

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat En Sciences

Spécialité : **Statistique**

Par

Amel CHINE

Titre :

Sur la statistique de copules

Membres du Comité d'Examen :

Djamel MERAGHNI	Prof	Univresité de Biskra	Président
Fateh BENATIA	M.C.A	Univresité de Biskra	Rapporteur
Abbes BENCHAAABEN	M.C.A	Université de Guelma	Examineur
Mohamed Lakhdar HADJI	M.C.A	Univresité d'Annaba	Examineur
Djabrane YAHIA	M.C.A	Univresité Biskra	Examineur
Halim ZAGHDOUDI	M.C.A	Univresité d'Annaba	Examineur

People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
UNIVERSITY MOHAMED KHIDER, BISKRA
Faculty of Exact Sciences, Natural and Life Sciences
Department of Mathematics



A Thesis Presented For The Degree Of
DOCTOR OF SCIENCE
In The Field Of Statistics

By

Amel CHINE

Title

About copula statistics

Examination Committee Members

Djamel MERAGHNI	Prof	Biskra University	Chairman
Fateh BENATIA	M.C.A	Biskra University	Supervisor
Abbes BENCHAAABEN	M.C.A	Guelma University	Examinator
Mohamed Lakhdar HADJI	M.C.A	Annaba University	Examinator
Djabrane YAHIA	M.C.A	Biskra University	Examinator
Halim ZAGHDOUDI	M.C.A	Annaba University	Examinator

DÉDICACE

À la mémoire de mon père

À ma mère

À mes sœurs et mes frères

À mon mari Karim

À Radhia, Hanine, Adam et Aïcha

REMERCIEMENTS

Je prie Allah le tout puissant de m'avoir donné de courage, et de la volonté qui m'ont permis de mener à bien et jusqu'au bout ce modeste travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes profondes gratitude et remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Fateh Benatia, M.C.A de l'université de Biskra pour son enthousiasme, sa rigueur scientifique et son extrême patience au cours de ces années.

Je tiens aussi à remercier le professeur Djamel Merghani de l'université de Biskra de me faire l'honneur de présider le Jury.

Je suis très honorée que le docteur Abbes Benchaaben de l'université de Guelma, le docteur Mohamed Lakhdar Hadji de l'université d'Annaba, le docteur Djabrane Yahia de l'université de Biskra et le docteur Halim Zaghoudi de l'université d'Annaba ont bien acceptés de participer au Jury de cette thèse et d'examiner mon travail.

Je remercie le professeur Brahim Brahimi de l'université de Biskra pour ses conseils et pour toute l'aide qu'il m'a apporté.

Mes plus vifs remerciements à M^{me} "Fairouz Chine", et M^{me} " Nawel Chine" pour leurs judicieux conseils, leurs générosités, leurs encouragements, et pour leurs aides sans limite.

Mes sincères et honnêtes remerciements à ma mère, mes sœurs et mon mari pour leur soutien moral et matériel.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	viii
Introduction Générale	1
1 Copules et mesure d'association	4
I Introduction aux copules	5
1.1 Copules bivariées	6
1.1.1 Théorème de Sklar	7
1.1.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding	10
1.1.3 Représentation graphique de copules	10
1.1.4 Propriétés de copule	12
1.2 Densité de copule	13
1.3 Exemple de copules usuelles	14
1.3.1 Copules d'indépendance	14

1.3.2	Copule Gaussienne	14
1.3.3	Copule de Student	15
1.3.4	Copules Farlie-Gumbel-Morgenstern	16
1.3.5	Copules Archimédiennes	17
1.3.6	Copule de valeurs extrêmes	22
1.4	Copules multivariées	25
1.4.1	Définition et théorème d'existence	25
1.4.2	Théorème de Sklar	26
1.4.3	Propriétés de copules multivariées	27
1.4.4	Exemples de copules paramétriques multivariées	28
1.5	Simulation de copules	30
1.5.1	Cas générale	30
1.5.2	Simulation de copules Archimédiennes	31
 II Mesure d'association		32
1.6	Mesure de concordance	34
1.6.1	Concordance et discordance	34
1.6.2	Tau de Kendall	38
1.6.3	Rho de Spearman	41
1.7	Mesure de dépendance	43
1.7.1	Exemple de mesure de dépendance	44
1.8	Dépendance de queue	45
 2 Théorie des L-moments et des Trimmed L-moments		49
2.1	L-moments : Définitions et propriétés	50
2.1.1	Propriétés de L-moments	53
2.1.2	Estimation de L-moments	56
2.1.3	Diagramme de rapports de L-moment (L-skewness et L-kurtosis)	60

2.2	L-comoments	62
2.2.1	Représentations de L-comoments en terme de concomitants	63
2.2.2	Estimation de L-Comoments	64
2.3	TL-moments	64
2.3.1	Propriétés de TL-moments	66
2.3.2	Estimation de TL-moments	69
2.3.3	Variance et covariance de TL-moments empiriques	71
2.3.4	TL-moments de quelques distributions continues	72
	Conclusion	74
3	Copules Paramétrique : méthodes d'estimation et modélisation de la	
	Dépendance	75
3.1	Copule empirique	76
3.1.1	Cas bivarié	76
3.1.2	Cas multivarié	77
3.2	Tau de Kendall et Rho de Spearman empirique	78
3.3	Méthode de maximum de vraisemblance exacte	78
3.4	Méthode des fonctions d'inférence des marginales (IFM)	79
3.5	Méthode de pseudo-maximum de vraisemblance (maximum de vraisemblance canonique)	81
3.6	Méthode d'inversion	82
3.6.1	Un estimateur de θ basé sur le tau de Kendall	82
3.6.2	Un estimateur de θ basé sur le rho de Spearman	83
3.7	Méthode de la distance minimale	84
3.7.1	Estimateurs de la distance minimale basés sur le processus de copule empirique	85

3.7.2	Estimateurs de la distance minimale basés sur la fonction de dépendance de Kendall	86
3.7.3	Méthode d'estimation basé sur Les moments	87
3.7.4	Méthode d'estimation basé sur les L-moments	89
3.7.5	Méthode d'estimation basé sur les L-comoments	91
3.8	Outils graphiques pour modéliser la dépendance	93
3.8.1	Dépendogramme	93
3.8.2	Kendall plot	94
4	Bivariate Copulas Parameters Estimation Using The Trimmed L-moments	
	Method	96
4.1	Introduction and motivation	96
4.2	Bivariate Trimmed L-comoments	100
4.3	Illustrative example and simulation study	104
4.3.1	FGM-copulas with Cauchy marginals	105
4.3.2	FGM copulas with Pareto marginals	106
4.3.3	Semi parametric TL-moment estimation	108
4.3.4	Simulation study	109
4.4	Consistency and asymptotic normality	111
	Conclusion Générale	113
	Bibliographie	114
	Annexe A :Language R.	124
	Annexe B : Abréviations et Notations.	125

Table des figures

1.1	Graphique de copules M , Π et W	11
1.2	Diagrammes de contour de copules Π , M et W	11
1.3	Densité de copule Gaussienne pour $\rho = 0.2$ (à gauche) et $\rho = 0.7$ (à droite).	15
1.4	Densités de copules Clayton (a) pour $\alpha = 3$, Gumbel (b) pour $\alpha = 2$ et Frank (c) pour $\alpha = 2$	21
1.5	Echantillons de taille 1000 de trois copules Archimédiennes ($\alpha = 5$).	47
1.6	Echantillons de taille 1000 de deux copules Gaussienne pour $\rho = 1$ (à gauche) et $\rho = 0.5$ (à droite).	47
2.1	Diagramme de rapport de L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, uniforme, normale, Gumbel, GLO, PE3 et GPA.	61
2.2	Diagramme de rapport de L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, uniforme, normale, Gumbel, GLO, GOV et GPA, PE3 avec les rapport de L-moments empiriques (t_3 et t_4) des échantillons simuler selon la loi exponentielle.	61
3.1	Dépendogrammes pour des données simulées à partir de 4 copules différentes (n=1000).	94

Liste des tableaux

1.1	Quelque copules de valeurs extrêmes.	24
1.2	Tau de Kendall de quelques copules.	40
4.1	True parameters of FGM copula and Gumbel copula used for the simulation study.	109
4.2	Bias, RMSE of the dependence and margins estimator of FGM copula with cauchy margins.	110
4.3	Bias, RMSE of the dependence and margins estimator of Gumbel copula with pareto margins.	110

Introduction générale

Les copules ou les fonctions de dépendances ont données naissance à une nouvelle théorie : la "**théorie des copules**", cette dernière, qui joue un rôle très important dans l'étude de la modélisation de dépendance d'une manière significative ceci dans différents domaines de la statistique, telle que : la finance, l'hydrologie, la biologie,...etc. Parmi les travaux les plus importants de copules en statistique, on peut citer ceux de Hoeffding [53], en 1940, qui a utilisé les copules pour étudier les mesures d'associations non paramétriques comme le rho de Spearman ainsi que les propriétés de cette fonction comme l'invariance des mesures de dépendances, entre autre, le théorème proposé, en 1957 et qui porte son nom, défini les bornes d'une copules par deux autres copules, appelés aussi bornes de Frèchet-Höfdding. En 1959 Sklar [94] a proposé son fameux théorème concernant l'existence d'une relation entre la loi jointe et ses marginales. En 1979 Deheuvels a utilisé cette fonction de dépendance empirique pour construire des tests non paramétriques d'indépendance. En assurance Tibillti (1996) a introduit les copules pour modéliser la variations de la demande d'assurance [81].

Parmi les domines de recherches récents concernant les copules on peut cité, entre autre : l'estimation des paramètres des copules, les tests d'ajustement de copules paramétriques et les tests d'indépendance, telle que les travaux de Genest et al [41], [42], [43] et [44].

La théorie des L-moments et des TL-moments joue un rôle très important en statistique univarié et multivarié. Où on trouve ses applications dans différents domaines, en particulier en Hydrologie. Les L-moments et les TL-moments sont des mesures analogues aux

moments classiques, ils sont utilisés pour déterminer les caractéristiques des distributions, et comme méthode d'estimation des paramètres dans le cas où les méthodes d'estimation classiques ne sont pas valables, telle que la méthode de moments. Ces mesures sont développées par Hosking (1990) [57] et Elamir et Seheult (2003) [29]. Le cas multivarié est développé par Serfling et Xiao (2007) [91].

L'objectif de cette thèse est de définir une nouvelle méthode d'estimation des copules paramétrique basée sur les TL-moments. Bien avant la représentation de cette méthode, nous avons présenté les copules et leurs caractéristiques ainsi que les méthodes des L-moments et des TL-moments. De ce fait la thèse est composée de quatre chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1. Copules et mesure d'association. Ce chapitre est constitué de deux parties. Dans la première nous introduisons les définitions de base des copules, leurs propriétés, ainsi que les principales théorèmes liés à cette théorie, en particulier le théorème de Sklar. De même quelques exemples de familles paramétriques de copules les plus utilisées. Nous nous intéressons dans un premier temps à l'étude du cas bivarié, avant de donner une extension au cas multivarié. Dans la deuxième partie nous présentons l'aspect des mesures d'association : la mesure de concordance, la mesure de dépendance en forme de copule, telle que le rho de Spearman et le tau de Kendall. L'importance de l'utilisation des copules dans la modélisation de la dépendance, ainsi que les avantages procurés par celles-ci sont présentés à la fin de ce chapitre.

Chapitre 2. Théorie des L-moments et des Trimmed L-moments. Les L-moments et les Trimmed L-moments sont des mesures analogues aux moments de probabilité pondérés et aux moments classiques, leurs représentations sont basées sur la notion de statistiques d'ordres. Les versions théoriques et empiriques des L-moments et des TL-moments sont présentés dans cette partie de la thèse, ainsi que le cas bivarié sous le titre des L-comoments.

Chapitre 3. Copules paramétrique : méthodes d'estimation et modélisation de

La dépendance. Ce chapitre est consacré aux méthodes d'estimation, où nous avons regroupé quelques méthodes d'estimations de copules paramétriques, telle que la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode d'inversion, la méthode des L-moment et la méthode des L-comoments, les méthodes graphiques pour modéliser la dépendance sont aussi présentés dans cette partie.

Chapitre 4. Bivariate copulas parameters estimation using the trimmed L-

moments method. En fin dans le dernier chapitre, nous présentons une nouvelle méthode d'estimation basée sur les Trimmed L-moments pour les paramètres d'une copule, cette méthode est alternative à celle présenté par Brahim et al. (2014) [10] où ils ont utilisé les L-comoments pour estimer les paramètres d'une copule ainsi que les paramètres des distributions marginales. Ce chapitre comprend la représentation de TL-moments en fonction de copule, la procédure d'estimation des paramètres, et des exemples illustratifs avec la copule de Gumbel et celle de Farlie-Gumbel-Morgenstern avec des marginales de Cauchy et de Pareto généralisé. La normalité asymptotique de cet estimateur est aussi établie.

Chapitre 1

Copules et mesure d'association

Ce chapitre est consacré à la théorie des copules d'où il se concentrera de deux parties : nous définirons tout d'abord les copules bivariées ainsi que leurs propriétés élémentaires, le lien entre les copules et les variables aléatoires à partir le théorème de Sklar (1959) [94]. Les familles paramétriques usuelles des copules bivariées telles que les copules Archimidiennes, les copules de valeurs extrêmes,... qui sont données dans la section 3. La sections 4 traitent le cas multivariées qui est considéré comme généralisation du cas bivarié d'où nous suivons la même manière pour définir les copules multivariées. Ensuite nous présentons dans la deuxième partie la notion de mesures d'associations en termes de copule : la mesure de concordance et de dépendance, tel que le tau de Kendall et le rho de Spearman. Nous terminons ce chapitre par une conclusion couvre les avantages de copules pour les recherches statistiques et sur d'autre domaine telle que la finance. La référence de base utilisée dans ce chapitre est le livre de Nelsen (2006) [78].

Première partie

Introduction aux copules

1.1 Copules bivariées

Définition 1.1.1 Une copule 2-dimensionnelle est une fonction C de $\mathbb{I}^2 = [0, 1]^2$ dans \mathbb{I} ayant les propriétés suivantes :

i) La copule C est attachée (grounded), c'est à dire

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{I} \quad (1.1)$$

ii) Les marges sont uniformes, c'est à dire

$$C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v, \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.2)$$

iii) La copule C est 2-croissantes : $\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{I}$, telle que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (1.3)$$

Exemple 1.1.1

– **Copule produit** : La copule produit, noté Π , est définie par :

$$C(u, v) = \Pi(u, v) = uv, \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.4)$$

Comme on observe cette copule vérifié les propriétés (1.1) et (1.2), telle que :

$$C(0, v) = \Pi(0, v) = 0v = 0 \text{ et } C(u, 0) = \Pi(u, 0) = u0 = 0,$$

$$C(1, v) = \Pi(1, v) = 1v = v \text{ et } C(u, 1) = \Pi(u, 1) = u.$$

pour la propriété (1.3), on a :

$$\begin{aligned} C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) &= \Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_2, v_1) - \Pi(u_1, v_2) + \Pi(u_1, v_1) \\ &= u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 \geq 0, \end{aligned}$$

où

$$\text{si } u_2 \geq u_1 \Rightarrow \begin{cases} u_2v_2 \geq u_1v_2 \\ u_2v_1 \geq u_1v_1, \end{cases},$$

alors

$$u_2v_2 - u_2v_1 \geq u_1v_2 - u_1v_1 \Rightarrow u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 \geq 0.$$

– **Copule min** : La copule min, noté M , est définie par :

$$M(u, v) = \min(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.5)$$

– **Copule max** : La copule max, noté W , est définie par :

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.6)$$

1.1.1 Théorème de Sklar

Ce théorème représente la base de la théorie de copules, car elle valide l'existence de la copule C qui permet de relier les lois marginales de deux v.a pour obtenir la distribution jointe. Ce théorème a été développé par Sklar (1959) [94] et porte son nom. La relation entre la distribution jointe, les fonctions de distribution marginales et la copule C est montré dans le théorème suivant

Théorème 1.1.1 *Soient X, Y deux v.a de fonction de répartition jointe H et des*

marginales F et G . Alors il existe une copule C telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$H(x, y) = C(F(x), G(Y)). \quad (1.7)$$

Si F et G sont continues, alors C est unique.

Inversement, si C une copule et F et G sont des fonctions de répartition, alors la fonction H définie dans (1.7) est une fonction de répartition jointe dont les marginales sont F et G . [78], [100].

Définition 1.1.2 Soit F une fonction de répartition univarié. Le quantile de F (l'inverse généralisé) est une fonction, notée F^{-1} de domaine de définition \mathbb{I} , telle que

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\} \quad (1.8)$$

Proposition 1.1.1 Soit X une v.a de fonction de répartition F , alors

1. Si U est uniforme dans $[0, 1]$ alors $F^{-1}(U) \xrightarrow{d} F$.
2. Si F est continue, alors $F(X) \xrightarrow{d} U_{[0,1]}$.

Preuve. A l'aide de la définition (1.1.2) et la proposition (1.1.1), nous pouvons montrer le théorème (1.1.1)

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(F_X^{-1}(U_1) \leq x, G_Y^{-1}(U_2) \leq y) \\ &= \mathbb{P}((U_1 \leq F(x), U_2 \leq G(Y))) \\ &= C(F(x), G(Y)). \end{aligned}$$

ce qui nous donne la relation entre la loi jointe, les lois marginales et les copules. ■

A partir le théorème de Sklar on peut extraire une définition de copules dépend de notion de variables aléatoires comme suit :

Soient F, G les fonctions de répartitions marginales de deux v.a X et Y respectivement.

Définition 1.1.3 Une copule C bivariée définie sur \mathbb{I}^2 est une fonction de répartition jointe et dont les marginales F et G sont uniformes sur \mathbb{I} .

Corollaire 1.1.1 (Inverse de théorème de Sklar)

Soit H une fonction de répartition 2-dimensionnelle de fonctions de répartitions marginales F et G . Alors la copule C associée à H est donnée par :

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \text{ pour tout } (u, v) \in \mathbb{I}^2. \quad (1.9)$$

Exemple 1.1.2 Soit (X, Y) un couple de v.a dont la fonction jointe H est définie par :

$$H(x, y) = \exp \left\{ - \left[(x + y) - (x^{-\theta} + y^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} \right] \right\} \quad \forall (x, y) \in [0, \infty[\times [0, \infty[, \theta > 0.$$

et admet pour marginales

$$F(x) = \exp(-x), \quad G(y) = \exp(-y),$$

nous avons

$$F^{-1}(u) = -\ln u, \quad G^{-1}(v) = -\ln v, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2$$

d'après le corollaire (1.1.1) la copule associée est exprimée comme suit :

$$C(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[(-\ln u^{-\theta}) + (-\ln v^{-\theta}) \right]^{-\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad \forall \theta \geq 1.$$

C'est la copule de Galambos [34].

1.1.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Toute copule bivariée C sont bornées par deux copules. Ces bornes sont déterminées dans le théorèmes suivant :

Théorème 1.1.2 *Soit C une copule, alors*

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq M(u, v) = \min(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (1.10)$$

telle que W et M représentent les bornes inférieur et supérieur de Fréchet-Hoeffding (respectivement).

Comme une conséquence de thèorème de Sklar, si X, Y sont des variables aléatoires dont la fonction de répartition jointe est H et des marginales F et G , respectivement, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y)).$$

Car M et W sont des copules, les bornes ci-dessus sont des fonctions de répartition jointes et sont appelés les bornes de Fréchet-Hoeffding pour une fonction de répartition jointe H et des marginales F et G .

1.1.3 Représentation graphique de copules

Le graphique de toute copules est une surface continue dans le cube \mathbb{I}^3 où les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$. Ce graph se situe entre les graphes de bornes de Fréchet-Hoeffding, c'est à dire les surfaces de M, W et Π . Aussi on peut présenter le graphique de copule par le diagramme de contour (figure 1.2)

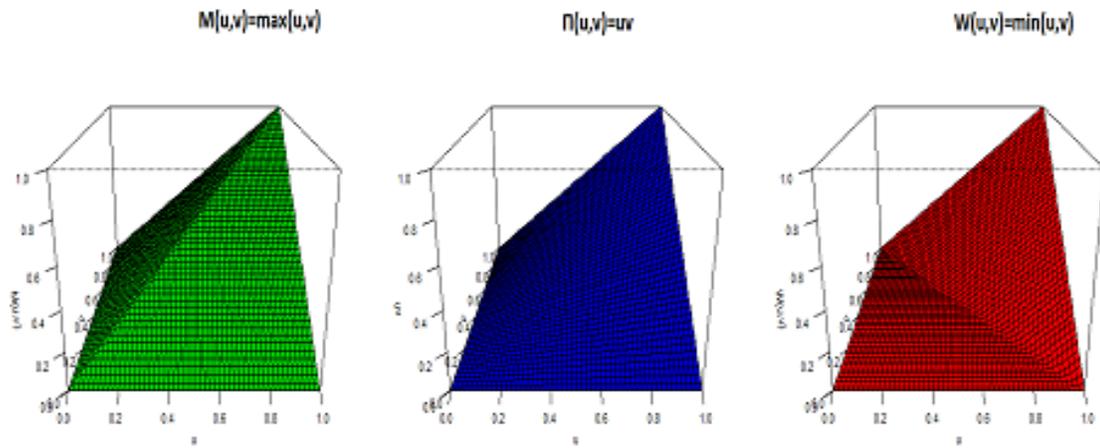


FIG. 1.1 – Graphique de copules M , Π et W .

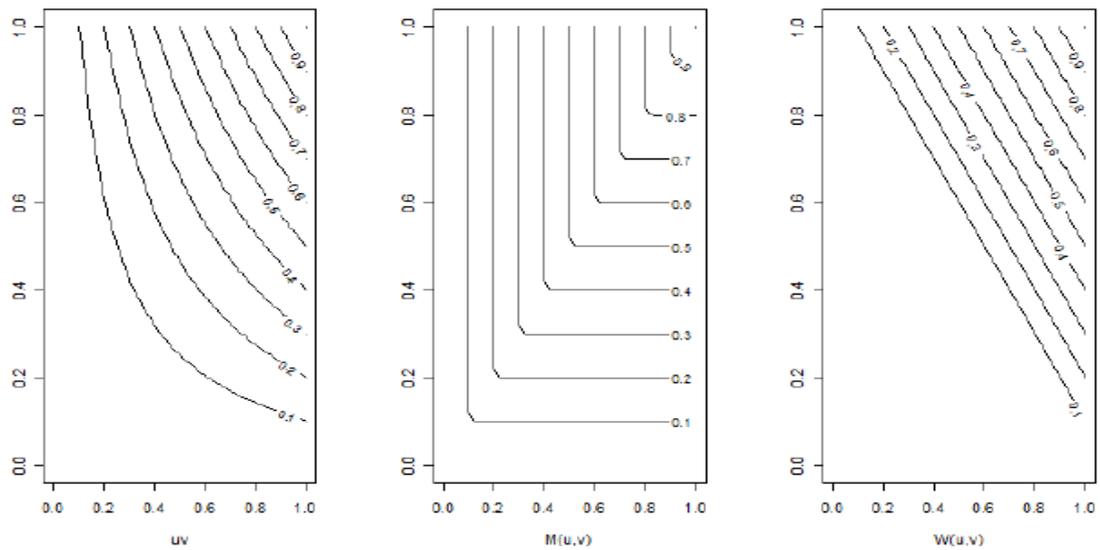


FIG. 1.2 – Diagrammes de contour de copules Π , M et W .

1.1.4 Propriétés de copule

Soient X, Y deux v.a continues, de fonction de répartition jointe H et dont les marginales sont F et G , et soit C la copule associée.

1. **Symétrie** : On dit que X, Y sont échangeable si et seulement si $F = G$ et

$C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{I}^2$. Si $C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{I}^2$, on dit que C est symétrique.

2. **Théorème d'invariance** : Ce théorème est essentiel à la théorie des copules, de façon particulière dans les notions de mesure d'association.

Théorème 1.1.3 *Soient deux variables aléatoires continues X et Y de marges F et G et de copule $C_{X,Y}$. Si α et β sont deux fonctions strictement croissantes, alors*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}. \quad (1.11)$$

La copule $C_{X,Y}$ est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

Preuve. On peut démontrer ce théorème facilement à l'aide de lois de probabilité, comme suit :

Soient F_1, G_1, F_2, G_2 les fonctions de répartitions de $X, Y, \alpha(X)$ et $\beta(Y)$, respectivement. D'où α et β sont strictement croissantes, alors

$$F_2 = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x)),$$

aussi

$$G_2 = \mathbb{P}(\beta(Y) \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y)) = G_1(\beta^{-1}(y)).$$

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\
 &= C_{X,Y}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
 &= C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y)).
 \end{aligned}$$

alors toute copule vérifie cette propriété. ■

3. **Ordre :** Soit C_1, C_2 deux copules. On dit que C_1 est plus petite que C_2 ou C_2 est plus grande que C_1 et on note $C_1 \prec C_2$ si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2.$$

Comme exemple, on a la copule $W = \max(u + v - 1, 0)$ est la plus petite copule et $M = \min(u, v)$ est la plus grande copule.

4. Dérivées partielles

Les dérivées partielles de $C(u, v)$ existent presque sûrement pour tout $(u, v) \in \mathbb{I}^2$ [104], et vérifie :

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1.$$

1.2 Densité de copule

Soient X, Y deux variables aléatoires continues. Soit h la fonction de densité jointe de H , f et g sont les fonctions de densités marginales de X, Y respectivement.

Définition 1.2.1 *La densité $c(F(x), G(y))$ associée à la copule $C(F(x), G(y))$ est définie*

par :

$$\begin{aligned} c(F(x), G(y)) &= \frac{\partial^2 C(F(x), G(y))}{\partial F(x) \partial G(y)} \\ &= \frac{h(x, y)}{f(x)g(y)}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Sklar (1.1.1), on donne la représentation canonique suivante :

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y) \tag{1.12}$$

1.3 Exemple de copules usuelles

1.3.1 Copules d'indépendance

La copule associée à deux v.a indépendantes X et Y est donnée par le produit de ces marginales comme suit :

$$C(u, v) = F(x)G(y) = uv.$$

1.3.2 Copule Gaussienne

La copule Gaussienne de deux v.a X, Y Gaussiennes de moyenne μ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{r} & 1 \end{bmatrix}$ est définie par :

$$C_{\mathbf{r}}^{\phi}(u, v) = \phi_{\mathbf{r}}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)), \tag{1.13}$$

telle que $\phi_{\mathbf{r}}$ est la fonction de répartition jointe de la loi normale bivariée, de coefficient

de corrélation linéaire $\mathbf{r} \in [-1, 1]$, ϕ est la fonction de la loi normale standard, par suite :

$$\phi_{\mathbf{r}}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\mathbf{r}_{X,Y}^2}} \exp\left(\frac{2\mathbf{r}_{X,Y}st - s^2 - t^2}{1-\mathbf{r}_{X,Y}^2}\right) dsdt. \quad (1.14)$$

Cette copule est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire \mathbf{r} .

