

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider– Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Mécanique
Réf :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم : الهندسة الميكانيكية
المرجع :

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du diplôme de
Magister

Spécialité
Génie Mécanique
Option

Construction Mécanique

**Contribution à l'étude de la phase post-remplissage
du moulage par injection**

Présenté par :

DJABALLAH Abdelmalek

Soutenue publiquement le 12 janvier 2012

Devant le jury composé de :

Président :	Mr.HADID Mohamed	MC (A)	Université de Biskra.
Rapporteur :	Mr. HECINI Mabrouk	Pr	Université de Biskra.
Examineur :	Mr. BENCHABANE Adel	MC (A)	Université de Biskra.
Examineur :	Mr.MOUMMI Abdelhafid	MC (A)	Université de Biskra.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du laboratoire de génie mécanique de l'université de Biskra.

Je tiens à remercier en premier lieu mon rapporteur monsieur Hecini Mabrouk professeur en génie mécanique Université de Biskra pour son suivi, ses conseils judicieux et son aide, ce qui m'a permis de profiter de ses compétences et son expérience à l'égard de mon profil. J'ai pu apprécier sa curiosité et sa rigueur scientifique au travers des nombreuses rencontres que nous avons eues. Ses nombreuses remarques m'auront permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie également le président et les membres du jury pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à cette commission.

Monsieur : HADID Mohamed Maitre de conférences (A) Université de Biskra

Monsieur : BENCHABANE Adel Maitre de conférences (A) Université de Biskra

Monsieur : MOUMMI Addelhafid Maitre de conférences (A) Université de Biskra

Je remercie tout les enseignants qui m'ont enseignés durant l'année d'enseignement théorique du magistère.

Je remercie monsieur Alloui Lotfi docteur en électro technique université de Biskra, pour m'avoir accueilli et aidé tant de fois dont l'aide mon été précieux.

Je tiens à exprimer mes sincères reconnaissances à Benaisa Amar, Taleb Messaoud, Bouchenafa Mohamed, Rabhi Sohib, Othmani Abdelkader, Abdelatif Mohamed, Daoudari Ameer, Attlaoui Samir, Saidi Mustapha et à tous mes amis, en n'oubliant pas à tous ceux qui m'ont aidé à accomplir ce travail.

Je remercie ma mère, ma femme pour ses encouragements et patience durant ces années, mes frères et sœurs et à toute ma famille pour leurs gentillesse et soutien moral.

À la mémoire de mon père,

À mon frère,

À tous ceux qui nous ont quittés si jeunes.

Sommaire

Introduction générale	1
1 Généralités	3
1.1 Les matériaux polymères	3
1.1.1 Historique	3
1.1.2 Classification	3
1.1.3 Structures	4
1.1.3.1 Thermoplastiques	4
1.1.3.2 Thermodurcissables	6
1.1.3.3 Élastomères	7
1.2 Les procédés de mise en forme	7
1.2.1 Le procédé de moulage par injection	9
1.2.1.1 Généralité sur l'injection	9
1.2.1.2 Les presses à injection	10
1.2.1.3 Les outillages	11
1.2.1.4 Les phases d'un cycle d'injection	12
1.3 Etude bibliographique du post-remplissage	15
1.3.1 Compactage	15
1.3.2 Particularités de la phase post-remplissage	16
1.3.2.1 Refroidissement	16
1.3.2.2 Conservation de la masse	22
2 Comportements rhéologiques des polymères	23
2.1 Introduction	23
2.2 Les différents modèles de viscosité	24
2.2.1 Modèle newtonien	24
2.2.2 Modèle pseudo-plastique	25
2.2.2.1 Loi puissance (loi d'Oswald)	25
2.2.2.2 Loi de Cross	27
2.2.2.3 Loi de Carreau	27
2.2.3 Modèles pseudo-plastiques thermo-dépendants	27

2.2.3.1	Loi puissance	28
2.2.3.2	Loi de Cross	29
2.2.3.3	Loi de Carreau	29
2.2.3.4	Loi de Carreau – Yasuda	29
2.2.3.5	Dépendances de la viscosité avec la pression	30
2.3	Compressibilités	30
3	Modélisation de la phase post-remplissage	32
3.1	Introduction :	32
3.1.1	Définition du post remplissage	32
3.1.2	Hypothèses	33
3.2	Modélisation de la phase post-remplissage	33
3.2.1	Introduction	33
3.2.2	Les paramètres de modélisation	34
3.2.3	Formulation mathématique	34
3.3	Modélisation de post-remplissage dans un moule (plaque)	36
3.3.1	Calcul dynamique.	37
3.3.1.1	Résolution par intégration numérique	42
3.3.1.2	Résolution analytique	43
3.3.2	Calcul thermique	47
3.3.2.1	Calcul thermique lors de compactage	47
3.3.2.2	Cas pseudo- plastique	49
3.3.2.1	Calcul thermique au cours de refroidissement	53
3.3.3	Calcul thermodynamique	53
3.3.3.1	introduction.....	53
3.3.3.2	Calcul de la masse injectée	54
3.3.3.3	Calcul de la pression dans le moule	55
3.3.3.4	Calcul du retrait volumique	56
4	Programmation	57
4.1	Organisation générale du programme.....	57
4.2	Organigramme détaillé du programme	58
4.2.1	Calcul géométrique	58

