

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Thèse pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Biskra, Mohamed KHIDER

En Analyse fonctionnelle et Numérique

Présentée par

LAKEHALI Belkacem

Sur les Equations Intégrales Singulières

Thèse dirigée par Pr. NADIR Mostefa

Soutenue le 11/07/2016 devant le jury composé de

KHELIL	Nacer	MCA	Univ. Biskra	Président
NADIR	Mostefa	Pr	Univ. M'sila	Directeur de thèse
MEROUANI	Abdelbaki	MCA	Univ. Bordj Bou Arreridj	Examineur
RAHMOUNE	Azedine	MCA	Univ. Bordj Bou Arreridj	Examineur
BELLAGOUN	Abdelghani	MCA	Univ. Biskra	Examineur

Table des matières

1	Concepts auxiliaires	1
1.1	Notions d'analyse fonctionnelle	1
1.1.1	Espaces fonctionnels	2
1.1.2	Notions d'opérateurs	5
1.1.3	Quelques opérateurs non-compacts	10
1.1.4	L'indice d'un opérateur singulier	15
1.2	Notions d'analyse Numérique	18
1.2.1	Généralités sur l'interpolation	18
1.2.2	Formules de quadrature	19
1.2.3	Nombre de condition	21
1.2.4	Construction des splines cubiques	22
2	Equations intégrales à noyaux réguliers	26
2.1	Introduction	26
2.2	Classification	29
2.3	Equations de Fredholm de second espèce	29
2.3.1	Alternative de Fredholm	30
2.3.2	Méthodes d'approximation de noyau	31
2.3.3	Méthodes de projection	33
2.3.4	Méthodes de quadrature	38
2.4	Equation de Fredholm de première espèce	39

2.5	Equations de Volterra	42
2.5.1	Equation de seconde espèce	42
2.5.2	Equations de première espèce	43
3	Equations Intégrales Singulières de Cauchy	44
3.1	Introduction	44
3.2	Rappels théoriques sur les équations intégrales singulières de Cauchy (EISC)	47
3.2.1	Solution analytique de l'équation du premier espèce	48
3.2.2	Détermination de la constante C	49
3.3	Formules de quadrature de Gauss	52
3.4	Résolution d'une équation intégrale singulière de Cauchy du second espèce	53
3.4.1	Méthode de Galerkin	57
3.4.2	Méthode de collocation	58
3.4.3	Méthode de Quadratures	59
3.5	Conclusion	63

REMERCIEMENT

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur

Nadir Mostefa

qui a dirigé cette thèse pour son aide et ses nombreux conseils et encouragements.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur

Khelil Nacer

en acceptant de diriger ce jury.

Je remercie

Messieurs *Merouani Abdelbaki*, *Bellagoun Abdelghani* et *Rahmoune Azedine*
qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Je voudrais aussi saluer mon chère collègue *Madani Chemcham* qui m'a
accompagné professionnellement, et amicalement durant toute cette période.

INTRODUCTION

Une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous le signe somme (intégrale). Un grand nombre d'études techniques théoriques peuvent être formulées soit au moyen d'équations différentielles, soit au moyen d'équations intégrales (exemples : valeurs propres en théorie de l'élasticité ou de dynamique des structures, ...). Si l'on a recours aux équations intégrales, les équations tiennent compte des conditions aux limites. L'étude théorique de ces équations porte sur deux types principaux : équations de Fredholm et équations de Volterra. Dans le type d'équations de Fredholm il y a une classe d'équations très importante, dite équations intégrales singulières, dans laquelle beaucoup de problèmes aux limites mixtes rencontrés en élasticité se ramènent à la résolution d'une équation intégrale singulière de Cauchy de la forme

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) ; \quad |x| < 1,$$

où a et b sont deux constantes réelles, k et f sont deux fonctions connues qui vérifient la condition de Hölder sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ et $[-1, 1]$ respectivement.

En mécanique de la rupture, les propriétés de la solution d'une telle équation sont utilisées pour avoir une idée sur la propagation de la fissure, voir (Ref. [19]).

La théorie des équations intégrales singulières a atteint sa forme définitive. Parmi les grand travaux traitant la théorie des équations intégrales singulières de Cauchy, on cite les références de Muskhelishvili "*Singular Integral Equations*" Noordhoff Gronigen, de F. D. Gakhov "*Boundary value problems*" Pergamon, Oxford, 1977. et N. P. Vekua "*Systems of Singular Integral Equations*" Noordhoff Ltd, Groningen, 1967.

La réduction des équations intégrales singulières aux problèmes aux limites de *Riemann-Hilbert* est l'une des méthodes dans la construction de cette théorie.

La transformation de Carleman-Vekua nous permet d'écrire une équation intégrale singulière de Cauchy, de façon équivalente, sous la forme d'une équation intégrale de *Fredholm*. Il existe beaucoup de méthodes numériques qui développent la résolution d'une équation intégrale de *Fredholm* voir Ref. [3], [10] et [57].

Pour une équation intégrale singulière de Cauchy, on peut envisager soit d'utiliser une méthode numérique directe basée sur des formules de quadratures approchées, soit d'utiliser une méthode directe qui consiste à résoudre l'équation intégrale de Fredholm équivalente.

La résolution des problèmes des équations intégrales génère l'utilisation d'opérateurs intégraux singuliers, faiblement singuliers et fortement singuliers. Une difficulté majeure de la mise en oeuvre des méthodes d'équations intégrales réside dans le traitement numérique des singularités des opérateurs impliqués. Les solutions utilisées restent aujourd'hui encore peu satisfaisantes.

Des travaux récents devraient permettre un traitement des singularités bien plus rigoureux sur le plan mathématique. Ces travaux consistent essentiellement à calculer analytiquement la singularité principale associée au noyau. Au travers de cette thèse nous souhaitons atteindre l'objectif de développer des algorithmes dans un cadre plus général afin de mettre en place une technique fiable et plus systématique. Les méthodes décrites ici sont appliquées plus particulièrement dans le cas de l'espace des fonctions continues sur un intervalle compact et dans le cas de l'espace des fonctions intégrables au sens de *Lebesgue* sur un intervalle compact.

Le but de cette thèse est de chercher des solutions approximatives pour certain type d'équations intégrales, en utilisant l'outil des splines. Cet outil qui est très récent, n'est simplement que des polynômes bien appropriés. La théorie des équations intégrales n'est pas seulement intéressante en elle même mais ses résultats sont essentiels pour l'analyse des méthodes numériques. En plus des théorèmes d'existence et d'unicité la théorie s'intéresse, en particulier, aux questions de régularité et de stabilité.

Le premier chapitre fixe brièvement le cadre théorique de notre étude. Nous y rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs linéaires. Le deuxième chapitre est consacré à la description et à l'analyse des deux types d'équations intégrales à noyaux réguliers c'est à dire les équations de *Fredholm* et de *Volterra*. En présentant, bien évidemment, les méthodes d'approximation (méthode de collocation, de Glerkin et de quadrature) des solutions de ces équations ainsi que leurs convergences. Afin de les appliquer aux équations intégrales singulières de Cauchy traitées au troisième chapitre. Où on présente un rappels sur l'étude théorique, de point de vue l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que les méthodes de résolutions numérique globales et locales. En appliquant quelques méthodes récentes à l'opérateur intégral singulier survient dans l'équation intégrale singulière, pour aboutir à des résultats de bonne convergence.

Chapitre 1

Concepts auxiliaires

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Il est commode dans ce chapitre d'introduire brièvement les notions des espaces et les normes associées. On vise essentiellement à rappeler quelques définitions et propriétés de base dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail.

La démonstration des divers résultats énoncés seront omises, la raison principale étant qu'elles se trouvent de façon générale dans la grande majorité des livres d'introduction à l'analyse fonctionnelle, tels que (Ref. [34], [11] et [14]).

L'étude des diverses classes des équations fonctionnelles nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels. Ces espaces ont généralement les espaces de *Banach* ou de *Hilbert*.

On sait qu'en dimension finie tous les espaces vectoriels sont isomorphes à \mathbb{R}^n et se sont donc muni d'une structure euclidienne issue d'un produit scalaire. Cela confère à \mathbb{R}^n beaucoup de propriétés algébriques et surtout topologiques importantes. En dimension infinie, bien sûr, le problème est de nature tout à fait différente.

La version en dimension infinie des espaces euclidiens sont les espaces de *Hilbert*. Ces espaces sont très importants car ils sont à la base des théorèmes d'existence pour les problèmes issues de la physique notamment en ce qui concerne les formulations variationnelles qui entrent dans le cadre de la théorie de Lax-Milgram voir [7].

Les espaces de *Hilbert* sont des espaces de *Banach* muni d'un produit scalaire. Ce concept permet d'étendre à des espaces fonctionnels de dimension infinie le

raisonnement de la géométrie euclidienne classique. Les systèmes orthogonaux et les bases hilbertiennes ont un rôle essentiel dans l'*Analyse Numérique*.

L'Intérêt des espaces de *Hilbert* dans \mathbb{R} est que l'on dispose d'une notion "d'angle" entre de deux vecteurs orientés qui joignent l'origine à ces deux éléments, ceci grâce à l'inégalité de *Cauchy-Schwartz*.

Les espaces de *Hilbert* est une classe particulière des espaces vectoriels normés complets dont la norme *dérive* d'un produit scalaire, ce qui leurs confère une structure très riche. L'ensemble des propriétés spécifiques aux espaces de *Hilbert* reposent sur un résultat fondamental : c'est le théorème de la projection qui prouve l'existence d'un opérateur de projection sur un sous-ensemble fermé. Une conséquence importante est le théorème d'identification de *Riesz* qui prouve qu'un espace de *Hilbert* est isomorphe à son dual, ce qui conduit dans la plus part des cas à identifier l'espace et son *dual voir [31]*

On traitera, dans cette thèse deux catégories d'espaces fonctionnels l'espace des fonctions continues sur un compact est l'espace des fonctions de carré intégrables au sens de Lebesgue

1.1.1 Espaces fonctionnels

- L'espace des fonctions *continues* sur un intervalle fermé I à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), noté $\mathcal{C}[I]$ et muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup \{|\varphi(t)|; \quad t \in I\},$$

est un espace de Banach.

Espace de Hölder

Une fonction φ réelle ou complexe définie sur $I \subset \mathbb{R}$ est dite continue (uniformément) au sens de *Hölder* avec exposant $\mu \in]0, 1]$ si

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \leq c |x - t|^\mu \quad \text{pour tout } x, t \in I$$

où c est une constante qui peut dépendre de la fonction φ . L'ensemble de toutes les fonctions bornées et continues au sens de *Hölder* d'exposant μ , noté par $C^\mu(I)$, est un espace vectoriel. De plus, $C^\mu(I)$ est un espace de *Banach* muni de la norme :

$$\|\varphi\|_\mu = \sup_{x \in I} |\varphi(x)| + |\varphi|_\mu$$

où $|\varphi|_\mu$ est une semi norme donnée par :

$$|\varphi|_\mu = \sup_{x \neq t} \frac{|\varphi(x) - \varphi(t)|}{|x - t|^\mu}; \quad x, t \in I.$$

Remarque 1 *La continuité des fonctions, au sens de Hölder, est une propriété locale : Il est clair que la condition de Hölder, d'exposant $\mu \leq 1$, signifie que l'accroissement de la fonction est infiniment petit d'ordre non inférieur à μ par rapport à l'accroissement de la variable.*

Théorème 2 *Soit I un intervalle compact et $0 < \mu < \beta \leq 1$. Alors les injections :*

$$C^\beta(I) \subset C^\mu(I) \subset C(I)$$

sont compactes.

Pour la preuve voir (Ref. [33]).

– L'espace euclidien $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrables

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \{\varphi; \int_I |\varphi(t)|^2 dt < \infty\},$$

où l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|\varphi\|^2 = \int_I |\varphi(t)|^2 dt,$$

induite par le produit scalaire définit par

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_I \varphi(t) \cdot \psi(t) dt,$$

est un espace de Hilbert.

– Une fonction f est dite *lipschitzienne sur l'ensemble fermé et de dimension finie D* si

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|; \text{ pour tout } x, y \in D; L \text{ une constante}$$

– Un espace métrique est dit *compact* si de toute suite $(\varphi_n)_n$ on peut extraire une sous-suite convergente. En d'autre terme, il existe une suite d'entiers naturel (n_k) tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}$ existe.

On l'appelle aussi espace séquentiellement compact.

- Un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est dit *compact* s'il est compact au sens de la définition précédente où lui-même soit considéré comme un espace métrique (U, d) .
- Un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est dit *relativement compact* si sa fermeture $\overline{\mathcal{U}}$ est compacte.

Théorème 3 (d'Arzelà-Ascoli)

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}[I]$. Alors, \mathcal{U} est dit relativement compact si et seulement si :

- (a) \mathcal{U} est borné dans \mathcal{X} i.e. il existe un nombre positif M tels que $|\varphi(t)| \leq M$ $t \in I$, pour chaque $\varphi \in \mathcal{U}$.
- (b) est *équicontinue*, qui signifie que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tels que pour $t, s \in I$,

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| < \epsilon, \text{ pour } |t - s| < \delta, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{U}.$$

- L'espace des fonctions *continues* sur un intervalle fermé I à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), noté $\mathcal{C}[I]$ et muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\infty} = \sup \{|\varphi(t)|; \quad t \in I\},$$

est un espace de Banach.

- L'espace euclidien $L^2(\mathcal{I})$ des fonctions de carré intégrables

$$L^2(\mathcal{I}) = \left\{ \varphi : \int_{\mathcal{I}} |\varphi(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

où l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_{\mathcal{I}} |\varphi(t)|^2 dt,$$

induite par le produit scalaire définit par

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{I}} \varphi(t) \cdot \psi(t) dt,$$

est un espace de Hilbert.

- Une fonction f est dite *lipschitzienne* sur l'ensemble fermé et de dimension finie \mathcal{D} si

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|; \text{ pour tout } x, y \in \mathcal{D}; c \text{ une constante}$$

- Un espace métrique est dit *compact* si de toute suite $(\varphi_n)_n$ on peut extraire une sous-suite convergente. En d’autres termes, il existe une suite d’entiers naturels (n_k) tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}$ existe. On l’appelle aussi espace séquentiellement compact.
- Un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est dit *compact* s’il est compact au sens de la définition précédente où lui-même soit considéré comme un espace métrique (\mathcal{U}, d) .
- Un ensemble $U \subset X$ est dit *relativement compact* si sa fermeture \overline{U} est compacte.

1.1.2 Notions d’opérateurs

Introduction

Les opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie, pour lesquels on trouve une étude très détaillée dans plusieurs références mathématiques, mais l’étude des opérateurs linéaires arbitraires dans un espace de dimension infinie est un problème assez compliqué.

Certaines classes importantes de ces opérateurs peuvent être décrites de manière assez complète. L’une des plus importantes de ces classes est la classe des opérateurs compacts.

Ces opérateurs sont assez proches, par leurs propriétés, de ceux de dimension finie; (*i.e.* : des opérateurs bornés qui transforment un espace donné en un espace de dimension finie), notez que les opérateurs compacts sont un cas particulier des opérateurs bornés.

Opérateurs bornés

Définition 4 Soit X et Y deux espaces vectoriels, une application $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est appelée opérateur linéaire si :

$$T(\alpha x + \beta y) = \lambda T(x) + \alpha T(y) \quad \forall x, y \in X; \forall \alpha, \beta \in K; (K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$$

Définition 5 Soit X et Y deux espaces normés. Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est continu s’il existe une constante C positive telle que

$$\|T\varphi\| \leq C \|\varphi\|$$

pour toute $\varphi \in X$. Chaque nombre C pour lequel cette inégalité vérifiée est dit une borne de l'opérateur T . En utilisant la linéarité de l'opérateur T , il facile de voir que T est borné si et seulement si

$$\|T\| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T\varphi\| \leq \infty$$

le nombre $\|T\|$ est appelé la norme de T .

