

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie mécanique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة الميكانيكية
المرجع:

Mémoire présenté en vue de l'obtention
Du diplôme de
Magister en : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

**Étude de l'influence des conditions d'injection sur
la qualité des pièces injectées en matière plastique**

Présenté par :
HADEF Saddek

Soutenu publiquement le 13 06 2012

Devant le jury composé de :

Dr. BENCHABANE Adel	Maitre de Conférences 'A'	Président	Université de Biskra
Pr. HECINI Mabrouk	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. HADID Mohamed	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra
Dr. TATI Abdelouahab	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra

DEDICACE

A mes grandes mères

A ma mère

A ma belle mère

A mon épouse

A mes enfants

A mes sœurs

A mes frères

En hommage à mon père

A tout mes professeurs durant mes études

REMERCIEMENTS

En premier lieu, j'aimerais remercier vivement, mon encadreur de thèse, Monsieur Mabrouk HECINI, Maître de conférences, de l'attention et du soutien qu'il a porté à mon travail, et pour m'avoir donné les outils nécessaires à ce travail et transmis ces connaissances scientifiques pour la rédaction de ce mémoire. Que les membres du jury trouvent aussi l'expression de toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et sont aboutissement.

Un merci particulier à tous mes professeurs durant cette étude. Qui ont largement contribué à rendre le travail d'équipe très agréable, et nos nombreuses discussions scientifiques furent riches et pleines de passion.

Une pensée spéciale à mes amis pour toutes ces années passées ensemble, et pour leur humeur et leur sympathie.

Enfin, une pensée toute particulière pour mes parents et ma femme qui m'ont encouragé et soutenu moralement tout au long de la thèse.

Sommaire

Liste des tableaux	i
Liste des figures	ii
Liste des symboles	iv
Introduction générale	1

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATIERES PLASTIQUES

I.1. Introduction.....	3
I.2. Classification des polymères.....	3
I.2.1. Structure.....	4
I.2.2. Thermoplastiques.....	5
I.2.2.1. Polymères amorphes.....	5
I.2.2.2. Polymères cristallins.....	6
I.2.2.3. Polymères semi-cristallins.....	6
I.2.2.4. Avantages et inconvénients des thermoplastiques.....	7
I.2.2.5. Caractéristiques générales.....	7
I.2.3. Thermodurcissables.....	9
I.2.3.1. Avantages et inconvénients des thermoplastiques.....	9
I.2.4. Les élastomères.....	9
I.2.5. Les différents états des polymères.....	9
I.3. Généralités sur le moulage par injection.....	10
I.3.1. Presse à injecter.....	11
I.3.2. Les phases d'un cycle d'injection.....	12
I.3.2.1. Phase de plastification.....	12
I.3.2.2. Phase de remplissage.....	12
I.3.2.3. Phase de commutation et maintien.....	13
I.3.2.4. Phase de refroidissement.....	14
I.3.3. Polymères injectés.....	15

CHAPITRE II : INFLUENCE DES CONDITIONS D'INJECTION

II.1. Paramètres de moulage.....	16
II.1.1. Température.....	16
II.1.2. Pression.....	16
II.1.3. Vitesse.....	17
II.1.4. Temps.....	17

II.2.	Influence des conditions d'injection.....	18
II.2.1.	Influence de la température de la matière.....	18
II.2.2.	Influence de la température du moule.....	18
II.2.3.	Influence de la vitesse d'injection.....	19
II.2.4.	Influence de la pression.....	20
II.2.5.	Influence de la distance par rapport au seuil d'injection.....	20
II.2.6.	Influence de la géométrie du moule.....	20
II.3.	Calcul de retrait.....	21

CHAPITRE III : DISTRIBUTION DE LA TEMPERATURE

III.1.	Introduction.....	23
III.2.	Établissement de l'équation différentielle.....	23
III.3.	Hypothèse du calcul.....	25
III.4.	Résolution de l'équation de la chaleur.....	26
III.4.1.	Méthode des différences finies.....	26
III.4.1.1.	Schéma explicite.....	27
III.4.1.2.	Schéma implicite.....	28
III.5.	Discretisation des conditions aux limites.....	29
III.5.1.	Sans décollement symétrique.....	29
III.5.2.	Sans décollement non symétrique.....	31
III.5.3.	Avec décollement symétriques.....	32
III.5.4.	Avec décollement non symétriques.....	34
III.6.	Organigramme de programmation.....	36
III.7.	Cas d'étude.....	38
III.7.1.	Données.....	38
III.7.2.	Résultats.....	40
III.7.3.	Interprétations.....	49

CHAPITRE IV : MODELISATION DE LA DEFORMATION

IV.1.	Introduction.....	50
IV.2.	Les principaux phénomènes physiques.....	51
IV.2.1.	Le retrait thermique.....	51
IV.2.2.	Les contraintes figées.....	54
IV.2.3.	Le comportement viscoélastique.....	54
IV.3.	Hypothèses de calcul.....	55

IV.4.	Théorie d'élasticité.....	56
IV.4.1.	Conditions d'équilibre.....	57
IV.4.2.	Conditions de comptabilité des déformations.....	58
IV.4.2.	Loi de comportement.....	59
IV.5.	Élasticité plane.....	59
V.5.1.	Déformation plane.....	60
V.5.2.	Contrainte plane.....	60
IV.6.	Élasticité anisotrope.....	60
IV.7.	Thermoélasticité.....	61
IV.8.	Résolution numérique.....	62
IV.8.1.	Méthode des éléments finis.....	62
IV.8.1.1.	Différentes méthodes.....	63
IV.8.1.1.1.	Méthode de déplacement.....	63
IV.8.1.1.2.	Méthode de contrainte.....	63
IV.8.1.1.3.	Méthode mixte.....	63
IV.8.2.	Étapes de calcul.....	63
IV.8.3.	Organigramme de programmation.....	70
IV.8.4.	Cas d'étude.....	73
IV.8.4.1.	Données.....	73
IV.8.4.2.	Résultats.....	74
IV.8.4.3.	Interprétations.....	86
	Conclusion générale.....	87
	Références bibliographiques.....	88

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Avantages et inconvénients des thermoplastiques	7
1.2	Avantages et inconvénients des thermodurcissables	9
4.1	Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (symétrique sans décollement)	77
4.2	Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (symétrique sans décollement)	75
4.3	Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (non symétrique sans décollement)	76
4.4	Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (non symétrique sans décollement)	77
4.5	Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (symétrique avec décollement)	78
4.6	Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (symétrique avec décollement)	79
4.7	Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (non symétrique avec décollement)	80
4.8	Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (non symétrique avec décollement)	81
4.9	Résultats du calcul au bord de la plaque coté gauche pour les différents cas	82
4.10	Résultats du calcul au bord de la plaque coté droite pour les différents cas	83

LISTE DES FIGURES

1.1	Définition d'un polymère	4
1.2	Structures des chaînes moléculaires	5
1.3	Morphologie des thermoplastiques	6
1.4	Propriétés thermo-physiques et mécaniques des thermoplastiques	8
1.5	États des polymères	10
1.6	Presse à injecter	11
1.7	phase de plastification	12
1.8	phase de remplissage	13
1.9	phase de maintien et solidification	14
1.10	phase de refroidissement et d'éjection de la pièce	14
1.11	Allure du diagramme PVT d'un polymère amorphe	15
1.12	Allure du diagramme PVT d'un polymère semi-cristallin	15
2.1	Influence du temps d'injection et de l'épaisseur	19
2.2	Orientations moléculaires en fonction de la distance au seuil d'injection	21
2.3	Diagramme PVT d'un polymère amorphe	22
3.1	Conduction dans un volume élémentaire	24
3.2	schéma de la plaque de calcul	25
3.3	Schéma du maillage	27
3.4	Schéma de la discrétisation des conditions aux limites, sans décollement symétrique	30
3.5	schéma de la discrétisation des conditions aux limites, sans décollement non symétrique	31
3.6	schéma de la discrétisation des conditions aux limites, avec décollement symétriques	32
3.7	schéma de la discrétisation des conditions aux limites, avec décollement non symétrique	34
3.8	Organigramme de programmation de distribution de la température (méthode explicite)	36
3.9	Organigramme de programmation de distribution de la température (méthode implicite)	37
3.10	Plaque de calcul	38
3.11	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique sans décollement (schéma explicite)	40
3.12	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique sans décollement (schéma implicite)	41
3.13	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique sans décollement (schéma explicite)	42
3.14	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique sans décollement (schéma implicite)	43
3.15	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique avec décollement (schéma explicite)	44
3.16	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique avec décollement (schéma implicite)	45
3.17	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique avec décollement (schéma explicite)	46
3.18	Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique avec décollement (schéma implicite)	47
3.19	Comparaison entre les résultats du schéma explicite et implicite	48
4.1	Refroidissement dans le moule, juste avant (a) et juste après (b) l'éjection	53
4.2	principe d'action de la pression figée	54
4.3	Schéma de la méthode de résolution	56
4.4	L'état de contrainte	57

4.5	Repère et notation liés à l'orthotrope	61
4.6	Schéma de l'élément choisi	64
4.7	Organigramme de programmation	70
4.8	Plaque libre blocage minimum	73
4.9	Présentation du retrait pour le schéma explicite (symétrique sans découlement)	74
4.10	Présentation du retrait pour le schéma implicite (symétrique sans découlement)	75
4.11	Présentation du retrait pour le schéma explicite (non symétrique sans découlement)	76
4.12	Présentation du retrait pour le schéma implicite (non symétrique sans découlement)	77
4.13	Présentation du retrait pour le schéma explicite (symétrique avec découlement)	78
4.14	Présentation du retrait pour le schéma implicite (symétrique avec découlement)	79
4.15	Présentation du retrait pour le schéma explicite (non symétrique avec découlement)	80
4.16	Présentation du retrait pour le schéma implicite (non symétrique avec découlement)	81
4.17	Présentation du retrait pour le schéma explicite et implicite au bord de la plaque	84
4.18	Présentation du retrait pour tout les cas au bord de la plaque	85

LISTE DES SYMBOLES

DP	Dégré de polymère
T_g	Température vitreuse
T_f	Température de fusion
V	Volume
γ	Dilatation thermique
C_p	Chaleur spécifique
k	Conductivité thermique
ρ	Masse volumique
E	Module de Young
P	Pression
E_{ei}	Énergie emmagasinée
E_{deg}	énergie dégagée
E_{sort}	Énergie sortie
E_{in}	Énergie entre
q	Le flux de chaleur
t	Temps
a	diffusivité thermique
K_p	Conductivité thermique de polymère
k_m	Conductivité thermique du moule
Δx	Pas suivant x
Δy	Pas suivant y
Δt	Pas du temps
T_m	Température du moule
e	Épaisseurs du moule
φ_p	densité de flux polymère
φ_m	densité de flux moule
φ_a	densité de flux de l'air
k_a	Conductivité thermique de l'air
e_2	Épaisseur de couche de l'air
Lx	Épaisseur de la plaque
Ly	Longueur de la plaque
L	Largeur de la plaque
N	Nombre des nœuds suivant x
M	Nombres des nœuds suivant y
Rm	masse volumique
Cm	chaleur massique

T_{inj}	Température d'injection
e_1	distance entre le canal de refroidissement et la paroi du moule
h	Hauteur le l'élément du maillage carré
T_{m1}	Température de la face gauche du moule
T_{m2}	Température de la face droite du moule
T_s	Température de solidification
ΔT	Variation de la température
[D]	Matrice d'élasticité
[K ^e]	Matrice de rigidité élémentaire
F	Force de volume
I	Identité
{F _T ^e }	Les forces dues à la température
G	Module de cisaillement
{u}	Vecteur de déplacement

Lettres grecs :

α	Coefficient de dilatation
γ	Vitesse de déformation
λ	Coefficient de Lamé
μ	Coefficient de Lamé
ν	Coefficient de Poisson
Δ	Laplace
[σ]	Tenseur de contrainte
[ε_T]	Tenseur de déformation thermique
[ε]	Tenseur de déformation
{ δ^e }	Vecteur de déplacement élémentaire
[B]	Matrice d'interpolation

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La révolution industrielle fut l'avènement de la fonte et de l'acier, nous vivons aujourd'hui dans un monde où les matières plastiques dominent : microordinateur, voitures, téléphones portables, stylos, meubles, etc... Ces matières désormais classiques appartiennent à la classe chimique des polymères, c'est à dire des macromolécules répétant de nombreuses fois les mêmes structures moléculaires. Les plus connus d'entre eux sont les plastiques mais les polymères interviennent aussi dans la composition des colles et de nombreux textiles synthétiques.

La première matière plastique est née en 1870. Il s'agit du nitrate de cellulose ou celluloïd, obtenu à partir du camphre et de la cellulose, qui fut utilisé par les frères Hyatt pour remplacer l'ivoire dans la fabrication des boules de billard. Néanmoins ce n'est que dans la première partie du vingtième siècle que fut développée la chimie de synthèse qui allait donner naissance aux « grands thermoplastiques » tels le Polystyrène ou le Polychlorure de Vinyle, dont les noms nous sont si familiers. Néanmoins avant de devenir des produits communs, il a fallu développer un certain nombre de procédés industriels de mise en forme de ces polymères.

Les polymères connaissent aujourd'hui un tel succès, les procédés de mise en forme sont encore loin d'être parfaitement maîtrisés. En effet, les polymères sont des matériaux aux propriétés complexes, évoluant avec les contraintes appliquées, la température et la pression. Gonflements, retraits, déformations sont quelques uns des problèmes rencontrés lors de la mise en forme, que ce soit par moulage, extrusion ou autre. Le procédé de moulage par injection est encore mal maîtrisé. La conception et la fabrication du moule sont toujours aujourd'hui un moment délicat et il n'est pas certain que la pièce en sortie du moule ait bien la forme, les cotes ou l'aspect de surface attendue. Les paramètres qu'il est possible de modifier lors de l'injection sont nombreux (pression, température, vitesse de refroidissement, matériau utilisé, temps de compactage, de refroidissement)

Objectifs de cette étude

- 1- Détermination de la distribution de la température et sa variation durant la phase de refroidissement.
- 2- Détermination de la forme de la pièce injectée après leur éjection.
- 3- Étude de l'influence des paramètres d'injection sur la forme finale de la pièce injectée.
- 4- Prise en compte du décollement de la pièce et le refroidissement dissymétrique.

Hypothèses de la modélisation

Pour atteindre nos objectifs quelques hypothèses doivent être émises :

- 1- Le matériau est isotrope.
- 2- L'échange thermique se fera suivant l'épaisseur et largeur de la plaque
- 3- Le calcul de la déformation commence après que le seuil soit complètement figé.

Plan de la thèse

Nous parlons dans le premier chapitre sur des généralités sur les matières plastiques, ainsi que sur le moulage par injection.

Le deuxième chapitre on fait une recherche bibliographique sur de nombreux travaux qui ont précédé le notre sur le comportement du matériau plastique durant le cycle d'injection et l'influence des paramètres de mise en œuvre sur la déformation de ce dernier.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude de la distribution de la température dans la pièce injectée pendant la phase de refroidissement du cycle d'injection et le calcul de la variation de la température en fonction du temps, la résolution se fera par la méthode des différences finis.

Le quatrième chapitre on fait une étude de la déformation de la pièce. Une modélisation se fera par la méthode des éléments finis.

Les conclusions de la recherche et les recommandations pour les recherches futures feront l'objet de la dernière partie de notre travail.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITES SUR LES MATIERES PLASTIQUES

I.1 Introduction

Les matières plastiques ou << plastiques >> sont constitués des résines appelées << polymères >> additionnée ou non de composants auxiliaires. Ces résines contiennent toutes des ressources naturelles, telle que charbon, cellulose, pétrole, air, sel marin, substances grasses, etc..... Les résines ont la propriété commune de se ramollir à chaud avec ou sans pression ; cette propriété est très importante lors de la mise en forme.

Les matières plastiques existent dans la nature depuis toujours et leur capacité à changer de forme a été utilisée par l'Homme depuis très longtemps. Les Égyptiens moulaient déjà des mélanges de bitume et d'argile il y a presque 5000 ans.

Les « plastiques », dans l'acception que nous connaissons aujourd'hui désignent les matériaux formés par des macromolécules à répétition d'unités simples (les monomères) reliées entre elles par des liaisons covalentes.

La première matière plastique synthétique (le nitrate de cellulose) est l'œuvre d'Henri Braconnot en 1833. Il s'agit de coton traité par un mélange d'acide sulfurique et d'acide nitrique. Ce matériau sera mis en forme pour la première fois en 1868 par les frères Hyatt sous le nom de Celluloïd. Le premier plastique totalement synthétique est une résine phénolique qui a été découverte en 1907 par Leo Hendrik Baekeland, qui lui donnera son nom: la Bakélite. Depuis cette date, les matières plastiques sont de plus en plus nombreuses et ont envahi de nombreux domaines de production (transports, médecine, loisirs, emballage, électroménager, ...) au point de devenir aujourd'hui indispensables à notre société de consommation.

I.2 Classification des polymères

Le mot polymère vient du grec poly = plusieurs et mère = parties. Ils sont constitués de la répétition d'un grand nombre de motifs élémentaires : les unités monomères. Dans le cas où la macromolécule ne contient qu'un type de monomère, il s'agit d'un homopolymère. Si les unités constitutives sont plus nombreuses, on parle alors de copolymère. Il existe plusieurs types de copolymères :

- les copolymères alternés (chaîne A-B-A-B-A-...)
- les copolymères séquences (chaîne A-A-A-B-B-B-...)
- les copolymères statistiques (chaîne A-B-B-A-B-A-B-A-A-...)

Le degré de polymérisation (DP) indique le nombre d'unités monomères assemblées dans le polymère (figure 1.1).

I.2.1 Structures

La structure du polymère représente la façon dont les longues chaînes moléculaires de base sont reliées entre elles pour former le matériau. La disposition des chaînes entre elles ainsi que la densité des points de liaison vont modifier profondément les caractéristiques macroscopiques du polymère.

Un polymère peut adopter trois structures moléculaires, présentées dans la figure (1.2)

- 1- *linéaire* : La macromolécule se présente sous la forme d'une longue chaîne ;
- 2- *branchée* : Une longue chaîne sur laquelle viennent s'embrancher des chaînes de longueur variable, en général plus petites ;
- 3- *en réseau*: Les chaînes sont reliées entre elles en plusieurs points formant un réseau

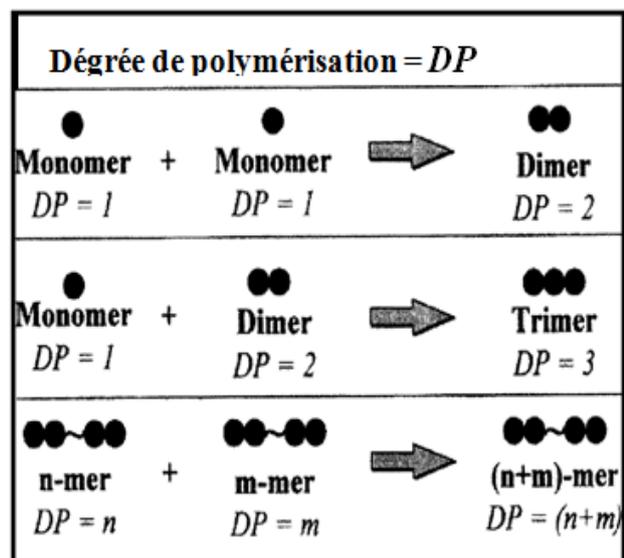


Figure 1.1 : Définition d'un polymère [1]

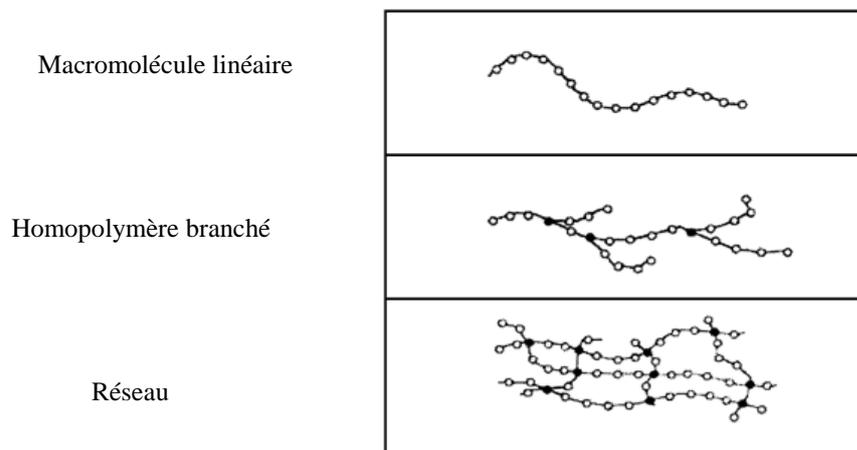


Figure 1.2 : Structures des chaînes moléculaires [1]

Ces différentes structures vont permettre de classer les polymères en trois grandes catégories: les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères

I.2.2 Thermoplastiques

Les thermoplastiques sont des solides généralement souples, formés de chaînes distinctes bien compactées et plus ou moins linéaires [2].

Ils présentent la particularité de s'écouler à la chaleur, ce qui facilite leur mise en forme. Ils sont repartis en trois grandes familles : les *amorphes*, *cristallins* et les *semi-cristallins*. Cette *morphologie* (figure 1.3) a une influence importante sur les propriétés des polymères thermoplastiques [1].

I.2.2.1 Polymères amorphes

Dans un polymère amorphe, les chaînes se présentent sous la forme de pelotes statistiques (figure 1.3). Les chaînes sont enchevêtrées et on note l'absence de structure ordonnée. Quand on chauffe un polymère amorphe, il subit une transition douce de l'état solide à l'état fluide, il n'y a donc pas de température de fusion. En effet, la structure des chaînes de macromolécule en pelote compacte et désordonnée empêche une transition brutale entre les états solide et liquide. Cependant, une brusque variation de mobilité moléculaire est observée à une température appelée température de transition vitreuse notée T_g .

I.2.2.2 Polymères cristallins

Un polymère purement cristallin, quand à lui, présente des chaînes qui s'arrangent de façon ordonnée. Contrairement aux amorphes, les cristallins possèdent une température de fusion notée T_m . Cependant, un polymère totalement cristallin n'existe pas en réalité. Il reste toujours des défauts ou bien l'extrémité des chaînes qui ne peuvent adopter une structure cristalline.

I.2.2.3 Polymères semi-cristallins

Les semi-cristallins présentent à la fois une partie amorphe ou les chaînes moléculaires sont désordonnées et une partie cristalline ordonnée (figure 1.3). Ils présentent donc à la fois une température de transition vitreuse (correspondant à la mobilité de la phase amorphe) et une température de fusion (pour laquelle la phase cristalline se liquéfie). On a donc toujours $T_g < T_f$. Les polymères semi-cristallins peuvent être caractérisés par leur taux de cristallinité ce qui représente la fraction massique ou molaire d'unités structurales cristallisées par rapport à la totalité des unités présentes.

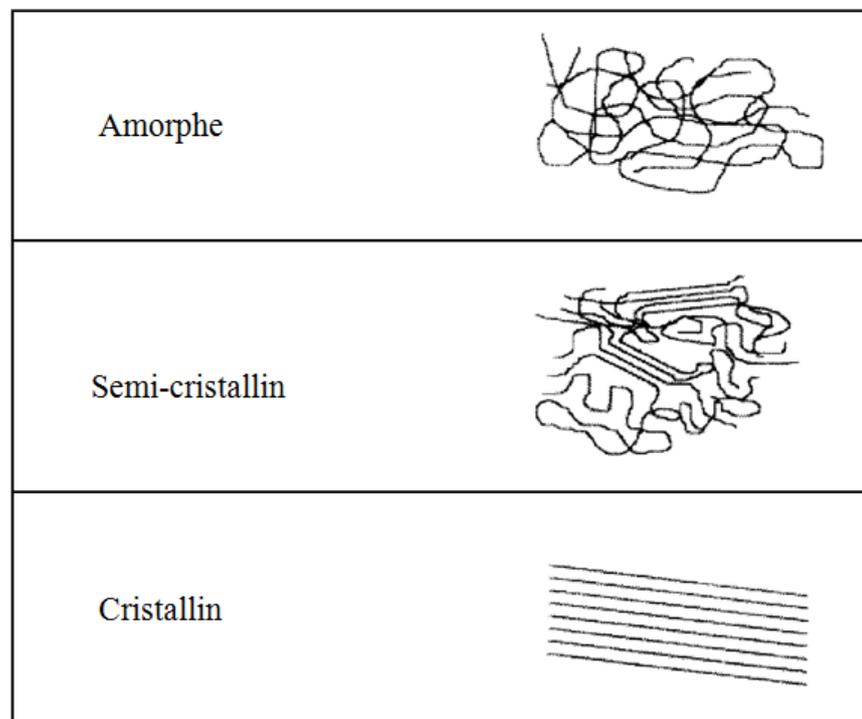


Figure 1.3 : Morphologie des thermoplastiques [1]

I.2.2.4 Avantages et désavantages des thermoplastiques

Comme on le voit dans la table 1.1, chacune des morphologies possède des propriétés intéressantes. Les polymères semi-cristallins peuvent hériter plusieurs qualités complémentaires venant à la fois de leurs parties amorphe et cristalline [1].

avantages		inconvénients
Stabilité dans le temps (pas de polymérisation au cours du temps)		forte viscosité du fondu fluage
Recyclable (on peut les liquéfier à nouveau)		
Facile à réparer (par soudure ou collage)		
Postformable		
amorphe	cristallin	
bonne résistance aux impacts	module plus élevé	
moindre retrait au refroidissement	plus grande dureté	

Tableau 1.1 : Avantages et inconvénients des thermoplastiques [1]

I.2.2.5 Caractéristiques générales

La figure 1.4 montre les différentes propriétés thermo-physiques et mécaniques des polymères amorphes, cristallins et semi-cristallins. A la température de transition vitreuse, le coefficient de dilatation thermique et la capacité calorifique des polymères amorphes subissent une discontinuité. La conductivité thermique atteint un maximum tandis que le volume spécifique montre une rupture de pente caractéristique. Le module chute brutalement, le polymère devient alors facilement malléable. Dans le cas d'une cristallinité totale, il existe une température de fusion pour laquelle toutes les propriétés subissent une discontinuité. Le comportement semi-cristallin se déduit quant à lui des comportements amorphe et cristallin.

En général, la morphologie est modifiée par le processus de mise en forme: un refroidissement lent conduit à un taux de cristallinité élevé tandis que les taux de refroidissement rapides piègent la nature amorphe du fondu et abaissent de ce fait le taux de cristallinité.

Il est de plus nécessaire de veiller à ce que les paramètres du processus d'élaboration soient en adéquation avec les propriétés du matériau utilisé [1].

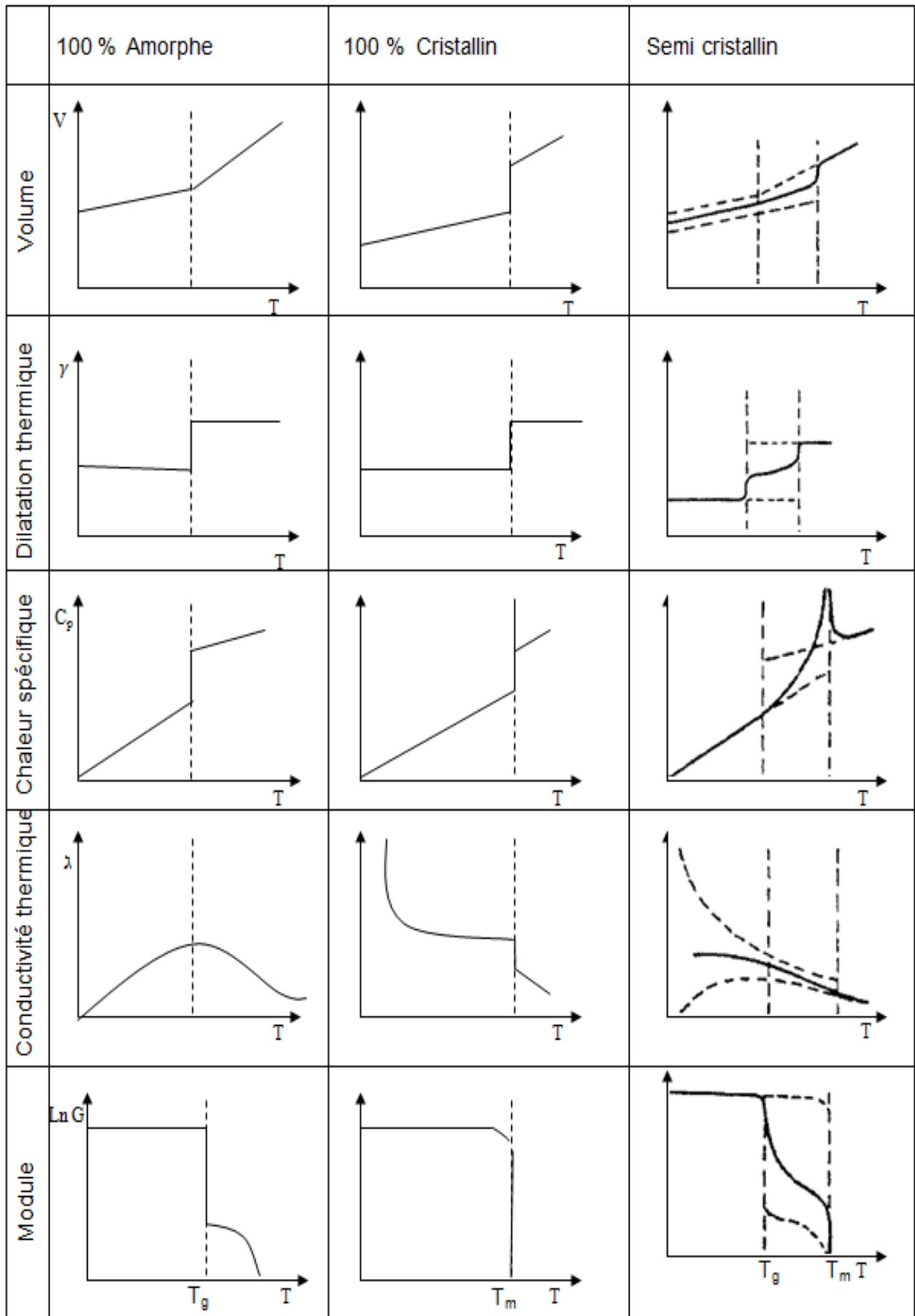


Figure 1.4 : Propriétés thermo-physiques et mécaniques des thermoplastiques [1]

I.2.3 Thermodurcissables

Les thermodurcissables ou thermodurcis ont une structure en réseau tridimensionnel, ce qui rend leur fusion impossible. La rigidité ainsi que la stabilité thermique du polymère est liée au taux de réticulation, c'est à dire à la densité de points de liaison entre les chaînes macromoléculaires.