4.2.2	Calcul mécanique	58
4.2.3	Calcul de l'échange thermique	58
4.2.4	Calcul thermodynamique	59
4.3	Données et résultats du programme	64
4.3.1	Données	64
4.3.2	Résultats	65
5	Etude d'un cas d'application (une plaque)	66
5.1	Données géométriques	66
5.2	Maillage	66
5.3	Matériau	67
5.4	Moule	68
5.5	État de la matière	68
5.6	Calcul des paramètres physiques.....	68
5.7	Graphes et interprétations	69
	Conclusion et perspective	81
	Références bibliographiques	
	Résumé	

Nomenclature

η : viscosité de cisaillement, Pa.s

τ : contrainte de cisaillement, Pa

$\dot{\gamma}$: taux de cisaillement, s^{-1}

K : consistance de liquide

m : indice de pseudo- plasticité, sans unité

η_0 : viscosité à cisaillement nul, Pa.s⁻¹

λ : le temps de relaxation, s

P : pression, Pa

t : temps, s

div : opérateur divergence

grad : le gradient

Δ : opérateur laplacien

ρ : masse volumique, $kg.m^{-3}$

V : volume spécifique, $m^3.kg^{-1}$

σ : tenseur des contraintes, Pa

$\dot{\epsilon}$: vitesse de déformation

u : vecteur vitesse.

\vec{F} : force d'inertie.

\vec{G} : force de masse

k : conductivité thermique, $w.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$

a : la diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$

\dot{w} : puissance dissipée par unité de volume, $w.m^{-3}$
 p : pression hydrostatique, Pa
 I : tenseur identité
 PS : polystyrène
 L : longueur de la plaque, m
 h : demi épaisseur de la plaque, m
 q : largeur de la plaque, m
 w : champs de vitesse, $m.s^{-1}$
 Q : débit volumique, $m^3.s^{-1}$
 w_m : vitesse moyenne, $m.s^{-1}$
 φ : la densité du flux thermique, $w.m^{-2}$
 ΔT : différence de température
 k_{ac} : conductivité thermique de l'acier
 k_p : conductivité thermique du polymère
 φ_1 : le flux rentrant.
 φ_2 : le flux sortant.
 e : distance entre le canal de refroidissement et la matière, m
 t_{ref} : temps de refroidissement, s
 Δy : distance entre deux nœuds suivant l'épaisseur de la plaque, m
 M : nombre des nœuds suivant l'épaisseur de la plaque
 Δz : distance entre deux nœuds suivant la longueur de la plaque, m
 N : nombre des nœuds suivant la longueur de la plaque
 C_p : capacité calorifique du polystyrène, $J. ^\circ C^{-1}.kg^{-1}$

T : température, °C

Tr : température du fluide de refroidissement, °C

T_g : température de transition vitreuse. °C

T_{ej} : température d'éjection, °C

C : constant de « Tait », sans unité

m(i, j) : masse d'un élément de volume (une maille), kg

vvelt : volume de l'élément, m³

R_M : le retrait au moulage

PR : le post retrait, m

R_V : retrait volumique d'une pièce, en %

retr : retrait volumique d'un élément de volume, en %

v_m : volume du moule, m³

s : la surface latérale du moule, m²

Q : calcul de débit moyen, m³.s⁻¹

Introduction générale

Le moulage par injection est aujourd'hui l'un des procédés les plus utilisés pour la mise en forme des polymères. Il est généralement utilisé pour la production de très grandes séries pour l'automobile, l'électroménager, articles de sport, santé ...etc., ou pour des séries plus réduites en aéronautique. Il permet de produire à grande cadence avec un faible coût, et avec une grande régularité, et de façon automatique des pièces massives et /ou de formes complexes.

Son principe consiste à remplir le polymère thermoplastique fondu dans une cavité, appelée empreinte, à l'intérieure d'un moule. Lorsque celui-ci se refroidit, la pièce se solidifie tout en se contractant : le volume occupé par la pièce solidifiée est inférieur à celui de l'empreinte, on appelle ce phénomène le retrait. Lorsque la solidification est terminée, il y a ouverture du moule et éjection de la pièce.

Le cycle de moulage par injection des thermoplastiques peut être divisé en deux phases, la phase de remplissage qui est la phase dynamique, le polymère est considéré incompressible. Et la phase post-remplissage qui commence par le compactage de la matière à l'intérieure du moule : ce compactage compense le retrait volumique. Après le figeage du seuil d'injection, le refroidissement de la pièce continue dans le moule jusqu'à son éjection.

Les problèmes rencontrés lors du procédé du moulage par injection sont multiples. Le plus important est sans doute le retrait volumique provoqué par la baisse de la température dans la cavité du moule au cours de la phase post-remplissage. L'intérêt de la prédiction de ce retrait et de ses conséquences est donc indispensable.

L'objectif de cette étude est de décrire les phénomènes présents pendant cette phase et de modéliser le comportement thermomécanique de la matière à l'intérieure du moule, afin de prédire l'état final de la pièce. Nous considérons l'étude de la phase post-remplissage, à partir du moment où le polymère remplit la cavité du moule jusqu'à la fin du refroidissement. Nous présenterons une modélisation du refroidissement isochore d'un polymère amorphe en tenant compte du comportement pression-volume-température (PvT). Durant cette phase l'écoulement et les transferts de chaleur sont transitoires. Les phénomènes thermiques, mécanique et thermodynamique sont fortement liés.

