsieur le Professeur A.H. NECIR et Monsieur Z. Mokhtari, Maître de Conférence à l'Université de M.K. Biskra, d'avoir pris la peine d'examiner ce travail et m'honorer par leurs présences parmi les membres de jury.

Monsieur M.R. FERCHICHI et Madame F. DIABA, Maîtres de Conférence à l'Université de B.M. Annaba, ont bien voulu consacrer du temps à la lecture de ce travail en tant qu'examineurs; qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu à travailler dans le cadre de cette thèse pendant ces années pour m'avoir guidé par leur expérience professionnelle et leurs précieux conseils.

Pour finir, il serait injuste de ne pas souligner l'appui sans faille, de toute ma famille qui a toujours cru en toutes mes réussites.

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Résumé	viii
Introduction générale	1
1 Notions générales sur les transformations ponctuelles	7
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Rappels de quelques définitions élémentaires . . . . .	8
1.3 Singularités et stabilité . . . . .	9
1.3.1 Singularités . . . . .	9
1.3.2 Stabilité . . . . .	10
1.4 Ensembles stables et instables . . . . .	11
1.5 Plan paramétrique - Bifurcation . . . . .	14
1.5.1 La bifurcation fold (Nœud - col) . . . . .	15
1.5.2 La bifurcation flip (doublement de périodique) . . . . .	15
1.5.3 La bifurcation de Neïmark-Hopf . . . . .	16

1.6	Les singularités paramétriques . . . . .	16
1.6.1	Condition d'existence d'un point cusp sur la courbe de bifurcation fold . . . . .	19
1.7	Plan de phase d'une transformation non inversible . . . . .	21
1.7.1	Les variétés critiques . . . . .	22
1.7.2	Attracteurs et attracteurs chaotiques . . . . .	23
1.7.3	Bassin d'attraction . . . . .	25
1.7.4	Bifurcation concernant les bassins d'attraction . . . . .	26
1.8	Rappel sur les récurrences découplées . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Etude de la dynamique complexe d'une transformation polynomiale cubique . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1	Introduction . . . . .	31
2.2	Description de la récurrence . . . . .	32
2.2.1	Les points fixes . . . . .	32
2.2.2	Stabilité . . . . .	33
2.3	Etude du plan des paramètres . . . . .	34
2.3.1	Simulation du plan des paramètres . . . . .	34
2.3.2	Courbes de Bifurcation . . . . .	36
2.3.3	L'influence du paramètre $c$ sur le plan paramétrique . . . . .	41
2.4	Etude du plan des phases . . . . .	41
2.4.1	Généralités sur les transformations de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$ . . . . .	42
2.4.2	Les lignes critiques . . . . .	44
2.4.3	Bifurcations du bassin d'attraction . . . . .	47
2.5	Etude de la récurrence d'ordre $n > 3$ . . . . .	55
2.5.1	Simulation du plan paramétrique . . . . .	57
2.5.2	Etude des lignes critiques . . . . .	59

<b>3 Etude d'un cas critique de bifurcation sur une récurrence découplée</b>	<b>61</b>
3.1 Introduction . . . . .	61
3.2 Etude d'un système symétriquement découplé . . . . .	65
3.2.1 Etude des points fixes et des cycles . . . . .	65
3.2.2 Etude du plan des paramètres . . . . .	68
3.2.3 Etude de l'espace d'état . . . . .	73
3.3 Bifurcation de Neimark - Hopf et langues d'Arnold . . . . .	79
3.3.1 Introduction . . . . .	79
3.3.2 Condition d'existence de cas d'exception . . . . .	81
3.3.3 Application et résultats . . . . .	89
 Conclusion	 <b>91</b>
 Bibliographie	 <b>93</b>
 Annexe A : Les exposants de Lyaponov	 <b>98</b>
 Annexe B : Principales notations utilisées	 <b>100</b>

# Table des figures

1.1	Section de Poincaré . . . . .	8
1.2	Trajectoires au voisinage d'un point fixe. . . . .	12
1.3	Courbe invariante d'un point fixe col. . . . .	13
2.1	Domaine d'existence et de stabilité des cycles attractifs dans le plan des paramètres $(a, b)$ . . . . .	35
2.2	La courbe fold (en noir) et la courbe flip (rouge) pour $k = 1$ . . . . .	37
2.3	Les courbes fold (noir) et flip (rouge) pour $k = 1$ et $k = 2$ . . . . .	40
2.4	La coïncidence des singularités paramétriques . . . . .	42
2.5	Cas particulier d'une transformation de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$ . . . . .	43
2.6	Plan de phases de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$ . . . . .	46
2.7	Attracteur chaotique délimité par des arcs de lignes critiques. . . . .	46
2.8	Bassin simplement connexe $\longleftrightarrow$ bassin multiplement connexe. . . . .	48
2.9	Bassin connexe $\longleftrightarrow$ bassin non connexe. . . . .	48
2.10	Bassin connexe. . . . .	49
2.11	Contact entre la frontière du bassin immédiat et les lignes critiques. . . . .	50
2.12	Bassin non connexe. . . . .	51
2.13	La coexistence de deux attracteurs. . . . .	52
2.14	Contact entre les courbes fermées invariantes $\Gamma_i$ et les lignes critiques. . . . .	53
2.15	Création d'une infinité d'îlots. . . . .	53
2.16	Bassin multiplement connexe. . . . .	54

2.17	Fractalisation du bassin d'attraction. . . . .	54
2.18	Attracteur cyclique d'ordre 4. . . . .	55
2.19	La naissance d'une région des points éterés rare. . . . .	56
2.20	Attracteur chaotique annulaire. . . . .	56
2.21	Diagrammes de bifurcation dans le cas $n = 4, c = 3, b = 2$ . . . . .	57
2.22	Diagrammes de bifurcation dans le cas $n = 5, c = 0.1, d = 1$ . . . . .	58
2.23	Diagrammes de bifurcation dans le cas $n = 6, c = 2, d = 1$ . . . . .	58
2.24	Diagrammes de bifurcation dans le cas $n = 7, c = 0.1, d = 1$ . . . . .	59
3.1	Graphes des fonctions $f$ et $g$ pour $b = -1.3025$ et $c = -0.1$ . . . . .	64
3.2	Domaine d'existence et de stabilité des cycles attractifs dans le plan des paramètres $(c, b)$ . . . . .	69
3.3	Courbes de la fonction $F(x)$ , $c = -0.1, b = -1.14$ . . . . .	71
3.4	Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 4, pour $c = -0.1$ et $b = -0.8$ . . . . .	74
3.5	Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8, pour $c = -0.1$ et $b = -1, 14$ . . . . .	75
3.6	Les bassins d'attraction de quatre cycles d'ordre 16 attractifs pour $c = -0.1$ et $b = -1, 26$ . . . . .	76
3.7	Quatre attracteurs chaotiques cycliques d'ordre 16 pour $b = -1.275$ . . . . .	77
3.8	Deux attracteurs chaotiques cycliques d'ordre 8 pour $b = -1.29$ . . . . .	77
3.9	Un attracteur chaotique cyclique d'ordre 4. . . . .	78
3.10	Le contact entre les rectangles chaotiques pour $b = -1.37$ . . . . .	78
3.11	Attracteur chaotique annulaire. . . . .	79
3.12	Diagramme de bifurcation de $T$ dans le plan $(a, b)$ . . . . .	80
3.13	Bassin d'attraction pour $c = -0.1, b = -0.7$ . . . . .	90
3.14	Les cycles noeud et col situés sur une courbe fermée invariante. . . . .	90

# Résumé

Ce mémoire a pour objet *les systèmes dynamiques discrets non inversibles bidimensionnels  $T$  réguliers de non linéarité cubique et découplés*. Le caractère de non inversibilité se traduit par le fait qu'il existe des régions notées  $Z_i$  dans le plan de phases pour lesquelles, un point peut posséder zéro, un ou plusieurs antécédents de rang un. Ce nombre est constant pour une région déterminée et égal à  $i$ . Ces différentes régions sont séparées par des singularités appelées Lignes Critiques. Du point de vue de la transformation inverse, le plan de phase apparaît alors comme feuilleté. Chaque feuillet est associé à une détermination bien définie de  $T^{-1}$ . Les Lignes Critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent.

Ce mémoire comporte deux grandes parties. Dans la première partie, nous avons d'abord procédé à une classification et à une caractérisation d'une récurrence bidimensionnelle non inversible cubique. Pour le biais des différentes structures des Lignes Critiques et les propriétés liées aux bifurcations de bassins d'attraction, nous avons fait ensuite apparaître des changements qualitatifs de comportements par variation de paramètres de  $T$ . Ces changements concernent les ensembles invariants tels que les variétés stables ou instables de point fixes ou cycles de type col, et les bassins d'attraction. Elles se caractérisent par la création d'orbites homoclines, hétéroclines et d'un contact fondamental entre des composantes non connexes de bassins, ceci conduisant à la destruction d'une courbe invariante fermée. Ensuite, nous avons donné les conséquences d'une généralisation sur l'organisation

et le nombre des lignes critiques et sur la structure topologique du bassin.

La seconde partie a été consacrée à l'étude d'un cas particulier des transformations ponctuelles : les systèmes symétriquement découplés. Nous avons effectué les études dans le plan de phases et le plan paramétrique. Une détermination de la structure de bifurcation au voisinage d'un cas critique a été établie à l'aide d'une méthode analytique utilisant des formes normales. La bifurcation de Neimark Hopf relative à des situations avec apparition des langues d'Arnold a été également prise en compte. L'étude du plan de phase a été faite à l'aide des variétés critiques et des variétés invariantes.

# Introduction générale

Les systèmes dynamiques non linéaires sont utilisés couramment en tant qu'outil d'étude des solutions d'équations différentielles et cette théorie remonte en particulier avec les travaux de Poincaré et Lyapounov dans des problèmes de mécanique à la fin du 19ème siècle et au début du 20ème siècle. A partir de 1930, cette théorie a connu un développement très important avec les écoles russes d'Andronov (méthodes analytiques et qualitatives) et de Bogoliubov- Mitropolski (méthodes analytiques). L'étude analytique a cependant connu ses plus grands développements avec l'école de Kiev. Hayashi a poussé les applications dans des circuits électriques et électroniques au Japon.

Le chaos qui est un phénomène typique des systèmes dynamiques non linéaires, est aujourd'hui très largement étudié, en raison de ses propriétés et des nombreuses applications potentielles. En effet, nous pouvons observer du chaos dans de nombreux phénomènes physiques, chimiques, météorologiques, démographiques ou économiques et ses caractéristiques font qu'on peut envisager de l'utiliser à des fins applicatives[37].

La notion de chaos qui trouve ses fondements dans l'article de Lorenz [30], a connu un développement mathématique dans les années 1970 [45] suivi d'un véritable essor scientifique et populaire dans les années 1980. Le chaos marque un profond bouleversement dans la manière d'envisager les systèmes dynamiques.

On dit qu'un système dynamique est chaotique s'il présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI). La propriété de SCI se traduit par le fait que la distance entre deux trajectoires tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps, pouvant

atteindre une distance limite qui est de l'ordre du diamètre de l'attracteur (au-delà d'un certain horizon temporel, le repliement des trajectoires imposé par le caractère borné de l'espace d'états stoppe la divergence exponentielle). Géométriquement, l'attracteur chaotique peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois. La « longueur » de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur. Le système est contraint d'évoluer de manière « imprévisible » dans une région bien définie de l'espace des phases.

Dans le cas où le système dynamique vise à modéliser un phénomène physique, la propriété de SCI montre la difficulté à prédire le comportement de ce phénomène. Une condition nécessaire à l'apparition du chaos est que le système soit non linéaire. C'est la complexité des dynamiques produites par des systèmes dont la définition tient en quelques lignes qui a, dans un premier temps, étonné les chercheurs et suscité l'essentiel des travaux entrepris sur la question. Pour des systèmes dont le nombre de variables d'état est élevé, l'étude s'est développée plus tardivement.

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dits « de contrôle », qui agissent sur les caractéristiques du système. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents (on parle également de transition de phase). La modification continue du paramètre de contrôle peut conduire à une modification de la nature des régimes dynamiques développés dans le système. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus appelés bifurcations.

Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On parle également, lors d'une telle transition, d'une perte de stabilité

structurelle.

Une modélisation de systèmes dynamiques peut se faire à l'aide de transformations ponctuelles ou récurrences. Elles correspondent à une évolution discrète du temps sous les formes :

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad (\text{autonome}) \quad (1)$$

ou

$$X_{n+1} = F(X_n, n), \quad (\text{non autonome}) \quad (2)$$

où  $X \in \mathbb{R}^p, p \geq 1$  ( dimension des équations (1)et (2) ) et  $\mathbb{R}^p$  est appelé l'espace de phase. L'étude des récurrences présente un double intérêt. D'une part, elles peuvent servir à modéliser des systèmes à informations discrètes, d'autre part, elles permettent d'étudier des équations différentielles ordinaires.

Les systèmes différentiels discrets ou transformations ponctuelles dépendent d'un ou plusieurs paramètres se présentant sous la forme :

$$X_{n+1} = F(X_n, \Lambda), \text{ Où } \Lambda \in \mathbb{R}^q, q = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Le point  $X_{n+1}$  de la récurrence (3) est le point conséquent des rangs 1 du point  $X_n$ , le point  $X_n$  étant appelé point antécédent de rang 1 du point  $X_{n+1}$ .

L'objet de ce mémoire consiste en l'étude de la "dynamique complexe" générée par des systèmes non linéaires régis par des équations aux récurrences appelées également transformations ponctuelles notées  $T$  et à leurs applications dans les techniques de l'ingénieur. On notera la composée de  $k$  transformations  $T$ . Le terme "dynamique complexe" est utilisé pour caractériser tout comportement à caractère non périodique, notamment les régimes chaotiques.

Une classe particulière de transformations ponctuelles joue un rôle important du point de vue fondamental et appliqué : les transformations non inversibles. Elles se différencient des

transformations dites inversibles par le fait qu'un point de l'espace de phase ne possède pas un antécédent unique mais peut en avoir zéro, un ou plusieurs suivant la région de l'espace considérée.

On se propose d'étudier particulièrement des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels basés sur des fonctions polynomiales pour lesquelles les solutions peuvent présenter des comportements chaotiques. Ces comportements correspondent à des propriétés de l'espace d'état (attracteurs chaotiques, les bassins d'attractions et leur frontières) et de l'espace paramétrique, et se caractérisent en général par la présence dans le plan de phase de singularités appelées Lignes Critiques (ou  $LC$ ).

La présence des Lignes Critiques a des conséquences sur les variétés invariantes et les bifurcations des bassins d'attraction et ceci est dû à l'inversibilité des transformations ponctuelles  $T$ . Cette notion a été introduite pour la première fois en 1964 [GM]. Les  $LC$  limitent dans le plan de phase (ou d'état) des régions à l'intérieur desquelles un point a un nombre constant  $i$  d'antécédents de rang 1. Elles se caractérisent en général par la présence dans le plan de phase des singularités appelées Lignes Critiques (ou  $LC$ ) séparant deux régions. Du point de vue de la transformation inverse, le plan de phase apparaît alors comme feuilleté. Chaque feuillet est associé à une détermination bien définie de  $T^{-1}$ . Les Lignes Critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent. Depuis 1969, de nombreuses publications ont développé le rôle des Lignes Critiques pour expliquer les bifurcations intervenant sur la structure des bassins d'attraction [11], [23]. On appelle bifurcation tout changement qualitatif des propriétés d'une transformation par variation des paramètres la caractérisant. Toutes ces bifurcations ainsi que de nouvelles sont relatées dans [38], [39].

Le rôle des Lignes Critiques est également prépondérant dans l'étude des bifurcations concernant les modifications des zones chaotiques. La définition d'une zone chaotique dérive de la notion de zone absorbante. Une zone absorbante est un ensemble connexe limité par des segments de Lignes Critiques de  $T^k(LC)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , où une séquence

constituée par les itérés successifs de  $T$  ne peut pas sortir de cette zone après y être entré. Une zone chaotique est une zone absorbante invariante dont les points sont stables au sens de Poisson et sensibles aux conditions initiales. L'étude des propriétés des zones chaotiques ont commencé en 1977 et se sont poursuivies [11], [17], [18], [19], [21], [23], [36].

Le plan adopté dans notre Thèse est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base concernant les singularités et les bifurcations classiques des transformations ponctuelles non inversibles qui peuvent être introduites et caractérisées dans l'espace d'état et l'espace des paramètres et qui ont une grande importance dans la compréhension des comportements complexes.

A la fin du chapitre nous rappelons enfin les propriétés d'une classe de transformations dite découplées à la fin du chapitre.

Dans le deuxième chapitre nous présentons la description d'une récurrence non inversible bidimensionnelle  $T$  et nous effectuons l'étude spécifique dans le plan de phases et dans le plan paramétrique par la considération des lignes critiques.

Nous commençons par rappeler la récurrence quadratique ( $x' : ax+y, y' = x*x+b$ ), c'est la récurrence de Kawakami et Kobayashi [29], nous donnons quelques résultats sommaires sur les bifurcations de cols, sur la condition d'existence d'un ensemble attractant en fonction des paramètres. Cette récurrence a été reprise par Cathala [11] en 1992, Il étudie les bifurcations des points fixes et il définit la zone absorbante pour un attracteur chaotique. En 1994, Mira et al. [38] étudient les bifurcations de bassins et définissent la notion de bassin faiblement fractal et les bifurcations de bassins.

Une proposition de Taha A.K, lors de mon séjour à l'INSA de Toulouse, fut de rajouter un terme cubique pour voir quels seraient les principaux changements sur les points fixes, les lignes critiques et les bassins d'attraction. Nous établissons quelques résultats pour des transformations non inversibles et polynomiales de non linéarité supérieure à trois.

Dans le troisième chapitre, nous considérons un cas particulier de notre transformation ponctuelle. C'est le cas où nous obtenons un système dynamique découplé, nous effectuons

les études dans le plan de phases et le plan paramétrique. La bifurcation de Neimark Hopf avec apparition des langues d'Arnold est mise en évidence. Nous exposons une méthode analytique dite de Cigala [12] qui nous permet de faire l'étude de la structure de bifurcation du système au voisinage d'une bifurcation de type Neimark-Hopf. Cette méthode fait apparaître différentes configurations des trajectoires (dans le plan de phases) pour la transformation ponctuelle découplée.

# Chapitre 1

## Notions générales sur les transformations ponctuelles

### 1.1 Introduction

La modélisation de nombreux systèmes dynamiques conduit à une formulation par équations différentielles non linéaires et non autonomes. Dans le cas de la dimension deux, la forme explicite suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \Lambda, t) \\ \dot{y} = g(x, y, \Lambda, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

est la plus courante où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) par rapport aux variables réelles  $x$  et  $y$  et du paramètre  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^q$ , périodiques de période  $\tau$  par rapport à  $t$ . Par la méthode de surface de section de Poincaré, on peut associer au système différentiel (1.1) localement une récurrence autonome  $T$  de type difféomorphisme. L'avantage de cette méthode est de diminuer de un l'ordre effectif par l'élimination de la dépendance explicite du temps. Ainsi une transformation ponctuelle constitue l'outil essentiel d'étude des équations différentielles.

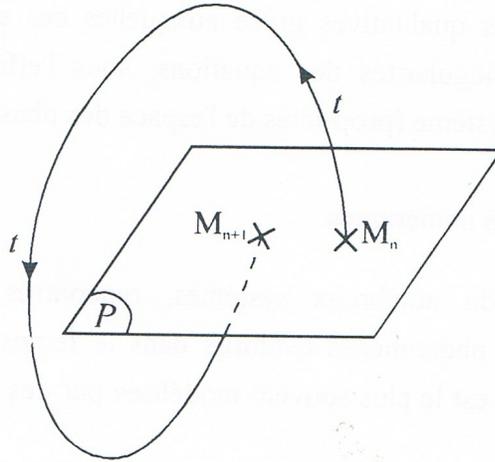


FIG. 1.1 – Section de Poincaré

L'idée de base de cette méthode est d'associer à un point  $M_n (X_n)$  situé à l'intersection de la surface de section et d'une trajectoire de phase donnée, son conséquent  $M_{n+1} (X_{n+1})$  point d'intersection de la surface de section et de la trajectoire considérée, situé après  $M_n$  dans le sens du temps croissant. Les points  $M_n$  et  $M_{n+1}$  sont alors liés par une transformation bidimensionnelle autonome  $T : M_{n+1} = TM_n, n = 1, 2, \dots$  (voir figure (1.1)).

Le but de ce chapitre est de rappeler les définitions principales et présenter les résultats généraux spécifiques aux systèmes dynamiques discrets et nous nous intéressons à ceux liés aux transformations ponctuelles bidimensionnelles.

## 1.2 Rappels de quelques définitions élémentaires

Dans ce paragraphe, nous considérons les transformations ponctuelles (ou récurrences) autonomes sous la forme explicite donnée par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = TX_n = F(X_n, \Lambda) \\ X_n \in \mathbb{R}^p (p = 2), \Lambda \in \mathbb{R}^q (q \geq 1). \end{cases} \quad (1.2)$$

Où  $F$  est au moins de classe  $C^k, k \geq 1$  par rapport à la variable  $X$  et au paramètre  $\Lambda$ .

$\mathbb{R}^p$  s'appelle l'espace d'état (de phase) et  $p$  la dimension de la transformation (1.2),  $\mathbb{R}^q$  s'appelle l'espace des paramètres.

**Définition 1.1** *Une solution de (1.2) est formée par une suite de points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  où  $X_0$  est appelé condition initiale ; les points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  forment une trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.*

**Définition 1.2** *La transformation  $T$  est un difféomorphisme si  $F$  dans (1.2) est continûment différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition. Si  $F$  est discontinue ou non différentiable et à inverse unique, alors  $T$  est simplement dit inversible. Enfin, si  $F$  ne possède pas d'inverse unique,  $T$  est appelé un endomorphisme.*

**Définition 1.3** *L'itéré  $X_{n+r}$ , avec  $r \geq 1$ , est appelé conséquent de rang  $r$  de  $X_n$ , c'est à dire :  $X_{n+r} = T^r(X_n)$ ,  $X_n$  est un antécédent de rang  $r$  de  $X_{n+r}$  noté :  $X_n = T^{-r}(X_{n+r})$ .*

Lorsque  $T$  est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang 1 ou aucun.

## 1.3 Singularités et stabilité

### 1.3.1 Singularités

On distingue deux types de singularités de dimension zéro pour la transformation  $T$  : les points fixes et les cycles, encore appelés orbites périodiques.

**Définition 1.4** Un point fixe  $X^*$  est un point du plan des phases vérifiant :

$$X^* = T(X^*). \tag{1.3}$$

**Définition 1.5** Un Cycle d'ordre  $k$  (ou  $k$ -cycle) est un ensemble de  $k$  points  $(X_1^*, \dots, X_k^*)$  du plan des phases, vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1}^* = T(X_i^*) & , \quad i = 1, \dots, k-1 \\ X_1^* = T(X_k^*) \\ X_i^* = T^k(X_i^*) & , \quad i = 1, \dots, k \\ X_i^* \neq T^h(X_i^*) & , \quad i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad 1 \leq h < k. \end{cases} \quad (1.4)$$

Chaque point  $X_i^*$  d'un cycle d'ordre  $k$  est un point fixe de  $T^k$ . Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses  $k$  points  $X_i^*$  par applications successives de  $T$ , un tel cycle sera désigné par le système  $(k, j)$  ( $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de  $T$ ).

Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un, il peut également apparaître des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation  $T$  ou  $T^k$ .

**Définition 1.6** Dans le plan de phases  $\mathbb{R}^2$ , une courbe définie par l'équation  $Q(X) = C$ ,  $C$  une constante, est invariante par la transformation  $T$  ou  $T^k$ , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$Q(T(X)) = Q(X) \quad \text{ou} \quad Q(T^k(X)) = Q(X). \quad (1.5)$$

Plus généralement, un ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^p$  est invariant par  $T$  ssi  $T(A) = A$ .

### 1.3.2 Stabilité

Pour caractériser la nature des singularités de dimension zéro, on introduit la notion de multiplicateurs (ou valeurs propres) définie lorsque  $F$  est différentiable au point considéré.

1. Si la dimension de la récurrence  $p = 1$ , le multiplicateur d'un point fixe  $X^*$  est

$S = F'(X^*)$  où  $F' = \frac{dF}{dX}$  et celui d'un cycle d'ordre  $k$ ,  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$  est  $S = \prod_{i=1}^k F'(X_i^*)$ .

Un point fixe ou un cycle d'ordre  $k$  est dit attractif (asymptotiquement stable) si  $|S| < 1$  et répulsif (instable) si  $|S| > 1$ .

2. Si la dimension de la récurrence  $p = 2$ , un point fixe  $X^*$  ou un cycle d'ordre  $k$ ,  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$  possède deux multiplicateurs  $S_1$  et  $S_2$  qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de  $F$  (pour un point fixe) ou  $F^k$  (pour un cycle d'ordre  $k$ ) au point considéré.

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  et répulsif si  $|S_1| > 1$  ou  $|S_2| > 1$ .

Selon les valeurs prises par  $S_1$  ou  $S_2$  avec  $|S_i| \neq 1$ ,  $i = 1, 2$ , on définit différentes sortes de points fixes ou cycles :

1) **Col** :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels :  $|S_1| > 1$  et  $|S_2| < 1$ . Un col est toujours instable.

2) **nœud** :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels.

- Attractif si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ ,
- Répulsif si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$ .

3) **Foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjugués,  $S_1 = \rho e^{-i\theta}$ ,  $S_2 = \rho e^{+i\theta}$ .

- Attractif si  $\rho < 1$ ,
- Répulsif si  $\rho > 1$ .

La figure (1.2) représente les trajectoires au voisinage d'un point fixe.

## 1.4 Ensembles stables et instables

Pour une transformation ponctuelle  $T$  définie par (1.2), on peut définir les ensembles stables et instables associés à un point fixe.