I.2.3.1 Avantages et désavantages des thermoplastiques

Le tableau 1.2 montre schématiquement les avantages et les inconvénients des thermodurcissables.

avantages	inconvénients
Faible viscosité de la résine	Cassant Non recyclable par techniques standard Non postformable
Bon mouillage des fibres	
Bonne stabilité thermique après polymérisation	
Résiste aux agressions chimiques	
Peu sensible au fluage	

Tableau 1.2 : Avantages et inconvénients des thermodurcissables [1]

I.2.4 Les élastomères

Les élastomères sont des solides souples et gonflables formés de chaînes peu compactées et (à température ambiante) très mobiles (matériau caoutchouteux)

I.2.5 Les différents états des polymères

En fonction de la température, un polymère peut se présenter dans quatre états différents qui correspondent à un accroissement des volumes libres intermoléculaires avec la température et une diminution des forces de liaisons.

On peut repérer ces états en suivant le graphe de la masse volumique ρ ou du module d'élasticité E en fonction de la température. La température ambiante pouvant se trouver dans l'une des quatre zones selon le polymère considéré [2]

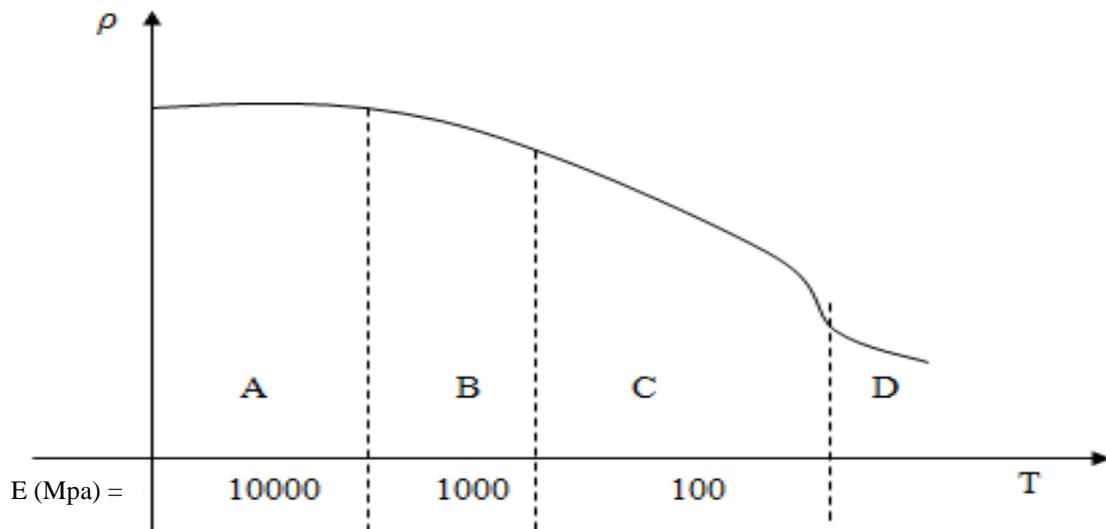


Figure 1.5 : États des polymères [2]

L'état vitreux (A)

Les verres organiques n'admettent que de très faibles déformations.

L'état de transition (B)

On rencontre les polymères linéaires thermoplastiques et les polymères réticulés dont la décomposition chimique se produit avant la fusion.

L'état caoutchouteux (C)

Les élastomères sont formés de très longues molécules reliées entre elles par des points de jonction relativement rares.

L'état fluide (D) [2]

I.3 Généralités sur le moulage par injection

Les procédés de transformation des matières plastiques sont divers et variés. Les plus connus sont : l'injection, l'extrusion, le thermoformage, le soufflage et le remoulage.

D'un point de vue économique, le procédé d'injection est de loin le plus utilisé car il permet de produire à grande cadence, avec une grande régularité et de façon automatique des pièces massives et ou de forme complexe.

Le principe de l'injection est de remplir de polymère thermoplastique fondu une cavité, appelée empreinte, à l'intérieur d'un moule. Lorsque le moule se refroidit, la pièce se solidifie tout en contractant : le volume occupé par la pièce solidifiée est inférieur à celui de l'empreinte. On appelle ce phénomène le retrait. Lorsque la solidification est terminée, il y a ouverture du moule et éjection de la pièce.

I.3.1 Presse à injecter

La figure (1.6) montre une presse horizontale à fermeture à genouillères avec blocage hydraulique du moule. Les genouillères sont actionnées par un vérin VA et l'éjection est également assurée hydrauliquement.

Le bloc de plastification est équipé d'une buse ouverte ; la rotation de la vis est obtenue grâce à un moteur hydraulique MH transmettant son mouvement de rotation à la vis de plastification par l'intermédiaire d'un couple roue et vis sans fin (RV et VS). Un vérin VI commande l'avance de la vis lors de l'injection et le vérin VV déplace l'ensemble du bloc de plastification. Le circuit hydraulique est équipé avec un accumulateur Ac, et les pompes basse pression PB et haute pression PH, entraînées par le moteur électrique ME, fournissent l'huile sous pression. Le volume d'huile nécessaire au bon fonctionnement du circuit est stocké dans le réservoir RH et le refroidissement à circulation d'eau Re maintient la température du fluide à une valeur acceptable.

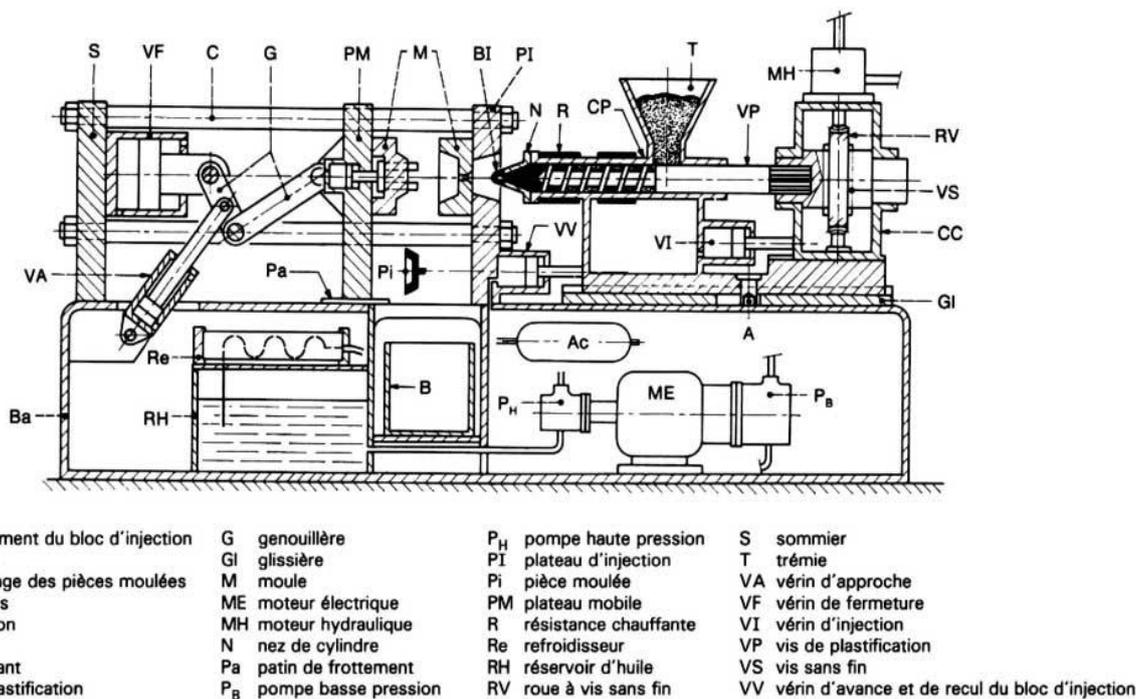


Figure 1.6 – Presse à injecter [6]

I.3.2 Les phases d'un cycle d'injection

Le cycle d'injection se décompose en quatre phases :

I.3.2.1 La phase de plastification

La phase de plastification a pour objectif de faire passer le polymère de l'état solide (sous forme de granulé) à l'état fondu. Cette transformation est réalisée par l'ensemble vis fourreau dont la fonction de broyer et de chauffer la granulé pour l'amener peu à peu à l'état fondu. Pour ce la, on anime la vis d'un mouvement rotatif qui a pour effet de transporter la matière de la zone d'alimentation vers la tête de fourreau. Au cours du transport, le polymère est chauffé et broyé, assurant ainsi par effet thermomécanique sa mise à l'état fondu (figure 1.7).

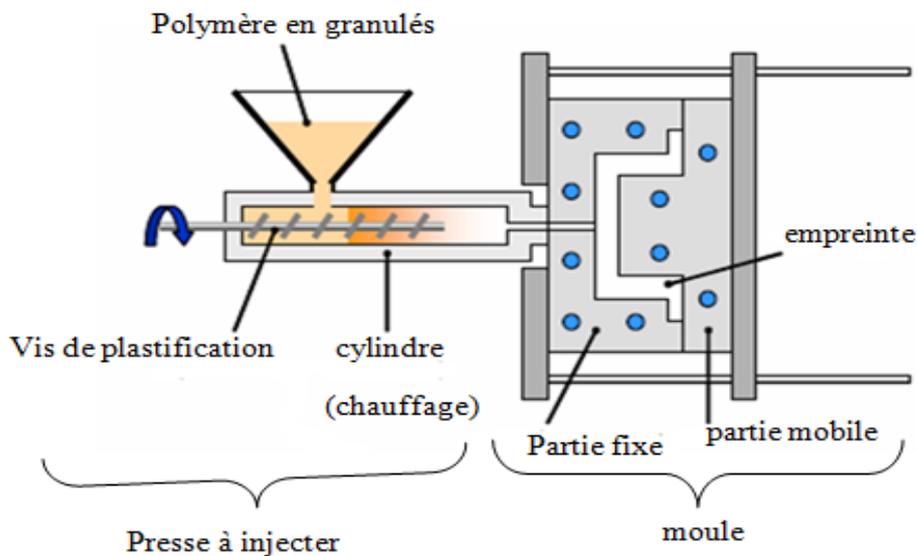


Figure 1.7 : phase de plastification [8]

I.3.2.2 La phase de remplissage

Une fois la matière accumulée en tête de fourreau, celle-ci est ensuite injectée dans l'empreinte de l'outillage par une avancée de la vis. Cette phase du cycle de transformation est appelée phase dynamique du remplissage. L'avancée de la vis est réglée en débit ou en pression pour maîtriser la vitesse d'injection du thermoplastique dans l'empreinte (figure 1.8).

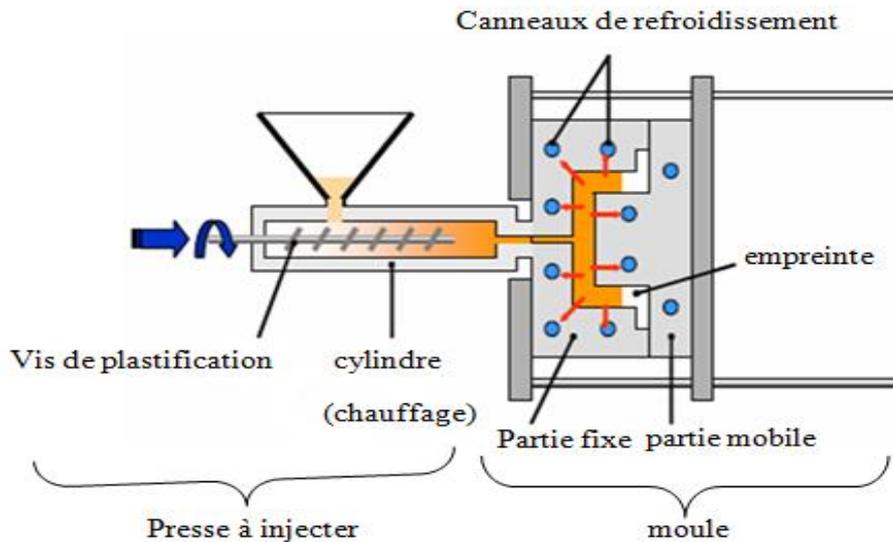


Figure 1.8 : phase de remplissage [8]

I.3.2.3 La phase de commutation et maintien

La commutation est l'instant clé du procédé d'injection. Il s'agit de l'instant de transition entre la phase de remplissage dynamique et la phase de maintien. A cet instant, le pilotage de l'injection passe d'une régulation en vitesse à une régulation en pression. En général, on choisit de commuter au moment où l'épreinte est complètement rempli. Cet instant est notifié par la présence d'un pic de pression d'injection prononcé. Cet événement est alors utilisé pour déclencher la commutation.

Dés lors où la commutation est enclenchée, la presse appliquée au niveau du bloc d'injection une consigne de pression de maintien. Cette pression a pour objectif de maintenir la matière dans la cavité pour compenser les phénomènes de retrait volumique due au refroidissement de la matière. Une pression de maintien insuffisante conduit à la formation de défaut appelé retassures. Il s'agit de zone massive où le retrait de la matière laisse deviner des zones insuffisamment remplies. Une faible pression de maintien peut être également responsable de la formation de vacuoles. A l'inverse, une pression de maintien trop élevée contribue à générer des contraintes dans la pièce, qui auront pour effet au final de la déformer (figure 1.9).

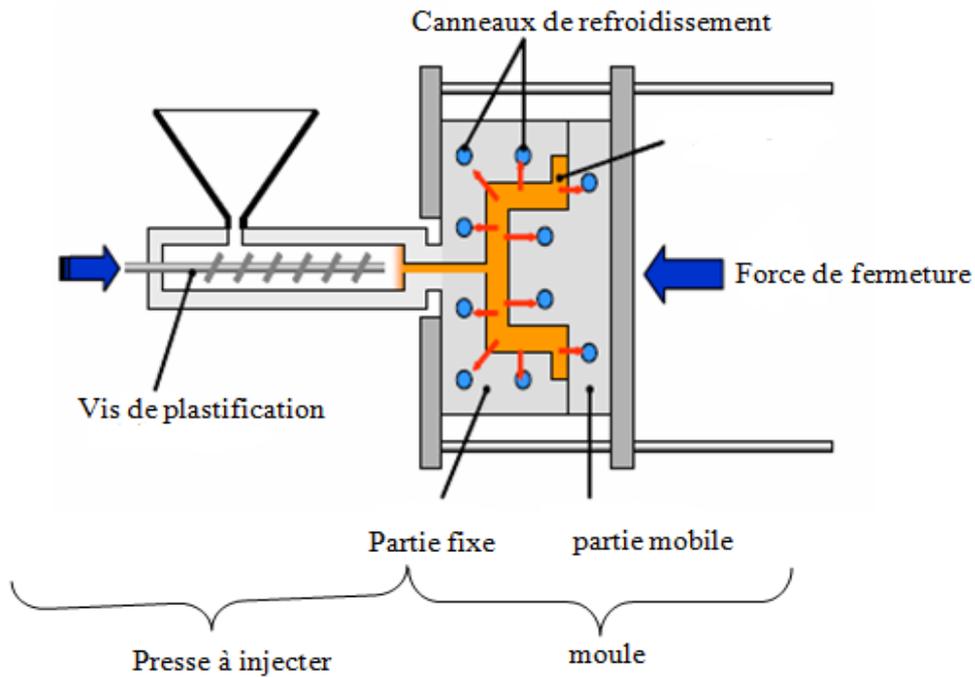


Figure 1.9 : phase de maintien et solidification [8]

I.3.2.4 La phase de refroidissement

En parallèle de la phase de maintien, le polymère débute au contact de parois refroidies de l'outillage son retour à l'état solide. Cette phase appelée phase de refroidissement perdure jusqu'à ce que le polymère atteigne sa température de démoulage (figure 1.10)

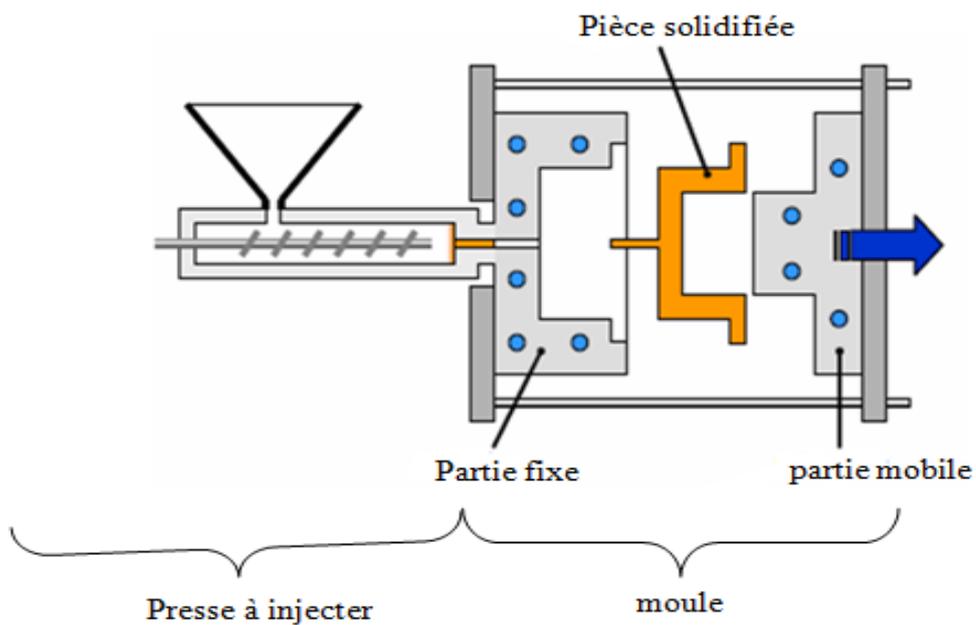


Figure 1.10 : phase de refroidissement et d'éjection de la pièce [8]

I.3.3 Polymères injectés

Polymères amorphes et semi-cristallins L'observation des évolutions du volume spécifique des polymères lors du refroidissement en fonction de la pression fait apparaître deux types de comportements représentés sur les diagrammes PVT (Pression - Volume - Température) des figures 1.11 et 1.12 :

- les polymères amorphes restent à un état surfondu jusqu'à la température de transition vitreuse T_g qui marque le passage de l'état liquide à l'état solide vitreux amorphe.
- les polymères semi-cristallins restent surfondus jusqu'à la température de fusion puis subissent brutalement une diminution du volume lors de leur cristallisation à la température T_c .

L'état amorphe vitreux correspond à un état moléculaire désordonné avec une structure de liquide figé hors équilibre dans lequel les chaînes moléculaires n'ont pas pu se réarranger. Cet état peut être dû à un refroidissement trop rapide ou au polymère lui-même dont les chaînes sont complexes et ne peuvent se réorganiser.

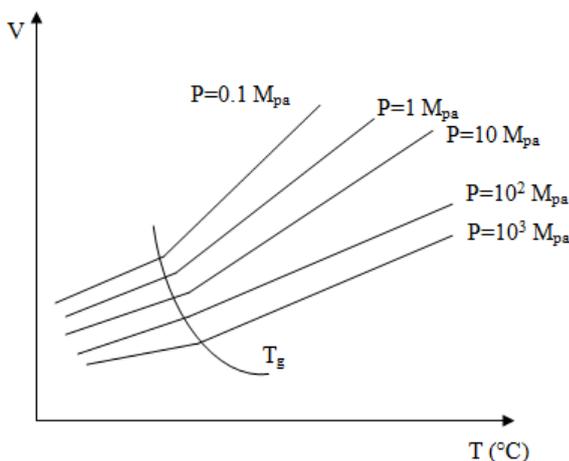


Figure 1.11– Allure du diagramme PVT d'un polymère amorphe [4]

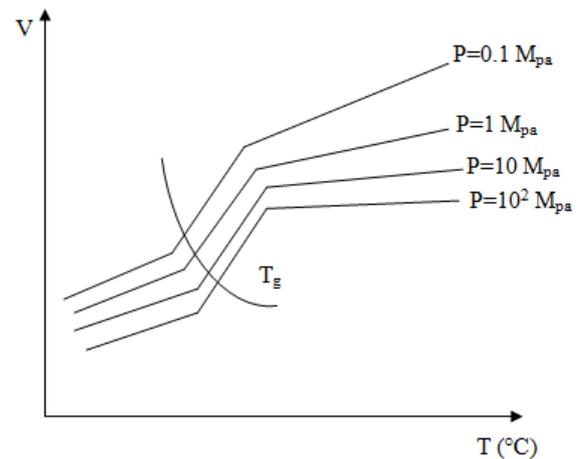


Figure 1.12 – Allure du diagramme PVT d'un polymère semi-cristallin [4]

L'état cristallin correspond à un état ordonné et compact des chaînes moléculaires. Cet état est caractérisé par l'absence de transition vitreuse mais l'existence d'un point de fusion.

La cristallisation n'est jamais complète en pratique (irrégularités structurales, lenteur du réarrangement, enchevêtrement des chaînes de la phase amorphe). Les polymères semi-cristallins présentent donc un taux de cristallinité qui est fonction de la vitesse de refroidissement et du polymère lui-même ($0 \leq x \leq x_{max}$) et peuvent présenter un comportement amorphe si la vitesse de refroidissement est suffisamment élevée. Les polymères semi-cristallins présentent un retrait plus important (la compacité dans l'état cristallin ordonné est supérieure à celle de l'état amorphe).

CHAPITRE II

INFLUENCE DES CONDITIONS D'INJECTION

II.1 Les paramètres de moulage

Nous décrivons ici les principaux paramètres de moulage ainsi que leur influence sur la qualité du produit. Nous pouvons classer ces paramètres en quatre grandes catégories : les températures, les pressions, les vitesses et les temps.

II.1.1 Les températures

La température du moule est contrôlée par le débit et la température du réfrigérant circulant dans les circuits de réfrigération de ce moule. Elle influence directement la durée du temps de refroidissement. Une augmentation de la température du moule aura comme effet:

- de favoriser l'écoulement dans le moule ;
- d'augmenter le retrait et de diminuer l'anisotropie du retrait;
- d'améliorer la stabilité dimensionnelle;
- de favoriser le taux de cristallinité de la pièce pour les matières semi- cristallines et par conséquent d'affecter certaines propriétés mécaniques de celles-ci.

La température de la matière est définie comme étant la température de la matière dans la buse lors de l'injection. Elle est contrôlée principalement par les températures des bandes chauffantes installées sur le pourtour du cylindre de plastification. Une augmentation de la température de la matière provoque une diminution de :

- la viscosité de la matière.
- l'orientation de la matière.
- l'anisotropie du retrait mais augmente ce dernier.
- l'augmentation de l'allongement à la rupture.

II.1.2 Les pressions

La pression d'injection est la pression hydraulique qui sert à l'injection de la matière lors du remplissage de l'empreinte. L'augmentation de la pression d'injection a pour effet:

- d'augmenter la densité de la pièce.

- de diminuer le retrait.
- d'augmenter l'orientation.

La pression de maintien est la pression exercée par le vérin d'injection lors de la phase de bourrage. Une augmentation de la pression de maintien implique :

- une diminution importante du retrait;
- une augmentation de l'orientation de la matière;
- une augmentation de la densité de la matière;
- une augmentation considérable des contraintes internes de la pièce.

La contre-pression est la pression exercée par le vérin d'injection lors du recul de la vis. Une augmentation de celle-ci accroît l'homogénéité de la matière ou du mélange (matière - colorant) .

La pression de fermeture est la pression exercée sur le moule afin de le maintenir fermé. Elle est normalement constante tout au long du cycle d'injection.

II.1.3 Les vitesses

La vitesse d'injection est la vitesse à laquelle le vérin d'injection avance lors du remplissage de l'empreinte. Une augmentation de la vitesse d'injection implique:

- un remplissage plus facile du moule;
- l'amélioration de l'état de surface, sauf en écoulement turbulent lors de la formation d'un jet de matière;
- une augmentation de l'orientation des chaînes moléculaires.

La vitesse de rotation de la vis est la vitesse de rotation de celle-ci lors de la plastification de la matière. Elle influence principalement la plastification de la matière en faisant varier le taux de cisaillement, la température de la matière et l'homogénéité de celle-ci.

Les vitesses d'ouverture et de fermeture du moule doivent être fixées selon le type de pièces moulées. Elles sont généralement en trois phases, lente-rapide-lente, dans le but d'éviter des bris au moule ou à la presse si des anomalies devaient survenir.

II.1.4 Les temps

Le temps d'injection est défini comme étant la durée de la phase de remplissage en haute pression. Si le temps est trop court, le remplissage de l'empreinte se fera avec la pression de maintien qui est généralement plus faible que la pression d'injection. Conséquemment, la densité de la pièce sera plus basse, l'anisotropie du retrait et l'orientation de la matière seront diminuées.

Le temps de maintien est défini comme étant la durée de la phase de bourrage. Une

augmentation de celui-ci implique au niveau de la pièce les changements suivants :

- une augmentation de l'orientation moléculaire;
- une augmentation de la densité de la pièce ;
- une diminution du retrait.

Le temps de refroidissement commence de la fin du temps de maintien jusqu'à l'ouverture du moule. Le temps de refroidissement est fonction de la température de la matière, de l'épaisseur de la pièce, de la nature du polymère et de la température du moule. Le temps de refroidissement a une incidence directe sur la durée du cycle et conséquemment sur le prix de revient de la pièce.

II.2 Influence des conditions d'injection

Le procédé d'injection induit une structure multicouche complexe, dont les caractéristiques (épaisseur, taille des entités cristallines,...) dépendent des paramètres utilisés lors de la mise en œuvre. Nous allons ainsi décrire dans cette partie les influences respectives de ces conditions, à savoir la température de la matière, la température du moule, la vitesse d'injection, la pression de maintien, et la distance par rapport au seuil d'injection.

II. 2.1 Influence de la température de la matière

Les températures élevées favoriseront les phénomènes de relaxation des chaînes, effaçant ainsi l'orientation initiale des macromolécules. Pour des températures de matière croissantes, de nombreux auteurs ont ainsi observé des diminutions des épaisseurs des couches orientées [11], [12]. Des auteurs considèrent que les lamelles cristallines sont plus orientées sur des pièces injectées à basse température (190°C) que des pièces injectées à haute température (275°C) [5]. Ce résultat tend à confirmer que l'augmentation de la température de la matière favoriserait les phénomènes de relaxation des chaînes effaçant leur orientation initiale.

En extrapolant l'épaisseur de la couche orientée (comprenant la peau et la zone cisailée) en fonction de la température de la matière, ainsi que les pièces seraient totalement orientées dans leur épaisseur pour une température d'injection de 165°C [5].

II. 2.2. Influence de la température du moule

La température du moule est un paramètre modifier le gradient thermique subi par le polymère, et notamment diminuer le temps de réalisation des objets. Ce paramètre va enfin affecter la structure des pièces dans leur épaisseur.

Des auteurs [3] ont étudié l'influence de la température du moule (comprise entre 40 et

120°C, correspondant respectivement à des gradients thermiques de 210 à 130°C) sur la morphologie des pièces injectées. Ces auteurs ont clairement montré que l'augmentation de la température du moule (ou la diminution du gradient thermique) a pour effet de diminuer l'épaisseur de la peau, passant de 260 à 180 μm . Ce résultat a été confirmé par ces auteurs, qui expliquent que, pour des températures de moule élevées, les chaînes orientées lors de la mise en œuvre peuvent se relaxer plus rapidement.

Différents travaux ont révélé par ailleurs que les tailles des sphérolites dans le cœur des pièces étaient nettement plus importantes lorsque la température du moule était élevée [10]. Les phénomènes de croissance seraient ainsi privilégiés, au détriment de la germination des entités cristallines.

Des auteurs ont montrés que l'augmentation de la température du moule n'affecterait pas le taux de cristallinité dans le cœur des pièces, contrairement à celui de la peau qui passerait de 42 à 53 % pour des températures de moule respectivement égales à 40 et 120°C [3].

II. 2. 3 Influence de la vitesse d'injection

Des auteurs ont observé une réduction de l'épaisseur des couches cisillées par rapport à l'épaisseur globale de la pièce lorsque la vitesse d'injection augmente figure (2.1) [9], [10]. Ce phénomène est dû par le fait qu'une vitesse d'injection importante minimise les effets relaxationnels. Il a trouvé que les valeurs maximales de la fonction d'orientation moléculaire, atteinte dans la couche cisillée, ne sont pas affectées par une augmentation de la vitesse d'injection dans la gamme étudiée [9].

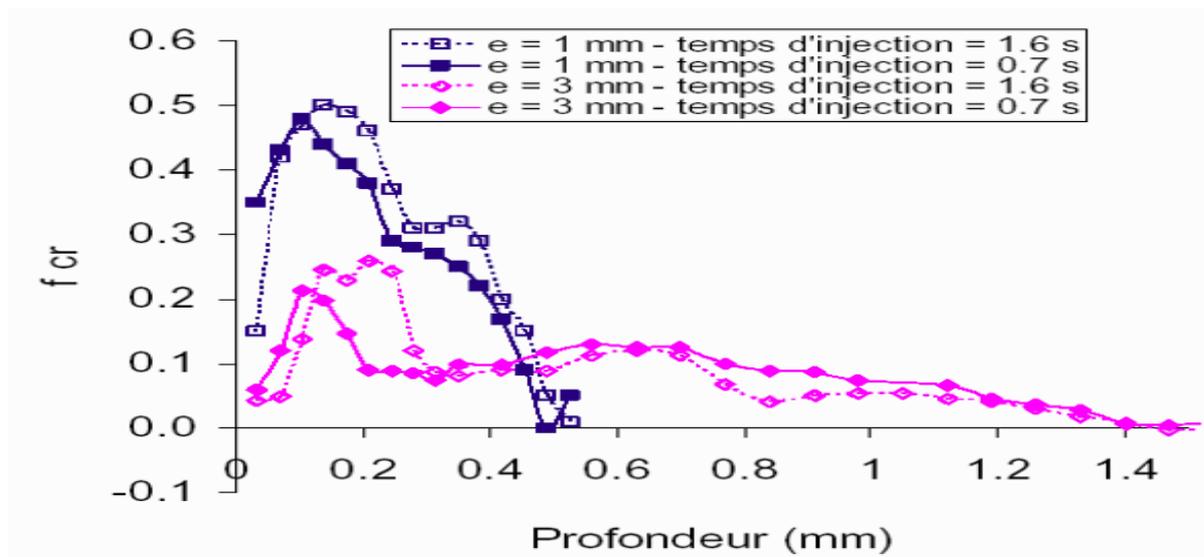


Figure 2.1 : Influence du temps d'injection et de l'épaisseur sur l'orientation de la phase cristalline à travers l'épaisseur [9]

fcr : fonction d'orientation moléculaire d'Hermans de la phase cristalline

II. 2.4 Influence de la pression

Il faut en premier lieu préciser que les auteurs n'indiquent pas systématiquement dans leurs travaux si la pression considérée est la pression d'injection ou de maintien. Trotignon *et al.* [13] notent que le taux de cristallinité et le taux de phase β , estimés à partir de mesures en DRX, sont globalement plus importants lorsque la pression augmente de 42 à 64 MPa. Trotignon et Verdu [7] estiment que la pression de maintien joue un rôle prépondérant sur la formation des structures se développant dans la couche cisailée.