- Si $\mathbf{r} = 0$ alors $C_r^\phi(u, v) = \Pi$.
- Si $\mathbf{r} = -1$ alors $C_r^\phi(u, v) = W(u, v)$.
- Si $\mathbf{r} = 1$ alors $C_r^\phi(u, v) = M(u, v)$.

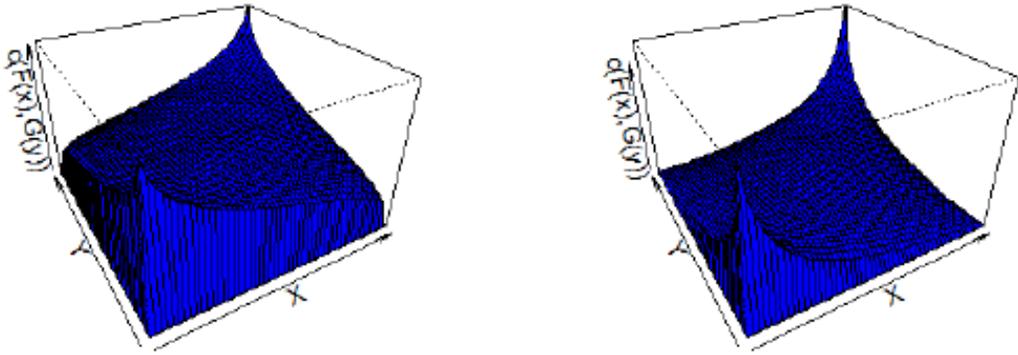


FIG. 1.3 – Densité de copule Gaussienne pour $\rho = 0.2$ (à gauche) et $\rho = 0.7$ (à droite).

1.3.3 Copule de Student

Dans le cas univarié, la fonction de répartition de Student est définie par :

$$t_v(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(v+2)} \left(1 + \frac{s^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ds,$$

telle que Γ est la fonction d'Euler¹.

Dans le cas bivarié, soit $\mathbf{r} \in [-1, 1]$, alors la fonction de répartition bivariée est :

$$t_{\mathbf{r},v}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\mathbf{r}^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\mathbf{r}st}{v(1-\mathbf{r}^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt.$$

Définition 1.3.1 *La copule de Student est une copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire \mathbf{r} et le degré de liberté v . Cette copule est définie par :*

$$C_{\mathbf{r},v}^t(u, v) = t_{\mathbf{r},v}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\mathbf{r}^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\mathbf{r}st}{v(1-\mathbf{r}^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt. \quad (1.15)$$

La densité est définie par :

$$c_{\mathbf{r},v}^t(u, v) = \mathbf{r}^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})^2} \left(\frac{(1+\varsigma_1^2+\varsigma_2^2-2\mathbf{r}\varsigma_1\varsigma_2)^{-\frac{v+2}{2}}}{v(1-\mathbf{r}^2)} \right) \frac{1}{\prod_{j=1}^2 (1+\varsigma_j^2)^{-\frac{v+2}{2}}}, \quad (1.16)$$

où $\varsigma_1 = t_v^{-1}(u)$, $\varsigma_2 = t_v^{-1}(v)$.

Remarque 1.3.1 1. *La copule Gaussienne et la copule de Student appartient à la famille de copules elliptique [3].*

2. *Si le degré de liberté $v \rightarrow \infty$, alors la copule de student converge vers la copule Gaussienne [104].*

1.3.4 Copules Farlie-Gumbel-Morgenstern

La copule Farlie-Gumbel-Morgenstern (F-G-M) est définie pour un paramètre de dépendance $\alpha \in [-1, 1]$ comme suit :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 \bar{u}_1 \bar{u}_2, \quad (1.17)$$

¹ $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt.$

telle que : $\bar{u}_j = 1 - u_j, j = 1, 2$.

Dont la densité est :

$$c_\alpha(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1 - 2u_2 + 4u_1u_2),$$

Aussi Joe, (1997) [64] introduit la famille de copule F-G-M multi-paramétrique, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ comme suit :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1u_2 + \sum_{j=1}^r \alpha_j (u_1u_2)^{[j/2]+1} (\bar{u}_1\bar{u}_2)^{[j/2+1/2]} \quad (1.18)$$

où $[t]$ est la partie entière de t et pour $r = 2$, on obtient la copule avec deux paramètres :

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = u_1u_2(1 + \alpha_1\bar{u}_1\bar{u}_2 + \alpha_2u_1u_2\bar{u}_1\bar{u}_2), \quad (1.19)$$

telle que les paramètres (α_1, α_2) sont définie dans la région :

$$\mathcal{R} = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha_1| \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 \geq -1, \alpha_2 \leq \frac{1}{2} [3 - \alpha_1 + (9 - 6\alpha_1 - 3\alpha_1^2)^{1/2}] \right\}.$$

1.3.5 Copules Archimédiennes

Cette famille de copule a été nommé par Ling (1965) [73], mais il a été reconnu par Schweizer et Sklar (1961)[88] dans l'étude de t-norm. Avant d'être introduit dans la finance et aussi dans d'autres domaines [35]. Ces copules trouvent une large gamme d'applications pour plusieurs raisons :

1. La facilité avec laquelle ils peuvent être construits ;
2. La grande variété de familles de copules qui appartiennent à cette famille ;
3. Les nombreuses propriétés possédées par les membres de cette famille.

Définition 1.3.2 La copule Archimédienne, noté $C^A(u, v)$, est définie par :

$$C^A(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (1.20)$$

telle que $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$, est une fonction continue, décroissante et convexe, où $\varphi(1) = 0$, la fonction φ est dite générateur, et φ^{-1} est le pseudo-inverse de φ définie comme suit :

$$\varphi^{-1}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) & 0 \leq u \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq u \leq +\infty. \end{cases}$$

Propriétés de cette famille : La famille de copules Archimédiennes a les propriétés suivantes :

a. **La symmétrie :**

$$C^A(u, v) = C^A(v, u), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2.$$

b. **L'associativité :**

$$C^A(C^A(u, v), z) = C^A(u, C^A(v, z)), \quad \forall (u, v, z) \in \mathbb{I}^3.$$

c. **De contour convexe :**

$$\{(u, v) \in \mathbb{I}^2 : \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(k)\}, \quad k > 0.$$

d. **De densité :**

$$c^A(u, v) = \frac{-\varphi''(C(u, v))\varphi'(u)\varphi'(v)}{(\varphi'(C(u, v)))^3}.$$

e. Si c est un costant strictement positif, alors $c\varphi$ est un générateur de la copule C^A .

Exemple 1.3.1

1. On prend la fonction $\varphi(t) = -\ln(t)$ comme générateur et le pseudo inverse

$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$. et on construit la copule C utilisant (1.20) comme suit :

$$C^A(u, v) = \exp(-[(-\ln(u)) + (-\ln(v))]) = uv = \Pi(u, v),$$

qui nous donne la copule d'indépendance Π , alors on déduit que la copule Π est une copule Archimédienne.

2. Soit $\varphi(t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$. Donc $\varphi^{-1}(t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$ et 0 pour $t > 1$, alors $\varphi^{-1}(t) = \max(1 - t, 0)$. D'après (1.20), on a :

$$C^A(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v), \quad (1.21)$$

donc la copule $W(u, v)$ est Archimédienne.

Théorème 1.3.1 *Soit C une copule Archimédienne générée par φ . Soit $K_C(t)$ la C -mesure de l'ensemble $\{(u, v) \in \mathbb{I}^2 \mid C(u, v) \leq t\}$, alors*

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{I}, \quad (1.22)$$

où $\varphi'(t)$ est la dérivé de $\varphi(t)$. [78].

Corollaire 1.3.1 *Soient U et V deux v.a uniformes sur $[0, 1]$ dont la fonction de répartition jointe est la copule Archimédienne C générée par φ , alors la fonction K_C donnée par (1.22) est la fonction de répartition de la v.a $C(U, V)$.*

Exemples de copules Archimédiennes

1. **Copule de Gumbel (1960)** : C'est une copule asymétrique. Elle est définie par :

$$C_\alpha^{Gum}(u, v) = \exp\{-(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (1.23)$$

et dont le générateur est :

$$\varphi_\alpha(t) = (-\ln t)^\alpha,$$

où le paramètre de dépendance $\alpha \in [1, \infty[$ [50], [59] et [100]. Nous avons :

- Si $\alpha \rightarrow 1$ alors $C_\alpha^{Gum} \rightarrow \Pi$.
- Si $\alpha \rightarrow \infty$ alors $C_\alpha^{Gum} \rightarrow M$.

2. Copule de Clayton (1978) : La copule de Clayton s'appelle aussi la copule de cook et Johnson (1981) [18], et d'abord étudié par Kimeldorf et sampson (1975) [67]. Elle est définie par :

$$C_\alpha^{cla}(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (1.24)$$

où le générateur et le pseudo inverse sont :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t) &= \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1) \\ \varphi_\alpha^{-1}(t) &= (t + 1)^{\frac{-1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

avec le paramètre de dépendance $\alpha \in [-1, 0[\cup]0, \infty[$.

- Si le paramètre $\alpha \rightarrow 0$ alors les marginales sont indépendantes.
- Si $\alpha \rightarrow \infty$ alors on obtient la copule de borne supérieur de Fréchet-Hoffding M .

3. Copule de Frank (1979) : Cette copule est symétrique de paramètre de dépendance $\alpha \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$. [36]. Elle est définie par :

$$C_\alpha^{Fr}(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-u\alpha} - 1)(e^{-v\alpha} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right). \quad (1.25)$$

De générateur et de densité :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t) &= -\ln \left[\frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right]. \\ c^{Fr}(u, v) &= \frac{(\alpha - 1) \ln \alpha^{u+v}}{(\alpha - 1 + (\alpha^u - 1)(\alpha^v - 1))^2}. \end{aligned}$$

- Si $\alpha \rightarrow 0$ alors $C_\alpha^{Fr} \rightarrow \Pi$.
- Si $\alpha \rightarrow +\infty$ alors $C_\alpha^{Fr} \rightarrow M$.
- Si $\alpha \rightarrow -\infty$ alors $C_\alpha^{Fr} \rightarrow W$.

Le graphe (1.4) illustre les densités de copules Archimédiennes : Frank, Clayton et Gumbel.

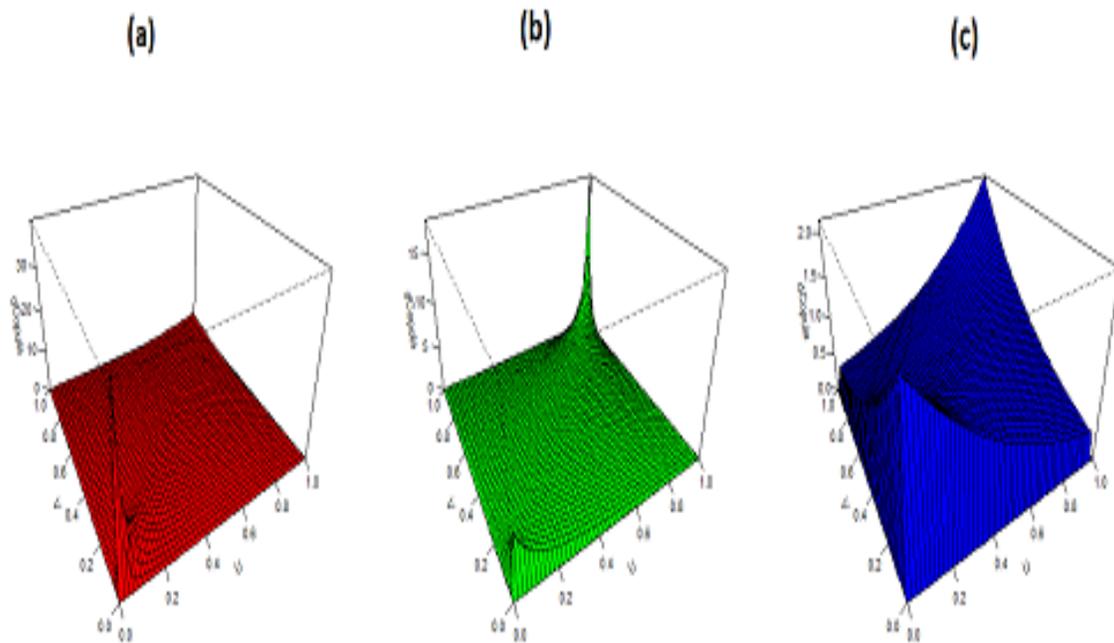


FIG. 1.4 – Densités de copules Clayton (a) pour $\alpha = 3$, Gumbel (b) pour $\alpha = 2$ et Frank (c) pour $\alpha = 2$.

1.3.6 Copule de valeurs extrêmes

Cette section est consacré aux copules de valeurs extrêmes. Dans le premier temps on donne la définition et les lois de probabilité correspondants aux cas univarié et ensuite on parle sur les copules de valeurs extrêmes ou en donnant quelques exemples.

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires (i.i.d). Soit $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Théorème 1.3.2 (*Fisher-Tippet 1928*)

S'il existe deux suite $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$, telle que $\frac{M_n - d_n}{c_n}$ converge en distribution non dégénérée [31], alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x \right) = G_\alpha(x),$$

où $G_\alpha(x)$ prend une trois des lois suivantes

Fréchet	$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp \{-x^{-\alpha}\}, & x > 0. \end{cases}$	$\alpha > 0$
Weibull	$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp \{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0, \\ 1, & , x > 0. \end{cases}$	$\alpha > 0$
Gumbel	$\Lambda(x) = \exp \{-e^{-x}\}, x \in \mathbb{R}$	

Exemple 1.3.2 (*Loi uniforme*)

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, \theta]$ telle que $\theta > 0$. La statistique $(n \left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Weibull,

telle que $\alpha = 1$.

On pose que :

$$G(x) = \mathbb{P} \left[n \left(\frac{M_n}{\theta} - 1 \right) \leq x \right] \text{ et } F_{X_n} = \mathbb{P} [\max(X_i) \leq x] = (F(x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n,$$

car la fonction de répartition de la loi uniforme $F(x) = \frac{x}{n}$, alors

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \mathbb{P}\left(n\left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right) \leq x\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\theta} \leq \frac{x}{n} + 1\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(M_n \leq \theta\left(\frac{x}{n} + 1\right)\right) \\
 &= F_{M_n}\left(\theta\left(\frac{x}{n} + 1\right)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
 &= \exp(x).
 \end{aligned}$$

Donc $G(x) = \exp(x)$ a une loi de Weibull.

Théorème 1.3.3 Soit $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ couples de v.a (i.i.d) d'une copule commune C , et $C_{(n)}$ la copule associé à $X_{(n)} = \max(X_i)$ et $Y_{(n)} = \max(y_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Alors

$$C_{(n)}(u, v) = C^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}), \quad 0 \leq u, v \leq 1. \quad (1.26)$$

La limite de la suite $\{C_{(n)}\}$ nous donne la définition suivante [3].

Définition 1.3.3 Une copule C^* est une copule de valeurs extrêmes bivariées s'il existe une copule C telle que

$$C^*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}). \quad (1.27)$$

Loi de valeurs extrêmes bivariées

Soit $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ couples de variables aléatoires (i.i.d) de distribution commune H . Alors il existe des $a_n, c_n > 0$ et $b_n, d_n \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{X,n} - b_n}{a_n} \leq x; \frac{M_{Y,n} - d_n}{c_n}\right) = G_\theta(x, y), \quad (1.28)$$

telle que G est une distribution non dégénérée si et seulement si les lois marginales de G sont des lois de valeurs extrêmes univariées [22]

Théorème 1.3.4 *Pour toute copule de valeurs extrêmes bivariées C^* il existe une fonction convexe A définie de $[0, 1]$ dans $[\frac{1}{2}, 1]$, telle que*

$$C^*(u, v) = \exp \left[\left(-\ln(u) + \ln(v) A \left(\frac{\ln u}{\ln(u) + \ln(v)} \right) \right) \right]. \quad (1.29)$$

De plus A vérifie

$$\max(t, 1 - t) < A(t) < t, \forall t \in [0, 1]. \quad (1.51)$$

A est dite *générateur* ou *fonction de dépendance de Pickands* [45].

Famille paramétriques des copules de valeurs extrêmes bivariées : Nous présentons dans la table (Tab.1.1) quelques modèles paramétriques de valeurs extrêmes qui dérivent de deux familles : le modèle mixte ou Tawn (1988) [95] et le modèle logistique ou Gumbel (1960) qui sont mentionnés dans ([50],[63], [77])telle que le modèle Galambos [34] et Husler-Reiss [76] et le modèle Marchal-Olkin [74], [19].

Famille	$C_{\theta}^*(u, v)$	$A_{\theta}(t)$
Indépendance	uv	$A(t) = 1$
Gumbel ₁	$\exp \left\{ -(\tilde{u}^{\theta} + \ln \tilde{v}^{\theta})^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \theta \geq 1$	$[t^{\theta} + (1 - t^{\theta})]^{\frac{1}{\theta}}$
Gumbel ₂	$uv \exp \left\{ \theta \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{u} + \tilde{v}} \right\}, \theta \geq 0$	$t^2 - \theta t + 1$
Galambos	$uv \exp \left\{ -(\tilde{u}^{-\theta} + \tilde{v}^{-\theta})^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$1 - [t^{-\theta} + (1 - t^{-\theta})]^{-\frac{1}{\theta}}$
Marchal-Olkin	$u^{1-\alpha}v^{1-\beta} \min(u^{\alpha}, v^{\alpha}) = \begin{cases} uv^{1-\beta} & \text{si } u^{\alpha} < v^{\beta} \\ u^{1-\alpha}v & \text{si } u^{\alpha} > v^{\beta} \end{cases}$	$\begin{cases} \max \{1 - \alpha t, 1 - \beta(1 - t)\}, \\ \alpha \leq 1, \beta \geq 0 \end{cases}$

TAB. 1.1 – Quelques copules de valeurs extrêmes.

Avec $\tilde{u} = -\ln u$, $\tilde{v} = -\ln v$ et Φ est la fonction de répartition de de la loi normale centrée réduite.

Remarque 1.3.2 *La copule de Gumbel appartient à la famille de copules Archimédiennes et à la famille de copules de valeurs extrêmes. Cette famille de copules est définie par Capéraà et al. (2000) [14] qui s'appelle la famille de copules archimax.(voir aussi [37]).*

1.4 Copules multivariées

Cette section étend les résultats de la section précédente au cas multidimensionnel ($d > 2$). Donc de la même manière, nous présentons les copules multivariées : définitions, théorème, propriétés et nous concluons cette section par quelques exemples de copules multivariées [16] et [32]. Nous notons $\mathbb{I}^d = [0, 1]^d$.

1.4.1 Définition et théorème d'existence

Soit le vecteur $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{I}^d$. Soient $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_d$ sous ensembles non vide de \mathbb{R}^{*d} et G une fonction définie sur $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_d \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.4.1 Soit \mathbf{a}_i les plus petits éléments de $\mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n$. La fonction \mathcal{G} est dite attachée si elle est nulle pour tout $v \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_d$ pour au moins un indice k telle que $v_k = \mathbf{a}_k$

$$\mathcal{G}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = 0.$$

Définition 1.4.2 Soient S_1, \dots, S_d des parties mesurables non vides de $\bar{\mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{B} = [a, b]$ un d -pavé dont les sommets sont dans $\text{Dom}G$. Le \mathcal{G} volume de \mathcal{B} est alors défini par

$$V_G(\mathcal{B}) = \sum \text{sgn}(\mathbf{c}) \mathcal{G}(\mathbf{c}), \quad (1.30)$$

où la somme s'effectue sur tous les sommets \mathbf{c} de \mathcal{B} et le $\text{sgn}(\mathbf{c})$ est donné par

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{c}_k = \mathbf{a}_k \text{ pour un nombre pair de } k, \\ -1 & \text{si } \mathbf{c}_k = \mathbf{a}_k \text{ pour un nombre impair de } k. \end{cases}$$

Définition 1.4.3 La fonction \mathcal{G} est dite d -croissante si $V_G(\mathcal{B}) \geq 0$ pour tout d -pavé \mathcal{B} dont les sommets sont dans $\text{Dom}\mathcal{G}$.

Définition 1.4.4 Une copule d -dimensionnelle est une fonction C de \mathbb{I}^d dans \mathbb{I} ayant les propriétés suivantes

1. $\forall u \in \mathbb{I}^d$

$$C(u) = 0 \text{ pour au moins une coordonné de } u = 0, \quad (1.31)$$

2. pour toutes les coordonnés égale 1 sauf u_i , alors

$$C(u) = u_i \quad (1.32)$$

2. $\forall u, v \in \mathbb{I}^d$ telle que $u \leq v$

$$V_C([u, v]) \geq 0 \quad (1.33)$$

1.4.2 Théorème de Sklar

Théorème 1.4.1 Soit H une fonction de répartition d -dimensionnelle de fonctions de répartition marginales F_1, \dots, F_d . Alors il existe une d -copule C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$H(x) = H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (1.34)$$

Si les fonctions F_1, \dots, F_d sont continues, alors C est unique.

Inversement, si C est une d -copule et si F_1, \dots, F_d sont des fonctions de répartition univariées, alors la fonction H définie dans (1.34) est une fonction de répartition d -dimensionnelle de marginales F_1, \dots, F_d .

Pour la preuve de ce théorème voir [84].

Corollaire 1.4.1 Soit H une fonction de répartition d -dimensionnelle de fonctions de répartition marginales F_1, \dots, F_d . Alors, la copule C associée à H est donnée par :

$$C(u_1, \dots, u_d) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \text{ pour tout } u \in \mathbb{I}^d \quad (1.35)$$

1.4.3 Propriétés de copules multivariées

1. **Théorème 1.4.2** (*Continuité uniforme*)

Une copule C est uniformément continue sur son domaine. En particulier, pour tout u, v dans \mathbb{I}^d , nous avons :

$$\left| C(u) - C(v) \right| \leq \sum_{i=1}^n |v_i - u_i|. \quad (1.36)$$

2. **Théorème 1.4.3** (*Invariance*)

Soient (X_1, \dots, X_d) un vecteur de variables aléatoires continues, de fonction de répartition F associée à une copule C et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ une suite de fonctions strictement croissantes. Alors, la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_d(X_d))$ est aussi associée à la même copule C . [89].

$$C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_d(X_d)} = C_{X_1, \dots, X_d}(u).$$

Théorème 1.4.4 (*Dérivées partielles*)

Soit C une copule. Les dérivées partielles de C existent presque sûrement, pour tout $i = 1, \dots, d$ et pour tout $u \in \mathbb{I}^d$, et on a :

$$0 \leq \frac{\partial C(u)}{\partial u_i} \leq 1. \quad (1.37)$$

de plus, les fonctions

$$u \rightarrow \frac{\partial C(u)}{\partial u_i} \text{ sont non décroissantes p.p}$$

Densité d'une copule multivariée : La densité c associée à la copule C est définie par :

$$\begin{aligned}
 c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) &= \frac{\partial^d C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_d(x_d)} \\
 &= \frac{h(x_1, \dots, x_d)}{f_1(x_1), \dots, f_d(x_d)} \\
 &= \frac{h(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_i(F_i^{-1}(u_i))}, \tag{1.38}
 \end{aligned}$$

telle que h est la densité de H et f_i est la densité de F_i .

Si la fonction de répartition multivariée H est absolument continue et en utilisant le théorème de Sklar, on peut présenter la fonction de densité en fonction de la densité c et ses fonction de répartition marginales par

$$h(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i). \tag{1.39}$$

1.4.4 Exemples de copules paramétriques multivariées

1. **Copule d'indépendance :** Les variables aléatoires X_1, \dots, X_d sont indépendantes si et seulement si

$$F(x_1, \dots, x_d) = F_1(x_1) \dots F_d(x_d).$$

Nous définissons donc la copule d'indépendance multivariée par

$$\Pi^d(u) = u_1 u_2 \dots u_d, \tag{1.40}$$

telle que $u_i = F_i(x_i)$ pour $i = 1, \dots, d$.

2. **Copule Gaussienne :** Soit X_1, \dots, X_d des v.a Gaussiennes, de moyenne μ , de matrice de covariance Σ et de matrice de corrélation R . Soit Φ_Σ une distribution normale

standard multivariées. Alors la copule Gaussienne $C_R^{d,Ga}$ est définie par :

$$C_R^{d,Ga}(u) = \Phi_R^d(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)), \quad (1.41)$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition standard normale univarié Φ . [16] et [49].

D'après (1.39) nous avons :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^t R^{-1} X\right) = c_R^{d,Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)) \times \prod_{j=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_j^2\right)\right) \quad (1.42)$$

3. Copule Archimédienne : Comme le cas bivarié les copules Archimédiennes multivariées sont définies par un générateur $\varphi(t)$ (voir [66] et [11]). La forme générale de cette famille de copules est présenté comme suit :

$$C^d(u) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)), \quad (1.43)$$

et dont la densité est :

$$c^d(u) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)) \dot{\varphi}(u_1) \dot{\varphi}(u_2) \dots \dot{\varphi}(u_d), \quad (1.44)$$

Exemples de copules Archimédiennes multivariées

(a) **Copule de Clayton :** Est définie par :

$$C_\alpha^{d,Cla}(u) = \left(1 - d + \sum_{i=1}^d u_i^{-\alpha}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (1.45)$$

tel que, $C_\alpha^{d,Cla} = \Pi^d(u)$ quand $\alpha = 0$.

(b) **Copule de Frank** : Est définie par :

$$C_{\alpha}^{d,Fr}(u) = -\frac{1}{\alpha} \log \left\{ 1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\alpha u_i) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)^{d-1}} \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (1.46)$$

(c) **Copule de Gumbel** : Est définie par :

$$C_{\alpha}^{d,Gum}(u) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^d (-\log(u_i))^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad (1.47)$$

tel que $\alpha \in [1, \infty[$, et nous avons :

- $C_{\alpha}^{d,Gum}(u) \rightarrow \Pi^d(u)$ quand $\alpha \rightarrow 1$.
- $C_{\alpha}^{d,Gum}(u) \rightarrow M^d(u)$ quand $\alpha \rightarrow \infty$.

1.5 Simulation de copules

Il existe plusieurs algorithmes pour simuler les copules [16], nous présentons dans cette section les deux méthodes suivantes qui sont décrit dans [27].