- Toute combinaison linéaire des opérateurs bornés est un opérateur borné
- L'ensemble $\mathcal{L}(X, Y)$ des opérateurs bornés de X dans Y est un espace vectoriel.

Théorème 6 Soit X et Y deux espaces normés. L'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace normé, de plus cet espace est de Banach si Y l'est.

Pour la démonstration voir Ref. Kress

Théorème 7 Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.

Théorème 8 Tout opérateur linéaire $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ d'un espace normé de dimension finie X dans un espace Y est borné.

Opérateurs compacts

Définition

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur borné, on dit que T est un opérateur compact si et seulement si l'image de toute partie bornée de X est relativement compacte dans Y .

Autrement dit, toute partie $B \subset X$ est borné, alors $\overline{T(B)}$ est compacte dans Y .

Un opérateur linéaire T défini sur un espace de Banach X dans Y , est dit compact (ou complètement continu) si l'adhérence $\overline{T(B_X)}$ est compacte dans Y , B_X désigne la boule unité dans X .

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Dire que l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact, revient à dire, que pour toute suite bornée (x_n) dans X , la suite image (Tx_n) admet une sous suite convergente dans Y .

Notons l'ensemble des opérateurs bornés par $B(X, Y)$ et l'ensemble des opérateurs compacts par $\mathcal{K}(X, Y)$.

Théorème

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{K}(X, Y)$ est fermé dans $B(X, Y)$.

Définition

Si E est un Banach, et $A \subset E$; on dit que A est précompact si :

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \text{ tels que } A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$$

Un ensemble inclus dans un espace est dit précompact (ou compact par rapport à l'espace où il est inclus), si sa fermeture dans cet espace est compact.

La notion de précompacité est liée à l'espace dans lequel, on prolonge l'ensemble borné. Dans un espace complet la précompacité d'un ensemble implique la compacité.

Définition 9 *On dit que l'opérateur $T \in B(X, Y)$ est de rang fini si $R(T)$ est de dimension fini ($R(T) = \{Tx : x \in X\}$)*

Dans un espace de dimension finie, tout opérateur linéaire est compact.

L'opérateur identique I dans un espace de dimension infinie n'est pas un compact, car il transforme la boule unité en elle-même i.e : (en un ensemble qui n'est pas précompact). Ceci d'après le théorème de Riesz : la boule unité d'un espace normé de dimension infinie n'est pas un ensemble précompact.

En particulier l'image $T(B_x)$ de la boule unité $B_x = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ est bornée. i.e : $T \in B(X, Y)$.

L'ensemble des opérateurs compacts défini dans X à valeurs dans Y

$$\mathcal{K}(X, Y) = \left\{ T \in B(X, Y) : \overline{T(B_1(0))} \text{ est compacte} \right\} \text{ où } B_1(0) = \{x \in X : \|x\| < 1\}.$$

Si Y est complet, l'ensemble des opérateurs compacts devient $\mathcal{K}(X, Y) = \{T \in B(X, Y) : T(B_1(0)) \text{ est précompacte}\}$

De la définition, il s'en suit qu'un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est compact si et seulement si toute suite (x_n) de X , $n \in \mathbb{N}$, la suite $(Tx_n)_n$ admet une sous-suite de Cauchy

Propriétés des opérateurs compacts

Corollaire 10 Soit (T_n) une suite d'opérateurs continus de rangs finis de X dans Y et soit T un opérateur linéaire tel que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. alors T est un compact.

Le problème de l'approximation concerne la réciproque de ce corollaire. Etant donné un opérateur compact, existe-t-il une suite (T_n) d'opérateurs de rang finis telle que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$? La réponse est affirmative dans un espace de *Hilbert*.

Théorème 11 Un opérateur de \mathbf{X} dans \mathbf{Y} est compact si, et seulement s'il est limite d'une suite d'opérateurs de rang finis.

Ce théorème signifie que les opérateurs compacts sont ceux qui "ressemblent" le plus aux opérateurs de dimensions finies.

Remarque 12 Ce résultat n'est plus valable si \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont des espaces de Banach, d'où la nécessité des espaces de *Hilbert*.

Corollaire 13 Si X est un espace complet, toute limite dans $B(X, Y)$ d'opérateurs de rang finis est un opérateur compact.

Théorème 14 Si (T_n) est une suite d'opérateurs compacts dans un espace de Banach X , convergeant en norme vers un opérateur T , alors l'opérateur T est aussi compact.

Démonstration

En effet pour prouver la compacité de l'opérateur T , il suffit de montrer que, pour toute suite bornée $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ d'éléments de X , de la suite (Tx_n) on peut extraire une sous-suite convergente.

Il est facile de vérifier qu'une combinaison linéaire d'opérateurs compacts est compacte. Par conséquent, dans l'espace $B(X, Y)$ de tous les opérateurs linéaires bornés, définis sur X l'ensemble $K(X, Y)$ forment un sous-espace fermé.

Théorème 15 Si T est un opérateur compact et S un opérateur borné, les opérateurs TS et ST sont compacts.

Corollaire 16 Dans un espace de dimension finie, l'inverse d'un opérateur compact n'est pas borné.

En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique $I = TT^{-1}$ serait compact dans X , ce qui est impossible.

Opérateurs intégraux compacts sur $\mathcal{C} [I]$

Dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C} (I)$ où I est fermé borné, une classe importante d'opérateurs compacts est formée par les opérateurs qui peuvent être représentés sous la forme :

$$(T\varphi) (x) = \int_a^b K (x, t) \varphi (t) dt$$

où $\varphi \in \mathcal{C} [I]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, T est un opérateur compact de $\mathcal{C} (I)$ dans $\mathcal{C} (I)$.

Pour prouver la compacité de l'opérateur T il suffit de vérifier le critère d'*Arzelà-Ascoli* :

Un sous-ensemble $U \subset \mathcal{C} [I]$ a une fermeture compacte si et seulement si

- U est sous-ensemble de fonctions uniformément borné
- U est une famille équicontinue

En effet, on considère l'ensemble $U = \{T\varphi; \varphi \in \mathcal{C} [I] \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$. C'est un ensemble uniformément borné puisque $\|T\varphi\|_\infty \leq \|T\| \|\varphi\|_\infty \leq \|T\|$. En plus l'ensemble U est équicontinu ceci se déduit de la continuité du noyau $k(x, t)$ en t , pour tout $x \in I$.

Alors l'opérateur $T : \mathcal{C} (I) \rightarrow \mathcal{C} (I)$ est un opérateur compact.

De plus, soit $I = [a, b]$ et on considère

$$T\varphi (x) = \int_a^b \log (x - t) \varphi (t) dt$$

et

$$T\varphi (x) = \int_a^b \frac{1}{|x - t|^\mu} \varphi (t) dt$$

avec $0 \leq \mu < 1$. Ces deux opérateurs sont des opérateurs compacts voir [3]

Opérateurs intégraux sur $L^2(I)$

Soit $X = Y = L^2([a, b])$ et soit T l'opérateur associé à $k(x, t)$. On montre, que si

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < \infty$$

Pour une fonction $\varphi \in L^2([a, b])$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \|T\varphi\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right] dx \\ &= M^2 \|\varphi\|_2^2 \end{aligned}$$

ceci prouve que $T\varphi \in L^2$ et, on montre que $\|T\| \leq M$. alors l'opérateur $T : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ est compact. Cet opérateur est appelé opérateur de *Hilbert-Schmidt*. Pour plus de détails on se réfère à [?, p.12].

1.1.3 Quelques opérateurs non-compacts

A titre d'exemple, on donne quelques opérateurs qui ne sont pas compacts

Opérateurs d'Abel

Soit $X = Y = C[0, 1]$, on définit

$$\begin{aligned} T\varphi(x) &= \int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \quad x > 0 \\ T\varphi(0) &= \frac{\pi}{2} \varphi(0) \end{aligned}$$

Alors $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$; avec $\|T\| = \frac{\pi}{2}$, voir [3, p.20]

Opérateurs Intégraux Singuliers

Cet opérateur qui est le point principal de cette thèse. On considère Γ une courbe régulière¹ dans le plan complexe \mathbb{C} , on définit l'opérateur intégral

$$T\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Gamma, \quad \phi \in L^2(\Gamma)$$

où l'intégrale est prise au sens de la valeur principale de *Cauchy*.

Opérateurs Intégraux de *Wiener-Hopf*

$X = Y = C([0, \infty[)$, pour les fonctions $\varphi(x)$ continues et bornées sur l'intervalle $[0, \infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$. La norme $\|\cdot\|_{\infty}$. On définit

$$T\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-|x-t|} \varphi(t) f dt, \quad x > 0$$

Cet opérateur n'est pas compact ; il est à remarquer que le domaine d'intégration n'est pas borné et l'équation intégrale associée à cet opérateur peut être convertie en équation différentielle du second ordre, voir [?]

Opérateur de Fredholm

Dans cette section, on rappelle quelques résultats concernant l'opérateur $(I - T)$ avec T un opérateur compact. On note par $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ l'espace des opérateurs bornés définis d'un espace de Banach \mathcal{X} dans lui même.

Théorème 17 *Soit T un opérateur compact défini dans un espace de Banach \mathcal{X} , i.e. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Alors le noyau $\mathcal{N}(I - T) \subset \mathcal{X}$ est sous-espace de dimension finie, l'image $\mathcal{R}(I - T) \subset \mathcal{X}$ est un sous-espace fermé de codimension² finie, et*

$$\dim \mathcal{N}(I - T) = \text{co dim } \mathcal{R}(I - T).$$

¹une courbe diune fonction deux fois différentiable

²La codimension d'un sous-espace $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$ est définie comme la dimension du sous-espace quotient $\mathcal{X}_1/\mathcal{X}$: $\text{co dim}(\mathcal{X}_1) = \dim(\mathcal{X}_1/\mathcal{X})$. Clairement, $\text{co dim}(\mathcal{X}_1) = n$ si et seulement s' il existe, un sous-espace $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ de dimension n , tel que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$.

En particulier, $\mathcal{N}(I - T) = \{0\}$ si et seulement si $\mathcal{R}(I - T) = \mathcal{X}$. D'où, si $\mathcal{N}(I - T) = \{0\}$ alors par le théorème de *Banach* $I - T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ a un inverse $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. En d'autres termes, l'équation

$$\varphi - T\varphi = f$$

a une solution unique

$$\varphi = (I - T)^{-1} f$$

si et seulement si l'équation homogène

$$\varphi - T\varphi = 0$$

a uniquement la solution triviale $\varphi = 0$ pour tout $f \in \mathcal{X}$. Ce principe est connu sous le nom "*Alternative de Fredholm*", (bien que *Fredholm* lui même, a considéré seulement, les équations intégrales, avec les opérateurs intégraux compacts T).

Définition 18 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ défini dans un espace de Banach est dit opérateur de Fredholm (opérateur de Noether, On dit aussi opérateur à indice) si le noyau $\mathcal{N}(T)$ est de dimension finie et l'image $\mathcal{R}(T)$ est fermé et de codimension² finie. L'entier*

$$ind(T) = \dim \mathcal{N}(T) - \text{co dim } \mathcal{R}(T)$$

est appelé l'indice de l'opérateur de Fredholm T .

Théorème 19 *Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ d'indice 0, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{N}(T) = \{0\}$;
- (ii) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ possède un inverse $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Preuve. Comme $ind(T) = 0$, on a $\dim \mathcal{N}(T) = \text{co dim } \mathcal{R}(T)$. Par conséquent, si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ alors $\mathcal{R}(T) = \mathcal{X}$ et $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ existe. Ainsi (i) implique (ii).

L'implication inverse (ii) \implies (i) est claire. ■

² $\mathcal{R}(T)$ admet un supplémentaire algébrique de dimension finie.

Applications contractantes

Soit T une application d'un sous-ensemble \mathbf{E} de l'espace de Hilbert \mathbf{H} . Un élément $f \in \mathbf{E}$ est appelé *point fixe* de T lorsque

$$Tf = f.$$

L'application est dite *contractante* s'il existe une constante $\lambda \in]0, 1[$ pour laquelle

$$\|Tf - Tg\| \leq \lambda \|f - g\|; \forall f, g \in \mathbf{E}$$

Une application a au plus un point *fixe* puisque, si $Tf_1 = f_1$ et $Tf_2 = f_2$ alors

$$\|f_1 - f_2\| = \|Tf_1 - Tf_2\| \leq \lambda \|f_1 - f_2\| \implies f_1 = f_2$$

Principe des contractions ou approximation successives

Théorème 20 Soit \mathbf{E} est un sous-ensemble non vide de l'espace de Hilbert \mathbf{H} , toute application contractante T de \mathbf{E} dans \mathbf{E} possède un point fixe unique f . De plus on a

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n f_0$$

quelque soit f_0 ³ choisi dans \mathbf{E} .

Conclusion 21 Pour tout opérateur borné T défini dans un espace de Hilbert tel que $\|T\| < 1$, l'opérateur $(I - T)$ est inversible; où I est l'opérateur d'identité

Intégrale de Cauchy

Soit Γ une courbe de classe \mathcal{C}^2 dans le plan complexe \mathbb{C} . L'intégrale de *Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \quad (1.1)$$

avec une fonction de densité $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ définit une fonction holomorphe dans le plan complexe \mathbb{C} privé de la courbe Γ . Pour $z \in \Gamma$ l'intégrale diverge. Néanmoins, pour

³Pour $n = 2, 3, \dots$, on définit $T^n f_0$ par $T^2 f_0 = T[Tf_0]$, $T^3 f_0 = T[T^2 f_0]$, ..., $T^n f_0 = T[T^{n-1} f_0]$

$\varphi \in \mathcal{C}^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \leq 1$, l'intégrale converge dans le sens de la valeur principale de Cauchy (*vp*)

$$vp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(z, \epsilon)} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \right]$$

où $\Gamma(z, \epsilon) = \{t \in \Gamma : |t-z| \leq \epsilon\}$.

Expliquons cette définition sur un exemple simple. Comme on le sait, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ prise sur le segment $[-1, 1]$ n'existe pas. Cependant, elle existe en tant qu'intégrale singulière au sens de *Cauchy* puisque la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\log \epsilon + \log \frac{1}{\epsilon} \right) = 0$$

existe (i.e. on a retranché du segment $[-1, 1]$ la partie $[-\epsilon, \epsilon]$) selon la définition de l'intégrale singulière.

Théorème 22 (*Sokhotski-Plemelj*)

Pour une fonction de densité $\varphi \in \mathcal{C}^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \leq 1$, la fonction holomorphe f définie par l'intégrale de Cauchy (1.1) a un prolongement continu, au sens de Hölder, dans l'intérieur et l'extérieur du plan $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} f^-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2} \varphi(z), \quad z \in \Gamma, \\ f^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2} \varphi(z), \quad z \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1.2}$$

i.e. l'intégrale de type Cauchy (1.1) possède des valeurs limites f^+ et f^- auxquelles elle tend lorsque $z \rightarrow t$ à gauche (f^+) et à droite (f^-) de la courbe Γ .

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \|f^-\|_{\mu} &\leq c \|\varphi\|_{\mu} \\ \|f^+\|_{\mu} &\leq c \|\varphi\|_{\mu}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La démonstration est dans (Ref. [55]).

Opérateur Intégral singulier de Cauchy

On présente des conséquences du théorème de Cauchy. L'opérateur intégral singulier de *Cauchy*

$$\mathcal{S} : C^\mu(\Gamma) \longrightarrow C^\mu(\Gamma), \quad 0 < \mu < 1$$

est défini par

$$(\mathcal{S}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt; \quad z \in \Gamma.$$

Notons qu'on a changé le coefficient de l'intégrale de *Cauchy* (1.1). Il s'ensuit des formules (1.2 et 1.3). que l'opérateur \mathcal{S} est borné.