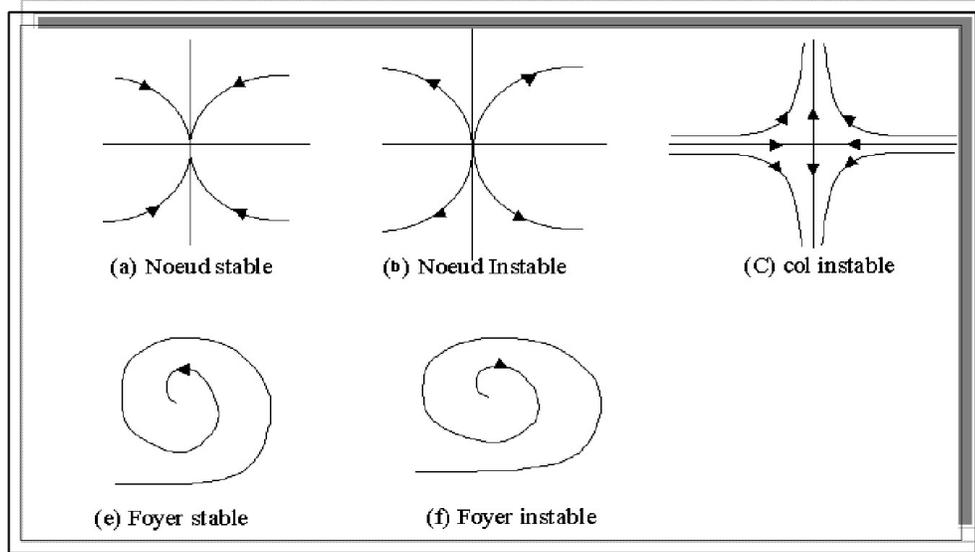


FIG. 1.2 – Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

**Définition 1.7** Soit  $X^*$  un point fixe répulsif et  $U$  un voisinage de  $X^*$ .

- On appelle  $W_{loc}^i(X^*)$  ensemble instable local ou variété instable locale (c'est à dire dans  $U$ ) de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $U$  ayant une séquence d'antécédents successifs dans  $U$  qui converge vers  $X^*$ .
- On appelle  $W^i(X^*)$  ensemble instable global de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^p$  ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers  $X^*$ .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(X^*) = \{X \in U : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{-n} \in U\}, \quad (1.6)$$

$$W^i(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i(X^*)). \quad (1.7)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P1-  $W^i(X^*)$  est invariante par rapport à  $T$  c'est à dire :  $T[W^i(X^*)] = W^i(X^*)$ .

P2- Si  $T$  est un endomorphisme, en général  $W^i(X^*)$  n'est pas invariant par rapport à  $T^{-1}$  et on a :  $W^i(X^*) \subseteq T^{-1}[W^i(X^*)]$ . L'invariance de  $W^i(X^*)$  par rapport à  $T^{-1}$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.

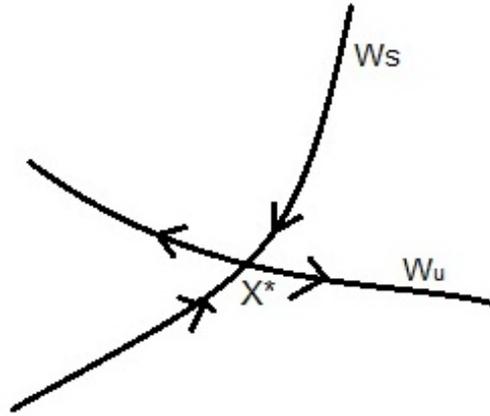


FIG. 1.3 – Courbe invariante d'un point fixe col.

**Définition 1.8** Soit  $X^*$  un point fixe  $T$  répulsif ou attractif.

- On appelle  $W_{loc}^s(X^*)$  ensemble stable local ou variété stable locale (c'est à dire dans  $U$ ) de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $U$  dont la séquence d'images successives appartient à  $U$  et converge vers  $X^*$ .
- On appelle  $W^s(X^*)$  ensemble stable global de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^p$  dont la séquence d'images successives converge vers  $X^*$ .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_n = T^n(X) \rightarrow X^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_n \in U\}, \quad (1.8)$$

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_n = T^n(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)). \quad (1.9)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P3-  $W^s(X^*)$  est invariante par rapport à  $T^{-1} : T^{-1}[W^s(X^*)] = W^s(X^*)$ .

P4- Si  $T$  est un endomorphisme, en général  $W^s(X^*)$  n'est pas invariant par rapport à  $T$  et on a :  $T[W^s(X^*)] \subseteq W^s(X^*)$ . L'invariance de  $W^s(X^*)$  par rapport à  $T$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.

**Remarque 1.1 :**

1. Si  $X^*$  est un point fixe attractif l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.
2. Si  $T$  est un difféomorphisme les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.
3. Dans le cas d'un point fixe  $X^*$  de type nœud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de  $X^*$  se réduit à  $X^*$  lui même lorsque  $T$  est inversible. Lorsque  $T$  est non inversible l'ensemble stable local de  $X^*$  se réduit à  $X^*$  lui même et l'ensemble stable global de  $X^*$  est constitué de tous les antécédents de tout rang de  $X^*$ . Ceci s'écrit :

$$W^s(X^*) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(X^*) \quad \text{et} \quad \forall X \in W^s(X^*) : \exists m \in \mathbb{N} / T^m(X) = X^*. \quad (1.10)$$

4. Les définitions des ensembles stables et instables d'un cycle d'ordre  $k$  se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de  $T^k$ .

## 1.5 Plan paramétrique - Bifurcation

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre  $\Lambda$  traverse une valeur critique  $\Lambda_0$ . En particulier les valeurs de  $\Lambda$  correspondent à un cas critique de Lyapunov sont liées à des bifurcations dites classiques. Sous l'effet d'une petite variation autour  $\Lambda_0$ , ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de nouvelles singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Pour les transformations décrites par (1.2) plusieurs sortes de bifurcations se produisent. Nous ne mentionnerons que celles qui interviennent dans ce travail.

### 1.5.1 La bifurcation fold (Nœud - col)

Naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre  $k$ , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux points fixes ( cycles ) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle  $S_1$  ou  $S_2$  est égal à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\emptyset \xleftrightarrow{S=+1} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) + C^k. \quad (1.11)$$

$\emptyset$  signifie absence de cycle,  $N_s^k$  cycle nœud d'ordre  $k$  stable,  $N_i^k$  cycle nœud d'ordre  $k$  instable,  $C^k$  cycle col d'ordre  $k$ . Les valeurs du paramètre  $\Lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)0}^j$ .  $k$  correspond à l'ordre du cycle,  $j$  caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par  $T$ .

### 1.5.2 La bifurcation flip (doublement de périodique)

Un point fixe (resp. cycle d'ordre  $k$ ) de type nœud change de stabilité lorsque  $S_1$  ou  $S_2$  est égal à  $(-1)$ , et donne naissance à un cycle d'ordre 2 ( resp cycle d'ordre  $2k$  ) qui a la même stabilité que le point fixe ( resp cycle d'ordre  $k$  ) d'origine. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\begin{cases} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) \xleftrightarrow{S=-1} N_i^k (\text{resp. } N_s^k) + N_s^{2k} (\text{resp. } N_i^{2k}) \\ C^k \xleftrightarrow{S=-1} N_i^k (\text{resp. } N_s^k) + C^{2k}. \end{cases} \quad (1.12)$$

$N_s^{2k}$  signifie cycle nœud d'ordre  $2k$  stable,  $N_i^{2k}$  cycle nœud d'ordre  $2k$  instable,  $C^{2k}$  cycle col d'ordre  $2k$ . Les valeurs du paramètre  $\Lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_k^j$ .

### 1.5.3 La bifurcation de Neïmark-Hopf

Un point fixe ( resp cycles d'ordre  $k$  ) de type foyer change de stabilité ( lorsque  $S_{1,2} = \rho \exp(\pm i\varphi)$  vérifient  $\rho = 1$  ) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe ( cycle ) d'origine. On a le schéma :

$$F_s^k (\text{resp. } F_i^k) \xrightarrow{\rho=1} F_i^k (\text{resp. } F_s^k) + C.F.I_s^k (\text{resp. } C.F.I_i^k), \quad (1.13)$$

où  $F_s^k$  signifie cycle foyer d'ordre  $k$  stable,  $F_i^k$  cycles foyer d'ordre  $k$  instable,  $C.F.I_s^k$  correspond à un cycle de  $k$  courbes fermées invariantes par  $T^k$  stables (attractives),  $C.F.I_i^k$  correspond à un cycle de  $k$  courbes fermées invariantes par  $T^k$  instables (répulsives). Ces courbes fermées invariantes s'échangent cycliquement par  $k$  applications successives de  $T$ . Les valeurs du paramètre  $\Lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Gamma_k^j$ .

## 1.6 Les singularités paramétriques

Les définitions et les équations données dans ce paragraphe sont les mêmes que celles données par Carcassès [9], dans le cas d'une transformation bidimensionnelle donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \lambda_1, \lambda_2) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \lambda_1, \lambda_2) \end{cases}$$

**Définition 1.9** Soit  $X^* = (x^*, y^*)$  un point du cycle d'ordre  $k$ , soit  $Tr = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{\partial g_k}{\partial y}$  et  $J = \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x}$  la trace et le déterminant de la matrice Jacobienne  $\frac{\partial F_k}{\partial X}(X = X^*)$  ( $F_k$  c'est la  $k$ -ème itération de la fonction  $F = (f, g)$ ) dans ce cas le réel  $\sigma$  tel que  $(J + 1)\sigma - Tr = 0$  s'appelle le multiplicateur réduit du cycle considérée.

Posons  $D(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (J + 1)$  et  $N(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = Tr$ .

**Définition 1.10** La ligne de contour  $\sigma$  associé à un cycle d'ordre  $k$  est la courbe dans

l'espace  $(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$  satisfaisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} F_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - (x, y) &= 0 \\ \sigma(x, y, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{N(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{D(x, y, \lambda_1, \lambda_2)} = \text{constant}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

En éliminant  $X = (x, y)$  de l'équation (1.14) on obtient l'équation de la ligne de contour  $\sigma$  dans le plan des paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

**Propriété 1.1 :**

1. Pour un cycle d'ordre  $k$ , la ligne de contour  $\sigma = -1$  correspond à la courbe flip notée par  $\Lambda_k^j$  et la ligne contour  $\sigma = 1$  correspond à la courbe fold notée par  $\Lambda_{(k)0}^j$ .
2. Si un point de bifurcation de codimension 2 correspond à un point de tangence d'une courbe fold  $\Lambda_{(k)0}^j$  et une courbe flip  $\Lambda_k^j$  associées au même cycle  $(k, j)$  dans le plan de paramètre  $(\lambda_1, \lambda_2)$  alors toutes les courbes  $\sigma$  associées au cycle  $(k, j)$  passent par ce point.
3. Si  $Tr$  est un nombre fini non nul alors la courbe  $\sigma \rightarrow \pm\infty$  correspond à la courbe  $J = -1$

**Proposition 1.1 :**

- 1)  $|\sigma| < 1 \Leftrightarrow$  le cycle  $(k, j)$  est un cycle nœud ou cycle foyer.
- 2)  $|\sigma| > 1 \Leftrightarrow$  le cycle  $(k, j)$  est un cycle col.

La démonstration de cette proposition est donnée dans la référence [9].

Considérons les équations de la ligne de contour  $\sigma = Cte$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \equiv f_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - x = 0 \\ H_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \equiv g_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y = 0 \\ H_3(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \sigma - \frac{N(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{D(x, y, \lambda_1, \lambda_2)} = 0 \\ \text{avec : } J = \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} \neq 0. \end{array} \right.$$

Alors les mineurs de la matrice Jacobienne  $\frac{\partial (H_1, H_2, H_3)}{\partial (x, y, \lambda_1, \lambda_2)}$  sont :

$$M_x = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial y} & \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial g_k}{\partial y} - 1 & \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial y}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix}, \quad M_y = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial x} - 1 & \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial g_k}{\partial x} & \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial x}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix},$$

$$M_{\lambda_1} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial x} - 1 & \frac{\partial f_k}{\partial y} & \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial g_k}{\partial x} & \frac{\partial g_k}{\partial y} - 1 & \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial x}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix}, \quad M_{\lambda_2} = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial x} - 1 & \frac{\partial f_k}{\partial y} & \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial g_k}{\partial x} & \frac{\partial g_k}{\partial y} - 1 & \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial x}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial H_3} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_1} \end{bmatrix}.$$

**Définition 1.11** Une singularité paramétrique est un point du plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$  associé à un cycle d'ordre  $k$  de  $T$  tel que  $M_x = M_y = M_{\lambda_1} = M_{\lambda_2} = 0$ .

**Définition 1.12** Considérons les valeurs suivantes :

$$\beta_1 = -\left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \right)$$

$$\beta_2 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} & \frac{\partial M_x}{\partial y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} & \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} & \frac{\partial M_x}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial x} & \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial x} & \frac{\partial M_x}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial x} & \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_y}{\partial y} & \frac{\partial M_y}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial y} & \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_y}{\partial y} & \frac{\partial M_y}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial y} & \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial M_{\lambda_1}}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial M_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix}$$

Les singularités paramétriques sont dites :

- Centre paramétrique si  $\beta_1 = 0; \beta_2 > 0$ , correspond à la ligne de contour fermé  $\sigma$  dégénéré en un point noté par  $A_k^j$ .

- *Col paramétrique* si  $\beta_1 = 0$ ;  $\beta_2 < 0$  correspond au point d'intersection entre seulement les lignes de contour  $\sigma$ , ce point est noté par  $P_k^j$ .
- *Nœud paramétrique* si  $\beta_1 \neq 0$  correspond au point de contact entre une infinité de lignes de contour  $\sigma$ , ce point est noté par  $N_k^j$ .
- *Singularité paramétrique critique* si  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  dans le cas le plus simple cette singularité correspond à la fusion de deux singularités de type différents.

**Proposition 1.2** *La singularité paramétrique de type col et centre satisfait au système d'équation suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - x = 0. \\ g_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y = 0. \\ M_{\lambda_1}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0. \\ M_{\lambda_2}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0. \\ D(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0. \end{array} \right.$$

### 1.6.1 Condition d'existence d'un point cusp sur la courbe de bifurcation fold

Nous considérons les deux cas suivants :

**Cas 1.**  $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) - 1 \neq 0$ , la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point cusp

sur une courbe de bifurcation fold associé à un point fixe est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - x = 0 ; g(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y = 0 ; \\ \psi_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - 1 \right) \left( \frac{\partial g}{\partial y} - 1 \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 ; \\ \psi_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \left( \frac{\partial g}{\partial y} - 1 \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 ; \\ \psi_3(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \left( \frac{\partial g}{\partial y} - 1 \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \neq 0 ; \\ M_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0. \end{array} \right.$$

Où

$$M_x = \det \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} - 1 & \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} \\ D \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial D}{\partial y} & D \frac{\partial N}{\partial \lambda_1} - N \frac{\partial D}{\partial \lambda_1} & D \frac{\partial N}{\partial \lambda_2} - N \frac{\partial D}{\partial \lambda_2} \end{array} \right] ..$$

**Cas 2.**  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - 1 \neq 0$ , la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point cusp sur une courbe de bifurcation fold associé à un point fixe est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - x = 0 ; g(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y = 0 ; \\ \psi_1(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - 1 \right) \left( \frac{\partial g}{\partial y} - 1 \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 ; \\ \psi_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - 1 \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 ; \\ \psi_3(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - 1 \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \neq 0 ; \\ M_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0. \end{array} \right.$$

Où

$$M_x = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - 1 & \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} \\ D \frac{\partial N}{\partial x} - N \frac{\partial D}{\partial x} & D \frac{\partial N}{\partial \lambda_1} - N \frac{\partial D}{\partial \lambda_1} & D \frac{\partial N}{\partial \lambda_2} - N \frac{\partial D}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix}.$$

**Propriété 1.2 :**

- Si  $\sigma \neq 1$ , une singularité paramétrique d'ordre  $k$  est de type col ou centre.
- Si  $\sigma = 1$ , une singularité paramétrique d'ordre  $k$  satisfait au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - x = 0 \\ g_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y = 0 \\ \psi_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ M_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad \text{si} \quad \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) - 1 \neq 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} f_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - x = 0 \\ g_k(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y = 0 \\ \psi_2(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ M_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad \text{si} \quad \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - 1 \neq 0 \end{cases}$$

## 1.7 Plan de phase d'une transformation non inversible

Dans ce paragraphe nous donnons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phase d'une transformation ponctuelle non inversible de type (1.2) pour des valeurs de paramètres fixés.

### 1.7.1 Les variétés critiques

Dans le plan de phase, la non inversibilité des applications (endomorphismes) est caractérisée par la présence des singularités appelées lignes critiques ( $LC_k$ ). Ce type de singularité, introduit pour la première fois par Mira en 1964 [35]. Les lignes critiques interviennent dans la détermination d'aire absorbante et d'aire chaotique, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

**Définition 1.13** *En dimension un, un point critique de rang  $k + 1$  est le conséquent de rang  $k$  d'un extremum de la courbe  $Y = h_k(X)$  où  $h_k$  est la fonction définissant  $T^k$ , il est noté  $C_k$ .*

**Définition 1.14** *En dimension deux une ligne critique notée  $LC$  ou  $LC_0$  est le lieu des points du plan de phase ayant au moins deux antécédents de rang un confondus. C'est la généralisation à la dimension deux de la notion de point critique défini en dimension un.*

Une ligne critique  $LC_k$  de rang  $k + 1$ , est la ligne conséquente de rang  $k$  de  $LC_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

La ligne critique  $LC_{-1}$  est l'antécédent de rang un de  $LC_0$ , avec pour définition :

$$T(LC_{-1}) = LC \text{ et } LC_{-1} \subseteq T^{-1}(LC).$$

L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :

- a) Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.
- b) Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations.

Les lignes critiques partagent le plan de phase en zone  $Z_i$  chaque zone  $Z_i$  possède  $i$  antécédents de rang un.

### Formulation mathématique des lignes critiques

**Cas différentiable** : Dans le cas où  $T$  est différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de  $T$  s'annule.

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, J(X) = 0\}.$$

**Cas non différentiable** : Dans le cas où  $T$  est non différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points de non différentiabilité. On suppose que ces points sont des antécédents de rang un confondus puisque  $T$  est continûment différentiable par morceaux. Cet ensemble est donc :

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\}.$$

Dans notre travail  $T$  est différentiable.

### 1.7.2 Attracteurs et attracteurs chaotiques

Dans ce paragraphe nous donnons les définitions des attracteurs et attracteurs chaotiques.

**Définition 1.15** *Un ensemble fermé invariant "A" est appelé ensemble attractif si dans tout voisinage W de A il existe un voisinage U  $\subset$  W de A tel que  $T(U) \subset U$  et  $T^n(X) \rightarrow A$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour tout  $X \in U$ .*

**Définition 1.16** *Un attracteur "A" est un ensemble attractif topologiquement transitif, ce qui signifie que pour tout couple d'ensembles ouverts U, V  $\subset$  A, il existe un entier positif k tel que  $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$ , de façon équivalente, il existe un point P  $\in$  A dont l'orbite est dense dans A.*

Un attracteur est peut être un point fixe ou un cycle d'ordre k ou une courbe invariante fermée ou un ensemble plus complexe.

**Définition 1.17** *Un attracteur chaotique "d" est un ensemble attractif invariant, dont les points génèrent des suites itérées qui vérifient la propriété de sensibilité aux conditions initiales.*

Actuellement il n'y a pas de définition générale du terme "chaos". En fonction du contexte, on dit qu'un état est chaotique quand il est non périodique. On parle même de mouvement chaotique pour un mouvement très irrégulier sur une période, et pour lequel la durée des observations physiquement possibles est inférieure à cette période.

Le comportement chaotique est caractérisé par :

- L'existence de cycles attractifs d'ordre infini.
- La coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

Et dans la transformation que nous allons voir, les mouvements chaotiques sont généralement associés à l'existence d'une infinité de cycles instables, qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique.

On distingue deux types du chaos :

**Le chaos stable ou attracteur étrange :** Le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir, les caractéristiques de cet attracteur sont :

- Dans l'espace des phases, l'attracteur est de volume nul .
- La dimension de l'attracteur est fractale (non-entière).
- Sensibilité aux conditions initiales .

**Le chaos instable ou répulseur étrange :** Le système évolue d'une manière similaire, mais diverge après un certain nombre d'itérations .

**Définition 1.18** *Soit "A" un sous ensemble fermé borné du plan alors A est dite aire absorbante par rapport à T si :*

1.  $T(A) \subseteq A$ .

2. Sa frontière est constituée d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques.
3. Il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que  $T(U) \subset U$  et tout point  $X \in U/A$  a une image de rang fini à l'intérieur de  $A$ .

### 1.7.3 Bassin d'attraction

**Définition 1.19** Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  d'un attracteur  $A$  ( point fixe, cycle d'ordre  $k$  ou attracteur chaotique ) est l'ensemble ouvert des conditions initiales  $X_0$  dont les itérés successifs vont converger vers un attracteur  $T^n(X_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ .

**Propriété 1.3** Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  est invariant par l'itération inverse  $T^{-1}$ , mais pas nécessairement invariant par  $T$  :

$$T^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}, \quad T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Lorsque la transformation  $T$  est inversible on a  $T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ .

**Définition 1.20** La frontière de  $\mathcal{D}$  est notée  $\mathcal{F}$  (ou  $\partial\mathcal{D}$ ). Elle est définie par :

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{C(\mathcal{D})},$$

où  $C(\mathcal{D})$  représente l'ensemble complémentaire de  $\mathcal{D}$  et  $\overline{\mathcal{D}}$  (resp.  $\overline{C(\mathcal{D})}$ ) représente l'adhérence de  $\mathcal{D}$  (resp.  $C(\mathcal{D})$ ).

**Propriété 1.4** La frontière  $\mathcal{F}$  est invariant par l'itération inverse  $T^{-1}$ , mais pas nécessairement invariant par  $T$  :

$$T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}, \quad T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}.$$

**Remarque 1.2** La relation  $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$  implique que  $\mathcal{F}$  doit contenir l'ensemble des antécédents de chacun de ces cycles, c'est à dire que  $\mathcal{F}$  doit contenir l'ensemble stable  $W^s$

de tout cycle de  $T$  appartenant à  $\mathcal{F}$ .

La relation  $T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$  signifie que le trajectoire image de chaque point de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 1.3** *Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  peut être connexe, multiplement connexe (connexe avec trous) ou non connexe c'est à dire formé d'un nombre fini ou infini de composantes connexes (qui peuvent être simplement ou multiplement connexe) et sa frontière peut être fractale.*

### 1.7.4 Bifurcation concernant les bassins d'attraction

Dans ce paragraphe, nous décrivons les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction, ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin avec une ligne critique d'une transformation ponctuelle non inversible.

#### La bifurcation de contact de type 1

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière du bassin  $\mathcal{F}$  entre en contact avec  $LC$  a une certaine valeur de bifurcation, elle concerne le changement de la connexité du bassin d'attraction et a lieu lorsque l'intersection entre le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  et  $LC$  est formée de segments non connexes :

- Bassin connexe  $\rightarrow$  bassin non connexe.
- Bassin non connexe  $\rightarrow$  bassin connexe.
- Bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiplement connexe.
- Modification du nombre d'îlots de  $D$  ou apparition d'une nouvelle arborescence d'îlots.

## La bifurcation de contact de type 2

Cette bifurcation apparaît lorsque la frontière d'un aire chaotique entre en contact avec la frontière de son bassin immédiat. Après la bifurcation l'aire chaotique se détruit en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de l'aire chaotique. Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leurs points limites et de leurs antécédents, appartenant à l'aire chaotique avant la bifurcation. Ces points sont responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évoluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

## 1.8 Rappel sur les récurrences découplées

D'une manière générale, nous parlerons de récurrence découplée  $T$  de dimension deux [2], chaque fois qu'on a la forme suivante :

$$T(x, y) = (g(y), f(x)) \in X \times Y \subset \mathbb{R}^2. \quad (1.15)$$

Où  $g : Y \rightarrow X$  et  $f : X \rightarrow Y$  sont deux fonctions continues.

Ce type de transformations décrit un modèle de Marketing appelé "Cournot duopole". Ainsi  $T$  s'appelle une transformation de cournot, et  $f$  et  $g$  sont appelées deux fonctions de réaction : elles décrivent des lois sur les productions de sociétés qui sont en concurrence dans un marché.

Pour toute transformation de ce type, il est possible d'associer les deux transformations unidimensionnelles définies par :

$$\psi = g \circ f \quad \text{et} \quad \phi = f \circ g.$$

A l'aide de  $\phi$  et  $\psi$  on peut donner les formes des itérés pairs et impairs de  $T$

$$\begin{aligned} T^{2n} : (x, y) &\rightarrow (x_{2n} = \psi_n(x), y_{2n} = \phi_n(y)), \\ T^{2n+1} : (x, y) &\rightarrow (x_{2n+1} = g \circ \phi_n(y), y_{2n+1} = f \circ \psi_n(x)), \end{aligned} \quad (1.16)$$

où  $n = 1, 2, \dots, \psi_n$  et  $\phi_n$  sont les images d'ordre  $n$  de  $\psi$  et  $\phi$ .

Alors la nature d'un cycle d'une transformation symétriquement découpée dépend de l'ordre  $k$  du cycle, car un itéré pair ( $k = 2n$ ) de  $T$  est toujours découpé et un itéré impair ( $k = 2n + 1$ ) est toujours symétriquement découpé.

**Propriété 1.5 :**

1. Un point fixe  $(a_0, b_0)$  de  $T$  est telle que  $a_0$  point fixe de  $\psi$  et  $b_0$  point fixe de  $\phi$
2. Un cycle d'ordre impair ( $k = 2n + 1$ ) est tel qu'un de ses points  $(a, b)$  soit racine réelle du système :

$$\begin{cases} g \circ \phi_n(b) = a \\ f \circ \psi_n(a) = b, \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  ne sont pas racines de  $T^l$  pour tout  $l < 2n + 1$ .

Les relations donnant un point de cycle d'ordre impair peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \phi_{2n+1}(b) = b \\ \psi_{2n+1}(a) = a. \end{cases}$$

Si  $f$  et  $g$  sont respectivement continûment différentiables en  $a$  et  $b$ , les multiplicateurs d'un cycle d'ordre  $k = 2n + 1$  sont donnés par :

$$S^2 = g'[\phi_n(b)] \cdot f'[\psi_n(a)] \cdot \phi_n'(b) \cdot \psi_n'(a).$$

On peut affirmer que les cycles non dégénérés ( $S^2 \neq 0, 1$ ) d'ordre  $k = 2n + 1$  sont soit des foyers ( $S^2 < 0$ ) soit des nœuds ( $0 < S^2$ ), ils ne peuvent jamais être des cols ( $|S_k^1| < 1$  et  $1 < |S_k^2|$ ). Les nœuds sont toujours des nœuds étoilés.

D'une façon similaire, un point  $(c, d)$  d'un cycle d'ordre pair ( $k = 2n$ ) est tel que

$$\begin{cases} \psi_n(c) = c \\ \phi_n(d) = d \end{cases}$$

où  $c$  et  $d$  ne sont pas des racines de  $T^l$ ,  $\forall l < 2n$ .