1.5.1 Cas générale

Soit $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ un échantillon de copule $C(U, V)$ et soit la copule conditionnelle $C_U(v) = C(V/U = v)$ une fonction de répartition avec $Z = C_u(V)$ une v.a suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi $C_U(v) = \frac{\partial C(U, V)}{\partial v}$, alors la procédure de simulation est donnée dans deux étapes comme le suitvant :

Etape 1 : Simuler des v.a indépendantes U, Z uniforme sur $[0, 1]$;

Etape 2 : Calculer $V = C_U^{-1}(Z)$.

1.5.2 Simulation de copules Archimédiennes

Cette méthode de simulation de copule Archimédiennes est introduit par Genest et Mackay (1986) [35], d'où $\varphi(C) = [\varphi(U) + \varphi(V)]$, il s'ensuit que $\varphi'(C \frac{\partial C}{\partial u}) = \varphi'(u)$. une auxiliaire variable $W = C(U, V)$ est calculé par :

$$W = (\varphi')^{-1} \left(\frac{\varphi'(u)}{\frac{\partial C}{\partial u}} \right), \quad (1.48)$$

tel que $(\varphi')^{-1}$ est l'inverse de la dérivée de φ . Alors la procédure de simulation est donnée comme suit :

Etape 1 : Simuler des v.a indépendantes U, Z uniforme sur $[0, 1]$;

Etape 2 : Calculer W utilisant la formule (1.48) ;

Etape 3 : Calculer $V = \varphi^{-1}(\varphi(W) - \varphi(U))$.

Cette procédure travail bien pour les copules de Clayton et Frank, mais pour la copule de Gumbel il n'y a pas une formule analytique pour $(\varphi')^{-1}$.

Algorithme K_C : Soit le couple de v.a $\left(C_\alpha(U, V), \frac{\varphi_\alpha(U)}{\varphi_\alpha(U) + \varphi_\alpha(V)} \right)$ à des composantes indépendantes. L'algorithme de simulation basé sur ces données est le suivant :

Etape 1 : Simuler des v.a indépendantes Y, Z uniforme sur $[0, 1]$;

Etape 2 : Calculer $x = K_C^{-1}(z)$, tel que $K_C(z) = z - \frac{z \ln z}{\alpha}$;

Etape 3 : Calculer $u = \varphi^{-1}(\varphi(x)y)$ et $v = \varphi^{-1}(\varphi(x)(1 - y))$.

Remarque 1.5.1 *On a pas une formule explicite pour K_C^{-1} . De plus cette procédure n'est étend aux cas multidimensiennelle.*

Deuxième partie

Mesure d'association

Pour comprendre les mesures de concordances et de dépendances, nous fournirons d'abord la notion de coefficient de corrélation de Pearson qui est défini pour deux v.a X, Y par :

$$\mathbf{r}_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

d'où cette mesure dépend de loi marginales ; c'est à dire les distributions de X et Y doivent être connues. Les inconvénients de cette mesure sont cités dans les points suivants :

1. Le $\mathbf{r}_{X,Y}$ n'existe pas toujours parce qu'il dépend de moments d'ordre 2 et 1. Donc pour quelques distributions il n'est pas défini telle que la distribution de Cauchy et pour les distributions à queues lourdes où les variances peuvent être infinies ;
2. Il mesure seulement les corrélations linéaires ; c'est dire si $\mathbf{r}_{X,Y} = 0$ n'implique pas que X et Y sont indépendantes ;
3. Il exprime la corrélation entre les variables par une valeur numérique compris entre -1 et 1 et ne contient aucune information sur la structure de dépendance. Donc on ne peut pas modéliser la dépendance ;
4. Il a la propriété d'invariance par transformations linéaires et pas pour des transformations monotones générales. Par exemple la corrélation entre les deux v.a X, Y n'est pas le même pour $\log(X)$ et $\log(Y)$.

Les copules ont plusieurs avantages pour la notion de dépendance :

1. Les mesures d'associations, telle que : la mesure de concordance, la mesure de dépendance peuvent être exprimé en fonction de copules et dans ce cas le tau de Kendall et le rho de Spearman sont définis par les paramètres de copules ;
2. Au lieu de décrire la dépendance par une seule valeur comme le cas de coefficient de corrélation linéaire, on peut modéliser la dépendance par les copules ou il existe plusieurs familles paramétrique de copules ;
3. Les copules permettent de mesurer et modéliser la dépendance indépendamment de lois marginales.

1.6 Mesure de concordance

1.6.1 Concordance et discordance

Soient (x_i, y_i) et (x_j, y_j) deux observations d'un couple de variables aléatoires (X, Y) pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 1.6.1 *On dit que (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont concordantes si et seulement si*

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0,$$

c'est à dire : $(x_i < x_j$ et $y_i < y_j)$ ou $(x_i > x_j$ et $y_i > y_j)$.

On dit que (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont discordantes si et seulement si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0,$$

c'est à dire : $(x_i < x_j$ et $y_i > y_j)$ ou $(x_i > x_j$ et $y_i < y_j)$.

Définition 1.6.2 *Une mesure numérique d'association κ entre deux variables aléatoires X, Y dont la copule est C est une mesure de concordance [87] si et seulement si elle satisfait les propriétés qui suivent :*

1. $\kappa_{X,Y}$ est définie pour chaque couple (X, Y) de variables aléatoires continues.
2. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1, \kappa_{X,X} = 1$ et $\kappa_{X,-X} = -1$.
3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\kappa_{X,Y} = 0$.
5. Si les copules respectives de (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont telle que $C_1 \prec C_2$, alors
$$\kappa_{X_1, Y_1} \leq \kappa_{X_2, Y_2}.$$
6. $\kappa_{-X, Y} = \kappa_{X, -Y} = -\kappa_{X, Y}$.

7. Si (X_n, Y_n) est une suite de variables aléatoires continues de copule C_n et C_n converge vers C , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{X_n, Y_n} = \kappa_{X, Y}$$

8. Si $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des fonctions strictement croissantes, alors

$$\kappa_{\alpha(X), \beta(Y)} = \kappa_{X, Y}.$$

Théorème 1.6.1 *Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires indépendantes de variables aléatoires continues de fonctions de répartition jointes H_1 et H_2 respectivement. Soient F et G les marges associées à X_1, X_2 et Y_1, Y_2 respectivement. Soient C_1 et C_2 les copules associées à H_1 et H_2 données par*

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y)),$$

$$H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y)).$$

Si Q est la mesure de concordance et de discordance de (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ; c'est à dire

$$Q = \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}, \quad (1.49)$$

alors

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (1.50)$$

Preuve. *Puisque toutes les variables aléatoires dans ce cas sont continues, alors*

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} = 1 - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\},$$

ainsi

$$Q = 2\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1.$$

Etudions le premier terme de (1.49)

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} = \mathbb{P}(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) + \mathbb{P}(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2),$$

en integrant ces quantités

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{P}(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X_2 < x, Y_2 < y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

par changement de variables, $u = F(x), v = G(y)$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) = \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

D'une façon similaire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X_2 > x, Y_2 > y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{I}^2} (1 - u - v + C_2(u, v)) dC_1(u, v), \end{aligned}$$

car U, V sont des variables aléatoires uniformes, donc $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2}$ et par conséquent

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v),$$

donc

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} = 2 \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

En regroupant ces résultats, on déduit que

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

alors Q s'écrit en terme de deux copules. ■

Corollaire 1.6.1 Soient C_1, C_2 deux copules et soit Q une mesure de concordance et de discordance. Alors Q possède les propriétés suivantes :

1. Q est symétrique

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1).$$

2. Q est nondécroissante

si $C_1 \prec \dot{C}_1$ et $C_2 \prec \dot{C}_2$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{I}^2$, alors $Q(C_1, C_2) \leq Q(\dot{C}_1, \dot{C}_2)$;

Exemple 1.6.1 Nous calculons la mesure Q pour les copules M, W et Π .

Le support de M est la diagonale $u = v$ dans \mathbb{I}^2 , et car M a des marges uniforme, il s'ensuit que si g est une fonction intégrable dont le domaine est \mathbb{I}^2 , alors

$$\iint_{\mathbb{I}^2} g(u, v) dM(u, v) = \int_{\mathbb{I}} g(u, u) du.$$

Par conséquent, nous avons :

$$- Q(M, M) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} \min(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1$$

$$- Q(M, \Pi) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 du - 1 = \frac{1}{3}.$$

$$- Q(M, W) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} \max(u + v - 1, 0) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 (2u - 1) du - 1 = 0.$$

De la même façon, car le support de W est la diagonale $v = 1 - u$, nous avons :

$$\iint_{\mathbb{I}^2} g(u, v) dW(u, v) = \int_{\mathbb{I}} g(u, 1 - u) du,$$

et donc

$$- Q(W, \Pi) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1 - u) du - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$- Q(W, W) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} \max(u + v - 1, 0) dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = -1.$$

et pour la copule Π , nous avons $d\Pi(u, v) = dudv$, alors

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} uv d\Pi(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv dudv - 1 = 0.$$

Remarque 1.6.1 D'après l'exemple (1.6.1), on trouve que pour un choix arbitraire de C , nous avons toujours

$$Q(C, M) \in [0, 1], Q(C, W) \in [-1, 0] \text{ et } Q(C, \Pi) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right].$$

1.6.2 Tau de Kendall

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires continues, indépendantes et identiquement distribués de fonctions de répartition jointes H . Le tau de Kendall du vecteur aléatoire (X, Y) , noté $\tau_{X,Y}$ est défini par

$$\tau_{X,Y} = \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}. \quad (1.51)$$

On peut définir le tau de Kendall en fonction d'une copule C , utilisant la fonction Q définie dans (1.50). La définition suivante présente la relation entre le tau de Kendall et les copules.

Définition 1.6.3 Soient X, Y deux variables aléatoires continues dont la copule est C .

Le tau de Kendall de X et Y , noté τ_C , est défini par :

$$\tau_{X,Y} = Q(C, C) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad (1.52)$$

car les variables aléatoires $U = F(X)$ et $V = G(Y)$ sont des variables aléatoires uniformes, alors l'équation (1.52) devient

$$\tau_C = 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1. \quad (1.53)$$

Pour les copules Archimédiennes le tau de Kendall dépend de générateur $\varphi(t)$ d'où l'intégrale double devient un intégrale simple et les calculs rendent plus facile. Appliquant le théorème (1.3.1) dans (1.53) nous obtenons le théorème suivant

Théorème 1.6.2 *Soient X et Y deux v.a d'une copule Archimédienne C générée par φ .*

Alors le tau de Kendall τ_C est donné par :

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Preuve. Soient U et V deux v.a uniformes sur $[0, 1]$ dont la fonction de distribution jointe est C , et supposant que C est une v.a de fonction de distribution $K_C(t)$, on a :

$$\begin{aligned} \tau_C &= 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1 \\ &= 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \\ &= 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1 \end{aligned}$$

En l'intégrant par partie :

$$\begin{aligned}\tau_C &= 4 \left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt \right) \\ &= 3 - \int_0^1 K_C(t) dt\end{aligned}$$

Utilisant la formule (1.22) alors le tau de Kendall vaut :

$$\begin{aligned}\tau_C &= 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right) dt \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.\end{aligned}$$

donc le tau de kendall de copules Archimédiennes s'écrit en terme de $\varphi(t)$. ■

La table (Tab. 1.2) présente le tau de Kendall de quelque copules

Copule	Tau de Kendall
Normale	$2\pi^{-1} \arcsin(\rho)$
Gumbel	$\frac{(\theta-1)}{\theta}$
Frank	$\frac{1-4}{\theta} + \frac{4D_k(\theta)}{\theta}$
Clayton	$\frac{\theta}{(\theta+2)}$
Marshall olkin	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$
F-G-M	$\frac{2\theta}{9}$

TAB. 1.2 – Tau de Kendall de quelques copules.

telle que $D_k(\theta) = \int_0^\theta \frac{x}{\theta} / (e^x - 1) dx$ est la fonction de Debye.

1.6.3 Rho de Spearman

Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) des copies indépendantes de vecteur aléatoire (X, Y) .

Le rho de Spearman [71], noté $\rho_{X,Y}$, est défini par

$$\rho_{X,Y} = 3(\mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)). \quad (1.54)$$

Comme le tau de Kendall, nous pouvons définir le rho de Spearman en fonction d'une copule C .

Théorème 1.6.3 *Soient X, Y deux variables aléatoires continues dont la copule est C .*

Le rho de Spearman de X et Y est défini par

$$\begin{aligned} \rho_C &= 3Q(C, \Pi), \\ &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v) - 3, \\ &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dudv - 3. \end{aligned}$$

Car les variables U, V sont uniforme d'espérance $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2}$, et de variance $Var(U) = Var(V) = \frac{1}{12}$, alors ρ_C peut s'écrire

$$\rho_C = \frac{\mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}}. \quad (1.55)$$

Preuve. Nous avons $\iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v)$ présente l'espérance de (UV) , alors

$$\begin{aligned} \rho_C &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12\mathbb{E}(UV) - 3 \\ &= \frac{\mathbb{E}(UV) - 1/4}{1/12} \\ &= \frac{\mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}} \end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule (1.55). ■

Remarque 1.6.2 Car le rho de Spearman est défini en fonction d'une copule paramétrique C_θ nous notons ρ_C par ρ_θ .

Exemple 1.6.2 Soit C_θ une copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern, de paramètre $\theta \in [-1, 1]$, alors

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v),$$

donc

$$\iint_{\mathbb{I}^2} C_\theta(u, v) dudv = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36},$$

et le rho de Spearman vaut

$$\rho_\theta = \frac{\theta}{3}. \tag{1.56}$$

Exemple 1.6.3 Soit $C_{\alpha, \beta}$ est la copule de Marshall Olkin, de paramètres $0 < \alpha$ et $\beta < 1$ définie par :

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta}, & u^\alpha \leq v^\beta \end{cases},$$

donc

$$\iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u,v) dudv = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta} \right),$$

le rho de Spearman est

$$\rho_{\alpha,\beta} = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}. \quad (1.57)$$

Exemple 1.6.4 Pour un couple de v.a Gaussienne (X, Y) de corrélation \mathbf{r} , le rho de Spearman est donné par :

$$\rho_{\mathbf{r}} = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\mathbf{r}}{2}\right). \quad (1.58)$$

1.7 Mesure de dépendance

Définition 1.7.1 Une mesure numérique d'association δ entre deux variables aléatoires continues X, Y dont la copule est C est une mesure de dépendance si et seulement si elle satisfait les propriétés qui suivent (on la note $\delta_{X,Y}$)

1. $\delta_{X,Y}$ est définie pour chaque couple (X, Y) de variables aléatoires continues.
2. $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.
3. $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$.
4. $\delta_{X,Y} = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.
5. $\delta_{X,Y} = 1$ si et seulement si chacun de X, Y est une fonction strictement monotone de l'autre presque sûrement.
6. Si $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des fonctions strictement monotones presque sûrement, alors

$$\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}.$$

7. Si (X_n, Y_n) est une suite de variables aléatoires continues de copule C_n et C_n converge vers C , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{X_n, Y_n} = \delta_{X,Y}.$$

1.7.1 Exemple de mesure de dépendance

Mesure σ de Schweizer et Wolffs : le rho de Sperman de deux v.a continue X, Y est définie par :

$$\rho_C = 12 \iint_{\mathbb{I}^2} (C(u, v) - uv) dudv,$$

cet intégral représente la volume entre la copule C est la copule produit Π . Si on change la différence $(C(u, v) - uv)$ par $|C(u, v) - uv|$, alors on obtient une mesure basée sur la distance L_1 entre le graphique de C et Π , cette distance représente la mesure **σ de Schweizer et Wolffs**, elle est définie par :

$$\sigma_C = \sigma_{X,Y} = 12 \iint_{\mathbb{I}^2} |C(u, v) - uv| dudv. \quad (1.59)$$

Théorème 1.7.1 *Soit X, Y deux v.a continues d'une copule C . Alors la quantité σ_C définie dans (1.59) est une mesure de dépendance. Schweizer et Wolffs (1981) assure que toute distances entre les surfaces $z = C(u, v)$ et $z = uv$ représentent une mesure nonparamétrique de dépendance [89], [102]. $\forall 1 \leq p < \infty$, la distance L_p entre C et Π est définie par :*

$$L_p = \left(k_p \iint_{\mathbb{I}^2} |C(u, v) - uv|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.60)$$

Théorème 1.7.2 *telle que k_p est une constante.*

A partir la quantité dans (1.60) on définit les mesures de dépendances suivantes :

Mesure $\Phi_{X,Y}$: si $p = 2$, alors nous avons

$$\Phi_{X,Y} = \Phi_C = \left(90 \iint_{\mathbb{I}^2} |C(u, v) - uv|^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.61)$$

tel que le carré de cette dernière ; c'est à dire $\Phi_{X,Y}^2$ représente l'indice de dépendance entre les variables X et Y (voir [69]).

Mesure $\Lambda_{X,Y}$: pour $p = \infty$, nous avons

$$\Lambda_{X,Y} = \Lambda_C = 4 \sup_{u,v \in I} |C(u,v) - uv|. \quad (1.62)$$

Remarque 1.7.1 *Après les définitions de mesures de dépendance σ_C , Φ_C et Λ_C on trouve que ces dernières sont basées sur le coefficient de Rho de Spearman. Il existe d'autres mesures de dépendance basées sur un autre coefficient telle que le coefficient de Gini (voir [78, p.211]).*

1.8 Dépendance de queue

La dépendance de queue est une mesure locale, où elle mesure la dépendance au niveau des queues de distribution [16]. Cette mesure a une grande importance pour les copules de valeurs extrêmes. Il existe deux coefficients de dépendance de queue sont définies comme suit :

Définition 1.8.1 *Soit X, Y deux v.a continues de fonctions de répartition respectives F et G . Le coefficient de dépendance inférieure (lower tail dependence coefficient) λ_L est défini par :*

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P(X \leq F^{-1}(\alpha) / Y \leq G^{-1}(\alpha)). \quad (1.63)$$

Et le coefficient de dépendance supérieure (upper tail dependence coefficient) λ_U est défini par :

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(X > F^{-1}(\alpha) / Y > G^{-1}(\alpha)). \quad (1.64)$$

On peut définir ces mesures en fonction d'une copule C .

Définition 1.8.2 *Soit X, Y deux v.a continues de copule C , alors nous avons*

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (1.65)$$

et

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u},$$

Remarque 1.8.1 – Quand $\lambda_L \in]0, 1]$, alors C a une dépendance de queue inférieure.

- Quand $\lambda_L = 0$, alors C n'a pas de dépendance de queue inférieure.
- Quand $\lambda_U \in]0, 1]$ alors C a une dépendance de queue supérieure.
- Quand $\lambda_U = 0$ alors C n'a pas de dépendance de queue supérieure.

Nous présentons dans la table (??) les coefficients de dépendance de queues de quelques copules si elle sont existe. D'où la copule de Clayton a une dépendance de queue inférieur au contraire de la copule de Gumbel qui possède une dépendance de queue supérieur, elle est à ce titre particulièrement adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'événement de forte intensité sur la dépendance entre branches d'assurance ou actifs financiers. (voir comme application [12]), et pour la copule de Frank il n'existe aucune dépendance de queue ni inférieur ni supérieur telle que la copule Gaussienne.

	Copule $C(u, v)$	λ_L	λ_U
Archimédienne $C_\alpha(u, v)$	Clayton	$2^{-\frac{1}{\alpha}}$	0
	Gumbel	0	$2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$
	Frank	0	0
$C_\rho(u, v)$	Gaussienne	0	0
$C_{\alpha, \beta}(u, v)$	Marchall-Olkin	0	$\min(\alpha, \beta)$

Remarque 1.8.2 La copule Gaussienne n'a pas de dépendance de queue, sauf pour $\mathbf{r} = 1$, telle que :

$$\lambda_L = \lambda_U = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{r} < 1, \\ 1 & \text{si } \mathbf{r} = 1 \end{cases}$$

On peut observer graphiquement la dépendance de queue entre les variables U et V , comme illustre le graphique ci-dessous :

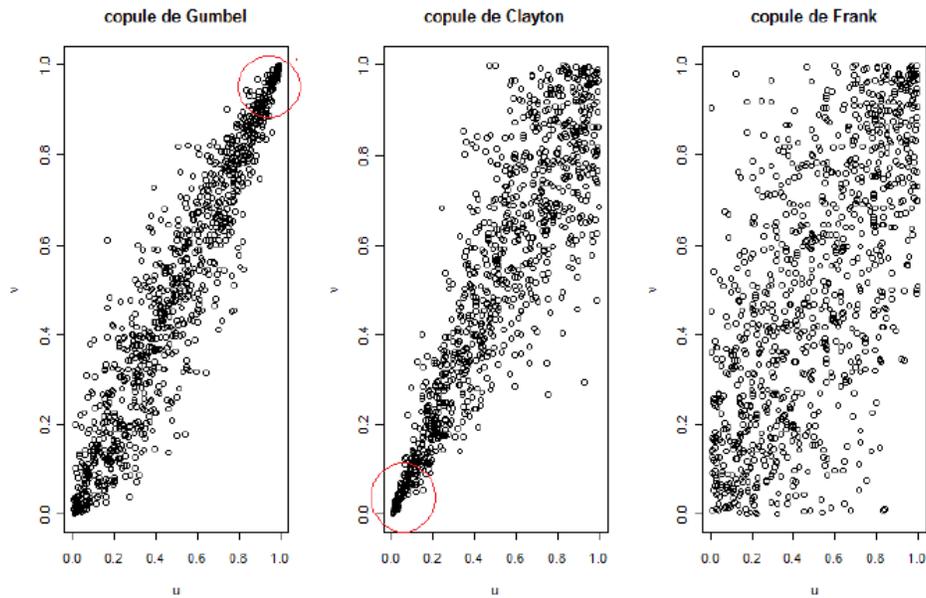


FIG. 1.5 – Echantillons de taille 1000 de trois copules Archimédiennes ($\alpha = 5$).

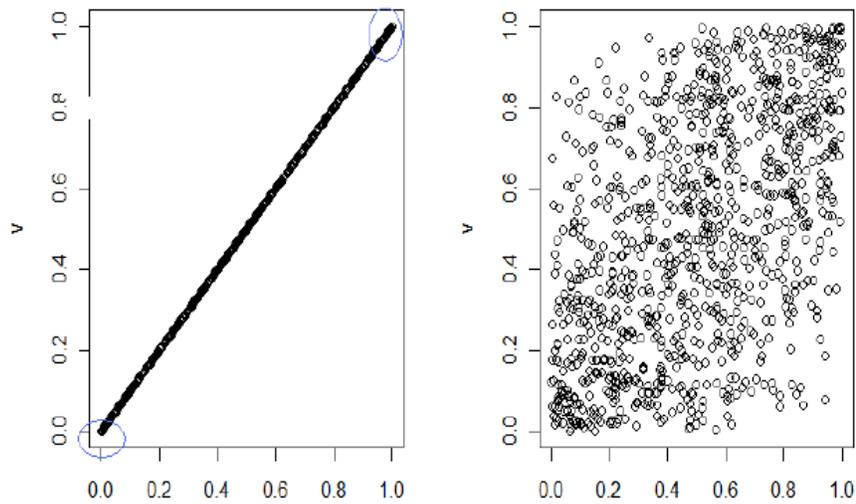


FIG. 1.6 – Echantillons de taille 1000 de deux copules Gaussienne pour $\rho = 1$ (à gauche) et $\rho = 0.5$ (à droite).

Conclusion

À travers ce que nous avons vu dans ce chapitre, nous pouvons résumer les avantages des copules dans les points suivants :

1. **La construction de distribution bivariable et multivariable** : Selon le théorème de Sklar, les copules peuvent relier les lois marginales pour obtenir des distributions bivariées et multivariées même si les distributions marginales ne sont pas identiques.
2. **La mesure de dépendance** : Elle permet de mesurer la dépendance en séparant les lois marginales.
3. **La modélisation de dépendance** : Les copules peuvent modéliser la dépendance de données. Autrement dit, les copules contiennent l'information nécessaire sur la structure de dépendance des variables aléatoires entre elles.
4. **Application de copule dans différents domaines** : Plusieurs familles des copules paramétriques sont cités dans [78], d'où elles ont des applications utiles dans la finance, l'assurance, l'Hydrologie, ...etc. Dans ce chapitre, nous avons donné certaines d'entre elles. Les copules Archimédienne. En particulier, la copule de Gumbel est considérée comme un modèle pour d'écrire la dépendance entre les marchés financiers. Les copules de valeurs extrêmes, on trouve ces applications en Hydrologie. Dans la littérature plusieurs applications ont présenté : la modélisation des risques [97], application aux données financières [25], Dépendance aux actifs financiers [75], l'utilisation de copules en hydrologie [85].

Chapitre 2

Théorie des L-moments et des Trimmed L-moments

Les Moments classiques nous permet de décrire et de caractériser les distributions de probabilité et les échantillons de données où ils présentent comme des mesures de position, de dispersion ou d'échelle, de l'asymétrie et de l'aplatissement. D'un autre côté ils sont utilisés pour l'estimation des paramètres de distribution, où en égalisant les moments théoriques avec ses versions empiriques (la méthode de moments). Parmi les inconvénients de cette méthode est l'absence de moments de quelque distribution comme la distribution de Cauchy. Une alternative mesures de moments les L-moments et les Trimmed L-moments qui sont développé par Hosking (1990) [57] et Elamir et Seheult (2003) [29]. Les L-moments ont été introduits la première fois par Sillitto (1951, 1969) [92], [93], et analysés de manière exhaustive par Hosking (1990) [57], utilisé pour les distributions à queue lourde pour donner un estimateur robuste à l'existence de valeurs aberrantes par rapport aux méthodes de moments et de maximum de vraisemblance en particulier pour les petits échantillons. On trouve ses applications dans différents domaines : Hydrologie, Ingénierie, Météorologie et contrôle de la qualité ; comme exemple les travaux de Adamowionski (2000) [2], Guttman (1993) [51], Gingras (1994)[46], Pilon (1992)[80] et Elamir et Seheult (2001)[28]. Mais

l'existence de L-moments dépend de l'existence de moments de la distribution de probabilité où ce n'est pas le cas pour quelque données de distribution à queue très lourdes de sorte qu'il peut y avoir des doutes quant à savoir si même le premier moment existe [58], [31],[82] et [101]. A ce titre Elamir (2003) est développé les Trimmed L-moments, noté TL-moments.