La propriété importante de l'opérateur de *Cauchy* est :

Théorème 23 *Soit $S : C^\mu(\Gamma) \longrightarrow C^\mu(\Gamma)$, un opérateur intégral de Cauchy avec $0 < \mu < 1$; Alors*

$$S^2 = I$$

où I est l'opérateur d'identité.

Preuve. Voir (Ref. [55] p. 110). ■

1.1.4 L'indice d'un opérateur singulier

Définition 24 *Etant donné une fonction $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annule plus sur la courbe Γ , on définit l'indice de g , noté $ind(g)$, l'entier :*

$$ind(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg(g) = \frac{1}{2\pi} [\arg(g)]_{\Gamma} \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\log g(z) = \log |g(z)| + i \arg g(z)$, on a aussi

$$ind(g) = \frac{1}{2\pi i} [\log g]_{\Gamma}.$$

Théorème 25 *Soit donc l'opérateur singulier*

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)S$$

tel que $a(z), b(z) \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$; et

$$a^2(z) - b^2(z) \neq 0 \tag{1.4}$$

pour tout $z \in \Gamma$. Alors l'indice de l'opérateur A noté κ est

$$\kappa = \text{ind} \left(\frac{a(z) - b(z)}{a(z) + b(z)} \right)$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) si $\kappa = 0$ alors, alors l'opérateur \mathcal{A} a un inverse $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\mu(\Gamma))$;
- (ii) si $\kappa > 0$, alors $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \kappa$ et $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^\mu(\Gamma)$;
- (iii) si $\kappa < 0$, alors $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{0\}$ et $\text{co dim } \mathcal{R}(\mathcal{A}) = |\kappa|$.

Ainsi l'opérateur \mathcal{A} est inversible, Voir (Ref. [55]).

Théorème 26 Soit l'opérateur, Voir (Ref. [55] p. 122)

$$(\mathcal{A}\varphi)(z) = a(z)\varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k(x,t)}{t-z} \varphi(t) dt + (T\varphi)(z) \quad (1.5)$$

Supposons que $a(z), b(z) \in \mathcal{C}^\mu(\Gamma)$, le noyau $k(x,t)$ satisfait à la condition de Hölder par rapport aux deux variables z et t . Supposons que $a^2(z) - b^2(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Gamma$. Finalement, on suppose que l'opérateur intégral à noyau $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\mu(\Gamma))$ est un opérateur compact.

Alors l'opérateur intégral singulier $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\mu(\Gamma))$ défini par (1.5) est un opérateur de Fredholm et

$$\kappa = \text{ind} \left(\frac{a(z) - b(z)}{a(z) + b(z)} \right).$$

Définition 27 L'opérateur intégral singulier

$$(\mathcal{A}^*\psi)(z) = a(z)\psi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k(t,z)}{t-z} \psi(t) dt + (T^*\psi)(z) \quad (1.6)$$

est dit l'opérateur conjugué (le dual) de $(\mathcal{A}\varphi)(z)$ défini par (1.5). Rappelons que la dualité des opérateurs dans l'espace $\mathcal{C}^\mu(\Gamma)$ est prise par la forme bilinéaire nondé-générée

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi(t) \psi(t) dt ; \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\mu(\Gamma).$$

On rappelle aussi que, $T^* = -T$.

Théorème 28 *Avec les mêmes hypothèses du théorème précédentes, les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{A}^* définis par (1.5) et (1.6) sont de Fredholm et*

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\mathcal{A}) &= -\operatorname{ind}(\mathcal{A}^*) \\ \mathcal{N}(\mathcal{A}) &= \mathcal{R}(\mathcal{A}^*)^\perp, \quad \mathcal{N}(\mathcal{A}^*) = \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp, \\ \mathcal{R}(\mathcal{A}) &= \mathcal{N}(\mathcal{A}^*)^\perp, \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}^*) = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp, \\ \operatorname{co dim} \mathcal{R}(\mathcal{A}) &= \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}^*), \quad \operatorname{co dim} \mathcal{R}(\mathcal{A}^*) = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Remarque 29 *Enfin, on peut prolonger les propriétés précédentes des opérateurs intégraux de Cauchy de l'espace $\mathcal{C}^\mu(\Gamma)$ à l'espace de Hilbert $L^2(\Gamma)$ à l'aide du théorème de Lax, (Ref. [55]).*

1.2 Notions d'analyse Numérique

1.2.1 Généralités sur l'interpolation

Les résultats généraux sur l'interpolation sont tirés du (Ref. [33] chapt 11). L'opération d'interpolation est un opérateur de projection, qui va en fait nous servir pour introduire une première classe de méthodes, dites méthodes de *Collocation*. On se place donc dans l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, noté $C([a, b])$.

Définition 30 *Pour construire un opérateur d'interpolation, on se donne un sous-espace vectoriel $U_n \subset C([a, b])$ de dimension n . Soit aussi, n points x_1, x_2, \dots, x_n , de $[a, b]$ tel que la seule fonction la seule fonction $\varphi_n \in U_n$ vérifiant $\varphi_n(x_i) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$, soit la fonction nulle. On dit alors, que U_n est un ensemble unisolvant.*

Théorème 31 *Etant donné U_n et les points $\{x_i\}_{i=1}^n$, si on se donne une fonction $\varphi(x)$, il existe une unique fonction $\varphi_n \in U_n$ qui interpole φ aux points x_i , i.e.*

$$\varphi_n(x_i) = \varphi(x_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

l'opérateur d'interpolation $P_n : C([a, b]) \longrightarrow U_n$ qui à toute fonction φ est un opérateur de projection continu.

La chose la plus importante qui est utilisée da la preuve de ce théorème est l'existence d'une base $\{l_j\}_{j=1}^n$ de U_n dite base d'interpolation, i.e. vérifiant

$$l_j(x_i) = \delta_{ij}$$

appelée souvent base de *Lagrange* associée à U_n aux noeuds x_i .

Pour terminer, on donne la formule d'erreur, d'approximation de *Lagrange*, d'une fonction φ . Il existe d'autres types d'interpolation tels que l'interpolation trigonométrique, voir Ref. [52].

Théorème 32 *(Formule d'erreur) On considère le polynôme d'interpolation de la fonction $\varphi_n(x)$ de la fonction $\varphi(x) \in C^{n+1}([a, b])$ en $n + 1$ points de $[a, b]$; $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, tel que $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, on a alors*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|\varphi^{(n+1)}\|_\infty$$

où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, sans hypothèse sur la répartition des noeuds x_i dans $[a, b]$, la convergence de φ_n vers le polynôme d'interpolation φ_n n'est pas forcément uniforme, quand le pas de la subdivision diminue.

1.2.2 Formules de quadrature

Les méthodes d'intégration numériques permettent d'évaluer des intégrales de fonctions dont les valeurs sont connues en un nombre fini de points.

Soit φ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Chaque approximation de

$$I = \int_a^b \varphi(t) dt$$

est dite *formule de quadrature*. Une formule de quadrature classique contient les valeurs $\varphi(t_i)$ de la fonction φ dans le support $[a, b]$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On note la formule de quadrature par

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \varphi(t_i).$$

Les coefficients ω_i sont appelés les *poids* de la formule de quadrature et les noeuds t_i sont les points de la subdivision $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ de l'intervalle $[a, b]$.

L'erreur de quadrature est donnée par

$$e(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) dt - Q_n(\varphi); \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{C}([a, b]).$$

la quantité $\sum |\omega_i|$ joue un rôle essentiel dans l'amplification de l'erreur.

Généralement, on ne dit pas une formule de quadrature mais on dit une suite de formules de quadrature $\{Q_n\}$.

Définition 33 On dit qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si la formule approchée est exacte pour tout polynôme de degré N i.e. si $\varphi \in \mathcal{P}_N$.

Définition 34 Une méthode de quadrature Q_n est dite :

(i) *Convergente*, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) dt; \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}([a, b])$$

(ii) *Consistante, s'il existe un sous ensemble dense $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}([a, b])$ de fonctions continues telles que la formule de quadrature $Q_n(\varphi)$ converge vers l'intégrale I .*

$$Q_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(t) dt; \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}([a, b])$$

(iii) *Stable, si*

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\omega_i| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

La norme de la formule de quadrature $Q_n(\varphi)$ est

$$\|Q_n\| = \sum_{i=1}^n |\omega_i|.$$

La condition de stabilité prend alors, la forme

$$\sup \{\|Q_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Théorème 35 *(de convergence)*

Une méthode de quadrature $Q_n(\varphi)$ est dite convergente si et seulement si elle est stable et consistante.

Preuve. c'est une application direct du théorème *Banach-Stinhaus* voir (Ref. [29] p.11). ■

Les formules classiques de *Newton-Cotes* sont basées sur l'interpolation polynômiale tel que le pas de la subdivision $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ de $[a, b]$ soit equidistant, i.e. $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n}$. En d'autres termes, chaque méthode d'interpolation $\pi_n : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ induit, ce qu'on appelle formule de quadrature interpolatoire, par le biais de la formule

$$Q_n(\varphi) = \int_a^b (\pi_n \varphi)(t) dt$$

où les poids ω_i , dans ce cas, sont les intégrales des polynômes de *Lagrange*

$$\omega_i = \int_a^b l_i(t_j) dt; \quad l_i : \text{polynômes de } Lagrange$$

Une alternative de cette formule () consiste à approcher l'intégrale partiellement seulement. Pour cela, on écrit l'intégrand $\varphi(t)$ sous la forme d'un produit $\varphi(t) = \omega(t) u(t)$. l'intégrale $\int_a^b \varphi(t) dt$ devient $\int_a^b \omega(t) u(t) dt$, où $\omega(t)$ est dite "fonction poids" et, $\omega(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Ce méthode est connue sous le nom "méthode de *Gauss*", qui consiste à calculer numériquement une intégrale en faisant intervenir un poids, et constitue une application directe de la théorie des polynômes orthogonaux .

La méthode de *Gauss* est décrite comme suit : on cherche une formule approchée de la forme

$$\int_a^b \omega(t) u(t) dt \simeq \sum_{i=1}^n \omega_i u_i(t_i); \quad \text{pour } t_i \in [a, b]$$

Il existe un choix et un seul des points t_i et des poids ω_i de sorte que la méthode soit d'ordre plus élevé $2N + 1$ les points (noeuds) sont alors les racine du polynôme utilisé (*Jacobi*, *Legendre*, *hebyshev*,...). Ces méthodes sont très puissantes, à la fois parcequ'elles ont un ordre élevé mais aussi parcequ'elle intègrent directement un poids ω qui peut présenter une singularité sur le ord de l'intervalle $[a, b]$. La seule restriction est de devoir calculer au préalable les racines des polynômes orthogonaus correspondants.

1.2.3 Nombre de condition

Le conditionnement d'une matrice carrée (noté $Cond(A)$) est défini par

$$Cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

il s'aigt simplement du produit de la norme de A et de la norme de son invese. Le conditionnement dépend de la norme utilisée voir Ref. [52]. Le nombre de cond-tion $Cond(A)$ est un nombre supérieur ou égal à 1. Si le conditionnement de la matrice est près de 1, l'erreur relative sera située entre deux valeurs très proches l'une de l'autre. par contre si le conditionnement de la matrice est très grand, la valeur de l'erreur relative sera entre 0 et un nombre très grand. C'est à dire que l'approximation est de faible précision et même, dans certains cas complètement fausse.

1.2.4 Construction des splines cubiques

Bien que les points d'interpolation de *Chebyshev* conduisent à des interpolatants polynômiaux de degré élevés de très bonne qualité pour certaines fonctions, ce n'est pas le cas pour des données tout-à fait quelconques. En règle générale, l'interpolation polynômiale de degré élevé est peu recommandable pour les fonctions peu régulières.

Jusqu'à présent nous avons considéré le problème d'interpolation globale. Nous avons aussi constaté que l'utilisation des polynômes de degré élevé peut produire des résultats décevants, alors qu'il est souvent nécessaire d'obtenir des courbes très régulières ou très lisses passant par un grand nombre de points $(x_i, f(x_i))$. Une autre approche consiste à découper cet intervalle en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ie :

$$I = \bigcup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}] \quad (1.7)$$

est de construire un polynôme de degré plus faible sur chaque intervalle. La fonction globale $f_n(x)$ est alors définie par morceaux (*piecewise*) sur l'intervalle I tout entier.

On peut construire une interpolation linéaire par morceaux en reliant chaque paire de points par un segment de droite. Toutefois, on constate qu'une telle courbe n'est pas satisfaisante. Il est donc nécessaire d'effectuer avec soin la jonction entre les différents segments de courbe. Le choix le plus populaire consiste à utiliser dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ un polynôme de degré trois de la forme :

$$p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

et à relier ces différents polynômes entre eux de façon à ce que la courbe globale soit deux fois différentiable, car la régularité d'une fonction dépend toujours de sa dérivée. Plus une fonction est différentiable, plus la courbe qui lui est associée est lisse (*smooth*) et plus la fonction est régulière. c'est le principe de l'interpolation par les splines, qui possède des propriétés de régularité globales.

Le terme anglais "*spline*" est la contraction de "*smoothed polyline*" polyligne adoucie. Le mot "*spline*" désigne, aussi en anglais, une règle souple et élastique. C'est une baguette de bois, de petite épaisseur, dont les dessinateurs se servaient pour tracer des courbes lisses (régulières) passant par des points imposés, et dont le chemin pour relier ces points est une courbe où l'allure et la tension dépend de la position des points de contrôle et du type d'interpolation choisie.

L'idée, donc, est au lieu d'avoir un polynôme qui approche une fonction sur tout son domaine de définition, on va définir n polynômes de même degré qui vont

chacun interpoler les données dans un des ses sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ce qui résulte une fonction polynômiale par morceaux.

Etant donné $(n + 1)$ points distincts, x_0, x_1, \dots, x_n , de l'intervalle $I = [a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. La fonction spline, notée $s(x)$, sur I est une spline de degré trois relative aux noeuds x_j

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ s_2(x) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ s_n(x) & \text{si } x_{n-1} < x < x_n \end{cases} \quad (1.9)$$

où s_i est un polynôme de degré trois définis par

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3; i = 1, \dots, n \quad (1.10)$$

On doit donc déterminer $4n$ coefficients si :

- La restriction de $s(x)$ sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un élément de l'espace des polynômes de degré trois P_3 .
- La spline $s(x)$ est deux fois continument différentiable i.e : $s(x) \in C^2([a, b])$.

C'est une spline constitué de polynômes différents sur chaque sous-intervalle. Il peut donc y avoir des discontinuités de la dérivée aux noeuds internes x_1, \dots, x_{n-1} . Les noeuds où se produisent ces discontinuités son appelés *noeuds actifs*, dont on aura besoin plus tard.

$s''_{i-1}(x_j) = s''_i(x_j)$ ce qui revient à fixer $3(n - 1)$ conditions. Il reste par conséquent $4n - 3(n - 1) = 3 + n$ degré de liberté.

La spline est une spline d'interpolation c'est à dire $s(x_i) = f_i$ pour $i = 0, \dots, n$ où f_0, \dots, f_n sont des valeurs données. Il reste encore $(3 + n) - (n + 1) = 2$ degrés de liberté à fixer.

Pour cette raison, on impose d'autres contraintes qui définissent d'autres variantes de splines :

- Les plines périodiques, si $s^{(m)}(a) = s^{(m)}(b)$; $m = 0, 1, 2$
- Les splines naturelles, si $s^{(2)}(a) = s^{(2)}(b) = 0$

Notre but est de construire un procédé efficace pour construire une spline cubique interpolant les données x_1, \dots, x_{n-1} .