Ce couplage entre ces phénomènes détermine l'évolution de la pression, de la température et du volume spécifique dans la cavité du moule à partir d'une pression initiale jusqu'à la pression atmosphérique et le début du retrait. Nous tiendrons plus particulièrement au phénomène de retrait au cours de refroidissement afin d'appréhender mieux le comportement du polymère.

L'organisation de la thèse est comme suit :

- le premier chapitre rassemble les notions de base sur les polymères, les procédés de mise en forme des plastiques en particulier le procédé de moulage par injection et enfin une bibliographie sur la phase post-remplissage.

- Dans le deuxième chapitre, on présente le comportement rhéologique de polymère et les différents modèles de viscosité : modèle newtonien, modèle pseudo plastique et modèle pseudo plastique thermo-dépendant ainsi que la loi de "Tait".
- Le troisième chapitre présente les principes de la mécanique des milieux continus utilisés pour établir des équations de base régissant la thermique et la dynamique. Celles ci couplées avec l'équation d'état " équation de Tait" permettent la modélisation de la phase post remplissage.
- Le quatrième chapitre présente les techniques de programmation du modèle établi pour la phase post remplissage, afin qu'on connaisse l'histoire thermique, l'évolution de la pression et le volume spécifique du polymère. Le logiciel utilisé pour cette programmation est : MATLAB 7.10.
- Enfin le dernier chapitre présente une étude d'un cas d'application (une plaque) dans un moule de forme rectangulaire avec des dimensions et des données d'injection préalablement définies, suivie par des interprétations des résultats graphiques obtenus. Enfin nous finissons notre mémoire par la conclusion et les perspectives.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Les Matériaux Polymères

1.1.1 Historique

Les matériaux polymères (polymère = plusieurs unités, en grec), appelés aussi matières plastiques ou simplement plastiques, sont des matériaux organiques composés essentiellement d'atomes de carbone et d'hydrogènes. Outre leur poids spécifique faible, leurs principales caractéristiques sont leur résistance et leur rigidité, qui sont inférieures à celles des aciers. Ces produits sont nés de la recherche scientifique intensive du XX^e siècle notamment. Dès le milieu des années 1920, les bases scientifiques nécessaires à leur développement ultérieur étaient fondées.

Les débuts de la production industrielle de pièces en matière plastique remontent au milieu du XIX^e siècle. Jusqu'au milieu des années 1920, d'importantes découvertes ont contribué au développement des matières plastiques. Un développement remarquable, surtout pour les thermoplastiques, a été observé à partir de 1926 avec les travaux du chimiste allemand Staudinger. Celui-ci mit en évidence, lors de ses investigations, que les matières plastiques sont effectivement formées de longues chaînes moléculaires, appelées macro molécules. Ce concept constitue encore aujourd'hui la base scientifique de l'étude systématique de la matière plastique. [1]

1.1.2 Classification

Les polymères sont constitués de la répétition d'un grand nombre de motifs élémentaires : les unités monomères. Dans le cas où les macromolécules ne contiennent qu'un type de monomères, il s'agit d'un homopolymère. Si les unités constitutives sont nombreuses, on parle alors de copolymère. Il existe plusieurs types de copolymères [2] :

- les copolymères alternés (chaîne A-B-A-B-A-....)
- les copolymères séquencés (chaîne A-A-A-B-B-B-....)
- les copolymères statistiques (chaîne A-B-B-A-B-A-B-A-A-....)

1.1.3 Structure

La structure du polymère représente la façon dont les longues chaînes moléculaires de base sont reliées entre elles pour former le matériau. La disposition de chaînes entre elles ainsi que les densités des points de liaison vont modifier profondément les caractéristiques macroscopiques du polymère.

Un polymère peut adopter trois structures moléculaires de base, présentées dans la figure 1.1 :

1. Linéaire : la macromolécule se présente sous la forme d'une longue chaîne,
2. Branchée : une longue chaîne sur laquelle viennent s'embrancher des chaînes de longueur variable, en générale plus petites, Les ramifications latérales amoindrissent le potentiel de compaction d'une chaîne et, par conséquent, la masse volumique du polymère.
3. En réseau : Les chaînes sont reliées entre elles en plusieurs points formant un réseau tridimensionnel.

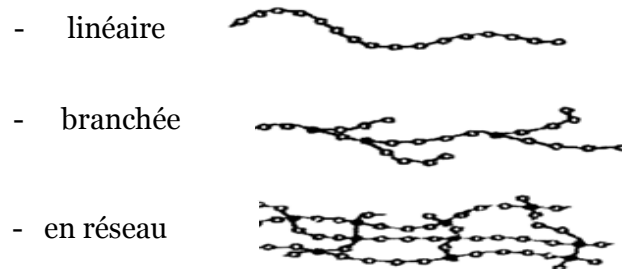


Figure 1.1 : Structures des chaînes moléculaires [2]

Ces différentes structures vont permettre de classer les polymères en deux grandes catégories :

Les thermoplastiques et les thermodurcissables.

1.1.3.1 Thermoplastiques

Les thermoplastiques ont une structure linéaire ou branchée. Ils présentent la particularité de s'écouler à la chaleur, ce qui facilite leur mise en forme. Ils ramollissent (jusqu'à la liquéfaction) lorsqu'ils sont chauffés et durcissent en refroidissant ; ces deux processus sont d'ailleurs entièrement réversibles et peuvent être répétés. Ils sont réparties en deux grandes familles : les amorphes et les semi-cristallins. Cette morphologie (figure 1.2) a une influence importante sur les polymères thermoplastiques.