Les TL-moments sont des mesures analogues aux L-moments présentent certains avantages par rapport aux L-moments et aux moments centraux. Les TL-moment de distribution de probabilité peut exister même si le L-moment ou le moment classique de la distribution de probabilité n'existe pas, comme c'est le cas de la distribution de Cauchy. Les TL-moments de l'échantillon sont plus résistants à l'existence de valeurs aberrantes dans les données. D'où Les TL-moments donner un poids égale à zéro pour les observations extrêmes pour réduire l'influence des extrêmes sur l'estimation des paramètres. A ce titre ils sont adaptés aux distributions à queue lourdes. Elamir (2003) et Seheult (2003)[29] introduit les définitions de TL-moments de la population et de l'échantillon, ses propriétés avec des exemples de quelques distribution, telle que loi de Cauchy et Pareto. Hosking (2007) [57] est discuté sur les propriétés de TL-moments et donné une nouvelle représentation de cette dernière avec ses applications dans les volumes de trafic réseau.

2.1 L-moments : Définitions et propriétés

Les L-moments, noté λ_r considéré comme des mesures alternative aux moments centraux classiques $\mu_r = \mathbb{E}(Y - \mu)^r$ [92] et ils sont défini comme des fonctions linéaire de l'espérance de la statistique d'ordre ou des fonctions linéaires de probabilité de moments pondérés. Dans cette section nous présentons différentes représentation de L-moments, où nous commençons du cas univarié.

Définition 2.1.1 *Soit Y_1, \dots, Y_n un échantillon de taille n d'une distribution continue $F_Y(y)$ avec fonction de quantile $Q(u) = F_Y^{-1}(u)$, et soit $Y_{1:r} \leq \dots \leq Y_{r:r}$ les statistiques d'ordre*

associées à cet échantillon pour $r \geq 1$. Alors le r -ème L-moments λ_r est donné par :

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E}(Y_{r-k:r}), \quad \text{pour } r \geq 1, \quad (2.1)$$

telle que $\mathbb{E}(Y_{r-k:r})$ présente l'espérance de la statistique d'ordre.

En particulier, pour $r = 1, 2, 3, 4$ nous obtenons les premiers L-moments qui sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbb{E}(Y_{1:1}), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{2:2} - Y_{1:2}), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(Y_{3:3} - 2Y_{2:3} + Y_{1:3}), \\ \lambda_4 &= \frac{1}{4} \mathbb{E}(Y_{4:4} - 3Y_{3:4} + 3Y_{2:4} - Y_{1:4}). \end{aligned}$$

Nous notons que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 sont les mesures de position, d'échelle, de Skewness et de Kurtosis analogue aux moments classiques.

Comme l'espérance de la statistique d'ordre $Y_{i:n}$ défini par :

$$\mathbb{E}(Y_{i:r}) = \frac{r!}{(i-1)!(r-i)!} \int_0^1 Q(u) u^{i-1} (1-u)^{r-i} du. \quad (2.2)$$

nous pouvons réécrire le r -ème L-moments λ_r en terme de fonction de quantile en remplaçant (2.2) dans (2.1), alors :

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \frac{r!}{(r-k-1)!k!} \int_0^1 Q(u) u^{r-k-1} (1-u)^k du, \quad \text{pour } r \geq 1,$$

L-Correlation, L-skewness et L-kurtosis

Les proportions des L-moments (ratio L-moments) sont des rapport entre les L-moments et les λ_1 et λ_2 a pour but de définir les caractéristiques de la distributions, elles sont définie

par :

$$\tau_r = \lambda_r / \lambda_2, \quad r \neq 2. \quad (2.3)$$

telle que :

- Le rapport entre le premier L-moments λ_1 et le second L-moment λ_2 présente la mesure de L-variation, défini par :

$$L - CV = \lambda_1 / \lambda_2. \quad (2.4)$$

- Les deux mesures de formes sont :

- **L-skewness** : C'est le rapport entre le 3^{ème} L-moment et le second L-moment, c'est la mesure de l'asymétrie donnée par :

$$\tau_3 := \lambda_3 / \lambda_2, \quad (2.5)$$

- **L-kurtosis** : C'est le rapport entre le 4^{ème} L-moment et le second L-moment, c'est la mesure de l'aplatissement donnée par :

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2, \quad (2.6)$$

Toutes ces quantités sont bornés selon le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit Y v.a de d'espérance finie ($\mathbb{E}(Y) \leq \infty$). Alors Les rapports de L-moments de Y sont bornés et vérifient :*

$$-1 \leq \tau_r \leq 1, \quad r \geq 3, \quad (2.7)$$

de plus si $Y \geq 0$, alors $L - CV$ de Y vérifie que : $0 < \tau < 1$.

2.1.1 Propriétés de L-moments

Représentation de L-moment en terme de polynômes orthogonaux : Les L-moments peuvent être écrite en fonction de polynômes de Legendre déplacé P_r^* , qui sont définies par :

$$P_r^*(u) = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* u^k = \sum_{k=0}^r (-1)^{r+k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} u^k, \quad (2.8)$$

tel que r un entier positif. Pour $r = 0, 1, 2$ et 3 , nous avons :

$$\begin{aligned} P_0^*(u) &= 1, \\ P_1^*(u) &= (2u - 1), \\ P_2^*(u) &= (6u^2 - 6u + 1), \\ P_3^*(u) &= (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1). \end{aligned}$$

Alors les λ_r réécrire comme suit :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u) P_{r-1}^*(u) du, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

et les premiers L-moments donc données comme çï :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 Q(u) du, \\ \lambda_2 &= \int_0^1 (2u - 1) Q(u) du, \\ \lambda_3 &= \int_0^1 (6u^2 - 6u + 1) Q(u) du, \\ \lambda_4 &= \int_0^1 (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1) Q(u) du. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Representation de L-moments en terme de moments de probabilité pondérés :

Les moments de probabilité pondérés (Probabilité Weighted Moments), notés PWM, est introduit par Greenwood et al.1979 [47].

Définition 2.1.2 Soit Y une v.a de distribution continue. Alors les moments de probabilité pondérés $M_{l,j,k}$ est défini par :

$$M_{l,j,k} = \mathbb{E} [Y^l F^j (1 - F)^k] = \int_0^1 Q(u)^l u^j (1 - u)^k du, \quad (2.11)$$

où : F et $Q(u)$ présentent les fonctions de répartition et de quantile de la variable Y , telle que $Q(u) = F_Y^{-1}(u)$; l, j et k sont des réels.

Pour des cas particuliers de j et k , nous obtenons les quantités suivantes :

1. Pour $j = k = 0$ et l entier positif :

$$M_{l,0,0} = \mathbb{E} [Y^l] = \int_0^1 Q_Y(u)^l du, \quad (2.12)$$

qui sont les moments classiques d'ordre l par rapport à l'origine.

2. Pour $j = 0$ et l, k sont des entiers positifs ou $k = 0$ et j, k sont des entiers positifs :

$$M_{l,0,k} = \mathbb{E} [Y^l (1 - F)^k] = \int_0^1 Q(u)^l (1 - u)^k du, \quad (2.13)$$

$$M_{l,j,0} = \mathbb{E} [Y^l F^j] = \int_0^1 Q(u)^l u^j du, \quad (2.14)$$

ces deux quantités sont les plus utilisés en pratique et pour calculer les L-moments. D'autre part, comme la méthode de moments on peut exprimer les paramètres de la distribution de probabilité en fonction de moments de probabilité pondérés ce qui nous donne une nouvelle méthode d'estimation alternative à la méthode de Moments. Cette méthode donne des estimateurs sans biais et elle est plus robuste que la méthode de moments. La procédure d'estimation basée sur $M_{1,0,k}$ et $M_{1,j,0}$ est développé par : Landweher et al (1979) [70] ; Hosking et al. (1985) [55], et autre voir ([48], [56]).

Les L-moments considérés comme des combinaisons linéaires de PWM ($M_{l,0,k}, M_{l,j,0}$) pour

$l = 1$; c'est à dire :

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^r (-1)^r p_{r,k}^* a_k = \sum_{j=0}^r p_{r,j}^* B_j,$$

où les coefficients $p_{r,k}^*$ sont les mêmes coefficients de polynôme de Legendre déplacé (2.8)

et

$$a_k = M_{1,0,k} \text{ et } B_j = M_{1,j,0}. \quad (2.15)$$

En particulier, les quatres premiers L-moments sont données par :

$$\lambda_1 = a_0 = B_0$$

$$\lambda_2 = a_0 - 2a_1 = 2B_1 - B_0$$

$$\lambda_3 = a_0 - 6a_1 + 6a_2 = 6B_2 - 6B_1 + B_0$$

$$\lambda_4 = a_0 - 12a_1 + 30a_2 - 20a_3 = 20B_3 - 30B_2 + 12B_1 - B_0$$

Représentation de L-moment en terme de covariance et L-statistique : Selon l'orthogonalité de polynôme de legendre et posant $P_0 \equiv 0$ implique une nouvelle représentation de L-moments en terme de covariance, d'où :

$$\lambda_r = \begin{cases} \mathbb{E}(Y), & k = 1; \\ Cov(Y, P_{r-1}(F(Y))), & k \geq 2. \end{cases} \quad (2.16)$$

et les quatres premier L-moment sont donnés par :

$$\lambda_1 = \mathbb{E}(Y),$$

$$\lambda_2 = 2Cov(Y, F(Y)) = Cov(Y, 2F(Y) - 1),$$

$$\lambda_3 = -6Cov(Y, F(Y)(1 - F(Y))) = Cov(Y, 6F^2(Y) - 6F(Y) + 1),$$

$$\lambda_4 = Cov(Y, 20F^3(Y) - 30F^2(Y) + 12F(Y) - 1).$$

Les L-moments aussi peuvent être écrite en terme de L-statistique, comme suit :

$$\lambda_r = n^{-1} \sum_{i=1}^n w_{i:n}^{(k)} \mathbb{E}(Y_{i:n}), \quad (2.17)$$

où

$$w_{i:n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1, k-1\}} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{k-1+j}{j} \binom{n-1}{j}^{-1} \binom{r-1}{j}.$$

Proposition 2.1.1 (*L'existence de L-moments*)

1. Les L-moments λ_r , $r = 1, 2, \dots$ d'une v.a Y existe ssi son espérance est finie ($\mathbb{E}(Y) < \infty$);
2. Une distribution dont l'espérance existe et finie se caractérise par ses L-moments λ_r , $r = 1, 2, \dots$

2.1.2 Estimation de L-moments

Soit $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées à un échantillon X_1, \dots, X_n de taille n . Alors les estimateurs de L-moments, notés l_r , sont exprimés en terme de statistique d'ordre, d'où les L-moments l_r sont développés par Hosking (1985)[55] dérivé de l'estimation de PWM sous la forme suivante :

$$l_r = \sum_{j=0}^{r-1} p_{r-1,j}^* b_j, \quad (2.18)$$

où les coefficients b_j sont les estimateus sans biais de PWM B_j donnés par :

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-j} \left[\frac{\binom{n-i}{j}}{\binom{n-1}{j}} \right] X_{i:n}.$$

On déduit les quatres premiers L-moments de l'échantillon comme suit :

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i:n}, \\
 l_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (2i-1-n) X_{i:n}, \\
 l_3 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (6(i-1)(i-2) - 6(n-2)(i-1) + (n-1)(n-2)) X_{i:n}, \\
 l_4 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n (20(i-1)(i-2)(i-3) - 30(n-3)(i-1)(i-2) \\
 &\quad + 12(n-2)(n-3)(i-1) - (n-1)(n-2)(n-3)) X_{i:n}.
 \end{aligned}$$

D'autre estimation de L-moments basé sur l'estimateur de l'espérance de la statistique d'ordre aussi développé par Hosking (1990)[57]. Cet estimateur est défini par :

$$l_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{r} (-1)^k \binom{r-1}{j} X_{i_r-k:n}, \quad \text{pour } r = 1, \dots, n.$$

Déduit les quatres premiers L-moments de l'échantillon par :

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_{i:n}, \\
 l_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_{j:n} - X_{i:n}), \\
 l_3 &= \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < k < l \leq n} (X_{k:n} - 2X_{j:n} + X_{i:n}), \\
 l_4 &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} (X_{s:n} - 3X_{j:n} + 3X_{j:n} - X_{i:n}).
 \end{aligned}$$

D'où nous constatons que :

- Le 1^{er} L-moment l_1 présente la moyenne de l'échantillon ;
- le l_2 présente la différence moyenne de Gini ;

Pour les estimateurs des rapports des L-moments τ_r , ils sont calculés par :

$$t_r = l_r/l_2, \quad r = 3, 4, \dots,$$

d'où t_3 est le L-skewness et t_4 est le L-kurtosis empiriques.

Exemple 2.1.1 (*Loi de Pareto*)

Pour une v.a Y suit la loi de pareto, nous avons les fonctions de répartition et de quantiles suivantes :

$$F_{\gamma,\kappa}(x) = 1 - \left(1 - \kappa \left(\frac{x}{\gamma}\right)\right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

$$Q(u) = \gamma(1 - (1 - u)^\kappa) / \kappa,$$

tels que γ et κ sont les paramètres d'échelle et de la forme.

Calculant les premier L-moments par (2.10)

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(\kappa + 2)}{\kappa(\kappa + 1)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma}{(\kappa + 1)(\kappa + 2)}, \tag{2.19}$$

$$\lambda_3 = \frac{\gamma(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)(\kappa + 2)(\kappa + 3)},$$

$$\lambda_4 = \frac{\gamma(\kappa - 1)(\kappa - 2)}{(\kappa + 1)(\kappa + 2)(\kappa + 3)(\kappa + 4)}.$$

on déduit les rapport de L-moments

$$\tau_3 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 3}, \quad \tau_4 = \frac{(\kappa - 1)(\kappa - 2)}{(\kappa + 3)(\kappa + 4)}. \tag{2.20}$$

Pour estimer les deux paramètres κ et γ il suffit de prendre deux équations seulement.

substituer les estimateurs l_1 de λ_1 et t_3 de τ_3 dans les équations (2.19), et (2.20) alors :

$$\hat{\kappa} = \frac{3t_3 + 1}{1 - t_3},$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\kappa}(\hat{\kappa} + 1)}{(\hat{\kappa} + 2)} l_1.$$

Exemple 2.1.2 (Loi Logistique généralisée)

Soit X v.a de loi Logistique généralisée, alors sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \left[1 + \left\{ 1 - \kappa \left(\frac{x - \xi}{\alpha} \right) \right\}^{\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right]^{-1},$$

d'où le support de x est compris entre $\xi + \frac{\alpha}{k} \leq x < \infty$ pour $k < 0$ et $-\infty \leq x < \xi + \frac{\alpha}{k}$ pour $k > 0$.

et sa fonction de quantile est définie par :

$$Q(u) = \xi + \frac{\alpha}{\xi} \left[1 - \left(\frac{1 - u}{u} \right)^\kappa \right]. \quad (2.21)$$

Substituer (2.21) dans (2.10), nous obtenons les premiers L-moments de X :

$$\lambda_1 = \xi + \frac{\alpha}{\kappa} (1 - \Gamma(1 - k)\Gamma(k + 1)),$$

$$\lambda_2 = \alpha\Gamma(1 - k)\Gamma(k + 1), \quad (2.22)$$

$$\lambda_3 = -\alpha\kappa\Gamma(1 - k)\Gamma(k + 1),$$

$$\lambda_4 = \frac{\pi\alpha\kappa(5\kappa^2) + 1}{6 \sin(\pi\kappa)}.$$

et on déduit τ_3 et τ_4 :

$$\tau_3 = -\kappa,$$

$$\tau_4 = \frac{5\kappa^2}{6} + \frac{1}{6}.$$

Pour les estimateurs de ξ, α et κ , nous avons :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa} &= -t_3 \\ \hat{\alpha} &= \frac{l_2}{\Gamma(1 - \hat{\kappa})\Gamma(\hat{\kappa} + 1)}, \\ \hat{\xi} &= l_1 + \frac{1}{\hat{\kappa}}(l_2 - \hat{\alpha}).\end{aligned}$$

2.1.3 Diagramme de rapports de L-moment (L-skewness et L-kurtosis)

Le diagramme des L-moments est une représentation graphique de L-Kurtosis τ_4 en fonction de L-Skewness τ_3 pour savoir quelle distribution est adéquate pour un échantillon donné. D'où les distributions paramétriques occupent des points, des lignes ou des régions sur le graphique et les exemples de L-moments des ensembles de données peuvent être tracés en points. Cela donne une idée de l'ajustement qui peut correspondre à un échantillon de données ou à des échantillons avec différentes distributions [99].

La figure (2.1) présente le diagramme de rapport de L-moment théorique τ_3 et τ_4 pour quelques distributions de probabilité, pour savoir quelle distribution est adéquate à un échantillon de données, on ajoute les L-moments calculé de cet échantillon l_3 et l_4 dans le même graphe. La figure (2.2) indique un exemple des échantillons simulé de loi exponentielle de paramètre 2.

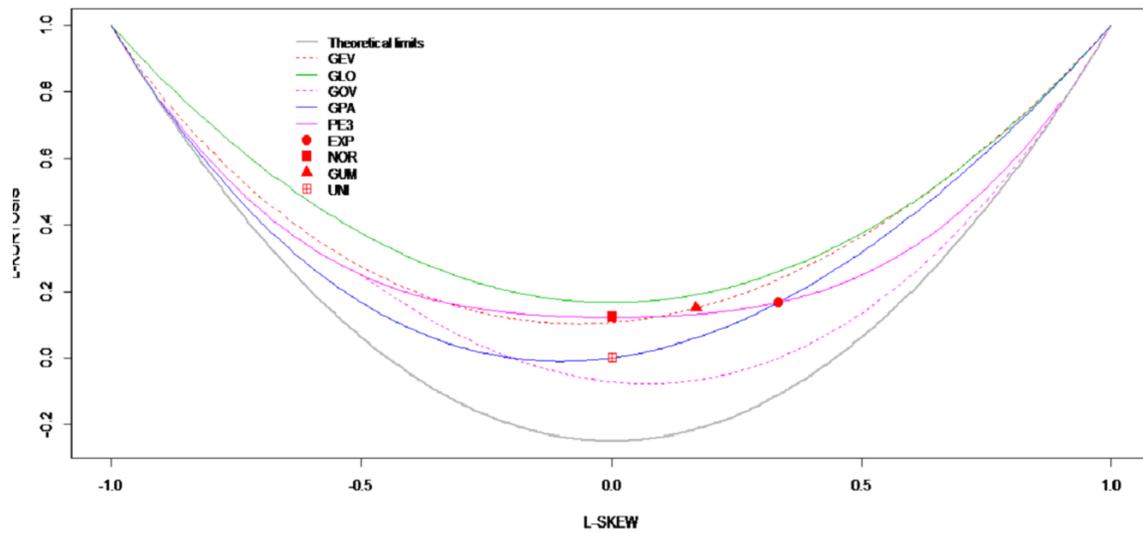


FIG. 2.1 – Diagramme de rapport de L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, uniforme, normale, Gumbel, GLO, PE3 et GPA.

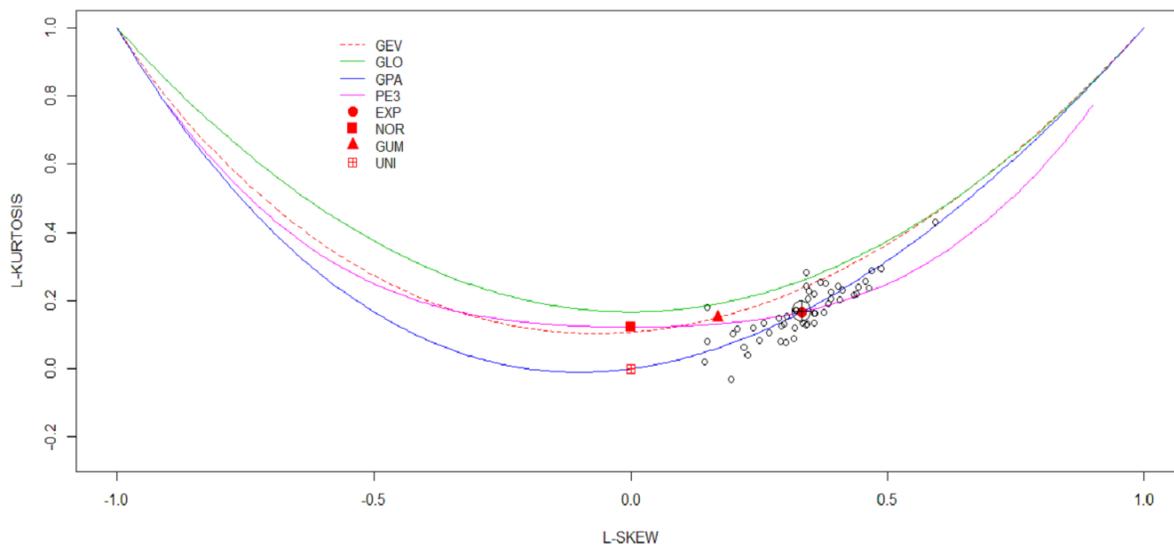


FIG. 2.2 – Diagramme de rapport de L-moments théoriques (τ_3 et τ_4) de lois exponentielle, uniforme, normale, Gumbel, GLO, GOV et GPA, PE3 avec les rapport de L-moments empiriques (t_3 et t_4) des échantillons simuler selon la loi exponentielle.

2.2 L-comoments

Les L-moments multivariés sont principalement développés par Serfling & Xiao[91]. Nous présentons dans cette section le cas bivarié : les L-comoments, leur représentations en termes de concomitants et les estimateurs appropriés.

Définition 2.2.1 Soit $(X^{(1)}, X^{(2)})$ couple aléatoire de fonction de répartition jointe F de moyenne finie, des distribution marginales F_1, F_2 et des séquences L-moments $\{\lambda^{(1)}\}, \{\lambda^{(2)}\}$. Par analogie avec la représentation de L-moments en fonction de covariance (2.16) le rème L-comoments $\lambda_{r[12]}$ de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ est définie par :

$$\lambda_{r[12]} = Cov(X^{(1)}, P_{r-1}(F_2(X^{(2)})), \quad r \geq 2,$$

et de même le rème L-comoments $\lambda_{r[21]}$ de $X^{(2)}$ par rapport à $X^{(1)}$ est définie par :

$$\lambda_{r[21]} = Cov(X^{(1)}, P_{r-1}(F_2(X^{(2)})), \quad r \geq 2,$$

Exemple 2.2.1 Les premier L-comoments $\lambda_{r[12]}$ de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_{1[12]} &= Cov(X^{(1)}, F_2(X^{(2)})) \\ \lambda_{2[12]} &= 2Cov(X^{(1)}, F_2(X^{(2)})) \\ \lambda_{3[12]} &= 6Cov\left(X^{(1)}, \left(F_2(X^{(2)} - \frac{1}{2})\right)^2\right). \end{aligned}$$

De même on peut déterminer les $\lambda_{r[21]}$ de $X^{(2)}$ par rapport à $X^{(1)}$.

Proposition 2.2.1 Les $\lambda_{r[12]}$ peuvent être exprimé comme les L-comoments de $\mathbb{E}(X^{(1)} | X^{(2)})$ par rapport à $X^{(2)}$ comme le suivant :

$$\lambda_{r[12]} = Cov(X^{(1)} | X^{(2)}, P_{r-1}(F_2(X^{(2)})), \quad r \geq 2.$$

Remarque 2.2.1

1. Pour $X^{(1)} = X^{(2)}$ Les L-Comoments réduit aux L-moments, c'est à dire :

$$\lambda_{r[12]} = \lambda_{r[21]}.$$

2. Pour $X^{(1)}, X^{(2)}$ indépendantes, $\lambda_{r[12]} = \lambda_{r[21]} = 0$, pour tout $r \geq 2$.

2.2.1 Représentations de L-comoments en terme de concomitants

Soit $(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})_{i=1, \dots, n}$ un échantillon bivarié de $(X^{(1)}, X^{(2)})$ de fonction de répartition jointe F_{12} et des marginales F_1, F_2 . Soit $X_{1:n}^{(2)} \leq X_{2:n}^{(2)} \leq \dots \leq X_{n:n}^{(2)}$ la statistique d'ordre associée à la variable $X^{(2)}$. Nous appelons l'élément de $\{X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}\}$ qui est lié à $X_{r:n}^{(2)}$ (voir [103]et [21]). Il est clair que :

$$\mathbb{E} [X_{r:n}^{(12)}] = n \mathbb{E} [X_1^{(1)} \mid X_1^{(2)} = X_{r:n}^{(2)}],$$

qui implique que :

$$\mathbb{E} [X_{r:n}^{(12)}] = n \binom{n-1}{r-1} \mathbb{E} \left(X^{(1)} [F_2(X^{(2)})]^{r-1} [1 - F_2(X^{(2)})]^{n-r} \right),$$

cela conduit une nouvelle représentation de L-comoments.

Proposition 2.2.2 *Le rème L-comoments $\lambda_{r[12]}$ de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ peuvent être représenté par :*

$$\lambda_{r[12]} = r^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \mathbb{E} [X_{r-j:k}^{(12)}]. \tag{2.23}$$

Utilisant (2.17) alors (2.23) réécrite :

$$\lambda_{r[12]} = r^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} w_{r:n}^{(k)} \mathbb{E} [X_{r-j:k}^{(12)}]. \tag{2.24}$$

2.2.2 Estimation de L-Comoments

En utilisant la proposition (2.2.2) on obtient un estimateur sans biais de *r*ème L-comoment donné par :

$$\hat{\lambda}_{r[12]} = n^{-1} \sum_{r=1}^n w_{r:n}^{(r)} X_{r:n}^{(12)}, \quad r \geq 2. \quad (2.25)$$

Qui est une L-statistique des concomitants. En outre, chaque $\hat{\lambda}_{r[12]}$ est une U-statistique, telle que $\lambda_{r[12]}$ est donné par :

$$\lambda_{r[12]} = \mathbb{E} \left(\mathfrak{h}^{(k)} \left(\left(X_1^{(1)}, X_1^{(2)} \right), \dots, \left(X_r^{(1)}, X_r^{(2)} \right) \right) \right)$$

et

$$\mathfrak{h}^{(r)} \left(\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)} \right), \dots, \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)} \right) \right) = r^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} x_{[r-j:k]}^{(12)} \quad (2.26)$$

Pour un noyau \mathfrak{h} avec des arguments bivariés qui est une combinaison linéaire des concomitants, les U-statistiques correspondantes basées sur un échantillon de taille n peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire des concomitants. Ainsi, la U-statistique basée sur le noyau (2.26) s'avère conforme à la représentation de la L-statistique donnée par (2.25).

2.3 TL-moments

Comme nous l'avons noté au début du chapitre que les TL-moments ou les L-moments tronqué (TL-moments) sont des généralisations de L-moments. Dans lequel $\mathbb{E}(Y_{r-k:r})$ est remplacé par $\mathbb{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2})$ d'où la taille de l'échantillon conceptuel est augmenté de r à $r + t_1 + t_2$. Aussi les TL-moments considéré comme une méthode d'estimation similaire aux méthode de moment, et des L-moments et en plus elle est plus robuste et donne des estimateurs sans biais, et asymptotiquement normale. Dans cette section nous présentons les TL-moments théoriques et empiriques et ses propriétés.