Introduisant les notations suivantes :

$$f_i = s(x_i), m_i = s'(x_i), M_i = s''(x_i); i = 0, \dots, n \quad (1.11)$$

Comme $s_{i-1}(x) \in P_3$ l'espace des polynômes de degré trois, $s''_{i-1}(x)$ est linéaire, en posant le pas de la subdivision et $h_i = x_i - x_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n$

$$s''_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \text{ pour } x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (1.12)$$

En integrant deux fois la dérivée seconde $s''(x)$ on obtient :

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + D_{i-1}. \quad (1.13)$$

Les constantes C_{i-1} et D_{i-1} sont déterminées en imposant les valeurs aux extrémités $s(x_{i-1}) = f_{i-1}$ et $s(x_i) = f_i$.

Ceci donne, pour $i = 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} C_i &= f_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6}, \quad D_{i-1} \\ &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Imposant à présent la continuité de la dérivée première en x_i ; on obtient :

$$\begin{aligned} s'(x_i^-) &= \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \\ &= \frac{h_{i+1}}{3} M_{i-1} - \frac{h_i}{6} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = s'(x_i^+) \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $s'(x_i^\pm) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s'(x_i \pm \epsilon)$

Ceci introduit au système linéaire suivant :

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (1.16)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \\ \lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ d_i &= \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) \quad i = 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ce système a $(n + 1)$ inconnues et $(n - 1)$ équations, deux conditions restent donc à fixer. En général, ces conditions sont de la forme :

$$\begin{aligned} 2M_0 + \lambda_0 M_1 &= d_0 \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $0 \leq \lambda_0, \mu_n \leq 1$ et d_0, d_n sont des valeurs données.

Pour obtenir les plines naturelles :

$$s''(a) = s''(b) = 0 \quad (1.19)$$

On doit annuler les coefficients ci-dessus.

Un choix très fréquent consiste à poser $\lambda_0 = \mu_n = 1$ et $d_0 = d_n, d_{n-1} = d_n$, ce qui revient à prolonger la spline au-delà des points extrêmes de l'intervalle $[a, b]$ et à traiter a et b comme des points internes. Cette stratégie donne une spline au comportement "régulier". Une autre manière de fixer λ_0 et μ_n (quand les valeurs $f'(a)$ et $f'(b)$ ne sont pas connues) consiste à imposer la continuité de $s^{(3)}(x)$ en x_1 et x_{n-1} .

Comme les noeuds x_1 et x_{n-1} n'interviennent pas dans la construction de la spline cubique, celle-ci est appelée *spline not-a-knot*, avec pour noeuds "actifs" $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n\}$ et interpolant f aux noeuds $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$.

Le système linéaire obtenu est tridiagonal de la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{n-1} & \cdot & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

qui peut être efficacement résolu par l'algorithme de *Thomas*.

Dans *Matlab*, la commande *spline* qui construit une spline cubique avec la condition *not-a-knot* introduite ci-dessus, pour plus de détails voir [52] et [6]

Propriété

Soit $f \in C^2([a, b])$, et soit s_3 la spline cubique naturelle interpolant f . Alors

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad (1.21)$$

Cette propriété s'appelle Propriété de la norme du minimum

Chapitre 2

Equations intégrales à noyaux réguliers

2.1 Introduction

Le premier problème de l'inversion de l'intégrale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt,$$

est un problème de grande importance dans la physique mathématique, a été résolu en 1811 par *Fourier*, il est sans doute le premier exemple des équations intégrales. Ensuite, *Abel* en 1821 était conduit par ses recherches à l'équation

$$g(x) = \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1 \text{ et } f(a) = 0$$

dont il trouva la solution

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_a^t \frac{g'(x) dx}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

L'équation d'*Abel* a été l'objet de nombreuses recherches scientifiques. Elle appartient à la classe des équations intégrales appelées actuellement équations inté-

grales de *Volterra*. L'équation d'*Abel* peut être écrite sous la forme :

$$g(x) = \int_a^x h(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.1)$$

où $f(x)$, $h(x, t)$ sont des fonctions données $\varphi(t)$ une fonction à déterminer. Quand $h(x, t)$ admet une dérivée continue $h'_x(x, t)$ par rapport à x l'équation d'*Abel* devient alors, en passant par dérivation à

$$h(x, x) \varphi(x) + \int_a^x h'_x(x, t) \varphi(t) dt = g'(x)$$

si $h(x, x) \neq 0$ cette dernière équation devient, en divisant par $h(x, x)$,

$$\varphi(x) + \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.2)$$

où $k(x, t) = \frac{h'_x(x, t)}{h(x, x)}$ et $f(x) = \frac{g'(x)}{h(x, x)}$.

Les équations différentielles linéaires, avec des conditions initiales ou avec des conditions aux limites, se transforment en général aussi en équations intégrales. C'est par exemple :

Le problème à valeur initiale $\varphi'(x) = k(x, t)$ avec $x \geq x_0$ et $\varphi(x_0) = \varphi_0$ par intégration de x_0 à x , on obtient $\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x k(t, \varphi(t)) dt$. Les équation des types (2.1) et (2.2) ont été étudiées pour la première fois par *Vito Volterra* qui sont des cas particulier des équations intégrales :

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.3)$$

et

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.4)$$

où les Limites d'intégration sont des quantités fixes. Les types (2.3) et (2.4) correspondent aux fonctions $k(x, t)$ qui s'annulent pour $x < t$. La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation.

Les équations intégrales ont devenue l'oeuvre du vingtième siècle, le développement et l'analyse de méthodes numériques des équations intégrales n'ont été accomplies, pour une grande part, que récemment. Parmi les noms les plus connus qui ont contribué au développement de la théorie des équations intégrales sont *Ivar Fredholm* et *David Hilbert*. Une présentation excellente de l'histoire des équations intégrales peut être trouvée en (Ref. [5]).

Dans la littérature mathématique, on ne trouve pas beaucoup de références qui traite la résolution numérique des équation intégrales par rapport aux grand nombre qui a été publié sur les méthodes numériques des équations différentielles ou les équations aux dérivées partielles. Les références sur la résolution numérique des équations intégrales sont par exemple :(Ref. [3], [4], [8], [15], [29]).

2.2 Classification

Il n'y a pas de méthode universelle pour résoudre les équations intégrales. La méthode de la solution et même l'existence de la solution dépend de la forme particulière de l'équation intégrale. Une équation intégrale est dite linéaire, si l'opération de la linéarité est effectuée sur la fonction inconnue.

Nom de l'équation	forme de l'équation
<i>Fredholm</i> du deuxième espèce :	$\varphi(x) + \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$
<i>Fredholm</i> du premier espèce :	$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$
<i>Wiener-Hopf</i> :	$\varphi(x) + \int_0^\infty k(x-t) \varphi(t) dt = f(x)$
<i>Volterra</i> du deuxième espèce :	$\varphi(x) + \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$
<i>Volterra</i> du premier espèce :	$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$
<i>Renwal</i> :	$\varphi(x) + \int_a^x k(x-t) \varphi(t) dt = f(x)$
<i>Abel</i> :	$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x); \quad 0 < \alpha < 1$
Singulière de <i>Cauchy</i> :	$a(x) \varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi} \int_\Gamma \frac{\varphi(x) dt}{t-x} + \int_\Gamma k(x, t) \varphi(x) dt = f(x);$ où Γ est un arc ouvert ou fermé de \mathbb{R}^2 , comme il peut être un intervalle de \mathbb{R} .

2.3 Equations de Fredholm de second espèce

A cause de leur importance, on commence par étudier les équations intégrales du seconde espèce, l'équation (2.4)

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x).$$

On les appelle aussi les équations intégrales de *Fredholm*. On suppose que le noyau $k(x, t)$ et la fonction donnée $f(x)$ sont bornés et continus (réguliers i.e. smooth).

On peut se dispenser de toute hypothèse de continuité pour cela, il suffit de supposer que le noyau $k(x, t)$ soit de carré sommables¹. Quelle que soit la fonction sommable $k(x, t)$, l'intégrale

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

a un sens, en plus cette intégrale est une fonction continue de x que nous désignerons par $\mathcal{K}\varphi$. Ecrivons l'équation de *Fredholm* (2.4) sous la forme :

$$\varphi + \mathcal{K}\varphi = f \tag{2.5}$$

On cherche donc, une solution φ de l'équation (2.5) dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([a, b])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais aussi son complété pour le produit scalaire² muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.5) peut être établie par les séries de *Newmann* pourvu que \mathcal{K} soit une contraction i.e. $\|\mathcal{K}\| < 1$.

Théorème 36 *Soit \mathcal{K} un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Banach tels que $\|\mathcal{K}\| < 1$. Alors $\mathcal{I} - \mathcal{K}$ possède inverse borné qui est donné par les séries de *Newmann**

$$(I - \mathcal{K})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{K}^i$$

et vérifie

$$\|(I - \mathcal{K})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathcal{K}\|}$$

où $\mathcal{K}^0 = \mathcal{I}$ l'opérateur d'identité et $\mathcal{K}^i = \mathcal{K}\mathcal{K}^{i-1}$; i est un entier naturel.

2.3.1 Alternative de Fredholm

Le théorème de *Riesz* est un théorème très puissant, nous permet de donner une caractérisation, qui gouverne, les solutions de l'équation intégrales de *Fredholm* du seconde espèce dite *alternative de Fredholm* :

$$^1 \int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt < \infty, \int_a^b f(x) dx < \infty.$$

$$^2 \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Théorème 37 Dans un espace de Banach \mathcal{X} , soit \mathcal{K} un opérateur compact. Alors $(I - \mathcal{K})\varphi = f$ a une solution unique $\varphi \in X$ si et seulement si l'équation homogène $(\mathcal{I} - \mathcal{K})\varphi = 0$ a uniquement la solution triviale $\varphi = 0$. Dans ce cas, l'opérateur surjectif $(\mathcal{I} - \mathcal{K}) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ a un inverse borné.

Remarque 38 La chose importante avec la théorie de Riesz est qu'elle permet de réduire l'étude de l'équation avec second membre

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

à celle de l'équation homogène (i.e. sans second membre)

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = 0. \quad (2.6)$$

Une lecture de la littérature mathématique indique que les techniques de résolution de ce type d'équations se décompose en trois grandes catégories : **(1)** Méthodes d'approximation du noyau, **(2)** Méthodes de projection (Collocation et Galerkin) et **(3)** Méthodes de quadrature dite méthode de *Nyström*.

2.3.2 Méthodes d'approximation de noyau

Cette méthode est la plus universelles, puisqu'elle n'utilise nullement de propriétés hilbertiennes (on n'utilise ni produit scalaire, ni projection sur un espace), elle est donc valable sur un espace normé complet quelconque. (i.e. un espace de *Banach*). Comme son l'indique, on essaye de trouver une suite de noyaux $\{k_n(x, t)\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $k_n(x, t)$ converge vers $k(x, t)$ pour une topologie adéquate (ici dans notre cas pour la norme $\|\cdot\|_{2, \infty}$). L'équation de *Fredholm* du second espèce (2.4) devient donc

$$\varphi_n(x) + \int_a^b k_n(x, t) \varphi_n(t) dt = f(x); \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

De cette équation (2.7) on génère ensuite de solution $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ qui, sous des conditions convenables, converge en norme vers la solution $\varphi(x)$; voir (Ref. [3]).

Pratiquement, il est nécessaire de définir la suite $\{k_n(x, t)\}_{n=1}^{\infty}$ afin que l'équation (2.7) peut être réduite à un problème arithmétique facile à résoudre c'est à

dire un système d'équations linéaires bien conditionné. Le seul noyau remplissant ces exigences est le noyau *dégénéré*

$$k_n(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(t) \quad (2.8)$$

dans ce cas

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \left[\int_a^b b_i(t) \varphi_n(t) dt \right] &= f(x) ; \quad n \geq 1 \\ \varphi_n(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) c_i &= f(x) ; \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

où

$$c_i = \int_a^b b_i(t) \varphi_n(t) dt, \quad (2.10)$$

et les termes $\{c_n\}_{i=1}^n$ peuvent être obtenus en résolvant les équations linéaires

$$c_i = f_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

avec

$$f_i = \int_a^b f(t) b_i(t) dt ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12)$$

et

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t) a_j(t) dt ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Remarque 39 *Il s'agit donc de présenter une méthode d'approximation d'un opérateur continu par une suite d'opérateurs de rang fini. Pour cela, on se donne un opérateur linéaire continu \mathcal{K} et l'on cherche à l'approcher par une suite d'opérateurs $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le fait important est, une fois l'opérateur dégénéré \mathcal{K}_n est calculé alors la résolution du problème d'approximation résulte de la résolution d'un système d'équations linéaires. D'où on tire le théorème voir (Ref.[33] p. 178).*

Théorème 40 *Chaque solution de l'équation*

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_n, b_j \rangle a_j + f \quad (2.14)$$

est de la forme

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k a_k + f \quad (2.15)$$

où les coefficients $c_k ; k = 1, 2, \dots, n$ satisfont le système linéaire

$$c_j - \sum_{k=1}^n \langle a_k, b_j \rangle c_k = \langle f, b_j \rangle ; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

Dans le cas où l'opérateur \mathcal{K} est à noyau dans l'espace $\mathcal{C}([a, b])$, cette méthode correspond à approcher \mathcal{K} par une suite d'opérateurs de noyaux dégénérés \mathcal{K}_n de la forme (2.8). l'équation (2.7) peut être écrite sous la forme

$$\varphi_n + \mathcal{K}_n \varphi_n = f. \quad (2.17)$$

Pour compléter on présente une condition pour établir la convergence et la stabilité de cet algorithme

Théorème 41 *Supposons que $\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \rightarrow 0$,. Alors il existe n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$ $(I - \mathcal{K})^{-1}$ est borné, $\|(I - \mathcal{K})^{-1}\|$ est uniformément borné et $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$. De plus l'estimation de l'erreur est*

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \|(I - \mathcal{K})^{-1}\| \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \|\varphi\|$$

La preuve de ce théorème est dans (Ref. [3]).

2.3.3 Méthodes de projection

Les méthodes de projection comprend la méthode de collocation, la méthode des moments, la méthode de *Galerkin* et les procédures des moindres carrés. Le formalisme de l'analyse fonctionnelle est la voie la plus courte avantageuse pour décrire ces méthodes.

Revenons à l'équation (2.5) $\varphi + \mathcal{K}\varphi = f$ telle que l'opérateur \mathcal{K} est défini sur un espace de *Banach* par $\mathcal{K}\varphi = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$. Si le noyau $k(x, t)$ est continu ou

plus généralement possède certain type de singularités intégrables, alors \mathcal{K} définit un opérateur compact sur l'espace de *Banach* ($\mathcal{C}([a, b])$ ou $L^2([a, b])$). Considérons maintenant, une suite $\{\mathcal{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sous-espaces de dimension finie, de l'espace de *Banach* \mathcal{X} telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ soit dense dans X . Soit \mathcal{Y}_n une autre suite de sous-espaces de dimension finie de \mathcal{X} et soit $P_n : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}_n$ définit une suite d'opérateurs de projection³. Pour résoudre l'équation (2.5) on essaye d'approcher φ par la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $\varphi_n \in \mathcal{X}_n$. Soit

$$r(\varphi_n) = \varphi_n + K\varphi_n - f \quad (2.18)$$

le résidus. Si $\varphi_n = \varphi$, alors $r(\varphi_n) = 0$. Cependant, en général $\varphi_n \neq \varphi$, on doit donc, choisir φ_n de telle sorte que le résidus $r(\varphi_n)$ soit aussi petit que l'on veut dans un sens. Ceci ne sera accompli que si la projection du résidus $r(\varphi_n)$ sur \mathcal{Y}_n soit égale à zero. C'est à dire, que φ_n doit être sélectionné pour résoudre

$$P_n r(\varphi_n) = 0,$$

cela est équivalent à dire que

$$P_n \varphi_n + P_n \mathcal{K} \varphi_n = P_n f.$$

La mise en oeuvre la plus courante de cette technique est de poser $X_n = Y_n$; $n = 1, 2, \dots$, afin que $P_n \varphi_n = \varphi_n$ et φ_n un solution de l'équation

$$\varphi_n + P_n \mathcal{K} \varphi_n = P_n f. \quad (2.19)$$

Corollaire 42 Soit $\mathcal{K} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur compact, $(\mathcal{I} - \mathcal{K})$ injectif et les opérateurs de projection $\mathcal{P}_n : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_n$ converge point par point (pointwise) i.e. $\mathcal{P}_n \varphi \longrightarrow \varphi$, $n \longrightarrow \infty$, pour toute fonction $\varphi \in X$. Alors la méthode de projection pour $(\mathcal{I} - \mathcal{K})$ converge, c'est à dire pour l'équation de Fredholm du second espèce.