Autres auteurs ont adopté une démarche expérimentale pour comprendre les conséquences microstructurales de l'augmentation de la pression de maintien (de 5 à 13 MPa). Ces auteurs n'ont cependant observé aucune modification significative de la microstructure suite au changement de ce paramètre, si ce n'est une faible diminution du taux de cristallinité (de quelques pourcents) dans la peau et le cœur. Ce résultat est cependant contradictoire avec les résultats précédents. Il a en effet été montré par différents auteurs que la pression appliquée pendant le processus d'injection favorise le développement de structures cristallines spécifiques [3].

II. 2.5 Influence de la distance par rapport au seuil d'injection

Des auteurs ont analysé les changements de structures cristallines en fonction de la position du prélèvement des échantillons par rapport au seuil d'injection des pièces. Ils ont notamment montré, que le taux de cristallinité moyen est plus élevé à proximité du seuil d'injection [13].

D'autres ont montré que l'orientation moléculaire varie fortement en fonction de la distance au seuil d'injection, [7]. La Figure (2.2) présente les niveaux d'orientation moléculaire, en fonction de la distance au seuil d'injection [10]. L'orientation serait maximum à proximité de l'entrée de la matière et plus faible lorsqu'on s'en éloigne. Les couches internes sont affectées par cette diminution d'orientation. Ils ont observé que les maxima d'orientation sont plus étroits loin du seuil d'injection, ce qui laisse supposer que la couche cisailée est plus mince. Ce point a été validé par des micrographies prises en lumière polarisée.

II.2.6 Influence de la géométrie du moule

La géométrie de l'écoulement (du seuil d'injection et de l'outillage) est un paramètre important et a un rôle majeur sur l'orientation des fibres [17].

- Les seuils d'injection

L'influence des seuils d'injection sur l'orientation des fibres a fait l'objet de nombreuses études [16], [14]. Il apparaît que la présence des seuils gouverne l'orientation initiale des fibres qui sont

transportées au cours de l'écoulement dans la couche de cœur car le taux de cisaillement y est pratiquement nul. Lorsque les seuils d'injection sont le siège d'écoulements, la couche de cœur est caractérisée par des fibres orientées dans la direction transverse à l'écoulement.

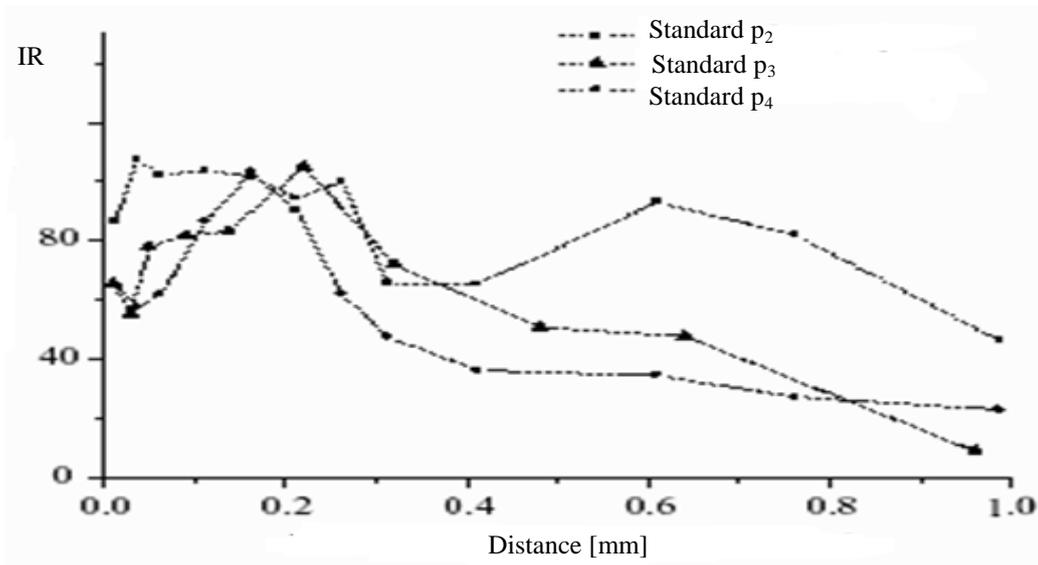


Figure 2.2 : Orientations moléculaires en fonction de la distance au seuil d'injection [10].

- La géométrie de l'outillage

Certains auteurs [18] ont montré, via des observations microscopiques qualitatives, que l'orientation des fibres, dans la zone de cœur, peut être affectée par une réduction de l'épaisseur de la cavité. Leur étude a montré qu'une réduction par un facteur deux de l'épaisseur d'une cavité entraîne une zone de cœur caractérisée par des fibres qui sont légèrement orientées dans le sens de l'écoulement. D'autre part, une réduction de l'épaisseur de la cavité a pour également de diminuer l'épaisseur de la couche de cœur. En effet, les écoulements dans des pièces minces créent des taux de cisaillement importants qui sont le siège d'une orientation quasi unidirectionnelle dans le sens de l'écoulement.

II.3 Calcul de retrait

Lorsqu'une matière plastique est injectée dans une cavité, elle commence à refroidir, ce qui entraîne une diminution de son volume. Cette réduction de volume peut être mesurée par la différence entre la densité de la matière fondue et la densité de la matière solide. Les vitesses de refroidissement à l'intérieur de la cavité étant très élevées et n'étant pas uniformes, la matière solidifiée incorporera également des contraintes internes. Ces contraintes pour être soulagées une fois la matière éjectée de la cavité, un processus qui peut être accéléré en maintenant la pièce à des températures élevées. Le retrait peut être défini par la formule

suivante : $R = (D - d) / D (100 \%)$ [2].

D : dimension de la cavité du moule.

d : dimension de la pièce moulée.

En général, le retrait n'est pas isotrope : il dépend de la direction, en particulier dans le cas des matériaux renforcés aux fibres de verre. Il convient de distinguer:

- le retrait dans le sens de l'écoulement;
- le retrait perpendiculaire à l'écoulement;
- le retrait dans le sens de l'épaisseur.

La somme de ces trois retraits doit être égale au retrait volumique d'un matériau, pouvant être obtenu à partir de la différence entre la densité de la matière fondue et la densité de la matière solide, ou en utilisant les diagrammes PVT.

Plusieurs tentatives ont été faites auparavant pour modéliser le retrait volumique en se basant sur les diagrammes PVT. Cependant, cette approche est limitée à la précision de ces diagrammes pour décrire le comportement du matériau sous les conditions opératoires (paramètres de mise en œuvre). Alors, des testes expérimentaux ont été développés afin d'étudier les retraits volumiques et linéaire pour chaque polymère et pour n'importe quelle géométrie du moule. Ainsi, la mesure des variables comme la pression et la température devient nécessaire durant le processus de moulage. Par conséquent, cette méthode ne peut être utilisée durant l'étape de conception du moule.

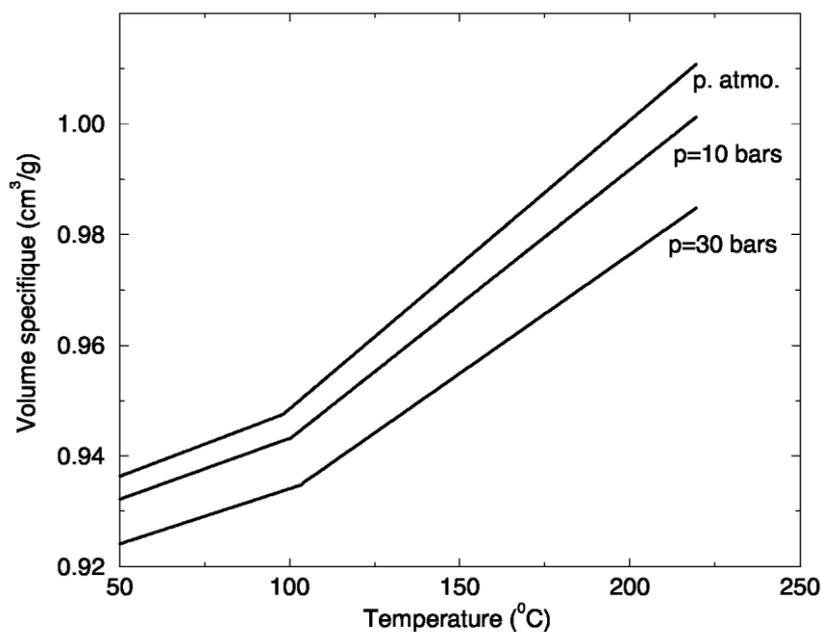


Figure : 2.3 : Diagramme PVT d'un polymère amorphe (ABS) [2]

CHAPITRE III

DISTRIBUTION DE LA TEMPERATURE

III.1. Introduction

Durant la phase de refroidissement à l'intérieur du moule. Il est à sa température de fin de la phase de compactage et se comporte comme un fluide visqueux. Ce polymère se trouvera en contact avec l'interface du moule plus froid régulé thermiquement par un liquide de refroidissement qui circule dans les canaux du moule. Ceci engendre un fort gradient de température à travers la pièce étudiée. On suppose que la température à la fin de la phase de compactage est constante.

Notre étude concerne la modalisation du transfert thermique dans le moule. La formulation mathématique donne une équation différentielle qui peut être résolue par plusieurs méthodes numérique. Ces méthodes sont :

- la méthode des différences finies
- la méthode des éléments finis
- la méthode des volumes finis
- la méthode des éléments frontières

III.2 Établissement de l'équation différentielle

Avant d'entreprendre l'étude des problèmes particuliers, nous allons établir l'équation différentielle définissant la répartition des températures dans un corps. Ensuite à l'aide de certaines hypothèses, nous transformerons cette équation après l'avoir simplifiée afin de la mettre sous des formes appropriées aux cas qui font l'objet de cette étude.

Considérons un petit parallélépipède (figure 3.1), découpé dans un corps de côté dx , dy , dz . L'équation définissant la répartition de température s'obtient en écrivant le principe de la conservation de l'énergie pour l'élément considéré pendant un temps dt .

Le bilan des énergies s'écrit littéralement, sous la forme:

$$E_{in} + E_{deg} = E_{sort} + E_{ei} \quad (3.1)$$

$$E_{ei} = \rho c v \frac{\partial T}{\partial t}, \quad E_{deg} = qv$$

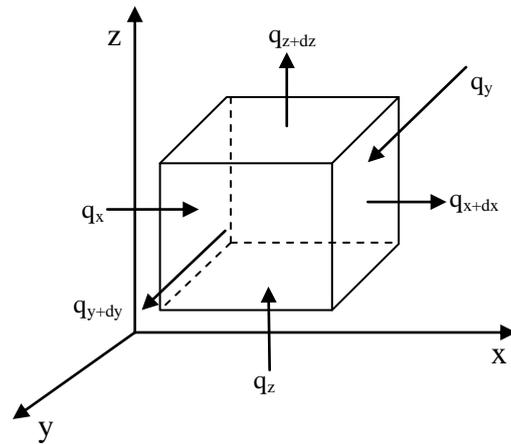


Figure 3.1 : Conduction dans un volume élémentaire

Où:

E_{ei} : Énergie emmagasinée

ρ : La densité de la matière

c : Chaleur spécifique

E_{deg} : énergie dégagée

q : Le flux de chaleur généré par unité de temps et de volume

v : Le volume du corps.

Chaleur qui entre pendant dt	+ Chaleur dégagée dans la masse par des sources internes pendant dt	=	Chaleur qui sort pendant dt	+ Chaleur due à la variation de l'énergie interne pendant dt
--------------------------------	---	---	-------------------------------	--

$$(q_x + q_y + q_z)dt + q(dx dy dz) = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + \rho c dT(dx dy dz) \quad (3.2)$$

Où:

dt : est la variation du temps

q_x, q_y, q_z : flux de chaleur entrant (figure 3.1)

$q_{x+dx}, q_{y+dy}, q_{z+dz}$: flux de chaleur qui sortant des faces (figure 3.1).

c : chaleur spécifique du matériau

ρ : densité du corps

T : température qui en fonction de x, y, z et du temps t ; $T=f(x, y, z, t)$

La quantité de chaleur qui entre dans la direction x est:

$$q_x = \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz \quad (3.3)$$

Celle qui sort s'écrit:

$$q_{x+dx} = \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dydz \quad (3.4)$$

En retranchant le flux de chaleur qui sort de celui qui entre de l'élément de volume dans la direction x , on obtient:

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (3.5)$$

De même pour les directions y et z :

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz \quad (3.6)$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz$$

En substituant ces relations dans l'équation de conservation d'énergie, et en divisant chaque terme par $dx dy dz$, on obtient l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c \quad (3.7)$$

En supposant que c et ρ sont indépendantes de la température et que k est le même dans les trois directions x , y , z .

Cette équation s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.8)$$

Cette équation est dite l'équation générale de conduction.

Où: $a = \frac{k}{\rho c}$, la diffusivité thermique en (m^2/h) du matériau.

III.3 Hypothèse du calcul

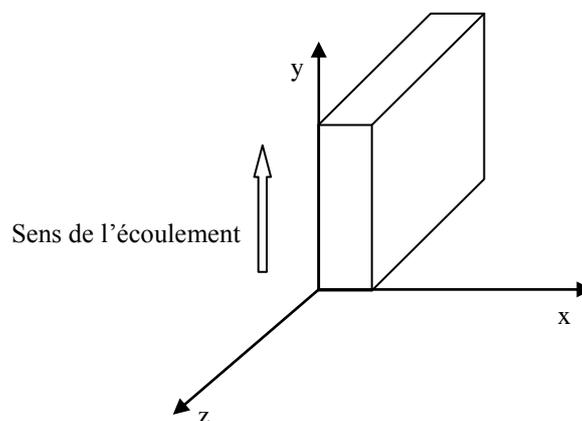


Figure 3.2 : Schéma de la plaque de calcul

- On suppose que la température varie linéairement dans la matière et dans le moule.
- $-k_p \frac{dT}{dx} \cong k_m \frac{dT}{dx}$
- K_p ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ K^{-1}$) : Conductivité thermique du polymère
- k_m ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ K^{-1}$) : Conductivité thermique de l'acier du moule,
- La distribution de la température sera calculée sur le plan (x, y) et sans source de chaleur, donc l'équation de la chaleur devient : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$ (3.9)
- On suppose qu'aucun écoulement n'intervient lors du refroidissement.
- La distribution de la température enfin de compactage est supposée comme température initial, $t=0$
- On s'impose deux approches :
 - la matière reste toujours en contact avec le moule (sans découlement)
 - découlement d'une face de la pièce dans le moule
- Échange symétrique : on suppose que le fluide de refroidissement à une température constante sur les faces
- Échange non symétrique : la température de refroidissement n'est pas constante sur les faces.
- On suppose que la température du moule est égale à la température du fluide de refroidissement.
- Sens de l'écoulement suivant y (figure 3.2)

III.4 Résolution de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur en régime variable en deux dimensions à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.10)$$

On va résoudre cette équation par la méthode des différences finies

III.4.1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est la méthode numérique la plus ancienne et fut la première utilisée pour résoudre des problèmes thermiques. Elle consiste à diviser le domaine en un maillage de forme et de dimensions adaptées à chaque problème.

La solution est recherchée en un réseau de points espacés régulièrement ou irrégulièrement pour constituer ce que l'on appelle un maillage. La solution du problème est ensuite calculée en chaque point du maillage.

L'approximation réside dans le remplacement de chaque dérivée de l'équation (3.10) par une expression aux différences finies, exprimant la valeur de l'inconnue en un point en fonction de sa valeur au point voisin (figure 3.2).

Il y'a deux schéma de résolution :

- 1- Le schéma explicite ou les dérivées spatiales sont exprimées au temps t .
- 2- Le schéma implicite, elles sont exprimées au temps $t+\Delta t$.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y}$$

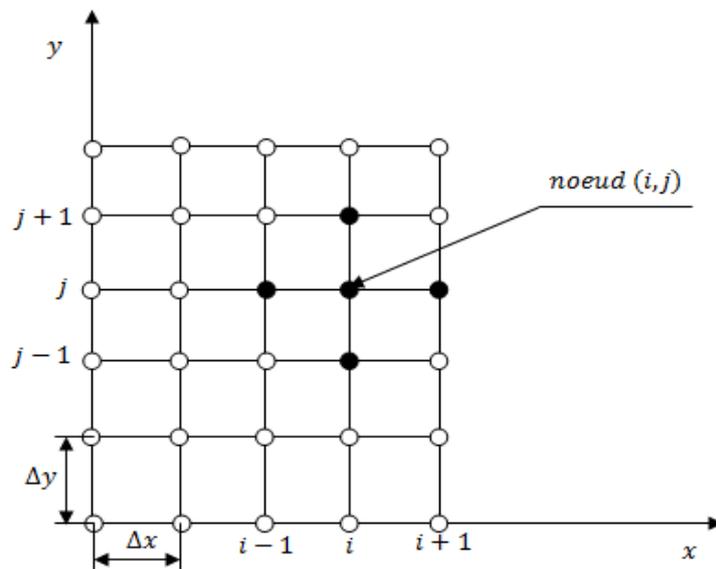


Figure 3.3 : Schéma du maillage

III.4.1.1 Schéma explicite

On utilisera une discrétisation centrée pour la dérivée du second ordre suivant x et y

Pour une discrétisation centrée du second ordre on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{\Delta x^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{\Delta y^2} \quad (3.12)$$

Et pour le temps on a utilisera une discrétisation à droite suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3.13)$$

On pose :

$$\Delta x = \Delta y = h \text{ (maillage régulé)}$$

On remplace (3.11), (3.12) et (3.13) dans l'équation (13.10)

$$\frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{\Delta y^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{h^2} + \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{h^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \right)$$

$$T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t + T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t - 4T_{i,j}^t = \frac{h^2}{a\Delta t} (T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t)$$

D'où

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{h^2}{a\Delta t} (T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t + T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t) + \left(1 - 4 \frac{h^2}{a\Delta t} \right) T_{i,j}^t$$

On pose $c = \frac{h^2}{a\Delta t}$ donc

$$\boxed{T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{1}{c} (T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t + T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t) + \left(1 - \frac{4}{c} \right) T_{i,j}^t} \quad (3.15)$$

III.4.1.2 Schéma implicite

On utilisera une discrétisation centrée pour la dérivée du second ordre suivant x et y
Pour une discrétisation centrée du second ordre on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - 2T_{i,j}^{t+\Delta t} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - 2T_{i,j}^{t+\Delta t} + T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta y^2} \quad (3.17)$$

Et pour le temps on a utilisera une discrétisation à droite suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3.18)$$

On pose :

$$\Delta x = \Delta y = h$$

On remplace (3.16), (3.17) et (3.18) dans l'équation (3.10)

$$\frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - 2T_{i,j}^{t+\Delta t} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - 2T_{i,j}^{t+\Delta t} + T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta y^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - 2T_{i,j}^{t+\Delta t} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - 2T_{i,j}^{t+\Delta t} + T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{h^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \right)$$

$$T_{i+1,j}^{t+\Delta t} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t} + T_{i,j+1}^{t+\Delta t} + T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - 4T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{h^2}{a\Delta t} (T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t)$$

D'où

$$T_{i,j}^t = \frac{a\Delta t}{h^2} (T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t + T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t) + \left(1 + 4 \frac{a\Delta t}{h^2} \right) T_{i,j}^{t+\Delta t}$$

On pose $c = \frac{h^2}{a\Delta t}$ donc

$$(4 + c)T_{i,j}^{t+\Delta t} - (T_{i+1,j}^{t+\Delta t} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t} + T_{i,j+1}^{t+\Delta t} + T_{i,j-1}^{t+\Delta t}) = cT_{i,j}^t \quad (3.19)$$

C'est un système d'équation pour déterminer les températures en temps $t + \Delta t$, qu'il faut résoudre avec une méthode adéquate. (3.19)

III.5 Discrétisation des conditions aux limites

III.5.1 Sans décollement symétrique

On suppose que la densité des flux de contact polymère et moule sont parfait $\varphi_p = \varphi_m$

$$\varphi_p = -k_p \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi_m = -k_m \frac{dT}{dx}$$

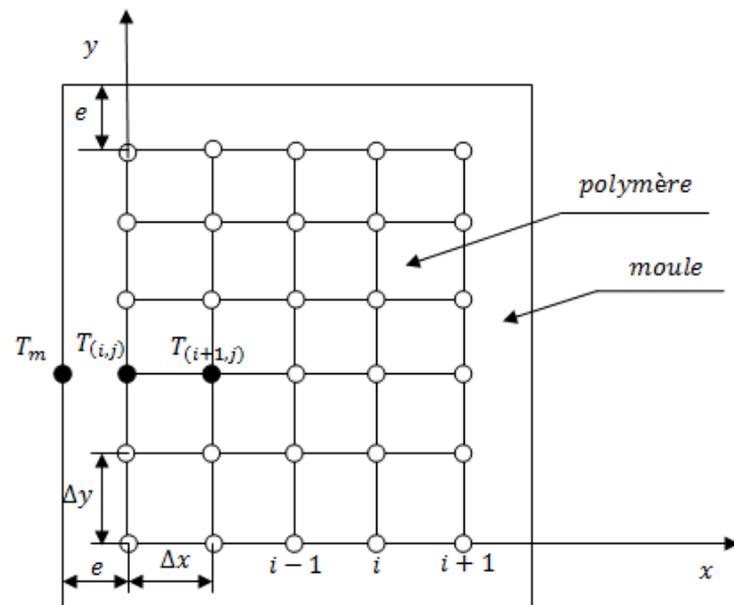


Figure 3.4 : Schéma de la discrétisation des conditions aux limites, sans décollement symétrique

$$\varphi_p = \varphi_m \Rightarrow k_p \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} = k_m \frac{T_{i,j} - T_m}{e}$$

e : distance entre l'interface et les canaux de refroidissement

T_m : Température du liquide de refroidissement

$$T_{i,j} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_m$$

Pour la méthode explicite

$$T_{i,j}^t = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j}^t - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_m \quad (3.20)$$

Pour la méthode implicite

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_m \quad (3.21)$$

III.5.2 Sans décollement non symétrique

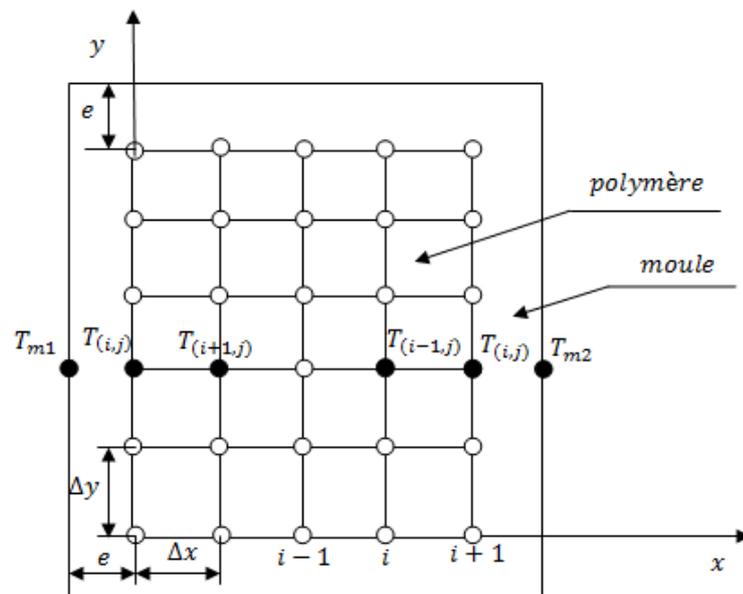


Figure 3.5 : schéma de discrétisation des conditions aux limites, sans décollement non symétrique

On suppose que la densité des flux de contact polymère et moule sont parfait $\varphi_p = \varphi_m$

$$\varphi_p = -k_p \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi_m = -k_m \frac{dT}{dx}$$

1- Coté gauche

$$\varphi_p = \varphi_m \Rightarrow k_p \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} = k_m \frac{T_{i,j} - T_{m1}}{e}$$

Donc

$$T_{i,j} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m1}$$

Pour la méthode explicite

$$T_{i,j}^t = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j}^t - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m1} \quad (3.22)$$

Pour la méthode implicite

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m1} \quad (3.23)$$

1- Coté droite

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\varphi_p = \varphi_m \Rightarrow k_p \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} = k_m \frac{T_{i,j} - T_{m2}}{e}$$

Donc

$$T_{i,j} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i-1,j} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m2}$$

Pour la méthode explicite

$$T_{i,j}^t = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i-1,j}^t - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m2} \quad (3.24)$$

Pour la méthode implicite

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m2} \quad (3.25)$$

III.5.3 Avec décollement symétriques

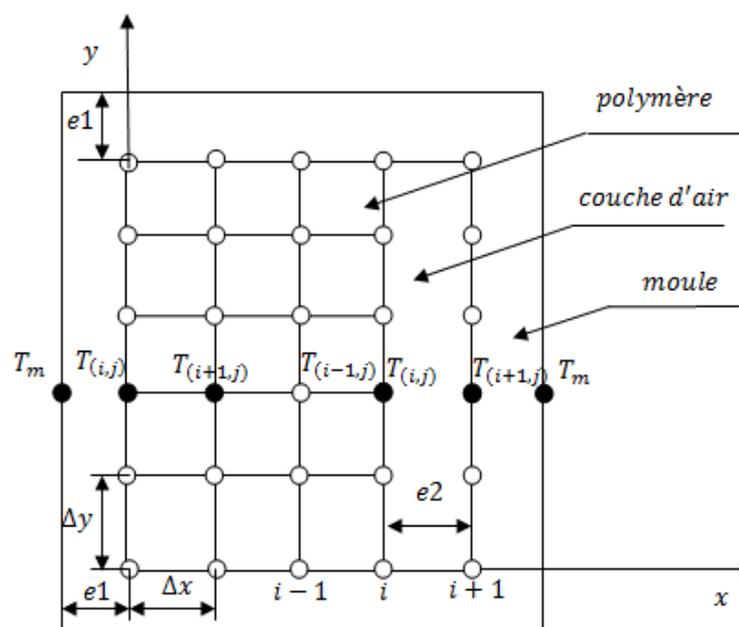


Figure 3.6 : schéma de la discrétisation des conditions aux limites, avec décollement symétriques

On suppose que la densité des flux de contact polymère, moule et l'air sont parfait

$$\varphi_p = \varphi_m = \varphi_a$$

$$\varphi_p = -k_p \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi_m = -k_m \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi_a = -k_a \frac{dT}{dx}$$

k_a : conductivité thermique d'air

$$\varphi_p = \varphi_m = \varphi_a \Rightarrow k_p \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} = k_m \frac{T_m - T_{i+1,j}}{e1} = k_a \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{e2}$$

$e2$: L'épaisseur de la couche d'air due au décollement

On pose : $e2 = \Delta x = h$

De la deuxième égalité on trouve

$$T_{i+1,j} = \left(\frac{k_p h}{k_a e1 + k_m h} \right) T_m - \left(\frac{k_a e1}{k_a e1 + k_m h} \right) T_{i,j}$$

On remplace la valeur de $T_{i+1,j}$ dans la première égalité droite on trouve

$$k_p \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h} = \left(\frac{k_a k_m}{k_a e1 + k_m h} \right) T_m - \left(\frac{k_a k_m}{k_a e1 + k_m h} \right) T_{i,j}$$

On pose : $k_{eq} = \frac{k_a k_m}{k_a e1 + k_m h}$

D'où

$$T_{i,j} = \frac{1}{k_{eq} + \frac{k_p}{h}} \left(\frac{k_p}{h} T_{i-1,j} + k_{eq} T_m \right)$$

Pour la méthode explicite

$$T_{i,j}^t = \frac{1}{k_{eq} + \frac{k_p}{h}} \left(\frac{k_p}{h} T_{i-1,j}^t - k_{eq} T_m \right) \quad (3.26)$$

Pour la méthode implicite

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{1}{k_{eq} + \frac{k_p}{h}} \left(\frac{k_p}{h} T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - k_{eq} T_m \right) \quad (3.27)$$

III.5.4 Avec décollement non symétriques

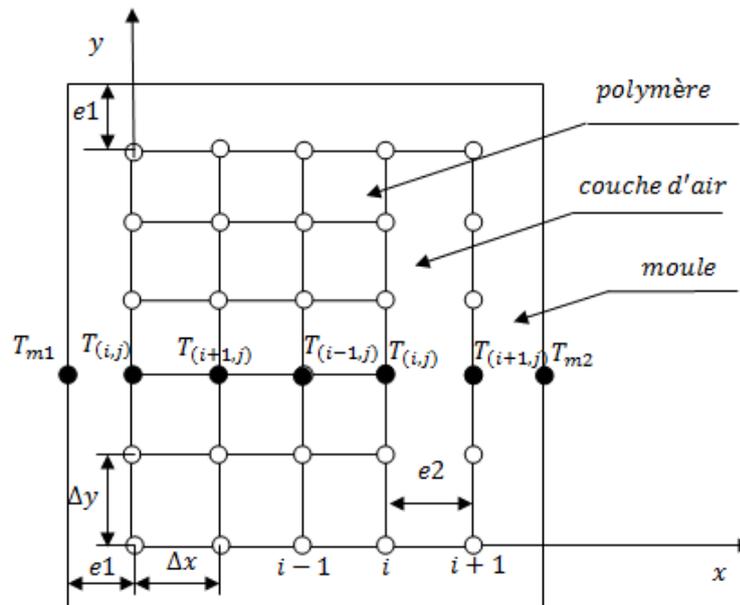


Figure 3.7 : schéma de la discrétisation des conditions aux limites, avec décollement non symétrique