Définition 2.3.1 Soit Y_1, \dots, Y_r un échantillon de taille r de loi continue F_Y , avec une fonction de quantile $Q(u) = F_Y^{-1}(u)$, et soit $Y_{1:r} \leq \dots \leq Y_{r:r}$ les statistiques d'ordre associées à cet échantillon, alors le rème TL-moments $\lambda_r^{(t_1, t_2)}$ est définie par :

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}), \quad \text{pour } r = 1, 2, \dots, \quad (2.27)$$

où t_1, t_2 sont des entiers positifs.

Substituer l'espérance de la statistique d'ordre dans (2.2), nous obtenons les $\lambda_r^{(t_1, t_2)}$ en terme de la fonction de quantile, comme suit :

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{rk!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!} \int_0^1 Q(u) u^{r+t_1-k-1} \{1-u\}^{t_2+k} du. \quad (2.28)$$

Alors les premiers TL-moments pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0,1)} &= 2 \int_0^1 Q(u) u(1-u) du, \\ \lambda_2^{(0,1)} &= (3/2) \int_0^1 Q(u) (4u - 3u^2 - 1) du, \\ \lambda_3^{(0,1)} &= (4/3) \int_0^1 Q(u) (-10u^3 + 18u^2 - 9u + 1) du, \\ \lambda_4^{(0,1)} &= (15/2) \int_0^1 Q(u) u(1-u) (-35u^4 + 80u^3 - 60u^2 + 16u - 1) du. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Remarque 2.3.1

1. Pour $t_1 = t_2 = 0$, les TL-moments réduit aux L-moments λ_r ,
2. Dans le cas symétrique ; c'est à dire $t_1 = t_2 = t$ les $\lambda_r^{(t)}$ sont données par :

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E}(Y_{r+t-k:r+2t}), \quad (2.30)$$

Et en terme de fonction de quantile :

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r-1)!(r+2t)!}{rk!(r-k-1)!(r+t-k-1)!(t+k)!} \int_0^1 Q(u) u^{r+t-k-1} \{1-u\}^{t+k} du. \quad (2.31)$$

Alors, pour $r = 1, 2, 3, 4$, les $\lambda_r^{(1)}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \mathbb{E}(Y_{2:3}) \\ \lambda_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{3:4} - Y_{2:4}) \\ \lambda_3^{(1)} &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(Y_{4:5} - 2Y_{3:5} + Y_{2:5}) \\ \lambda_4^{(1)} &= \frac{1}{4} \mathbb{E}(Y_{5:6} - 3Y_{4:6} + 3Y_{3:6} - Y_{2:6}). \end{aligned}$$

Utilisant (2.28), nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= 6 \int_0^1 Q(u) u(1-u) du, \\ \lambda_2^{(1)} &= 6 \int_0^1 Q(u) u(1-u)(2u-1) du, \\ \lambda_3^{(1)} &= \frac{20}{3} \int_0^1 Q(u) u(1-u)(5u^2 - 5u + 1) du, \\ \lambda_4^{(1)} &= \frac{15}{2} \int_0^1 Q(u) u(1-u)(14u^3 - 21u^2 + 9u - 1) du. \end{aligned}$$

2.3.1 Propriétés de TL-moments

TL-skewness et TL-kurtosis : Par analogie de L-Skewness et L-kurtosis, les TL-skewness et TL-kurtosis sont définis par :

$$\tau_3^{(t_1, t_2)} = \lambda_3^{(t_1, t_2)} / \lambda_2^{(t_1, t_2)} \text{ et } \tau_4^{(t_1, t_2)} = \lambda_4^{(t_1, t_2)} / \lambda_2^{(t_1, t_2)}, \quad (2.32)$$

et de même ces rapports permettent de caractériser les distributions de probabilités et jouent le même rôle que le L-skewness et le L-kurtosis . En outre, ils vérifient la relation

suivante :

$$|\tau_r^{(t_1, t_2)}| \leq \frac{2(m+1)!(r+t_1+t_2)!}{r(m+r-1)!(2+t_1+t_2)!}, \quad \text{où } m = \min(t_1, t_2). \quad (2.33)$$

Représentation de TL-moments en terme de polynômes de Jacobi : Les polynômes de Jacobi sont des polynômes orthogonaux sur $[0, 1]$ avec une fonction de poids $u^{t_1}(1-u)^{t_2}$. Elles sont définies par :

$$P_r^{*(t_1, t_2)}(u) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r+t_1}{j} \binom{r+t_2}{r-j} u^j (1-u)^{r-j}, \quad (2.34)$$

pour $r = 1, 2, 3$ et $t_1 = 0, t_2 = 1$, on obtient :

$$P_0^{*(0,1)}(u) = 1;$$

$$P_1^{*(0,1)}(u) = (2 - 3u);$$

$$P_2^{*(0,1)}(u) = 10u^2 - 12u + 3;$$

$$P_3^{*(0,1)}(u) = -35u^3 + 60u^2 - 30u + 4,$$

Une nouvelle représentation de TL-moment en terme de $P_r^{*(t_1, t_2)}$ est introduite par Hosking (2007) [58] comme suit :

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{r(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!} \int_0^1 Q(u) u^{t_1} (1-u)^{t_2} P_{r-1}^{*(t_2, t_1)}(u) du. \quad (2.35)$$

Pour démontrer cet écriture nous commençons par la définition de $\lambda_r^{(t_1, t_2)}$, comme suit :

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{rk!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!} \int_0^1 Q(u) u^{r+t_1-k-1} (1-u)^{t_2+k} du.$$

multipliant cette quantité par $\frac{(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!}{(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!}$, et séparant les termes indexé par k , nous

obtenons :

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{r(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!}{k!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!} \int_0^1 Q(u) u^{t_1} u^{r-k-1} (1-u)^{t_2} (1-u)^k du,$$

et dans ce cas il est facile d'écrire ces quotiens en terme de combinaison comme suit :

$$\frac{(r+t_1-1)!}{k!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!} = \binom{r+t_1-1}{k} \text{ et } \frac{(r+t_2-1)!}{(r-k-1)!(t_2+k)!} = \binom{r+t_2-1}{r-k-1},$$

donc :

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{r(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!} \int_0^1 Q(u) u^{t_1} (1-u)^{t_2} \left(\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r+t_1-1}{k} \binom{r+t_2-1}{r-k-1} u^{r-k-1} (1-u)^k \right) du$$

Par comparaison avec le polynôme de Jacobi, on trouve que :

$$P_{r-1}^{*(t_2, t_1)} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r+t_1-1}{k} \binom{r+t_2-1}{r-k-1} u^{r-k-1} (1-u)^k.$$

Utilisant cette représentation, les premiers TL-moments pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0,1)} &= 2 \int_{[0,1]} Q(u)(1-u)du; \\ \lambda_2^{(0,1)} &= (3/2) \int_{[0,1]} Q(u)(4u - 3u^2 - 1)du; \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3^{(0,1)} &= (4/3) \int_{[0,1]} Q(u)(-10u^3 + 18u^2 - 9u + 1)du; \\ \lambda_4^{(0,1)} &= (5/4) \int_{[0,1]} Q(u)(-35u^4 + 80u^3 - 60u^2 + 16u - 1)du; \end{aligned} \tag{2.37}$$

Relation de récurrence : Parmi les propriétés de polynômes de Jacobi [1], la propriété

de récurrence utilisé pour les polynômes de Jacobi déplacé, donnée par :

$$\begin{aligned} (2r + t_1 + t_2 - 1)(1 - u)P_r^{*(t_2, t_1)}(u) &= (r + t_2)P_r^{*(t_2-1, t_1)}(u) - (r + 1)P_r^{*(t_2-1, t_1)}(u), \\ (2r + t_1 + t_2 - 1)uP_r^{*(t_2, t_1)}(u) &= (r + t_1)P_r^{*(t_2, t_1-1)}(u) + (r + 1)P_r^{*(t_2, t_1-1)}(u), \end{aligned}$$

En remplaçant ces formules dans (2.35), nous obtenons une relation entre les différents degrés de tronqué et entre les TL-moments et les L-moments présentés dans les formules suivantes :

$$\begin{aligned} (2r + t_1 + t_2 - 1)\lambda_r^{(t_1, t_2)} &= (r + t_1 + t_2)\lambda_r^{(t_1, t_2-1)} - \frac{1}{r}(r + 1)(r + t_1)\lambda_r^{(t_1, t_2-1)}, \\ (2r + t_1 + t_2 - 1)\lambda_r^{(t_1, t_2)} &= (r + t_1 + t_2)\lambda_r^{(t_1-1, t_2)} - \frac{1}{r}(r + 1)(r + t_1)\lambda_r^{(t_1-1, t_2)}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \lambda_r^{(0,1)} &= \frac{r+1}{2r}(\lambda_r - \lambda_{r+1}), \\ \lambda_r^{(0,2)} &= \frac{(r+1)(r+2)}{2r(2r+1)}\lambda_r - \frac{(r+2)}{2r}\lambda_{r+1} + \frac{(r+2)}{2(2r+1)}\lambda_{r+2}. \end{aligned}$$

2.3.2 Estimation de TL-moments

Les estimateurs de TL-moments est considéré comme des combinaisons linéaires de statistique d'ordre $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ associé d'un échantillon X_1, \dots, X_n de taille n . Ces estimateurs ont basé sur ceux qui ont introduit par Downton (1966) [26]. Donc les $l_r^{(s,t)}$ sont définis par :

$$l_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r \binom{n}{r+t_1+t_2}} \sum_{i=t_1+1}^{n-t} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t_1-k-1} \binom{n-i}{t_2+k} X_{i:n} \quad (2.38)$$

Il est facile de prouver cette écriture, et nous avons de premier temps

$$l_r^{(t_1, t_2)} = \hat{\lambda}_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \hat{E}(Y_{r+t-k:r+t_1+t_2}), \quad (2.39)$$

où $\hat{E}(X_{r+t-k:r+s+t})$ est l'estimateur sans biais de $\mathbb{E}(X_{r+t-k:r+s+t})$ définie par :

$$\hat{E}(Y_{r+t-k:r+2t}) = \frac{1}{\binom{n}{r+t_1+t_2}} \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{r+t_1-k-1} \binom{n-i}{t_2+k} X_{i:n} \quad (2.40)$$

remplaçant (2.40) dans (2.39), nous obtenons les $l_r^{(t_1, t_2)}$ donnés dans (2.38).

En particulier, pour $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, nous avons les premiers estimateurs de TL-moments, comme le suivant :

$$\begin{aligned} l_1^{(0,1)} &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{0} \binom{n-i}{1} X_{i:n} \\ l_2^{(0,1)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\binom{i-1}{1} \binom{n-i}{1} - \binom{i-1}{0} \binom{n-i}{2}}{\binom{n}{3}} \right) X_{i:n} \\ l_3^{(0,1)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-t} \left(\frac{\binom{i-1}{2} \binom{n-i}{1} - 2 \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{2} + \binom{i-1}{0} \binom{n-i}{3}}{\binom{n}{4}} \right) X_{i:n} \\ l_4^{(0,1)} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\binom{i-1}{3} \binom{n-i}{1} - 3 \binom{i-1}{2} \binom{n-i}{2} + 3 \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{3} - \binom{i-1}{0} \binom{n-i}{4}}{\binom{n}{5}} \right) X_{i:n} \end{aligned}$$

Comme un cas particulier lorsque $t_1 = t_2 = t$, on présente les estimateurs $l_r^{(t)}$ de la même manière, telle que :

$$l_r^{(t)} = \frac{1}{r} \sum_{i=t+1}^{n-t} \left[\frac{\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t-k-1} \binom{n-i}{t+k}}{\binom{n}{r+2t}} \right] X_{i:n}.$$

Et pour $t = 1$, les premiers estimateur de TL-moments sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 l_1^{(1)} &= \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{1} \binom{n-i}{1}}{\binom{n}{3}} \right) X_{i:n}, \\
 l_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{2} \binom{n-i}{1} - \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{2}}{\binom{n}{4}} \right) X_{i:n}, \\
 l_3^{(1)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{3} \binom{n-i}{3} - 2 \binom{i-1}{2} \binom{n-i}{2} + \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{3}}{\binom{n}{5}} \right) X_{i:n}, \\
 l_4^{(1)} &= \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{4} \binom{n-i}{4} - 3 \binom{i-1}{3} \binom{n-i}{2} + 3 \binom{i-1}{2} \binom{n-i}{3} - \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{4}}{\binom{n}{6}} \right) X_{i:n},
 \end{aligned}$$

et les estimateurs de TL-skewness et TL-kurtosis $t_3^{(t_1, t_2)}, t_4^{(t_1, t_2)}$ sont :

$$t_3^{(t_1, t_2)} = l_3^{(t_1, t_2)} / l_2^{(t_1, t_2)}, t_4^{(t_1, t_2)} = l_4^{(t_1, t_2)} / l_2^{(t_1, t_2)}.$$

2.3.3 Variance et covariance de TL-moments empiriques

La variance et la covariance de TL-moments empiriques peuvent être exprimés comme une somme d'espérance de produit de staistique d'ordre comme Elamir et Seheult (2003) l'indiqué. Comme exemple la variance de $l_1^{(t)}$ qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
 var(l_1^{(t)}) &= 3\{12(n-2)^2 \mathbb{E}(Y_{3:5} Y_{4:5} + Y_{2:5} Y_{3:5}) \\
 &\quad - 10(n-2)(2n-3) \mathbb{E}(Y_{2:4} Y_{3:4}) \\
 &\quad - 2(3n-15n+20) \mathbb{E}(Y_{3:6} Y_{4:6}) \\
 &\quad + 10 \mathbb{E}(Y_{2:3}^2) + 55(n-3) \mathbb{E}(Y_{2:4}^2 Y_{3:4}^2) \\
 &\quad + 2(n-3)(n-4) \mathbb{E}(Y_{2:3}^2)\} / 5n(n-1)(n-2)
 \end{aligned}$$

Pour la covariance de TL-moments Hosking (2007) a utilisé les PWM pour définir l'expression de cette dernière. D'où les estimateurs de TL-moments en fonction de PWM sont

donnés par :

$$l_{r+1}^{(t_1, t_2)} = \sum_{j=t_1}^{r+t_1+t_2} z_{r,k}^{(t_1, t_2)} b_j,$$

tels que $z_{r,j}$ sont les coefficients de polynôme de Jacobi déplacé et b_j sont les estimateurs sans biais de B_j définie dans (2.15). Elamir et Seheult (2004) [30] ont donné une expression pour la covariance de TL-moments empiriques comme suit :

$$Cov(l_r^{(t_1, t_2)}, l_s^{(t_1, t_2)}) = \sum_{j=t_1}^{r+t_1+t_2} \sum_{s=t_1}^{r+t_1+t_2} z_{r-1,j}^{(t_1, t_2)} z_{r-1,s}^{(t_1, t_2)} (b_j, b_s).$$

Il s'ensuit que l'estimateur sans biais de $Cov(l_r^{(t_1, t_2)}, l_s^{(t_1, t_2)})$ est défini par :

$$Cov(l_r^{(t_1, t_2)}, l_s^{(t_1, t_2)}) = \sum_{j=t_1}^{r+t_1+t_2} \sum_{s=t_1}^{r+t_1+t_2} z_{r-1,j}^{(t_1, t_2)} z_{r-1,s}^{(t_1, t_2)} B_{j,s},$$

d'où

$$B_{j,s} = b_j b_s - \frac{(n-j-s-2)!}{(n-2)!} \sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{(i-1)!}{(k-j-s-2)!} \left\{ \frac{(k-j-2)!}{(i-j-1)!} + \frac{(k-s-2)!}{(i-s-1)!} \right\} X_{i:n} X_{k:n}.$$

2.3.4 TL-moments de quelques distributions continues

TL-moments de loi Cauchy : Soit X une v.a de loi cauchy de fonction de répartition F_X et de fonction de quantile $Q_X(u)$ définies par :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) + \frac{1}{2},$$

$$Q(u) = \mu + \sigma \tan \pi \left(u - \frac{1}{2} \right)$$

Calculant les premier TL-moments pour $t_1 = t_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(1)} &= \mu, \lambda_2^{(1)} = 0.500\sigma \\ \tau_3^{(1)} &= 0, \tau_4^{(1)} = 0.038.\end{aligned}$$

et pour estimer les paramètres de cette loi μ et σ , il suffit de résoudre les deux équations suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= l_1^{(1)}, \\ \hat{\sigma} &= 2l_2^{(1)}.\end{aligned}$$

Loi de Pareto : Pour la loi de Pareto (définie dans l'exemple 2.1.1) les TL-moments associés sont données par :

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(1)} &= \frac{\gamma(\kappa + 5)}{(\kappa + 2)(\kappa + 3)}, \\ \lambda_2^{(1)} &= \frac{6\gamma}{(\kappa + 2)(\kappa + 3)(\kappa + 4)},\end{aligned}$$

et les $\tau_3^{(1)}, \tau_4^{(1)}$ deviennent

$$\begin{aligned}\tau_3^{(1)} &= \frac{10(1 - \kappa)}{9(\kappa + 5)}, \\ \tau_4^{(1)} &= \frac{5(\kappa - 1)(\kappa - 2)}{4(\kappa + 5)(\kappa + 6)}.\end{aligned}$$

Pour les estimateurs de $\hat{\gamma}$ et $\hat{\kappa}$, nous remplaçons les $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \tau_3^{(1)}$ et $\tau_4^{(1)}$ par ses estimateurs où nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\kappa} &= \frac{10 - 45t_3^{(1)}}{10 + 9t_3^{(1)}}, \\ \hat{\gamma} &= \frac{(\hat{\kappa} + 2)(\hat{\kappa} + 3)}{(\hat{\kappa} + 5)} l_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Conclusion

Les L-moments peuvent être considéré comme une base dans l'analyse statistique univariées. Ils peuvent être définis pour toute variable aléatoire dont la moyenne existe et forment la base d'une théorie générale qui couvre :

1. La description des distributions théoriques de probabilité et les échantillons de données observés, telle que le L-Skwness et le L-Kurtosis,
2. L'estimation des paramètres des distributions de probabilité. En résolvant un système d'équations égale aux nombres de paramètres inconnus,
3. Les tests d'ajustements pour les distributions de probabilité, comme la comparaison de L-Skweness et L-Kurtosis pour différentes distributions avec les L-Skewness et L-Kurtosis d'un échantillon de données observés présenté dans le digramme de rapport de L-Moments.
4. le test d'hypothèse : test de normality développé par Harri et al. (2011)[52].

Les L-moments multivariés developpé par Serfling et Xiao (2007) [91] est une généralisation du cas univarié pour étendre les mêmes propriétés et application dans l'analyse statistique multivariées. Parmi les inconvénients de L-moments est l'absence de cette mesure pour quelques distributions comme la loi de Cauchy.

Les TL-moments sont des mesures alternatives aux L-moments ou elles donnent des poids égale à zéro pour les observations extrêmes et permettent de :

1. Caractériser les distributions de probabilité et les échantillons de données à partir les mesures de : position, dispersion,...
2. Estimer les paramètres des distributions de probabilité pour les distributions qui n'ont pas de moments finies et pour les distributions à queue lourde,
3. Donner une idée sur l'ajustement de données observés à partir le diagramme de TL-moments.

Chapitre 3

Copules Paramétrique : méthodes d'estimation et modélisation de la Dépendance

Plusieurs méthodes d'estimation des copules sont proposées dans la littérature. Dont certaines sont basées sur la fonction de densité, telle que la méthode de maximum de vraisemblance, la méthode de maximum de vraisemblance canonique, et certaines d'autre basées sur les mesures d'associations (tau de Kendall et rho de Spearman), moments (les moments classiques de copule), les L-moments,...etc. D'où le principe de ces méthodes est le même que le cas univarié. Dans ce chapitre nous allons citer quelques méthodes d'estimation où nous donnons d'abord la notion de copule empirique et la version empirique de tau de Kendall et le rho de Spearman. Nous présentons aussi deux méthodes graphiques qui nous donnent une idée sur le modèle de copule adéquate à un échantillon bivarié de données.

3.1 Copule empirique

Les copules empiriques ont été introduite et d'abord étudié par Deheuvels (1979) [23], qui les a appelés fonctions de dépendance empiriques. Nous donnons le cas bivarié et multivarié respectivement.

3.1.1 Cas bivarié

Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(X_k, Y_k)\}_{k=1}^n$ de couple de variables aléatoires (X, Y) de fonction de répartition jointes H et de marges F et G .

Définition 3.1.1 *La copule \tilde{C}_n définie sur le treillis :*

$$L = \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) : i, j = 0, 1, \dots, n \right\},$$

par :

$$\tilde{C}_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_k \leq X_{(i)}, Y_k \leq Y_{(j)}),$$

est une copule empirique bivariée, telle que $X_{(i)}$ et $Y_{(j)}$ sont les statistiques d'ordre de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) et l'échantillon (Y_1, \dots, Y_n) respectivement. Nous pouvons construire la copule empirique C_n par les marges empiriques F_n, G_n et H_n

$$C_n(u) = H_n(F_n^{-1}(u_1), G_n^{-1}(u_2)). \quad (3.1)$$

La copule de fréquence empirique c_n est donnée par :

$$c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (X_{(i)}, Y_{(j)}) \in \{(X_k, Y_k) : 1 \leq k \leq n\}, \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.2)$$

Il existe une relation entre les fonctions \tilde{C}_n et c_n donnée par :

$$\tilde{C}_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right).$$

3.1.2 Cas multivarié

Soit $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, une suite de vecteurs aléatoires i.i.d de fonction de répartition jointes H et de marges F_1, \dots, F_d . Soit $R_i = (R_{i1}, \dots, R_{id})$ un vecteur de rang de $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})$.

Définition 3.1.2 *Toute copule \tilde{C}_n définie sur le treillis :*

$$l = \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_d}{n} \right) : 1 \leq j \leq d, k_d = 0, 1, \dots, n \right\},$$

par la fonction

$$\tilde{C}_n \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_d}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(R_{i1} \leq k_1, \dots, R_{id} \leq k_d), \quad (3.3)$$

est une copule empirique multivariée.

Nous pouvons définir la fonction empirique utilisant les marges empirique $F_{j,n}$, alors l'estimateur empirique C_n d'une copule C est défini par :

$$C_n(u) = H_n(F_{1,n}^{-1}(u_1), \dots, F_{d,n}^{-1}(u_d)), \text{ pour } u = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d. \quad (3.4)$$

En effet, Deheuvels (2009) [24] atteste que :

$$\sup \left| \tilde{C}_n(u) - C_n(u) \right| = \frac{1}{n},$$

donc la différence est très petite.

3.2 Tau de Kendall et Rho de Spearman empirique

Définition 3.2.1 Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. Nous définissons le nombre c et d comme étant le nombre de paires concordantes et discordantes dans cet échantillon respectivement. La version empirique de tau de Kendall ([68], [54] et [72]), noté τ_n , est défini par :

$$\tau_n = \frac{c - d}{c + d} \quad (3.5)$$

Remarque 3.2.1 La somme de paires concordantes et discordantes $c + d$ est égale à $\binom{n}{2}$, alors τ_n peut s'écrire

$$\tau_n = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}. \quad (3.6)$$

Définition 3.2.2 Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. la version empirique de rho Spearman [16], noté ρ_n , est définie par :

$$\rho_n = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \left(\frac{n+1}{n-1} \right), \quad (3.7)$$

tel que R_i est le rang de X_i parmi X_1, \dots, X_n et S_i est le rang de Y_i parmi Y_1, \dots, Y_n .

3.3 Méthode de maximum de vraisemblance exacte

Soit C_θ une copule paramétrique multivariées de paramètre θ . On estime θ sous les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : C \in C_0, \quad (3.8)$$

telle que $C_0 = \{C_\theta : \theta \in \mathcal{O}\}$, où \mathcal{O} est un sous ensemble de \mathbb{R}^p pour tout entier $p \geq 1$.

$$\text{et } \dot{H}_0 = F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_d \in \mathcal{F}_d, \quad (3.9)$$

telle que F_j pour $j = 1, \dots, d$ sont les lois marginales de X_1, \dots, X_d et $\mathcal{F}_j = \{\mathcal{F}_{\gamma_j} : \gamma_j \in \Gamma_j\}$, où Γ_j est un sous ensemble de \mathbb{R} , et en maximisant la fonction log- vraisemblance $L(\theta)$

définie par

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_1, \dots, x_d), \quad (3.10)$$

telle que $f(x_1, \dots, x_d)$ est la fonction de densité jointe de X_1, \dots, X_d .

A partir de l'équation la fonction $L(\theta)$ peut s'écrire :

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln \left(c_\theta(F_1(x_{i1}), F_2(x_{i2}), \dots, F_d(x_{id})) \prod_{j=1}^d f_j(x_j) \right) \quad (3.11)$$

$$= \sum_{i=1}^n \ln c_\theta(F_1(x_{i1}), F_2(x_{i2}), \dots, F_d(x_{id})) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_j), \quad (3.12)$$

où c_θ représente la densité de la copule C_θ , alors l'estimateur de θ , noté $\hat{\theta}_n^{MV}$ est :

$$\hat{\theta}_n^{MV} = \arg \max L(\theta). \quad (3.13)$$

Cet estimateur est consistant et vérifie la propriété de normalité asymptotique (voir [90])

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta \right) \rightarrow N(0, I^{-1}(\theta)),$$

telle que $I(\theta)$ et la matrice d'information de Fisher. Cette matrice est estimée par l'inverse de la matrice Hessian de la fonction de vraisemblance.

3.4 Méthode des fonctions d'inférence des marginales (IFM)

Supposant que nous avons les mêmes hypothèses que la méthode de maximum de vraisemblance, alors cette méthode consiste à maximiser la fonction log-vraisemblance $L(\theta)$ mais en séparant entre les paramètres de distributions marginales γ_j et les paramètres de dépendance.

La procédure d'estimation effectuée par deux étapes introduites par Joe et Xu (1996) [60] :

– On estime les paramètres de distribution marginales univariées γ_j , ils sont définis par :

$$\hat{\gamma}_j = \arg \max L_j(\gamma_j), \quad (3.14)$$

telle que

$$L_j(\gamma_j) = \sum_{i=1}^n \ln f_j(x_{ij}), \quad (3.15)$$

où f_j est la densité de F_j .