- Polymère amorphe

Dans un polymère amorphe, les chaînes se représentent sous forme de pelotes statistiques (figure 1.2). Les chaînes sont enchevêtrées et on note l'absence de structure ordonnée. Quand on chauffe un polymère amorphe, il subit une transition douce de l'état solide à l'état liquide, il n'y a donc pas de température de fusion. En effet, la structure des chaînes de macromolécule en pelote compacte et désordonnée empêche une transition brutale entre les états solide et liquide. Cependant, une brusque variation de mobilité moléculaire est observée à une température appelée température de transition vitreuse noté T_g .

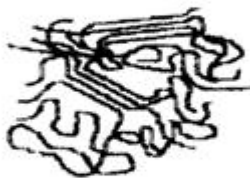


Amorphous

Polycarbonate (pc)

Acrylonitrile-butadiene-styrene (ABS)

Polystyrene



Semi-cristallin

Polyamide

Polyéthylène téréphtalate (PET)

Nylon



Cristallin

Linéaire polyéthylène

Polypropylène

Figure 1.2 : *Morphologie des thermoplastiques [2]*

- Polymères semi cristallin

Un polymère purement cristallin, quand à lui, présente des chaînes qui s'arrangent de façon ordonnée. Contrairement aux amorphes, les cristallins possèdent une température de fusion notée T_m . Cependant, un polymère totalement cristallin n'existe pas en réalité. Les semi-cristallins présentent à la fois une partie amorphes ou les chaînes moléculaires sont désordonnées et une partie cristalline ordonnée (figure 1.2).ils présentent donc à la fois une température de transition vitreuse (correspondant à la mobilité de la phase amorphe) et une température de fusion (pour la quelle la phase cristalline se liquéfie).on a donc toujours $T_g < T_m$.

Les polymères semi-cristallins peuvent être caractérisés par leur taux de cristallinité x_c qui représente la fraction massique ou molaire d'unités structurales cristallisées par rapport à les totalités des unités présentes. Le tableau 1.1 montre les avantages et les inconvénients des thermoplastiques.

Tableau 1.1 : Avantages et désavantages des thermoplastiques

avantages		désavantages
<ul style="list-style-type: none"> - Stabilité dans le temps (pas de polymérisation au cours du temps) - Recyclable (on peut les liquéfier à nouveau) - Facile à réparer (par soudure ou collage) - Post-formable 		<ul style="list-style-type: none"> - Forte viscosité du fondu - Fluage
Amorphe	Cristallin	
<ul style="list-style-type: none"> - Bonne résistance aux impacts - Moindre retrait au refroidissement 	<ul style="list-style-type: none"> - module plus élevé - plus grande dureté 	

1.1.3.2 Thermodurcissables

Les thermodurcissables ont une structure en réseau tridimensionnel, ce qui rend leur fusion impossible. La rigidité ainsi que la stabilité thermique du polymère est liée au taux de réticulation, c'est à dire à la densité de points de liaison entre les chaînes macromoléculaires (figure 1.2).

Le tableau 1.2 montre schématiquement les avantages et les inconvénients des thermodurcissables.

Tableau 1.2 : Avantages et désavantages des thermodurcissables

Avantages	Désavantages
Faibles viscosité de la résine	Cassant Non recyclable par techniques standard Non pos formable
Bon mouillage des fibres	
Bon stabilité thermique après polymérisation	
Résistance aux agressions chimiques	
Peu sensible au fluage	

1.1.3.3 Élastomères

Les élastomères peuvent être considérés comme des thermodurcissables faiblement pontés, c'est-à-dire comportant moins de liaisons. Leur principale propriété est leur faible rigidité

1.2 Les procédés de mise en forme

Les matériaux plastiques ou polymères constituent l'une des grandes classes des matériaux avec les matériaux métalliques et les céramiques et verres. Leurs application dans des secteurs diversifiés a connu un essor extraordinaire grâce aux progrès réalisés en conception et dans les techniques de mise en forme. Le formage de polymères s'effectue à l'aide d'un large éventail de procédés, Le procédé utilisé pour un polymère donné est choisi en fonction de plusieurs facteurs. Certains de ces procédés sont très semblables à ceux servant à la fabrication des métaux et des céramiques. Citons quelques procédés [3] :

- **Le calandrage**

C'est un procédé de laminage utilisé pour la production de feuilles, de plaques et de films plastiques. La résine thermoplastique chauffée et fondue est placée entre des rouleaux chauffants qui opèrent comme les anciennes essoreuses.

- **Le thermoformage**

C'est un procédé de seconde transformation dans lequel la matière arrive sous forme de plaques, de tubes ou de profilés. Le matériau est ramolli par chauffage avant d'être déformé et mis en forme par un moule métallique. Adhésion du polymère sur le moule se fait par aspiration sous vide ou par plaquage par injection d'air.

- **Le filage**

C'est le procédé de formage des fibres à partir d'un polymère brut. Le plus souvent, les fibres sont filées à l'état liquide selon un procédé appelé filage par fusion. Le matériau à filer est d'abord chauffé jusqu'à ce qu'il forme un liquide relativement visqueux, puis il est pompé à travers une plaque appelée assiette et percée de nombreux petits trous ronds. Le matériau fondu qui traverse chaque trou donne une fibre unique qui se solidifie presque immédiatement en arrivant à l'air libre.