2- Coté gauche

$$\varphi_p = \varphi_m \Rightarrow k_p \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} = k_m \frac{T_{i,j} - T_{m1}}{e}$$

Donc

$$T_{i,j} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m1}$$

Pour la méthode explicite

$$T_{i,j}^t = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j}^t - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m1} \quad (3.28)$$

Pour la méthode implicite

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \left(\frac{k_p e}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - \left(\frac{k_m \Delta x}{k_m \Delta x + k_p e} \right) T_{m1} \quad (3.29)$$

3- Coté droite

On suppose que la densité des flux de contact polymère, moule et l'air sont parfait

$$\varphi_p = \varphi_m = \varphi_a, \varphi_p = -k_p \frac{dT}{dx}, \varphi_m = -k_m \frac{dT}{dx}, \varphi_a = -k_a \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi_p = \varphi_m = \varphi_a \Rightarrow k_p \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} = k_m \frac{T_{m2} - T_{i+1,j}}{e1} = k_a \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{e2}$$

On suppose : $e2 = \Delta x = h$

De la deuxième égalité on trouve

$$T_{i+1,j} = \left(\frac{k_p h}{k_a e1 + k_m h} \right) T_{m2} - \left(\frac{k_a e1}{k_a e1 + k_m h} \right) T_{i,j}$$

On remplace la valeur de $T_{i+1,j}$ dans la première égalité droite on trouve

$$k_p \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h} = \left(\frac{k_a k_m}{k_a e1 + k_m h} \right) T_{m2} - \left(\frac{k_a k_m}{k_a e1 + k_m h} \right) T_{i,j}$$

On pose : $k_{eq} = \frac{k_a k_m}{k_a e1 + k_m h}$

D'où

$$T_{i,j} = \frac{1}{k_{eq} + \frac{k_p}{h}} \left(\frac{k_p}{h} T_{i-1,j} + k_{eq} T_{m2} \right)$$

Pour la méthode explicite

$$T_{i,j}^t = \frac{1}{k_{eq} + \frac{k_p}{h}} \left(\frac{k_p}{h} T_{i-1,j}^t - k_{eq} T_{m2} \right) \quad (3.30)$$

Pour la méthode implicite

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{1}{k_{eq} + \frac{k_p}{h}} \left(\frac{k_p}{h} T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - k_{eq} T_{m2} \right) \quad (3.31)$$

III.6 Organigramme de programmation

1- Schéma explicite

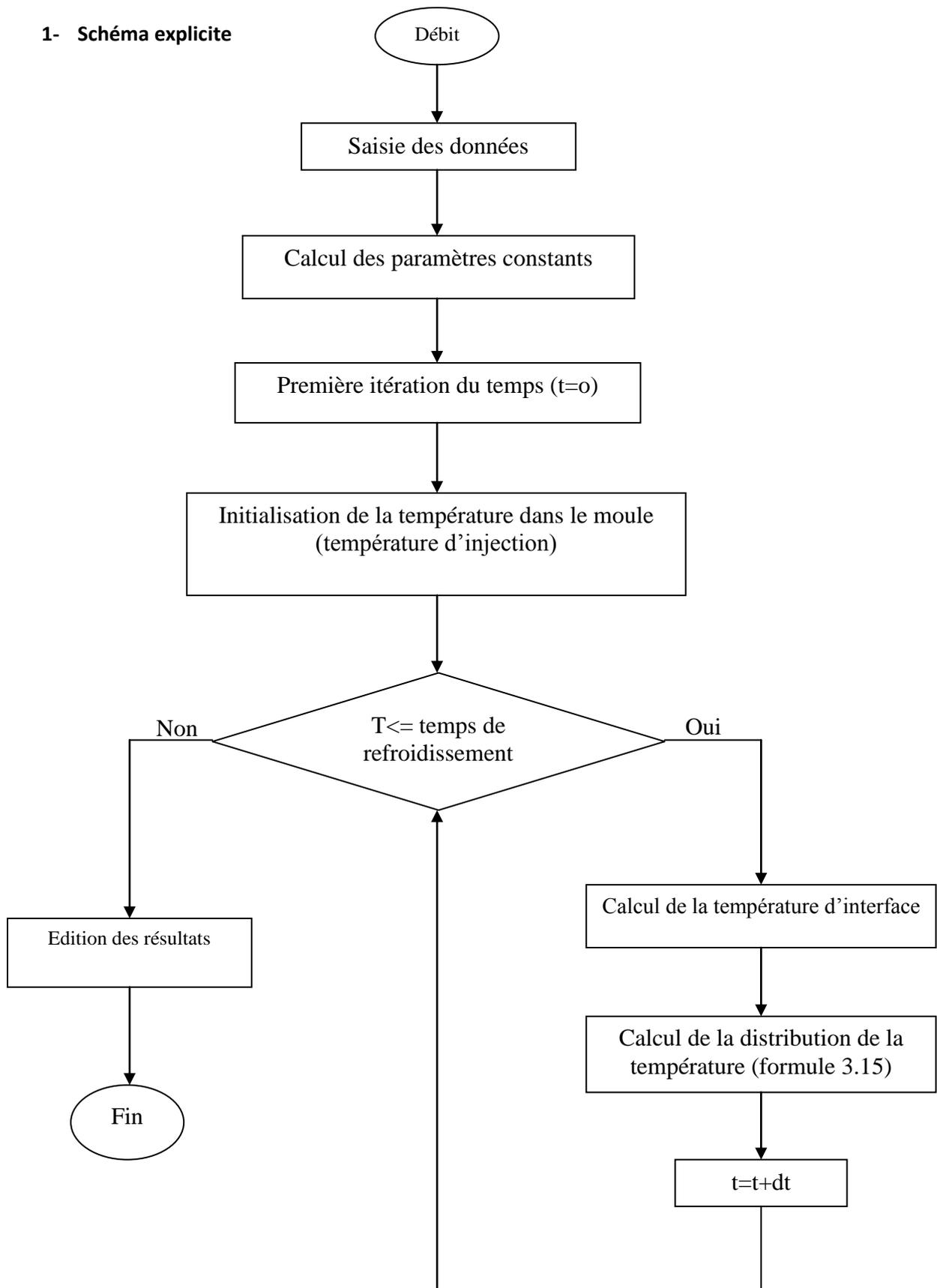


Figure 3.8 : Organigramme de calcul de distribution de la température (méthode explicite)

1- Schéma implicite

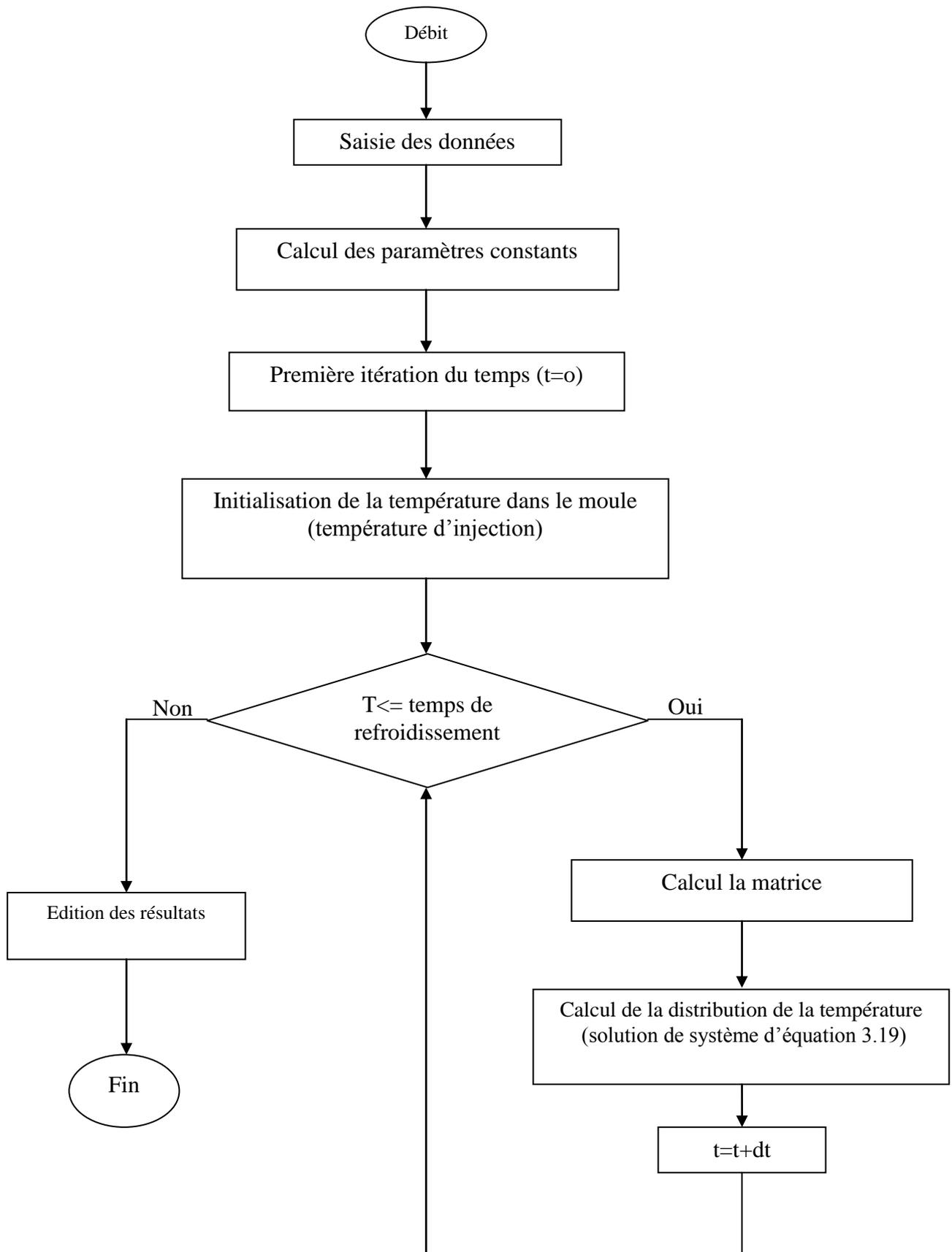


Figure 3.9 : Organigramme de calcul de distribution de la température (méthode implicite)

III.7 Etude d'un cas

III.7.1 Données

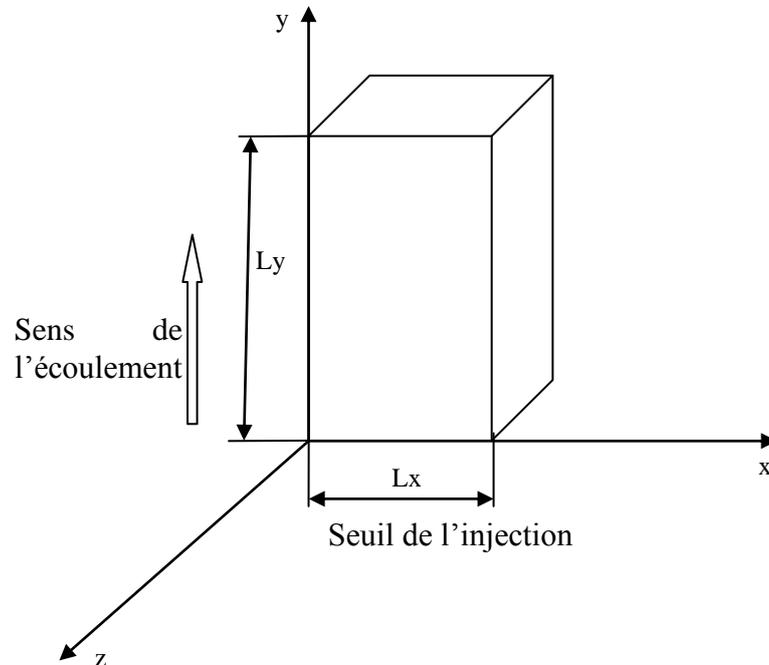


Figure 3.10 : Plaque de calcul

1) Géométrie de la plaque

$L_x=4$ (épaisseur de la plaque en (mm))

$L_y=14$ (longueur de la plaque en (mm))

$N=L_x/\Delta x$ (Nombres des nœuds suivant x)

$M=L_y/\Delta y$ (Nombres des nœuds suivant y)

2) Temps

$t= 180$ (le temps de refroidissement en (s))

$dt= 32.25$ (pas de temps en (s))

3) Matériau polymère

$K_p=0.11$ (conductivité thermique [$w/^\circ C m$])

$R_p=770$ (masse volumique [kg/m^3])

$C_p=3000$ (chaleur massique [$j/kg^\circ C$])

4) Matériau acier (Moule)

$K_m=220$ (conductivité thermique [$\text{W}/^\circ\text{C m}$])

$R_m=2710$ (masse volumique [kg/m^3])

$C_m=896$ (chaleur massique [$\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}$])

4) air

$K_a=0.026$ (conductivité thermique d'air [$\text{W}/^\circ\text{C m}$])

5) cas de refroidissement symétrique

$T_m=308$ (Température de refroidissement du moule en ($^\circ\text{K}$))

$T_{inj}=528$ (Température d'injection en ($^\circ\text{K}$))

$h= \Delta y = \Delta x =1$

$e_1= 1$ (distance entre le canal de refroidissement et la paroi du moule)

6) Cas de refroidissement non symétrique

$T_{m1}=308$ (Température de refroidissement du moule en(K))

$T_{m2}=298$ (Température de refroidissement du moule en(K))

$T_{inj}=528$ (Température d'injection en (K))

$e_2 = 1$ (Épaisseur de la couche d'air)

III .7.2 Résultats

III. 7. 2.1 Schéma explicite (symétrique sans décollement)

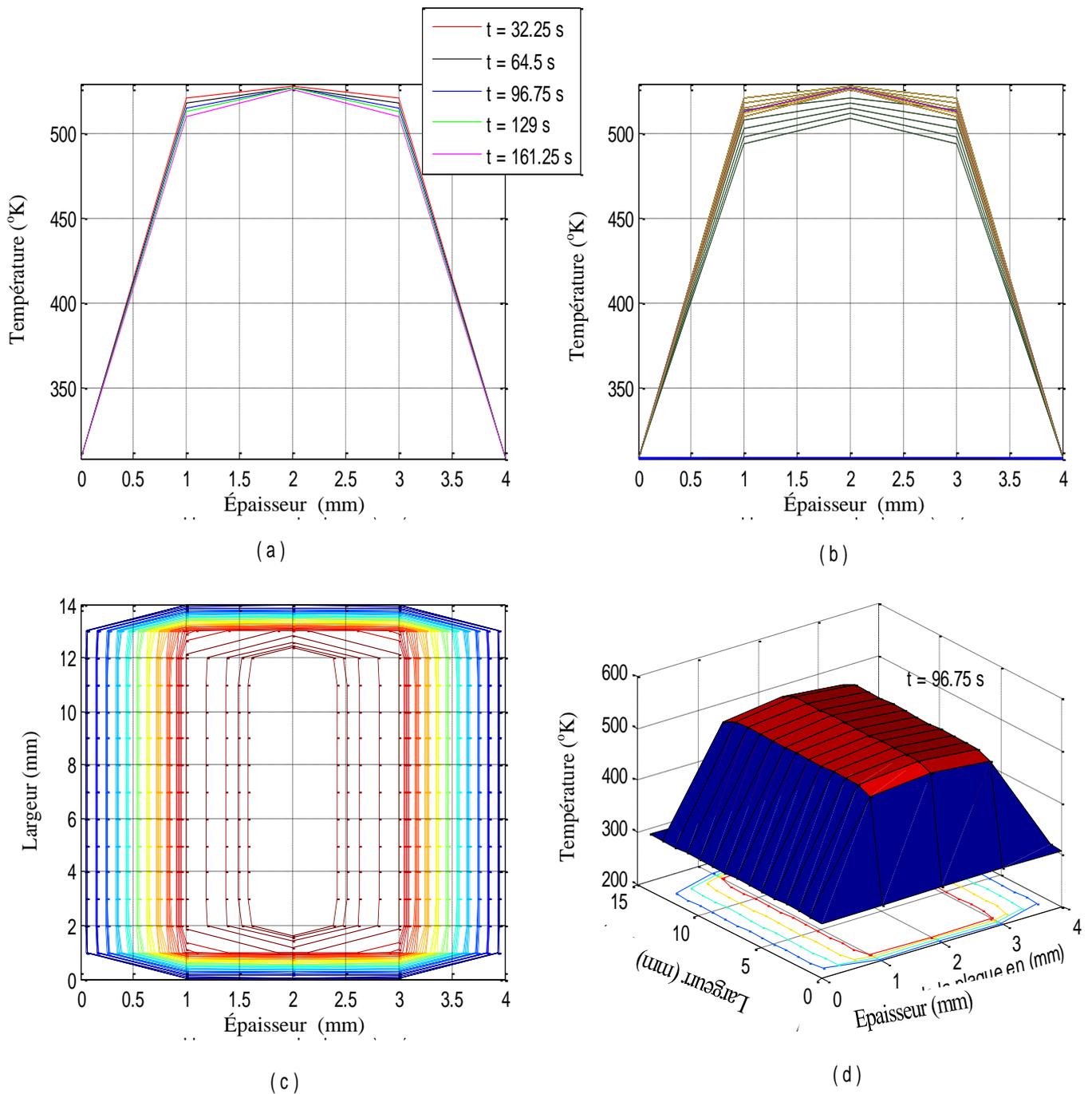


Figure 3.11 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique sans décollement (schéma explicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toutes la plaque, (c) sur le plans (x, y) dans tout le temps (d) sur le plans (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.2 Schéma implicite (symétrique sans décollement)

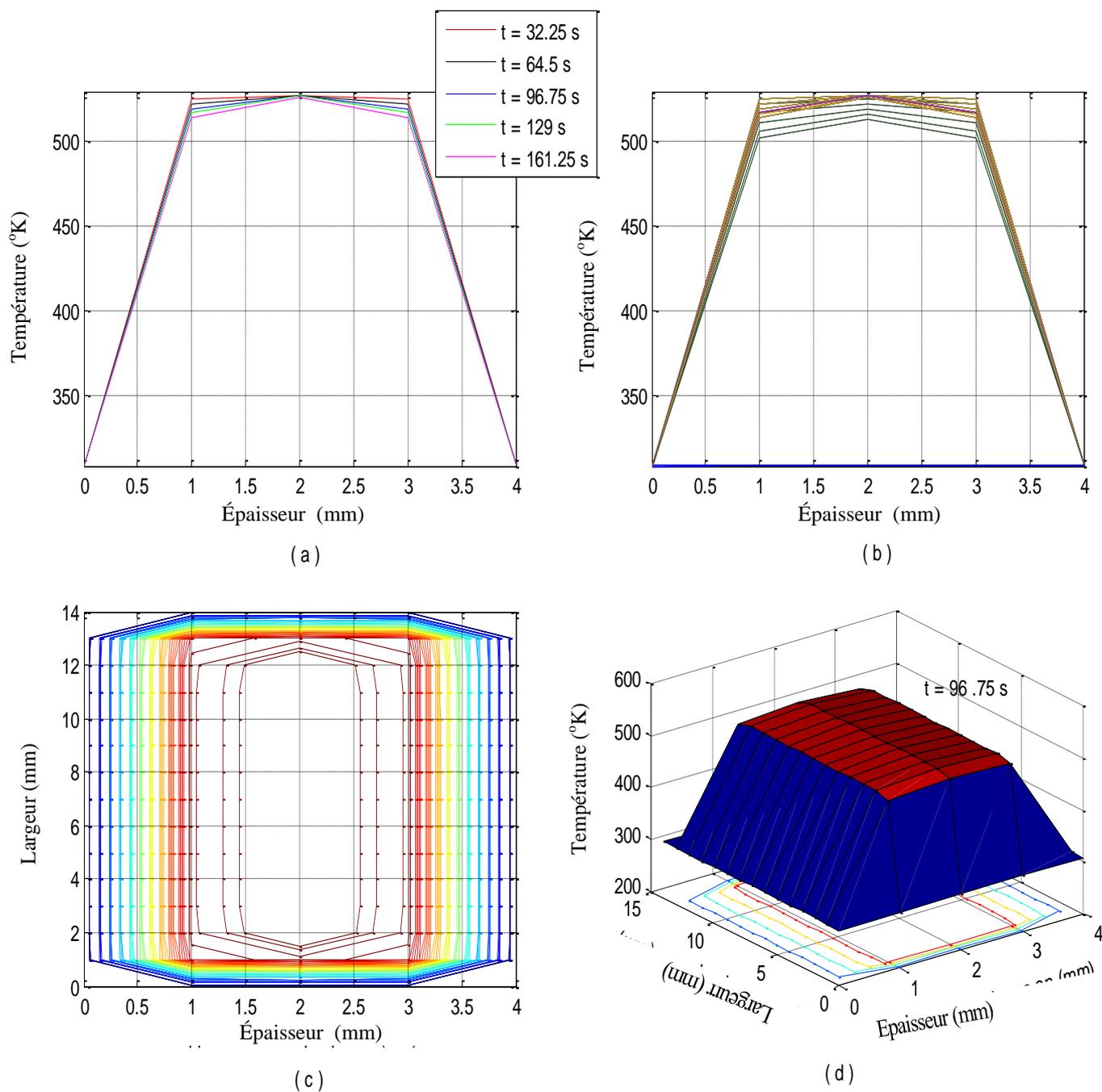


Figure 3.12 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique sans décollement (schéma implicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur le plan (x, y) dans tout le temps (d) sur le plan (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.3 Schéma explicite (non symétrique sans décollement)

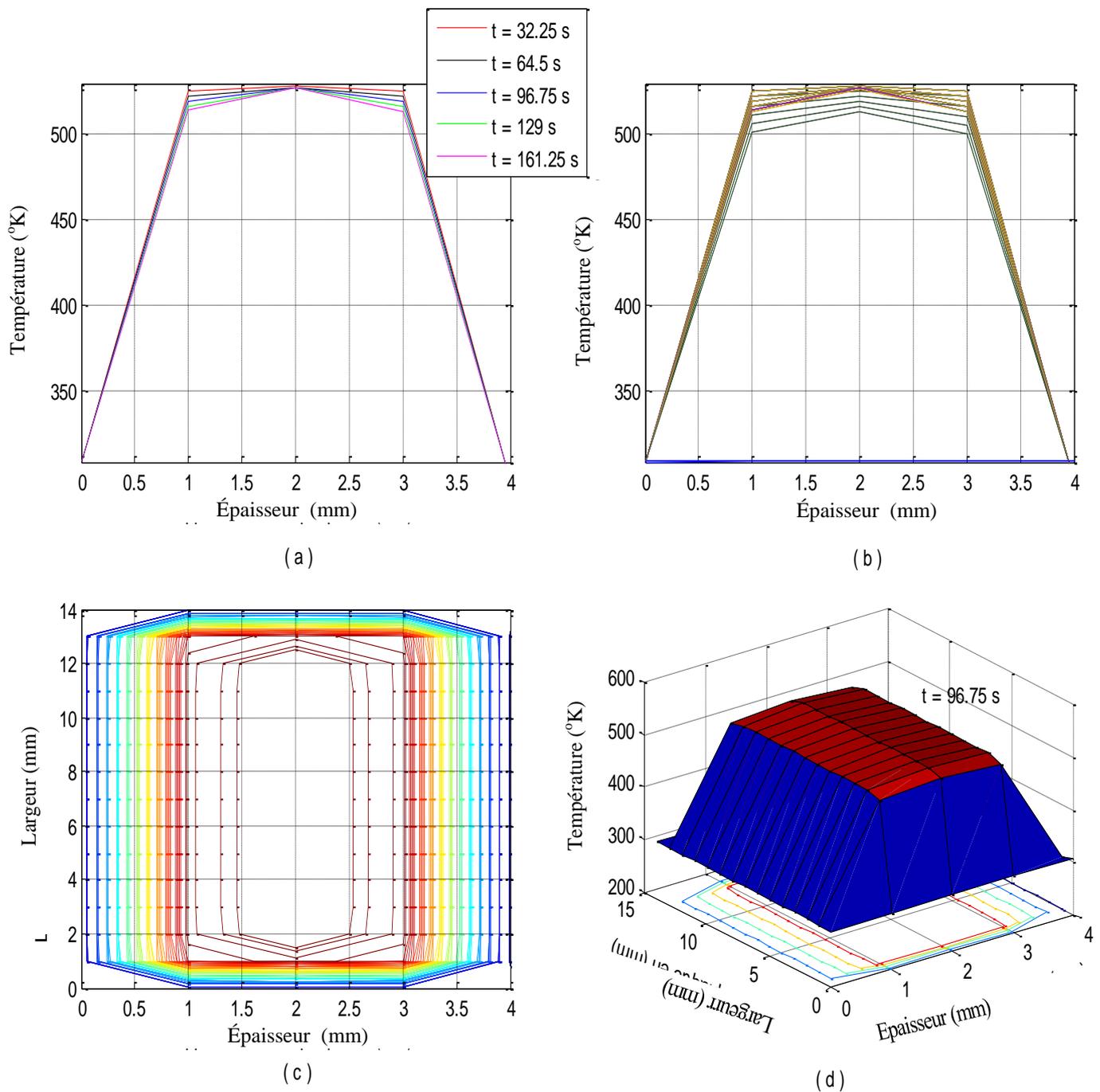


Figure 3.13 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique sans décollement (schéma explicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur le plans (x, y) dans tout le temps (d) sur le plans (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.4 Schéma implicite (non symétrique sans décollement)

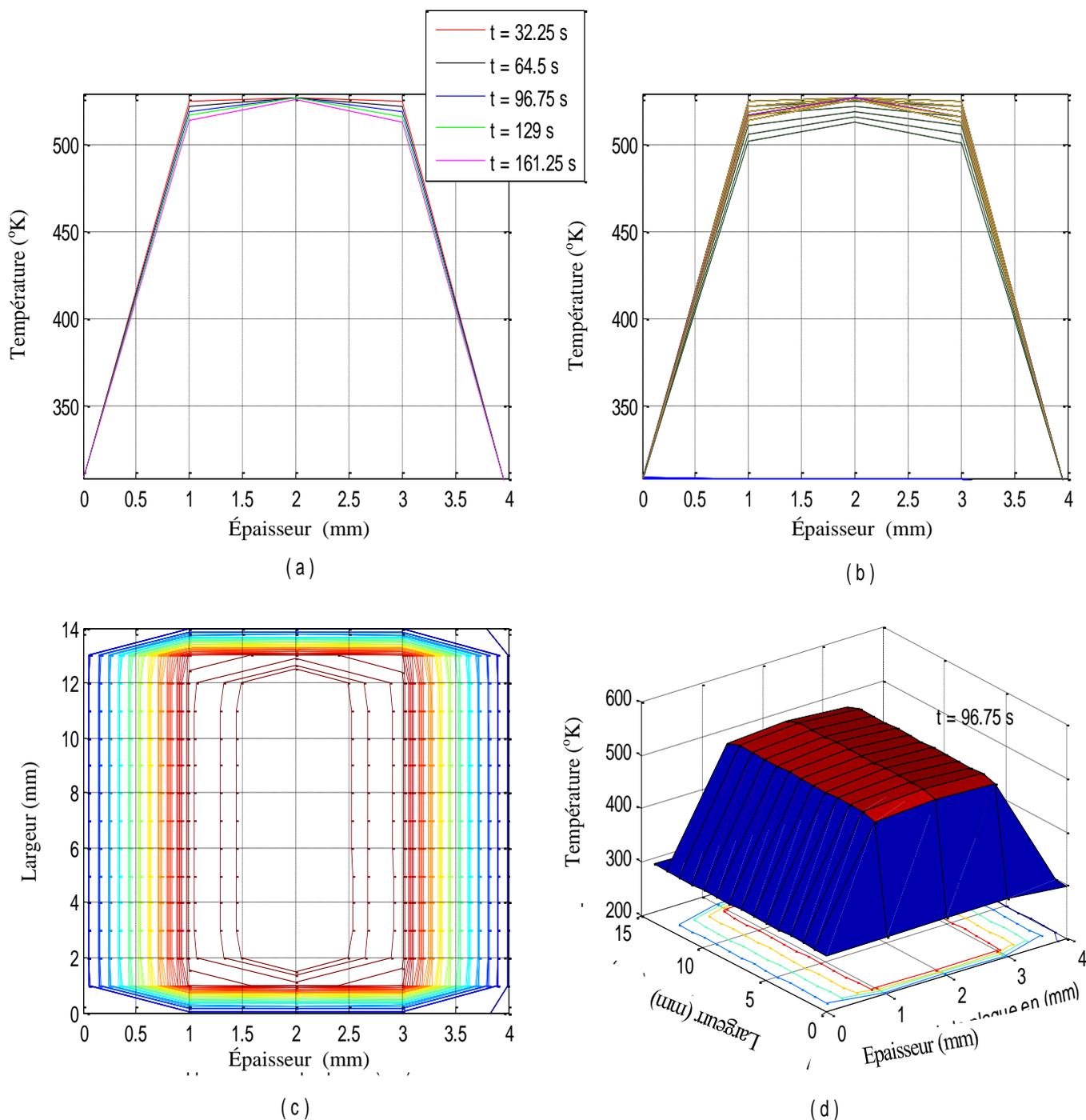


Figure 3.14 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique sans décollement (schéma implicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur le plans (x, y) dans tout le temps (d) sur le plans (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.5 Schéma explicite (symétrique avec décollement)