– Puis, on estime θ utilisant les estimateurs $\hat{\gamma}_j$ obtenues par (3.14), nous avons :

$$\hat{\theta}_n^{IFM} = \arg \max L(\theta), \quad (3.16)$$

où

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_\theta \{F_{\hat{\gamma}_1}(x_{i1}), F_{\hat{\gamma}_2}(x_{i2}), \dots, F_{\hat{\gamma}_d}(x_{id})\}. \quad (3.17)$$

Là encore, l'estimateur $\hat{\theta}_n^{IFM}$ vérifie la propriété de normalité asymptotique comme Joe (1997) a été démontré [61]

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{IFM} - \theta \right) \rightarrow N(0, V^{-1}(\theta)),$$

avec $V(\theta)$ est la matrice d'information de Godambe, définie par :

$$V(\theta) = D^{-1} M (D^{-1})^t, \quad (3.18)$$

où

$$D = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (g(\theta)^t) \right], \quad \mathcal{M} = E [g(\theta)^t g(\theta)] \quad \text{et} \quad g(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_1} L_1, \dots, \frac{\partial}{\partial \gamma_d} L_d \right).$$

3.5 Méthode de pseudo-maximum de vraisemblance (maximum de vraisemblance canonique)

Cette méthode a été proposé dans le cas où les marges F_1, \dots, F_d associées aux X_1, \dots, X_d sont inconnus, elle contient deux étapes :

- On remplace les marges F_1, \dots, F_d par leurs estimations naturelles (estimateur empirique), elles sont définies par :

$$\hat{F}_{j,n}(x_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(X_{ij} \leq x). \quad (3.19)$$

- En maximisant la pseudo log-vraisemblance pour estimer θ , telle que

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_\theta \left\{ \hat{F}_{1,n}(x_{i1}), \hat{F}_{2,n}(x_{i2}), \dots, \hat{F}_{d,n}(x_{id}) \right\}, \quad (3.20)$$

alors l'estimateur $\hat{\theta}_n^{PMV}$ est

$$\hat{\theta}_n^{PMV} = \arg \max L(\theta). \quad (3.21)$$

Remarque 3.5.1 Nous avons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ $R_{ij} = n\hat{F}_{j,n}(x_{ij})$, où R_{ij} est le rang de X_{ij} dans l'échantillon univariés X_{1j}, \dots, X_{nj} . Donc l'estimateur tiré de cette méthode est basé sur les rangs des observations.

Cas bivarié

Soit X, Y deux variables aléatoires dont les marges sont F et G respectivement. Soit C_θ la copule associée à X, Y de paramètre θ . La pseudo log-vraisemblance est définie à partir de l'équation (2.30) par :

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_\theta \{F_n(x_i), G_n(y_i)\}, \quad (3.22)$$

telle que

$$F_n(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(X_i \leq x) \text{ et } G_n(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(Y_i \leq y), \quad (3.23)$$

comme $nF_n = R_i$ et $nG_n = S_i$, où R_i et S_i sont les rangs de X_i et Y_i dans leurs échantillons univariés respectivement, donc $L(\theta)$ devient

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c_\theta \left(\frac{R_i}{n}, \frac{S_i}{n} \right). \quad (3.24)$$

3.6 Méthode d'inversion

Cette méthode consiste à estimer les paramètres recherchés en utilisant certaine mesure d'association telle que le tau de Kendall et le rho de Spearman, où il existe une relation entre ces mesures et le paramètre de dépendance de la copule [42]. Nous expliquons cette méthode comme suit :

Soit (X, Y) couple de variables aléatoires dont la copule est C_θ , de paramètre θ , telle que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

3.6.1 Un estimateur de θ basé sur le tau de Kendall

– Supposant qu'il existe une relation entre le tau de Kendall et le paramètre θ . Cette relation est définie par :

$$\tau_{X,Y} = \mathbf{g}(\theta), \quad (3.25)$$

où \mathbf{g} est une fonction continue est dérivable, alors un estimateur $\hat{\theta}_n^{TK}$ de θ est défini par :

$$\hat{\theta}_n^{TK} = \mathbf{g}^{-1}(\tau_n), \quad (3.26)$$

telle que τ_n est l'estimateur empirique de τ (3.5).

– Cet estimateur est asymptotiquement normale [38], [86], d'où :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{TK} - \theta) \rightarrow N(0, \hat{\sigma}_\tau^2),$$

telle que $\hat{\sigma}_\tau^2$ est la variance empirique de σ_τ^2

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = (4S\hat{g}(\tau_n))^2,$$

où :

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W} \right)^2,$$

et

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i) \text{ et}$$

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j).$$

3.6.2 Un estimateur de θ basé sur le rho de Spearman

Par la même manière, si on suppose que le rho de Spearman se définit en fonction de θ par la relation suivante :

$$\rho = f(\theta),$$

où f est une fonction continue est dérivable, alors l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ est défini par :

$$\theta = f^{-1}(\rho_n),$$

telle que, ρ_n est l'estimateur empirique de ρ (3.7). Cet estimateur est asymptotiquement normale, telle que :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{RS} - \theta) \rightarrow N(0, (\sigma_n h^{-1}(\rho_n))^2),$$

telle que σ_n^2 est l'estimateur de σ^2

$$\sigma_n^2 = 144(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2\varepsilon_n),$$

où

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}, \\
 B_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left(\frac{S_i}{n+1} \right)^2, \\
 C_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} 1(R_k \leq R_i, S_k \leq S_j) + \frac{1}{4} - A_n, \\
 D_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{R_j}{n+1} \right) \text{ et} \\
 \varepsilon_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max \left(\frac{S_i}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

pour plus de détails voir [8]

- **Exemple 3.6.1** Nous prenons comme exemple la copule de Gumbel pour un paramètre de dépendance θ (1.23), d'où le tau de kendall est donnés par

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

on déduit que

$$\theta = \frac{1}{1 - \tau}$$

substituer τ par son estimateur non paramétrique $\hat{\tau}$ défini dans (3.6), nous obtenons un estimateur de $\hat{\theta}$ donné par :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \tau_n},$$

3.7 Méthode de la distance minimale

Il existe trois types d'estimation de cette méthode, et chaque type contient trois statistiques, telle que la statistique de Cramer-von-Mises, la statistique de L_1 variant Cramer-von-Mises et la statistique de Kolomogorov-Smirnov [49]. Nous présentons dans ce qui suit deux méthodes, la première est basé sur le processus de copule empirique et la deuxième

basé sur le processus de Kendall. En ce qui concerne le troisième type qui est basé sur la transformée de Rosenblatt voir (Rosenblatt (1952) [83] et [5]).

3.7.1 Estimateurs de la distance minimale basés sur le processus de copule empirique

C'est le premier type d'estimation consiste à :

1. Calculer le processus empirique définie par :

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\hat{\theta}}), \quad (3.27)$$

telle que, C_n est la copule empirique de Deheuvels et $C_{\hat{\theta}}$ est la copule proposé dans l'hypothèse $H_0(3.8)$.

2. Calculer les statistiques de Cramer-von-Mises, noté ρ_{emp}^{CvM} , de Kolomogorov-Smirnov, noté ρ_{emp}^{KS} et de L_1 variant Cramer-von-Mises, noté $\rho_{emp}^{L_1}$ définies par :

$$\rho_{emp}^{CvM} = \int \int_{[0,1]^2} \mathbb{C}_n(u)^2 d\mathbb{C}_n(u), \quad (3.28)$$

$$\rho_{emp}^{KS} = \sup_{u \in [0,1]^2} |\mathbb{C}_n(u)| \text{ et} \quad (3.29)$$

$$\rho_{emp}^{L_1} = \sqrt{n} \int \int_{[0,1]^2} |\mathbb{C}_n(u)| d\mathbb{C}_n(u). \quad (3.30)$$

Les versions empiriques de ρ_{emp}^{CvM} et $\hat{\rho}_{emp}^{L_1}(U, \theta)$ [43] sont données par :

$$\hat{\rho}_{emp}^{CvM}(U, \theta) = \sum_{i=1}^n \{\mathbb{C}_n(U_i) - \mathbb{C}_{\hat{\theta}}(U_i)\}^2,$$

$$\hat{\rho}_{emp}^{L_1}(U, \theta) = \sum_{i=1}^n |\mathbb{C}_n(U_i) - \mathbb{C}_{\hat{\theta}}(U_i)|.$$

3. Calculer les estimateurs de distance minimum basés sur la minimisation de statisti-

tiques ci-dessus. Ils sont définies par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n^{emp,L1} &= \arg \min \hat{\rho}_{emp}^{L1}(U, \theta), \\ \hat{\theta}_n^{emp,CvM} &= \arg \min \hat{\rho}_{emp}^{CvM}(U, \theta) \text{ et} \\ \hat{\theta}_n^{emp,KS} &= \arg \min \hat{\rho}_{emp}^{KS}(U, \theta).\end{aligned}$$

3.7.2 Estimateurs de la distance minimmale basés sur la fonction de dépendance de Kendall

Le deuxième type de la distance minimmale est basé sur la fonction de dépendance de Kendall, il a été proposé par Savu et Trede (2004), et Genest et al. (2006) [41]. La transformée d'intégral de probabilité V d'un vecteur aléatoire X dont la fonction de répartition est H et de marge F_1, \dots, F_d est définie par

$$X \mapsto V = H(X) = C(U_1, \dots, U_d),$$

telle que, $U_i = F(X_i)$.

Donc l'estimation deparamètre θ présenté dans les étapes suivantes :

1. Calculer l'estimateur nonparamétrique de K , telle que K est la fonction de répartition jointe de V . Cet estimateur est donné par :

$$K_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(V_i \leq \omega), \quad \omega \in [0, 1]^2.$$

2. Donner Le processus empirique \mathbb{k}_n définie par :

$$\mathbb{k}_n = \sqrt{n}(K_n - K_{\hat{\theta}}).$$

3. Calculer les statistiques ρ_K^{L1} , ρ_K^{CvM} et ρ_K^{KS}

$$\begin{aligned}\rho_K^{L1} &= \sqrt{n} \int_0^1 |\mathbb{k}_n(\omega)| d\mathbb{k}_\theta(\omega), \\ \rho_K^{CvM} &= \int_0^1 \mathbb{k}_n(\omega)^2 d\mathbb{k}_\theta(\omega) \text{ et} \\ \rho_K^{KS} &= \sup_{\omega \in [0,1]} |\mathbb{k}_n(\omega)|.\end{aligned}$$

3.7.3 Méthode d'estimation basé sur Les moments

Cette méthode est proposé par Brahim et al. (2012) [9] pour estimer plus d'un paramètre d'une copule C_θ . Cette méthode est similaire à la méthode de moments dans le cas univarié. Elle consiste à calculer les moments classique d'ordre k de la copule C_θ . D'où nous obtenons ces formules en fonction de paramètres de dépendance. On résume dans ce qui suit l'algorithme correspond à cette méthode où nous supposons que nous avons une copule paramétrique C_θ de paramètre $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$:

1. Calculer les moments d'ordre k de la variable $C(U)$ par :

$$\mathbb{M}_k(C) = \mathbb{E} \left[(C(U))^k \right] = \int_{[0,1]^d} (C(u))^k dC(u), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

pour $k = 1$, \mathbb{M}_k correspond à l'espérance de copule donné comme suit :

$$\mathbb{M}_1(C) = \mathbb{E} [(C(U))] = \frac{(2^{d-1} - 1)\tau + 1}{2^d}$$

et car la copule C est paramétrique, donc $\mathbb{M}_k(C)$ devient $\mathbb{M}_k(\theta)$ et (3.31) Réécrire :

$$\mathbb{M}_k(\theta) = \int_{\mathbb{I}^2} (C_\theta(u))^k dC_\theta(u), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

2. Calculer la version empirique de Moments $\hat{\mathbb{M}}_k$ selon les étapes suivants :

(a) Calculer le vecteur \hat{U}_{ji} où

$$\hat{U}_{ji} = F_{jn}(X_{ji}), \quad j = 1, \dots, d$$

telle que $F_{jn}(x_j) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1(X_{ji} \leq x_j)$ et construire le vecteur $\hat{U}_i = (\hat{U}_{1i}, \dots, \hat{U}_{di})$, pour $i = 1, \dots, n$.

(b) Calculer les $\hat{\mathbb{M}}_k$:

$$\hat{\mathbb{M}}_k = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(C_n(\hat{U}_i) \right)^k,$$

telle que : $C_n(u) = F_n(F_{1n}^{-1}(u_1), \dots, F_{1n}^{-1}(u_d))$ pour $u \in \mathbb{I}^d$ et $F_{jn}^{-1}(u_j)$ est la fonction de quantil empirique correspond de la fonction F_{jn} .

3. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\mathbb{M}}_1 \\ \mathbb{M}_2(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\mathbb{M}}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{M}_r(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\mathbb{M}}_r \end{cases} \quad (3.33)$$

La solution de ce système nous donne l'estimateur de θ , noté $\hat{\theta}^{CM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$.

Cet estimateur est sans biais et vérifie la normalité asymptotique. (pour plus de détail voir [9]).

Exemple 3.7.1 Comme un exemple illustratif de cette méthode, la copule choisie dans [9] est la copule de Gumbel pour deux paramètres qui est définie par :

$$C_{\alpha, \beta}(u) = \left(\left(\sum_{j=1}^d (u_j^{-\alpha} - 1)^\beta \right)^{1/\beta} + 1 \right)^{-1/\alpha}, \quad \text{pour } u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{I}^d, \quad (3.34)$$

avec un generateur :

$$\varphi_{\alpha, \beta}(t) = (s^{-\alpha} - 1)^\beta. \quad (3.35)$$

En substituant (3.34) dans (3.32), alors les moments \mathbb{M}_k sont donnés par :

$$\mathbb{M}_k(\alpha, \beta) = \frac{(k+1)\beta + \alpha\beta - k}{(k+1)^2\beta + (k+1)\alpha\beta}.$$

En particulier, les premiers moments sont les suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_1(\alpha, \beta) &= \frac{2\beta + \alpha\beta - 1}{4\beta + 2\alpha\beta}, \\ \mathbb{M}_2(\alpha, \beta) &= \frac{3\beta + \alpha\beta - 2}{9\beta + 3\alpha\beta}.\end{aligned}$$

En résolvant le système (3.33), donc les estimateurs $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ de α et β deviennent :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{8\hat{\mathbb{M}}_1 - 9\hat{\mathbb{M}}_2 - 1}{1 - 4\hat{\mathbb{M}}_1 + 3\hat{\mathbb{M}}_2}, \\ \hat{\beta} &= \frac{1 - 4\hat{\mathbb{M}}_1 + 3\hat{\mathbb{M}}_2}{(1 - 2\hat{\mathbb{M}}_1)(1 - 3\hat{\mathbb{M}}_2)}.\end{aligned}$$

3.7.4 Méthode d'estimation basé sur les L-moments

Comme nous avons présenté dans le deuxième chapitre que la méthode de L-moments est une méthode d'estimation pour les distributions d'espérance finie et qui possède plus d'un paramètre, alors Benatia et al. (2011) [4] ont proposé une nouvelle méthode pour l'estimation de copule basé sur les L-moments, d'où les copules vérifient tout que son espérance est finie. Et ont montré que cet estimateur est sans biais et asymptotiquement normale. Cette méthode est appliqué sur les copules Archimédiennes, en particulier sur la copule de Gumbel de deux paramètres. La procédure d'estimation est comme le suivant :

1. Représenter les L-moments de copule : Les L-moments d'une copules paramétrique C sont définis par :

$$\lambda_k(C) = \int_{\mathbb{I}^d} C(u) P_{k-1}(\mathbf{K}_C(C(u))) d\mathbf{K}_C(C(u)), \quad k = 1, 2, \dots$$

où $\mathbf{K}_C(C(u))$ est la fonction de répartition de la v.a $C(u)$. Par changement de variable et supposons que $C(u) = s$, alors les λ_k peuvent être écrite comme suit :

$$\lambda_k(\theta) = \int_0^1 s P_{k-1}(\mathbf{K}_C(s)) d\mathbf{K}_C(s), \quad k = 1, 2, \dots$$

car C est une copule paramétrique C_θ , alors

$$\lambda_k(\theta) = \int_0^1 s P_{k-1}(\mathbf{K}_\theta(s)) d\mathbf{K}_\theta(s), \quad k = 1, 2, \dots$$

Pour les copules Archimédienne, nous avons que $\mathbf{K}_\theta(s) = s - \varphi_\theta(s)/\varphi'_\theta(s)$, d'après le théorème (4.3.4) de [78, page 127]. Alors les $\lambda_k(\theta)$ réécrite comme suit :

$$\lambda_k(\theta) = \int_0^1 s P_{k-1} \left(s - \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(s)} \right) \frac{\varphi''_\theta(s) \varphi_\theta(s)}{(\varphi'_\theta(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

et donc pour $k = 1, 2$, on obtient les premiers L-moments :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta) &= \int_0^1 s \frac{\varphi''_\theta(s) \varphi_\theta(s)}{(\varphi'_\theta(s))^2} ds, \\ \lambda_2(\theta) &= \int_0^1 s \left(2s - \frac{2\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(s)} - 1 \right) \frac{\varphi''_\theta(s) \varphi_\theta(s)}{(\varphi'_\theta(s))^2} ds. \end{aligned}$$

2. Estimer les L-moments : L'estimateur $\hat{\lambda}_k$ de λ_k est défini par :

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k(C_n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n C_n(\hat{U}_i) P_{k-1} \left(\mathbf{K}_n \left(C_n(\hat{U}_i) \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

d'où \mathbf{K}_n est l'estimateur de $\mathbf{K}(C)$ et C_n est la copule empirique de la copule C . pour plus de détail sur l'expression de ces estimateur voir [4, Théorème 1].

3. Résoudre un système d'équation :

$$\begin{cases} \lambda_1(\theta) = \hat{\lambda}_1(\theta), \\ \lambda_2(\theta) = \hat{\lambda}_2(\theta) \\ \vdots \\ \lambda_r(\theta) = \hat{\lambda}_r(\theta) \end{cases} \quad (3.36)$$

tel que le r présente le nombre de paramètres à estimer. La solution de ce système nous donne l'estimateur de θ , noté $\hat{\theta}^{CLM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$.

Pour la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}^{CLM}$ voir [4, Théorème 1].

Exemple 3.7.2 Les L -moments $\lambda_1(\alpha, \beta)$ et $\lambda_2(\alpha, \beta)$ de la copule de Gumbel de deux paramètres α et β , définie dans (3.34) sont donnés par :

$$\lambda_1(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha + \alpha\beta - 1}{4\beta + 2\alpha\beta},$$

$$\lambda_2(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha^3\beta^2 + 13\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta}{4\beta + 2\alpha\beta}.$$

Remarque 3.7.1 On a pas une formule explicite pour les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, donc la solution de (3.36) est faite numériquement.

3.7.5 Méthode d'estimation basé sur les L-comoments

Cette méthode consiste à estimer les paramètres $(\theta_1, \dots, \theta_r)$ de la copule C_θ utilisant les L-comoments. Cette méthode est proposé par Brahimi et al. [10] pour l'estimation de copules bivariées. Avant donner la procédure d'estimation de cette méthode, nous définirons en premier temps la nouvelle représentation de L-comoments en terme de copule selon le théorème suivant

Théorème 3.7.1 Le k ème L -comoments de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$, noté $\delta_{k[12]}$ est donné

par :

$$\delta_{k[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_k(u_2), \text{ pour tout } k \geq 1. \quad (3.37)$$

où $\delta_{k[12]}$ peut être écrite :

$$\delta_{k[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} u_1 P_k(u_2) dC(u_1, u_2),$$

et le kème L -comment de $X^{(2)}$ par rapport à $X^{(1)}$, noté $\delta_{k[21]}$ est donné par :

$$\delta_{k[21]} = \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_2 dP_k(u_1), \text{ pour tout } r \geq 1. \quad (3.38)$$

Preuve. On peut prouver ce théorème à l'aide de la définition de L -comoment, d'où :

$$\begin{aligned} \lambda_{k[12]} &= \text{Cov}(X^{(1)}, P_r(F_2(X^{(2)}))) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [F_{12}(x^{(1)}, x^{(2)}) - F_1(x^{(1)})F_2(x^{(2)})] dx^{(1)} dP_k F_2(x^{(2)}) \end{aligned}$$

par changement de variable, et posons que : $u_1 = F_1(x^{(1)})$ et $u_2 = F_2(x^{(2)})$, alors :

$$\lambda_{k[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} [F_{12}(F^{-1}(u_1), F^{-1}(u_2)) - u_1 u_2] du_1 dP_k u_2$$

d'après le théorème de Sklar (1.1.1), nous avons $F_{12}(F^{-1}(u_1), F^{-1}(u_2)) = C(u_1, u_2)$. donc on obtient (3.37). ■

Exemple 3.7.3 Les premiers L -comment de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \delta_{1[12]} &= 2 \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2} \\ \delta_{2[12]} &= 6 \int_{\mathbb{I}^2} (2u_2 - 1) C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2} \\ \delta_{3[12]} &= 6 \int_{\mathbb{I}^2} (10u_2^2 - 10u_2 + 2) C(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Procédure d'estimation : La procédure d'estimation est effectuée par les étapes suivantes :

1. Calculer les L-comoments $\delta_{k[12]}$ par (3.37) pour une copule C_θ choisie,
2. Calculer l'estimateur de $\hat{\delta}_{k[12]}$ par :

$$\hat{\delta}_{k[12]} = n^{-1} \sum_{i=1}^n F_{1:n}^*(X_i^{(1)}) P_k \left(F_{2:n}^*(X_i^{(2)}) \right),$$

telle que $F_{j:n}^* = nF_{j:n}/(n+1)$ est la fonction empirique corrigée correspond de $F_{j:n}(x_j) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1 \left(X_i^{(j)} \leq x_j \right)$,

3. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \delta_{1[12]}(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\delta}_{1[12]} \\ \delta_{2[12]}(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\delta}_{2[12]} \\ \vdots \\ \delta_{r[12]}(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\delta}_{r[12]} \end{cases} \quad (3.39)$$

La solution de ce système nous donne un estimateur sans biais de θ , noté $\hat{\theta}^{BLM}$, où $\hat{\theta}^{BLM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$.

3.8 Outils graphiques pour modéliser la dépendance

3.8.1 Dépendogramme

Le dépendogramme représente la structure de dépendance sous la forme du nuage de points des marges uniformes (u_1, u_2) extraites de l'échantillon ou encore de simulations d'une copule théorique. Précisons que les couples (u_1, u_2) issues de l'échantillon forment ce que nous appellerons la copule empirique. Cette dernière est simplement définie par les statistiques de rang issues de l'échantillon. Nous comparerons le dépendogramme de cette

copule empirique à celui d'autres copules théoriques estimée sur l'échantillon. Le dépendogramme permet d'observer aussi le caractère plus ou moins simultané des réalisations issues de l'échantillon. Dans les queues plus précisément, il sera utile d'analyser si la simultanéité est forte et donc s'il est nécessaire de calibrer sur notre échantillon une copule avec une dépendance de queue.

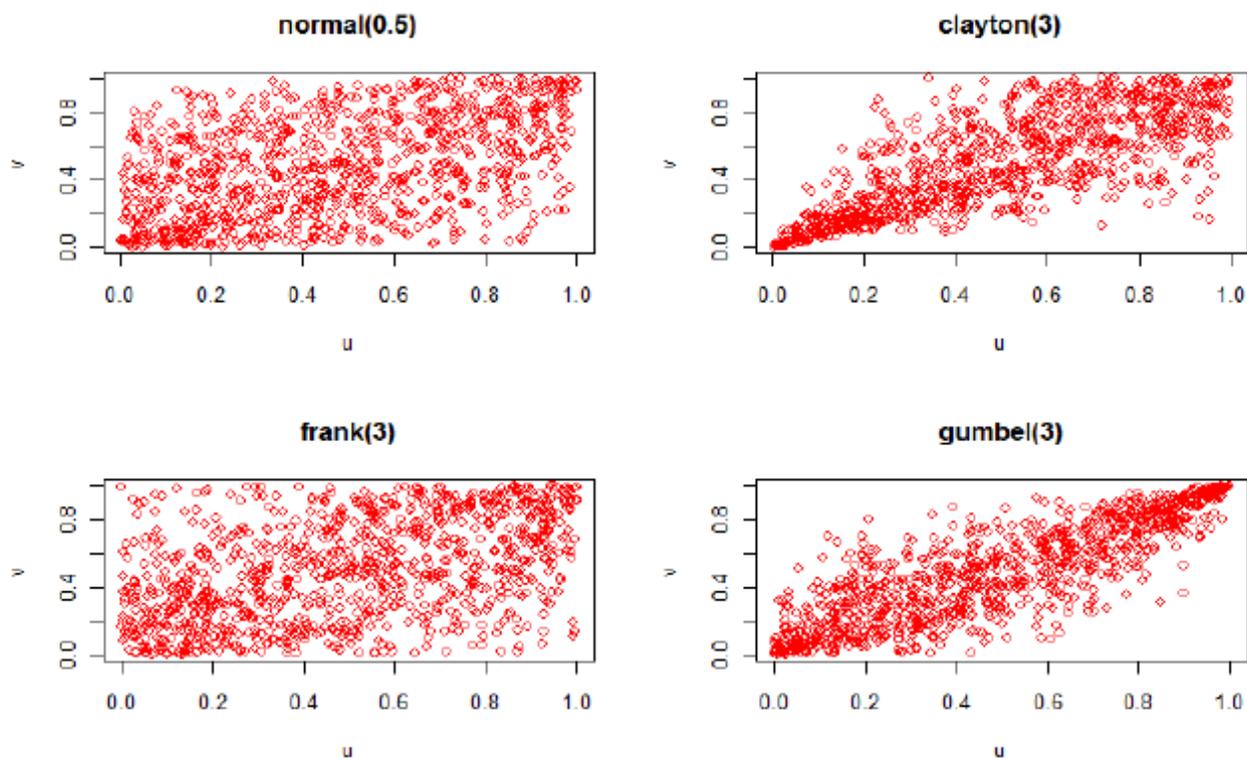


FIG. 3.1 – Dépendogrammes pour des données simulées à partir de 4 copules différentes ($n=1000$).

3.8.2 Kendall plot

Le Kendall plot va permettre une comparaison plus directe entre la copule empirique et la copule théorique. L'algorithme de construction d'un Kendall plot est le suivant :

1. Calculer pour chaque paire des observations des rangs de l'échantillon (u_i, v_i) la

fonction H_i suivante :

$$H_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{(u_j \leq u_i, v_j \leq u_i)}, \quad \text{pour } i \neq j,$$

telle que $1 \leq i \leq n$ avec n la taille de l'échantillon, en suite on ordonne les H_i par ordre croissante, c'est à dire $H_{(1)} \leq \dots \leq H_{(n)}$. Donc on obtient la partie empirique de K-plot

2. Déterminer $H_{i:n}^{th} = \mathbb{E}(H_{(i)}^{th})$, telle que

$$H_i^{th} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{(u_j^{th} \leq u_i^{th}, v_j^{th} \leq u_i^{th})}, \quad \text{pour } i \neq j,$$

pour chaque couple (u_i^{th}, v_i^{th}) issu de la copule théorique. Ainsi, on simule n couples réalisations de la copule théorique m fois, on détermine H_i^{th} pour chaque $m - i^{\text{ème}}$ simulation, que l'on ordonne ensuite, et enfin on calcule l'espérance des mH_i^{th} pour chaque i , et l'on obtient $H_{i:n}^{th}$.