Sous les mêmes hypothèses sur  $f$  et  $g$ , les multiplicateurs sont donnés par :

$$\begin{cases} S_k^1 = \psi'_n(c) \\ S_k^2 = \phi'_n(d) \end{cases}$$

Ainsi, les cycles d'ordre pair d'une transformation symétrique découplée sont toujours soit des noeuds, soit des cols mais jamais des foyers.

D'une façon générale, tous les cycles d'une transformation symétrique découplée sont entièrement définis par ceux des récurrences du premier ordre :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \psi(x_n) \\ y_{n+1} = \phi(y_n) \end{cases}$$

En ce qui concerne les variétés invariantes, il faut savoir que :

**Propriété 1.6 :**

1. Si  $(a, b)$  est un point d'un cycle d'ordre  $k = (2n + 1)$  donné, alors on a :

- Si  $(x, y) \in (x = a)$  alors :  $T^{2n+1}(x, y) \in (y = b)$  ;
- Si  $(x, y) \in (y = b)$  alors :  $T^{2n+1}(x, y) \in (x = a)$ .

On en déduit que les droites  $x = a$  et  $y = b$  sont des variétés invariantes d'ordre  $k = 2n + 1$  et de dimension 1.

2. Si  $(c, d)$  est un point d'un cycle d'ordre  $k = (2n)$  donné, alors on a :

- Si  $(x, y) \in (x = c)$  alors :  $T^{2n}(x, y) \in (x = c)$  ;
- Si  $(x, y) \in (y = d)$  alors :  $T^{2n}(x, y) \in (y = d)$  .

Ainsi, chacune des droites  $x = c$  et  $y = d$  est une variété invariante unidimensionnelle d'ordre  $k = 2n$ .

# Chapitre 2

## Etude de la dynamique complexe d'une transformation polynomiale cubique

### 2.1 Introduction

**D**ans le chapitre précédent nous avons présenté les notions fondamentales et les outils nécessaires à la compréhension et à l'étude de transformations ponctuelles pouvant produire du chaos.

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'étude d'une transformation non linéaire non inversible, de dimension deux :

$$T[X \rightarrow F(X, \Lambda)] \text{ où } X = (x, y) \in IR^2, F = (f, g) \text{ et } \Lambda = (\lambda_1; \lambda_2, \lambda_3) \in IR^3,$$

où  $F$  est basé sur des fonctions polynomiales cubiques.

La première partie est consacrée d'abord à l'étude des singularités et leurs stabilités dans le plan de phases, ensuite nous considérons les courbes de bifurcation dans le plan paramétrique et les attracteurs et leur bassins d'attraction ainsi que la propriété de multistabilité

c'est à dire nous mettons en évidence la coexistence de plusieurs attracteurs (peut être des cycles ou bien un attracteur cyclique). Ces dernières informations sont très importantes car elles nous renseignent sur l'existence potentielle ou non de chaos en fonction des paramètres du système. La deuxième partie de ce chapitre portera sur le tracé des lignes critiques et les attracteurs, le but étant d'étudier les bifurcations de bassins d'attraction. Nous terminons ce chapitre par une généralisation des endomorphismes bidimensionnels de degré supérieur à trois

## 2.2 Description de la récurrence

Considérons la récurrence cubique  $T$  définie par :

$$T(x_n, y_n) \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = ax_n + y_n \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) = cx_n^3 + x_n^2 + b \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $a, b, c$  sont des paramètres réels et  $c < 0$ .

Mira et al [38] ont prouvé que de ce type de récurrences dans le cas  $c = 0$ , une dynamique complexe apparait et elle est caractérisée par la multistabilité.

### 2.2.1 Les points fixes

Pour chercher les points fixes de notre récurrence on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x = ax + y \\ y = cx^3 + x^2 + b. \end{cases} \quad (2.2)$$

Il faut résoudre l'équation cubique suivante :

$$cx^3 + x^2 + b - (1 - a)x = 0. \quad (2.3)$$

Le discriminant de l'équation (2.3) est donné par :

$$\Delta = -27c^2b^2 - 18cb + 18cba + 1 - 2a + a^2 - 4b - 12ca + 12ca^2 - 4ca^3 + 4c. \quad (2.4)$$

Alors  $T$  admet trois points fixes appartenant à la droite  $y = (1 - a)x$ , si  $\Delta < 0$ , et si  $\Delta = 0$ ,  $T$  admet deux points fixes, et si  $\Delta > 0$ ,  $T$  admet un point fixe.

## 2.2.2 Stabilité

Etudions maintenant la stabilité des points fixes.

Soit  $X(x, y)$  un point du plan de phase. Notons  $J(X)$  la matrice Jacobienne de  $T$  au point  $X$  :

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X) & \frac{\partial f}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(X) & \frac{\partial g}{\partial y}(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 3cx^2 + 2x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Si  $X_0(x_0, y_0)$  est un point fixe, nous nous intéressons aux valeurs propres de la matrice  $J(X_0)$ .

**Proposition 2.1** *Si  $|a| > 2$ , les points fixes sont toujours instables  $\forall c, b \in \mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Les multiplicateurs (valeurs propres) sont donnés par :

$$S_i = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 12cx^2 + 8x}}{2} \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

Dans le cas  $S_i \in \mathbb{R}$  c'est à dire :  $a^2 + 12cx^2 + 8x > 0$  on a :

$$a > 2 \implies \frac{a}{2} > 1 \implies S_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 12cx^2 + 8x}}{2} > 1, \text{ Alors le point fixe est instable.}$$

$$a < -2 \implies \frac{a}{2} < -1 \implies S_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 12cx^2 + 8x}}{2} < -1, \text{ dans ce cas là aussi le point fixe est instable.}$$

Dans le cas  $S_i \in \mathbb{C}$  c'est à dire  $a^2 + 12cx^2 + 8x < 0$ , on a :

$$1. -12cx^2 - 8x > a^2 \implies \frac{1}{2}\sqrt{-12cx^2 - 8x} > \frac{|a|}{2} > 1.$$

$$2. \rho = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{-12cx^2 - 8x - a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-12cx^2 - 8x}.$$

D'après 1 et 2 on a :  $\rho > 1$ . Alors le point fixe est instable. ■

## 2.3 Etude du plan des paramètres

Dans ce paragraphe nous étudions l'évolution de la structure des bassins à travers les bifurcations dans le plan des paramètres  $(a, b)$  en variant le troisième paramètre " $c$ ".

### 2.3.1 Simulation du plan des paramètres

Avant l'étude des bifurcations, une simulation numérique a été effectuée dans le plan des paramètres  $(a, b)$  pour  $c = -0.1$ . Elles permettent de mettre en évidence les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe au moins un attracteur (point fixe, cycle d'ordre  $k$ , attracteur étrange,...) à distance finie. A l'aide de ces simulations, on établit les structures de bifurcation (ou diagramme de bifurcation) du plan paramétrique (voir figure (2.1)).

Sur cette figure, une distinction est faite entre les attracteurs de type cycles attractifs d'ordre 1 à 14. A chaque cycle d'ordre  $k$  est associée une couleur. Par exemple, les zones bleues représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif; les zones vertes représentent les zones d'existence d'un cycle d'ordre 2 et ainsi de suite pour les cycles jusqu'à l'ordre  $k = 14$ . Les zones noires correspondent aux valeurs de  $(a, b)$  pour lesquelles il existe des suites itérées bornées (cycles d'ordre  $k$  ( $k \geq 15$ ), attracteur étrange, courbe invariante fermée). C'est dans ces zones que peuvent être observés les phénomènes chaotiques. Les zones blanches correspondent aux valeurs de paramètres pour lesquelles la suite de points  $((x_n), (y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge (la non existence d'attracteurs à distance finie pour les différentes conditions initiales testées).

Ce diagramme de bifurcation permet de mettre en évidence certaines courbes de bifurcation. En effet, par exemple, le segment de courbe qui sépare une zone de couleur bleue (existence d'un point fixe attractif) d'une zone de couleur verte (existence d'un cycle

d'ordre 2 attractif) est une courbe de bifurcation flip. Le segment qui sépare une zone de couleur bleue d'une zone de couleur noire (existence d'une solution attractive bornée) est une courbe de bifurcation de type Neimark-Hopf. . Enfin, le segment de courbe qui sépare une zone de couleur rouge (existence d'un cycle attractif d'ordre 4) d'une zone noire (absence d'un cycle attractif d'ordre 4) représente un segment de la courbe de bifurcation de type fold.

Cette représentation du plan paramétrique  $(a, b)$  ne suffit pas à établir la structure de bifurcation mais elle est très utile pour l'initialisation des programmes de tracés des courbes de bifurcation.

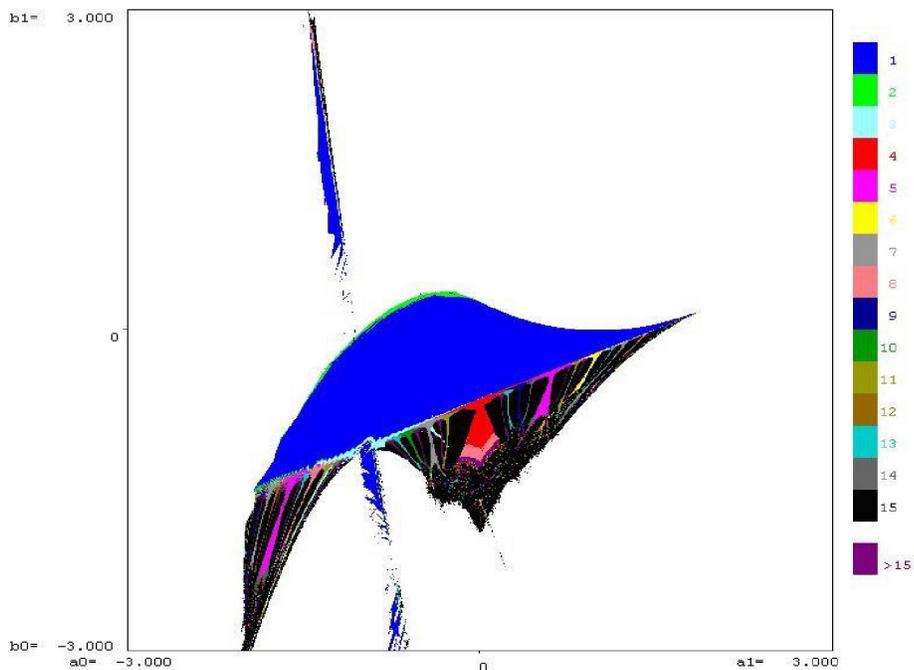


FIG. 2.1 – Domaine d'existence et de stabilité des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(a, b)$ .

### 2.3.2 Courbes de Bifurcation

Le système d'équations donnant les courbes de bifurcation (fold et flip) d'un cycle d'ordre  $k$  de  $T$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^k(x; y, a, b, c) - x = 0, \\ g^k(x; y, a, b, c) - y = 0, \\ G \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f^k}{\partial x} - S & \frac{\partial f^k}{\partial y} \\ \frac{\partial g^k}{\partial x} & \frac{\partial g^k}{\partial y} - S \end{bmatrix} = 0, \\ S = \pm 1. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Pour le système (2.1), le système d'équations qui permet de construire les courbes de bifurcation (fold et flip) d'un point fixe est :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a - 1)x + y = 0, \\ cx^3 + x^2 + b - y = 0, \\ -S^2 + aS + 3cx^2 + 2x = 0, \\ S = \pm 1. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

L'équation d'une courbe fold d'ordre 1 ( $S = +1$ , notée  $\Lambda_{(1)_0}^1$ ) est donnée par :

$$-27c^3b^2 + 18c^2ba - 18c^2b + ca^2 - 2ca + c - 4cb + 12c^2a^2 - 12c^2a + 4c^2 - 4c^2a^3 = 0. \quad (2.9)$$

L'équation d'une courbe flip d'ordre 1 ( $S = -1$ , notée  $\Lambda_1^1$ ) est donnée par :

$$-27c^3b^2 + 18c^2ba - 18c^2b - 3ca^2 - 2ca + c - 4cb - 12c^2a + 4c^2 + 16c^2a^3 = 0. \quad (2.10)$$

La figure (2.2) représente les courbes de bifurcation d'un point fixe de la transformation  $T$  : fold  $\Lambda_{(1)_0}^1$  et flip  $\Lambda_1^1$  avec le troisième paramètre fixé  $c = -0.1$ .

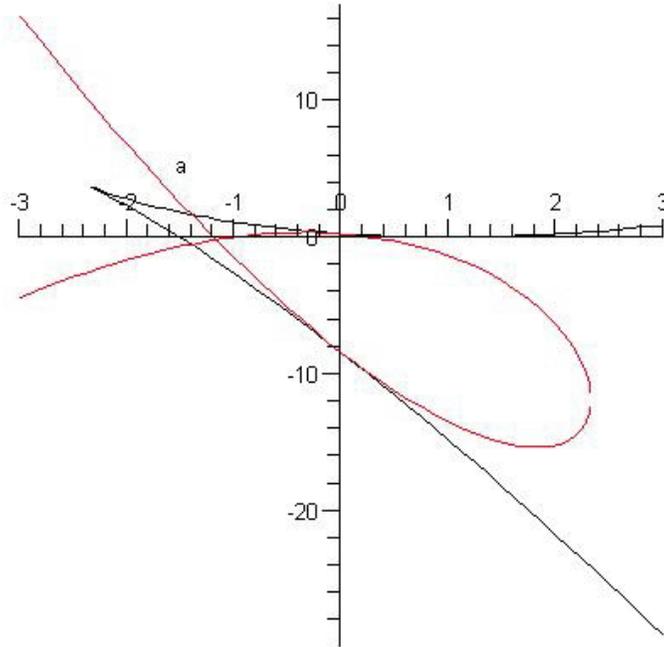


FIG. 2.2 – La courbe fold (en noir) et la courbe flip (rouge) pour  $k = 1$

Afin de caractériser certaines régions du plan des paramètres, il est intéressant de déterminer les points cuspidaux qui nous renseignent sur la configuration des courbes de bifurcations et par ce fait comment communiquent les attracteurs entre eux.

Il est bien connu suite aux travaux de Carcassès [9] qu'un point cuspidal est une singularité paramétrique vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^k(x; y, a, b, c) - x = 0, \\ g^k(x; y, a, b, c) - y = 0, \\ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g^k}{\partial x} & \frac{\partial g^k}{\partial y} \\ \frac{\partial J^k}{\partial x} - \frac{\partial N^k}{\partial x} & \frac{\partial J^k}{\partial y} - \frac{\partial N^k}{\partial y} \end{bmatrix} = 0, \\ S = +1, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où  $J^k$  est le déterminant de la matrice Jacobienne de  $T^k$  et  $N^k$  est sa trace.

Pour la récurrence  $T(k=1)$ , les points cuspidaux sont donc les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0, \\ cx^3 + x^2 + b - y = 0, \\ 6cx + 2 = 0, \\ a - 3cx^2 - 2x = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Alors nous avons un seul point cusp  $C_1$  qui a pour coordonnées :

$$x = -\frac{1}{3c}; a = \frac{1}{3c} + 1; y = \frac{1}{9c^2}; b = \frac{1}{27c^2}. \quad (2.13)$$

La courbe de bifurcation flip  $\Lambda_1^1$  présente deux points de tangence avec la courbe fold  $\Lambda_{(1)_0}^1$ , ces deux points sont des nœuds paramétriques d'ordre 1 notés par  $N_1^1$  et  $N_1^2$  (pour plus de détails voir [9]).

Les coordonnées des nœuds paramétriques d'ordre 1 sont :

$$N_1^i \begin{cases} c \geq -\frac{1}{3}; \\ a = 0; \\ y_i = x_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3c}}{3c}; \\ b_i = -(cx_i^3 + x_i^2 - x_i). \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (2.14)$$

Si nous considérons maintenant les cycles d'ordre 2 de  $T$ , c'est à dire :

$$\begin{cases} x_{n+2} = a(ax_n + y_n) + cx_n^3 + x_n^2 + b \\ y_{n+2} = c(ax_n + y_n)^3 + (ax_n + y_n)^2 + b \end{cases} \quad (2.15)$$

Le système d'équations donnant les courbes de bifurcation d'un cycle d'ordre deux est :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(ax + y) + b + x^2 + cx^3 - x = 0 \\ b + (ax + y)^2 + c(ax + y)^3 - y = 0 \\ (a^2 + 2x + 3cx^2 - S)(2(ax + y) + 3c(ax + y)^2 - S) - a^2(2(ax + y) + 3c(ax + y)^2) = 0 \\ S = \pm 1. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Comme il est difficile de résoudre un tel système analytiquement, nous avons construit les courbes de bifurcations par des méthodes numériques.

Nous avons tracé les courbes de bifurcation des cycles d'ordre  $k$  ( $k = 1, 2$ ) de la récurrence  $T$  dans le plan des paramètres  $(a, b)$ .

La courbe fold d'ordre 2 présente un point cusp  $C_2$ , entouré d'une boucle fermée par la courbe de bifurcation flip  $\Lambda_1^1$ , dont les coordonnées de ce point sont données par :

$$C_2 \left\{ \begin{array}{l} c > -\frac{1}{3}, a = -\frac{1+3c}{6c} \neq 0, b = \frac{7+27c}{54c^2} \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{3(1+3c)}{2}}}{3c} \\ y_i = -\frac{1}{a} [cx_i^3 + x_i^2 + (a-1)x_i + b], \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \\ x = y = 1 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

D'une autre part, nous voyons apparaître deux cols paramétriques d'ordre 2 notés par  $P_2^1$  et  $P_2^2$ , dont les coordonnées sont données par :

$$P_2^1 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1 - 18c - 99c^2 + \sqrt{(1+9c^2)(1+18c+117c^2)}}{9c(9c-1)} \neq 0. \\ b_1 = -\frac{4 + 2a_1 + 18c - 9a_1c - 9a_1^2c}{27c^2(a_1+2)}. \\ x_i = \frac{-1 \pm \sqrt{3(1+3c(1+a_1))}}{3c}, \quad i = 1, 2. \\ y_i = -\frac{1}{a_1} [cx_i^3 + x_i^2 + (a_1^2 - 1)x + b_1] \quad , \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0. \\ b = \frac{1}{3}. \\ c = -\frac{1}{3}. \\ x = y = 1. \end{array} \right.$$

et

$$P_2^2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1 - 18c - 99c^2 - \sqrt{(1 + 9c^2)(1 + 18c + 117c^2)}}{9c(9c - 1)} \neq 0. \\ b_1 = -\frac{4 + 2a_2 + 18c - 9a_2c - 9a_2^2c}{27c^2(a_2 + 2)}. \\ x_i = \frac{-1 \pm \sqrt{3(1 + 3c(1 + a_2))}}{3c}, \quad i = 1, 2. \\ y_i = -\frac{1}{a_2} [cx_i^3 + x_i^2 + (a_2^2 - 1)x + b_2], \quad . \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = 0. \\ b = -\frac{2}{3}. \\ c = -\frac{1}{6}. \\ x = -2 \left( -1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \right). \\ y = 2 \pm \sqrt{6}. \end{array} \right.$$

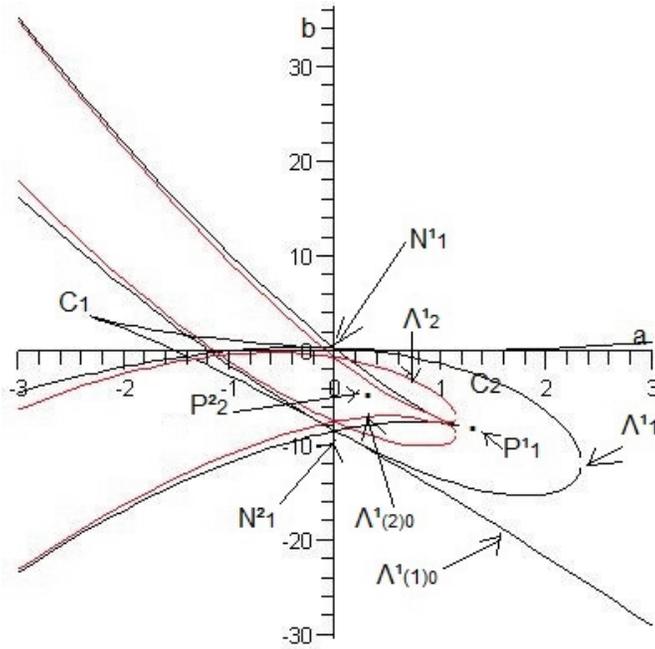


FIG. 2.3 – Les courbes fold (noir) et flip (rouge) pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .

La figure (2.3) représente le tracé des courbes de bifurcation flip (ou doublement de période)  $\Lambda_1^1$ ,  $\Lambda_2^1$  et fold (ou nœud-col)  $\Lambda_{(1)0}^1$ ,  $\Lambda_{(2)0}^1$ , les points cuspidaux  $C_1$  et  $C_2$  associés aux cycles d'ordre 1 et 2, ainsi que les nœuds paramétriques  $N_1^1$  et  $N_1^2$  d'ordre 1, et les cols paramétriques  $P_2^1$  et  $P_2^2$  d'ordre 2. Ce tracé donne la configuration qui est une structure de bifurcation bien particulière où les courbes communiquent via les points paramétriques.

### 2.3.3 L'influence du paramètre $c$ sur le plan paramétrique

Nous proposons d'étudier les variations que subit le plan paramétrique par la variation du paramètre  $c$  pour la transformation (2.1).

Nous avons les situations suivantes :

Pour  $c = -0.1$ , les six singularités paramétriques existantes sont toutes différentes et illustrées sur la figure (2.3). En faisant varier le paramètre  $c$ , dans le sens décroissant la taille de la boucle formée par la courbe flip devient petite jusqu'à ce qu'elle disparaisse pour  $c = -\frac{1}{3}$  et les points  $C_1, C_2, P_2^1, N_1^1$  et  $N_1^2$  sont confondus en un même point d'intersection des courbes  $\Lambda_1^1 \cap \Lambda_{(1)_0}^1 \cap \Lambda_{(2)_0}^1$  dont les coordonnées sont données par :  $(x = y = 1)$  pour  $a = 0$ ;  $b = \frac{1}{3}$ ;  $c = -\frac{1}{3}$  (voir figure (2.4)).

Le mécanisme de transition pour  $c \rightarrow -\frac{1}{3}$  est expliqué par le scénario suivant : le point cusp  $C_1$  devient un point de contact entre les deux courbes de bifurcation  $\Lambda_1^1$  et  $\Lambda_{(1)_0}^1$  ceci est dû à la fusion entre  $C_1, N_1^1$  et  $N_1^2$  (en effet le nœud paramétrique est un point de tangence entre les deux courbes de bifurcation du même ordre flip et fold). Ce point correspond à une bifurcation de codimension 2.

Ainsi que si le paramètre  $c \rightarrow -\frac{1}{3}$ , le multiplicateur réduit  $\sigma$  associé au point  $P_2^1$  tend vers  $\sigma = 1$  et ceci indique l'existence d'un point de contact entre 2 lignes de contour  $\sigma = 1$  d'ordre 2. D'un autre côté la coïncidence entre  $P_2^1$  et  $C_2$  indique que le contact sera au point  $C_2$  et c'est la situation limite.

## 2.4 Etude du plan des phases

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude du plan de phases  $(x_n, y_n)$  de la récurrence  $T$  pour différentes valeurs du vecteur paramètre  $(a, b, c)$ . D'abord nous rappelons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phases d'une transformation ponctuelle non-inversible de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  pour des valeurs fixées et nous donnons les conditions suffisantes et nécessaires pour définir les bassins connexes, multiplement connexes

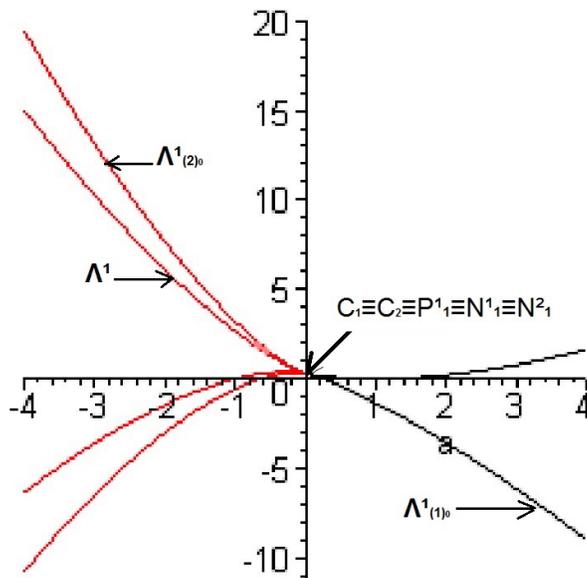


FIG. 2.4 – La coïncidence des singularités paramétriques

et non connexes, ensuite nous étudions les lignes critiques qui délimitent les attracteurs chaotiques. Enfin, nous étudions les bassins d'attractions et leur évolution.

### 2.4.1 Généralités sur les transformations de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$

Les transformations non inversibles sont identifiées par un symbolisme basé sur la configuration des régions  $Z_k$  de l'espace d'état, chaque zone  $Z_k$  correspond à l'ensemble des points du plan de phase qui possèdent  $k$  antécédents de rang un par  $T$ , ceci est dû aux lignes critiques. La notation  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  signifie que le plan de phase est divisé en trois régions ouvertes séparées par une ligne critique  $LC$  constituée de deux branches sans intersection généralement entre deux lignes droites. Dans la zone  $Z_3$ , chaque point possède trois antécédents de rang un, encadré par deux zones  $Z_1$  dont les points ont seulement un antécédent de rang un. Ce type de transformation est caractérisé par  $LC_{-1} \subset T^{-1}(LC)$  où  $T^{-1}(LC) = LC_{-1} \cup LC_{-1}^e$  tel que la courbe  $LC_{-1}^e$  appelée souvent extra inverse est constituée par l'ensemble des antécédents de rang un des points de  $LC$  pour lesquels le

Jacobien  $J(X)$  ne s'annule pas.

Dans la figure (2.5), soit  $W$  un ensemble connexe situé entre la zone  $Z_1$  (un unique antécédent) et la zone  $Z_3$  (trois antécédents) entrecoupé par une seule branche de  $LC$ . Sur le plan replié ou feuilleté, on obtient un ensemble  $W''$  sur un feuillet associé à l'une des déterminations de la récurrence inverse, tandis que la portion de  $W$  située dans la zone  $Z_3$  donne l'ensemble  $W'$  situé sur les deux autres feuillets associés aux deux autres déterminations restantes et qui se raccordent le long de la ligne de pliage des deux feuillets. Alors  $T^{-1}(W)$  est constitué de deux composantes non connexes :  $W'_{-1}$  en traversant  $LC_{-1}$  c'est le lieu de fusion des antécédents des points de  $LC$ , et  $W''_{-1}$  en traversant  $LC^e_{-1}$  qui est le troisième antécédent de  $LC$  ( $T^{-1}(LC) = LC_{-1} \cup LC^e_{-1}$ ).