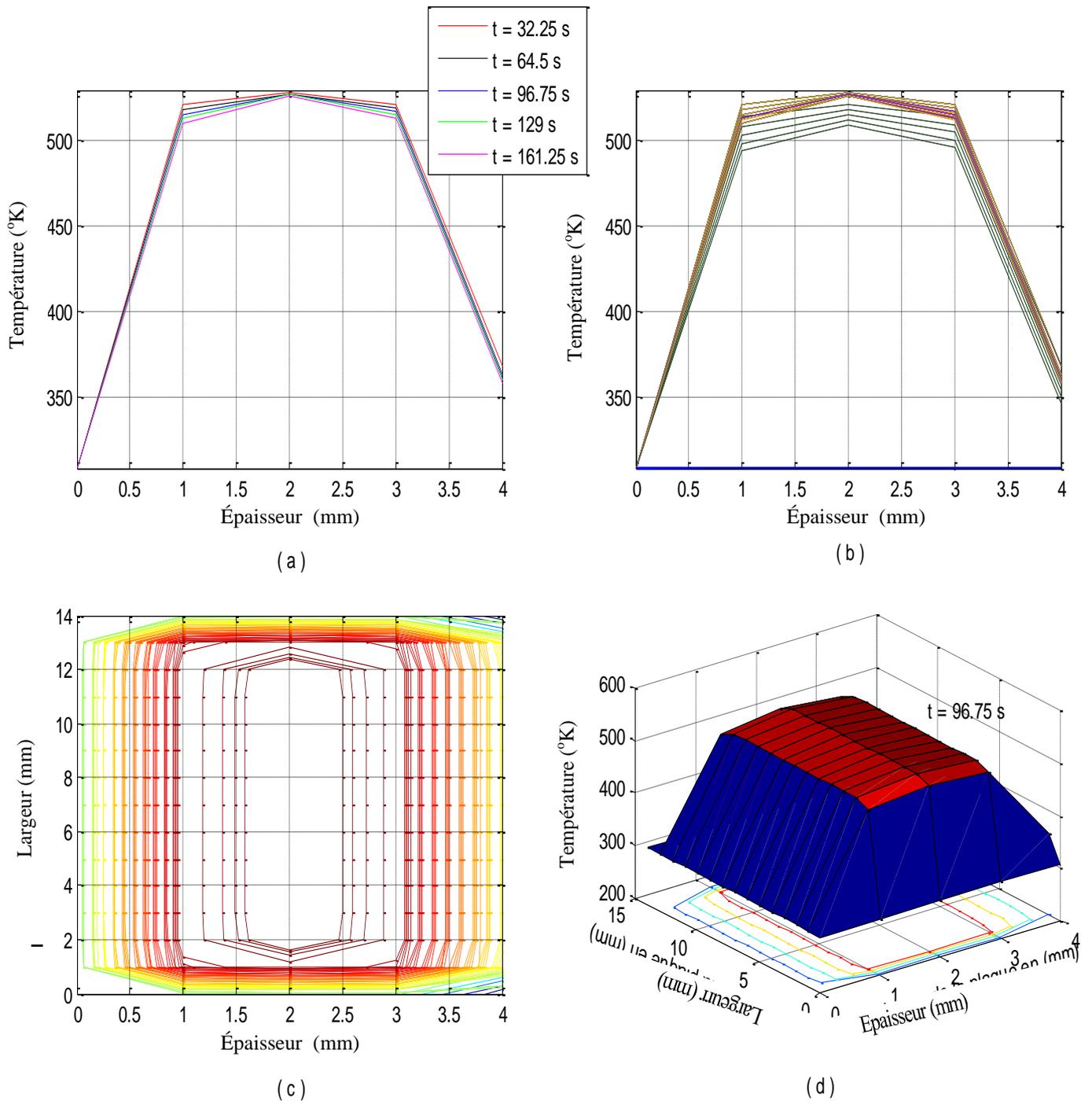


Figure 3.15 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique avec décollement (schéma explicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur les plans (x, y) dans tout le temps (d) sur les plans (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.6 Schéma implicite (symétrique avec décollement)

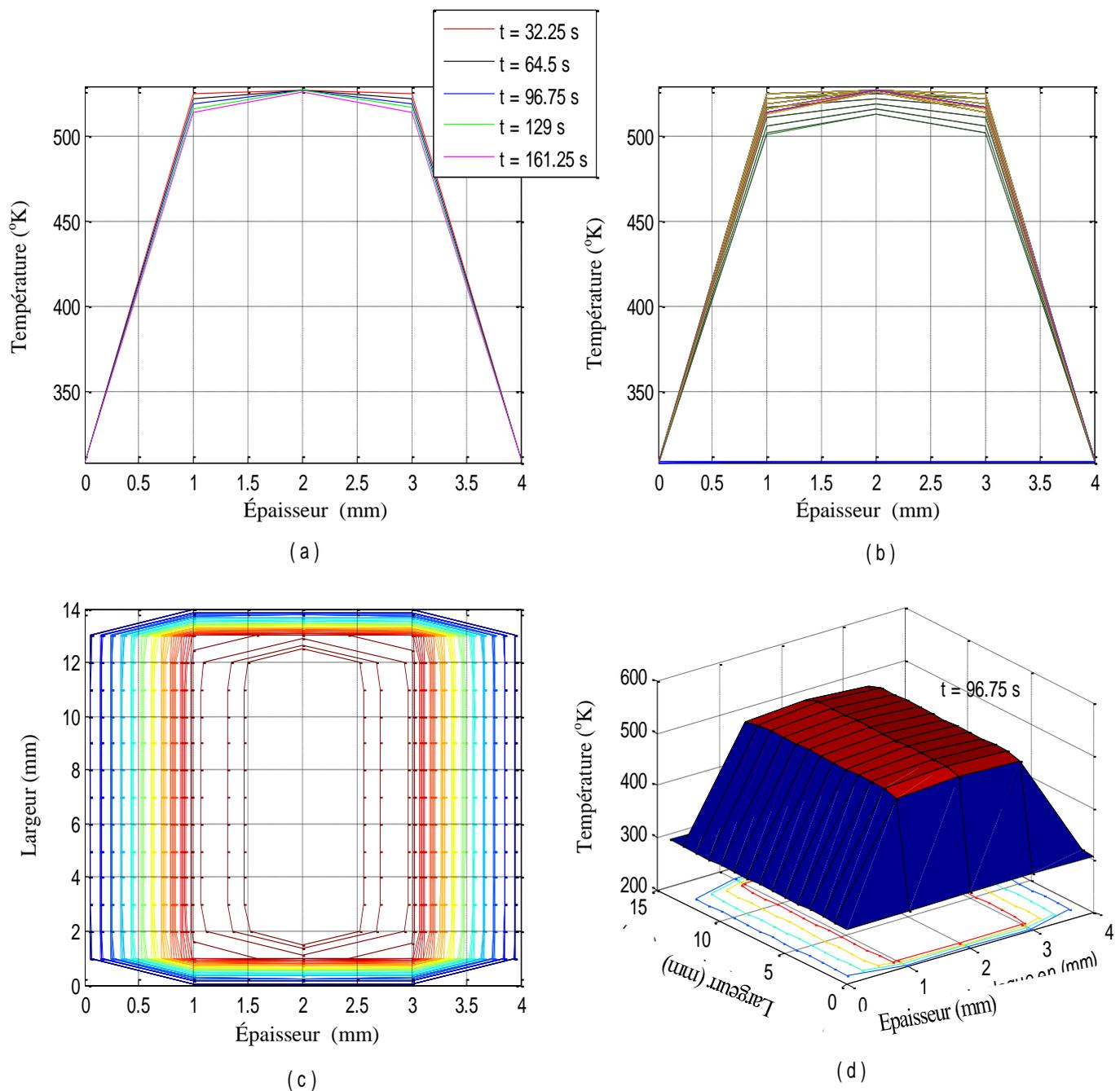


Figure 3.16 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas symétrique avec décollement (schéma implicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur le plan (x, y) dans tout le temps (d) sur le plan (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.7 Schéma explicite (non symétrique avec décollement)

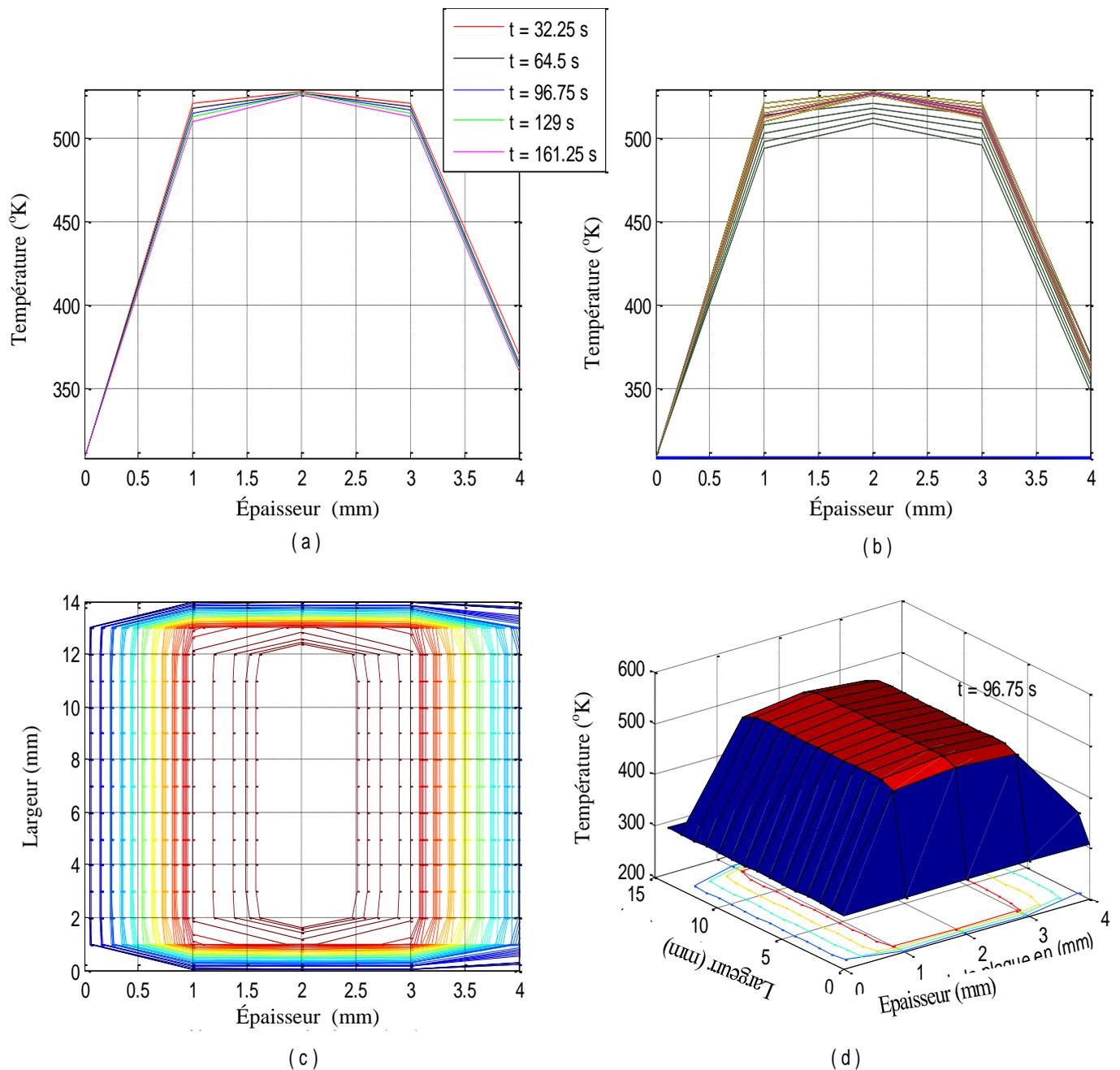


Figure 3.17 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique avec décollement (schéma explicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur le plans (x, y) dans tout le temps (d) sur le plans (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.8 Schéma implicite (non symétrique avec décollement)

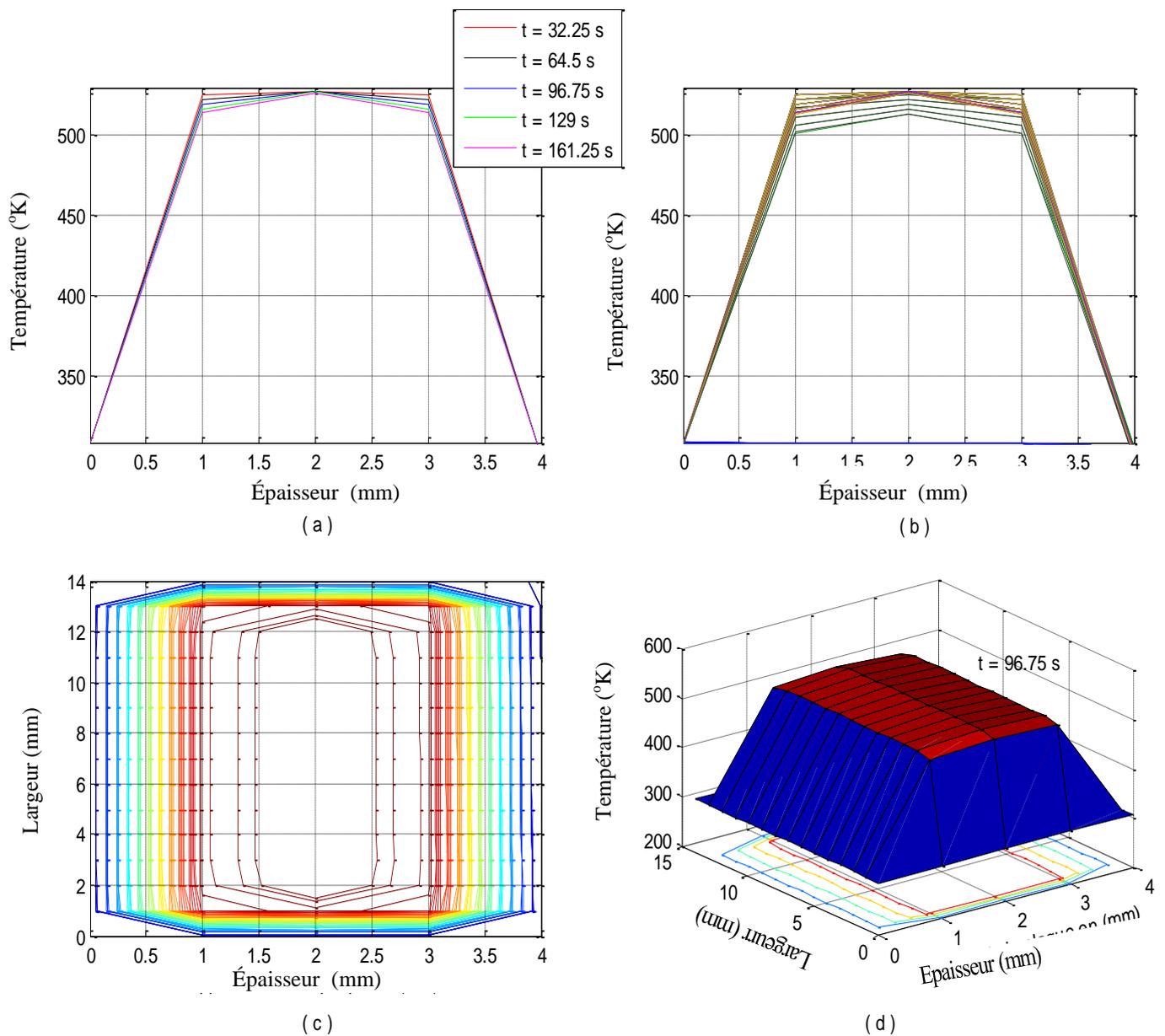


Figure 3.18 : Distribution de la température en fonction du temps, dans le cas non symétrique avec décollement (schéma implicite), (a) en milieu de la plaque, (b) dans toute la plaque, (c) sur le plans (x, y) dans tout le temps (d) sur le plans (x, y) à $t=96.75$ s

III. 7. 2.9 Comparaison entre schéma explicite et implicite dans tout les cas

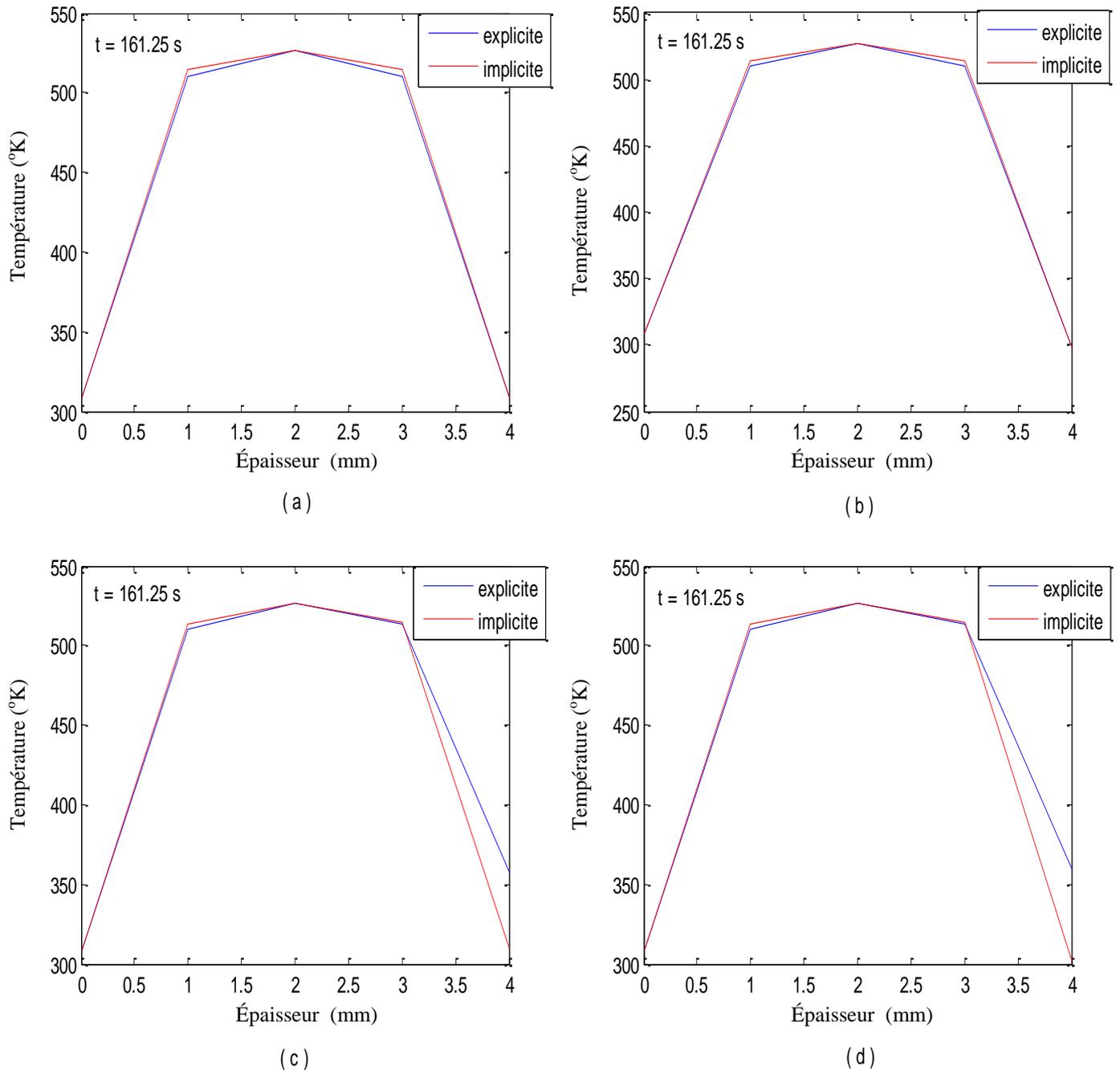


Figure 3.19 : Comparaison entre les résultats du schéma explicite et implicite : (a) symétrique sans décollement, (b) non symétrique sans décollement, (c) symétrique avec décollement, (d) non symétrique avec décollement,

III. 7. 3 Interprétations

Dans le cas du refroidissement symétrique sans décollement on remarque :

- Une symétrie parfaite dans les résultats obtenue et dans les graphes des figures (3.11 et 3.12)
- La diminution de la température dans l'épaisseur est plus rapide que celle de largeur
- Le débit de la plaque (correspond au seuil d'injection) et la fin se refroidi plus rapide que le milieu reste chaud malgré le temps écoulé.

Dans le cas du refroidissement non symétrique sans décollement on remarque :

- Les résultats obtenus perdent sa symétrie par rapport au cas symétrique (figure (3.13 et 3.14))
- La diminution de la température de l'épaisseur est plus rapide que celle de largeur
- Le débit de la plaque (correspond au seuil d'injection) et la fin se refroidi plus rapide que le milieu reste chaud malgré le temps écoulé.

• Pour assurer une symétrie de refroidissement à travers l'épaisseur, il faut assurer une régulation thermique au niveau du liquide de refroidissement

Dans le cas du refroidissement avec découlement on remarque :

- Les résultats obtenue perd sa symétrie et aussi dans les graphes figure (3.15, 3.16, 3.17, 3.18)
- La diminution de la température de l'épaisseur est plus rapide que celle de largeur
- Le débit de la plaque (correspond au seuil d'injection) et la fin se refroidi plus rapide que le milieu reste chaud malgré le temps écoulé.

• Pour assurer une symétrie de refroidissement à travers l'épaisseur, il faut assurer une régulation thermique au niveau du liquide de refroidissement

La résolution de l'équation de transfert de chaleur par la méthode de différence fini (schéma explicite et implicite), on remarque que le schéma implicite est plus stable et converge que la méthode explicite, mais la méthode explicite plus facile de programmer.

CHAPITRE IV

MODÉLISATION DE LA DÉFORMATION

IV.1 Introduction

La déformation des pièces à la sortie de moule est un des problèmes les plus difficiles à résoudre pour les concepteurs d'outillage. Ces déformations sont liées aux contraintes résiduelles. Elles affectent les propriétés mécaniques et optiques des pièces moulées. Les contraintes résiduelles peuvent avoir deux origines:

- Les contraintes de cisaillement dues à l'écoulement pendant le remplissage et le compactage ne se relaxent pas complètement au moment de la solidification du fait du caractère viscoélastique du matériau (elles s'annuleraient à la fin de l'écoulement pour un comportement purement visqueux). Les contraintes normales, reliées à la pression, ne s'annulent pas à la fin de l'écoulement, en raison du confinement du polymère dans la cavité. On parle de contraintes figées induites par l'écoulement.
- Le retrait thermique associé au refroidissement hétérogène conduit aussi à des contraintes résiduelles appelées contraintes thermiques. On les retrouve dans bon nombre de procédés et de matériaux, comme le verre et les métaux.

D'une manière générale, la contrainte, la déformation et la vitesse de déformation sont liées par une relation appelée constitutive du matériau. Si le polymère est à basse température et à faible contrainte, la déformation ε varie linéairement avec la contrainte σ dans un essai de traction. Le comportement est élastique et on peut appliquer la loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \varepsilon$

E : module d'Young.

Alors qu'en température suffisamment élevée, le polymère devient un fluide visqueux, les effets élastiques deviennent moins importants et l'équation constitutive devient une relation entre la contrainte τ et la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$ (de cisaillement) :

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \text{ (Loi de Newton)}$$

η : La viscosité dynamique [Pa.s].

IV.2 Les principaux phénomènes physiques

Nous allons analyser, ici, dans le détail les principaux mécanismes qui conduisent à l'établissement de ces contraintes en considérant différents cas d'école. Pour chacun, une analyse simple semi-analytique, couche par couche, pour certaines étapes caractéristiques, est proposée.

IV.2.1 Le retrait thermique

C'est le moteur des contraintes résiduelles d'origine thermique, c'est à dire des phénomènes de retrait.

IV.2.1.1 Cas d'une trempe libre

Considérons d'abord les effets du retrait en trempe libre, c'est-à-dire sans considérer que des parois métalliques peuvent entraver ce retrait. Ces conditions sont plus proches en fait de ce que subit un polymère en sortie d'une filière d'extrusion, hors calibrage. Supposons qu'en dessous d'une température de solidification T_s , le polymère se comporte comme un solide élastique, avec un module E et un coefficient de Poisson ν , et au-dessus, comme un liquide, qui ne gêne pas le retrait. Durant le refroidissement, il y a d'abord progression d'un front de solidification, puis le polymère rejoint la température ambiante T_f sans changement de phase. Considérons une plaque plane initialement à la température T_0 . Une première couche se solidifie en surface, tout en étant donc libre d'effectuer son retrait thermique. La déformation associée est $\alpha(T_f - T_s)$, où α est le coefficient de dilatation linéaire. En revanche, les couches plus à l'intérieur qui vont se solidifier plus tard, seront soumises à la même déformation $\alpha(T_f - T_s)$ mais elles verront leur retrait bloqué par les couches externes. Elles se retrouveront donc en traction, et mettront les couches externes en compression.

Ces principes peuvent être mis en œuvre assez simplement. La loi thermo-élastique pour $T < T_s$ pour le tenseur des contraintes s'écrit,

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon + \frac{E}{1-2\nu} \left[\frac{\nu}{1+\nu} \text{Tr} \varepsilon - \frac{1}{3} \alpha \Delta T \right] I \quad (4.1)$$

où ε est le tenseur des déformations, ΔT une variation de température et I le tenseur unité.

Dans le cas de la plaque plane parallèle au plan (x,y) et perpendiculaire à la direction z , refroidie par ses faces supérieures et inférieures de façon identique sur tout le plan, on se retrouve dans un état de contraintes planes. Les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(z, t) & \sigma_{xy}(z, t) & 0 \\ \sigma_{yx}(z, t) & \sigma_{yy}(z, t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(t) & \varepsilon_{xy}(t) & 0 \\ \varepsilon_{yx}(t) & \varepsilon_{yy}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

En refroidissement libre, les deux conditions pour que des contraintes se bâtissent sont:

- (i) Un refroidissement dissymétrique, ce qui est toujours le cas en mise en forme des polymères, car le refroidissement progresse de la surface vers l'intérieur.
- (ii) Un changement dans les propriétés rhéologiques, dû à la variation de température; dans l'exemple précédent, nous avons choisi une variation abrupte, avec un module nul au-dessus d'une certaine température, et constant en dessous.

Ce cas de refroidissement est, en réalité, très éloigné de celui rencontré en injection, où la pression d'une part et les parois du moule, d'autre part, bloquent ce retrait. C'est ce que nous allons voir plus en détail dans les paragraphes suivants.

IV.2.1.2 Cas d'une pièce refroidissant dans un moule sans pression

Considérons maintenant la pièce dans le moule. En première approximation, nous supposons que le contact polymère-cavité est collant. Dans ces conditions, tant que la pièce est dans le moule, aucun retrait ne peut s'effectuer lorsque la température d'une couche descend en dessous de la température de solidification, et cette couche se retrouve par conséquent en traction. Trois cas de figures peuvent se présenter;

- (i) Si le démoulage a lieu lorsque toute la pièce est revenue à température ambiante (cas d'école correspondant à un moule régulé à la température ambiante et à un temps de séjour avant éjection très long), le retrait s'effectue de façon homogène juste après l'éjection, et la pièce ne sera le siège d'aucune contrainte.
- (ii) Si le démoulage a lieu avant que la pièce ne soit revenue à température ambiante, mais alors qu'elle est solidifiée sur toute son épaisseur: juste avant éjection, les couches de peau sont en forte traction (elles ont subi un refroidissement important), et celles de cœur sont en traction plus légères (leur refroidissement est moindre). Au moment de l'éjection, lorsque les déplacements sont possibles, il y aura un retrait moyen, et donc des contraintes non nulles dans chaque couche. Par la suite, lorsque l'ensemble de la pièce rejoint la température ambiante, chaque couche va

finale­ment effectuer le même retrait total $\alpha(T_f - T_s)$, et la pièce ne sera de nouveau le siège d'aucune contrainte.

(iii) Si le démoulage a lieu alors que le polymère n'est pas solidifié sur toute son épaisseur: juste avant éjection Figure 4.1, les couches solides sont en traction. Juste après éjection (b), les couches solidifiées vont effectuer leurs retraits librement, et les contraintes présentes disparaissent. Lorsque les deux couches vont rejoindre la température ambiante, celle de peau va subir un retrait plus faible que celle de cœur, puisque le refroidissement aura été plus important vers la peau. On aboutit à un état de traction/compression analogue à celui du refroidissement libre.

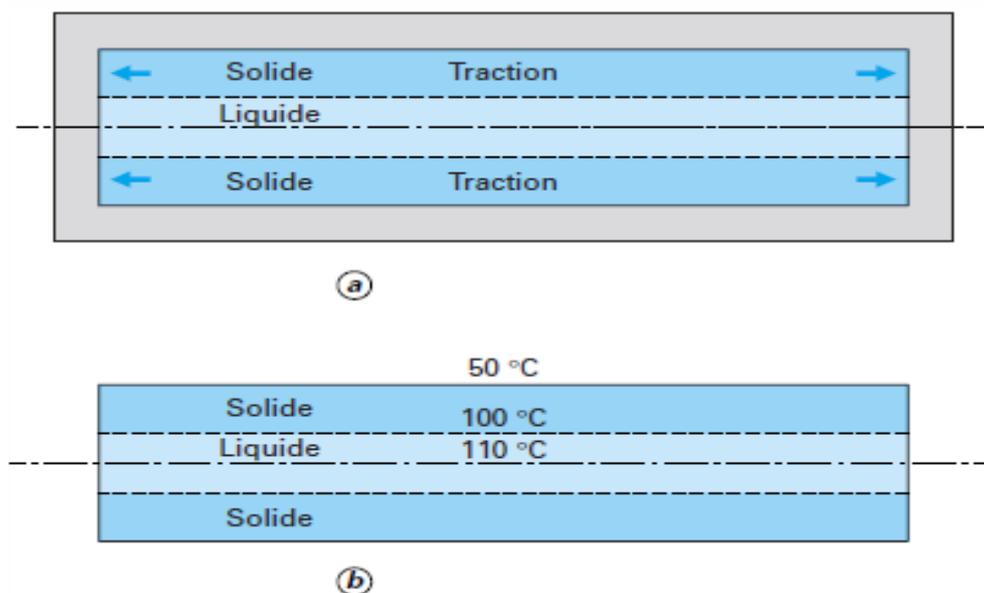


Figure 4.1. : Refroidissement dans le moule, juste avant (a) et juste après (b) l'éjection [23]

Cette analyse est toutefois à tempérer compte tenu des éléments suivants: le polymère solide n'a pas un comportement purement élastique, mais viscoélastique. Comme les couches de polymère se solidifient à des instants différents, leur histoire est également différente, et la relaxation des contraintes intervient de façon hétérogène. L'hypothèse de contact collant pièce moule est probablement réaliste tant qu'une forte pression de maintien plaque les couches solides contre le moule. Lorsque la pression diminue, il est possible qu'un glissement intervienne, si aucune aspérité géométrique (seuil, nervure, coins, par exemple) ne bloque les mouvements. Enfin, suivant les conditions de refroidissement et d'orientation, les propriétés élastiques du matériau ne sont pas constantes.

V.2.2 Les contraintes figées

Nous avons introduit au paragraphe V.1 les contraintes de cisaillement et normales figées. Leur effet sur l'orientation moléculaire, sur la cristallisation, est de premier ordre. Elles induisent une anisotropie et une hétérogénéité de comportement rhéologique à l'état solide et de retrait. Cependant il est admis qu'elles sont d'un ordre de grandeur inférieur aux autres sources de contraintes et sont négligées dans la grande majorité des modèles actuels.