Preuve. La preuve de ce théorème utilise le théorème de *Banach-Steinhaus*

applique le **théorème 13.7** du Ref. [33].

Si \mathcal{B} est compact et $\mathcal{K} + \mathcal{B}$ est injectif, alors la méthode de convergence converge aussi $\mathcal{K} + \mathcal{B}$. ■

Pour expliciter les systèmes obtenus linéaires (pour résoudre le problème numériquement), il suffit de prendre une suite $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ comme base de l'espace X_n et écrire φ_n sous la forme :

³Une projection est une application vérifiant : $P^2 = P \circ P = P$.

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k.$$

Etant donnée $\{l_k\}_{k=1}^n$ une base⁴ de l'espace dual \mathcal{X}^* de \mathcal{X} les coefficients $\{a_k\}_{k=1}^n$ peuvent être obtenus en résolvant le système d'équations :

$$\sum_{k=1}^n l_j(\psi_k) a_k + \sum_{k=1}^n l_j(\mathcal{P}_n \mathcal{K} \psi_k) a_k = l_j(f_n); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Pour illustrer cette idée d'une façon plus concrète, on va étudier deux méthodes.

Méthode de collocation

Collocation polynômiale

La méthode de collocation est la méthode la plus simple à réaliser. la structure habituelle est d'approcher la fonction inconnue $\varphi(x)$ en utilisant une famille de fonctions définies globalement sur $[a, b]$, par exemple des polynômes, polynômes trigonométriques, etc...Généralement ces fonctions approchées sont infiniment différentiables. Dès fois ce type de méthodes de collocation est connu sous le nom "*méthodes spectrales*" spécialement lorsque on utilise les polynômes trigonométriques.

Soit $\mathcal{X} = (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ et \mathcal{X}_n est le sous-espace des polynômes de degré $n-1$. Dans cette méthode $\mathcal{X}_n = \mathcal{Y}_n$ et \mathcal{P}_n est l'opérateur qui transforme la fonction $\varphi \in \mathcal{X}$ en un polynôme de degré $n-1$ qui interpole la fonction φ aux points $\{x_1, x_1, \dots, x_n\}$. C'est à dire

$$\mathcal{P}_n(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) l_k(x),$$

où $\{l_k(x)\}_{k=1}^n$ sont les polynômes fondamentaux d'interpolation de Lagrange. Ceci nous donne

$$(\mathcal{P}_n \mathcal{K} \varphi)(x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) \int_a^b K(x_k, t) \varphi(t) dt. \quad (2.21)$$

Soit $\{p_k(x)\}_{k=1}^n$ une base du sous-espace X_n ; l'équation projetée (2.20) devient

$$\varphi_n(x) + \sum_{k=1}^n l_k(x) \int_a^b K(x_k, t) \varphi_n(t) dt = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_k)$$

⁴une base dual est une forme linéaire.

en évaluant les deux membres de l'équation (2.21) aux points $x = x_j, j = 1, 2, \dots, n$, et en utilisant le fait que $l_k(x_j) = \delta_{kj}$ ⁵ on obtient donc

$$\varphi_n(x_j) + \int_a^b K(x_j, t) \varphi_n(t) dt = f(x_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

Mettons

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k p_k(x)$$

et substituons dans l'équation (2.22) on obtient l'équation courante de collocation (Ref. [3] et [50])

$$\sum_{k=1}^n a_k p_k(x_j) + \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b K(x_j, t) p_k(t) dt = f(x_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

Remarque 43

1. Dans d'autres méthode de collocation, on décompose l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en plusieurs sous-intervalles $\Delta_j, j = 1, 2, \dots, n$ et on approche alors la fonction $\varphi(x)$ par un polynôme de degré faible sur chaque sous-intervalle Δ_j . Ces méthodes sont connues sous le nom de "méthodes de collocation polynomiale par morceaux", par exemple on prend les fonctions splines pour représenter la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui est dans le sens de nos articles [?] et [?]. Si $[a, b]$ est une frontière d'une région, on appelle alors ces méthodes, "méthodes des éléments frontières i.e. Boundary Elements Methods".
2. Il n'existe pas de théorie du choix des noeuds d'interpolation pour la méthode de collocation. Cependant, Dans le cas où la solution oscille considérablement dans un sous-intervalle on doit donc augmenter le nombre se de points d'interpolation dans ce sous-intervalle.

Méthode de Galerkin

Pour la méthode de Galerkin, on prend $\mathcal{X} = (L^2[a, b], \|\cdot\|_2)$, où $L^2[a, b]$ est l'espace de Lebesgue des fonctions carrées intégrables sur $[a, b]$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

⁵le symbole de Kronecker, $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$

. Soit $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ une base de \mathcal{X} . Prenons les sous-espace X_n engendré par $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, $Y_n = X_n$ et P_n la projection orthogonale sur X_n , si $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ est orthonormée alors

$$P_n \varphi = \sum_{k=1}^n \langle \varphi, \psi_k \rangle \psi_k,$$

$$\text{où } \langle \varphi, \psi_k \rangle = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi_k(x)} dx.$$

En posant

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x),$$

comme précédemment les coefficients a_k peuvent être calculés de l'équation

$$\sum_{k=1}^n a_k \langle \psi_k, \psi_j \rangle + \sum_{k=1}^n a_k \langle \psi_k, K \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j \rangle; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.24)$$

dans le cas où est orthonormée l'équation (2.24) se devient en

$$a_j + \sum_{k=1}^n a_k \langle \psi_j, K \psi_k \rangle = \langle f, \psi_j \rangle; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

on observe dans ce cas que $\varphi_n(x)$ satisfait l'équation

$$\varphi_n(x) + \int_a^b K_n(x, t) \varphi_n(t) dt = f_n(x),$$

où $K_n(x, t)$ est un noyau dégénéré donné par $K_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \omega_k(t)$, avec

$$\omega_k(t) = \int_a^b K(x, t) \overline{\psi_k(x)} dx.$$

Pour établir la convergence voir (Ref. [3]), on récrit l'équation (2.19) sous la forme

$$\varphi_n + K_n = f_n \quad (2.25)$$

où $K_n = P_n K$ et $f_n = P_n f$. les hypothèse habituelles à poser sont

$$(i) \quad \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \longrightarrow 0, \quad (ii) \quad \mathcal{P}_n f. \longrightarrow f.$$

Théorème 44 *Supposons que les deux hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites. Alors pour tout $n \geq n_0$, $(I - K_n)^{-1}$ est borné, $\|(I - K_n)^{-1}\|$ est uniformément borné, et $\|\varphi_n - \varphi\| \longrightarrow 0$. Alors l'estimation de l'erreur est*

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \|(I - K_n)^{-1}\| \|\varphi - P_n \varphi\|.$$

2.3.4 Méthodes de quadrature

Comme il a été indiqué précédemment, une formule de quadrature consiste à approcher une intégrale $I = \int_a^b \varphi(t) dt$ par une somme pondérée de valeurs de φ , en des points appelés noeuds.

La méthode de quadrature est appelée aussi méthode de *Nyström*, c'est la méthode la plus naturelle d'approcher la solution de l'équation intégrale (2.4).

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x).$$

en remplaçant le terme d'intégrale par une formule de Quadrature, à condition que le noyau $k(x, t)$ soit continue⁶

$$(K\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.26)$$

par

$$(K_n\varphi)(x) = \sum_{k=1}^n \omega_k k(x, t_k) \varphi(t_k) \quad ; x \in [a, b].$$

Alors la solution de l'équation de l'équation intégrale

$$\varphi + K\varphi = f$$

est approchée par la solution de l'équation

$$\varphi_n + K_n\varphi_n = f$$

qui sera réduite à un système linéaire de dimension finie. Donc

$$\varphi(x) + \sum_{k=1}^n \omega_k k(x, t_k) \varphi(t_k) \simeq f(x), \quad (2.27)$$

où $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ et $\{t_k\}_{k=1}^n$ sont respectivement les poids et les noeuds de la formule de quadrature, voir (Ref. [3], [35]). Si $\varphi_n(x)$ est une solution de l'équation

$$\varphi_n(x) + \sum_{k=1}^n \omega_k k(x, t_k) \varphi_n(t_k) = f(x), \quad (2.28)$$

⁶si le noyau $k(x, t)$ est singulier, on se reporte au chapitre des équations intégrales singulières.

alors l'évaluation de $\varphi_n(x)$ aux points $x = x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, donne le système d'équations algébriques pour $\{\varphi(x_j)\}_{j=1}^n$:

$$\varphi_n(x_j) + \sum_{k=1}^n \omega_k k(x_j, t_k) \varphi_n(t_k) = f(x_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

Si l'équation (2.29) possède une solution unique pour n suffisamment grand, alors l'équation (2.28) donne une formule d'interpolation pour obtenir $\varphi_n(x)$ en tout point $x \in [a, b]$. Bien qu'on peut commencer de l'équation (2.29) et on utilise d'autre forme d'interpolation, la relation entre les deux équations (2.28) et (2.29) est très utile à la fois numériquement et théoriquement. Cette relation est le coeur de l'analyse moderne.

En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation du noyau $k(x, t)$ par un opérateur de dimension finie, c'est à dire par une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle présente donc un moyen efficace de résolution numérique des équations intégrales. Pour un exposé complet, il faut se reporter à (Ref. [33]).

Convergence de la méthode Nyström

On suppose que les formules de quadrature de la méthode de *Nyström* sont convergentes. La méthode d'intégration numérique est convergente *point par point* (*pointwise*) i.e.

$$\forall \varphi \in C([a, b]), K_n \varphi \longrightarrow K \varphi \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

on trouve l'étude de la convergence de cette méthodes dans (Ref. [3] et [33]).

2.4 Equation de Fredholm de première espèce

Les équations intégrales du première espèce sont caractérisées par la fonction inconnue φ qui se trouve uniquement sous le signe intégrale, alors dans les équations du seconde espèce la fonction inconnue figure à la fois à l'extérieur et sous le signe d'intégrale. Cette petite différence structurelle change radicalement l'analyse théorique et numérique.

Cette espèce d'équations prend la forme

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad ; x \in [a, b], \quad (2.30)$$

il s'agit, donc de l'équation

$$K\varphi = f$$

avec la même hypothèse de continuité (ou d'intégrabilité au sens de *Lebesgue*) sur le noyau $k(x, t)$ comme dans la section précédente.

Les équations de *Fredholm* du première espèce sont généralement classées comme problèmes mal posés, à cause de la sensibilité de la solution $\varphi(x)$ aux petites variations sur la fonction donnée $f(x)$. En d'autres termes, des variations des données aussi petites que l'on veut peuvent amener des variations aussi grandes que l'on veut de la solution. Cette distinction est justifiée par les propriétés très différentes des deux types d'équations de *Fredholm*. Les équations du première espèce auxquelles, on se contente de donner quelques généralités, conduisent donc à des problèmes mal posés⁷. On ne traitera pas la convergences de ces approximations le cadre naturel, pour cela est l'études des propriétés régularisantes des méthodes de projection, même l'existence de la solution n'est pas claire. Pour plus de détails voir (Ref. [33]).

En revanche, celles de second espèce ont, en général, une solution unique cela relève de l'alternative de *Fredholm* énoncée précédemment. Cette distinction est liée à la compacité de l'opérateur intégral (2.26)

$$(K\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt.$$

De plus, la résolution des équations du seconde espèce est un problème *bien posé*. C'est à dire une petite perturbation sur les données (i.e. $f(x)$) entraîne une petite perturbation sur la solution. Formellement ceci provient du fait que si K est compact, alors $(I - K)^{-1}$, s'il existe, il est borné. Pour les équations du première espèce à noyau intégrable, la compacité de K est la source de la difficulté. Si $K^{-1} : \text{Im}(K) \rightarrow X$ ($X = C([a, b])$ ou $L^2([a, b])$) existe, il est généralement non borné, ainsi on ne pourra pas avoir la forme de l'estimation

$$\|\varphi\| \leq C \|f\|.$$

Alors la résolution du problème (2.30) est par nature instable, l'instabilité qui se manifeste dans le mal conditionnement de la matrice d'approximation de l'opérateur K , c'est à si on fait une petite variation sur la donnée $f(x)$ entraîne une grande variation sur la fonction $\varphi(x)$. ce qui veut dire que la matrice du système

⁷Une autre façon de comprendre le caractère mal posé passe par le lemme de *Riemann-Lebesgue*.

(2.31) obtenue après discrétisation est mal conditionnée (pour les matrices mal conditionnées voir [52] et [20]).

Pour une étude détaillée avec de exemples, il faut se reporter à (Ref. [4]).

Néanmoins, il est possible de résoudre l'équation (2.30) par les méthodes lesquelles sont entièrement analogues à ceux utilisées pour équations du deuxième espèce. Donc on peut utiliser les techniques précédentes (Galerkin, collocation) pourvu que le système d'équations linéaire, résultant de la discrétisation de l'équation intégrale, ne soit pas mal conditionné voir (Ref. [4]).

On se contentera de présenter la méthode de quadrature pour cette espèce. L'application d'une formule de quadrature à une équation intégrale de première espèce pour une méthode de collocation, on exprime que l'équation intégrale est vérifiée en un nombre fini de points x_j , $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\int_a^b k(x_j, t) \varphi(t) dt = f(x_j); \quad j = 1, 2, \dots, n$$

et on remplace l'intégrale ci-dessus par la formule de quadrature choisie comme précédemment on obtient le système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^m \omega_i k(x_j, t_i) \varphi(t_i) = f(x_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.31)$$

En posant

$$k_{ij} = k(x_j, t_i), \varphi_i = \varphi(t_i) \text{ et } f_j = f(x_j),$$

avec $i = 1, 2, \dots, m$ et $j = 1, 2, \dots, n$ on aboutit à un système d'équations linéaires de la forme $Ax = b$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1 k_{11} & \omega_2 k_{12} & \cdot & \cdot & \omega_m k_{1m} \\ \omega_1 k_{21} & \omega_2 k_{22} & \cdot & \cdot & \omega_m k_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1 k_{n1} & \omega_2 k_{n2} & \cdot & \cdot & \omega_m k_{nm} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_m \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix},$$

où A est une matrice généralement mal conditionnée⁸.

⁸ $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

2.5 Equations de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau k est tel que

$$k(x, t) = 0 \quad \text{pour } t > x.$$

avec limite d'intégration variable. Ces équations ont des propriétés spéciales, les équations de *Volterra* de seconde espèce ont toujours une solution.

2.5.1 Equation de seconde espèce

Les équations de *Volterra* de seconde espèce s'écrivent comme

$$\varphi(x) + \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x); \quad x \in [a, b]$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $k(x, t)$ le noyau de l'équation intégrale et $f(x)$ est le terme de source qui est une fonction donnée.

De manière identique, la représentation matricielle de l'équation de *Volterra* est identique à celle correspondante de *Fredholm*, seule la structure du noyau k est différente, puisque comme pour toutes les équations de *Volterra* linéaires, la matrice K triangulaire inférieure.