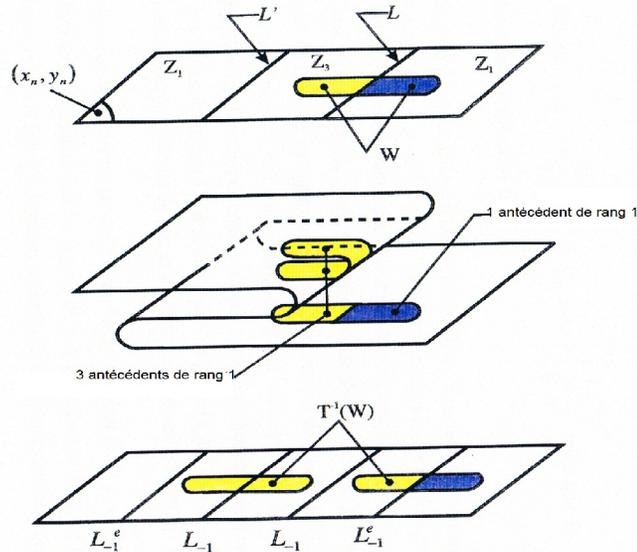


FIG. 2.5 – Cas particulier d'une transformation de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$

En appliquant l'étude précédente au domaine d'attraction immédiat  $\mathcal{D}_0$  d'un ensemble attractif  $A$ , et sous l'hypothèse que  $\mathcal{D}_0$  est coupé par une seule branche de  $LC$ , nous obtenons les mêmes résultats concernant les transformations de type  $Z_0 - Z_2$  [23], [38] :

**Proposition 2.2** Soient  $T$  une transformation de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  et  $\mathcal{D}$  le bassin total et  $\mathcal{D}_0$  le bassin immédiat d'un ensemble attractif  $A$  tel que  $\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ , alors :

a)  $\mathcal{D}$  est connexe  $\Leftrightarrow \mathcal{D}_0 \cap \overline{Z_3}$  est connexe  $\Leftrightarrow T(\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1}) = \mathcal{D}_0 \cap LC$ .

b)  $\mathcal{D}$  est non connexe  $\Leftrightarrow \mathcal{D}_0 \cap \overline{Z_3}$  est non connexe  $\Leftrightarrow T(\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1}) \subset \mathcal{D}_0 \cap LC$ .

**Proposition 2.3** Soient  $T$  une transformation de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  et  $\mathcal{D}$  le bassin total et  $\mathcal{D}_0$  le bassin immédiat d'un ensemble attractif  $A$  tel que  $\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$  et  $\mathcal{D}_0 \cap \overline{Z_3}$  est connexe alors :

a)  $T^{-1}(\mathcal{D}_0^*) = \mathcal{D}_0^* \Leftrightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}_0$  est simplement connexe  $\Leftrightarrow T(\mathcal{D}_0^* \cap LC_{-1}) = \mathcal{D}_0^* \cap LC$ .

b)  $T^{-1}(\mathcal{D}_0^*) \subset \mathcal{D}_0^* \Leftrightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}_0$  est multiplement connexe  $\Leftrightarrow T(\mathcal{D}_0^* \cap LC_{-1}) \supset \mathcal{D}_0^* \cap LC$ .

$\mathcal{D}_0^*$  appelé "bassin immédiat apparent" c'est le domaine simplement connexe obtenu en retirant les trous de  $\mathcal{D}_0$ .

## 2.4.2 Les lignes critiques

Considérons la transformation ponctuelle (2.1). Cette récurrence admet trois déterminations inverses, qui sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = x' - ax \\ cx^3 + x^2 + b - y' = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

dans le cas où le discriminant

$$\Delta = \frac{1}{108} \left[ \frac{(b - y')(4 + 27c^2b - 27c^2y')}{c^4} \right] \quad (2.19)$$

de l'équation cubique dans (2.18) est strictement négatif. Lorsque le discriminant est strictement positif,  $T$  a une seule détermination inverse. Par conséquent,  $T$  est une récurrence non inversible de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$ .

Le tracé des courbes critiques passe par le calcul de  $LC_{-1}$  et  $LC$ .

L'équation de la ligne critique  $LC_{-1}$  de  $T$  est donnée par :

$$|J(X)| = \det(J(X)) = 0,$$

où  $J(X)$  est la Jacobienne de  $T$

$$|J(X)| = \det \begin{bmatrix} a & 1 \\ 3cx^2 + 2x & 0 \end{bmatrix} = -3cx^2 - 2x = 0 \quad (2.20)$$

On obtient deux branches de  $LC_{-1}$  (deux droites parallèles) dont l'équation est donnée par :

$$LC_{-1} : x = 0 \quad \text{et} \quad LC'_{-1} : x = -\frac{2}{3c}. \quad (2.21)$$

L'équation de la courbe critique  $LC$  est donnée par :  $LC = T(LC_{-1})$ .

Nous obtenons deux branches :

$$LC : y = b \quad \text{et} \quad LC' : y = b + \frac{4}{27c^2}. \quad (2.22)$$

La figure (2.6) représente les zones  $Z_i$  ( $i = 1, 3$ );  $LC$  possède deux branches qui séparent le plan en trois régions  $Z_1, Z_3, Z_1$  où il existe respectivement un antécédent, trois antécédents, un antécédent pour chaque point de la zone.

Un attracteur chaotique existe dans le plan de phases, délimité par des arcs de lignes critiques, pour  $a = 0.3$ ,  $b = -1.3025$ ,  $c = -0.1$ , (condition initiale  $x_0 = 0, y_0 = 2$ ). Les exposants de Lyapunov de l'attracteur chaotique notés  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ), ont été calculés ( $\lambda_1 = 0.239144, \lambda_2 = 0.116978$ ) pour les paramètres correspondant à la figure (2.7).

Puisque les exposants sont positifs, nous pouvons considérer l'attracteur comme chaotique.

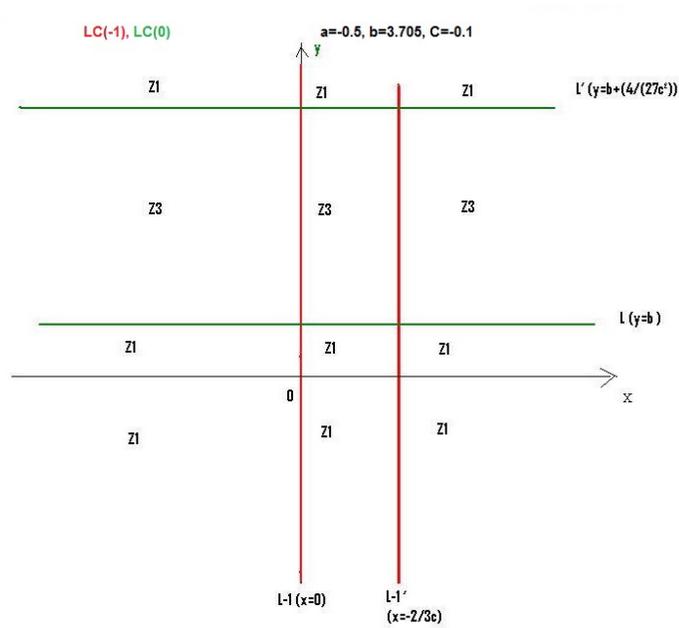


FIG. 2.6 – Plan de phases de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$ .

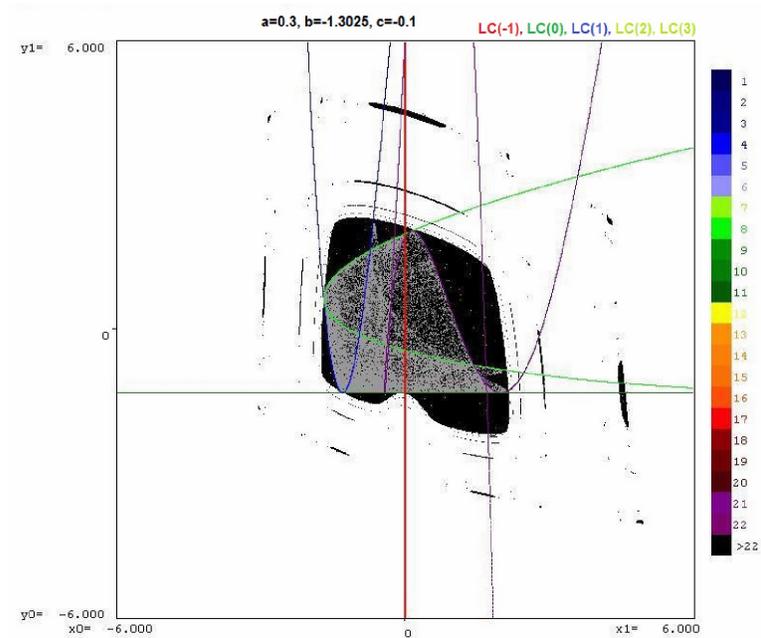


FIG. 2.7 – Attracteur chaotique délimité par des arcs de lignes critiques.

### 2.4.3 Bifurcations du bassin d'attraction

Dans ce paragraphe, nous étudions l'évolution des bassins d'attraction de différents attracteurs sous l'influence de la variation du vecteur paramètre  $\Lambda = (a, b, c)^T$  de la transformation  $T$  via les propriétés fondamentales de la frontière du bassin d'attraction.

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des transformations du type  $(Z_0 - Z_2)$ .

**Proposition 2.4** *Soit  $T$  un endomorphisme de type  $(Z_0 - Z_2)$  dépendant d'un vecteur paramètre  $\Lambda$ . Si le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{D} \cap LC$  change quand  $\Lambda$  change, alors le bassin d'attraction peut subir une bifurcation de bassin parmi les types de bifurcation suivants :*

- a) *Bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{D}_0 \cap LC$  change).*
- b) *Bassin simplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplément connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{D}_0 \cap LC$  change).*
- c) *Augmentation ou diminution du nombre d'îlots de  $\mathcal{D}$ , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.*
- d) *Augmentation ou diminution du nombre de lacs (trous) dans  $\mathcal{D}$ , ou nouvelle séquence de lacs.*
- e) *Transition lacs  $\longleftrightarrow$  baies.*
- f) *Transition frontière externe faiblement fractale  $\longleftrightarrow$  frontière externe fortement fractale.*

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction  $\mathcal{F}$  et la ligne critique  $LC$ .

Pour les transformations de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$ , et sous l'hypothèse que les composantes de  $\mathcal{D}_0 \cap LC'$  change, nous obtenons les mêmes bifurcations sur les bassins d'attraction

Pour certaines valeurs de  $a, b, c$  notre récurrence  $T$  a plusieurs attracteurs.

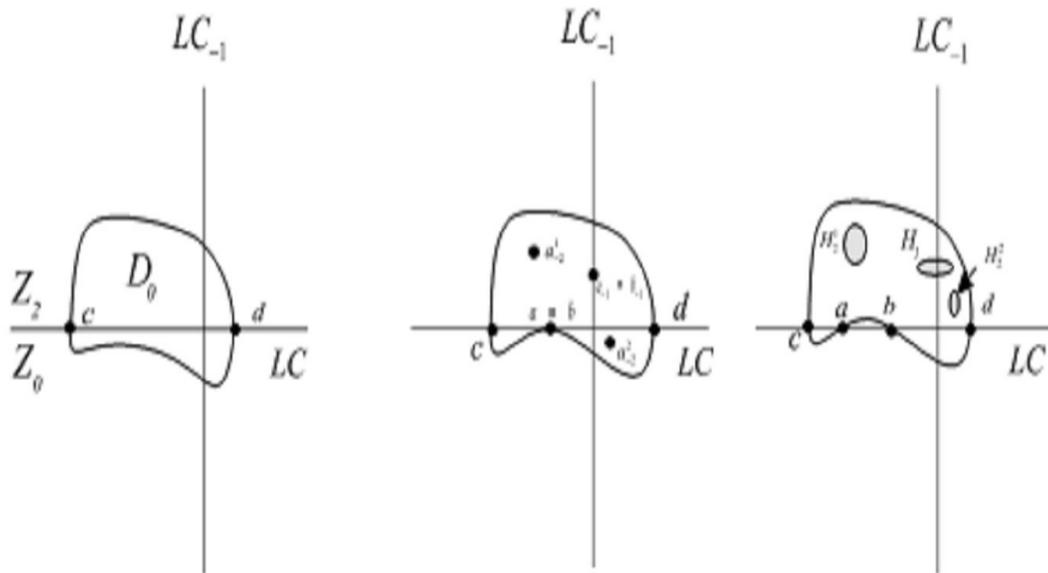


FIG. 2.8 – Bassin simplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplement connexe.

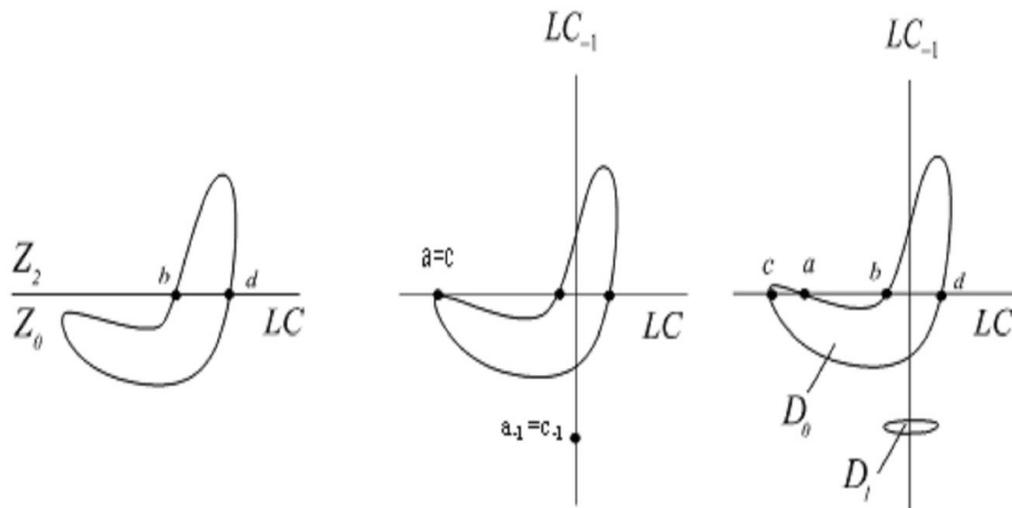


FIG. 2.9 – Bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe.

**Bifurcation : bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe.**

Cette bifurcation a lieu lorsque le nombre de composants connexes de  $\mathcal{D}_0 \cap LC$  change (  $\mathcal{D}_0$  désigne le bassin immédiat de l'attracteur considéré ), où encore lorsqu'il y a une modification du nombre de lacs dans le bassin total  $\mathcal{D}$ . En fait, elle correspond au contact entre la frontière  $\mathcal{F}$  du bassin  $\mathcal{D}$  et la ligne critique  $LC$ .

Pour les valeurs  $b = 0,2, c = -0,1$ , et  $a$  variant dans le sens décroissant sur l'intervalle  $[-0.7, -0.67]$ , l'application  $T$  a trois points fixes. Le point fixe  $P_1$  est un foyer stable, le point fixe  $P_2$  est un col et le point fixe  $P_3$  est toujours un nœud instable. L'application  $T$  a aussi un cycle d'ordre deux  $(Q_1, Q_2)$  qui est de type col pour  $a > \tilde{a} = -0.674$  et de type nœud instable pour  $a < \tilde{a}$ .

Intéressons-nous aux changements dans la structure géométrique du bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  du point fixe  $P_1$ , lorsque le paramètre  $a$  varie dans le sens décroissant.

1- Pour  $a = -0,67 > \tilde{a}$ , le bassin  $\mathcal{D}$  est simplement connexe (voir figure (2.10)) et sa frontière est constituée par les variétés stables issues des cycles cols  $(Q_1, Q_2)$ .

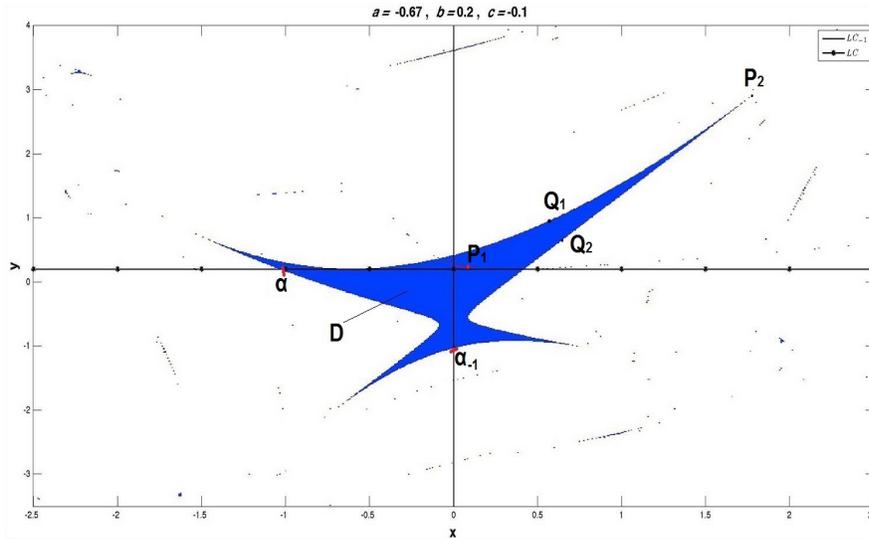


FIG. 2.10 – Bassin connexe.

2- Pour  $a = -0,674 = \tilde{a}$ , un contact tangentiel entre la frontière du bassin immédiat  $\partial\mathcal{D}_0$  et les lignes critiques  $LC$  au point  $\gamma \equiv \beta$  (voir figure (2.11)) donnant lieu à un contact

non transverse, mais aussi non tangentiel entre les frontières  $\partial\mathcal{D}_0$  et  $\partial\mathcal{D}_1$ .

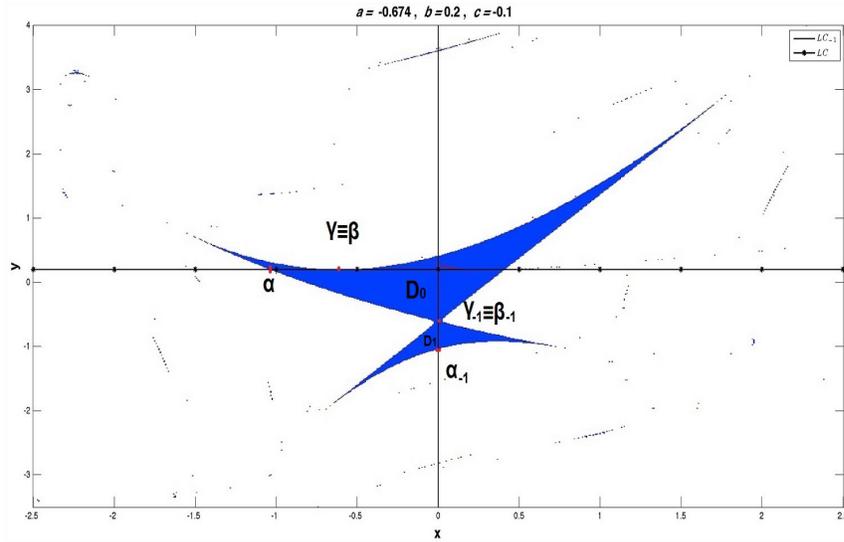


FIG. 2.11 – Contact entre la frontière du bassin immédiat et les lignes critiques.

3- Pour  $a = -0,7 < \tilde{a}$ , le bassin  $\mathcal{D}$  n'est plus connexe (voir figure (2.12)) et constitué d'un bassin immédiat  $\mathcal{D}_0$  et d'un îlot  $\mathcal{D}_1$  résultant de la bifurcation donnant un bassin non connexe et schématisée par la figure (2.9), où l'îlot  $\mathcal{D}_1 = T^{-1}(\mathcal{D}_0)$  se trouve dans la région  $Z_1$ .  $\tilde{a}$  est une valeur de bifurcation du type "bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe" illustrée par la proposition (2.2), et caractérisée par le contact entre la frontière du bassin immédiat et les lignes critiques. Les propriétés des applications inverses interviennent sur l'évolution de la structure des bassins et ses bifurcations.

### Frontière fractale du bassin d'attraction.

Pour les valeurs fixes  $a = -0.7$ ,  $c = -0.1$  et variant le paramètre  $b$  dans l'intervalle  $[-1, -0.8]$ , on a les situations suivantes :

1. Pour  $b = -0,8$ . Le plan de phases de la récurrence  $T$  est illustré sur la figure (2.13), il concerne la coexistence d'un point fixe de type foyer stable  $Q$  avec un cycle stable d'ordre trois de type foyer stable  $A = \bigcup_{i=1}^3 A_i$  avec un cycle col d'ordre 3 noté par

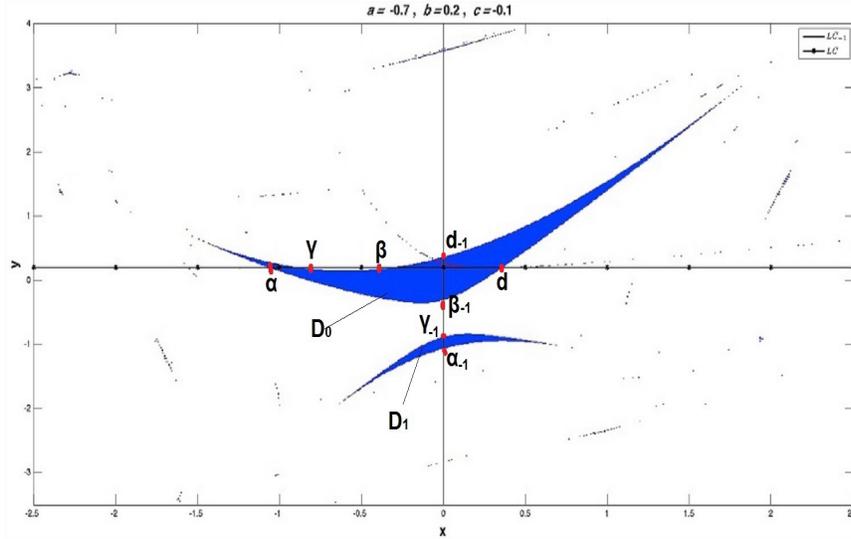


FIG. 2.12 – Bassin non connexe.

$S = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ . Le bassin du cycle d'ordre trois  $\mathcal{D}(A)$  et non connexe (formé de plusieurs composantes connexes). Les parties non connexes de ce bassin forment les lacs du bassin multiplement connexe du point fixe  $\mathcal{D}(Q)$  (voir la figure (2.13)). Le bassin global  $\mathcal{D}$  résultant est multiplement connexe. Le cycle 3 stable  $A$  a un bassin total  $\mathcal{D}(A)$  et un bassin immédiat  $\mathcal{D}_0(A)$ . La frontière de  $\mathcal{D}(A)$  est formée par l'ensemble stable  $W^s(S)$  du cycle col d'ordre 3. La non connexité résulte d'une série de bifurcation de type bassin connexe  $\rightarrow$  bassin non connexe

- 2.** Pour  $b = -0,87$ , le cycle foyer d'ordre 3 perd sa stabilité et donne naissance à trois courbes fermées invariantes attractives via une bifurcation de Hopf. La structure du bassin devient beaucoup plus complexe. Lorsque les courbes fermées invariantes  $\Gamma_i$  entrent en contact avec la ligne critique  $LC_{-1}$ , l'image des points d'intersections par la transformation sont des points de contact de  $\Gamma_i$  et  $LC$ . Cette bifurcation crée des oscillations le long de  $LC$ , et la complexité de  $\Gamma_i$  noté  $\tilde{\Gamma}_i$  croît, elle est caractérisée par une dimension de Lyapunov supérieure à 1 et les  $\tilde{\Gamma}_i$  évolués donnant un attracteur chaotique cyclique d'ordre trois. Le contact de l'attracteur cyclique et la frontière de son bassin génère une infinité d'ilots disjoints [37] (voir les figures (2.14), (2.15)).

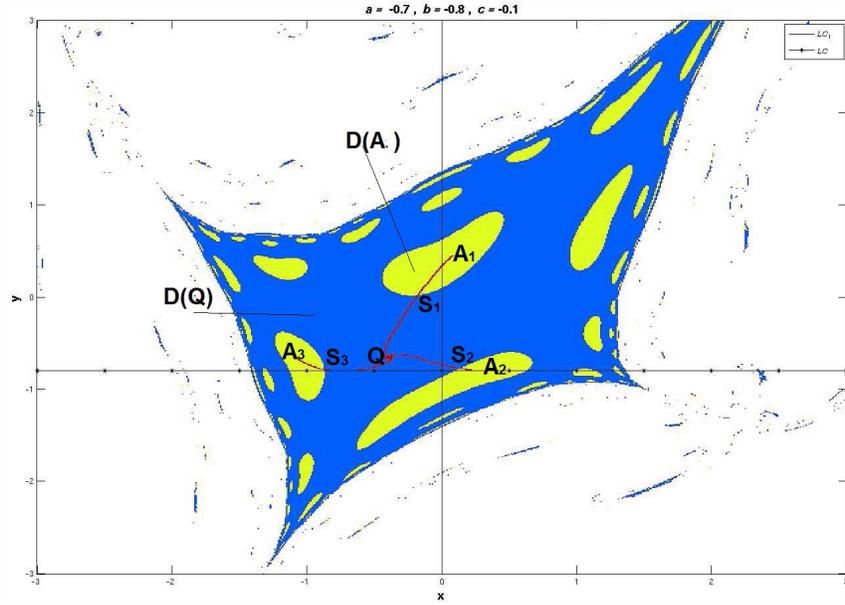


FIG. 2.13 – La coexistence de deux attracteurs.

3. Pour  $b = -0,95$  (figure (2.16)), un unique attracteur chaotique annulaire se manifeste comme une réunion des courbes fermées d'ordre trois. Son bassin immédiat  $\mathcal{D}_0$  est multiplement connexe, c'est à dire connexe avec des trous  $H_j^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ,  $i_k = 1, 2, 3$  et  $j = 1, 2, \dots$  puisque  $\mathcal{D}_0 \cap LC$  n'est plus connexe. Les  $H_j^{i_1, i_2, \dots}$  sont les antécédents de la baie  $H_0$  par les déterminations inverses  $T_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de l'endomorphisme  $T$ . La baie  $H_0$  est numériquement visible à partir de la valeur  $b = -0,95$ , c'est à dire qu'on a une valeur de bifurcation "simplement connexe  $\longleftrightarrow$  multiplement connexe".