Au cours du cycle d'injection, les différentes couches se solidifient à des niveaux de pression très différents Figure 4.2: relativement faible en peau pendant le remplissage, élevée sous la peau pendant le compactage, plus faible à cœur lorsque le seuil est solidifié et que la pression imposée par la machine n'est plus transmise. Lorsque la pièce sort du moule, elle subit une expansion liée au retour à la pression atmosphérique, qui est différente d'une couche à l'autre. Comme les couches sont solidaires, il y aura une expansion moyenne, et des contraintes de traction ou de compression vont apparaître dans l'épaisseur de la pièce.

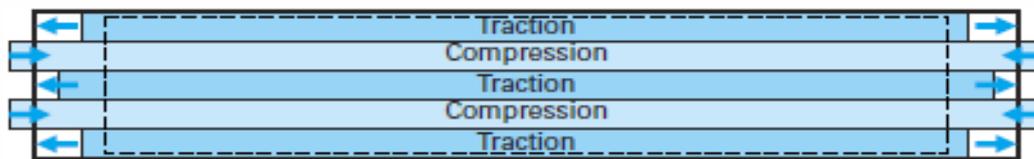


Figure 4.2 : principe d'action de la pression figée [23]

IV.2.3 Le comportement viscoélastique

Le polymère est un matériau viscoélastique. A l'état de fluide, les contraintes dues à une déformation antérieure auront disparu après une durée de l'ordre de la seconde. Par contre, si le matériau est solide les contraintes peuvent mettre plusieurs mois avant de disparaître. Distinguons donc les effets de relaxation des contraintes à long terme et les effets à court terme (générateurs de contraintes).

A long terme, donc, les contraintes internes se relaxent. Par exemple dans un essai de fissuration effectuée sur du polystyrène dans le n-heptane, on montre qu'il ne se passe plus rien dans des échantillons vieux de plus d'une vingtaine de jours. Le niveau de contrainte est devenu trop bas. Un des problèmes relatifs au phénomène de relaxation peut être une inversion du signe

des contraintes en peau. Si le matériau passe en traction en peau, il peut devenir sensible à la fissuration .

Mais ce qui nous intéresse plus particulièrement dans le cas de la formation des contraintes résiduelles dans le solide, ce sont des temps plus courts, qui correspondent à la durée du procédé. Nous l'avons vu, une pièce injectée est très hétérogène thermo mécaniquement. La température et le chargement mécanique varient fortement dans la pièce. Le matériau étant viscoélastique, il conservera en mémoire cette hétérogénéité qui se retrouvera dans le champ de contrainte final au sein de la pièce. La méthode la plus employée pour déterminer les propriétés viscoélastiques, dans le domaine linéaire et en petites déformations, du polymère dans le solide est l'essai de sollicitation dynamique. On soumet l'échantillon à une déformation sinusoïdale et on mesure simultanément les contraintes qui en résultent. Pour un comportement viscoélastique linéaire les déformations et les contraintes vont toutes les deux varier selon un profil sinusoïdal, mais avec un déphasage δ entre les deux mesures.

Le calcul des déplacements, contraintes et déformations dans les structures viscoélastiques linéaire peut se ramener à la résolution de problèmes d'élasticité classique en écrivant le problème de viscoélasticité linéaire en transformée de Laplace-Carson. Dans le cas d'élasticité linéaire avec des conditions aux limites que ne varient pas au cours de temps.

L'analogie formelle entre ces deux types de problème conduit à la méthode de résolution schématisée ci-dessous. La difficulté dans cette méthode est rejetée sur la conversion : le calcul des fonctions du temps originales des fonctions de la solution du problème d'élasticité.

IV.3 Hypothèse de calcul

Comme dans n'importe quel modèle, nous sommes amenés à faire des hypothèses concernant la phase de refroidissement durant laquelle s'effectue la plus grande partie du retrait :

- Le calcul commence après que le seuil ne soit complètement figé
- La pièce est libre de se déformer.
- Le décollement de la pièce n'intervient pas dans les conditions aux limites.
- Le matériau est considéré comme étant isotrope pour le premier calcul.

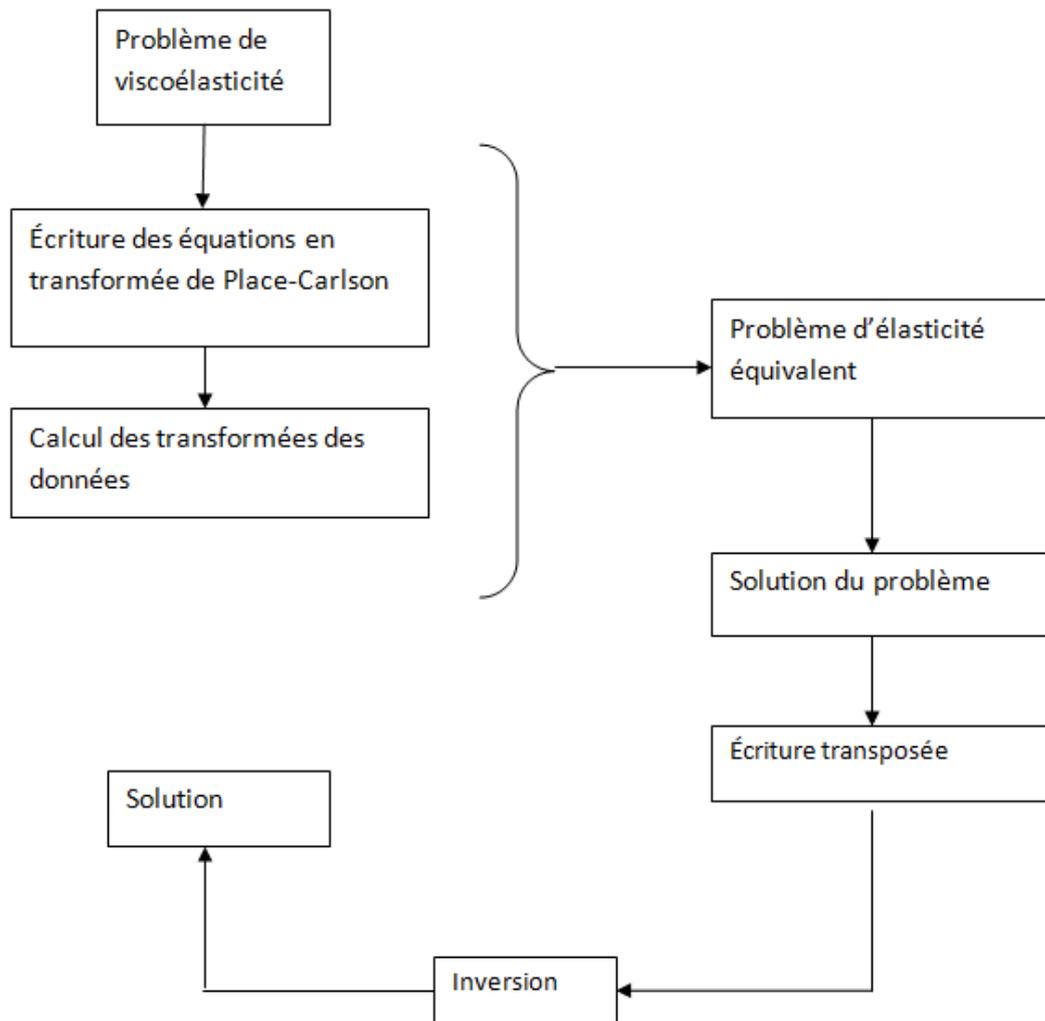


Figure 4.3: Schéma de la méthode de résolution [2]

IV.4 Théorie d'élasticité

Tous les matériaux solides possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'entraîne qu'une variation de déformation élastique. Il s'agit de mouvements réversibles d'atomes, de molécules ou de cellules, qui correspondent à des déformations n'excédant pas 0.2 à $0.5 \cdot 10^{-2}$, ce qui justifie l'hypothèse des petites déformations. La limite de ce domaine est caractérisée par une contrainte au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. Avant d'utiliser telle ou telle application, il y a donc lieu de s'assurer que l'ordre de grandeur des contraintes est bien compatible avec le domaine d'élasticité du matériau considéré [24].

L'application de la théorie d'élasticité nous mène à vérifier les conditions suivantes :

IV.4.1 Les conditions d'équilibre

L'équilibre des forces appliquées à un domaine s'écrit :

$$\iiint_D (\vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}) dV = \vec{0} \quad (4.5)$$

On déduit des forces appliquées de l'équilibre :

$$\vec{f} + \text{div} \vec{\sigma} = \vec{0} \quad (4.6)$$

Ou :

\vec{f} : représente le vecteur de force de volume

σ : le tenseur des contraintes

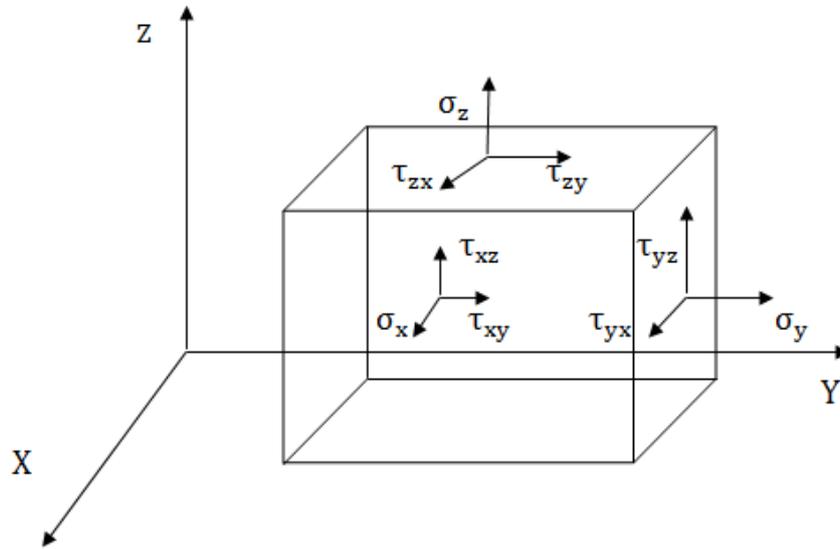


Figure (4.4) : L'état de contrainte

Ces équations s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

(4.7)

$$f_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

$$f_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

Avec

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

IV.4.2 Conditions de compatibilité des déformations (relation déformation déplacement)

Le tenseur de déformation $[\varepsilon]$ est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

Avec $\{u\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ les composants du vecteur déplacement

$$\text{Donc on aura : } \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{2\partial y} & \frac{\partial}{2\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{2\partial z} & \frac{\partial}{2\partial y} \\ \frac{\partial}{2\partial z} & 0 & \frac{\partial}{2\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{2\partial y} + \frac{\partial u_2}{2\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{2\partial z} + \frac{\partial u_3}{2\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{2\partial z} + \frac{\partial u_3}{2\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)$$

Les équations de compatibilité expriment qu'un champ de déformation ne peut pas s'écrire arbitrairement, il doit satisfaire certaines conditions, dites de compatibilité ou d'intégrabilité qui assurent la continuité du milieu solide et s'écrivent mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$2 \frac{\gamma^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

$$2 \frac{\gamma^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\gamma^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

IV.4.2 Loi de comportement

La relation faisant intervenir les propriétés du matériau isotrope est :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.13)$$

Qui s'écrit en tenant compte de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Où λ et μ sont les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{E\nu}{1 + (1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Et on aura :

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}$$

IV.5 Élasticité plane

La théorie de l'élasticité plane nous ramène à résoudre le problème en deux dimensions.

Deux cas se présentent : déformation plane et contrainte plane

IV.5.1 Déformation plane

La déformation plane se manifeste lorsqu'une des dimensions du corps est largement plus importante par rapport aux deux autres. La loi de Hooke pour un matériau isotrope devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \varepsilon_z = 0 \quad (4.15)$$

IV.5.2 Contrainte plane

L'état de contrainte plane se manifeste lorsque la dimension suivant l'axe Z est très petite par rapport aux deux autres. Et la loi de Hooke pour un matériau isotrope s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma_z = 0 \quad (4.16)$$

Dans le cas de la plaque plane parallèle au plans (X,Y) et perpendiculaire à la direction Z, refroidit par ses faces supérieur et inférieur de façon identique sur tout le plans. On se retrouve dans un état de contraintes planes.

IV.6 Élasticité anisotrope

L'anisotropie classique fait intervenir 21 coefficients rhéologiques, il est nécessaire de se ramener à une description plus réaliste du milieu. L'orthotropie de révolution ou encore l'isotropie transversale se caractérise par l'existence d'un plans dans le quelle les propriétés du matériau sont isotropes. La direction perpendiculaire à ce plan et l'axe de révolution de l'orthotropie.

Dans ce cas cinq coefficients indépendants sont nécessaires pour définir le comportement du matériau :

Deux modules de traction : E1, E2

Un module de cisaillement entre 1 et 2 : G

Un coefficient de Poisson entre 1 et 2 : ν_{12}

Un coefficient de Poisson entre 2 et 3 : ν_{23}

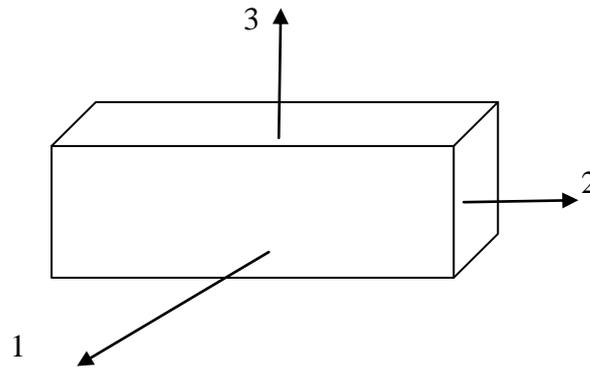


Figure 4.5: repère et notation liés à l'orthotrope

1 : Axe de révolution

Le plan formé par (2,3) est isotrope

IV.8 Thermoélasticité

Lorsqu'un solide homogène, isotrope et libre de se déformer subit une variation de température passant de la valeur uniforme T_0 à la valeur uniforme T , toutes ses distances interarticulaires subissent la variation relative $\alpha(T - T_0)$ appelée aussi dilatation thermique. Le coefficient (α), caractéristique du matériau, se nomme coefficient de dilatation thermique linéique. La théorie de la thermoélasticité doit être utilisée pour les matériaux élastiques à chaque fois que les sollicitations comprennent des variations des températures [16]. Donc la thermoélasticité fait intervenir une variable de plus par rapport à l'élasticité qui est la température.

- La loi de Hooke :

Dans le cas isotherme

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}T_r(\sigma)I \quad \text{ou} \quad \sigma = \lambda T_r(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon \quad (4.17)$$

Le tenseur de déformation associé, dit thermique est donné par :

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0)I$$

Donc pour un comportement thermoélastique dans un milieu isotrope on a :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}T_r(\sigma)I + \alpha(T - T_0)I \quad (4.18)$$

L'expression des contraintes devient :

$$\sigma = \lambda T_r(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon - K\alpha(T - T_0)I \quad \text{avec} \quad K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

Où K : est le coefficient de compressibilité

Et pour le cas de contrainte planes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \alpha(T - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\{\varepsilon_T\} = \alpha(T - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

En inversant, on trouve

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1 - \nu} \alpha(T - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \alpha(T - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\text{Ou } [D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

IV.8 Résolution numérique

IV.8.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation numérique de la solution d'un problème aux limites. Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux limites lui devient accessible. Elle s'inspire directement de la méthode des déplacements et du procédé découpage-assemblage.

On distingue plusieurs classes d'élément fini suivant leur géométrie :

- Les éléments unidimensionnels (1D) : sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modéliser les raidisseurs, exemple : barre, poutre rectiligne.....etc
- Les éléments bidimensionnels (2D) : de forme triangulaire ou rectangulaire et sont utilisés en élasticité plane (déformation ou contrainte plane), exemple : plaque en flexion, coque.
- Les éléments tridimensionnels (3D) : élément de volume utilisé pour les coques épaisses. Les structures présentant un symétrie de révolution, exemple tore à section triangulaire ou rectangulaire, coque conique.....etc.

IV.8.1.1 Différentes méthodes

La résolution par la méthode des éléments finis peut être formulée de trois façons différentes :

IV.8.1.1.1 Méthode de déplacement

Dans ce cas on propose une approximation du champ des déplacements, qui sont représentés par une combinaison linéaire de fonction des coordonnées d'espace. Les coefficients de cette combinaison dépendent des déplacements des nœuds de l'élément. Ce sont ces derniers qui constituent les inconnues du problème (inconnues nodales ou degrés de liberté). On suppose avant tout que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites, ce qui nous amène à résoudre les équations d'équilibres en tenant compte des conditions aux limites afin de déterminer les déplacements nodaux (solution unique).

IV.8.1.1.2 Méthode des contraintes

Dans ce cas, on suppose que les conditions d'équilibre aux nœuds sont satisfaites, puis on résout les équations de compatibilités pour obtenir les inconnues dans les différentes parties de la structure.

IV.8.1.1.3 Méthode mixte

Dans les cas où, on mélange les deux méthodes précédentes on obtient la méthode mixte qui donne l'élément hybride utilisé dans la modélisation des problèmes de coque ou de plaque ...etc

IV.8.2 Étapes de calcul

Les étapes les plus importantes utilisées pour le calcul de la matrice de rigidité d'un élément rectangulaire dans le comportement thermo élastique à contraintes planes sont décrites dans les paragraphes suivants.

IV.8.2.1 Identification du problème

Le choix du système de coordonnées et de numérotation adéquat pour l'élément reste celui déjà choisit lors du calcul de la température et qui est illustré dans la figure 4.6. Puisque pour un problème d'élasticité plane l'élément à deux degrés de liberté pour chaque nœud, chaque élément à huit degrés de liberté. En utilisant la notation matricielle on peut écrire les déplacements sous la forme suivante :

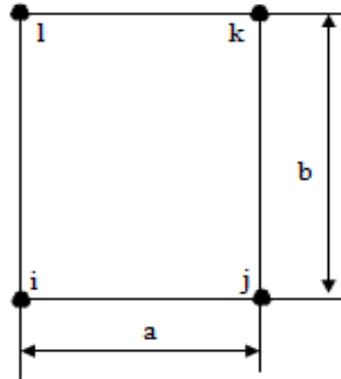


Figure 4.6: Schéma de l'élément choisi

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Et le vecteur de force

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

On définit la matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$ par l'équation :

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \quad (4.26)$$

IV8.2.2 Choix des fonctions de déplacement

On choisit une fonction polynomiale de déplacement qui le définit de façon unique en tout point de l'élément. L'état de déplacement en chaque point est décrit par :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

Puisque l'élément a huit degrés de liberté, on doit avoir huit coefficients inconnus dans le polynôme, et on écrit le déplacement de la manière suivante :

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

En notation matricielle on obtient :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (4.27)$$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \text{ et } [f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

IV8.2.3 Relation entre déplacement global et nodal

On exprime les coefficients $\{\alpha\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$, donc on a :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Donc on écrit :

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad (4.29)$$

$$\text{avec } [A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix}$$

de l'équation (4.29) on a :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (4.30)$$

Pour le maillage carré de longueur a choisi on aura la matrice inverse de la matrice $[A]$:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

En remplace (4.30) dans l'équation (4.27) donc on a :

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (4.31)$$

IV.8.2.4 Relation entre le déplacement et la déformation

On relie les déformations $\{\varepsilon(x,y)\}$ de l'élément aux déplacements $\{\delta(x,y)\}$, ainsi qu'aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

Il est évident que la relation entre les déformations et les déplacements, pour un problème d'élasticité plane, est indépendante de la forme de l'élément choisi. On sait que :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \{\text{différentielle de } \delta(x,y)\}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Donc

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (4.33)$$

$$\text{Avec } [C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix}$$

On remplace la valeur de $\{\alpha\}$ de l'équation (4.30) dans l'équation (4.33) donc on a :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (4.34)$$

On pose $[B] = [C][A]^{-1}$ et on remplace dans (4.34)

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B]\{\delta^e\} \quad (4.35)$$

Pour notre cas maillage carré de longueur a on a :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{a^2} & 0 & -\frac{y}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} & 0 & \frac{y}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} & 0 & -\frac{x}{a^2} & 0 & \frac{x}{a^2} \\ -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{a^2} & \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} & -\frac{y}{a^2} & -\frac{x}{a^2} & \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} & \frac{x}{a^2} & \frac{y}{a^2} \end{bmatrix}$$

IV.8.2.5 Relation entre les contraintes et les déformations

Les contraintes internes à l'élément sont reliées aux déformations par la loi de l'élasticité suivant : $\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$ (4.36)

IV8.2.6 Relation entre charge et déplacement nodaux

Les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ sont remplacées par les charges nodales $\{F^e\}$ Statiquement équivalentes, et reliées aux déplacements nodaux définissant ainsi la matrice de rigidité $[K^e]$ de l'élément.

On utilise le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes. Le travail extérieur des forces nodales est donné par :

$$W_{ext} = \{\delta_1 *^e\}\{F_1^e\} + \{\delta_2 *^e\}\{F_2^e\} + \dots + \{\delta_n *^e\}\{F_n^e\} = \{\delta *^e\}\{F^e\}$$

Dans notre cas les seules forces qui agissent sur la pièce sont les forces dues à la température.

Le travail interne par unité de volume est donné par :

IV.8.2.7 Relation entre les contraintes et les déplacements

La relation entre les contraintes internes de l'élément $\{\sigma(x, y)\}$ et les déplacements nodaux est donnée ultérieurement par la formule :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (4.39)$$

Avec : $[H] = [D][B]$

Donc :

$$[H] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} -d_{11}(b-y) & -d_{21}(a-x) & -d_{11}y & d_{21}(a-x) & d_{11}(b-y) & -d_{21}x & d_{11}y & d_{21}x \\ -d_{21}(b-y) & -d_{22}(a-x) & -d_{21}y & d_{22}(a-x) & d_{21}(b-y) & -d_{22}x & d_{22}y & d_{22}x \\ -d_{33}(a-x) & -d_{33}(b-y) & d_{33}(a-x) & -d_{33}y & -d_{33}x & d_{33}(b-y) & d_{33}x & d_{33}y \end{bmatrix}$$

Pour $a=b$ on a :

$$[H] = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -d_{11}(a-y) & -d_{21}(a-x) & -d_{11}y & d_{21}(a-x) & d_{11}(a-y) & -d_{21}x & d_{11}y & d_{21}x \\ -d_{21}(a-y) & -d_{22}(a-x) & -d_{21}y & d_{22}(a-x) & d_{21}(a-y) & -d_{22}x & d_{22}y & d_{22}x \\ -d_{33}(a-x) & -d_{33}(a-y) & d_{33}(a-x) & -d_{33}y & -d_{33}x & d_{33}(a-y) & d_{33}x & d_{33}y \end{bmatrix}$$

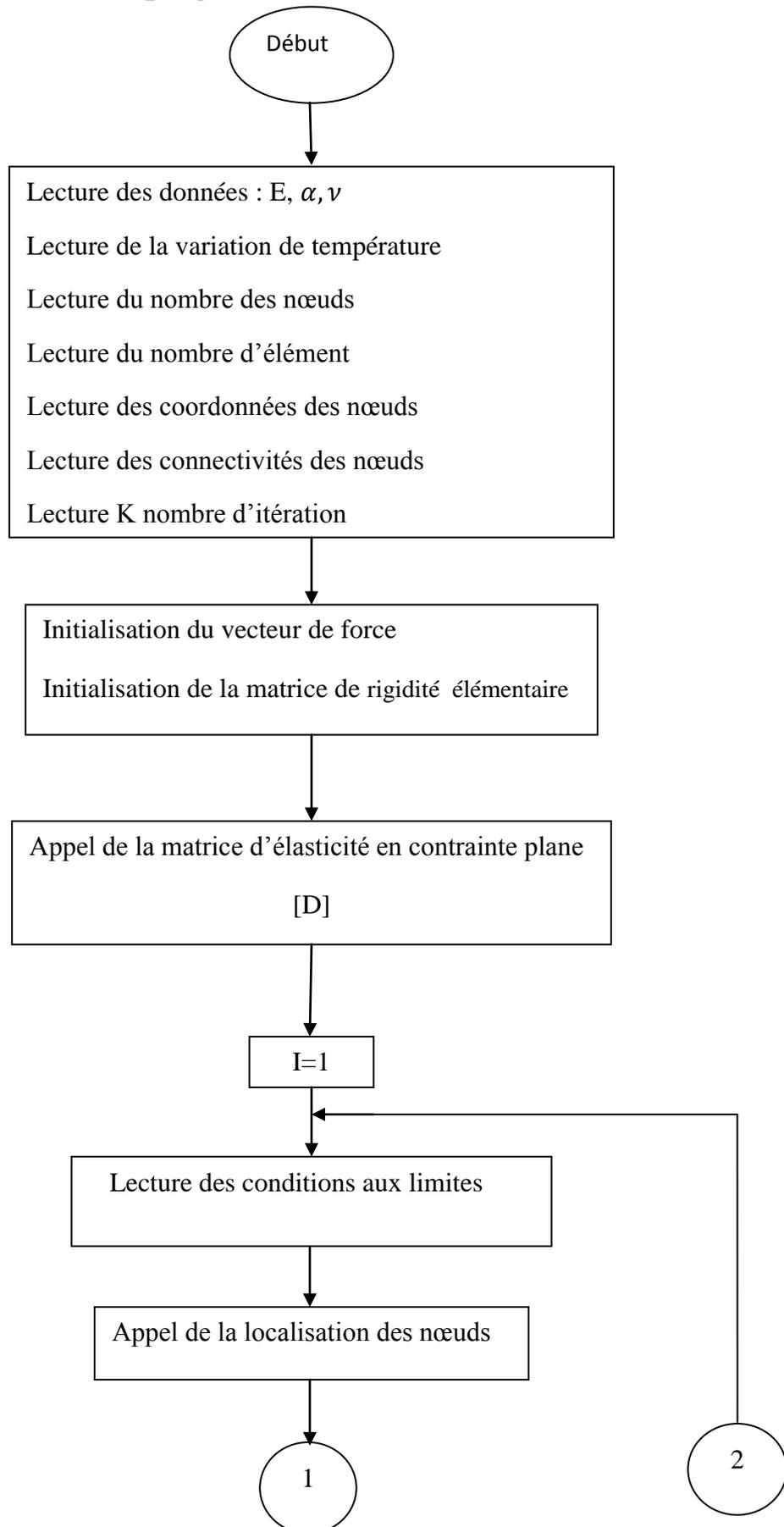
Pour obtenir les contraintes en chaque des quatre nœuds de l'élément, on les remplace par leur coordonnées dans la matrice $[H]$ et on obtient :

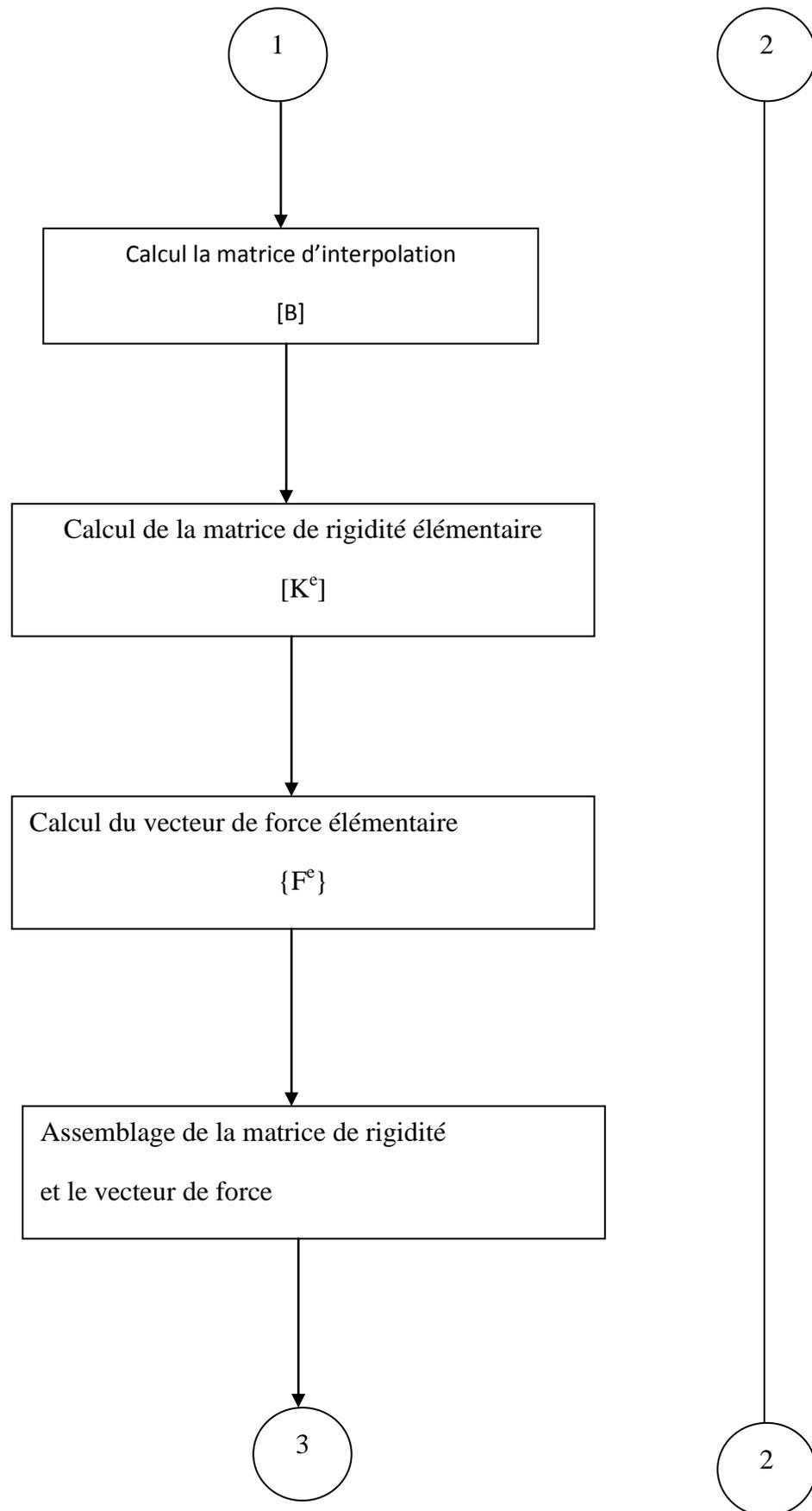
$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \sigma(x_i, y_i) \right\} \\ \left\{ \sigma(x_j, y_j) \right\} \\ \left\{ \sigma(x_k, y_k) \right\} \\ \left\{ \sigma(x_l, y_l) \right\} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} [H(x_i, y_i)] \\ [H(x_j, y_j)] \\ [H(x_k, y_k)] \\ [H(x_l, y_l)] \end{bmatrix}$$

Cette équation peut être résumer par :

$$\{\sigma^e\} = [H^e]\{\delta^e\} \quad (4.40)$$

IV 8.3 Organigramme de programmation





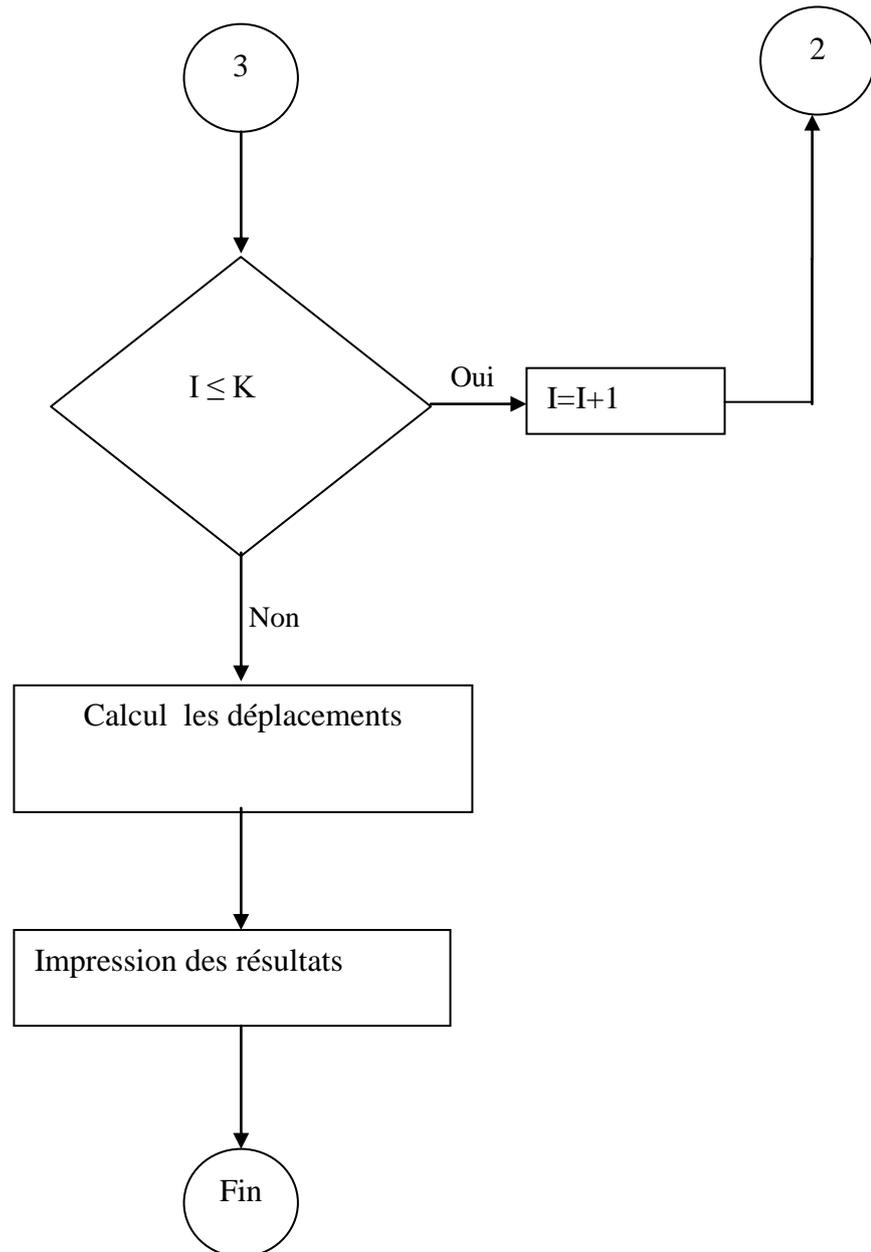


Figure 4.7: Organigramme de programmation

IV.8.4 Cas d'étude

On va utiliser deux méthodes numériques (explicite et implicite) lors du calcul thermique dans tous les cas d'étude, pour une plaque libre avec un blocage minimum voir la figure 4.7.