- **Le moulage**

Le moulage constitue le procédé de formage des polymères plastiques le plus répandu. Les techniques utilisées pour le moulage sont la compression, le transfert, l'injection, l'extrusion et le soufflage. Dans tous les cas, un plastique aggloméré ou granulaire est contraint, à haute température et sous pression, de s'écouler dans la cavité d'un moule, de la remplir et d'en prendre la forme.

- a) **Moulage par compression**

En ce qui concerne le moulage par compression, on place les quantités requises de polymères et d'additifs bien mélangés entre les deux pièces d'un moule à compression, les deux pièces du moule dont une seule est mobile étant chaudes, le moule est ensuite refermé et soumis à la pression et au chauffage appropriés, ce qui rend la matière plastique visqueuse et lui confère la forme du moule

- b) **Le moulage par transfert**

Une variante du moulage par compression, consiste à faire d'abord fondre les matières premières solides dans un pot de transfert chauffé. Lorsque le matériau fondu est injecté dans le moule, la pression se répartit plus uniformément sur toute la surface.

c) Extrusion

Le procédé d'extrusion consiste simplement en un moulage par injection d'un thermoplastique visqueux dans une matrice ouverte par ses extrémités. Une vis sans fin pousse le matériau aggloméré dans un compartiment où il est successivement comprimé, fondu et transformé en charge continue de liquide visqueux.

L'extrusion se produit lorsque le matériau fondu est contraint de passer dans l'orifice d'une filière, ce procédé convient particulièrement bien à la production de longues pièces dont la section transversale est constante : tiges, tubes, tuyaux, feuillets et filaments.

d) L'extrusion soufflage

Il permet de fabriquer des corps creux. Cela commence par l'extrusion d'un tube plein appelé la paraison. Ce tube de plastique encore chaud sortant de la filière est coupé et un moule froid en deux parties se renferme autour de lui. Ensuite, de l'air est injecté dans la matière par une canne de soufflage et le polymère vient se plaquer sur les parois intérieures du moule qui est rapidement refroidit.

e) Le Roto moulage

Une fine poudre thermoplastique est enfermée dans un moule chauffant et fermé qui tourne sur lui-même. Le matériau se répartit uniformément sur les parois du moule par centrifugation. Cette technique permet de produire des objets creux comme des planches à voiles, des cuves ou des containers. [1]

1.2.1 Le procédé de moulage par injection :

1.2.1.1 Généralité sur l'injection

Le procédé de moulage par d'injection est très répandu dans le domaine de la plasturgie car il permet de fabriquer des pièces techniques de manière contrôlée et avec des cadences élevées. Son principe consiste à injecter sous haute pression (plusieurs centaines de bars) un polymère fondu (fluide très visqueux : viscosité de l'ordre de 10^4 Pa .s voir plus) dans une empreinte thermostaté (munie d'un circuit de refroidissement) [4].

La mise en forme des thermoplastique par injection est l'un des plus importants procédés de transformation des polymères : en terme de volume, il occupe la deuxième place après l'extrusion, il est en tête en termes de chiffres d'affaires.

Dans un contexte économique de plus en plus concurrentiel, les transformateurs se doivent à la fois d'améliorer la qualité de leurs pièces et la productivité du procédé. Le principe du procédé de moulage par injection moulage consiste à injecter une résine de polymères thermoplastiques, préalablement chauffée, dans un moule régulé en température. La température plus basse du moule va alors amorcer la solidification de la résine. Le polymère se solidifiant dans le moule, créera un solide épousant la forme et les dimensions de l'empreinte du moule.

1.2.1.2 Les presses à injection

La matière plastique est injectée dans le moule par l'intermédiaire d'une presse à injecter. Elle est composée en générale de deux groupes fonctionnel figure (1.3) : le groupe d'injection et le groupe de fermeture [5] :

- Le groupe d'injection assure l'injection du polymère fondu dans l'empreinte de l'outillage. Cette fonctionnalité est assurée par l'ensemble vis-fourreau.
- Le groupe fermeture a pour fonction, quant à lui, d'accueillir l'outillage et d'assurer les mouvements d'ouverture et de fermeture du moule lors du cycle de mise en forme.