4. Pour  $b = -1$ , les trous se rapprochent de la frontière externe du bassin (figure (2.17)). Ceci est lié au déplacement du cap  $\Delta$ , qui tend à ce situer entièrement dans la région  $Z_3$ . Autrement dit, la baie  $H_0$  tend à disparaître et  $\mathcal{D}_0 \cap LC$  à redevenir connexe, ainsi que les trous sont transformés en baies où la répétition de cette procédure provoque la transition vers la fractalisation du bassin.

**Bifurcation : Aire chaotique non connexe  $\longleftrightarrow$  Aire chaotique annulaire.**

Fixons les valeurs des paramètres  $c = -0.1$  et  $b = -1.303$ ; et faisons varier le paramètre  $a$ , dans le sens décroissant, nous obtenons les situations suivantes :

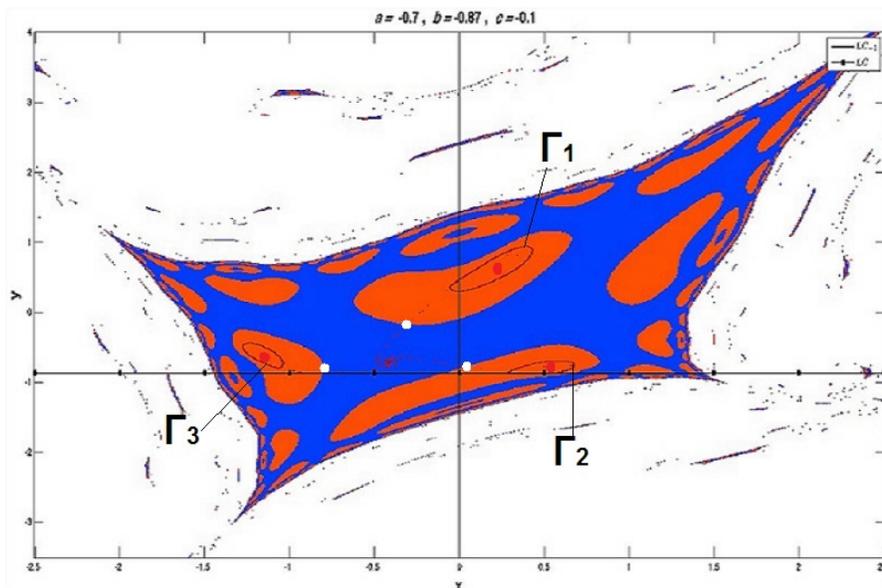


FIG. 2.14 – Contact entre les courbes fermées invariantes  $\Gamma_i$  et les lignes critiques.

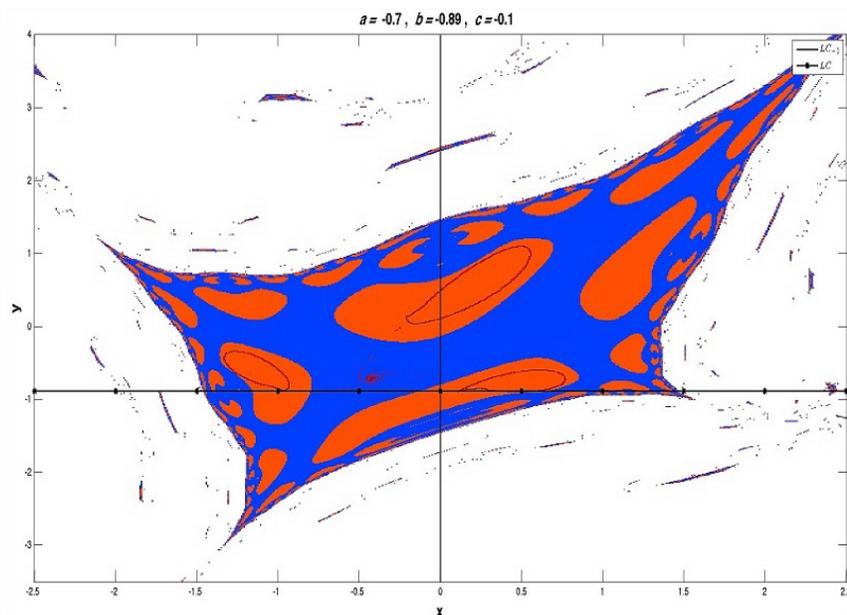


FIG. 2.15 – Création d'une infinité d'îlots.

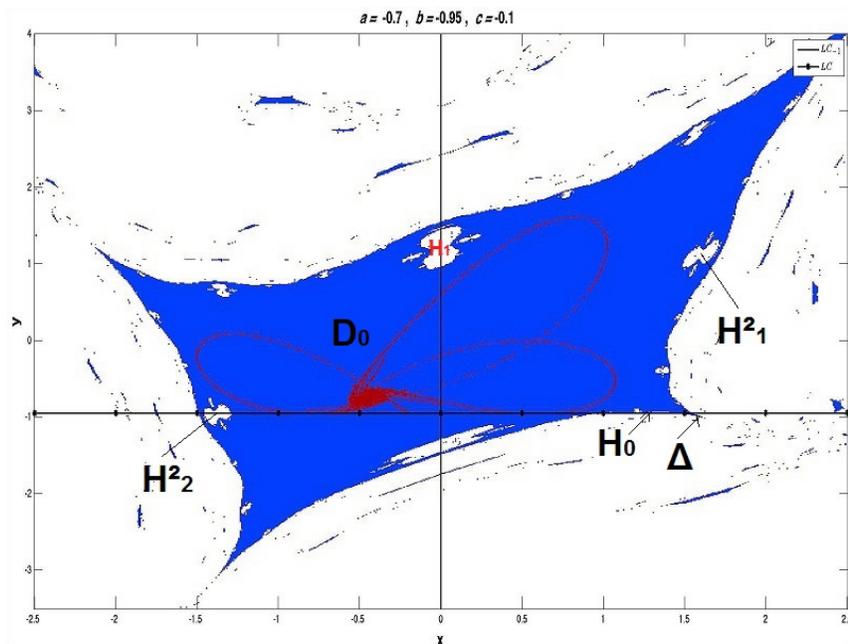


FIG. 2.16 – Bassin multiplement connexe.

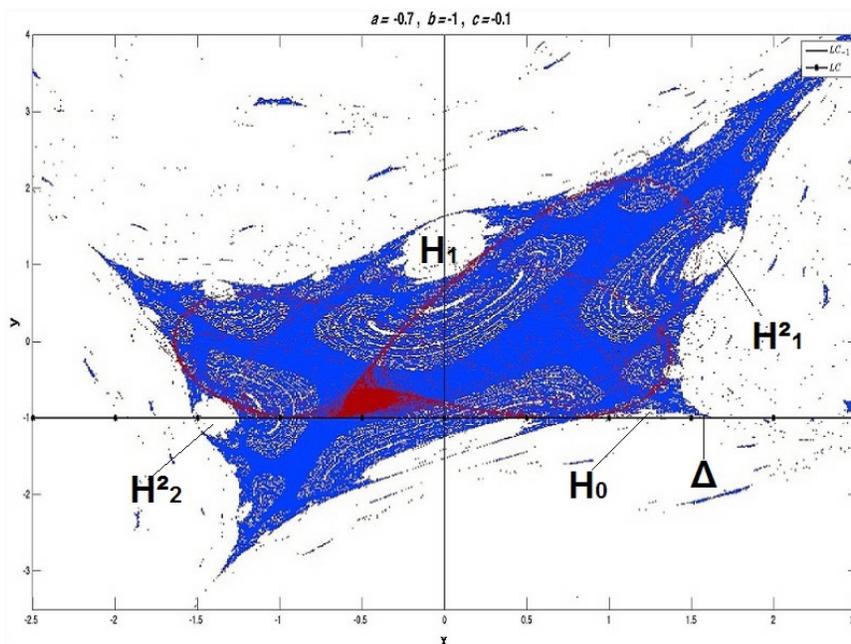


FIG. 2.17 – Fractalisation du bassin d'attraction.

1. Pour la valeur  $a = -0.205$ , l'attracteur est chaotique, cyclique d'ordre  $k = 4$  (de type Hénon),  $(d_i)_{i=1,4}$  son bassin d'attraction  $\mathcal{D}_0$  est simplement connexe de dimension de Lyapunov égale à 1.19409. Cet attracteur résulte d'une cascade de bifurcations flip d'ordre  $4 \cdot 2^i; i = 0, 1, 2, \dots$  et son bassin immédiat est simplement connexe, puisque  $\mathcal{D}_0 \cap LC$  est connexe (voir figure (2.18)).
2. Pour  $a = -0.291$ , l'aire chaotique devient annulaire (une seule composante). (voir figure 2.20).

Cette bifurcation de type " aire chaotique non connexe  $\longleftrightarrow$  aire chaotique annulaire" se produit entre les valeurs  $a = -0.205$  et  $a = -0.291$ .

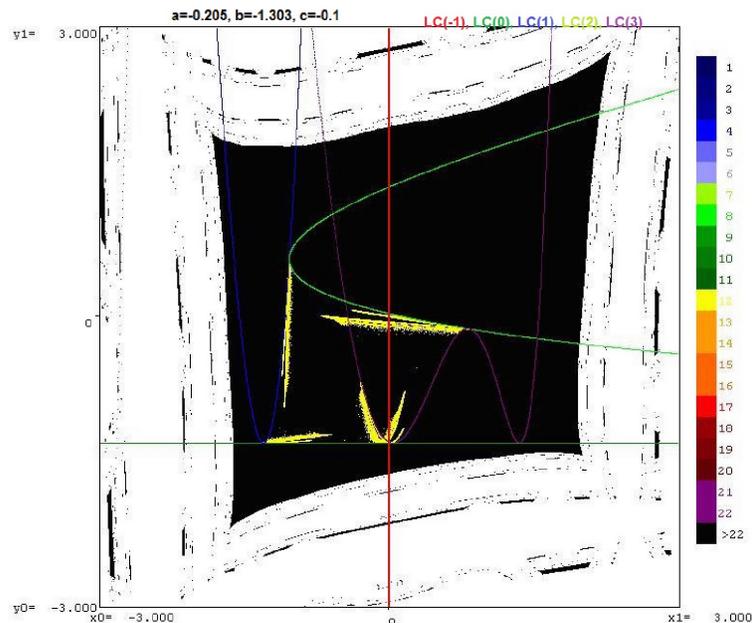


FIG. 2.18 – Attracteur cyclique d'ordre 4.

## 2.5 Etude de la récurrence d'ordre $n > 3$

Dans ce travail, nous avons analysé les conséquences de la présence des lignes critiques sur les variétés invariantes et les bassins d'attractions. Ces résultats ont été établis pour

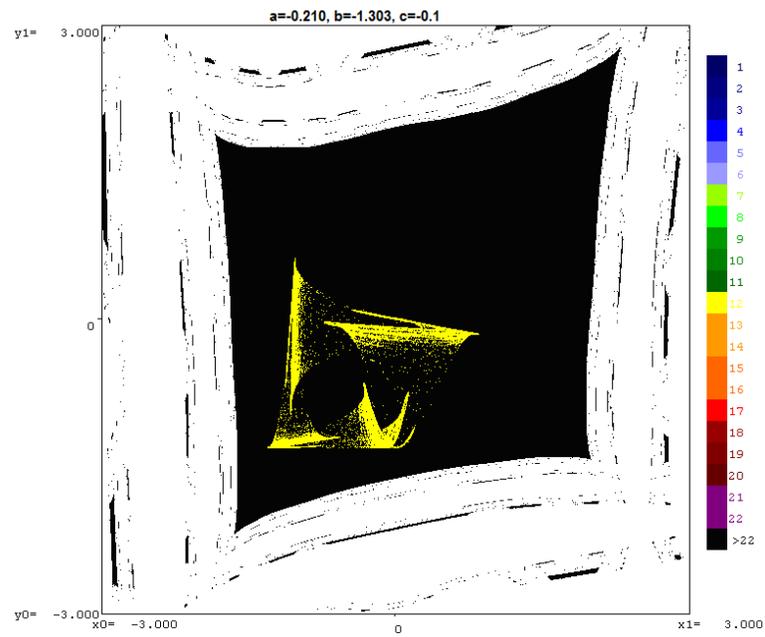


FIG. 2.19 – La naissance d'une région des points éternés rare.

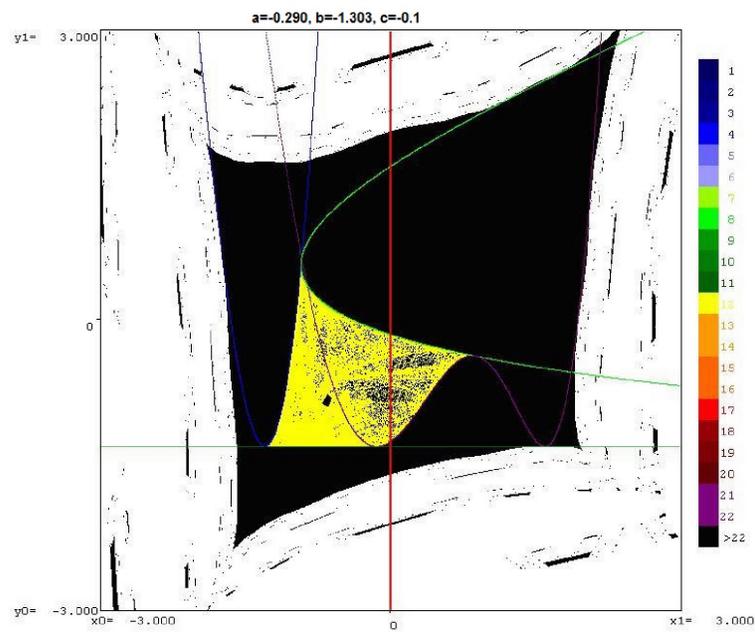


FIG. 2.20 – Attracteur chaotique annulaire.

des transformations non inversibles et polynomiales d'ordres 3, mais restent généraux et s'étendent à des transformations polynomiales de degré supérieur de type :

$$T_n \begin{cases} x' = ax + y \\ y' = p(x, c, d, b) = cx^n + dx^{n-1} + b \end{cases} \quad n \geq 3, \quad c, d \neq 0. \quad (2.23)$$

Pour chercher les points fixes de la transformation (2.23) il faut résoudre l'équation polynomiale d'ordre  $n$  suivante :

$$cx^n + dx^{n-1} - (1 - a)x + b = 0, \quad (2.24)$$

alors si  $n$  est impair  $T_n$  admet au moins un point fixe et si  $n$  est pair  $T_n$  peut ne pas avoir de points fixes.

### 2.5.1 Simulation du plan paramétrique

Nous avons établi les structures de bifurcation (diagrammes de bifurcation) du plan paramétrique  $(a, b)$  pour  $c$  et  $d$  fixés et dans le cas  $n = 4, 5, 6, 7$ .

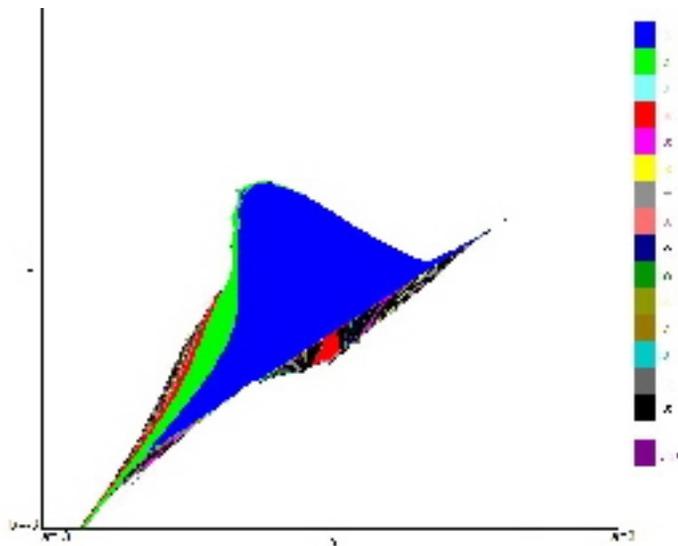


FIG. 2.21 – Diagrammes de bifurcation dans le cas  $n = 4, c = 3, b = 2$ .

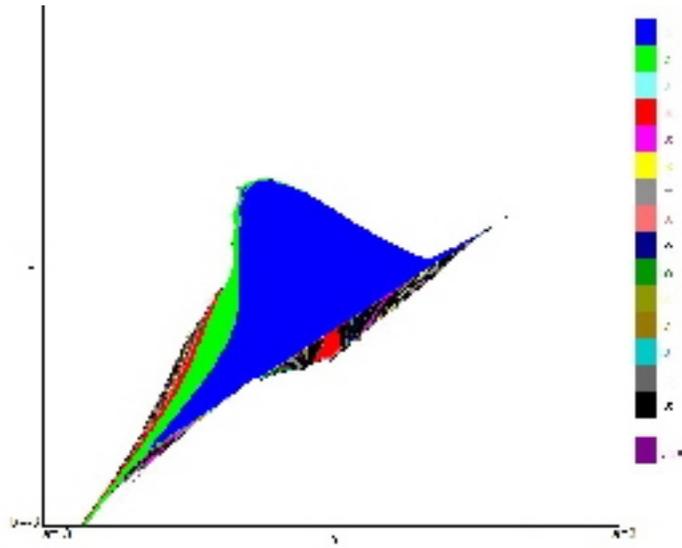


FIG. 2.22 – Diagrammes de bifurcation dans le cas  $n = 5, c = 0.1, d = 1$ .

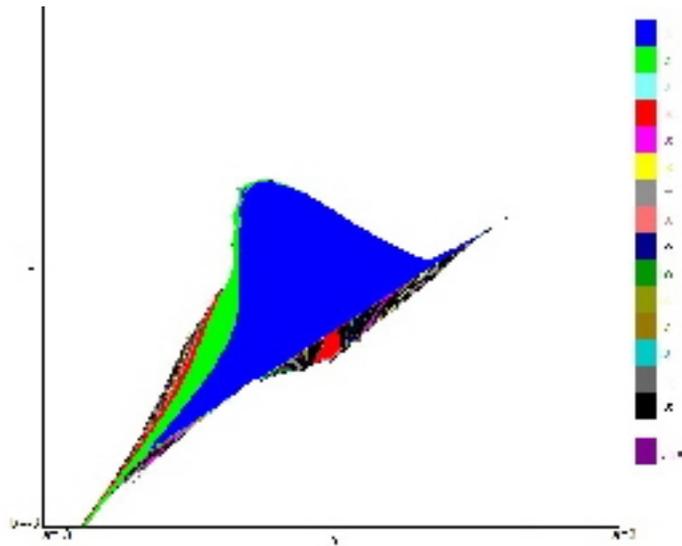


FIG. 2.23 – Diagrammes de bifurcation dans le cas  $n = 6, c = 2, d = 1$ .

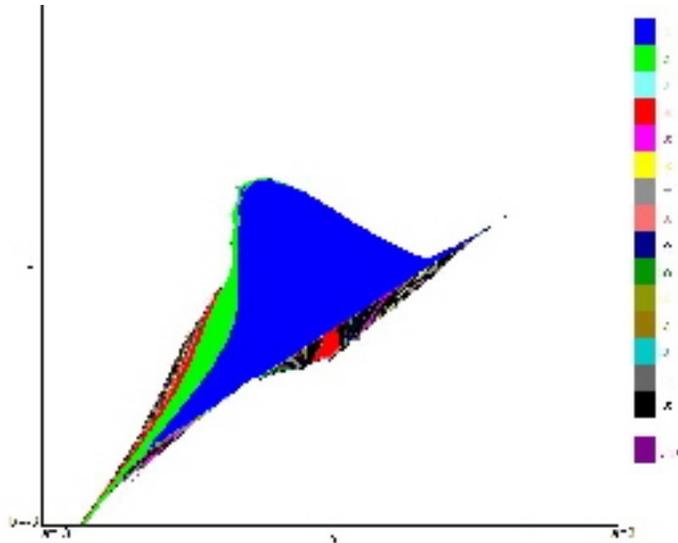


FIG. 2.24 – Diagrammes de bifurcation dans le cas  $n = 7, c = 0.1, d = 1$ .

Les figures (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) ont été comparées avec la figure (2.1). La structure de bifurcation de  $T_n$  est qualitativement identique à celle de la récurrence (2.1).

## 2.5.2 Etude des lignes critiques

**Proposition 2.5** *L'application  $T_n$  possède deux branches parallèles de courbes critiques données par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} L : y = b \\ L' : y = b + d \left( -\frac{(n-1)d}{nc} \right)^{n-1} + c \left( \left( -\frac{(n-1)d}{nc} \right)^n \right). \end{cases} \quad (2.25)$$

**Preuve.** Les courbes critiques sont les courbes conséquentes des droites  $L_{-1}, L'_{-1}$ .

Les courbes des antécédents de rang un confondus appartiennent à l'ensemble :

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } : J_n(x, y) = 0 \},$$

où  $J_n$  est le Jacobien de la transformation  $T_n$  définie par :

$$J_n = \det \begin{bmatrix} a & 1 \\ ncx^{n-1} + (n-1)dx^{n-2} & 0 \end{bmatrix} = -x^{n-2} [ncx + (n-1)d] = 0.$$

Le Jacobien s'annule pour deux valeurs de la variable  $x$ , ces deux solutions sont les courbes  $LC_{-1}$  tel que  $LC_{-1} = L_{-1} \cup L'_{-1}$  données par les branches :

$$\begin{cases} L_{-1} : x = 0 \\ L'_{-1} : x = -\frac{(n-1)d}{nc}. \end{cases}$$

Comme  $LC_0 = T(LC_{-1}) = T(L_{-1}) \cup T(L'_{-1}) = L \cup L'$ .

Alors les courbes critiques  $L$  et  $L'$  sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} L : y = b \\ L' : y = b + d \left( -\frac{(n-1)d}{nc} \right)^{n-1} + c \left( \left( -\frac{(n-1)d}{nc} \right)^n \right). \end{cases}$$

■

**Proposition 2.6** Soit  $T_n$  une transformation de la forme (2.23), alors  $T_n$  a toujours une seule ligne critique quand  $n$  tend vers l'infinie.

**Preuve.** La branche de la ligne critique  $L'$  dépend de "n" et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ b + d \left( -\frac{(n-1)d}{nc} \right)^{n-1} + c \left( \left( -\frac{(n-1)d}{nc} \right)^n \right) \right]$$

- si  $\left| \frac{d}{c} \right| < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L' = L$
- si  $\left| \frac{d}{c} \right| > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L' = +\infty$ .

■

# Chapitre 3

## Etude d'un cas critique de bifurcation sur une récurrence découplée

### 3.1 Introduction.

La théorie d'oligopole est l'une des anciennes et principales branches dans l'économie mathématique, et son modèle de base a été élaboré par Augustin Cournot en 1838. Une situation d'oligopole se rencontre lorsqu'il y a sur un marché, un nombre très faible d'offreurs (vendeurs) et un nombre important de demandeurs (clients). On parle aussi de situation de marché oligopolistique.

Il s'agit d'une situation de marché imparfait ; dans le cadre de la concurrence pure et parfaite, le profit de chaque producteur dépend de l'attitude des autres offreurs, alors que dans le cas d'un oligopole les offreurs sont indépendants, car la demande est plus forte que l'offre, ce qui assure à une entreprise la vente de ses produits, quel que soit le prix ou la qualité.

Lorsque les rendements sont constants ou croissants, les producteurs sont naturellement

incités à s'agrandir et se développer afin de réaliser des économies d'échelle, ce qui tend à la concentration, et l'équilibre d'un tel système est une situation de monopole où il ne reste plus qu'un producteur. Néanmoins, dans le but de protéger le consommateur des abus, les institutions s'opposent à la constitution de monopoles. Donc ces marchés tendent naturellement vers un équilibre oligopolistique.

Une fois cet équilibre atteint, les producteurs peuvent se livrer une concurrence féroce, mais peuvent aussi s'entendre de manière formelle et constituer un cartel. Le cas d'oligopole le plus simple est un duopole, où il y a deux producteurs, appelé aussi le modèle de Cournot-Nash.

Dans ce chapitre nous mettons en évidence les différentes propriétés de la transformation  $T$  pour  $a = 0$ , à l'étude des points fixes et des cycles, leur nature, le nombre (éventuellement) de cycles et leur stabilité. Nous terminons par une étude détaillée sur les lignes critiques . Une étude détaillée sur la multistabilité et les attracteurs cycliques des systèmes dynamiques de type "jeux duopoles de Cournot" peut être trouvée dans [7], [8] .

Le système duopole est obtenu par le système bidimensionnel  $T : IR^2 \rightarrow IR^2$  de type :

$$T : \begin{cases} x' = g(y) \\ y' = f(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : X \rightarrow Y$  sont deux fonctions continues.

Cournot, dans ses travaux, a considéré que les fonctions  $f$  et  $g$  décroissantes dans le quadrant positif s'intersectent en un seul point qui est le point fixe . En général,  $f$  et  $g$  ne sont pas toujours monotones.

Si  $(x_0, y_0)$  la condition initiale vérifie  $y_0 = f(x_0)$  ou  $x_0 = g(y_0)$  alors le plan de phases est constitué des points  $(x_n, y_n)$  qui appartiennent aux graphes des fonctions  $y = f(x)$  et  $x = g(y)$ .

Posant :

$$R_{12} = R_1 \cup R_2 \quad \text{où} \quad R_1 = \{(g(y), y) / \forall y \in Y\}, R_2 = \{(x, f(x)) / \forall x \in X\},$$

$R_{12}$  représente l'union des graphes de  $f$  et  $g$ , de plus  $T$  est invariante sur  $R_{12}$

$$T(R_{12}) \subseteq R_{12},$$

c'est à dire si on prend un point du graphe de  $f$ , son image sera un point du graphe de  $g$  et inversement.

Dans ce cas toute condition initiale  $(x_0, y_0) \in R_{12}$  génère une trajectoire appartenant entièrement à  $R_{12}$

$$\forall n \geq 0 ; \quad T^n(x_0, y_0) \in R_{12}.$$

On appelle cette trajectoire l'équilibre parfait de Markov (MPE) et c'est un point fixe de  $T$ .

**Proposition 3.1** *Le point  $(x^*, y^*)$  est un point fixe de  $T$  ssi  $y^* = f(x^*)$  et  $x^* = g(y^*)$ .*

*Alors  $(x^*, y^*)$  est un point d'intersection des graphes de  $f$  et  $g$  et  $(x^*, y^*) \in R_{12}$ .*

Si  $(x_0, y_0) \notin R_{12}$  alors  $\exists k \geq 0 : T^k(x_0, y_0) \notin R_{12}$  puisque un antécédent n'appartient pas à  $R_{12}$ .