On va prendre les résultats du calcul (déplacement du bord)

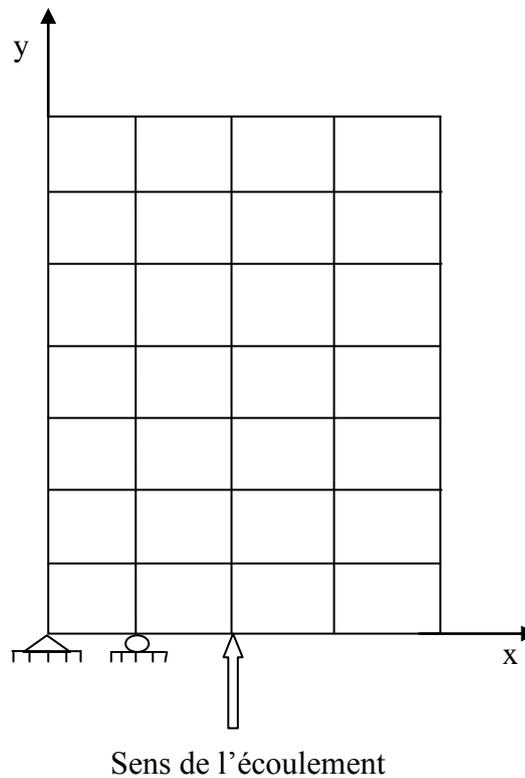


Figure 4.8 : Plaque libre blocage minimum

IV.8.4.1 Données

Une pièce à étudier a été favorisée par sa géométrie simple et ses petites dimensions qui nous ont permis une bonne approche du problème. La pièce est une plaque de dimension (largeur 14, épaisseur 4 et longueur $L=1$). Le maillage carré ($a=b=1$)

Le comportement rhéologique du matériau (polypropylène pp).

$E = 1400 \cdot 10^6$ [Pa], module d'élasticité

$\nu = 0.3$, coefficient de Poisson

$\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$, coefficient de dilatation thermique

IV.8.4.2 Résultats

IV.8.4.2.1 Schéma explicite (symétrique sans décollement)

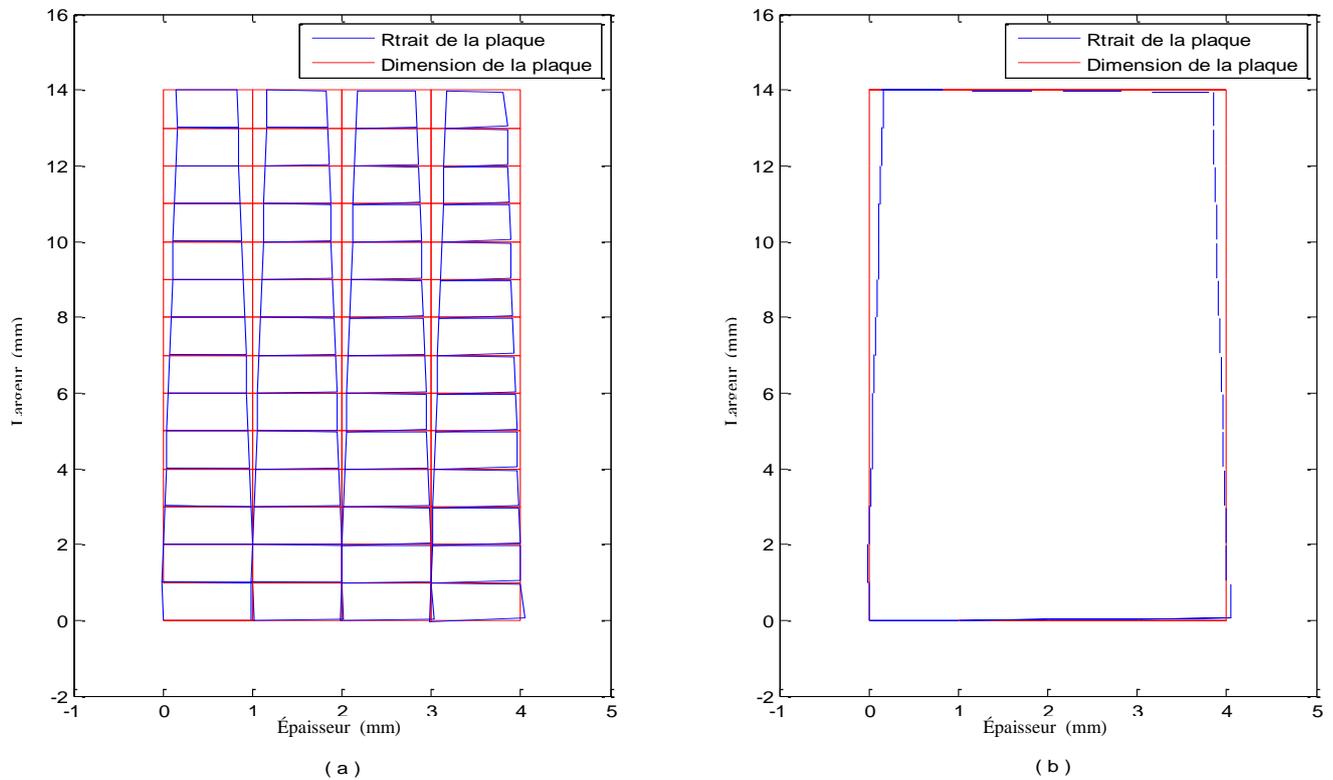


Figure 4.9 : Présentation du retrait pour le schéma explicite (symétrique sans décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.000000000000000	-0.05558374071257	0.000000000000000	-0.14971308735176
0.00740545603469	-0.04817828467788	0.01838992312221	-0.16810301047397
0.01092136270871	-0.04466237800387	0.02241500257113	-0.17212808992289
0.01156523515554	-0.04401850555704	0.02644008202006	-0.17615316937181
0.01142870925937	-0.04415503145320	0.04483000514227	-0.19454309249402
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01118621692323	-0.04439752378934		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01142870925937	-0.04415503145320		
0.01156523515554	-0.04401850555704		
0.01092136270871	-0.04466237800387		
0.00740545603469	-0.04817828467788		
0.000000000000000	-0.05558374071257		

Tab. 4.1 : Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (symétrique sans décollement)

IV.8.4.2.2 Schéma implicite (symétrique sans décollement)

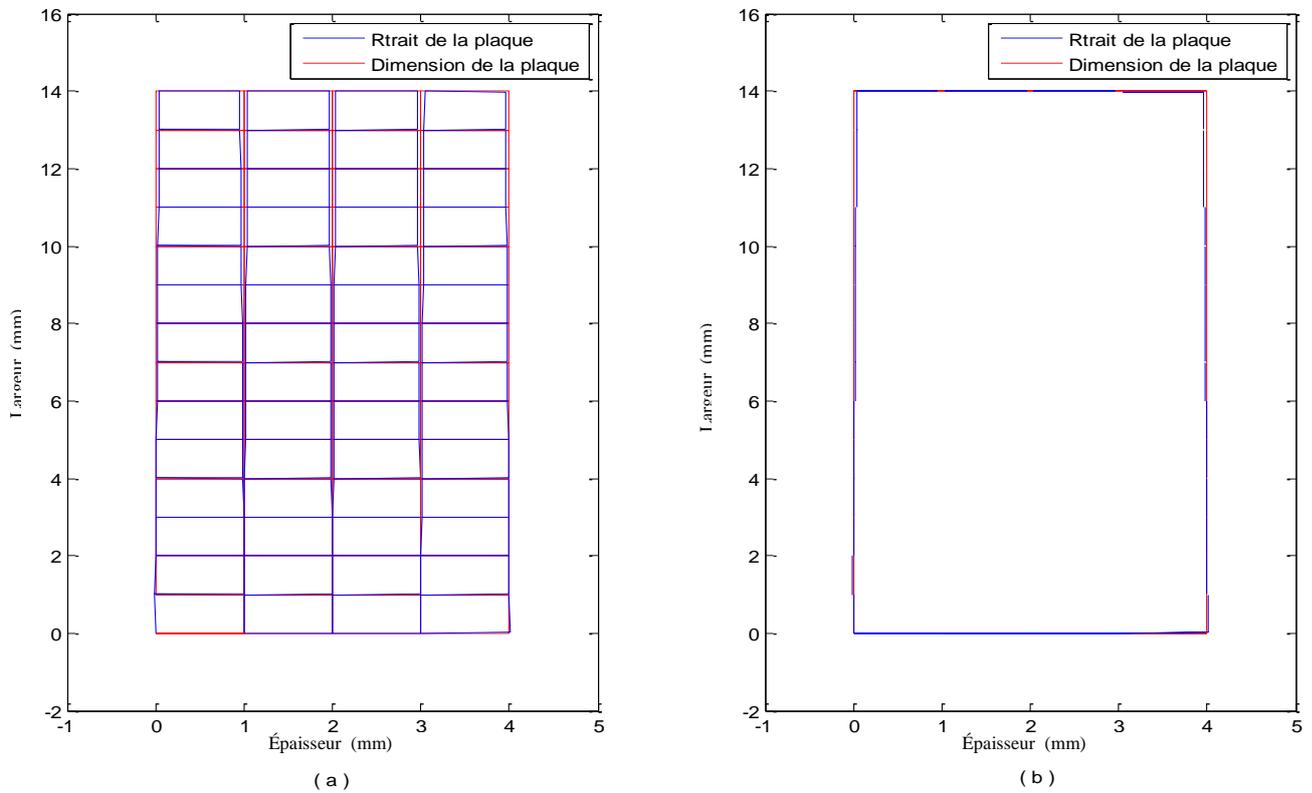


Figure 4.10 : Présentation du retrait pour le schéma implicite (symétrique sans décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.000000000000000	-0.01339418789802	0.000000000000000	-0.03841738991262
0.00187253804297	-0.01152452484104	0.00459120214353	-0.04301413400029
0.00254749909381	-0.01084994298055	0.00423447183705	-0.04265633983232
0.00244370051908	-0.01095388244700	0.00387819097334	-0.04229913734362
0.00227976299640	-0.01111781201701	0.00845939697085	-0.04689030264488
0.00220163765516	-0.01119593831823		
0.00217642894418	-0.01122114619500		
0.00217165418999	-0.01122592234512		
0.00217644163698	-0.01122110634888		
0.00220161244517	-0.01119587915539		
0.00227961159461	-0.01111745081422		
0.00244335346312	-0.01095294339079		
0.00254685099045	-0.01084897013384		
0.00187189493886	-0.01152406500812		
0.00000191197952	-0.01339662485821		

Tab. 4.2 : Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (symétrique sans décollement)

IV.8.4.2.3 Schéma explicite (non symétrique sans décollement)

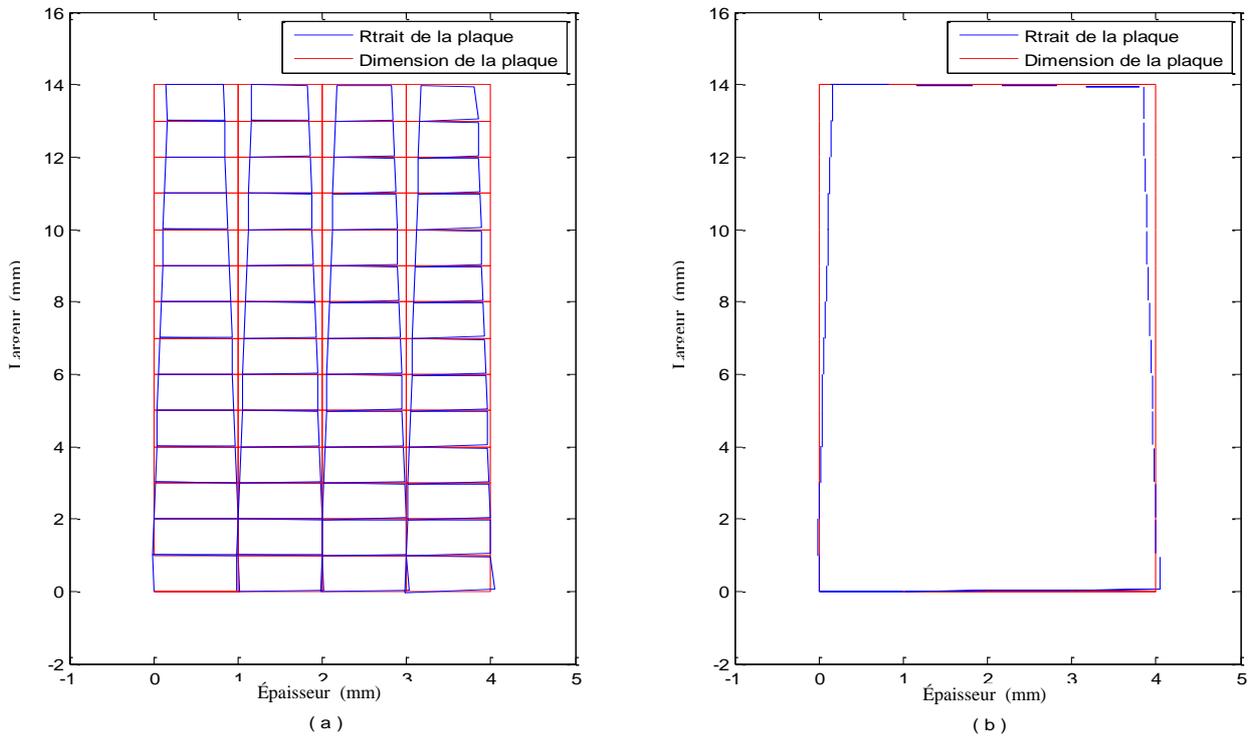


Figure 4.11: Présentation du retrait pour le schéma explicite (non symétrique sans décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.00000000000000	-0.05558374071257	0.00000000000000	-0.14971308735176
0.00740545603469	-0.04817828467788	0.01838992312221	-0.16810301047397
0.01092136270871	-0.04466237800387	0.02241500257113	-0.17212808992289
0.01156523515554	-0.04401850555704	0.02644008202006	-0.17615316937181
0.01142870925937	-0.04415503145320	0.04483000514227	-0.19454309249402
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01118621692323	-0.04439752378934		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01142870925937	-0.04415503145320		
0.01156523515554	-0.04401850555704		
0.01092136270871	-0.04466237800387		
0.00740545603469	-0.04817828467788		
0.00000000000000	-0.05558374071257		

Tab. 4.3 : Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (non symétrique sans décollement)

IV.8.4.2.4 Schéma implicite (non symétrique sans décollement)

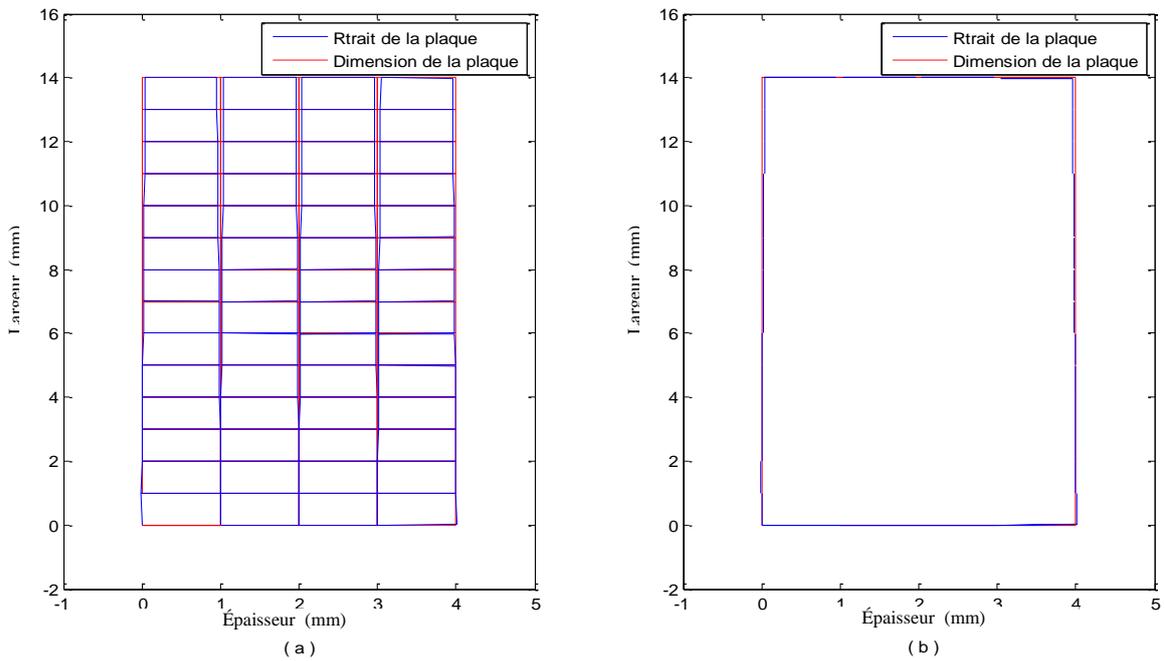


Figure 4.12 : Présentation du retrait pour le schéma implicite (non symétrique sans décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.00000000000000	-0.01351396389286	0.00000000000000	-0.03843628854408
0.00187310204290	-0.01155039313744	0.00459033558757	-0.04303233323813
0.00255049853783	-0.01086106443853	0.00422592935773	-0.04266701718713
0.00244902290940	-0.01095810663806	0.00384738026855	-0.04228738749511
0.00228634866547	-0.01112103079227	0.00875226990978	-0.04720192616246
0.00220834761929	-0.01119900550269		
0.00218308025082	-0.01122429168590		
0.00217826897133	-0.01122910220302		
0.00218309263859	-0.01122425302047		
0.00220832354391	-0.01119894793444		
0.00228620281847	-0.01112068084035		
0.00244868872920	-0.01095719897212		
0.00254987279781	-0.01086013388325		
0.00187246835629	-0.01154994182639		
0.00000195465302	-0.01351630413242		

Tab. 4.4 : Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (non symétrique sans décollement)

IV.8.4.2.5 Schéma explicite (symétrique avec décollement)

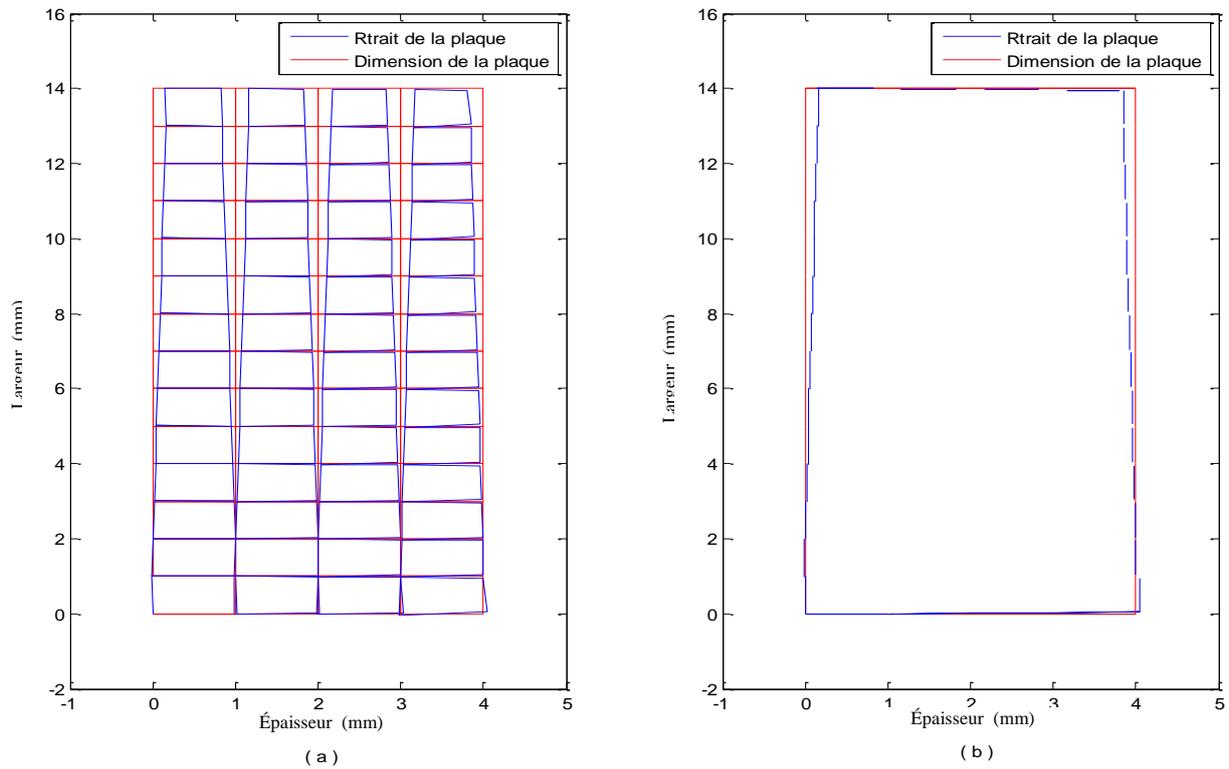


Figure 4.13 : Présentation du retrait pour le schéma explicite (symétrique avec décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.000000000000000	-0.05558374071257	0.000000000000000	-0.14971308735176
0.00740545603469	-0.04817828467788	0.01838992312221	-0.16810301047397
0.01092136270871	-0.04466237800387	0.02241500257113	-0.17212808992289
0.01156523515554	-0.04401850555704	0.02644008202006	-0.17615316937181
0.01142870925937	-0.04415503145320	0.04483000514227	-0.19454309249402
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01118621692323	-0.04439752378934		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01142870925937	-0.04415503145320		
0.01156523515554	-0.04401850555704		
0.01092136270871	-0.04466237800387		
0.00740545603469	-0.04817828467788		
0.000000000000000	-0.05558374071257		

Tab. 4.5 : Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (symétrique avec décollement)

IV.8.4.2.6 Schéma implicite (symétrique avec décollement)

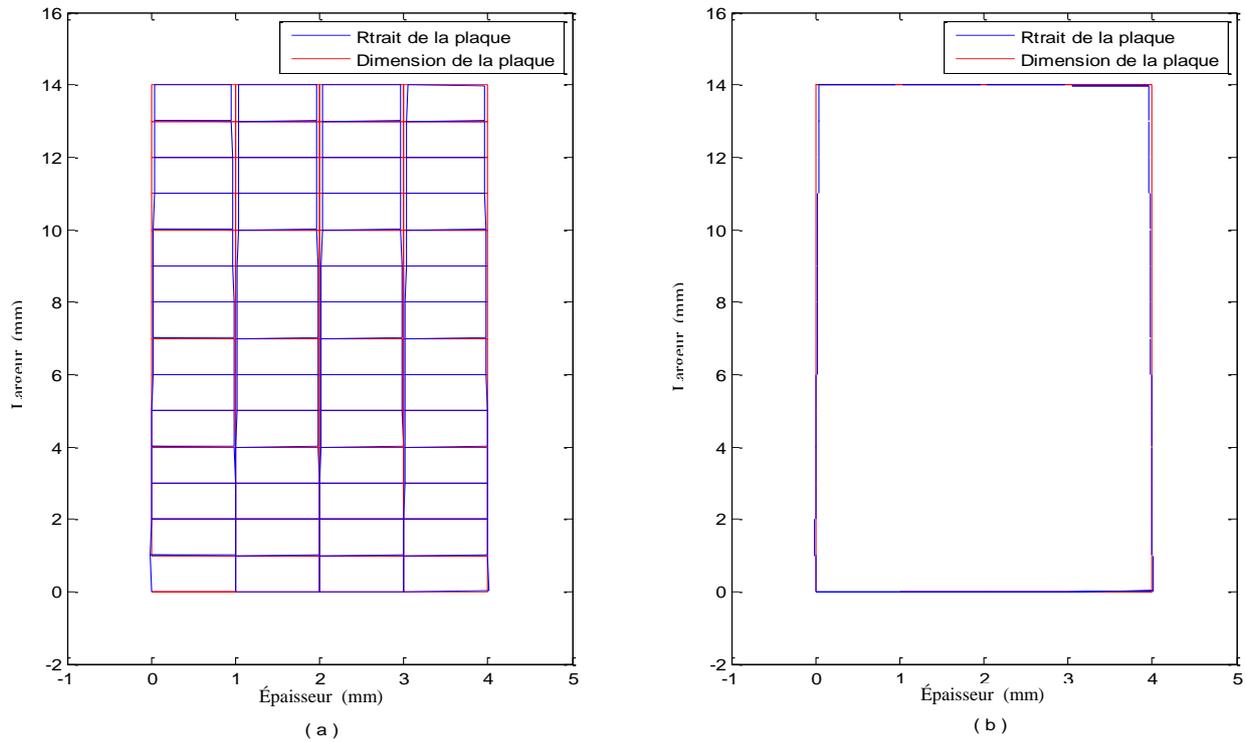


Figure 4.14 : Présentation du retrait pour le schéma implicite (symétrique avec décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.00000000000000	-0.01339171616573	0.00000000000000	-0.03842759532746
0.00187257876032	-0.01152351358717	0.00459115883466	-0.04302432838196
0.00254767878460	-0.01085001517636	0.00423423420705	-0.04266678938046
0.00244408952147	-0.01095473080553	0.00387758138930	-0.04231069310925
0.00228035837494	-0.01111925379445	0.00845555886384	-0.04687983230555
0.00220240826133	-0.01119785219888		
0.00217734166921	-0.01122344211306		
0.00217268193671	-0.01122852739598		
0.00217756549751	-0.01122395947626		
0.00220281156354	-0.01119891382072		
0.00228084456649	-0.01112060902431		
0.00244459354957	-0.01095589125078		
0.00254807740900	-0.01085081747662		
0.00187314001836	-0.01152410312065		
0.00000066748195	-0.01338991011085		

Tab 4.6 : Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (symétrique avec décollement)

IV.8.4.2.7 Schéma explicite (non symétrique avec décollement)