Théorème 45 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$, l'équation de Volterra de seconde espèce (2.2) avec un noyau $k(x, t)$ continu, a une solution unique $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$.*

Preuve. La démonstration est tirée du (Ref. [33], chapt. 3).

On prolonge le noyau sur $[a, b] \times [a, b]$ en posant $k(x, t) = 0$ pour $t > x$. Alors le noyau k est continu pour $x \neq t$ et

$$k(x, t) \leq \max_{a \leq t \leq x \leq b} |k(x, t)| = M; \quad \text{pour } x \neq t.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) + \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = 0; \quad x \in [a, b]$$

On montre que :

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{M^n (x-a)^n}{n!}, \quad x \in [a, b], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Il est clair que cette inégalité est vérifiée pour $n = 0$. Supposons que l'inégalité (2.32) est vérifiée pour $n \geq 0$. Alors

$$|\varphi(x)| = \left| \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \right| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{M^{n+1} (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

par passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans (2.32) on obtient $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Comme l'opérateur de *Volterra* est compact et à l'aide du théorème *Reisz* alors l'équation (2.2) admet une solution unique. ■

2.5.2 Equations de première espèce

Les équations de *Volterra* de première espèce sont définies par l'équation

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x); \quad x \in [a, b]$$

La réécriture matricielle de l'équation de *Volterra* est identique formellement à celle de *Fredholm*, mais avec la particularité que la matrice associée au noyau k est une matrice triangulaire inférieure. Ce type d'équations linéaires, comme nous l'avons vu précédemment, peut être résolu par une méthode de substitution. Alors que les équations de *Fredholm* de première espèce sont généralement mal conditionnées, les équations de *Volterra* ne le sont pas.

En dépit de ce fait, en général, les équations intégrales de *Volterra* de première espèce sont plus délicates que celle de seconde espèce. Sous certaines conditions les équations intégrales de *Volterra* de première espèce peuvent être réduites aux équations de seconde espèce.

Pour se faire, on considère l'équation (2.1) et on suppose que les dérivées $k_x = \partial k / \partial x$ et f' existent et sont continues, on suppose de plus que $k(x, x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, en dérivant les deux membres de l'équation (2.1) par rapport à la variable x on obtient une équation intégrale de *Volterra* de seconde espèce

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{k_x(x, t)}{k(x, x)} \varphi(t) dt = \frac{f'(x)}{k(x, x)}; \quad x \in [a, b]. \quad (2.33)$$

Les équation (2.1) et (2.33) sont équivalentes sib $f(a) = 0$.

Chapitre 3

Equations Intégrales Singulières de Cauchy

3.1 Introduction

Dans les méthodes de calcul numériques des équations intégrales de type de Fredholm ou de Volterra apparaissent des intégrales régulières qui sont généralement calculées par les schémas classiques de type quadrature de Gauss voir (Ref. [35]), où on peut trouver une discussion sur le choix du nombre de noeuds à utiliser pour évaluer approximativement une intégrale.

Comme on peut recourir à des schémas plus avancés qui sont les quadratures de Curtis-clenshaw et les quadratures de Kronrod (Ref. [35]). Lorsque les équations intégrales comportent des intégrales singulières, le calcul de ces intégrales singulières pose des problèmes plus épineux. En effet, ces intégrales singulières tendent à rendre dominants les termes proches de la diagonale dans la matrice du système linéaire obtenu après une discrétisation de l'équation intégrale, qui à leurs tour influencent sur le bon conditionnement du système linéaire.

Il existe en fait, trois types d'intégrales singulières : les intégrales faiblement singulières, les intégrales singulières au sens de la valeur principale de Cauchy et les intégrales hypersingulières pour plus de détails voir (Ref. [35]). Mathématiquement parlant, à cause de la singularité de la fonction sous le signe d'intégral, une petite région au voisinage de la singularité doit être exclue du domaine d'intégration, et l'on cherche alors la limite lorsque la distance de cette région tend vers zero si cette existe et est indépendante de la forme du voisinage, l'intégrale singulière est dite faiblement singulière, si cette limite existe uniquement si la forme du voisinage exclu

est un cercle, alors on parle d'intégrale singulière en valeur principale de Cauchy, et dans le cas d'une singularité d'ordre supérieure, on parle d'intégrale hypersingulière. En d'autres termes, les intégrales singulières sont des intégrales dont l'intégrand atteint une valeur infinie en quelques points dans le domaine d'intégration. Malgré cette situation, les intégrales peuvent converger pour certaines valeurs (dans ce cas on dit que l'intégrale existe). Les intégrales singulières sont, en général, définies par élimination d'un intervalle très petit contenant la singularité, et on obtient la limite quand cet petit intervalle tend à disparaître.

$$\int_I f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{I-I_\epsilon} f(x) dx \quad (3.1)$$

En dimension 3 I_ϵ peut être une boule de rayon ϵ

En dimension 2 I_ϵ peut être un cercle de rayon ϵ

En dimension 1 I_ϵ peut être un segment de longueur ϵ à chaque côté du point singularité lorsque la singularité est localisée.

Si la limite de l'équation (3.1) existe indépendamment du choix I_ϵ , sans savoir besoin comment $\epsilon \rightarrow 0$ on dit alors que l'intégrale impropre existe et la singularité est dite *faible (weak singularity)*. Quand l'intégrale existe seulement pour certaine forme de limite prise, alors on dit que l'intégrale existe au sens de la valeur principale de Cauchy.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution numérique aux équations intégrales singulières du type de Cauchy qui comporte le deuxième type d'intégrale singulière.

Dans les trente dernières années précédentes, il y a eu une croissance substantielle dans la résolution numérique des équations intégrales singulières de Cauchy de la forme :

$$a(x) \varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x); \quad -1 < x < 1 \quad (3.2)$$

où $k(x,t)$ est un noyau de Fredholm (Ref. [18]). On trouve ces équations dans une large variété de mathématique, physique et en engineering, (Ref. [30], [41] et [37]),.ainsi il y a eu un besoin nécessaire de chercher des méthodes effectives. Dans cette thèse, on se limitera à l'étude de cette équation dans le cas où les coefficients

$a(x)$ et $b(x)$ sont des constantes, l'équation est dite alors équation intégrale singulière à coefficients constants ($a(x) = a$, $b(x) = b$). L'étude de telle équation a été faite par Golberg (Ref.[25] et [26]). Avant d'étudier la résolution de l'équation (3.2), il est convenable d'étudier cette équation quand $a = 0$ et $b = 1$, (équation du premier type) car il paraît que la théorie et l'implémentation numérique sont très bien développées pour ce type d'équation (Ref. [47]) :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(x) dt = f(x); \quad -1 < x < 1 \quad (3.3)$$

dite équation intégrale singulière du premier type ou encore "*Generalised airfoil equation*".

En résolvant l'équation (3.2), deux importantes caractéristiques qu'on aura besoin de l'estimer :

1. En général, la régularité du noyau $k(x, t)$ et la fonction $f(x)$, la solution x a des singularités en $x = \pm 1$
2. La solution $\varphi(x)$ n'est pas unique.

Quand le noyau régulier $k(x, t) = 0$ l'équation (3.3) sera réduite à

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) dt}{t-x} = f(x); \quad -1 < x < 1 \quad (3.4)$$

dite "*airfoil equation*" utilisée souvent en aérodynamique (Ref. [39]). La solution de l'équation (3.4) i.e. la formule d'inversion peut être utilisée pour développer différents classe d'algorithme numérique pour les équations (3.2) et (3.3).

3.2 Rappels théoriques sur les équations intégrales singulières de Cauchy (EISC)

Il est nécessaire de rappeler quelques notions fondamentales des équations intégrales singulières de Cauchy.

Soit φ une fonction définie sur $[-1, 1]$, on dit que φ vérifie la condition de *Hölder* d'ordre α sur $[-1, 1]$ où $0 < \alpha \leq 1$. Si

il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$\text{pour tout } t_1, t_2 \in [-1, 1]; |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq c |t_1 - t_2|^\alpha.$$

Soit $H_\alpha([-1, 1])$ l'espace des fonctions vérifiant la condition de *Hölder* d'ordre α . On munit l'espace $H_\alpha([-1, 1])$ d'une norme définie par :

$$\|\varphi\|_H = \|\varphi\|_\infty + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}; t_1, t_2 \in [-1, 1].$$

De cette norme, il est clair que $H_\alpha([-1, 1]) \subset C([-1, 1])$ l'espace des fonctions continues.

Si $\varphi \in H_\alpha([-1, 1])$ alors l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(s)}{s-t} ds$ existe en tant que valeur principale de *Cauchy*, pour tout $t \in [-1, 1]$.

De même si le noyau $k(x, t)$ est définie sur $[-1, 1]^2$ on dira que k vérifie la condition de *Hölder* d'ordre α ; $0 < \alpha \leq 1$; s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $|k(x, t) - k(x', t')| \leq c(|x - x'|^\alpha + |t - t'|^\alpha)$ pour tout $(x, t), (x', t') \in [-1, 1]^2$.

Soit $H^*([-1, 1])$ l'espace des fonctions φ définies sur $[-1, 1]$ et vérifiant :

1. φ vérifie la condition de *Hölder* sur tout sous espace fermé de $]-1, 1[$.
2. $\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\alpha}$ au voisinage de $c = \pm 1$; $0 \leq \alpha < 1$. φ^* vérifie la condition de *Hölder*.

On voit aisément que :

- $H_\alpha([-1, 1]) \subset H^*([-1, 1])$.
- Si $\varphi \in H^*([-1, 1])$ alors l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$ existe en tant que valeur principale de *Cauchy*, pour tout $x \in [-1, 1]$.
- Si $\varphi \in H^*([-1, 1])$ alors φ peut admettre des singularités en -1 et 1 au plus intégrables.

Pour la démonstration et plus de détails voir Ref. [43].

3.2.1 Solution analytique de l'équation du premier espèce

Comme l'on a indiqué précédemment, avant d'entamer la résolution de l'équation (3.2), il est intéressant d'étudier l'équation (3.4).

Théorème 46 *Si $\varphi(x)$ vérifie la condition de Hölder l'équation*

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) dt}{t-x} = f(x); \quad -1 < x < 1 \quad (3.5)$$

admet la solution

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} f(x) dt}{x-t} + \frac{C}{\pi \sqrt{1-x^2}} \quad (3.6)$$

où

$$C = \int_{-1}^1 \varphi(x) dt. \quad (3.7)$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est assez longue et algébriquement fastidieuse. Le lecteur intéressé pourra consulter [35], [51]. ■

Puisqu'on a toujours l'habitude d'écrire l'équation (3.4), il convient de remplacer $f(x)$ dans l'équation (3.5) par $\pi f(x)$. Ceci donne la solution de l'équation (3.4) sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} f(x) dt}{x-t} + C \right] \quad (3.8)$$

dite formule d'inversion. Cette dernière équation (3.8) montre clairement la présence des singularités en $x = \pm 1$, en plus la solution n'est plus unique qui est dû à la constante C . Ces deux facteurs doivent être pris en considération dans n'importe quel développement des algorithmes numériques, pour la résolution de l'équation (3.3). En multipliant l'équation (3.4) par $\sqrt{1-x^2}$, il convient alors de poser

$$u(x) = \sqrt{1-x^2} \varphi(x)$$

comme la nouvelle fonction inconnue à chercher. L'équation (3.4) devient donc

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} = f(x) \quad (3.9)$$

et en terme de $u(x)$ la formule d'inversion devient aussi

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} f(x) dt + \frac{C}{\pi}. \quad (3.10)$$

3.2.2 Détermination de la constante C

Comme l'équation (3.8) contient une constante inconnue, en pratique, quelques conditions supplémentaires, qui dépendent du contexte ou la nature physique du problème, doivent être imposées pour la détermination de cette constante C .

Mathématiquement, cette condition supplémentaire est généralement donnée par

$$l(\varphi) = M$$

où l est une fonctionnelle (forme) linéaire de la fonction φ . Généralement, l et M prennent les valeurs suivantes :

1. $l(\varphi) = \varphi(1)$, $M = 0$ dite condition de *Kutta* que l'on trouve souvent en aérodynamique et hydrodynamique (Ref. [60] et [24]).

Si on exige à la fonction φ de satisfaire à la condition $\varphi(1) = 0$, alors le terme entre crochets dans l'équation (3.8) devrait être égale à zéro au point $x = 1$. Alors

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} f(t) dt + C = 0,$$

afin que

$$C = - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} f(t) dt.$$

En remplaçant C dans l'équation (3.8), on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^1 \left[\frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} - \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right] f(t) dt \quad (3.11) \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{f(t)}{x-t} dt. \end{aligned}$$

cette équation est connue sous le nom de *formule d'inversion de Söhngen* voir [24]. De cette dernière équation, on voit que

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u(x),$$

ceci nous oblige à écrire l'équation (3.5) sous la forme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{u(t)}{t-x} dt = f(x), \quad (3.12)$$

avec comme nouvelle inconnue $u(x)$. Alors l'équation (3.11) devient

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

On se reporte habituellement à l'équation (3.12) comme équation d'indice $\varkappa = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$ qui est la somme négative des exposants de la fonction poids $(1+t)^{-1/2} (1-t)^{1/2}$.

2. $l(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(x) dt = M$ où est une constante que l'on rencontre dans la mécanique des solides (Ref. [22]-[58]). Dans cette situation on commence, encore une fois par l'équation (3.8). Comme $\int_{-1}^1 \varphi(x) dt$ est une constante fixée,

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{f(t)}{x-t} dt + \frac{M}{\pi}$$

où $u(x) = \sqrt{1-x^2} \varphi(x)$. Ici on dit que l'indice $\varkappa = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1$, qui est encore une fois défini par la somme négative des exposants de la fonction poids $(1+t)^{-1/2} (1-t)^{1/2}$ dans l'équation (3.9).

3. Dans quelques problèmes, on impose à la solution d'être nulle aux extrémités $x = \pm 1$, on a alors deux formes linéaires $l_1(\varphi) = \varphi(1)$ et $l_2(\varphi) = \varphi(-1)$. Dans ce cas, et pour l'existence et l'unicité de la solution, la fonction $f(x)$, qui est une fonction donnée, doit satisfaire une condition supplémentaire.

Si $\varphi(1) = 0$, alors de l'équation (3.8) on a :

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{f(t)}{x-t} dt \quad (3.13)$$

et afin d'être $\varphi(-1)$ nulle aussi, et de l'équation (3.8) on a :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0. \quad (3.14)$$

Ainsi, la solution de l'équation (3.4) n'existe que si la condition (3.14) est satisfaite. Dans ce cas l'équation (3.13) devient :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{f(t)}{x-t} - \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right] dt \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} dt = \sqrt{1-x^2} u(x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

en substituant cette dernière équation i.e. (3.15), l'équation (3.4), on aboutit à une paire d'équations

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} u(t) dt = f(x) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dt}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} = u(x) \end{cases} \quad (3.16)$$

Ici, l'indice vaut $\varkappa = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1$.

Comme on peut voir, le comportement de la solution $\varphi(x)$ au voisinage de $x = \pm 1$ est différent pour chaque indice. Si $\varkappa = 0$ alors la solution est bornée en $x = 1$ mais non-bornée en $x = -1$; si $\varkappa = 1$ alors la solution est non-bornée en $x = \pm 1$, tandis que si $\varkappa = -1$ la solution est bornée en $x = \pm 1$.

L'indice de l'équation intégrale (ou la nature de la singularité aux extrémités $x = \pm 1$) détermine l'algorithme qu'on doit utiliser.