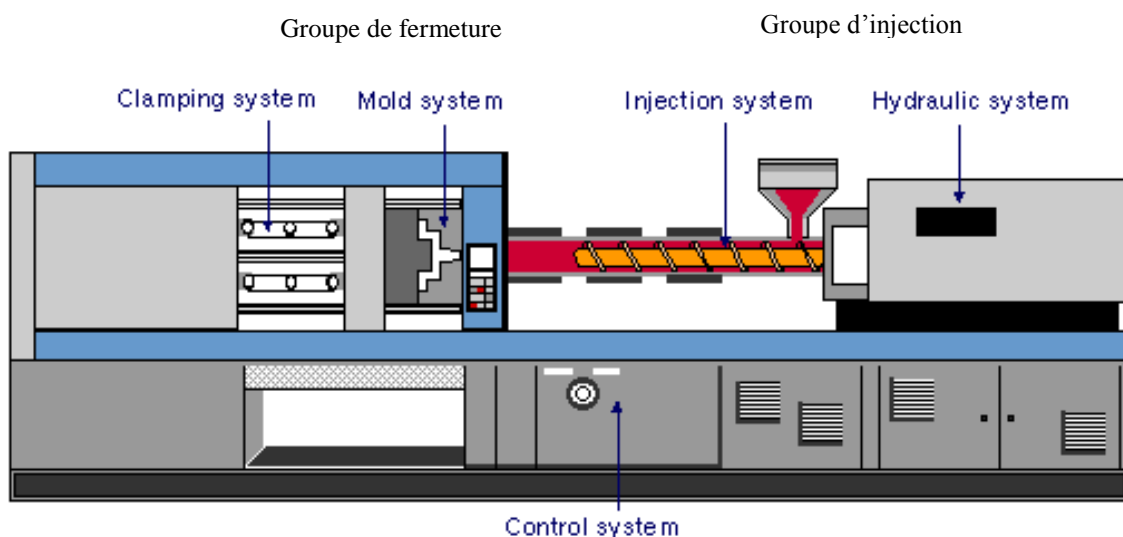


Figure 1.3 : Presse à injecter industrielle [6]

1.2.1.3 Les outillages

Un outillage est composé systématiquement de deux parties, une partie fixe et une partie mobile. la surface d'appui entre ces deux parties est appelée plan de joint. les parties fixe et mobile sont respectivement fixées sur le plateau mobile de la presse. La figure 1.4 présente une description d'un outillage.

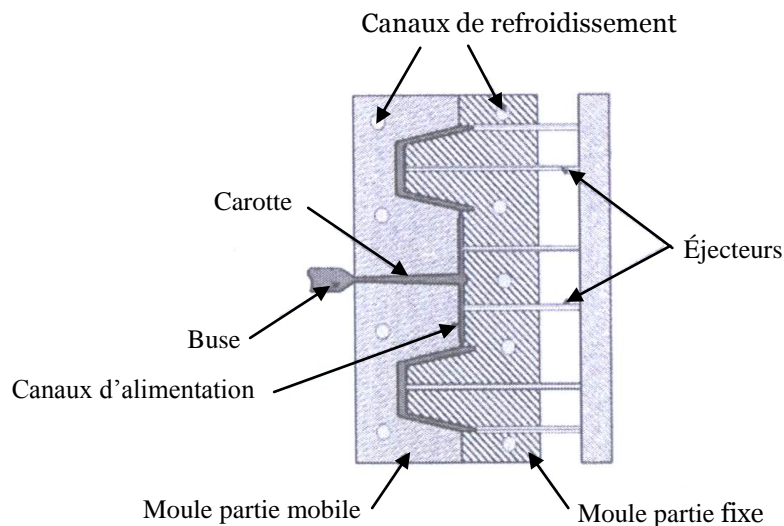


Figure 1.4 : schéma d'un outillage [5]

D'une manière générale, un outillage est composé de six parties fonctionnelles :

- La carcasse : il s'agit du bloc massif de l'outillage qui lui confère sa consistance mécanique.
- Le bloc empreinte : il s'agit de la partie interne de l'outillage qui accueille les parties male et femelle de l'empreinte, et qui donne la forme de la pièce.
- Le bloc de réception buse : il s'agit de la partie destinée à recevoir la buse machine.
- Les canaux d'alimentations : il s'agit des canaux qui conduisent de la matière dans l'empreinte. ils peuvent être froids ou avec des blocs chauds (dans ce cas régulés en température) pour certains types d'injection.
- Les canaux de refroidissement : il s'agit de canaux dans lesquels un liquide caloporteur circule pour extraire les calories de l'empreinte lors de la phase de refroidissement.
- Le bloc éjection : il s'agit d'un ensemble plaque-broches dont le mouvement est assuré par un vérin hydraulique qui permet l'éjection de la pièce une fois celle-ci refroidie.

1.2.1.4 Les phases d'un cycle d'injection

On peut distinguer quatre phases principales pendant le cycle d'injection [4]

a) La phase de plastification :

La phase de plastification a pour objectif de faire passer le polymère de l'état solide (sous forme de granulé) à l'état fondu. Cette transformation est réalisée par l'ensemble

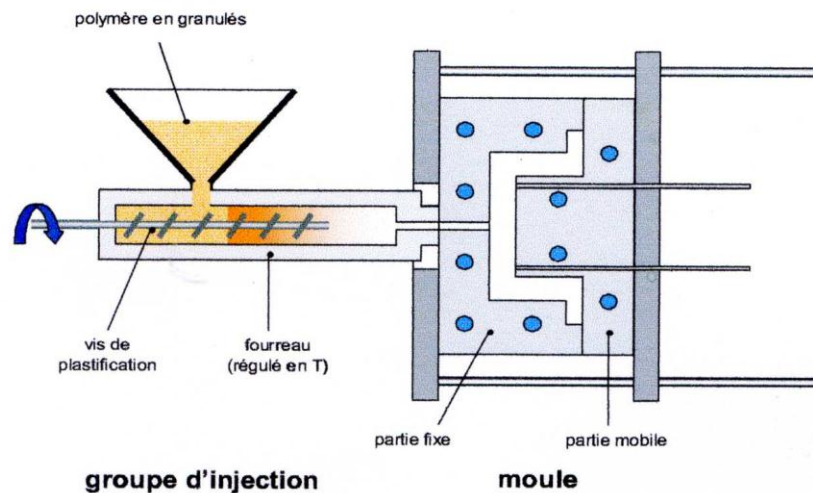


Figure 1.5: *phase de plastification* [4]

vis-fourreau dont la fonction est de broyer et de chauffer le granulé pour l'amener peu à peu à l'état fondu. Pour cela, la vis de l'unité possède un mouvement de rotation pour permettre l'auto-échauffement de la matière par malaxage, et de translation pour stocker à l'avant du fourreau la quantité de matière à injecter dans la cavité de moule (Figure 1.5)

b) La phase de remplissage

Une fois la matière accumulée en tête de fourreau, celle-ci est injectée dans l'empreinte de l'outillage par une avancée de la vis. Cette phase de cycle de transformation est appelée phase dynamique de remplissage. L'avancée de la vis est réglée en débit ou en pression pour maîtriser la vitesse d'injection du thermoplastique dans l'empreinte. Ce remplissage a une durée très courte, par rapport à celle de refroidissement (Figure 1.6).