3. Il reste à grapher les paires $(H_{(i)}, H_{i:n}^{th})$.

Plus le Kendall plot se rapproche d'une droite, plus l'ajustement entre la structure de dépendance de l'échantillon et la copule estimée sur ce même échantillon est bon. [40]

Remarque 3.8.1 1. *On observe que toute les méthodes d'estimations donnent des estimateurs sans biais et vérifient la normalité asymptotique.*

2. *La méthode d'inversion de tau de Kendall et d'inversion de rho de Spearman est applicable pour les copules qui ont un seul paramètre ; c'est à dire si le paramètre de dépendance $\theta \in \mathbb{R}$.*

3. *D'autres méthodes d'estimation de copule, telle que l'estimation de copules de valeurs extrêmes ont cité dans d'autre travaux (voir comme exemple [13], [15] et [45]).*

Chapitre 4

Bivariate Copulas Parameters Estimation Using The Trimmed L-moments Method

Abstract¹ : The main purpose of this paper is to use the trimmed L-moments method for the introduction of a new estimator of multiparametric copulas in the case where the mean does not exist. The consistency and asymptotic normality of this estimator is established. An extended simulation study shows the performance of the new estimator is carried.

Key words : Copulas ; Dependence ; Bivariate L-moments, Trimmed L-moments, Trimmed L-comements.

4.1 Introduction and motivation

Let (X_1, X_2) be a 2-dimensional vector with joint distribution function (df) $H(x_1, x_2)$ and margins $F_j(x_j)$, $j = 1, 2$. Under the Theorem of Sklar [94] we can link F and the F_j 's by

¹Ce chapitre est un article publié dans Journal Afrika Statistika, vol 12(1), 2017, page 1185–1197. (Auteurs : A.Chine, F. Benatia)

a function C called copula, which is defined from $[0, 1]^2$ to $[0, 1]$ as follows

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

where the Copula C is the joint df with uniform margins $U = (U_1, \dots, U_d)$ with $U_j = F_j(X_j)$, defined by

$$C(u_1, u_2) = H((F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)),$$

where $F_j^{-1}(s) := \inf \{x : F_j(x) \geq s\}$ is the generalized inverse function of F_j .

The copula function also describes and models the dependence structure of a multivariate data set. It characterizes many properties as the symmetry and the invariance transform. The importance of these two properties appears in measuring of association such as Kendall's tau and Spearman's rho written in terms of copula, by

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_{\mathbb{I}^2} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1, \\ \rho &= 12 \int_{\mathbb{I}^2} u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Many parametric copula families have been introduced and applied in different fields such as insurance, medical science, hydrology and survival analysis (see, e.g., [33], [20] and [42]). Among these families, we have the archimedean copula class which has been named by [73], they have found many successful applications like the actuarial and survey actuarial applications, in finance ([17], [79] and [18]). This class of copulas has a nice properties, as : the ease with which it can be constructed ; the great variety of families of copulas which it contains (see, [78, p.109]). A bivariate Archimidean copula is defined by

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)),$$

where φ is a positive continuous function, strictly decreasing on $[0, 1]$ called generator with

pseudo inverse φ^{-1} .

Many families of Archimedean copulas are cited in [78, Table 4.1, p.116-p119] such as gumbel copula, defined by

$$C_\beta(u_1, u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\beta + (-\ln u_2)^\beta\right]^{1/\beta}\right), \quad \beta \geq 1, \quad (4.2)$$

with generator

$$\varphi(s) = (-\ln s)^\alpha \quad \text{and} \quad \varphi^{-1}(s) = \exp(-s)^{1/\alpha}.$$

Also, a very popular family applied in engineering and medical fields called the FGM copulas (see [7]). For a dependence parameter α with $|\alpha| \leq 1$ it is defined by

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 \bar{u}_1 \bar{u}_2, \quad (4.3)$$

where $\bar{u}_j = 1 - u_j$, $j = 1, 2$, Johnson (1979) [64] introduced the $(r - 1)$ -iterated FGM family with r -dimensional parameter $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ as

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \sum_{j=1}^r \alpha_j (u_1 u_2)^{[j/2]+1} (\bar{u}_1 \bar{u}_2)^{[j/2+1/2]} \quad (4.4)$$

where $[t]$ denotes the integer part of t , for $r = 2$, we obtain one iterated FGM copula with two parameters, given by

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \alpha_1 \bar{u}_1 \bar{u}_2 + \alpha_2 u_1 u_2 \bar{u}_1 \bar{u}_2), \quad (4.5)$$

and the range of parameters (α_1, α_2) is given by the region

$$\mathcal{R} = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha_1| \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 \geq -1, \alpha_2 \leq \frac{1}{2} [3 - \alpha_1 + (9 - 6\alpha_1 - 3\alpha_1^2)^{1/2}] \right\}.$$

Suppose that the parametric copula C belongs to a class \mathcal{C} where $\mathcal{C} := \{C_\theta : \theta \in \mathcal{O}\}$ and \mathcal{O}

is an open subset of \mathbb{R}^r for $r \geq 1$. The problem of estimating θ under this assumption has already been the object of much work, beginning with classical methods : fully maximum likelihood (ML), Pseudo maximum likelihood (PML) and Inference function of margins (IFM) (see [36], [62]). (τ, ρ) -inversion methods [79], [39]. Minimum distance (MD) (see [96], [6]) which is based on : the empirical copula process, Kendall's dependence function which is proposed by Genest et.al (2006) [41] and Rosenblatt's probability integral transform proposed by Rosenblatt (1952) [83]. Many comparative studies between these methods were discussed in the literature such as in [65]) and [49]. Semi parametric estimation methods for multi-parametric copulas were also discussed by [9], [4] and [10] based on moments (CM) and copula L-moments (CLM). They noted that these methods are quick and dos not use the density function and therefore no boundary problems arise. In a comparative simulation study, they concluded that the PML and the CM based estimation perform better than the (τ, ρ) -inversion method and the main feature of CM and CLM methods is that they provide estimators with explicit forms.

The aim of this paper is to estimate the dependence and the marginals parameters using a new representation of TL-moments. This method is analogous to bivariate L-comoment method where the largest value is removed from the conceptual sample to study its influence on biais and root mean squared error (RMSE).

This paper is structured as follows. In Section 4.2 we present a brief introduction of L-moments and L-comments, and we discuss the representation of bivarite L-moments in terms of copula and by analogy we presents bivariate Trimmed L-moments. Section 4.3 consecrated to the parameter estimation procedures, and an illustrative examples with simulation study. Consistency and asymptotic normality is relegated to Section 4.4.

4.2 Bivariate Trimmed L-comoments

The L-moments play an important role to describe the characteristics of a probability distribution as : location, scale and shape. They are related to expected values of order statistics and was first introduced and defined by Hosking (1990) [57]. For $Y_{1:r}, \dots, Y_{r:r}$ denoting the ordered observations for a sample of size r from a univariate distribution, the r th L-moment λ_r is defined as

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E}(Y_{r-k:r}), \quad (4.6)$$

where

$$\mathbb{E}(Y_{r-k:r}) = \frac{r!}{(r-k-1)!k!} \int_{[0,1]} F_Y^{-1}(u) u^{r-k-1} (1-u)^k du. \quad (4.7)$$

By Substitution into (4.6) of a standard expression for the expected value of an order statistic (4.7) yields the follow representation of L-moments

$$\lambda_r = \int_{[0,1]} F_Y^{-1}(u) P_{r-1}(u) dFu, \quad (4.8)$$

where $P_r(u) := \sum_{k=0}^r p_{r,k} u^k$, with $p_{r,k} = (-1)^{r+k} (r+k)! / [(k^2)!(r-k)!]$, presente the shifted Legendre polynomials. The orthogonality of P_{k-1} and using $P_0 \equiv 1$ leads to a representation of (4.8) in terms of covariance

$$\lambda_r = \begin{cases} \mathbb{E}[Y], & r = 1 \\ Cov(Y, P_{r-1}(F_Y(y))), & r \geq 2 \end{cases} \quad (4.9)$$

Hosking (2007) [58] showed that L-moments have the advantage that they exist whenever the mean of the distribution exists, even though some higher moments may not exist, and are relatively robust to the effects of outliers. However, there are some applications for

which these advantages are insufficient. Some kinds of data, such as loss distributions in insurance and traffic volumes on computer networks, involve distributions with very heavy tails, such that there may be doubts about whether even the first moment exists. For these applications, it would be useful to have measures analogous to L-moments that remain meaningful for distributions that have no mean. This measure is the TL-moments, which is defined by Elamir (2003)[29] as a generalization of L-moments where they replace the expected value $\mathbb{E}[Y_{r-k:r}]$ by $\mathbb{E}[Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}]$. Thus TL-moments noted, $\lambda_r^{(t_1, t_2)}$ are given as follows

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r-1)!}{k!(r-k-1)!} \mathbb{E}[Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}], r = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

where t_1 and t_2 are positive integers. The case $t_1 = t_2 = 0$ yields the original L-moments. An analogous result for trimmed L-moments presented by Hosking (2007) [58] by using shifted Jacobi polynomials, so (4.10) may be written as

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \int_{[0,1]} F_Y^{-1}(u) P_{r-1}^{*(t_1, t_2)}(u) du, \quad (4.11)$$

where

$$P_{r-1}^{*(t_1, t_2)}(u) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{rk!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!} u^{r+t_1-k-1} \{1-u\}^{t_2+k},$$

also shifted Jacobi polynomials are orthogonal on $[0, 1]$ with weight function $u^{t_1}(1-u)^{t_2}$.

For $r = 1, 2, 3$ and $t_1 = 0, t_2 = 1$, we get

$$\begin{aligned} P_0^{*(0,1)}(u) &= 2(1 - u), \\ P_1^{*(0,1)}(u) &= (3/2)(4u - 3u^2 - 1), \\ P_2^{*(0,1)}(u) &= \frac{4}{3}(-10u^3 + 18u^2 - 9u + 1), \\ P_3^{*(0,1)}(u) &= \frac{5}{4}(-35u^4 + 80u^3 - 60u^2 + 16u - 1), \end{aligned}$$

and the first TL-moments are given as follows

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0,1)} &= 2 \int_{[0,1]} F_Y^{-1}(u)(1 - u)du, \\ \lambda_2^{(0,1)} &= (3/2) \int_{[0,1]} F_Y^{-1}(u)(4u - 3u^2 - 1)du \\ \lambda_3^{(0,1)} &= (4/3) \int_{[0,1]} F_Y^{-1}(u)(-10u^3 + 18u^2 - 9u + 1)du \end{aligned} \quad (4.12)$$

The multivariate L-moments are discussed by Serfling (2007) [91] and a new representation in terms of copula are given by Brahim (2014) [10]. We present in the following the bivariate case and all results are considered for multivariate random variables.

Let $(X^{(1)}, X^{(2)})$ have a joint distribution function F and marginals F_1, F_2 , with finite mean and L-moment sequences $\{\lambda_r^{(1)}\}$ and $\{\lambda_r^{(2)}\}$. Using the covariance representation for L-moments in (4.9) the r th L-comoment of $X^{(1)}$ with respect to $X^{(2)}$ is defined by

$$\lambda_{r[12]} = Cov(X^{(1)}, P_r(F_2(X^{(2)})) \quad (4.13)$$

and by the same the r th L-comoment of $X^{(2)}$ with respect to $X^{(1)}$ is defined by

$$\lambda_{r[21]} = Cov(X^{(2)}, P_r(F_1(X^{(1)})).$$

For $X^{(1)} = X^{(2)}$, yields the L-moments λ_r and when $X^{(1)}, X^{(2)}$ are independent, $\lambda_{r[21]} = 0$,

all $r \geq 2$. Brahim (2014) [10] showed that if F belongs to a parametric family of dfs then the r th L-comoment $\lambda_{r[12]}$ will depend on the parameters relies the marginals and the dependence structure between $X^{(1)}$ and $X^{(2)}$, they gave a new representation of L-comoments, depend only on the estimation of parameter dependence, so they defined the L-comoments in terms of marginals distribution function $F(X^{(j)}), j = 1, 2$. Then the r th L-comoments $\delta_{r[12]}$ of $F(X^{(1)})$ with respect to $X^{(2)}$ is given as follows

$$\delta_{r[12]} = Cov(F(X^{(1)}), P_r(F_2(X^{(2)})), \quad r = 1, 2, \dots$$

and the r th L-comoments $\delta_{r[21]}$ of $F(X^{(2)})$ with respect to $X^{(1)}$ is given as follows

$$\delta_{r[21]} = Cov(F(X^{(2)}), P_r(F_2(X^{(1)})), \quad r = 1, 2, \dots$$

This representation leads to the following representation in terms of copula C , according ([10, Theorem 3.1]) where

$$\delta_{r[12]} = \int_{\mathbb{I}^2} (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 dP_r(u_2), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

As example, the first bivariate copula L-comoments of $X^{(1)}$ with respect to $X^{(2)}$ for copula C_θ with three parameters $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ are

$$\begin{aligned} \delta_{1[12]} &= 2 \int_{\mathbb{I}^2} C_\theta(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2} \\ \delta_{2[12]} &= 6 \int_{\mathbb{I}^2} (2u_2 - 1) C_\theta(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2} \\ \delta_{3[12]} &= \int_{\mathbb{I}^2} (60u_2^2 - 60u_2 + 12) C_\theta(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

observe that the $\lambda_{r[12]}, \lambda_{r[21]}$ exist under two conditions as Serfling (2007)[91] showed : the first one is the existence of mean ($\mathbb{E}(X^{(j)}) < \infty$) and the second the existence of all L-moments so in that case we can not apply it on distributions with infinite means as

Cauchy distribution where its mean is not finite and the L-moments λ_r exist for $r \geq 2$. In this paper we propose an alternative modification of (4.13) in which $P_r(F_j(X^{(j)}))$ is replaced by $P_{r-1}^{*(t_1, t_2)}(F_j(X^{(j)}))$, $j = 1, 2$. Then the representation of $\lambda_{r[12]}^{(t_1, t_2)}$, $\lambda_{r[21]}^{(t_1, t_2)}$ defined in the following proposition.

Proposition 4.2.1 *Let $(X^{(1)}, X^{(2)})$ have a joint distribution function F belongs to a parametric family of df's and marginals F_1, F_2 . Using the covariance representation for TL-moments in (4.9), so the r th TL-comoment of $X^{(1)}$ with respect to $X^{(2)}$ is defined by*

$$\lambda_{r[12]}^{(t_1, t_2)} = \int_{\mathbb{I}^2} F_1^{-1}(u_1) P_{r-1}^{*(t_1, t_2)}(u_2) dC(u_1, u_2). \quad (4.16)$$

and the r th L-comoment $\lambda_{r[21]}^{(t_1, t_2)}$ of $F(X^{(2)})$ with respect to $X^{(1)}$ is defined as follows

$$\lambda_{r[21]}^{(t_1, t_2)} = \int_{\mathbb{I}^2} F_2^{-1}(u_2) P_{r-1}^{*(t_1, t_2)}(u_1) dC(u_1, u_2). \quad (4.17)$$

Calculating the first TL-comoments for $t_1 = 0, t_2 = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \lambda_{1[12]}^{(0,1)} &= 2 \int_{\mathbb{I}^2} F^{-1}(u_1) (1 - 2u_2) dC(u_1, u_2), \\ \lambda_{2[12]}^{(0,1)} &= (3/2) \int_{\mathbb{I}^2} F^{-1}(u_1) (4u_2 - 3u_2^2 - 1) dC(u_1, u_2) \\ \lambda_{3[12]}^{(0,1)} &= (4/3) \int_{\mathbb{I}^2} F^{-1}(u_1) (-10u_2^3 + 18u_2^2 - 9u_2 + 1) dC(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.3 Illustrative example and simulation study

As an illustrative example, we choose the FGM copula (4.3) and (4.4) and Archimedean copulas (Gumbe copula given in (4.2)) with two different marginals : Cauchy and Pareto laws.

4.3.1 FGM-copulas with Cauchy marginals

Let X, Y two random variables with Cauchy distribution with two parameters μ and σ , then their distribution functions are defined by

$$F_{\mu_1, \sigma_1}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2}, \quad F_{\mu_2, \sigma_2}(y) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \frac{1}{2},$$

with quantile function

$$Q(u_1) = \mu_1 + \sigma_1 \tan\left(\pi\left(u_1 - \frac{1}{2}\right)\right), \quad Q(u_2) = \mu_2 + \sigma_2 \tan\left(\pi\left(u_2 - \frac{1}{2}\right)\right),$$

then we have a joint distribution function with three parameters as follows

$$F_{\alpha, \mu, \sigma}(x, y) = C_\alpha(F_{\mu_1, \sigma_1}(x), F_{\mu_2, \sigma_2}(y)),$$

where C_α in that case is the one-parameter FGM copula (4.3), so by using (4.18) and (4.14), we get the following results

$$\begin{aligned} \lambda_{1[12]}^{(0,1)} &= \mu_1, \quad \lambda_{1[21]}^{(0,1)} = \mu_2, \\ \lambda_{2[12]}^{(0,1)} &= \frac{1}{24}\pi\alpha\sigma_1, \quad \lambda_{2[21]}^{(0,1)} = \frac{1}{24}\pi\alpha\sigma_2 \\ \delta_{1[12]} &= \frac{1}{18}\alpha, \end{aligned} \tag{4.19}$$

the parameters may be written as

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_{1[12]}^{(0,1)}, \quad \mu_2 = \lambda_{1[21]}^{(0,1)} \\ \sigma_1 &= \frac{4}{3\pi\delta_{1[12]}}\lambda_{2[12]}^{(0,1)} \\ \sigma_2 &= \frac{4}{3\pi\delta_{1[12]}}\lambda_{2[21]}^{(0,1)} \\ \alpha &= 18\delta_{1[12]} \end{aligned} \tag{4.20}$$

when taking the same marginals and FGM copula with two parameters (4.5), and using the same system, we obtain

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1[12]}^{(0,1)} &= (4.43 \times 10^7) \sigma_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + \mu_1, \\
 \lambda_{1[21]}^{(0,1)} &= (4.43 \times 10^7) \sigma_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \mu_2 \\
 \lambda_{2[12]}^{(0,1)} &= \frac{\pi \sigma_1 \alpha_1}{24} + \frac{\pi \sigma_1 \alpha_2}{240}, \\
 \lambda_{2[21]}^{(0,1)} &= \frac{\pi \sigma_2 \alpha_2}{24} + \frac{\pi \sigma_2 \alpha_1}{240} \\
 \delta_{1[12]} &= \frac{\alpha_1}{18} + \frac{\alpha_2}{72} \\
 \delta_{2[12]} &= \frac{\alpha_2}{120}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

so

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \lambda_{1[12]}^{(0,1)} - (4.43 \times 10^7) \frac{\lambda_{2[12]}^{(0,1)} (18\delta_{1[12]} - \frac{59}{3}\delta_{2[12]} + 120\delta_{2[12]})}{(\pi \frac{3}{4}\delta_{1[12]} - \pi \frac{59}{72}\delta_{2[12]} + \pi \frac{1}{2}\delta_{2[12]})} \\
 \mu_2 &= \lambda_{1[21]}^{(0,1)} - (4.43 \times 10^7) \frac{\lambda_{2[21]}^{(0,1)} (18\delta_{1[12]} - \frac{59}{3}\delta_{2[12]} + 120\delta_{2[12]})}{(\pi \frac{3}{4}\delta_{1[12]} - \pi \frac{59}{72}\delta_{2[12]} + \pi \frac{1}{2}\delta_{2[12]})} \\
 \sigma_1 &= \lambda_{2[12]}^{(0,1)} / \left(\pi \frac{3}{4}\delta_{1[12]} - \pi \frac{59}{72}\delta_{2[12]} + \pi \frac{1}{2}\delta_{2[12]} \right), \\
 \sigma_2 &= \lambda_{2[21]}^{(0,1)} / \left(\pi \frac{3}{4}\delta_{1[12]} - \pi \frac{59}{72}\delta_{2[12]} + \pi \frac{1}{2}\delta_{2[12]} \right) \\
 \alpha_1 &= 18\delta_{1[12]} - \frac{59}{3}\delta_{2[12]} \\
 \alpha_2 &= 120\delta_{2[12]}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.3.2 FGM copulas with Pareto marginals

The distribution function of two random variables X, Y of Generalized Pareto law is defined by

$$F_{\gamma_1, \kappa_1}(x) = 1 - \left\{ 1 - \kappa_1 \left(\frac{x}{\gamma_1} \right) \right\}^{\left(\frac{1}{\kappa_1} \right)}, \quad F_{\gamma_2, \kappa_2}(x) = 1 - \left\{ 1 - \kappa_2 \left(\frac{x}{\gamma_2} \right) \right\}^{\left(\frac{1}{\kappa_2} \right)},$$

with quantile functions

$$Q(u_1) = \frac{\gamma_1}{\kappa_1} (1 - (1 - u_1)^{\kappa_1}), \quad Q(u_2) = \frac{\gamma_2}{\kappa_2} (1 - (1 - u_2)^{\kappa_2}).$$

where $\gamma_j, \kappa_j, j = 1, 2$ are scale and shape parameters, so, we obtain a joint distribution function as follows

$$F_{\alpha, \gamma_1, \kappa_1}(x, y) = C_{\alpha}(F_{\gamma_1, \kappa_1}(x), F_{\gamma_2, \kappa_2}(y)),$$

and using the system (4.18), we get

$$\begin{aligned} \lambda_{1[12]}^{(0,1)} &= \left(\frac{\gamma_1}{\kappa_1 + 1} \right) + \frac{1}{3} \frac{-\alpha\gamma_1}{\kappa_1^2 + 3\kappa_1 + 2}, \\ \lambda_{1[21]}^{(0,1)} &= \left(\frac{\gamma_2}{\kappa_2 + 1} \right) + \frac{1}{3} \frac{-\alpha\gamma_2}{\kappa_2^2 + 3\kappa_2 + 2} \\ \lambda_{2[12]}^{(0,1)} &= \frac{\alpha\gamma_1}{4(\kappa_1^2 + 3\kappa_1 + 2)}, \\ \lambda_{2[21]}^{(0,1)} &= \frac{\alpha\gamma_2}{4(\kappa_2^2 + 3\kappa_2 + 2)}, \\ \delta_{1[12]} &= \frac{1}{18}\alpha. \end{aligned} \tag{4.23}$$

then

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{9\delta_{1[12]} \left((\lambda_{1[12]}^{(0,1)} + 12\lambda_{2[12]}^{(0,1)}) \right) - 4\lambda_{2[12]}^{(0,1)}}{2\lambda_{2[12]}^{(0,1)}}, \\ \gamma_1 &= \left(\frac{\lambda_{1[12]}^{(0,1)} + 12\lambda_{2[12]}^{(0,1)}}{\lambda_{2[12]}^{(0,1)}} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_{1[12]}^{(0,1)} + 12\lambda_{2[12]}^{(0,1)}}{\lambda_{2[12]}^{(0,1)}} \right) \\ \kappa_2 &= \frac{9\delta_{1[21]} \left((\lambda_{1[21]}^{(0,1)} + 12\lambda_{2[21]}^{(0,1)}) \right) - 4\lambda_{2[21]}^{(0,1)}}{2\lambda_{2[21]}^{(0,1)}}, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{\lambda_{1[21]}^{(0,1)} + 12\lambda_{2[21]}^{(0,1)}}{\lambda_{2[21]}^{(0,1)}} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_{1[21]}^{(0,1)} + 12\lambda_{2[21]}^{(0,1)}}{\lambda_{2[21]}^{(0,1)}} \right) \\ \delta_{1[12]} &= \frac{1}{18}\alpha. \end{aligned} \tag{4.24}$$

4.3.3 Semi parametric TL-moment estimation

Let $(X_i^{(1)}, X_i^{(2)})$ a random sample of r.v $X = (X^{(1)}, X^{(2)})$, with empirical marginal distribution functions

$$F_{j:n}(x_j) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1 \{X_i^{(j)} \leq x_j\}, j = 1, 2$$

and $F_{j:n}^*(X_i^{(1)}) = nF_{j:n}/(n+1)$.

The estimation procedure consists of two steps :

1. Estimating the dependence parameters by solving the system

$$\begin{cases} \delta_{1[12]}(\theta_1, \dots, \theta_l) = \hat{\delta}_{1[12]} \\ \delta_{2[12]}(\theta_1, \dots, \theta_l) = \hat{\delta}_{1[12]} \\ \vdots \\ \delta_{l[12]}(\theta_1, \dots, \theta_l) = \hat{\delta}_{l[12]} \end{cases} \quad (4.25)$$

where

$$\hat{\delta}_{r[12]} = n^{-1} \sum_{i=1}^n F_{1:n}^*(X_i^{(1)}) P_r(F_{2:n}^*(X_i^{(2)})). \quad (4.26)$$

2. Estimating the marginals parameters by substitution the value of $\hat{\theta}$ in terms of $\hat{\delta}_{r[12]}$ in $\hat{\lambda}_{r[1,2]}^{(t_1, t_2)}$, where

$$\hat{\lambda}_{r[12]}^{(t_1, t_2)} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{(1)} P_{r-1}^*(F_{2:n}^*(X_i^{(2)})) \quad (4.27)$$

Such example, for FGM copula with Cauchy margins, we have

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 18\hat{\delta}_{1[12]}, \hat{\mu}_1 = \hat{\lambda}_{1[12]}^{(0,1)}, \hat{\sigma}_1 = \frac{4}{3\pi} \hat{\delta}_{1[12]} \\ \hat{\alpha} &= 18\hat{\delta}_{1[12]}, \hat{\mu}_2 = \hat{\lambda}_{1[12]}^{(0,1)}, \hat{\sigma}_2 = \frac{4}{3\pi} \hat{\delta}_{2[12]} \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1 *In some cases, it is not easy to find an explicit formulas for parameters estimation then we solve the system of equation by numerical method.*

Sparman ρ	FGM		Gumbel	
	α_1	α_2	ρ	β
0.001	0.1	0	0.01	1.01
0.208	0.4	0.9	0.5	1.6
0.427	0.941	1.445	0.88	3.45

TAB. 4.1 – True parameters of FGM copula and Gumbel copula used for the simulation study.