Les propriétés suivantes ont été établies dans [7] :

**Propriété 3.1** *Pour toute transformation de type (3.1), il est possible d'associer les deux transformations unidimensionnelles définies par  $\psi = gof$  et  $\phi = fog$ .*

$$\begin{cases} go\phi^n(y) = \psi^n o g(y) \\ fo\psi^n(x) = \phi^n o f(x) \end{cases} \quad \forall n \geq 1. \quad (3.2)$$

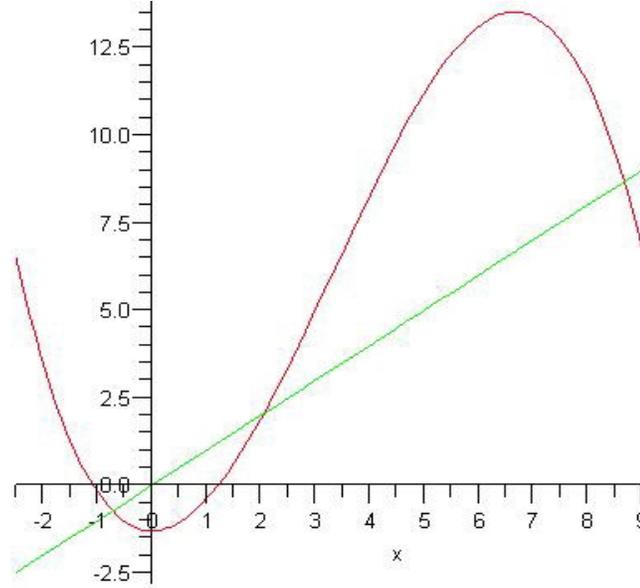


FIG. 3.1 – Graphes des fonctions  $f$  et  $g$  pour  $b = -1.3025$  et  $c = -0.1$ .

De cette propriété on conclut que les cycles de l'application  $\phi$  et ceux de  $\psi$  et leurs propriétés de stabilité sont strictement liées.

La correspondance entre les cycles de  $\phi$  et ceux de  $\psi$  sont donnés dans la propriété suivante.

**Propriété 3.2 :**

- Si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un cycle d'ordre  $n$  de  $\psi$  alors  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$  est un cycle d'ordre  $n$  de  $\phi$ .
- Si  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  un cycle d'ordre  $n$  de  $\phi$  alors  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_n)\}$  est un cycle d'ordre  $n$  de  $\psi$ .

On appelle ces cycles, des cycles conjugués. La stabilité est déduite par cette relation :

$$S = \prod_{i=1}^n D\psi(x_i) = \prod_{i=1}^n D\phi(y_i) = \prod_{i=1}^n Dg(y_i) Df(x_i). \quad (3.3)$$

**Propriété 3.3** Le point  $(x_i, y_i)$  est un point du cycle d'ordre  $n$  de  $T$  ssi  $x = x_i$  et  $y = y_i$  sont des points des cycles de  $\psi$  et  $\phi$  d'ordre  $n$  (si  $n$  impair) et d'ordre  $\frac{n}{2}$  (si  $n$  pair).

**Proposition 3.2** *Pour tout point  $(x_i, y_i)$  du cycle d'ordre  $n$ , les droites  $x = x_i$  et  $y = y_i$  sont invariantes pour  $T^n$ .*

**Corollaire 3.1** *Tout cycle de  $T$  de type col a des ensembles stables et instables formés par l'union des droites qui sont parallèles aux axes des  $x$  et  $y$ .*

**Proposition 3.3 :**

1. *Supposons que  $(x, y)$  est un cycle d'ordre  $k$  ( $1 < k$ ) de  $T$ , alors on a :*

- *Si  $k$  pair ( $k = 2n$ ) alors  $x$  est un cycle d'ordre  $n$  pour  $\psi$  et  $y$  est un cycle d'ordre  $n$  pour  $\phi$ .*
- *si  $k$  impair ( $k = 2n + 1$ ) alors  $x$  est un cycle d'ordre  $k$  pour  $\psi$  et  $y$  est un cycle d'ordre  $k$  pour  $\phi$ .*

2. *Supposons que  $x$  est cycle d'ordre  $n$  de  $\psi$  et  $y$  est un cycle d'ordre  $n$  de  $\phi$ , alors on a :*

- *Si  $n$  pair ( $n = 2k$ ) alors  $T$  admet  $k$  cycle d'ordre  $2n$ .*
- *Si  $n$  impair ( $n = 2k + 1$ ) alors  $T$  admet un seul cycle d'ordre  $n$  et  $k = \frac{n-1}{2}$  cycles d'ordre  $2n$ .*

## 3.2 Etude d'un système symétriquement découplé

### 3.2.1 Etude des points fixes et des cycles

**Etude analytique**

Considérons la même récurrence (2.1) avec  $a = 0$ , donnée par :

$$T(x_n, y_n) \begin{cases} x_{n+1} = G(y_n) = y_n \\ y_{n+1} = F(x_n) = cx_n^3 + x_n^2 + b \end{cases} \quad (3.4)$$

La transformation  $T$  représente un modèle de duopole de Cournot, et les points fixes sont appelés les points d'équilibre de Cournot-Nash. La transformation  $T^2$  (deuxième itération de  $T$ ) est une transformation découplée :

$$T^2(x, y) = T(y, cx^3 + x^2 + b) = (cx^3 + x^2 + b, cy^3 + y^2 + b). \quad (3.5)$$

Nous étudions dans un premier temps la stabilité des points fixes et des cycles.

Pour chercher les points fixes de notre récurrence on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x = y \\ y = cx^3 + x^2 + b \end{cases} \quad (3.6)$$

Les points fixes sont donnés par les solutions de l'équation cubique suivante :

$$cx^3 + x^2 + b - x = 0.$$

Le discriminant de cette équation est donné par :

$$\Delta = -27c^2b^2 - 18cb + 1 - 4b + 4c.$$

On peut considérer que  $\Delta$  est une équation de degré 2 pour  $b$ , dans ce cas :

$$\Delta' = 432c^3 + 432c^2 + 144c + 16.$$

**i)** Si  $c = -1/3 \Rightarrow \Delta' = 0$  : dans ce cas  $T$  admet un seul point fixe de multiplicité 3 qui a pour coordonnées  $(1, 1)$  pour  $b = \frac{1}{3}$ , et trois points fixes pour  $b \neq \frac{1}{3}$ .

- ii) Si  $c > -1/3 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0 : \quad \text{deux points fixes} \\ \text{pour } b_{1,2} = \frac{(18c + 4) \pm \sqrt{432c^3 + 432c^2 + 144c + 16}}{-0.54c^2} \\ \Delta < 0 \text{ pour } b \in ]-\infty, b_1[ \cup ]b_2, +\infty[ \quad : \text{un point fixe} \\ \Delta > 0 \text{ pour } b \in ]b_1, b_2[ \quad : \text{trois points fixes} \end{array} \right.$$
- iii) Si  $c < -1/3 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow \Delta < 0, \forall b$ , alors  $T$  admet un point fixe réel.

Les points fixes sont toujours diagonaux c'est à dire qu'ils appartiennent à la droite  $y = x$ .

**Propriété 3.4** *Les point fixes et les cycles d'ordre impair sont soit des nœuds étoilés soit des foyers, ils ne peuvent jamais être des cols. Les cycles d'ordre pair peuvent être des cols ou des nœuds, mais jamais des foyers.*

**Preuve.** Ecrivons la transformation  $T$  sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = F^p(x_{n-2p}) = F^p(y_{n-(2p+1)}) \\ y_n = F^p(y_{n-2p}) = F^{p+1}(x_{n-(2p+1)}) \end{array} \right., \quad \text{avec } F^p = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{p \text{ fois}}$$

Les points  $(x^*, y^*)$  des cycles d'ordre impair,  $k = 2p + 1$ , vérifient alors l'expression suivante :

$$x^* = F^p(y^*), \quad y^* = F^{p+1}(x^*)$$

Les valeurs propres sont les solutions de l'équation suivante :

$$S^2 - A_y B_x = 0,$$

où  $A_y = \frac{\partial F^p}{\partial y}(y) |_{(y=y^*)}$  et  $B_x = \frac{\partial F^{(p+1)}}{\partial x}(x) |_{(x=x^*)}$ . On obtient  $|S_1| = |S_2|$ . Donc, les cycles d'ordre impair sont soit des nœuds soit des foyers, ils ne peuvent jamais être des cols.

Les points  $(x^*, y^*)$  des cycles d'ordre pair,  $k = 2p$ , vérifient :

$$x^* = F^p(x^*), \quad y^* = F^p(y^*).$$

Les valeurs propres sont :

$$S_1 = C_x \text{ et } S_2 = C_y,$$

où  $C_y = \frac{\partial F^p}{\partial y}(y) |_{(y=y^*)}$  et  $C_x = \frac{\partial F^p}{\partial x}(x) |_{(x=x^*)}$ . Donc les cycles d'ordre pair sont soit des cols soit des nœud. ■

**Proposition 3.4** *Si la transformation  $T$  possède  $k$  ( $k \geq 2$ ) points fixes sur la droite  $x = y$ , alors le nombre des cycles d'ordre deux est  $\frac{k!}{2!(k-2)!}$ .*

**Preuve.** Notons par  $(a_i, a_i)_{i=1,k}$  les  $k$  points fixes de  $T$  alors  $a_i = F^p(a_i)$  et  $a_j = F^p(a_j) \quad \forall i \neq j$ , alors  $[(a_i, a_j), (a_j, a_i)]$  ( $\forall i = \overline{1, k}$  et  $\forall j = \overline{1, k}$  et  $i \neq j$ ) sont des cycles d'ordre deux pour  $T$ , et par conséquent le nombre de ces cycles est  $\frac{k!}{2!(k-2)!}$ . ■

### 3.2.2 Etude du plan des paramètres

Dans cette section, nous présentons l'étude du plan des paramètres  $(c, b)$ .

Le fait que le nombre des paramètres soit égal à deux présente l'avantage de nous permettre de travailler dans un plan unique.

#### Simulations du plan paramétrique

Le diagramme de bifurcations dans le plan  $(c, b)$  de la transformation  $T$  est présenté dans la figure (3.2), le code des couleurs est identique à celui des figures du chapitre 2 :

- Les zones bleues représentent le domaine d'existence et de stabilité d'un point fixe.
- Les zones rouges représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 4.
- Les zones roses représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 8, et ainsi de suite pour les cycles jusqu'à l'ordre  $k = 14$ .
- Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètres  $(b, c)$  pour lesquelles il peut exister potentiellement des phénomènes chaotiques.

Programme Plan\_Param, (c) Sahari M.L.20/03/2007

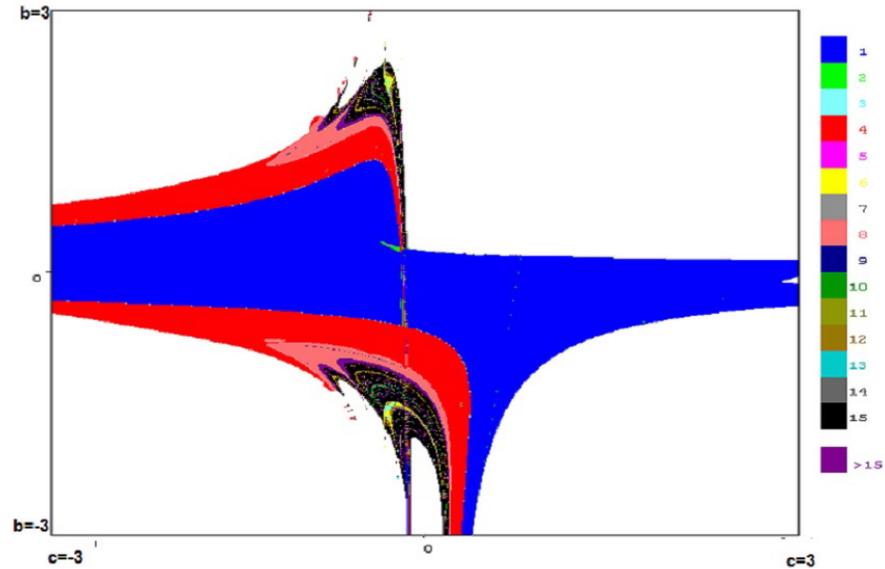


FIG. 3.2 – Domaine d'existence et de stabilité des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(c, b)$ .

Le diagramme de bifurcation permet d'observer une bifurcation qui fait passer directement d'un point fixe attractif à un cycle d'ordre 4 attractif sans passer par un cycle d'ordre 2. Cette situation correspond à une bifurcation singulière, qui peut être expliquée à partir des équations permettant la construction des cycles d'ordre 2.

### Courbe de Bifurcation

En résolvant le système d'équations qui permet de construire les courbes de bifurcation d'un point fixe, nous obtenons les valeurs propres  $S_1 = -S_2 = 1$ . Dans ce cas, la courbe correspondant à une bifurcation fold ( $S = +1$ , notée  $\Lambda_{(1)_0}^1$ ) et celle correspondant à une bifurcation flip ( $S = -1$ , notée  $\Lambda_1^1$ ) sont confondues.

L'équation d'une courbe de bifurcation  $\Lambda_{(1)_0}^1$  (ou  $\Lambda_1^1$ ) est donc :

$$-27c^3b^2 - 18c^2b + c - 4cb + 4c^2 = 0.$$

L'équation (3.7) donnant les cycles d'ordre 2 est obtenue par itération de la transformation (3.4).

$$\begin{cases} x_{n+2} = F(x_n) = cx_n^3 + x_n^2 + b \\ y_{n+2} = F(y_n) = cy_n^3 + y_n^2 + b \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous pouvons remarquer que les équations de  $x$  et de  $y$  sont identiques.

Les équations permettant la construction des courbes des bifurcations d'un cycle d'ordre  $k = 2$  s'écrivent :

$$\begin{cases} cx^3 + x^2 + b - x = 0 \\ cy^3 + y^2 + b - y = 0 \\ S_1 = 3cx^2 + 2x = \pm 1 \\ S_2 = 3cy^2 + 2y = \pm 1 \end{cases}$$

En fait, ce système d'équations est identique au système permettant la construction des courbes des bifurcations d'un point fixe, par conséquent la courbe  $\Lambda_1^1$  est dégénérée car constituée d'une infinité de points de codimension 2. Nous nous intéressons maintenant à la construction des cycles d'ordre 4 et 8.

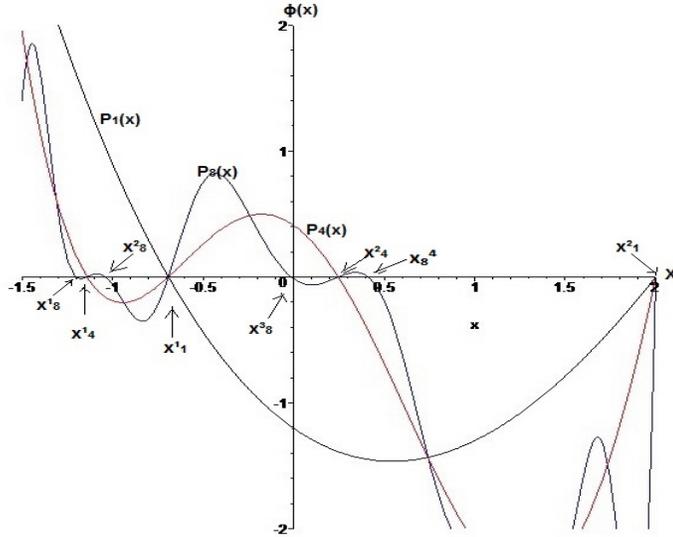
Pour étudier la structure des bifurcations, nous nous intéressons ici aux naissances des cycles 4 et 8. En utilisant les analytiques présentées dans la section précédente, les points fixes et les cycles d'ordre 4 et 8 peuvent être obtenus par les équations suivantes :

$$F(x) - x = 0 \quad (\text{point fixe}).$$

$$\begin{cases} F^2(x) - x = 0 \\ F^2(y) - y = 0 \end{cases} \quad (\text{cycle d'ordre 4}) \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} F^4(x) - x = 0 \\ F^4(y) - y = 0 \end{cases} \quad (\text{cycle d'ordre 8}) \quad (3.9)$$

Dans (3.8) et (3.9), les équations en  $x$  et en  $y$  sont identiques. Nous représentons dans la figure (3.3) les courbes de la fonction  $\phi(x) = F^k(x) - x$  en fonction de  $x \in [-2, 2]$  avec


 FIG. 3.3 – Courbes de la fonction  $F(x)$ ,  $c = -0.1$ ,  $b = -1.14$ .

$c = -0.1$ ,  $b = -1.14$ . Sur cette figure,

- $P_1(x) = F(x) - x$ ,  $x_1^1$  et  $x_1^2$  sont deux coordonnées de deux points fixes ;
- $P_4(x) = F^2(x) - x$ ,  $x_4^1$  et  $x_4^2$  sont deux des coordonnées de ce cycle d'ordre 4 ;
- $P_8(x) = F^4(x) - x$ ,  $x_8^1, x_8^2, x_8^3$  et  $x_8^4$  sont les coordonnées de ce cycle d'ordre 8.

Les coordonnées des points du cycle d'ordre 4,  $x_4^1$  et  $x_4^2$  sont nées à partir de la coordonnée du point fixe  $x_1^1$ . Les coordonnées des points du cycle d'ordre 8,  $x_8^1$  et  $x_8^2$  sont nées à partir de la coordonnée du cycle d'ordre 4  $x_4^1$  ; de la même façon,  $x_8^3$  et  $x_8^4$  sont nées à partir de la coordonnée du cycle d'ordre 4  $x_4^2$ .

Grâce à une étude numérique, nous savons qu'il y a trois cycles d'ordre 4, ils sont construits de la façon suivante (par permutation des coordonnées) :

$$NS_4 = \begin{pmatrix} x_4^1, x_4^1 \\ x_4^1, x_4^2 \\ x_4^2, x_4^2 \\ x_4^2, x_4^1 \end{pmatrix}, \quad C_4^1 = \begin{pmatrix} x_4^1, x_1^1 \\ x_1^1, x_4^2 \\ x_4^2, x_1^1 \\ x_1^1, x_4^1 \end{pmatrix}, \quad C_4^2 = \begin{pmatrix} x_4^1, x_1^2 \\ x_1^2, x_4^2 \\ x_4^2, x_1^2 \\ x_1^2, x_4^1 \end{pmatrix}.$$

Les cycles d'ordre 8 sont construits de la même façon :

$$NS_8^1 = \begin{pmatrix} x_8^3, x_8^3 \\ x_8^3, x_8^1 \\ x_8^1, x_8^1 \\ x_8^1, x_8^4 \\ x_8^4, x_8^4 \\ x_8^4, x_8^2 \\ x_8^2, x_8^2 \\ x_8^2, x_8^3 \end{pmatrix}, \quad NS_8^2 = \begin{pmatrix} x_8^3, x_8^4 \\ x_8^4, x_8^1 \\ x_8^1, x_8^2 \\ x_8^2, x_8^4 \\ x_8^4, x_8^3 \\ x_8^3, x_8^2 \\ x_8^2, x_8^1 \\ x_8^1, x_8^3 \end{pmatrix}, \quad C_8^1 = \begin{pmatrix} x_1^1, x_8^3 \\ x_8^3, x_1^1 \\ x_1^1, x_8^1 \\ x_8^1, x_1^1 \\ x_1^1, x_8^4 \\ x_8^4, x_1^1 \\ x_1^1, x_8^2 \\ x_8^2, x_1^1 \end{pmatrix},$$

$$C_8^2 = \begin{pmatrix} x_8^3, x_4^2 \\ x_4^2, x_8^1 \\ x_8^1, x_4^1 \\ x_4^1, x_8^4 \\ x_8^4, x_4^2 \\ x_4^2, x_8^2 \\ x_8^2, x_4^1 \\ x_4^1, x_8^3 \end{pmatrix}, \quad C_8^3 = \begin{pmatrix} x_8^2, x_4^2 \\ x_4^2, x_8^3 \\ x_8^3, x_4^1 \\ x_4^1, x_8^1 \\ x_8^1, x_4^2 \\ x_4^2, x_8^4 \\ x_8^4, x_4^1 \\ x_4^1, x_8^2 \end{pmatrix}, \quad C_8^4 = \begin{pmatrix} x_1^2, x_8^1 \\ x_8^1, x_1^2 \\ x_1^2, x_8^2 \\ x_8^2, x_1^2 \\ x_1^2, x_8^3 \\ x_8^3, x_1^2 \\ x_1^2, x_8^4 \\ x_8^4, x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement :

- Les cycles stables d'ordre  $k$  sont construits à partir des coordonnées des cycles d'ordre  $k$  de  $F (x_k^i, i = 1, 2, \dots, N_k)$ , où  $N_k$  est le nombre des cycles d'ordre  $k$ .
- Les cycles instables d'ordre  $k$  (les cols) sont construits à partir :
  - Des coordonnées des cycles d'ordre  $k$  de  $F (x_k^i, i = 1, 2, \dots, N_k)$ ,
  - Les coordonnées des points fixes  $x_1^1$  et  $x_1^2$  de  $F$ ,
  - Des coordonnées des cycles d'ordre  $j$  de  $F (x_j^i, i = 1, 2, \dots, N_j)$ ,  $j = 2^2, 2^3, \dots, \frac{k}{2}$ ,  
où  $N_j$  est le nombre des cycles d'ordre  $j$ .

### 3.2.3 Etude de l'espace d'état

Pour suivre l'évolution du plan  $(x, y)$  de la récurrence  $T$ , nous considérons les courbes invariantes associées aux cycles de type col, ainsi que les lignes critiques qui délimitent les attracteurs.

Donnons d'abord quelques remarques concernant les courbes invariantes et lignes critiques.

#### Courbes invariantes

Etudions en premier les courbes invariantes passant par les cols. Nous avons calculé les valeurs propres dans la section précédente, nous savons donc que seuls les cycles d'ordre pair peuvent être de type col.

Considérons un point col noté  $X_f = (x_f, y_f)$ , qui est un point d'un cycle d'ordre pair, les vecteurs propres sont toujours de la forme  $\vec{V}_1 = [1, 0]$  et  $\vec{V}_2 = [0, 1]$ , donc la pente  $P$  en  $X_f$  est soit nulle, soit infinie ; c'est à dire que l'une des deux branches de la courbe invariante est horizontale et l'autre est verticale.

D'autre part les deux branches d'une courbe invariante représentent les propriétés suivantes :

#### Propriété 3.5 :

- *Le conséquent par  $T$  d'un segment horizontal est un segment vertical et inversement.*
- *L'antécédent par  $T$  d'un segment horizontal est un segment vertical et inversement.*

#### Lignes critiques

Les lignes critiques  $LC_{-1}$  et  $LC$  de la transformation  $T$  sont celles trouvées dans le chapitre 2, puisque les équations ne dépendent pas de  $a$ .

Les lignes critiques de rang supérieur sont obtenues par application de  $T$ , elles correspondent toutes à des segments de droites en raison de la propriété précédente.

La transformation est toujours de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  puisque nous pouvons lui associer trois déterminations inverses.

### Bassin d'attraction

Varions  $b$  pour  $c = -0.1$ , la coexistence de différents attracteurs locaux suscite une question importante sur leur comportement et le problème de la délimitation des frontières de leurs bassins qui sont constitués de rectangles. Notre but est d'étudier l'ensemble attractif et la structure de leur bassin d'attraction et de caractériser leurs bifurcations.

En général, notre système est caractérisé par la coexistence de plusieurs attracteurs différents qui seraient soit des cycles stables, soit des attracteurs chaotiques cycliques.

La figure (3.4), pour  $c = -0.1$  et  $b = -0.8$ , représente le bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 4 de type nœud. Nous pouvons noter la coexistence d'un point fixe foyer instable, un cycle nœud stable d'ordre 2 et de deux cycle col d'ordre 4. La bifurcation de la perte de stabilité du point fixe de type foyer sera expliqué dans les paragraphes suivants.

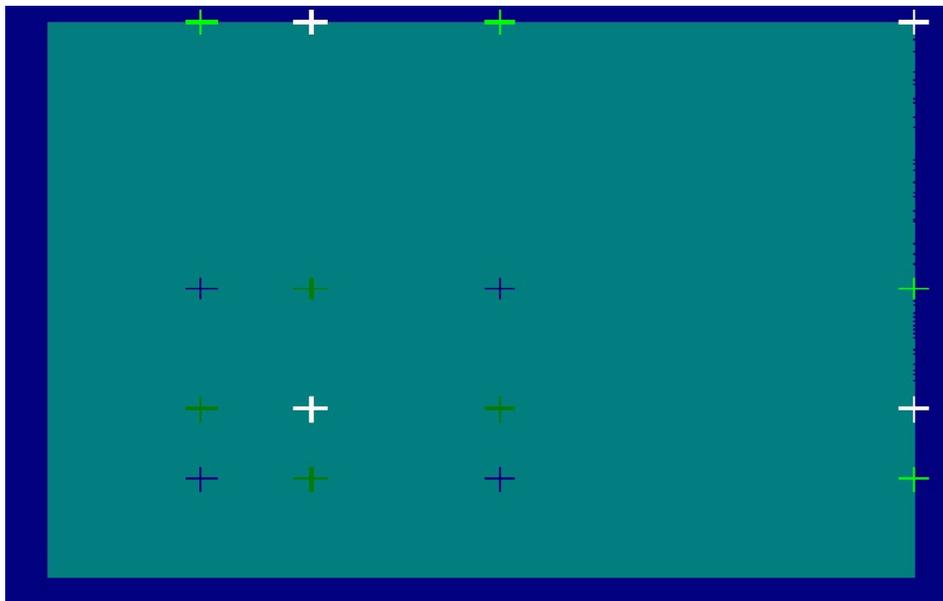


FIG. 3.4 – Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 4, pour  $c = -0.1$  et  $b = -0.8$ .

De la même manière, nous illustrons les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8 pour les

valeurs  $c = -0.1$  et  $b = -1,14$  dans la figure (3.5) . Nous pouvons observer sur cette figure l'existence de deux cycles nœuds stables d'ordre 8, deux cycles nœuds instables d'ordre 4 et trois cycles cols d'ordre 8. Les zones avec deux couleurs différentes présentent respectivement les bassins d'attraction de deux cycles d'ordre 8 attractifs.