3.3 Formules de quadrature de Gauss

Soit la fonction poids $\omega(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ avec $-1 < \alpha, \beta < 1$; $P_n^{(\alpha, \beta)}$ est le polynôme de *Jacobi* de degré n associé à la fonction poids $\omega(t)$ sur $[-1, 1]$. La suite $\left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de *Jacobi* forme un système de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids $\omega(t)$ sur $[-1, 1]$ voir [21] et [51].

Si $\{t_i\}_{i=1}^n$ sont les racines de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, alors pour toute fonction continue $\varphi \in C([-1, 1])$, on a la formule de quadrature approchée

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^n \omega_j f(t_j) \quad (3.17)$$

les poids $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ sont donnés par

$$\omega_j = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_j)}{2 P_n^{(\alpha, \beta)}(t_j)}; j = 1, \dots, n.$$

où Γ désigne la fonction Gamma, on a la formule suivante :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

La formule (3.17) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$, et ne pourra être valable que pour des fonctions continues sur $[-1, 1]$. Dans le cas où la fonction à intégrer présente une singularité.

Le problème crucial dans les équations intégrales singulières et leurs résolutions numériques, réside dans la difficulté de trouver une méthode d'intégration numérique pour la valeur principale de Cauchy de la forme

$$\int_a^b \frac{\omega(t) u(t) dt}{t-x}, \quad a < x < b, \quad (3.18)$$

où $\omega(t)$ et une fonction poids non-négative et $\int_a^b \omega(t) dt < \infty^1$.

¹Le problème d'approximation de la valeur principale de Cauchy, a été un domaine de recherche actif, pendant plusieurs années, Ref. [16], [23] et [42].

Théorème 47 Soit $\omega(t)$ une fonction poids non-négative telle que $\int_a^b t^n \omega(t) dt < \infty$, $n \geq 0$, supposons que la fonction $u(x)$ vérifie la condition de Hölder pour que l'intégrale (3.18) existe. Soient $Q_n = (\{\omega_k\}_{k=1}^n, \{t_k\}_{k=1}^n)$ n poids et noeuds pour la formule de quadrature interpolatoire

$$\int_a^b \omega(t) u(t) dt \simeq \sum_{k=1}^n \omega_k u(t_k),$$

où les poids de la formule de quadrature $\omega_k = \int_a^b h_k(t) dt$ et $\{h(t_k)\}_{k=1}^n$ sont les polynômes fondamentaux de Lagrange aux noeuds $\{a = t_1 < t < \dots < t_n = b\}$. Alors l'intégrale

$$S(u) = \int_a^b \frac{\omega(t) u(t) dt}{t-x}, \quad a < x < b$$

, prise au sens de la valeur principale de Cauchy, peut être approchée par

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k u(t_k)}{t_k - x} + \frac{q_n(x) u(x)}{\sigma_n(x)}, \quad t_k \neq x, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

et $S_n(u) = S(u_n)$, où $u_n(x)$ est l'unique polynôme qui interpole $u(x)$ aux noeuds $\{a = t_1 < t < \dots < t_n = b\}$, $\sigma_n(x) = \prod_{k=1}^n (t - t_k)$, et $q_n(x) = S(\sigma_n)$. Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$.

Preuve.

La démonstration est dans [26] chapt. 2, p.230. ■

3.4 Résolution d'une équation intégrale singulière de Cauchy du second espèce

Considérons l'équation intégrale singulière suivante :

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(x) dt = f(x); \quad -1 < x < 1 \quad (3.19)$$

a et b sont deux constantes réelles telles que f et k sont deux fonctions connues vérifiant la condition de Hölder d'ordre n α ($0 < \alpha \leq 1$) sur $[-1, 1]$ et $[-1, 1]^2$ respectivement. On cherche les solutions de l'équation (3.19) appartenant à l'espace $H^*([-1, 1])$ voir [43].

Proposition 48 *Soit φ une solution de l'équation (3.19) appartenant à l'espace $H^*([-1, 1])$ et $f(x)$ une fonction régulière (i.e. n -fois continûment dérivable, n est un entier aussi grand que l'on veut) alors φ peut s'écrire sous la forme :*

$$\varphi(x) = \omega(x) u(x) \quad (3.20)$$

où φ vérifie la condition de Hölder et $\omega(x) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, α et β sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\pi i} \log \frac{a-ib}{a+ib} + M \\ \beta &= -\frac{1}{\pi i} \log \frac{a-ib}{a+ib} + N \end{aligned} \quad (3.21)$$

M et N sont deux entiers choisis de telle façon que $-1 < \alpha, \beta < 1$, ceci garantie que la solution $\varphi(x)$ es intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$ voir [43]..

Preuve. Voir la référence principale sur les équations intégrales singulières [43]. ■

Suivant des différents choix possibles pour M et N , on aura quatre types de solutions de l'équation (3.19) appartenant à $H^*([-1, 1])$.

1. $-1 < \alpha < 0$ et $0 < \beta < 1$:
Solution bornée en -1 et non bornée avec une singularité intégrable en $+1$.
2. $-1 < \alpha < 0$ et $-1 < \beta < 0$:
solution non bornée avec singularité intégrable en -1 et 1 .
3. $0 < \alpha < 1$ et $-1 < \beta < 0$:
solution bornée en 1 et non bornée avec singularité intégrable en -1 .
4. $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$:
solution bornée en -1 et 1 .

Définition 49 *Pour chaque type de solution de l'équation intégrale singulière dans $H^*([-1, 1])$. On définit l'indice \varkappa de l'équation intégrale singulière (3.19) par :*

$$\varkappa = -(\alpha + \beta) = -(N + M) \quad (3.22)$$

On voit clairement que, d'une part l'indice \varkappa ne peut prendre que les valeurs $-1, 0$ ou 1 et d'autre part cette indice, ne dépend que des coefficients a et b . Par conséquent l'étude de l'équation intégrales singulière complète (3.19) peut être réduite à l'étude de l'équation

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = f(x); \quad -1 < x < 1$$

dite équation dominante.

- $\varkappa = -1$ correspond aux solutions de type 2.
- $\varkappa = 0$ correspond aux solutions de type 1 et 3.
- $\varkappa = 1$ correspond aux solutions de type 4.

Comme on a fait dans l'équation du premier espèce (3.9), dans l'équation (3.19) on fait le changement de variable $\varphi(x) = \omega(x) u(x)$, donnant la fonction $u(x)$ comme solution de l'équation

$$a\omega(x) u(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t) u(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 k(x,t) \omega(t) u(t) dt = f(x); \quad -1 < x < 1 \quad (3.23)$$

La structure de la singularité de la solution de l'équation (3.23) aux extrémités de l'intervalle d'intégration $[-1, 1]$ est généralement déterminée par l'équation dominante ($k(x,t) = 0$) en la réduisant au problème de *Riemann-Hilbert* (Ref. [1] chapt 7 et [9] chapt 8) en utilisant la théorie de la variable complexe, voir (Ref. [43] chapt 5). Cependant, Peters dans (Ref. [49]) a résout cette équation en utilisant seulement la formule d'inversion d'*Abel* (pour la formule d'*Abel* voir (Ref. [40])).

Notons $\omega(x)$ par $\omega_\varkappa(x)$ et

$$a\omega_\varkappa(x) u(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_\varkappa(t) u(t) dt}{t-x} \quad (3.24)$$

par $A_\varkappa u$, afin de mettre l'équation(3.23) sous la forme

$$A_\varkappa u + Ku = f \quad (3.25)$$

où A_\varkappa l'opérateur de l'équation dominante comportant l'intégrale singulière

$$A_\varkappa u(x) = a\omega_\varkappa(x) u(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_\varkappa(t) u(t) dt}{t-x},$$

et K l'opérateur de *Fredholm* définie par

$$Ku(x) = \int_{-1}^1 k(x, t) \omega(x) u(x) dt.$$

Soit $\psi_n(x)$ le polynôme orthonormé de *Jacobi* de telle sorte que

$$\|\psi_n\|_{L_\omega}^2 = \int_{-1}^1 \omega_\varkappa(t) [\psi_n(t)]^2 dt = 1$$

Dans les Ref.[59] et [21] on a

$$A_\varkappa \psi_n = \pm \phi_{n-\varkappa} \quad (3.26)$$

en posant

$$A_\varkappa \psi_n = \chi_{n-\varkappa}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

où par définition $\chi_{-1} = 0$, pour plus de détails voir Ref. [26]

Si nous définissons les espaces

$$L_{\omega_\varkappa} = \left\{ f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{-1}^1 \omega_\varkappa(t) [f(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

où $\omega_\varkappa(t)$ est de la forme $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$. Alors $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ et $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ sont deux bases orthonormées dans L_{ω_\varkappa} et L_{1/ω_\varkappa} respectivement, avec les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\omega_\varkappa} &= \int_{-1}^1 [f(t) g(t)] \omega_\varkappa(t) dt \\ \langle f, g \rangle_{1/\omega_\varkappa} &= \int_{-1}^1 \left[\frac{f(t) g(t)}{\omega_\varkappa(t)} \right] dt \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.27), l'opérateur A_\varkappa peut être prolongé comme un opérateur borné de $L_\omega \longrightarrow L_{1/\omega}$. Pour compléter, on suppose encore, que l'opérateur $K : L_\omega \longrightarrow L_{1/\omega}$ est compact, pour qu'il en soit de même, il faut que le noyau $k(x, t)$ soit continu i.e.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\omega_\varkappa(t)}{\omega_\varkappa(x)} k^2(x, t) dx dt < \infty.$$

- Si l'indice $\varkappa = 0$, on suppose que on suppose que l'équation (3.25) a une solution unique $u \in L_\omega$ pour chaque fonction $f \in L_{1/\omega}$.
- Pour $\varkappa = 1$, si $l : L_{\omega_1} \rightarrow L_{\omega_1}$ est une fonctionnelle bornée, alors il faut que

$$\begin{cases} A_1 u + K u = f, \\ l(u) = M, \end{cases}$$

a une solution unique.

- Pour $\varkappa = -1$ l'équation (3.25) peut avoir une solution si et seulement si la condition la condition de consistance (condition d'orthogonalité)

$$\langle K u - f, \chi_0 \rangle_{1/\omega_x} = 0$$

soit satisfaite Ref. [43].

Avec les conditions en vigueur, on peut développer quelques méthodes pour résoudre l'équation (3.25).

3.4.1 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante : partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie (i.e. formules de quadrature d'intégration, polynômes orthogonaux, les splines,...). On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

La méthode de *Galerkin* consiste donc, à chercher une approximation de la solution sur une base d'un espace d'approximation choisi. On applique donc un produit scalaire, généralement la forme d'une intégrale, à l'équation intégrale singulière.

Dans la méthode de *Galerkin* voir Ref. ([33] chapt 13), on approche $u(x)$ par la fonction

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \psi_k(x)$$

où $\{\psi_k(x)\}$ est le polynôme de Jacobi orthonormé de $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ on cherche donc une solution de l'équation

$$r_n = A_{\varkappa}u_n + Ku_n - f, \quad (3.28)$$

de telle sorte que le résidus $r_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. De l'équation (3.28) et χ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, n - \varkappa$, $\varkappa = 0, \pm 1$ l'orthogonal au résidus r_n dans l'espace $L_{1/\omega_{\varkappa}}$. Les coefficients a_k seront obtenus après résolution des équations

$$a_{j+\varkappa} + \sum_{k=0}^n a_k \langle K\psi_k, \chi_j \rangle_{1/\omega_{\varkappa}} = \langle f, \chi_j \rangle_{1/\omega_{\varkappa}} ; j = 0, 1, 2, \dots, n - \varkappa. \quad (3.29)$$

De l'équation (3.29) :

1. Si l'indice $\varkappa = 0$, alors il y a $n + 1$ équations à n inconnues. pour tout n suffisamment grand.
2. Si l'indice $\varkappa = 1$, alors il y a seulement n équations à $n + 1$ inconnues, pour obtenir un système carré on rajoute une condition axillaire $l(u) = M$, où dans la plupart des cas $l(u) = \int_{-1}^1 \omega_1(t) u(t) d(t)$, voir Ref.[36]
3. Si l'indice $\varkappa = -1$, (en adoptant la convention : $a_{-1} = 0$, voir Ref. [25]). Dans ce cas un problème qui survient dans lequel ,on aura un système sur-déterminé de $n + 2$ équations à $n + 1$ inconnues. Il n'est pas clair, comment va t-on résoudre ce système d'équations mais dans la Ref. [19] Erdogan a suggère de supprimer l'équation pour $j = 0$.

Si $f(x)$ et $k(x,t)$ sont $r - fois$ continûment différentiables, alors la solution approximative $u_n(x)$ converge uniformément vers la solution exacte $u(x)$, en plus, on $\|u - u_n\|_{\omega_{\varkappa}} = O(n^{-r})$, $r > 0$, voir Ref. [27].

Remarque 50 Dans l'équation (3.29), les termes $\langle K\psi_k, \chi_j \rangle_{1/\omega_{\varkappa}}$ et $\langle f, \chi_j \rangle_{1/\omega_{\varkappa}}$, doit être calculer numériquement en utilisant les formules de quadrature de Gauss. Mais si les fonctions $f(x)$ et $k(x,t)$ ne sont pas continues le problème d'intégration sera alors beaucoup plus difficile.

3.4.2 Méthode de collocation

La méthode de collocation est la plus courante, elle consiste à chercher un ensemble de points (points de *Collocation*) et écrire qu'en ces points l'équation

intégrales singulière est satisfaite. Le nombre de points de collocation doit être choisi de manière à fournir une convergence aussi bien que l'on veut. Le traitement numérique de la méthode de collocation s'avère plus simple, puisque dans la méthode de Galerkin, on utilise des produits scalaires, qui mènent à calculer des intégrales doubles.

Encore une fois, on approche u par $u_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \psi_k(x)$, on essaye d'approcher la solution intégrale singulière

$$a\omega(x)u(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(x)u(x)dt}{t-x} + \int_{-1}^1 k(x,t)\omega(x)u(x)dt = f(x); \quad |x| < 1$$

mais cette fois-ci aux points $\{x_j\}_{j=0}^{n-\varkappa}$ racines du polynôme de jacobi orthonormé $\chi_{n+1-\varkappa}(x)$. Après discrétisation cette équation devient

$$\sum_{k=0}^n a_k \chi_{k-\varkappa}(x_j) + \sum_{k=0}^n a_k K \psi_k(x_j) = f(x_j); \quad j = 0, 1, 2, \dots, n - \varkappa. \quad (3.30)$$

Comme dans la méthode de Galerkin :

- On a $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues si $\varkappa = 0$.
- n équations si $\varkappa = 1$, lesquelles avec la condition $l(u_n) = M$, donne un système carré de $n + 1$ équations à n inconnues.
- Pour $\varkappa = -1$ le système est sur-déterminé, on doit supprimer une équation.

Pour la convergence de cette méthode, sont les mêmes que dans la méthode précédente.