4.3.4 Simulation study

In our simulation study we select many different sample sizes with $n = 30, 50$ and 200 to assess their influence on the bias and RMSE of the estimators, and we choose different values of dependence parameters, according the degree of dependence calculated by Spearman's rho (4.1), that is consider three cases, corresponding to weak, moderate and strong dependence Table (4.1) and marginal's parameters. For each choice we make $N = 1000$ repetitions and we compute the estimation bias and RMSE :

$$Bias = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta), \quad RMSE = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta)^2 \right)^{1/2}.$$

We can summarize the procedure of simulation as follows :

1. Determine the value of the parameters, sample sizes n and the number of simulated Samples N .
2. Simulate a sample (u_1, \dots, u_n) of size n from the copula C_α (FGM and Gumbel copulas).
3. Compute the parameter estimates by solving the system (4.25, 4.27).
4. Compare the parameter estimates with the true parameters (presented in Tables 4.2 and 4.3) by computing the biases and RMSE.

$\rho = 0.001$								
n	$\alpha_1 = 0.1$		$\alpha_2 = 0$		$\mu = -1$		$\sigma = 0.5$	
	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE
30	1.600	0.620	1.005	0.552	-0.820	0.510	0.340	0.200
50	1.320	0.430	0.956	0.462	0.610	0.420	0.250	0.105
200	0.507	0.306	0.596	0.382	0.412	0.201	0.210	0.100
$\rho = 0.208$								
n	$\alpha_1 = 0.4$		$\alpha_2 = 0.9$		$\mu = -1$		$\sigma = 0.5$	
	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE
30	0.650	0.340	0.493	0.330	0.613	0.312	0.260	0.201
50	0.520	0.250	0.402	0.250	0.512	0.212	0.120	0.098
200	0.430	0.200	0.360	0.335	0.200	0.100	0.101	0.055
$\rho = 0.941$								
n	$\alpha_1 = 0.941$		$\alpha_2 = 1.445$		$\mu = -1$		$\sigma = 0.5$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
30	0.420	0.301	-1.111	0.420	-0.111	0.076	0.200	0.121
50	0.340	0.210	-0.487	0.357	-0.0780	0.069	0.192	0.098
200	0.201	0.140	-0.250	0.220	0.065	0.032	0.079	0.052

TAB. 4.2 – Bias, RMSE of the dependence and margins estimator of FGM copula with cauchy margins.

$\rho = 0.01$						
n	$\beta = 1.01$		$\gamma = 1.5$		$\kappa = 3$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
30	-0.339	0.276	0.760	0.520	0.811	0.650
50	0.205	0.110	0.494	0.320	0.540	0.320
200	-0.167	0.108	0.201	0.212	0.254	0.214
$\rho = 0.5$						
n	$\beta = 1.6$		$\gamma = 1.5$		$\kappa = 3$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
30	-0.320	0.280	0.420	0.213	0.413	0.376
50	-0.212	0.210	0.315	0.279	0.325	0.301
200	-0.120	0.100	0.202	0.201	0.119	0.260
$\rho = 0.8$						
n	$\beta = 3.45$		$\gamma = 1.5$		$\kappa = 3$	
	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE
30	0.116	0.250	0.210	0.450	0.222	0.310
50	0.109	0.131	0.111	0.320	0.09	0.150
200	0.06	0.110	0.054	0.215	0.06	0.115

TAB. 4.3 – Bias, RMSE of the dependence and margins estimator of Gumbel copula with pareto margins.

4.4 Consistency and asymptotic normality

To study the asymptotic normality of the TL-moments estimator noted $\hat{\theta}^{CTL}$, we put

$$\mathcal{K}_r(u; \theta) = F_i^{-1}(u_i)P_{r-1}^{*(0,1)}(u_j) - \lambda_{r[12]}^{(0,1)}, i, j = 1, 2, i \neq j. \quad (4.28)$$

and

$$\mathcal{K}_r(u; \theta) = (\mathcal{K}_1(u; \theta), \dots, \mathcal{K}_l(u; \theta)).$$

Let θ_0 be the true value of θ and assume that the following assumptions [A1]-[A3] hold.

- [A1] $\theta_0 \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^r$ is the unique zero of the mapping $\theta \rightarrow \int_{[0,1]^d} \mathcal{K}(u; \theta) dC_{\theta_0}(u)$ which is defined from \mathcal{O} to \mathbb{R}^r
- [A2] $\mathcal{K}(\cdot; \theta)$ is differentiable with respect to θ such that the Jacobian matrix denoted by $\dot{\mathcal{K}}(u; \theta) = [\partial \mathcal{K}_r(u; \theta) / \partial \theta_k]_{l \times l}$ and $\dot{\mathcal{K}}(u; \theta)$ is continuous both in u and θ , and the Euclidean norm $|\dot{\mathcal{K}}(u; \theta)|$ is dominated by a dC_{θ} -integrable function.
- [A3] The $r \times r$ matrix $\mathcal{B}_0 := \int_{[0,1]^d} \dot{\mathcal{K}}(u; \theta) dC_{\theta_0}(u)$ is nonsingular.

Théorème 4.4.1 *Assume that the concordance ordering condition (4.9) and assumptions [A1] - [A3] hold. Then, there exists a solution $\hat{\theta}^{CTL}$ to the system (4.11) which converges in probability to θ_0 . Moreover*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^{CTL} - \theta_0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \mathcal{B}_0^{-1} \mathcal{D}_0 (\mathcal{B}_0^{-1})^T), \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &:= \text{var}(\{\mathcal{K}_r(\vartheta; \theta_0) + \mathcal{V}(\vartheta; \theta_0)\}), \\ \mathcal{V}(\vartheta; \theta_0) &= (\mathcal{V}_1(\vartheta; \theta_0), \dots, \mathcal{V}_r(\vartheta; \theta_0)), \end{aligned}$$

with

$$\mathcal{V}_r(\vartheta; \theta_0) = \sum_{j=1}^2 \int_{[0,1]^2} \frac{\partial(C_\theta(u) P_{r-1}^{*(0,1)}(K_\theta(C_\theta)))}{\partial u_j} (1 \{ \vartheta_j \leq u_j \} - u_j) dC_{\theta_0}(u),$$

where ϑ is a $(0, 1)$ -uniform rv.

Remarque 4.4.1 Following [39] and [96] in the case of PML estimator and Z-estimator, one may consistently estimate the asymptotic variance $\mathcal{B}_0^{-1} \mathcal{D}_0 (\mathcal{B}_0^{-1})^T$ by the sample variance of the sequence of rv's

$$\left\{ \hat{\mathcal{B}}_i^{-1} \hat{\mathcal{D}}_i (\hat{\mathcal{B}}_i^{-1})^T, i = 1, \dots, n \right\},$$

where

$$\hat{\mathcal{B}}_i := \int_{[0,1]^2} \dot{\mathcal{K}}(u, \hat{\theta}^{CTL}) dC_{\hat{\theta}^{CTL}}(u),$$

and

$$\hat{\mathcal{D}}_i = \dot{\mathcal{K}}(\hat{U}_i, \hat{\theta}^{CTL}) + V(\hat{U}_i, \hat{\theta}^{CTL}).$$

Conclusion Générale

Les copules présentent un outil puissant à l'analyse multivariée car elles permettent de construire des modèles de distributions multivariées compatibles avec les modèles marginaux unidimensionnels et ceci grâce au théorème de Sklar. Elles permettent aussi la mesure de la dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires tout en restant invariantes sous des transformations strictement monotones de celles-ci.

Dans cette thèse nous avons utilisé la théorie des TL-moments pour la construire d'un nouvel estimateur des paramètres d'une copule. Le principe de cette méthode est résumé dans les points suivants :

1. Définir une nouvelle représentation des TL-moments en terme de copules, cette représentation dépend des paramètres de la copule ainsi que les paramètres des distributions marginales.
2. Estimer les paramètres de dépendance de la copule par la méthode des L-moments qui est proposé par Brahim et al.[10].
3. Estimer les paramètres des distributions marginales par la méthode de TL-comoments.

Comme perspective, on peut citer la détermination du seuil de troncature nécessaire pour une meilleure estimation.

Bibliographie

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I.A. (1972). Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Washington DC.
- [2] Adamowski, K. (2000). Regional analysis of annual maximum and partial duration flood data by nonparametric and L-moment methods. *Journal of Hydrology*. 229, 219-231.
- [3] Balakrishnan, N., Lai, C.D. (2008). Continuous bivariate distribution. Springer-Dodrecht Heidelberg, London.
- [4] Benatia, F., Brahimi, B., and Necir, A. (2011). A semi-parametric estimation procedure for multi-parameter Archimedean copulas based on the L-moments method, *Afrika statistika*. **6**, 335-345.
- [5] Berg, D., Bakken, H. (2005). A goodness-of fit test for copula based on the probability integral transform. Technical Report SAMBA/41/05, Norsk Regnesentral, Oslo, Norway.
- [6] Biau, G., Wegkamp, M. (2005). Minimum Distance Estimation of Copula Densities, *Statistics and Probability Letters*. **73**, 105-114.
- [7] Blischke, W.R., Prabhakar, M. (2000). Reliability modeling, prediction, and optimization, New York, Wiley.
- [8] Borkowf, C. B. (2002). Computing the non null asymptotic variance and the asymptotic relative efficiency of Spearman's rank correlation. *Comput. Stat. Data Anal.* 39, 271–286.

- [9] Brahim, B., Necir, A. (2012). semiparametric estimation of copula models based on the method of moments, *Statistical Methodology*. **9**, 467-477.
- [10] Brahim, B., Chebana, F., and Necir, A. (2014). Copula representation of bivariate Lmoments : a new estimation method for multiparameter two-dimensional copula models, *Theoretical and Applied Statistics*.
- [11] Breyman, W., Dias, A., and Embrechts, P. (2003). Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance. *Quantitative finance*. **3**, 1-14.
- [12] Cadoux, D., Loizeau, J.M. (2004). Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Institut des Actuaires, Paris.
- [13] Capéraà, P., Fougères, A.L., and Genest, C. (1997). A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas. *Biometrika*. **84**, 576-577.
- [14] Capéraà, P., Fougères, A.L., and Genest, C. (2000). Bivariate Distributions with Given Extreme Value Attractor. *Journal of Multivariate Analysis*. **72**, 30-49.
- [15] Capéraà, P., and Fougères, A.L. (2001). Estimation of Bivariate Extreme Value Distribution. *Kluwer Academic Publishers*, **3 :4**, 311-329.
- [16] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. Wiley Finance Series.
- [17] Clayton, D.G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*. **65**, 141-151.
- [18] Cook, R.D., Johnson, M.E., (1981). A family of distributions for modelling nonelliptically symmetric multivariate data, *Royal Statistical Society*. **43**, 210-218.
- [19] Costinot, A., Riboulet, G., and Roncalli, T. (2000). *Stress testing et théorie des valeurs extrêmes : une vision quantifiée du risque extrême*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

- [20] Cui, S., Sun, Y. (2004). Checking for the gamma frailty distribution under the marginal proportional hazards frailty model, *Statistica Sinica*. **14**, 249–267.
- [21] David, H. A., Nagaraja, H. N. (2003). *Order Statistics*, 3rd Edition. Wiley, New York.
- [22] De Haan, D., Ferreira, A. (2006). *Extreme value theory- An introduction*. Springer, New York.
- [23] Deheuvels, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 5th Ser.* **65** :274–292.
- [24] Deheuvels, P. (2009). A multivariate bahadur-kiefer representation for the empirical copula process. *Mat. Inst. Steklov.* **364**, 120- 147.
- [25] Dobric, J., Shmmid, F. (2005). Testing goodness of fit for parametric families of copulas : Application to financial data. *Simulation and Computation.* **43**, 1053-1068.
- [26] Downton, F. (1966). Linear estimates with polynomial coefficients. *Biometrika* **53**, 129–141.
- [27] Drouet, M.D., Kotz, S. (2001). *Correlation and dependence*. Imperial College Press, London.
- [28] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H. (2001). Control charts based on linear combinations of order statistics. *J. Appl. Statist.* **28**, 457–468.
- [29] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H. (2003). Trimmed L-moments, *Computational Statistics & Data Analysis.* **43**, 299 –314.
- [30] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H., (2004). Exact variance structure of sample L-moments. *J. Statist. Plann. Inference* **124**, 337–359.
- [31] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag Berlin.Heidelberg, New York.

- [32] Embrechts, P., Alexander, j., Neil, Mc., and Frey, F. (2005). Quantitative risk management : concepts, techniques and tools. Princeton university press.
- [33] Frees, E.W., and Valdez, E.A. (1998). Understanding relationships using copulas, North American Actuarial. **2**, 1–25.
- [34] Galambos, J. (1975). Order Statistics from sample from multivariate distribution. American Statistics. Associative. 70, 674-680.
- [35] Genest, C. (1986). Copules archimédiennes et famille de loi bidimensionnelle dont les marges sont données. Canadian Journal of statistics. 14, 145-159.
- [36] Genest, C. (1987). Frank’s family of bivariate distributions, Biometrika. **74**, 549-555.
- [37] Genest, C., Rivest, L.P. (1989). A characterization of Gumbel’s family of extreme value distributions, Statistical & probability Letters. **8**, 207-211.
- [38] Genest, C., and Rivest, L.P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. J. Am. Stat. Assoc. 88 (3) , 1034–1043.
- [39] Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, Biometrika. **82**, 543–552.
- [40] Genest, C. and Boies, J.C. (2003). Detecting dependence with Kendall plots. Am. Stat. 57(4), 275-284.
- [41] Genest, C., Quessy, J., and Rémillard, B. (2006). Goodness-of-fit procedures for copula models based on the integral probability transformation, Scandinavian Journal of Statistics. **33**, 337-366.
- [42] Genest, C., Favre, A..C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask, *Hydrologic Engineering Journal*. **12**, 347–368.
- [43] Genest, C., Rémillard, B., Beaudoin, D. (2008). Goodness-of-fit- tests for copulas : A review and a power study. Insurance Mathematics and Economics, 42, in press.

- [44] Genest, C. Rémillard, B. (2008). Validity of the parametric bootstrap for goodness of fit testing in semiparametric models. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques* 44.
- [45] Ghoudi, K., Abdous, B. (2005). Non-parametric estimators of multivariate extreme dependence functions. *Journal of Nonparametric Statistics*. 8, 915–935.
- [46] Gingras, D., Adamowski, K. (1994). Performance of L-moments and nonparametric flood frequency analysis. *Canad. J. Civil Eng.* 21, 856–862.
- [47] Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C., and Wallis, J.R., (1979). Probability weighted moments : definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resour.* 15, 1049–1054.
- [48] Greis, N. P., Wood, E. F. (1981). Regional flood frequency estimation and network design. 19, 589-590..
- [49] Gregor, N. F. (2009). Copula parameter estimation by Maximum-Likelihood and Minimum-Distance estimators , A simulation study.
- [50] Gumbel, E.J. (1960). Distributions des valeurs extrême en plusieurs dimensions, *Institut de Statistique de l'Université de Paris.* 9, 171-173.
- [51] Guttman, N. B. (1993). The use of L-moments in the determination of regional precipitation climates. *Journal of Climate.* 6, 2309-2325.
- [52] Harri, A., Coble, K.H., (2011), Normality testing Two new tests using L-moments : *Journal of Applied Statistics.* 7, 1369–1379.
- [53] Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* 5 Heft. 3,179-233.
- [54] Hollander M., Wolfe, D.A. (1973). *Nonparametric Statistical Methods.* Wiley, New York.

- [55] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R., and Wood, E.F. (1985). Estimation of the generalised extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments. *Technometrics*. 27,251–261.
- [56] Hosking, J. R. M., Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*. 29, 339-349.
- [57] Hosking, J.R.M. (1990). L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of statistics, *Royal Statistical Society*. 52, 105–124.
- [58] Hosking, J.R.M. (2007). Some theory and practical uses of trimmed L-moments. *Statistical Planning and Inference*. 137, 3024–3039.
- [59] Hutchinson, T. P., Lai, C. D. (1990). *Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications*. Adelaide : Rumsby Scientific Publishing.
- [60] Joe, H., Xu, J.J. (1996). *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models*. Dept. of Statistics University of British Columbia, Tech. Rept.166.
- [61] Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, volume 73 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.
- [62] Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Multivariate Analysis Journal*. 94, 401–419.
- [63] Johnson, N. L., Kotz, S. (1972). *Distributions in Statistics : Continuous Multivariate Distributions*. John Wiley & Sons : New York.
- [64] Johnson, N.L., Kotz, S. On some generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions-II : regression, correlation and further generalizations. *Statistical Theory Methods*. 6, 485–496.
- [65] Kim, G., Silvapulle, M., and Silvapulle, P. (2007). Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*. 5, 2836-2850.

- [66] Klemelä, J. (2009). Smoothing of Multivariate Data : Density Estimation and Visualization. Willey finance.
- [67] Kimeldorf, G., Sampson, A. (1975) One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals. Comm Statist A Theory Methods 4, 293-301.
- [68] Kruskal, W.H. (1958). Ordinal measures of association. J Amer Statist Assoc. 53, 814-861.
- [69] Lancaster, H.O. (1982). Dependence, Measures and indices. In : Encyclopedia of Statistical Sciences, Volume 2, S. Kotz and N.L. Johnson (eds.), pp. 334–339. John Wileyand Sons, New York.
- [70] Landwehr, J.M., Matalas, N.C., and Waliss, J.R. (1979). Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles. Water Resources Research. 5, 1055-1064.
- [71] Lehmann EL. (1966). Some concepts of dependence. Ann Math Statist. 37,1137-1153.
- [72] Lehmann EL (1975) Nonparametrics : Statistical Methods Based on Ranks. Holden Day, San Francisco.
- [73] Ling, C.H. (1965). Representation of associative functions. Publ Math. Debrecen. **12**, 189–212.
- [74] Marshall, A. W., Olkin, I. (1967). A generalized bivariate exponential distribution. Journal of Applied Probability. 4, 291-302.
- [75] Malevergne, Y., Sornette, D. (2003). testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependences. Quantitative finance. 3(4), 231-250.
- [76] Meylan, P., Favre, A.C., and Musy, A. (2008). Hydrologie fréquentielle : Une science prédictive. Presses polytechniques et universitaires romandes.

- [77] Nelsen, R. B. (1991). Copulas and association Advances in Probability Distributions with Given Marginals. Academic Press, 51-74.
- [78] Nelsen, R.B. (2006). An introduction to copulas, second edition. Springer, New York.
- [79] Oakes, D. (1982). A model for association in bivariate survival data, Royal Statistical Society. 414-422.
- [80] Pilon, P.J., Adamowski, K. (1992). The value of regional information to flood frequency analysis using the method of L-moments. Canad. J. Civil Eng. 19, 137–147.
- [81] Rakotomalala, C.K. (2008). Les fonctions copules en finance. Sorbonnes, Paris.
- [82] Resnick, S.I. (1997). Heavy tail modeling and teletraffic data. Ann. Statist. 25, 1805–1869.
- [83] Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. Annals of Mathematical Statistics. **23**, 470-472.
- [84] Rüschendorf, L. (2009). On the distributional transform, Sklar’s theorem, and the empirical copula process. J. Statist. Plann. Inference, 139(11), 3921-3927.
- [85] Salvadori, G., Demichele, C. (2007). On the use of copulas in hydrology : theory and practice. Journal of Hydrology Engineering. 12, 369-380.
- [86] Samara, B., Randles, R. H. (1988) . A test for correlation based on Kendall’s tau. Commun. Stat : Theory Meth. 17 (9), 3191–3205.
- [87] Scarsini, M. (1984). On measures of concordance. Stochastica. 8, 201-218.
- [88] Schweizer, B., Sklar, A. (1961). Associative functions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen. 8, 169–186.
- [89] Schweizer, B., Wolf, E. (1981). On non-parametric measures of dependence for random variables. Ann. Statist. 9, 879–885.

- [90] Serfling, R.J. (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. John Wiley& Sons, New York.
- [91] Serfling, R., Xiao, P. (2007). A Contribution to multivariate L-moments, L-comoment matrices. *Multivariate Analysis*. **98**, 1765–1781.
- [92] Sillitto, G.P. (1951). Interrelations between certain linear systematic statistics of samples from any continuous population. *Biometrika* 38, 377-382.
- [93] Sillitto, G.P. (1969). Derivation of approximations to the inverse distribution function of a continuous univariate population from the order statistics of a sample. *Biometrika* 56, 641–650.
- [94] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Univ. Paris*. **8**, 229-231.
- [95] Tawn, J.A. (1988). Bivariate extreme value theory : Models and estimation. *Biometrika*. 75, 397-415.
- [96] Tsukahara, H. (2005). Semiparametric estimation in copula models, *Canadian Journal of Statistics*. **33**, 357–375.
- [97] Van de hoek, J., Sherris, M. (2006). A flexible approach to multivariate risk modelling with a new class of copulas. *Insurance Mathematics and Economics*. 39, 398-399.
- [98] Vincent, G. (2012). Introduction à la programmation en R. Troisième édition. École d'actuariat, Université Laval.
- [99] Vogel, R.M., Fennessey, N.M. (1993). L-moment diagram should replace product moment diagram. *Water Resour. Res.* 29, 1745–1752.
- [100] Vose, D. (2008). Risk analysis : a quantitative guide. John Wiley and sons, England.

- [101] Willinger, W., Paxson, V., and Taqqu, M.S. (1998). Self-similarity and heavy tails : structural modeling of network traffic. In : Adler, R., Feldman, R., Taqqu, M.S. (Eds.), A Practical Guide to Heavy Tails. Birkhäuser, Boston, pp. 27–53.
- [102] Wolff, E.F. (1977). Measures of Dependence Derived from Copulas. Ph.D. thesis. University of Massachusetts. Amherst.
- [103] Yang, S. S. (1977). General distribution theory of the concomitants of order statistics. *Annals of Statistics*. 5, 996–1002.
- [104] Yannick, M., Sornette, D. (2006). Extreme financial risks : from dependence to risk management. Birkhäuser.

Annexe A : Language R

Le logiciel **R** est un langage de programmation et un environnement mathématique utilisé pour le traitement de données et l'analyse statistique. Le téléchargement de ce logiciel est très facile est disponible par le site web : www.r-project.org, ainsi pour obtenir des informations sur l'installation, les calculs et la programmation. Ce logiciel contient des packages (paquets) de base trouvés dans toute les versions, et des packages correspond avec quelque versions, telle que le package Copula.

Packages utilisés : Les packages utilisés dans ce travail sont : **Copula**, **Lmomco**, **BB** et **Mass**. En particulier ces packages sont compatibles avec la version **R.3.3.0**. Telle que :

Copula : ce paquet contient toute fonctions dépend de copule : simulation de copule, densité de copule, graphe de copule (**dépendogramme**, **densité** et **contour**), estimation de copule et test d'ajustement.

Lmomco : ce paquets nous permet de calculer les L-moments, TL-moments théoriques et empiriques avec les rapports de L-moments et TL-moments.

BB : Pour résoudre un système d'équation non linéaire, nous pouvons utilisé ce paquet avec les fonctions **bbsolve**, **dfsane**,....

Mass : Toute fonction dépend de statistique se trouvent dans ce paquet. La fonction qu'on a utilisé dans notre programme et la fonction **area** qui nous permet de calculer les intégrales simples et doubles.

Comme un guide sur logiciel **R** (voir [98]).

Annexe B : Abréviations et Notations

Symbole	Signification
al	: autre
v.a	: variable aléatoire
i.i.d	: indépendantes identiquement distribuées
ssi	: si seulement si
\mathbb{I}	: $[0, 1]$
$\mathbb{E}(X)$: Espérance de X
$Cov(X, Y)$: Covariance de X et Y
σ_X	: Ecart type de X
$P.P$: convergence presque par tous
\xrightarrow{d}	: converge en distribution
H, F_i	: Fonction de répartition jointe et marginales
h, f_i	: Densité jointe et marginales
α, β et θ	: Paramètres de dépendance de la copule
C, C_θ, c_θ	: Copule et copule paramétrique et densité de copule
Π, M, W	: Copules prouit, min et max
C^A	: Copule Archimédienne
C^*	: Copule de valeurs extrême

C_n, \tilde{C}_n	: Copule empirique
F-G-M	: Farlie-Gumbel-Morgenstern
$\tau_{X,Y}, \tau_C, \tau_\theta$: Tau de Kendall
$\rho, \rho_{X,Y}, \rho_\theta$: Rho de Spearman
τ_n, ρ_n	: Tau de Kendall et rho de Spearman empiriques
$\mathbf{r}_{X,Y}$: Coefficient de corrélation linéaire
ϕ	: Fonction de la loi normale standard
$\phi_{\mathbf{r}}$: Fonction de la loi normale bivariée
$\kappa_{X,Y}, \delta_{X,Y}$: Mesures de concordance et de dépendance
Y_1, \dots, Y_r	: Echantillon conceptuel de taille r
X_1, \dots, X_n	: Echantillon de taille n de la v.a X
$X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$: Statistique d'ordre associé à un échantillon X_1, \dots, X_n
$Y_{r:n}$: $r^{\text{ème}}$ statistique d'ordre
λ_r	: $r^{\text{ème}}$ L-moments
$\lambda_r^{(t_1, t_2)}$: $r^{\text{ème}}$ TL-moments
$\lambda_{r[1,2]}$: $r^{\text{ème}}$ L-comoments de $X^{(1)}$ par rapport à $X^{(2)}$
$\lambda_{r[2,1]}$: $r^{\text{ème}}$ L-comoments de $X^{(2)}$ par rapport à $X^{(1)}$
l_r	: TL-moments empirique
$l_r^{(t_1, t_2)}$: TL-moments empirique
$\tau_r, \tau^{(t_1, t_2)}$: Rapports de L-moments et TL-moments
PWM	: Moments de probabilité pondérés
$P_r, P_r^{*(t_1, t_2)}$: Coefficients de polynômes de Legendre et de Jacobi déplacés
$L - CV$: L -variation
GLO	: Loi logistique généralisée
GEV	: Loi de valeurs extrême généralisée
GPA	: Loi de Pareto généralisée

- $PE3$: Loi de Pearson Type III
- $\hat{\theta}^{MV}$: Estimateur de θ par la méthode de Maximum de vraisemblance
- $\hat{\theta}^{IFM}$: Estimateur de θ par la méthode de IFM
- $\hat{\theta}^{PMV}$: Estimateur de θ par la méthode de PMV
- $\hat{\theta}^{RS}$: Estimateur de θ par l'inversion de rho de Spearman.
- $\hat{\theta}^{TK}$: Estimateur de θ par l'inversion de tau de Kendall.
- M_k : Moments d'ordre k de la copule.
- $\hat{\theta}^{CM}$: Estimateur de θ par la méthode de moments
- $\hat{\theta}^{CLM}$: Estimateur de θ par la méthode de L-moments de copules
- $\hat{\theta}^{BLM}$: Estimateur de θ par la méthode de L-comoments de copules bivariée