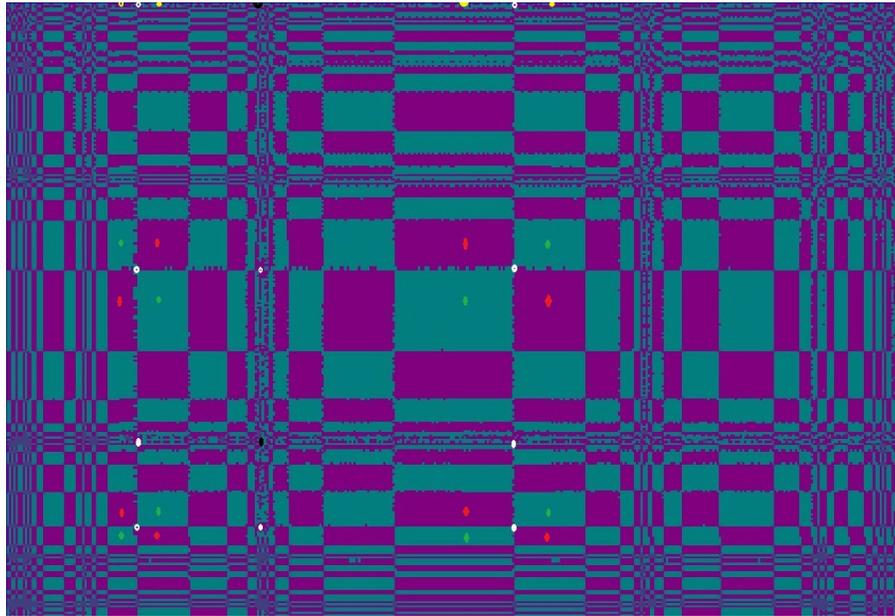


FIG. 3.5 – Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8, pour  $c = -0.1$  et  $b = -1,14$ .

Nous présentons dans la figure (3.6) , les bassins d'attraction des cycles d'ordre 16 pour  $c = -0.1$  et  $b = -1,26$ . Elle illustre bien la coexistence de quatre cycles nœuds stables d'ordre 16, sept cycles cols d'ordre 16 et des cycles nœuds instables d'ordre 4, 8 . Les zones avec quatre couleurs différentes (mauve, vert, gris, bleu) représentent respectivement les bassins d'attraction de quatre cycles d'ordre 16 attractifs.

Le cycle nœud d'ordre 4 bifurque et donne naissance à deux nœuds attractifs d'ordre 8. Ces derniers donnent naissance à quatre nœuds d'ordre 16 et quatre cols d'ordre 16 en même temps. Les deux cols d'ordre 8 donnent naissance à deux cols d'ordre 16. Donc, quatre bassins d'attraction pour ces nœuds stables apparaissent et sont délimités par les courbes invariantes des cols d'ordre 16.

De manière générale, on peut noter un doublement d'ordre et du nombre des nœuds

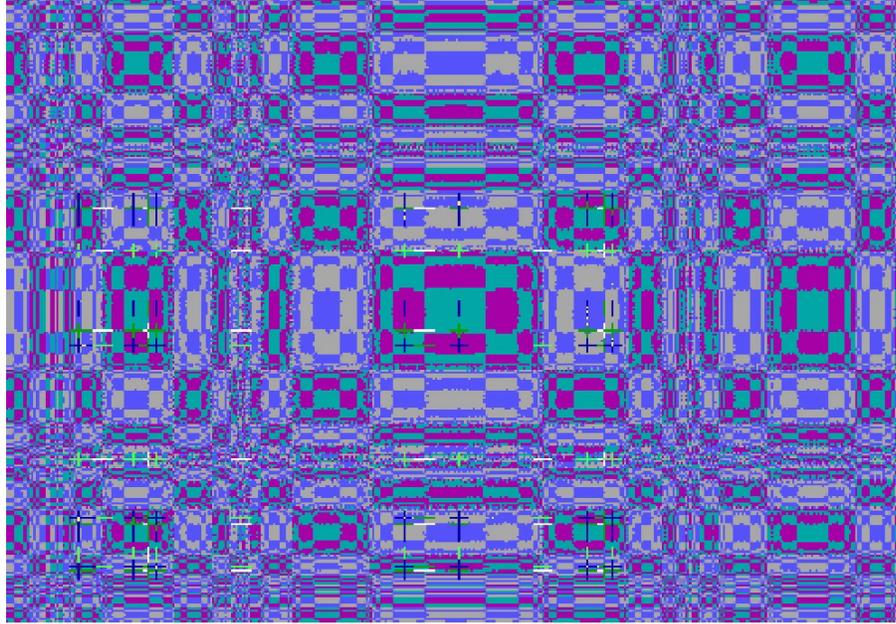


FIG. 3.6 – Les bassins d’attraction de quatre cycles d’ordre 16 attractifs pour  $c = -0.1$  et  $b = -1, 26$ .

attractifs après les bifurcations. Aussi, des bassins doubles apparaissent délimités par les courbes invariantes.

Un autre type de bifurcation est dû à la variation du paramètre  $b$ .

Pour  $b = -1.275$ , on a quatre bassins et chaque bassin est un bassin d’un attracteur chaotique cyclique d’ordre 16 (l’exposant de Lyapunov est égal à 0.04 et le nombre de Lyapunov est égal à 1.04).

Pour  $b = -1.29$ , on a deux attracteurs chaotiques cycliques d’ordre 8 (l’exposant de Lyapunov = 0.05 et le nombre de Lyapunov = 1.05).

Pour  $b = -1.37$ , il se produit la disparition du bassin rouge et un contact entre les rectangles chaotiques deux par deux.

Pour  $b = -1.4$ , le contact entre deux rectangles provoque l’union des rectangles et génère dans ce cas là un attracteur chaotique cyclique d’ordre 4.

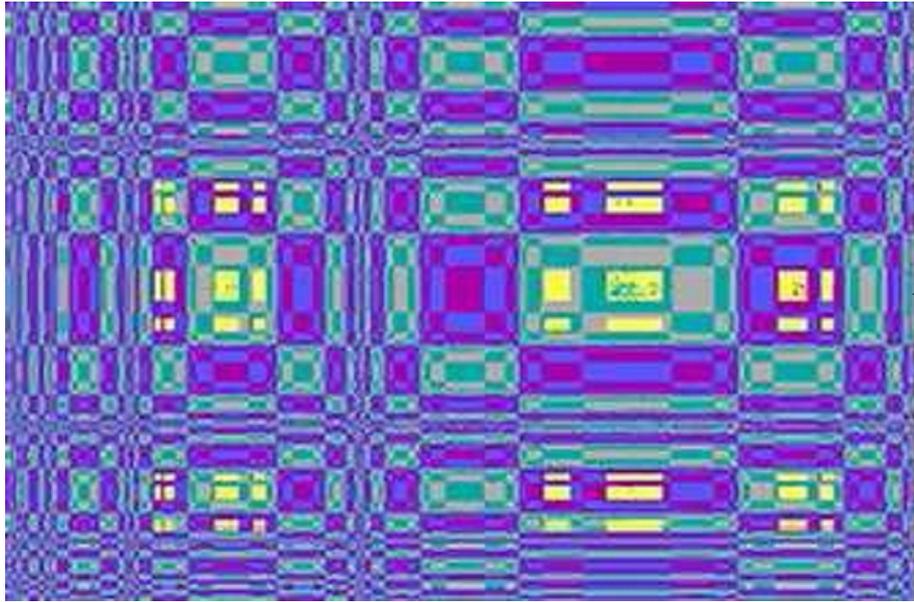


FIG. 3.7 – Quatre attracteurs chaotiques cycliques d'ordre 16 pour  $b = -1.275$ .

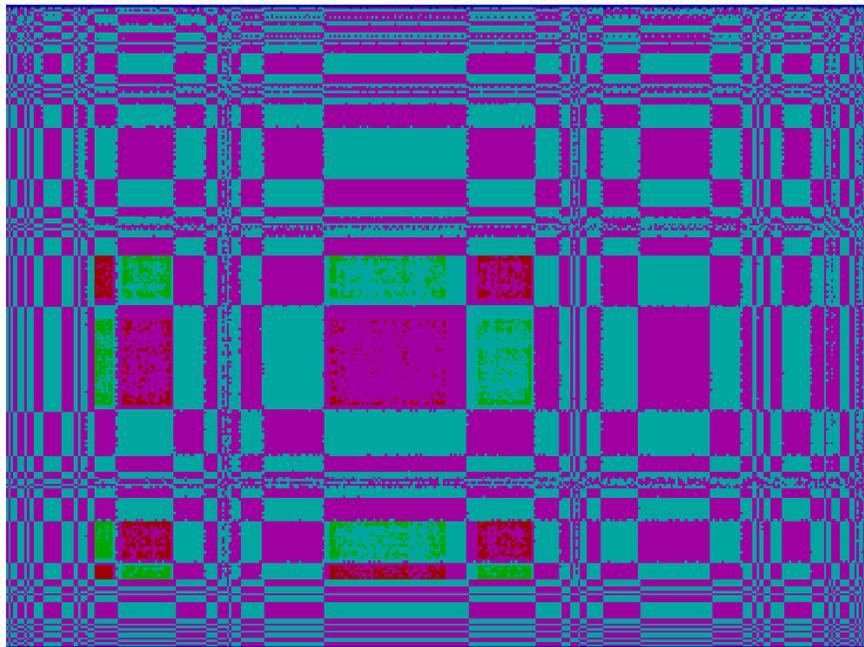


FIG. 3.8 – Deux attracteurs chaotiques cycliques d'ordre 8 pour  $b = -1.29$ .



FIG. 3.9 – Un attracteur chaotique cyclique d'ordre 4.

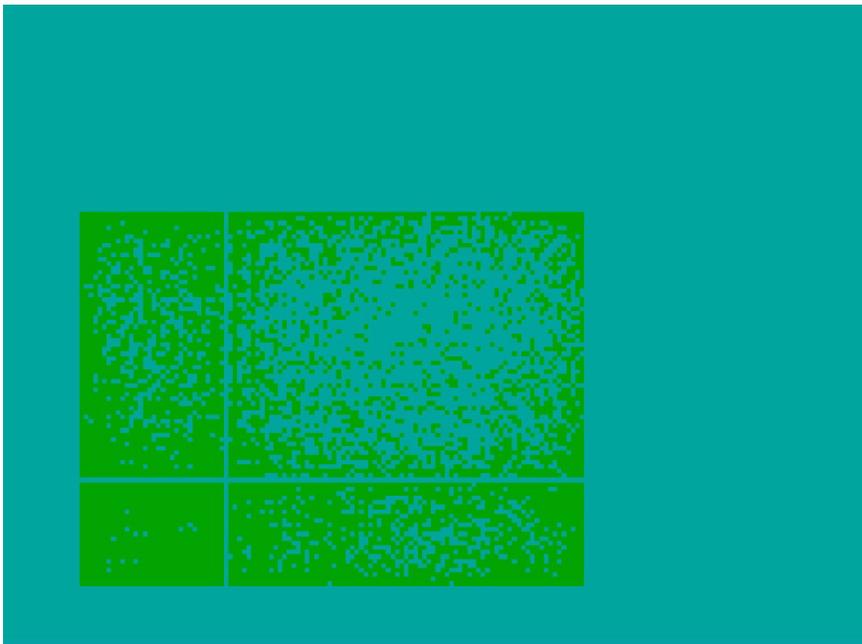


FIG. 3.10 – Le contact entre les rectangles chaotiques pour  $b = -1.37$ .

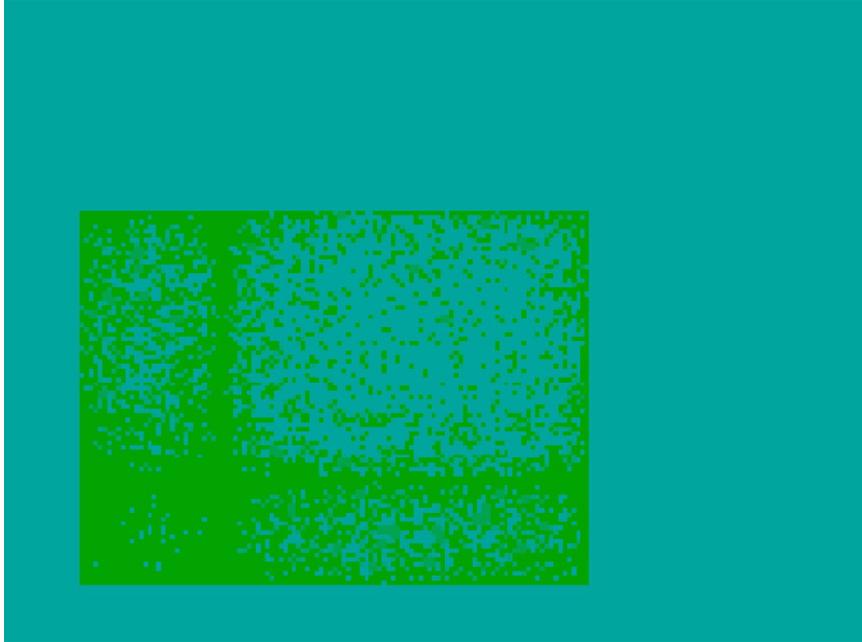


FIG. 3.11 – Attracteur chaotique annulaire.

## 3.3 Bifurcation de Neimark - Hopf et langues d'Arnold

### 3.3.1 Introduction

Les méthodes numériques de calculs des courbes de bifurcation ne permettent pas de déterminer avec précision la structure de bifurcation de la transformation  $T$  au voisinage de la courbe de bifurcation de Neimark-Hopf  $\Gamma_1^1$ . Dans ce paragraphe nous proposons de faire une étude analytique de cette structure de bifurcation appelée souvent les langues d'Arnold.

Cette étude analytique est effectuée à l'aide de la méthode de Cigala [12], [36], [23]. Elle consiste à obtenir une forme normale au voisinage d'un cas critique de multiplicateurs  $S = \exp(\pm i\varphi)$  d'un point fixe ou d'un cycle de la transformation  $T$ . Ainsi, certaines valeurs de  $\varphi$ , commensurables avec  $2\pi$  mènent à des cas dits "exceptionnels" avec des propriétés qualitatives, particulières en particulier pour les bifurcations traversant de telles situations

[36].

Généralement, les études consacrées aux langues d'Arnold sont faites à l'aide de méthodes numériques. Plus particulièrement à partir de ces études, il apparaît explicitement ou implicitement qu'une infinité de langues d'une structure de bifurcation est en contact avec la courbe de bifurcation de Neimark-Hopf considérée. Ces contacts sont relatifs à des situations de cas d'exception lorsque les multiplicateurs d'un point fixe ou d'un cycle sont tels que  $S = \exp(\pm i\varphi)$  avec  $\varphi$  tel que  $\varphi = \frac{2\pi r}{q}$  où  $r$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux.

Dans le cas d'une récurrence cubique découplée comme celle étudiée dans ce chapitre, nous allons montrer qu'un seul contact de ce type avec  $\Gamma_1^1$  est possible pour  $\varphi = \frac{2\pi}{4}$  contrairement à ce qui apparaît sur la figure (3.11) représentant les courbes de bifurcation de la récurrence  $T$ .

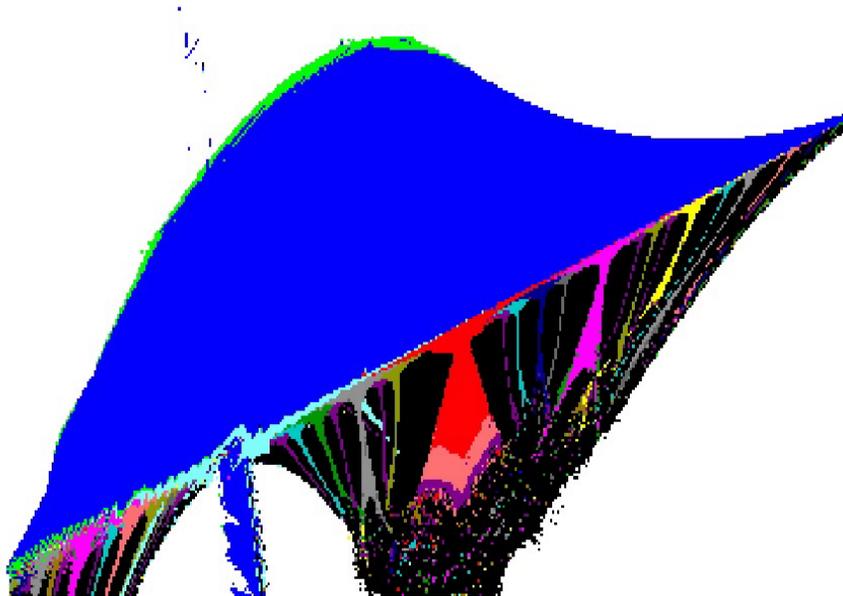


FIG. 3.12 – Diagramme de bifurcation de  $T$  dans le plan  $(a, b)$ .

### 3.3.2 Condition d'existence de cas d'exception

En dimension deux supposons que les points fixes ou les cycles sont des foyers  $S_{1,2} = \rho \exp(\pm i\varphi)$  et que  $\varphi$  est différent de certaines valeurs  $\frac{2\pi r}{q}$  ( $r \in \mathbb{Z}$  et  $q$  étant l'ordre du cycle) commensurables avec  $2\pi$ . Le cas le plus simple, lorsque  $\rho = 1$ , conduit à la naissance de  $q$  courbes fermées invariantes par  $T^k$ . Ces courbes fermées invariantes s'échangent cycliquement par  $q$  applications successives de  $T$ . Cette bifurcation est appelée bifurcation de Neimark-Hopf.

L'étude du cas critique  $S_{1,2} = \exp(\pm i\varphi)$  a été faite dans [37] en utilisant la substitution de Cigala qui permet de mettre la transformation ponctuelle sous une forme normale qui ne fait intervenir que des termes non linéaires dominants. Ce cas critique conduit alors à deux situations différentes :

a) Cas critique ordinaire où  $\varphi$  est non commensurable avec  $2\pi$ , ou si  $\varphi$  est différent de certaines valeurs de  $\frac{2\pi r}{q}$  ( $r$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux). Pour ce cas appelé cas critique non exceptionnel, le point fixe est un foyer de multiplicité 1, dont le caractère attractif ou répulsif est donné par le signe d'une certaine fonction qui dépend de  $\varphi$  et des termes non linéaires dominants (cette situation sera expliquée plus tard).

b) Cas critique d'exception où  $\varphi = \frac{2\pi r}{q}$ ,  $\frac{r}{q}$  ( $r$  et  $q$  étant deux entiers non commensurables), ce cas critique d'exception donne les trajectoires d'un col complexe ou d'un foyer d'exception. La traversée d'un tel cas d'exception peut donner naissance à une ou plusieurs courbes fermées invariantes, ou à des branches de type hyperboliques (ne donnant pas de courbes fermées au voisinage du point fixe), déformées par rapport au cas précédent, présentant  $q$  maximums du rayon vecteur  $\rho$  qui peuvent être de grande amplitude.

Le cas où les deux multiplicateurs du point fixe sont égaux à l'unité est un cas critique de stabilité, issu de  $S_{1,2} = \exp(\pm i\varphi)$  avec  $\varphi = 0$  si la matrice de l'approximation linéaire au point fixe est diagonalisable. Ce sont donc les termes non linéaires dominants qui déterminent l'allure des trajectoires discrètes dans un voisinage de ce point fixe. Elles peuvent être des spirales de type foyer complexe dans le cas général, ou des trajectoires

de type centre.

Quand au cas où  $S_{1,2} = \exp(\pm i\varphi)$  avec  $\varphi = \pi$ , il se ramène au cas précédent en considérant la transformation ponctuelle  $T^2$ .

Soit  $T$  une transformation ponctuelle définie par (3.6) ayant un point fixe  $P(x^*, y^*)$  en lequel les deux valeurs propres sont complexes conjuguées :  $S_{1,2} = \rho \exp(\pm i\varphi)$ .

Afin de pouvoir utiliser la méthode de Cigala, il est nécessaire de ramener  $T$  à l'origine en posant le changement de variables :

$$\begin{cases} x = x^* + X \\ y = y^* + Y = x^* + Y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour le point fixe  $(X, Y) = (0, 0)$ , correspondant au cas critique au sens de Lyapunov, la transformation  $T$  est supposée être mise sous la forme :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n \cos \varphi - s_n \sin \varphi + R(r_n, s_n) \\ s_{n+1} = r_n \sin \varphi + s_n \cos \varphi + S(r_n, s_n) \end{cases}, \quad \varphi \neq 0, \pm\pi. \quad (3.11)$$

où  $R$  et  $S$  sont deux fonctions polynomiales de degré au moins égal à 2.

A l'aide d'une transformation linéaire complexe :

$$\begin{cases} x = \frac{r + s}{2} \\ y = \frac{-i(r - s)}{2} \end{cases} \quad (3.12)$$

le système (3.11) devient une récurrence à variables complexes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = e^{i\varphi} x_n + \sum_{j=2}^m P_j(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = e^{-i\varphi} y_n + \sum_{j=2}^m Q_j(x_n, y_n), \end{cases} \quad (3.13)$$

où

$$\begin{cases} P_j(x_n, y_n) = \sum_{k=0}^j C_{jk} x^{j-k} y^k, \\ Q_j(x_n, y_n) = \sum_{k=0}^j C_{jk}^* x^{j-k} y^k, \end{cases},$$

$C_{jk}$  et  $C_{jk}^*$  étant deux coefficients complexes conjugués.

Dans ce qui suit, l'ordre  $m$  sera défini comme le degré  $j$  de  $P_j(x, y), Q_j(x, y)$  dans (3.13).

Les transformations successives permettent l'identification des termes dominants et sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \xi = x + \phi_m(x, y), & \eta = y + \psi_m(x, y) \\ \phi_m(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \xi^{m-k} \eta^k, & \psi_m(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^* \xi^k \eta^{m-k} \end{cases} \quad (3.14)$$

$m \geq 2$  étant le plus bas degré des  $P_j, Q_j$ ,  $\alpha^*$  étant le complexe conjugué de  $\alpha$ .

Cette transformation permet de conserver l'allure des courbes invariantes dans un voisinage  $\Delta$  suffisamment petit du point fixe  $O$ . Les constantes  $\alpha$  sont alors choisies pour que les nouvelles variables  $\xi, \eta$  de la transformation (3.14) contiennent aussi peu de termes que possible dans la forme de degré  $m$  correspondante.

A l'intérieur de  $\Delta$ , à partir de (3.14), on obtient :

$$\begin{cases} x = \xi - \phi_m(\xi, \eta) + \phi_m(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} + \psi_m(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} + \dots \\ y = \eta - \psi_m(\xi, \eta) + \psi_m(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_m}{\partial \eta} + \phi_m(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_m}{\partial \xi} \dots \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = e^{i\varphi} \xi_n - e^{i\varphi} \phi_m(\xi_n, \eta_n) + P_m(\xi_n, \eta_n) + \phi_m(e^{i\varphi} \xi_n, e^{-i\varphi} \eta_n) + \dots \\ \quad = e^{i\varphi} \xi_n + U_m + \dots \\ \eta_{n+1} = e^{-i\varphi} \eta_n - e^{-i\varphi} \psi_m(\xi_n, \eta_n) + Q_m(\xi_n, \eta_n) + \psi_m(e^{i\varphi} \xi_n, e^{-i\varphi} \eta_n) + \dots \\ \quad = e^{-i\varphi} \eta_n + V_m + \dots \end{cases} \quad (3.16)$$

Où  $U_m, V_m$ , sont des développements de degré  $m$ .

On choisit alors les  $\alpha_k$  tels que :

$$\alpha_k = \frac{-e^{-i\varphi} C_{mk}}{e^{i\varphi(m-2k-1)} - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.17)$$

Les termes correspondant du développement de degré  $m$  sont éliminés dans (3.16).

Ainsi trois situations sont possibles. Dans la première, le dénominateur de (3.17) n'est pas petit. Les deux autres situations correspondent à des phénomènes de petits diviseurs lorsque  $m$  est proche de certaines valeurs pouvant annuler le dénominateur de (3.17).

1. Première situation :  $\varphi$  est incommensurable avec  $2\pi$ , ou commensurable sans petits diviseurs (cas critique ordinaire).

(a) Lorsque  $m$  est un nombre pair,  $m = 2\mu$  la relation (3.17) montre que les termes de degré  $m$  peuvent être éliminés et (3.16) devient :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= e^{i\varphi} \xi_n + \sum_{j=2\mu+1}^{\infty} P'_j(\xi_n, \eta_n), \\ \eta_{n+1} &= e^{-i\varphi} \eta_n + \sum_{j=2\mu+1}^{\infty} Q'_j(\xi_n, \eta_n), \end{aligned} \quad (3.18)$$

qui revient à étudier le cas pour lequel  $m$  est un nombre impair.

(b) Lorsque  $m$  est un nombre impair,  $m = 2\mu + 1$ , la relation (3.17) montre que seuls les termes de degré  $m$  tels que  $k \neq \mu$ , peuvent être éliminés. Alors avec un choix arbitraire de  $\alpha_\mu$ , la transformation (3.16) devient :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= e^{i\varphi} \xi_n + \gamma_{2\mu+1, \mu} \xi_n^{\mu+1} \eta_n^\mu + \dots \\ \eta_{n+1} &= e^{-i\varphi} \eta_n + \gamma_{2\mu+1, \mu}^* \xi_n^\mu \eta_n^{\mu+1} + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

où les pointillés correspondent aux termes de degré supérieur à  $2\mu + 1$ . Lorsque le degré le plus bas dans (3.19) est impair,  $m = 2\mu + 1$ , alors  $\gamma_{2\mu+1, \mu} = C_{2\mu+1, \mu}$ .

Lorsqu'il est pair,  $m = 2\mu$  une première transformation permet d'obtenir (3.18) et une deuxième conduit à (3.19)  $\gamma_{2\mu+1,\mu} \neq C_{2\mu+1,\mu}$ . Pour plus de facilité, les variables sont désignées par les mêmes caractères, bien qu'elles soient différentes dans (3.18) et (3.19), la dernière résultant de l'application de deux transformations de Cigala successives.

Supposons que  $\gamma_{2\mu+1,\mu} \neq 0$  en utilisant les coordonnées polaires,  $\xi = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\eta = \rho e^{-i\varphi}$  dans (3.19) avec  $\rho$  ayant une valeur suffisamment petite, on obtient (en multipliant membre à membre) le système d'équations suivant. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{n+1}^2 = \rho_n^2 + G_\mu \rho_n^{2\mu+2} + \dots \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi - |\gamma_{2\mu+1,\mu}| \rho_n^{2\mu} \sin(\varphi + \tau_\mu) + \dots \\ G_\mu = e^{-i\varphi} \gamma_{2\mu+1,\mu} + e^{i\varphi} \gamma_{2\mu+1,\mu}^* = 2 |\gamma_{2\mu+1,\mu}| \cos(\varphi + \tau_\mu) \\ \tau_\mu = \arg \gamma_{2\mu+1,\mu}^* \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Le cas  $G_m = 0$  avec  $\gamma_{2\mu+1,\mu} \neq 0$  est un cas spécial non considéré ici.

Si  $\gamma_{2\mu+1,\mu} = 0$ ,  $\gamma_{2l+1,l}$  ( $l \geq \mu$ ), est le premier coefficient non nul qui est obtenu après une série de transformations de Cigala.