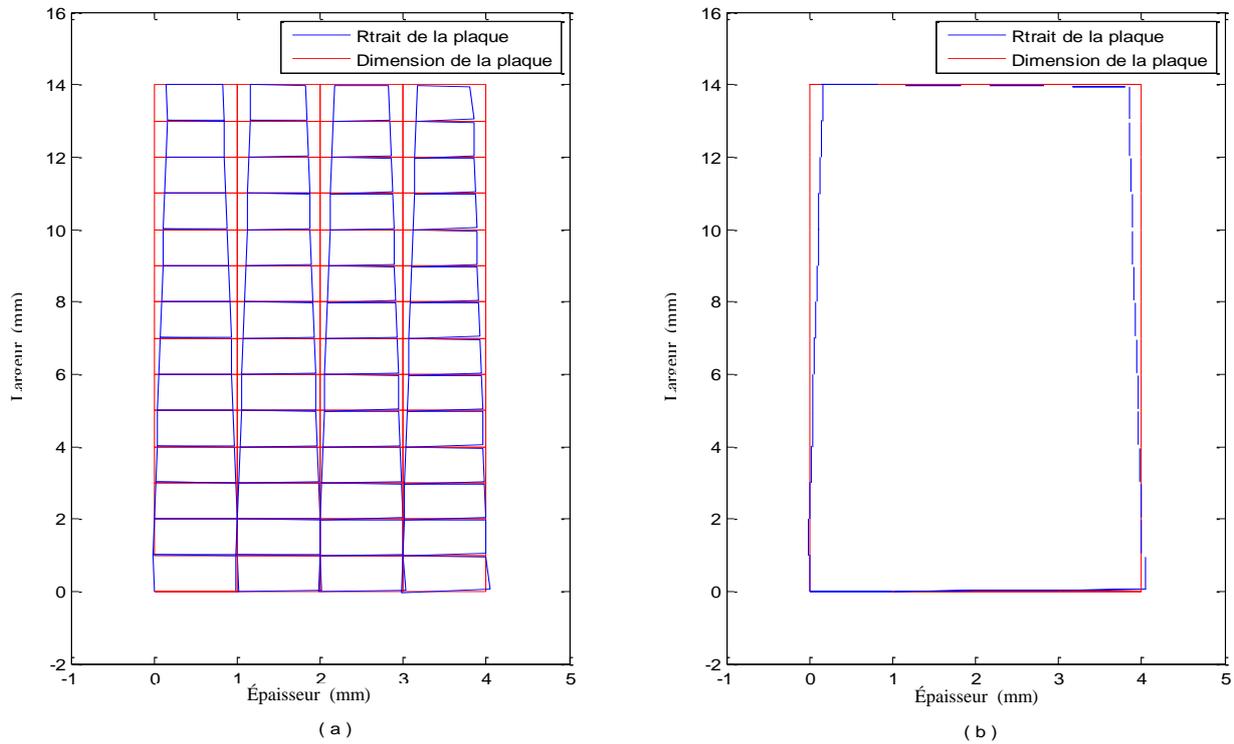


Figure 4.15 : Présentation du retrait pour le schéma explicite (non symétrique avec décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.00000000000000	-0.05558374071257	0.00000000000000	-0.14971308735176
0.00740545603469	-0.04817828467788	0.01838992312221	-0.16810301047397
0.01092136270871	-0.04466237800387	0.02241500257113	-0.17212808992289
0.01156523515554	-0.04401850555704	0.02644008202006	-0.17615316937181
0.01142870925937	-0.04415503145320	0.04483000514227	-0.19454309249402
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01118621692323	-0.04439752378934		
0.01120458729194	-0.04437915342064		
0.01127680067190	-0.04430694004067		
0.01142870925937	-0.04415503145320		
0.01156523515554	-0.04401850555704		
0.01092136270871	-0.04466237800387		
0.00740545603469	-0.04817828467788		
0.00000000000000	-0.05558374071257		

Tab. 4.7 : Résultats du calcul au bord de la plaque, explicite (non symétrique avec décollement)

IV.8.4.2.8 Schéma implicite (non symétrique avec décollement)

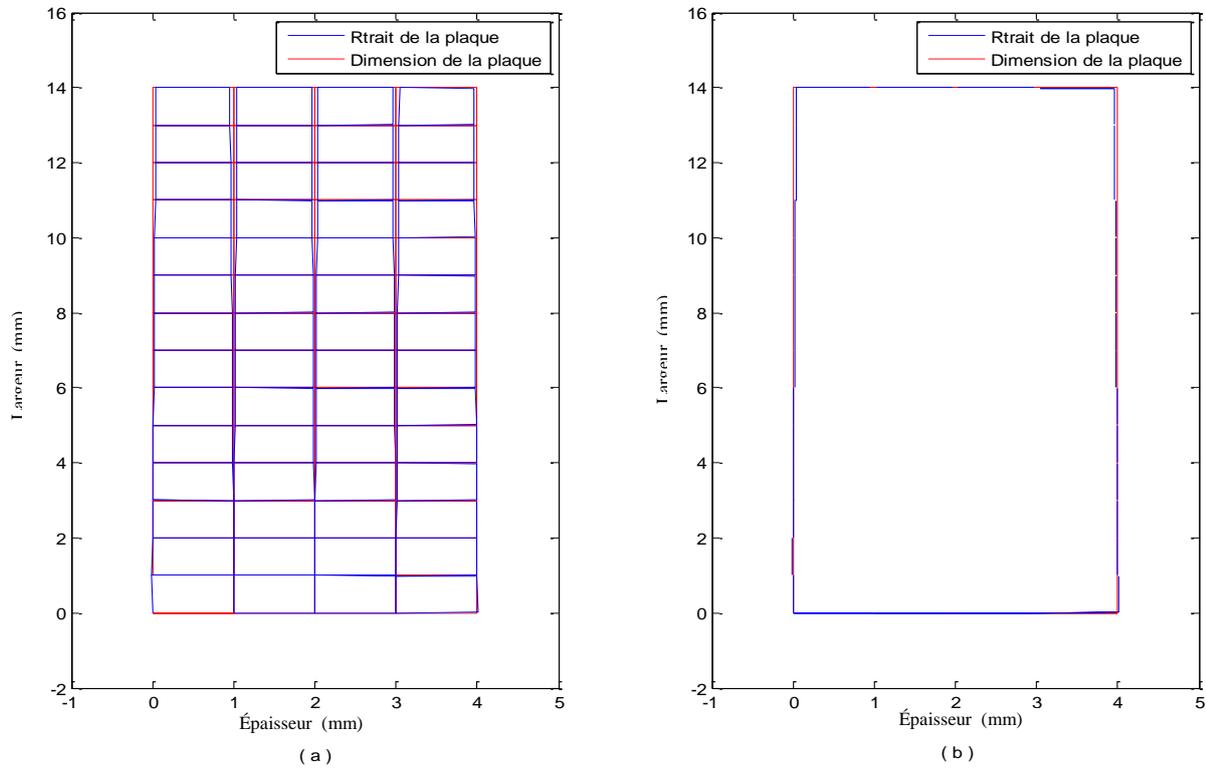


Figure 4.16 : Présentation du retrait pour le schéma implicite (non symétrique avec décollement)

(a) : plaque complet, (b) : bord de la plaque

Déplacement gauche	Déplacement droite	Déplacement bas	Déplacement haut
0.00000000000000	-0.01342998766289	0.00000000000000	-0.03835839797293
0.00187243370918	-0.01153474508599	0.00459126209136	-0.04295442296071
0.00254713624538	-0.01085169486069	0.00423407601851	-0.04258953903990
0.00244269072691	-0.01095026971911	0.00387547325902	-0.04221173625180
0.00227791852097	-0.01111091475172	0.00853543722871	-0.04709021933936
0.00219890377640	-0.01118655126595		
0.00217294971713	-0.01120977692114		
0.00216759537234	-0.01121292069792		
0.00217196435683	-0.01120673653371		
0.00219681369438	-0.01118034425155		
0.00227436143931	-0.01110116810730		
0.00243661255679	-0.01093660706538		
0.00253766510626	-0.01083748835298		
0.00186026646650	-0.01152429845925		
0.00001415708384	-0.01347958768237		

Tab. 4.8 : Résultats du calcul au bord de la plaque, implicite (non symétrique avec décollement)

IV.8.4.2.9 Comparaison des résultats

IV.8.4.2.9 .1 Schéma explicite et implicite

On prend les résultats du retrait pour les différents cas

- cas coté gauche de la pièce

Symétrique (sans décollement)		Non symétrique (sans décollement)	
Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
0.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000
0.00740545603469	0.00187253804297	0.00740545603469	0.00187310204290
0.01092136270871	0.00254749909381	0.01092136270871	0.00255049853783
0.01156523515554	0.00244370051908	0.01156523515554	0.00244902290940
0.01142870925937	0.00227976299640	0.01142870925937	0.00228634866547
0.01127680067190	0.00220163765516	0.01127680067190	0.00220834761929
0.01120458729194	0.00217642894418	0.01120458729194	0.00218308025082
0.01118621692323	0.00217165418999	0.01118621692323	0.00217826897133
0.01120458729194	0.00217644163698	0.01120458729194	0.00218309263859
0.01127680067190	0.00220161244517	0.01127680067190	0.00220832354391
0.01142870925937	0.00227961159461	0.01142870925937	0.00228620281847
0.01156523515554	0.00244335346312	0.01156523515554	0.00244868872920
0.01092136270871	0.00254685099045	0.01092136270871	0.00254987279781
0.00740545603469	0.00187189493886	0.00740545603469	0.00187246835629
0.00000000000000	0.00000191197952	0.00000000000000	0.00000195465302

Symétrique (avec décollement)		Non symétrique (avec décollement)	
Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
0.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000
0.00740545603469	0.00187257876032	0.00740545603469	0.00187243370918
0.01092136270871	0.00254767878460	0.01092136270871	0.00254713624538
0.01156523515554	0.00244408952147	0.01156523515554	0.00244269072691
0.01142870925937	0.00228035837494	0.01142870925937	0.00227791852097
0.01127680067190	0.00220240826133	0.01127680067190	0.00219890377640
0.01120458729194	0.00217734166921	0.01120458729194	0.00217294971713
0.01118621692323	0.00217268193671	0.01118621692323	0.00216759537234
0.01120458729194	0.00217756549751	0.01120458729194	0.00217196435683
0.01127680067190	0.00220281156354	0.01127680067190	0.00219681369438
0.01142870925937	0.00228084456649	0.01142870925937	0.00227436143931
0.01156523515554	0.00244459354957	0.01156523515554	0.00243661255679
0.01092136270871	0.00254807740900	0.01092136270871	0.00253766510626
0.00740545603469	0.00187314001836	0.00740545603469	0.00186026646650
0.00000000000000	0.00000066748195	0.00000000000000	0.00001415708384

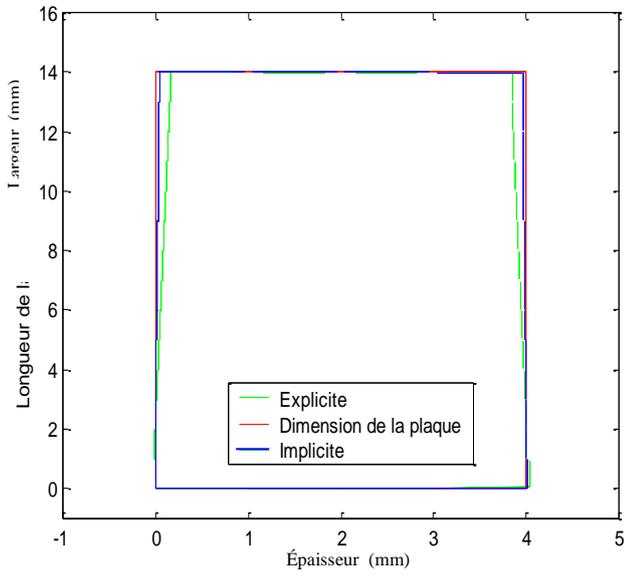
Tab. 4.9 : Résultats du calcul au bord de la plaque coté gauche pour les différents cas

- cas coté droite de la pièce

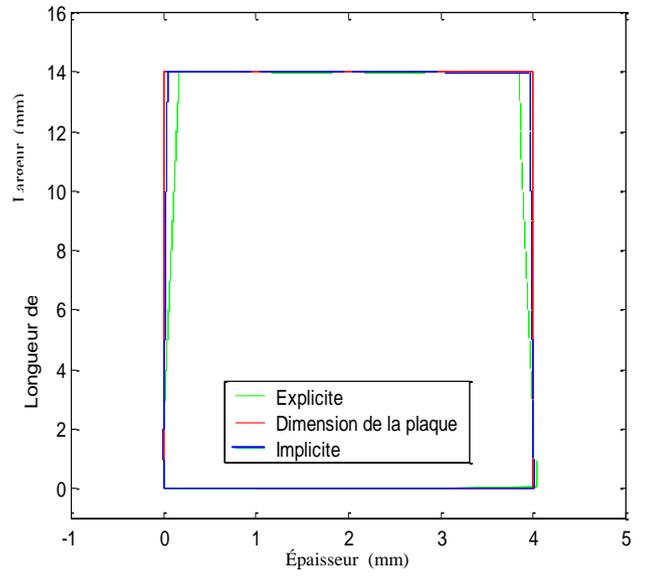
Symétrique (sans décollement)		Non symétrique (sans décollement)	
Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
-0.05558374071257	-0.01339418789802	-0.05558374071257	-0.01351396389286
-0.04817828467788	-0.01152452484104	-0.04817828467788	-0.01155039313744
-0.04466237800387	-0.01084994298055	-0.04466237800387	-0.01086106443853
-0.04401850555704	-0.01095388244700	-0.04401850555704	-0.01095810663806
-0.04415503145320	-0.01111781201701	-0.04415503145320	-0.01112103079227
-0.04430694004067	-0.01119593831823	-0.04430694004067	-0.01119900550269
-0.04437915342064	-0.01122114619500	-0.04437915342064	-0.01122429168590
-0.04439752378934	-0.01122592234512	-0.04439752378934	-0.01122910220302
-0.04437915342064	-0.01122110634888	-0.04437915342064	-0.01122425302047
-0.04430694004067	-0.01119587915539	-0.04430694004067	-0.01119894793444
-0.04415503145320	-0.01111745081422	-0.04415503145320	-0.01112068084035
-0.04401850555704	-0.01095294339079	-0.04401850555704	-0.01095719897212
-0.04466237800387	-0.01084897013384	-0.04466237800387	-0.01086013388325
-0.04817828467788	-0.01152406500812	-0.04817828467788	-0.01154994182639
-0.05558374071257	-0.01339662485821	-0.05558374071257	-0.01351630413242

Symétrique (avec décollement)		Non symétrique (avec décollement)	
Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
-0.05558374071257	-0.01339171616573	-0.05558374071257	-0.01342998766289
-0.04817828467788	-0.01152351358717	-0.04817828467788	-0.01153474508599
-0.04466237800387	-0.01085001517636	-0.04466237800387	-0.01085169486069
-0.04401850555704	-0.01095473080553	-0.04401850555704	-0.01095026971911
-0.04415503145320	-0.01111925379445	-0.04415503145320	-0.01111091475172
-0.04430694004067	-0.01119785219888	-0.04430694004067	-0.01118655126595
-0.04437915342064	-0.01122344211306	-0.04437915342064	-0.01120977692114
-0.04439752378934	-0.01122852739598	-0.04439752378934	-0.01121292069792
-0.04437915342064	-0.01122395947626	-0.04437915342064	-0.01120673653371
-0.04430694004067	-0.01119891382072	-0.04430694004067	-0.01118034425155
-0.04415503145320	-0.01112060902431	-0.04415503145320	-0.01110116810730
-0.04401850555704	-0.01095589125078	-0.04401850555704	-0.01093660706538
-0.04466237800387	-0.01085081747662	-0.04466237800387	-0.01083748835298
-0.04817828467788	-0.01152410312065	-0.04817828467788	-0.01152429845925
-0.05558374071257	-0.01338991011085	-0.05558374071257	-0.01347958768237

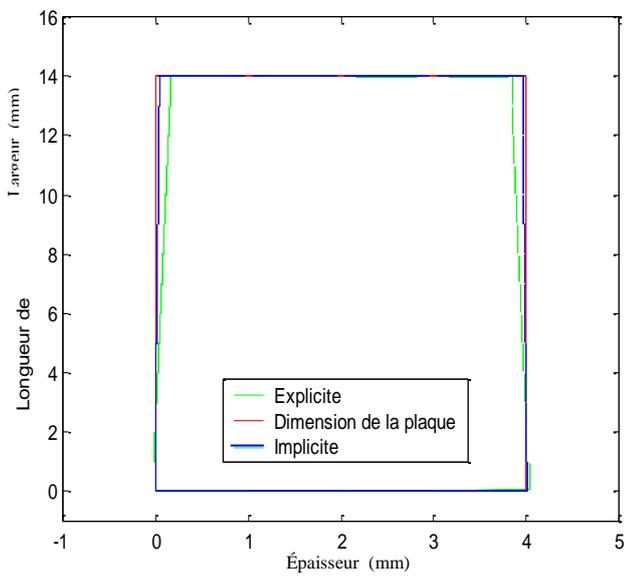
Tab. 4.10: Résultats du calcul au bord de la plaque coté droite pour les différents cas



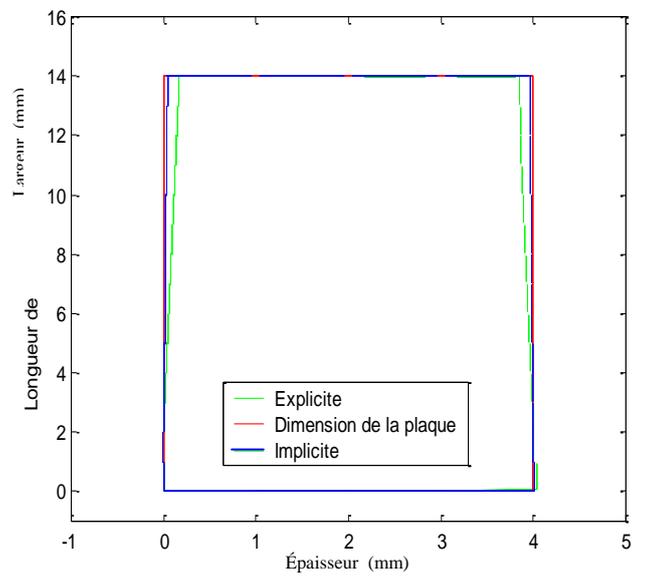
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4.17 : Présentation du retrait pour le schéma explicite et implicite au bord de la plaque (a) : Symétrique sans décollement, (b) : non symétrique sans décollement, (c) : symétrique avec décollement (d) : non symétrique avec décollement

IV.8.4.2.9 .2 Retrait dans les quatre cas

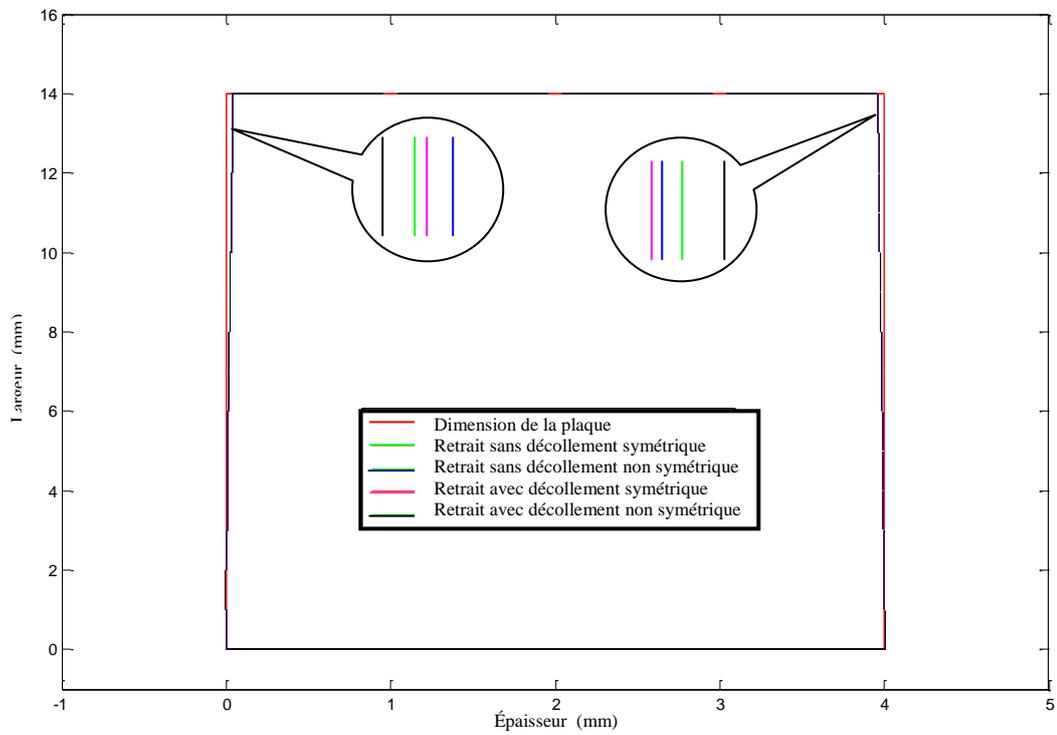


Figure 4.18: Présentation du retrait pour tout les cas au bord de la plaque

IV.8.4.3 Interprétations

La plaque libre peut se déformer de tous les cotés, ce cas est traité pour un minimum de blocage (figure 4.8), ce qui laisse la plaque se déformer librement.

Les résultats de ce cas de blocage sont présentés sur tous les figures de tous les cas du chapitre IV.

- 1- Symétrique sans décollement : figure (4.9), (4.10) les résultats donnent des déformés symétrique par rapport au plan médian de la plaque, ainsi que les résultats obtenue par le schéma implicite converge, stable et permet d'obtenir une plaque parfaitement plane par rapport au schéma explicite.
- 2- Non symétrique sans décollement : figure (4.11), (4.12) les résultats donnent des déformés non symétrique par rapport au plan médian de la plaque, ainsi que les résultats obtenue par le schéma implicite converge et stable que le schéma explicite.
- 3- Symétrique avec décollement : figure (4.13), (4.14) les résultats donnent des déformés non symétrique par rapport au plan médian de la plaque, ainsi que les résultats obtenue par le schéma implicite converge et stable que le schéma explicite.
- 4- Non symétrique avec décollement : figure (4.15), (4.16) Symétrique avec décollement : figure (4.13), (4.14) les résultats donnent des déformés non symétrique par rapport au plan médian de la plaque, ainsi que les résultats obtenue par le schéma implicite converge et stable que le schéma explicite.

Les tableaux (4.9), (4.10) les résultats obtenue dans tous les cas par le schéma explicite, sont égaux par contre les contre les résultats de schéma implicite. Ce qui indique que le schéma implicite est plus converge et stable que explicite. Figure (4.17) montre cette variation entre présentation explicite et implicite.

On a représenté les résultats des cas précédents du schéma implicite sur une même figure (4.18), pour mieux comparer la déformé qui spécifie chaque cas.

CONCLUSION GENERALE

Le but de ce travail est d'étudier qualitativement et quantitativement l'influence de ces paramètres sur la forme finale et l'état mécanique des pièces injectées en matière plastique après leur éjection hors du moule.

La qualité des pièces injectées en matière plastique est liée directement à son état mécanique et à la précision de ses cotes après l'injection. Cet état en fin de cycle de moulage dépend grandement des conditions techniques du procédé d'injection et notamment des conditions d'injection de la matière tels que le débit, le temps de remplissage, la pression d'injection, la température d'injection, etc.....

La recherche bibliographique a montré que ce phénomène est difficile à prédire lors de la mise en forme des pièces en thermoplastique vu qu'il dépend de plusieurs paramètres géométriques, thermomécanique et technologique liés au paramètre d'injection.

La modélisation de l'échange thermique entre le polymère et le système de refroidissement du moule (isotrope). Ceci a permis d'obtenir la carte de température dans l'épaisseur et dans le sens d'écoulement en fonction du temps de refroidissement. La résolution numérique des équations du modèle a été réalisée par la méthode des différences finies (schéma explicite et schéma implicite).

La modélisation de la déformation de la pièce produite pendant la phase d'éjection et qui a été utilisée pour la détermination de la carte de température par le modèle d'échange thermique. La résolution numérique des équations du modèle a été réalisée par la méthode des éléments finis. Cette étude a traité le cas de condition à la limite de la pièce libre en dehors du moule. Cette modélisation et en tenant compte de ces hypothèses, présente un intérêt qualitatif et quantitatif.

Enfin, une extension de ce travail pour une modélisation en trois dimensions, permettra d'étudier des géométries complexes ou industrielles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] H. Massé, " Couplages thermomécaniques lors de la solidification de matériaux polymères", Thèse de doctorat, Université Bordeaux France, 2000
- [2] S. Berkane, " Étude du retrait des pièces injectées en matière plastique", Thèse de magistère, Université Biskra Algérie, 2006
- [3] R. Cermak, M. Obadal, P. Ponizil, M. Polaskova, K. Stoklasa, and A. Lengalova, "Injectionmoulded α - and β -polypropylenes: I. Structure vs. processing parameters", European Polymer Journal, vol. 41, pp. 1838-1845, 2005.
- [4] E. Mathey, " Optimisation numérique du refroidissement des moules d'injection de thermoplastiques basée sur la simulation des transferts thermiques par la méthode des éléments frontières ", Thèse de doctorat, l'Université Toulouse III, 2004
- [5] M.R. Kantz, H.D. Newman, and F.H. Stigale, "The Skin-Core Morphology and Structureproperty Relationships in Injection-Molded Polypropylene", Journal of Applied Polymer Science, vol. 16, pp. 1249-1260, 1972
- [6] Laszlo MUZSNAY, " Injection des thermoplastiques : les presses ", Technique de l'ingénieur, A3680
- [7] J.P. Trotignon and J. Verdu, "Skin-core structure-fatigue behavior relationships for injection-molded parts of polypropylene. I. influence of molecular weight and injection conditions on the morphology", Journal of Applied Polymer Science, vol. 34, pp. 1-18, 1987.
- [8] N. Brahmia, " Contribution à la modélisation de la cristallisation des polymères sous cisaillement : application à l'injection des polymères semi-cristallins ", Thèse doctorat, Institut national des Sciences Appliquées de Lyon, 2007
- [9] R. Mendoza, "Morphologies induites dans les pièces en polyoléfine moulées par injection", Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, 2005
- [10] R. Pantani, I. Coccorullo, V. Speranza, and G. Titomanlio, "Modeling of morphology evolution in the injection molding process of thermoplastic polymers", Progress in Polymer Science, 2005
- [11] D.R. Fitchmun and Z. Mencik, "Morphology of injection-molded polypropylene", Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition, vol. 11, pp. 951-971, 1973
- [12] B.A.G. Schrauwen, L.C.A. v. Breemen, A.B. Spoelstra, L.E. Govaert, G.W.M. Peters, and H.E.H. Meijer, "Structure, Deformation, and Failure of Flow-Oriented Semicrystalline Polymers", Macromolecules, 2004
- [13] J.P. Trotignon, J.L. Lebrun, and J. Verdu, "Crystalline polymorphism and orientation in injection-moulded polypropylene", Plastics and Rubber Processing and Applications, 1982

- [14] Bay R.S. and Tucker C.L. III." Fiber orientation in simple injection moulding. Part ii: Experimental results. Polymer Composite, 1992
- [15] Bonhome G. and Brouwer T, " Étude de l'orientation de fibre courtes lors de la mise en œuvre des composites", Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1990
- [16] Darlington M.W. and Smith A.C, "Some features of the injection moulding of short fibre reinforced thermoplastics in centre sprue-gated cavities", Polymer Composite, 1987
- [17] Fujiyama M, Awaya H. and Kimura S, "Mechanical anisotropy of injection pp", Journal of Applied Polymer Science, vol. 21,pp. 3291-3309, 1977
- [18] Gillepsie J.W, Vanderschuren J.A. and Pipes R.B, "Process induced fibre orientation: numerical simulation with experimental verification", Polymer Composite, 1984
- [19] Megally A, "Modélisation de l'orientation de fibres", PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2005
- [20] Ranganathan S. and Advani S.G. "A simultaneous solution for flow and fiber orientation in axisymmetric, diverging radial flow", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, vol. 47,pp. 107-136, 1993
- [21]. Tang L. and Altan M.C. "Entry flow of the fibre suspensions in a straight channel", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, vol. 56,pp. 183-216, 1995
- [22]. El-Wakil M. M, "Nuclear Heat Transport", International Textbook Company, 1971
- [23] J-F. Agassant et M. Vincent, " Modélisation de l'injection : Compactage et contraintes résiduelles ", Technique de l'ingénieur, AM3696
- [24] J.Lemaitre J.L Chaboche " Mécanique des matériaux solides", Dunod, 1985
- [25] C.Rockey, H.R.Evans, D.W.Griffiths. D.A.Netherco, " Méthodes des éléments finis " Cranada publishing limited, 1975
- [26] J.F.Imbert, " Analyse des structures par éléments finis ", Cepadues- Editions, 1984

Résumé :

Notre travail est d'étudier qualitativement et quantitativement l'influence de ces paramètres (débit, le temps de remplissage, la pression d'injection, la température d'injection, etc...) sur la forme finale et l'état mécanique des pièces injectées en matière plastique après leur éjection hors du moule.

Ce travail est divisé en deux parties très distinctes:

La première partie est basée sur les calculs de l'échange thermique en fonction du temps entre la pièce et le moule. Ce calcul est basé sur la méthode des différences finies.

La deuxième partie est basée sur les calculs de la déformation de la pièce dehors du moule. Ce calcul est basé sur la méthode des éléments finis en supposant le matériau thermoplastique.

Mots clé : injection, température, déformation, thermoplastique.

Abstract:

Our work is to study qualitatively and quantitatively the influence of these parameters (speed, filling time, injection pressure, injection temperature, etc ...) on the final shape and the mechanical injected parts plastic after their ejection from the mold.

This work is divided into two very distinct homelands:

The first part is based on calculations of heat exchange function of time between the part and the mold. This calculation is based on the finite difference method.

The second part is based on the calculation of the deformation of the part outside the mold. This calculation is based on the finite element method assuming the thermoplastic material.

Key words: injection, temperature, deformation, thermoplastic.

ملخص:

عملنا هو دراسة نوعيا وكميا تأثير هذه المعلمات (السرعة والوقت شغل وضغط الحقن ، حقن درجة الحرارة، الخ...) على الشكل النهائي والأجزاء الميكانيكية حقن البلاستيك بعد إخراجها من القالب. وينقسم هذا العمل إلى قسمين متباينين :

ويستند الجزء الأول على حسابات وظيفة التبادل الحراري من الوقت بين الجزء والقالب. ويستند هذا الحساب على طريقة الفرق المحدود.

ويستند الجزء الثاني على حساب تشويه للجزء خارج القالب. ويستند هذا الحساب على طريقة العناصر المحدودة على افتراض المواد ترموبلاستيك.

كلمات المفتاح: الحقن، الحرارة، التشوه، بلاستيك.