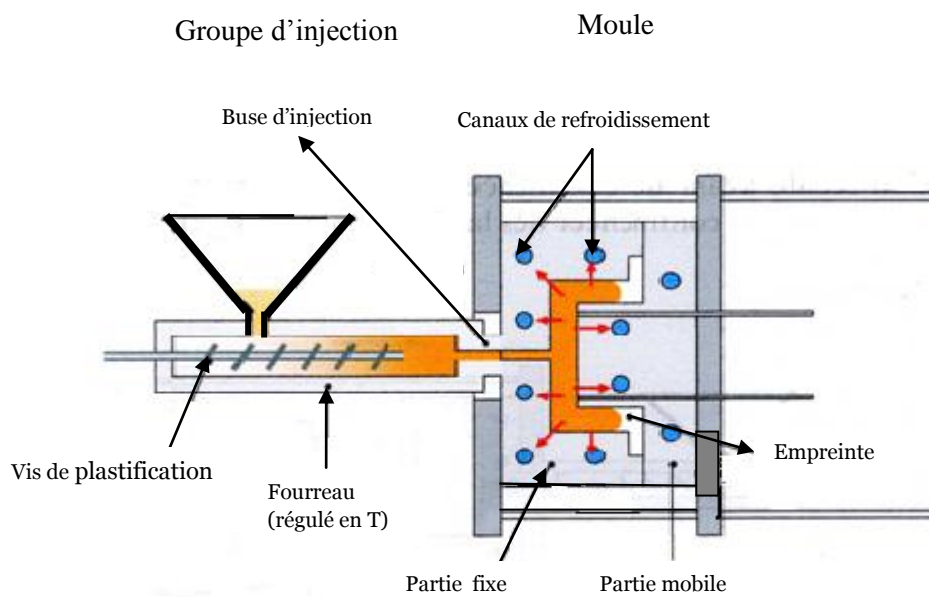


Figure 1.6 : la phase de remplissage [4]

c) La phase de compactage (commutation) et maintien

La commutation est l'instant clé du procédé d'injection. Il s'agit de l'instant de transition entre la phase de remplissage dynamique et la phase de maintien. A cet instant le pilotage de l'injection passe d'une régulation en vitesse à une régulation en pression. En générale, on choisit de commuter au moment où l'empreinte est complètement remplie. Cet instant est notifié par la présence d'un pic de pression d'injection prononcé. Cet événement est alors utilisé pour déclencher la commutation.

Dés lors où la commutation est enclenchée, la presse applique au niveau des blocs d'injection une consigne de pression de maintien. Ceci à pour objectif de maintenir la matière dans le cavité pour compenser de retrait volumique dus au refroidissement de la matière (Figure 1.7)

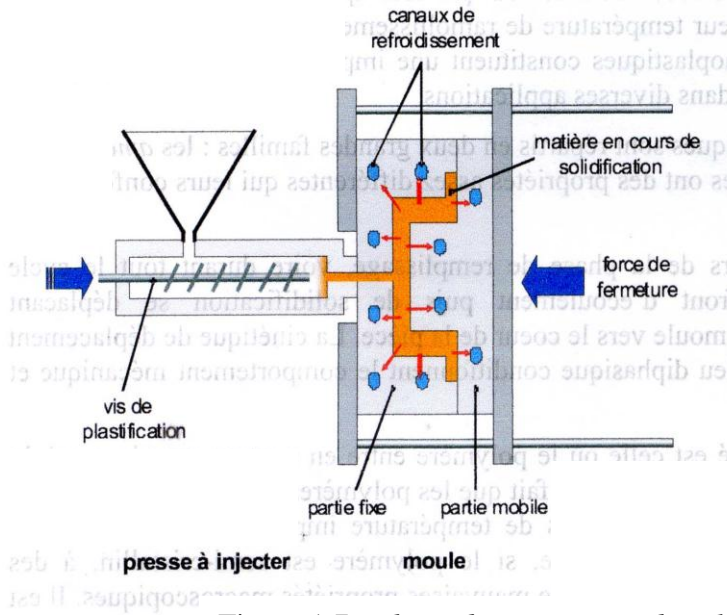


Figure 1.7 : phase de maintien et de solidification [4]

d) La phase d'éjection

La vis de plastification recule avant de commencer un nouveau dosage de matière en vue du cycle suivant, cette opération a pu commencer dès la fin du compactage (Figure 1.8)