On suppose que  $(j - 2k - 1)\varphi \neq 2h\pi$ ,  $j = 2\mu, 2\mu + 1, \dots, 2l, 2l + 1$ ,  $h$  étant un entier positif ou négatif (absence de petit diviseur). La récurrence devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{n+1}^2 = \rho_n^2 + G_l \rho_n^{2l+2} + \dots \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi - |\gamma_{2l+1,l}| \rho_n^{2l} \sin(\varphi + \tau_l) + \dots \\ G_l = e^{-i\varphi} \gamma_{2l+1,l} + e^{i\varphi} \gamma_{2l+1,l}^* \\ \tau_\mu = \arg \gamma_{2l+1,l}^* \end{array} \right. \quad (3.21)$$

**Théorème 3.1** *Soit la récurrence (3.11), transformée sous la forme (3.13), dans un voisinage suffisamment petit du point fixe  $O$ , où il n'y ait ni points homoclines, ou*

*hétéroclines, ni solution chaotique. Alors le point fixe  $O$  est un foyer de multiplicité  $l$  attractif si  $G_l < 0$ , et répulsif si  $G_l > 0$ .*

2. Deuxième situation :  $\varphi = \frac{2r\pi}{q}$  (cas exceptionnel)  $q$  est un entier impair (premier cas d'exception).

Les entiers  $r$  et  $q$  sont incommensurables, et on suppose que l'on a un cas exceptionnel. D'après la relation

$$\begin{aligned} (j - 2k - 1) \varphi &= 2h\pi, \quad k = 0, \dots, j + 1. \\ j &= 2\mu, \dots, 2l, \quad \mu \geq 1, \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

conduisant à un petit diviseur, deux situations différentes se présentent :

La première situation correspond aux conditions suivantes :

$$q = \pm (2l + 1), \gamma_{3,1} = \gamma_{5,2} = \dots = \gamma_{2l-1,l-1} = 0, l > 1,$$

$\gamma_{2l+1,l}$  ne peut pas être déterminé afin d'obtenir (3.19) car on a  $(j - 2k - 1) \varphi = 2h\pi$ , pour  $j = 2l$ , et donc un des coefficients  $\gamma_{2l,j}$  des termes de degré  $2l$  ne peut pas être éliminé par une transformation de Cigala. Les entiers  $r$  et  $2l + 1$  étant commensurables, la relation  $(j - 2k - 1) \varphi = 2h\pi$  se produit seulement pour  $k = 2l$  à partir de laquelle il résulte  $h = -r$ . A l'aide d'une transformation de Cigala, tous les termes de degré  $2l$  peuvent être éliminés, sauf le terme en  $\eta_n^{2l}$  dans la relation donnant  $\xi_{n+1}$ , et en  $\xi_n^{2l}$  dans la relation donnant  $\eta_{n+1}$ .

Ainsi la nouvelle récurrence est :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = e^{i\varphi} \xi_n + \gamma_{2l,2l} \eta_n^{2l} + \dots \\ \eta_{n+1} = e^{-i\varphi} \eta_n + \gamma_{2l,2l}^* \xi_n^{2l} + \dots \end{cases}, \quad (3.22)$$

où les pointillés correspondent aux termes de degré supérieur à  $2l$ . En utilisant les

coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ , lorsque  $\rho$  est suffisamment petit, on a :

$$\begin{cases} \rho_{n+1}^2 &= \rho_n^2 + 2 |\gamma_{2l,2l}| \rho_n^{2l+1} \cos [(2l+1)\theta_n + \varphi + \tau_{2l}] + \dots \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \varphi - |\gamma_{2l,2l}| \rho_n^{2l-1} \sin [(2l+1)\theta_n + \varphi + \tau_{2l}] + \dots \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $\tau_{2l} = \arg \gamma_{2l,2l}^*$ . Pour des valeurs suffisamment petites de  $\rho$ , les directions  $\bar{\theta}$  telles que  $\theta_{n+1} = \theta_n + \varphi$ , données par  $\sin (q\theta + \varphi + \tau_{2l}) = 0$ , sont invariantes par application de  $T^q$ , dont l'équation est :

$$\begin{cases} \rho_{n+q}^2 &= \rho_n^2 + 2q |\gamma_{2l,2l}| \rho_n^{2l+1} \cos [q\theta_n + \varphi + \tau_{2l}] + \dots \\ \theta_{n+q} &= \theta_n - q |\gamma_{2l,2l}| \rho_n^{2l-1} \sin [q\theta_n + \varphi + \tau_{2l}] + \dots \end{cases} \quad (3.24)$$

$2q$  directions invariantes existent, et elles sont séparées par des angles  $\frac{\varphi}{2}$ , avec :

$$q\bar{\theta} = r\pi - \varphi - \tau_{2l}. \quad (3.25)$$

La seconde situation correspond aux conditions :

$$q = \pm (2\delta + 1), \gamma_{3,1} = \gamma_{5,2} = \dots = \gamma_{2l-1,l-1} = 0, \delta < l, \gamma_{2\delta,2\delta} = 0$$

et  $\gamma_{2l+1,l}$  ne peut pas être déterminé afin d'obtenir (3.15), parce que certains termes de degré  $2l$  ne peuvent être éliminés avec les transformations de Cigala (petit diviseurs). Cela veut dire que  $(j - 2k - 1)\varphi \neq 2h\pi, h \neq 0$ , lorsque  $j < 2l$ , ou si  $(j - 2k - 1)\varphi = 2h\pi, j < 2l$ , le coefficient correspondant  $\alpha_k = 0$ . Cette dernière relation est vérifiée lorsque  $j = 2l$ . De plus; on suppose que  $(2\delta + 1)$  n'est pas un diviseur de  $(2l - 2k - 1), k = 0, 1, \dots, 2l$ . Il Apparaît que  $(j - 2k - 1)\varphi = 2h\pi$  n'est satisfait que pour deux valeurs de  $k$  :  $k = l + \delta$  avec  $h = -r$  et  $k = l - \delta - 1$  avec  $h = r$ . On suppose alors qu'au moins un des coefficients  $\gamma_{2l,l+\delta}, \gamma_{2l,l-\delta-1}$  est non nul, de telle sorte qu'une nouvelle transformation de Cigala ne permet pas de définir

$\gamma_{2l+1,l}$ . Cette situation est analytiquement plus complexe, et donne aussi naissance à un col complexe avec différentes possibilités de portraits de phases.

3. Troisième situation :  $\varphi = \frac{2r\pi}{q}$  (cas exceptionnel)  $q$  est un entier pair (deuxième cas d'exception).

Les entiers  $r$  et  $q$  sont incommensurables, et on suppose que l'on a un cas exceptionnel. D'après la relation :

$$(j - 2k) \varphi = 2h\pi, \quad k = 0, \dots, j + 1. \quad h \neq 0,$$

$$j = 2\mu, 2(\mu + 1), \dots, 2l. \quad \mu \geq 1$$

conduisant à un petit diviseur, et les coefficients correspondant  $C_{jk}, \alpha_k$  donnés par (3.17) sont non nuls.

Une première situation correspond aux conditions suivantes :

$$q = \pm 2(l + 1), \gamma_{3,1} = \gamma_{5,2} = \dots = \gamma_{2l-1,l-1} = 0 \text{ pour } l > 1 \text{ et } \gamma_{3,1} = 0 \text{ ou } \neq 0 \text{ pour } l = 1.$$

En d'autres termes, une série de transformations de Cigala permet l'élimination des termes de degré 2, 3, ..., 2l. Alors la relation  $(j - 2k) \varphi = 2h\pi$ , pour  $j = 2l$ , est vérifiée pour  $k = l$  ( $h = 0$ ), et  $k = 2l + 1$  ( $h = -r$ ). Ainsi une transformation de Cigala élimine tous les termes de degré  $(2l + 1)$  sauf les termes ayant un coefficient  $\gamma_{2l+1,l}$  et  $\gamma_{2l+1,2l+1}$  (petit diviseur) et on obtient la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = e^{i\varphi} \xi_n + \gamma_{2l+1,l} \xi_n^{l+1} \eta_n^l + \gamma_{2l+1,2l+1} \eta_n^{2l+1} + \dots, \\ \eta_{n+1} = e^{-i\varphi} \eta_n + \gamma_{2l+1,l}^* \xi_n^l \eta_n^{l+1} + \gamma_{2l+1,2l+1}^* \eta_n^{2l+1} + \dots, \end{cases} \quad (3.26)$$

où les pointillés correspondent aux termes de degré supérieur à  $(2l + 1)$ .

En utilisant les nouvelles coordonnées :  $\xi = \rho \exp(i\theta)$ ,  $\eta = \rho \exp(-i\theta)$ , où  $\rho$  est suffisamment petit, les directions telles que  $\theta_{n+1} = \theta_n + \varphi$ , sont les directions invariantes

de  $T^q$ , données par :

$$\begin{cases} \rho_{n+q}^2 &= \rho_n^2 + 2q\rho_n^{2l+2} [|\gamma_{2l+1,l}| \cos(\varphi + \tau_l) + |\gamma_{2l+1,2l+1}| \cos(q\theta_n + \varphi + \tau_{2l+1})] + \dots, \\ \theta_{n+q} &= \theta_n - q\rho_n^{2l} [|\gamma_{2l+1,l}| \sin(\varphi + \tau_l) + |\gamma_{2l+1,2l+1}| \sin(q\theta_n + \varphi + \tau_{2l+1})] + \dots, \end{cases} \quad (3.27)$$

avec  $\tau_l = \arg \gamma_{2l+1,l}^*$ ,  $\tau_{2l+1} = \arg \gamma_{2l+1,2l+1}^*$ , et  $\varphi + \tau_l \neq \pm \frac{\pi}{2}$ .

Ces directions invariantes  $\bar{\theta}$  sont les solutions de :

$$\sin(q\bar{\theta} + \varphi + \tau_{2l+1}) = -|\gamma_{2l+1,l}| \cdot |\gamma_{2l+1,2l+1}|^{-1} \cdot \sin(\varphi + \tau_l) = a, \quad (3.28)$$

et trois différentes situations apparaissent :

- Si  $|a| > 1$ , il n'y a pas de direction invariante réelle, et les courbes invariantes sont celles d'un foyer distordu, avec  $q$  maxima locaux de  $\rho_n$  pour une rotation de  $\theta$  de l'ordre  $2\pi$ .
- Si  $|a| < 1$ ,  $2q$  directions invariantes existent. Il apparaît que lorsque  $a = 0$ , ces directions sont séparées par des angles de  $\frac{\varphi}{2}$ , contrairement au cas  $a \neq 0$ , pour lequel il y a deux angles adjacents non égaux. A partir de ces deux angles adjacents, les autres directions sont obtenues par  $q$  rotations successives d'angle  $\varphi$ .
- Si  $|a| = 1$ ,  $q$  doubles directions invariantes existent.

Une seconde situation peut aussi conduire à un col complexe ou à d'autres formes de trajectoires avec différentes possibilités de portraits de phases, voir [36].

### 3.3.3 Application et résultats

A partir des trois situations explicitées dans le paragraphe précédent, il est maintenant possible d'étudier la transformation  $T$  découplée. Pour cette récurrence, le degré le plus bas des polynômes  $P_j, Q_j$  de (3.13) est  $m = 2, \mu = 1$ , et  $l$  dans  $G_l$  est  $l = 1$ . Tous les termes de degré deux et trois peuvent être éliminés, excepté les terme  $\xi^2\eta$  dans l'expression

de  $\xi_{n+1}$  dans (3.18).

Les équations (3.27) avec  $\varphi = \frac{2\pi}{4}$  donnent  $|a| > 1$ , les trajectoires sont celles d'un foyer distordu. Après une bifurcation fold, deux cycles d'ordre 4 apparaissent : l'un est un nœud stable, l'autre est un col (voir figures (3.13) et (3.14)). Les points de ces cycles sont localisés sur une courbe invariante fermée instable. Cette courbe a quatre déformations dues à la forte résonance, et elle est constituée des variétés instables du cycle col.

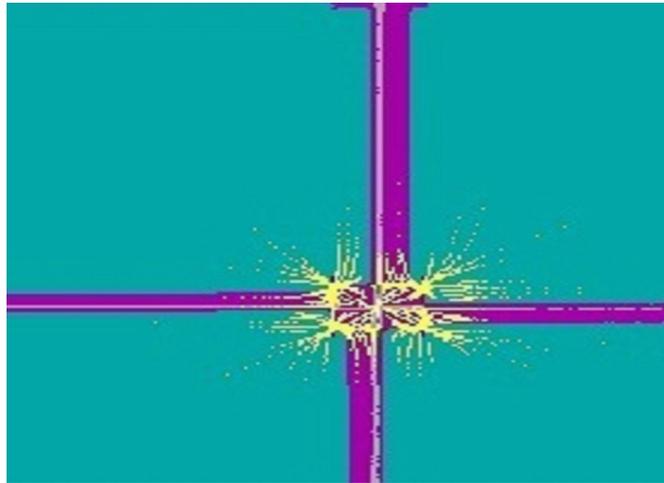


FIG. 3.13 – Bassin d'attraction pour  $c = -0.1, b = -0.7$

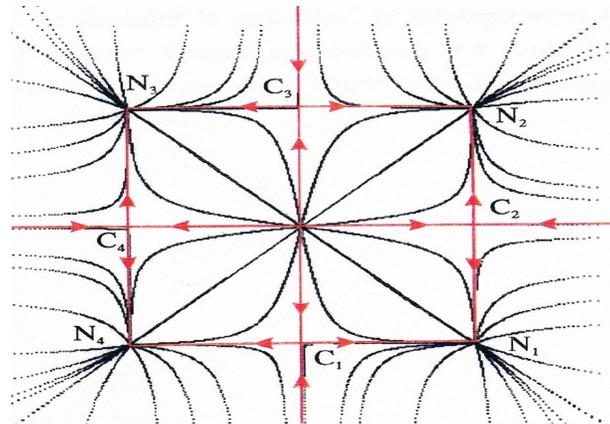


FIG. 3.14 – Les cycles noeud et col situés sur une courbe fermée invariante.

# Conclusion

Le but de notre travail est d'analyser des systèmes non linéaires réels polynomiaux qui peuvent générer des comportements très complexes. L'analyse de ces phénomènes a nécessité des connaissances théoriques sur les comportements complexes pour l'interprétation des résultats obtenus, ces bases théoriques ont fait l'objet du premier chapitre. Dans le deuxième et troisième chapitres, nous avons présenté une étude détaillée sur les transformations non inversibles (endomorphismes de type  $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ ) dépendant de trois paramètres, et pouvant devenir découplés. Ces endomorphismes bidimensionnels se sont avérés très riches en propriétés, comparés aux systèmes bidimensionnels inversibles. En effet, si l'on considère par exemple la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur  $A$ , qui est généralement constituée de la variété stable globale  $W^s(S)$  d'un point fixe de type col  $S$  (ou d'un cycle col), celle-ci est toujours connexe dans le cas d'un difféomorphisme, ce qui implique que le bassin d'attraction est connexe. Ceci n'est pas toujours vrai dans le cas d'un endomorphisme. Ainsi  $W^s(S)$  peut être non connexe, et le bassin d'attraction sera de même.

On a aussi vu, que pour la récurrence découplée une analyse détaillée a consisté à cerner plusieurs phénomènes entre autres la propriété du multistabilité, la structure particulière des cycles et l'illustration de leurs bassins d'attraction. Toutes les routes ou mécanismes de bifurcations qui mènent vers le chaos ont été explorées, qu'elles soient locales (doublements de période) ou globales (bifurcations de contact et d'ensembles invariants) via un important outil celui de ligne critique pour l'étude des bifurcations de bassins d'attraction.

A l'issue de cette étude, plusieurs perspectives sont envisagées. Il serait intéressant de :

- Prolonger l'étude des bifurcations de bassins et de développer les bifurcations homoclines et hétéroclines.
- Faire une étude plus détaillée dans le cas de la généralisation. Il serait particulièrement utile de connaître l'influence de la ligne critique sur les ensembles attractifs et leurs bassins d'attraction, et de bien caractériser le type de l'endomorphisme.
- Etablir une architecture donnant la position de chaque point et déterminer son influence.

# Bibliographie

- [1] Arrowsmith D.K. (1993) "The Bogdanov Map : Bifurcation, Mode Locking, and Chaos in Dissipative System", International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 3, , p. 803-842.
- [2] Aziz-Alaoui H. (1984) "Bifurcation non classiques d'une classe de  $\mathbb{R}^2$  endomorphisme", thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [3] Barugola A, Cathala J.C. et Mira C. (1986) "Annular Chaotic Areas" Nonlinear Analysis TM & A. 10(11), 1223-1236.
- [4] Bernussou J, Liu Hsu et Mira C. (1976) "Quelques Exemples de Solutions Stochastiques Bornées dans les Récurrences Autonomes du 2nd Ordre", Transformations
- [5] Birkhoff G.D. (1927) "On the Periodic Motions of Dynamical Systems", Acta Mathematica, 50.Ponctuelles et Applications, Colloque CNRS, Sept.73 (Ed. CNRS Paris 1976).
- [6] Bischi G.I, Gardini L. et Mira C. (1999) "Maps with Denominator. Part 1 : Some Generic Properties", International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.9, N<sup>o</sup>1, p.119-153.
- [7] Bischi G.I, Mammana C, Gardini L. (2000) "Multistability and cyclic attractor in duopoly games", Chaos, Solitons and Fractals, Vol 11, p 543-564.
- [8] Canovas J.S, Linero A. (2001) "Topological dynamic classification of doupoly games", Chaos, Solitons and Fractals, Vol 12, p 1259-1266.

- [9] Carcasses J P (1997). "A new kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an n-dimensional map" *Nonlinear Analysis TM & A*, vol 28, No5, p 917-946.
- [10] Carcasses J. P, Taha A.K. (2000). "Study of a two-dimensional endomorphism by use of the parametric singularities". *International journal of bifurcations and chaos*, vol.10, n<sup>o</sup> 12, p 2853-2862.
- [11] Cathala J.C. (1989) "On some Properties of Absorptive Areas in 2nd Order Endomorphisms", *ECIT Batschuns*, Sept. 89, Proceedings (World Scientific).
- [12] Cigala A.R. (1905) "Sopra un criterio di instabilita", *Annali di Mathemetica*, Ser. 3, t 11.
- [13] Farmer J.D., "The Dimension of Chaotic Attractors", North-Holland Publishing Company *Physica 7D* (1983) p.153-180.
- [14] Fournier-Prunaret D. (1991) "The Bifurcation Structure of a Family of Degree-one Endomorphisms", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 1, No. 4, p.823-838.
- [15] Frouzakis C, Gardini L, Kevrekidis I, Millerioux G et Mira C. (1997) "On Some Properties of Invariant Sets of Two-Dimensional Noninvertible Maps", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 7, No. 6, p.1167-1194.
- [16] Friedland S. et Milnor J., (1989) "Dynamical Properties of Plane Polynomial Automorphisms", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 9, 67-99.
- [17] Gardini L. (1991) "On the Global Bifurcation of Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines" *Nonlinear Analysis TM & A*. 18(4), p.361-399. 74.
- [18] Gardini L. (1991a) "Global Analysis and Bifurcations in Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines" *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria, Sept. 91* (World Scientific, Singapore, 1992) p.112-125.

- [19] Gardini L. (1992) "Homoclinic Orbits of Saddles in Two-Dimensional Endomorphisms" Proceedings of ECIT Batschuns, Austria, Sept. 92.
- [20] Gardini L. (1994) "Homoclinic Bifurcations in n-Dimensional Endomorphisms Due to Expanding Periodic Points", *Nonlinear Analysis TM & A.* 23 (8), p.1039-1089.
- [21] Gardini L., Abraham R., Fournier-Prunaret D. et Record R.J. (1994) "A Double Logistic Map" *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 4, No. 1, p.145-176.
- [22] Guckenheimer J. et Holmes P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer, New York (1983).
- [23] Gumowski I. et Mira C. (1980) "Dynamique Chaotique" (Ed. Cépadués, Toulouse).
- [24] Gavrilov N.K. et Shilnikov L.P. (1972) "On the Three-Dimensional Dynamical System Close to Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Curve I", *Math. USSR Sb.*, 88 (4) p.467-485.
- [25] Gavrilov N.K. et Shilnikov L.P. (1973) "On the Three-Dimensional Dynamical System Close to Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Curve II", *Math. USSR Sb.*, 90 (1) p.139-156.
- [26] Hénon M., (1976) "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor", *Comm. Math. Phys.* 50 (1) p.69-77.
- [27] Hale J.K. et Lin X.B. (1986) "Symbolic Dynamics and Nonlinear Semiflows", *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie IV*, Tomo CXLIV, p.229-259.
- [28] Jung H.W.E., "Über Ganze Birationale Transformationen der Ebene", *J. Reine Angew. Math.* 184 (1942) p.161-174.
- [29] Kawakami H et Kobayashi K. (1979) "Computer experiments on chaotic solutions of  $x(t+2) - ax(t+1) - x^2(t) = b$ ", *Bull. Fac. of Engin. (Tokushima University)*, Vol. 16, p 29-46.

- [30] Lorenz Edward N, (1963) "Deterministic Nonperiodic Flow", Journal of the Atmospheric Sciences, Vol 20, p 130–141.
- [31] Lupini R, Lenci S, Gardini L. (1997) "Bifurcation and multistability in a class of two-dimensional endomorphisms", Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol 28, No 1, p 61-85.
- [32] Li T.Y. et Yorke J. (1975) "Period three Implies Chaos", Amer. Math. Monthly, 82 (10) p.985-992.
- [33] Marotto J.R. (1978) "Snap- Back Repellers Imply Chaos in  $\mathbb{R}^n$ ", J. Math. Analysis Applic. 63, p.199-223.
- [34] Milnor J., (1985) "On the Concept of Attractor", Comm. Math. Phys. 99 p.177-195.
- [35] Mira C. (1964) "Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d'un Point d'Equilibre d'une Récurrence non-Linéaire du Deuxième Ordre à Variables Réelles", C. R. Acad. Sc. Paris, T. 261, p. 5314-5317, Groupe 2.
- [36] Mira C. (1970) "Sur les cas d'exception pour une récurrence d'ordre 2.", C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 270, p 466-469.
- [37] Mira C. (1987) "Chaotic Dynamics" World Scientific, Singapore.
- [38] Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H. et Cathala J.C. (1994) "Bassin Bifurcations of Two Dimensional Noninvertible Maps : Fractalization of Basins", International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 4, No. 2 p.343-381.
- [39] Mira C., Gardini L., Barugola A. et Cathala J.C., (1996) "Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps", World Scientific Series on Nonlinear Sciences, Series A Vol. 20.
- [40] Mira C. et Narayaninsamy T. (1993) "On Two Behaviours of Two-Dimensional Endomorphisms : Role of the Critical Curves", International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 3, No. 1, p.187-194.

- [41] Moser J. (1973) "Stable and Random Motions in Dynamical Systems", Princeton Univ. Press; Princeton.
- [42] Mira C. et Roubellat J.C. (1969) "Cas où le Domaine de Stabilité d'un Ensemble Limite Attractif d'une Récurrence du Deuxième Ordre n'est pas Simplement Connexe", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A 268, p.1657-1660.
- [43] Mira C. et Rauzy C. (1995) "Fractal Aggregation of Basin Islands in Two-Dimensional Quadratic Noninvertible Maps", International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 5, No. 4, p.991-1019.
- [44] Ruelle D., "Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definitions of Attractors", Comm. Math. Phys. 82, 137.
- [45] Ruelle D, Takens F. (1971) "On the nature of turbulence." Commun. Math. Phys. 20, 167-192 and 23, 343-344.
- [46] Shilnikov L.P. (1965) "A Case of the Existence of a Denumerable Set of Periodic Motions", Sov. Math. Dokl., 6, p.163-166.
- [47] Shilnikov L.P. (1967) "On a Poincaré-Birkhoff Problem", Math. USSR-Sbornik, 3 (3) p.353-371.
- [48] Smale S. (1963) "Diffeomorphisms with many Periodic Points", Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, p.63-80.
- [49] Smale S. (1967) "Differentiable Dynamical Systems", Bull. Amer. Math. Soc. 73, p.747-817.
- [50] Williams R.F., "The Zeta Fonction of an Attractor" Conference on the Topology of Manifolds, ed. J.G.Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston (1968).

# Annexe A : Les exposants de Lyapunov

Il existe des systèmes dynamiques pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps, leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue, on appelle ce phénomène sensibilité aux conditions initiales. Cette propriété du système est caractérisée par une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ. Cette quantité est appelée "exposant de Lyapunov" qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non. Soit  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application différentiable. Soit  $JF(x)$  la matrice Jacobienne de  $F$  au point  $x$  et soit  $JF^m(x_0)$  la matrice Jacobienne de la composée  $m$  fois de  $F$  au point  $x_0$

$$JF^m(x_0) = JF(x_{m-1}) \cdot JF(x_{m-2}) \dots JF(x_0); \quad \text{où } x_i = F^i(x_0).$$

Notons les valeurs absolues des valeurs propres de  $JF^m(x_0)$  en ordre décroissant par :

$$\lambda_1(m, x_0) \geq \lambda_2(m, x_0) \geq \dots \geq \lambda_n(m, x_0).$$

Les exposants de Lyapunov de la trajectoire issue du point  $x_0$  sont définis par :

$$\Lambda_i(x_0) = \ln \left( \lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_i(m, x_0))^{1/m} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Et on a :

$$\Lambda_1(x_0) \geq \Lambda_2(x_0) \geq \dots \geq \Lambda_n(x_0).$$

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Alors si au moins un des exposants de Lyapunov est strictement positif on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange.

# Annexe B : Principales notations utilisées

<u>Symbole</u>	<u>Signification</u>
$\mathbb{R}$	corps des nombres réels
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}^p$	espace vectoriel des vecteurs à composantes réelles, de dimension $p$
$W^s(X^*)$	ensemble stable d'un point fixe $X^*$
$W^i(X^*)$	ensemble instable d'un point fixe $X^*$
$S_i(J)$	valeur propre (de la matrice $J$ )
$\Lambda_{(k)0}^j$	une courbe de bifurcation "fold" (ou "nœud-col")
$\Lambda_k^j$	une courbe de bifurcation "flip" (ou "doublement de période")
$\Gamma_k^j$	une courbe de bifurcation "Neïmark-Hopf"
$C_k^j$	un point cuspidal
$(k, j)$	un cycle d'ordre $k$ , $j$ caractérise l'ordre d'échange des $k$ points du cycle
$LC_k$	ligne critique de rang $k + 1$ ,
$\mathcal{D}(A)$	bassin d'attraction d'un ensemble attractif $A$
$\mathcal{F}$	frontière du bassin d'attraction
$\mathcal{D}_0$	bassin immédiat

$\mathcal{D}_0^*$  bassin immédiat apparent

$Z_k$  l'ensemble des points du plan de phase qui possèdent  $k$   
antécédents de rang 1