Remarque 51 *En pratique, la méthode de Collocation est beaucoup plus préférable que la méthode de Galerkin, car dans cette méthode on a qu'une seule intégrale $K\psi_k(x_j)$ à calculer numériquement.*

3.4.3 Méthode de Quadratures

Actuellement, la méthode des quadratures est la plus utilisée dans la résolution des équations intégrales singulières,

$$a\omega(x)u(x) + \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)u(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 \omega(t)k(x,t)u(t)dt = f(x); \quad |x| < 1 \quad (3.31)$$

Elle consiste à approcher les deux intégrales de l'équation (3.23), en utilisant les formules de quadratures de Gauss en $(n + 1)$ points,

Pour se faire, on se donne

$$\omega(t) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta; \text{ avec } -1 < \alpha, \beta < 1.$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}$ est le polynôme de *Jacobi* de degré n associé à la fonction poids $\omega(t)$ sur $[-1, 1]$. Ces polynômes sont définis par voir (Ref. [?]) :

$$(1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[(1 - t)^{n+\alpha} (1 + t)^{n+\beta} \right]$$

La suite $\left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système de polynômes orthogonaux à $\omega(t)$ sur $[-1, 1]$ voir (Ref. [2] et [21])

si $\{t_j\}_{j=1}^n$ sont les racines de $P_n^{(\alpha, \beta)}$, alors pour toute fonction f continue sur $[-1, 1]$, on a la formule de quadrature approchée :

$$\int_{-1}^1 \omega(t) f(t) dt = \sum_{j=1}^n \omega_j f(t_j) \quad (3.32)$$

les poids $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ sont donnés par la formule

$$\omega_j = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)}{2} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_j)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(t_j)}; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

où Γ désigne la fonction Gamma voir (Ref. ; [38]), on a la formule suivante :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (3.33)$$

La formule (3.32) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n - 1$, et elle n'est valable que dans le cas des fonctions continues sur $[-1, 1]$. Dans le cas d'une valeur principale de Cauchy, l'approximation sera de la forme suivante

$$\int_{-1}^1 \omega(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\varphi(t_j)}{t_j - x} + \frac{q_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} \varphi(x), \quad (3.34)$$

avec

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{-1}^1 \omega(t) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-x} dt$$

et $x \neq t_j$; $j = 1, 2, \dots, n$. La formule (3.34) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$.

On suppose que l'indice κ de l'équation (3.31) vaut 1^2 , a et b sont deux constantes réelles telles que $a^2 + b^2 = 1$ voir (Ref. [17]). La deuxième intégrale de l'équation (3.31) sera approchée en utilisant la formule (3.33) par

$$Ku(x) = \int_{-1}^1 \omega(t) k(x,t) u(t) dt \simeq \sum_{j=0}^n \omega_j k(x, t_j) u(t_j) \text{ pour tout } x \in [-1, 1]. \quad (3.35)$$

Pour approcher l'opérateur

$$(Su)(x) = a\omega(x)u(x) + \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)u(t)}{t-x} dt \quad (3.36)$$

on va utiliser la formule suivante voir (Ref. [32] et [56])

$$a\omega(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-x} dt = -b \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{2\pi} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x). \quad (3.37)$$

Proposition 52 pour tout $x \in [-1, 1]$, $x \neq t_j$; $j = 1, 2, \dots, n$, l'opérateur (3.36) sera approché par

$$(Su)(x) = \frac{b}{\pi} \sum_{j=0}^n \omega_j \frac{u(t_j)}{t_j - x} - \frac{b}{2 \sin(\pi\alpha)} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)} u(x), \quad x \neq t_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.38)$$

Cette approximation est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$.

Preuve.

La preuve est immédiate d'après les formules (3.34) et (3.37). ■

²c'est à dire que la solution de l'équation en question est bornée en $x = \pm 1$.

Pour assurer l'unicité de la solution de l'équation (3.31) on doit ajouter une condition supplémentaire

$$\int_{-1}^1 \omega(t) u(t) dt = M, \quad (3.39)$$

où M est une constante donnée³ voir (Ref. [43]).

En utilisant les formules (3.35) et (3.38) les équations (3.31) et (3.39) peut être approchées par

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \omega_j \left(\frac{b}{\pi(t_j - x)} + k(x, t_j) \right) u(t_j) - \frac{b}{2 \sin(\pi\alpha)} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} u(x) = f(x) \\ \sum_{j=0}^n \omega_j u(t_j) = M \end{cases} \quad (3.40)$$

avec $x \neq t_j$; $j = 1, 2, \dots, n$.

En prenant comme points de collocation en (3.35) les $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ qui sont les racines de $P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)$ on obtient un système d'équations linéaire d'ordre $n \times n$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \omega_j \left(\frac{b}{\pi(t_j - x_i)} + k(x_i, t_j) \right) u_n(t_j) - \frac{b}{2 \sin(\pi\alpha)} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i)} u_n(x_i) = f(x_i) \\ \sum_{j=0}^n \omega_j u_n(t_j) = M \end{cases} \quad (3.41)$$

où $i = 1, \dots, n-1$. Ce qui nous permet d'avoir une approximation u_n de la solution u aux points $\{x_j\}_{j=1}^n$

La première relation de (3.40) donne une formule d'interpolation directe permettant d'avoir une approximation de la solution en des points d'interpolation quelconques autres que $\{t_j\}_{j=1}^{n-1}$

$$u_n(x) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{b} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} \left[\sum_{j=0}^n \omega_j \left(\frac{b}{\pi(t_j - x_i)} + k(x_i, t_j) \right) u_n(t_j) - f(x) \right]$$

pourvu que $x \neq t_j$, $j = 1, \dots, n$ et $x \neq x_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

³dépend de la nature physique du problème.

3.5 Conclusion

L'importance de l'approximation de la *valeur principale de Cauchy* est due, en particulier, au fait que telle approximation peut être utilisée pour la résolution des équations intégrales singulières de Cauchy. Les méthodes numériques qui sont proposées jusqu'à présent, se décomposent en deux types : méthodes globales et méthodes locales.

Le premier type est basé sur l'approximation par les polynômes orthogonaux, voir Ref. [16], [28] et [42] ainsi que ses références dedans. Ce type de méthodes ne présente des bonnes propriétés de convergences que pour les fonctions données $f(x)$ et $k(x, t)$ différentiables et prennent des dérivées assez petites dans l'intervalle d'intégration $[-1, 1]$. Un deuxième inconvénient, le polynôme orthogonal peut ne pas exister pour une fonction poids non-classique. En plus les noeuds sont restreints, on doit les choisir en tant que racines du polynôme orthogonal.

Pour ces raisons, les méthodes numériques du second type (i.e. les méthodes locales) sont généralement les plus préférables ; les méthodes locales sont basées sur l'utilisation des polynômes par morceaux ou l'approximation par des splines et elles sont convenables dans le cas où les noeuds sont fixés à l'avance, ou si les noeuds sont concentrés dans quelques sous-intervalles de $[-1, 1]$ si la fonction à intégrer n'est pas régulière (*smooth*), pour plus de détails, il faut se rapporter aux Ref. [13], [23], [58], [48] ; en particulier nos articles [44] et [45].

Bibliographie

- [1] M. J. Ablowitz, " *Complex Variables Introduction and Applications* " Second Edition, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [2] R. Askey " *Orthogonal Polynomials and Special Functions* " SIAM 1994.
- [3] K.E. Atkinson " *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind* " Cambridge Univ. Press, 1997.
- [4] C. Baker " *The Numerical Treatment of Integral Equations* " Oxford Univ. Press, 1977.
- [5] M. Bernkopf " *The developpement of fuction spaces with particular reference to their origins in integral equations theory* " Archive for History of Exact Sciences 3 (1996), pp. 1-96.
- [6] Carl De Boor " *A Practical Guide to Splines* " Springer, 2001.
- [7] H. Brezis " *Analyse fonctionnelle et application* " Masson, Paris, 1983.
- [8] H. Brunner " *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations* " Cambridge Univ. Press, 2004.
- [9] G.F. Carrier, M. Crook and Carl E. Pearson " *Function of complex variable : Theory and Technique* " Classic in Applied Mathematics 49, SIAM, 2005.
- [10] F. Chatlin et N. Gessous " *Iterative Reffinement for the solution of Cauchy Singular Integral Equations* " Symposium of the numerical solution of CSIE, IMACS 1984.
- [11] Craem Cohen : " *A course in modern analysis and its applications* " Cambridge 2003.
- [12] C. Dagnino, P. Lamberti " *Numerical evaluation of Cauchy principal value integrals based on local spline approximation operators* " Journal of Computational and Applied Mathematics 76 (1996) 231-238.
- [13] C. Dagnino, E. Santi " *On the evaluation of Cauchy principal value inte-grals by rules based on splines interpolation* " Computing 43, (1990), pp.267-276.

- [14] L. Debnath and P. Mikusinsky : "*An Introduction to Hilbert Spaces with Application*" Academic Press 1990.
- [15] L.M. Delves and J. Mohamed "*Computational Methods for Integral Equations*" Cambridge Univ. Press, 1985.
- [16] D. Elliott and D. F. Paget "Gauss Type Quadrature Rules for Cauchy Principal Value Integrals" *Mathematics of Computation*, Vol.33, Nb 145, 1979, pp. 301-309.
- [17] D. Elliott "*The Approximate Solution of Singular Integral Equations*" *Solution Methods for Integral Equations : Theory and Applications*, Eds M.A. Golberg, Plenum Press, 1979.
- [18] Elliott D. "*The classical Collocation Methods for singular integral equations with Cauchy kernels, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 19, pp. 816-832, 1982*".
- [19] F. Erdogan "*Approximate Solution of Systems of Singular Integral Equations*" *SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 17, pp.1041-1059, 1969*.
- [20] André Fortin "*Analyse numérique pour Ingénieurs*" Eds de l'école Polytechnique de Montréal.
- [21] W. Gautschi "*Orthogonal Polynomials Computation and Approximation*" Oxford Univ. Press 2004.
- [22] Gerasoulis A. "*Singular integral Equations : Direct and iterative Methods, Numerical solution of singular integral equations*" IMACS, 1984.
- [23] A. Gerasoulis "*Piecewise-Polynomial Quadratures for Cauchy Singular Integrals*" *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 23, No. 4, (Aug., 1986), pp. 891-902.
- [24] M.A. Golberg Frome J.A. ; "*Numerical solution of a Class of Integral Equations : Theory and Applications*" Plenum Press. 1979.
- [25] Golberg M.A. "*Numerical solution of Cauchy Singular Integral Equations with Constants Coefficients*" *Journal of Integral Equations*, Vol. 9, pp. 127-151, 1985.
- [26] Golberg M.A. "*The perturbed Galerkin Method for Cauchy Singular Integral Equations with Constants Coefficients*" *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 26, pp. 1-33, 1988.
- [27] Golberg M. A. (Ed.), *Numerical Solution of Integral Equations*, Plenum Press, Nex York, 1990.
- [28] L. Gori, E. Santi "On the convergence of Turan type quadratures for Cauchy principal value integrals" *Calcolo*, 28 (1991), pp.21-35.

- [29] W. Hackbusch "*Integral Equations : Theory and Numerical Treatment*" Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [30] A. I. Kalandiya, "*Mathematical Methods for Two-Dimensional Elasticity*", Mir Pubs.,Moscou, 1973.
- [31] A. Kolmogorov et S. Fomine "*Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*" Edition Mir, 1973
- [32] S. Krenk "*On quadrature formulas for singular integral equations of the first kind and second kind*" Quart. App. Math.33, pp. 225-232, (1975).
- [33] R. Kress "*Linear Integral Equations*" Springer 1999.
- [34] Erwin kreyszig : "*Introductory Functional Analysis with Application* " Wiley classic library Edition published 1989.
- [35] P. K. Kythe, Michael R. Schäferkötter, "*Handbook of computational methods for integration*" CRC Press. 2005.
- [36] Ioakimidis, N. I "*Further Results for the Weighted Galerkin Methods of Numerical Solution of Cauchy-type Singular Integral Equations*" Mathematics of Computation, Vol. 41,pp. 79-85, 1983.
- [37] E.G Ladopoulos "*Singular integral equations, linear and non-linear Theory and Applications in Science and Engineering*" Springer-Verlag 2000.
- [38] N.N. Lebedev "*Special Functions and Their Applications*" Printice Hall Inc. 1965.
- [39] Ivan K. Lifanov, Sergei M. Belotserkovsky, "*Method of discrete vortices*" CRC Press. 2000.
- [40] P. Linz "*Analytical and Numerical Methods for Volterra Integral Equations*" SIAM, 1985.
- [41] N. Mohankumar, A. Natarajan "*On the numerical solution of Cauchy singular integral equations in neutron transport*" Annals of Nuclear Energy 35 (2008), 1800-1804.
- [42] Monegato G. "*The Numerical Evaluation of One-Dimensional Cauchy Principal Value Integrals*" Computing, Vol. 29, pp.337-354, 1982.
- [43] N.I Muskhelishvili, "*Singular integral equations*" Nordhoff 1953.
- [44] M. Nadir and B. Lakehali : "*An Approximation for Singular Integrals of Cauchy Type*" Advanced in Algebra and Analysis. Vol.1, N°1, 2006.
- [45] M. NADIR, B. LAKEHALI : "*On The Approximation of Singular Integrals*" SDÜ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ, FEN DERGİSİ (E-DERGI). 2007, 2(2), 236-240.

- [46] M. Nadir "*Problemes aux limites qui se réduisent aux équations intégrales de Fredholm*" Séminaire de l'institut des mathématiques et informatique, 1985, Annaba.
- [47] G. E. Okecha "*Solution of Cauchy-Type Singular Integral Equations of the First Kind with Zeros of Jacobi Polynomials as Interpolation Nodes*" International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2007, Article ID 10957, 12 pages.
- [48] A. Palmara Orsi "Spline approximation for Cauchy principal value integrals" J. Comp. Appl. Math. 30 (1990), pp. 191-201.
- [49] Peters A.S. "*Abel's equation and the Cauchy Integral Equations of the second kind*" Communication on Pure and Applied Mathematics, Vol. 21, pp. 51-65, 1968.
- [50] J. Philips "*The use of Collocation as a Projection Methods for Solving Linear Operator Equations*" SIAM Vol. 9, pp. 14-27, 1972.
- [51] P. K. Kythe; Pratap Puri "*Computational Methods for Linear Integral Equations*" Birkhäuser 2002.
- [52] A Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri "*Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*" Springer, 2007.
- [53] J. Sanikidze "*Approximate solution of integral equations*" Seminar of Applied mathematics institute, 1970, Tbilissi.
- [54] J. Sanikidze "*Approximate solution of integral equations in the case of closed contours of integration*" Seminar of Applied mathematics institute, 1971, Tbilissi.
- [55] J. Saranen, G. Vainiko "*Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation*" Springer, 2002.
- [56] P. Karczmarek , D. Pylak, M. A. Sheshko "*Application of Jacobi polynomials to approximate solution of a singular integral equation with Cauchy kernel*" Applied Mathematics and Computation 181 (2006) 694–707.
- [57] I. H. Sloan "*Analysis of general quadrature methods for integral equations of the second kind*" Numer. Math. 38, 263-278, (1981).
- [58] Srivastav R.P. Jen E. "*Cubic Splines and Approximation Solution of Singular Integral Equations*" Mathematics of Computation, Vol. 37, pp. 417-423, 1981.
- [59] F.G. Tricomi "*Integral equations*" Intersciences 1957.
- [60] Tuck E.O. "*Application and Solution of Cauchy Singular Equations, Numerical Solution of Integral Equations*" Noordhoff, Leyden, Holland, 1980.

Résumé :

Dans cette thèse, on s'intéresse aux équations intégrales singulières de type Cauchy, avec lesquelles on peut modéliser la plus part des problèmes de la physique. Ces équations ont un grande importance dans les mathématiques car il y a un lien très étroit entre ces équations et l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. On a traité quelques méthodes analytiques et numériques qui nous a permet d'utiliser les techniques des splines.

Abstract :

This thesis is concerned with the development and analysis of theoretical and numerical methods of singular integral equations of Cauchy type. Many physical problems can be modeled by these equations. There is a relationship between these equations and functional analysis as the operator theory which allowed us to use the techniques of splines.

ملخص :

العديد من مسائل الفيزياء تؤول عند دراستها إلى المعادلات التكاملية. ولهذه المعادلات أهميتها في الرياضيات لأنها ترتبط بالمعادلات التفاضلية و التحليل الدالي ونظرية المؤثرات. ففي هذه الأطروحة نتناول بعض الطرق التحليلية والعددية لمناقشة وحل المعادلات التكاملية الشاذة ذات نواة كوشي، وقد استعملنا ما يسمى بكثيرات الحدود القصيرة و المرنة في هذه المعادلات.