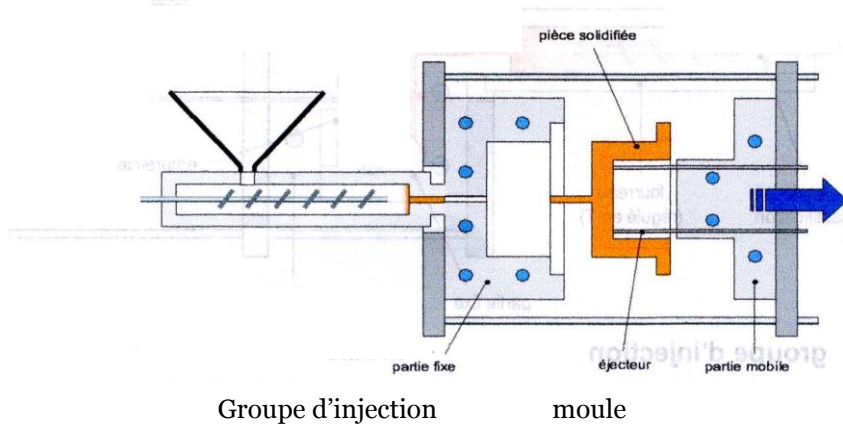


Figure 1.8 : la phase d'éjection [4]

1.3 Étude bibliographie de post remplissage

1.3.1 Compactage

Depuis les années cinquante, il y avait plusieurs travaux sur la phase post-remplissage, essayant de dénombrer et d'analyser l'ensemble des phénomènes intervenant au cours de compactage il apparaît que le problème est excessivement plus complexe.

En 1950, Spencer et Gilmore sont les premiers à avoir considéré le polymère compacté comme un système thermodynamique. L'alimentation du moule est assurée par la différence entre la pression de maintien, constante en amont du canal, et la pression moyenne dans la cavité variable au cours du cycle. Le calcul du débit se fait avec une loi de poiseuille. Ces auteurs considèrent la pression uniforme dans la cavité du moule ; mais leur hypothèse la plus forte est de prendre une température moyenne dans la carotte d'alimentation. L'intérêt de leur travaux est d'avoir découplé le calcul de thermodynamique, de l'analyse thermomécanique habituelle. de plus ils nous fournissent une équation d'état simple qui a la forme de l'équation de Van der Waals.

Le premier travail, considérant le compactage comme un phénomène de transport et utilisant les équations de continuité, de moment et de transfert d'énergie, est l'analyse de M.R Kamal et Kenig, pour le cas d'un moule de disque, est daté en 1972.

Le cycle d'injection est composé en trois phases (remplissage, compactage, refroidissement, cette décomposition est utilisée afin de séparer le calcul d'écoulement du calcul thermique. [7]

La première tentative pour modéliser la phase du post-remplissage a été faite par [Kuo et Kamal, 1977]. Leur analyse incluent les effets d'inertie dans l'écoulement et la compressibilité des fondus [8]. Plus tard Kamal et al ont déduit une équation non linéaire pour la pression dans un moule rectangulaire basé sur le modèle Hélé-Shaw dans les canaux fins.

Chung et ses collègues ont développé les analyses de Kamal en condition isotherme, en résolvant les équations non linéaire numériquement en utilisant la méthode de la différence finie avec les différentes conditions initiale et aux limites.

Chiang, Hiebert et Wang ont tiré les équations de couche mince (Hélé-Shaw) généralisé pour le compactage non isotherme de pièce moulé fines. Les équations ont été résolues en utilisant les éléments finies hybride/la méthode aux différences finie. En prenant en considération la dépendance de la viscosité avec le taux de cisaillement et la température.

Chen et Lien présentent un modèle bi phasique pour la simulation de la phase post-remplissage de l'injection par moulage du matériau amorphe et semi cristallin. Les analyses précédentes

négligent l'influence de la viscoélasticité. Lafleur et Kamal ont essayé de traiter l'influence de la viscoélasticité du polymère.

Après, Nguyen et Kamal ont analysé la phase de compactage isotherme pour un fluide de Maxwell. A la base des équations gouvernantes tirées pour un moule à deux dimensions ces équations ont été résolues par la méthode des éléments finies Galerkin. [9]

En ce qui concerne l'équation de la chaleur, Jean-François Agassant a présenté une analyse thermique : quand la masse volumique dépend de la température et de la pression, l'équation de la chaleur prend une forme plus générale que celle vue pour le remplissage, on rencontre deux termes additionnels, l'un lié à la dilatation du matériau et l'autre au travail de la pression. De plus, nous avons introduit ici le terme ΔH_c correspondant à l'enthalpie de cristallisation qui, pour les polymères semi-cristallins, n'est pas négligeable pendant la durée de compactage-maintient. Enfin, la conductivité thermique k n'est pas considérée comme constante, car ses variations à la transition vitreuse ou cristalline sont significatives. Les conditions aux limites sont identiques à celles utilisées dans la phase de remplissage.[10]

1.3.2 Particularités de la phase post-remplissage

1.3.2.1 Refroidissement

Les polymères possèdent une très faible diffusivité thermique (de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-7} $m^2.s^{-1}$ alors qu'elle est de l'ordre de 10^{-5} pour un acier). la conduction de la chaleur dans le polymère est donc très difficile ce qui entraîne des temps de refroidissement souvent élevés et ce d'autant plus que la pièce est épaisse.

A part certaines pièces très minces, la phase du refroidissement est la plus longue du cycle d'injection. Elle dure typiquement plus de 50% du cycle et peut atteindre plus de 90%.

La vitesse du refroidissement est donc un facteur important de productivité et des gains importants pouvant être réalisés en diminuant le temps du refroidissement de pièces présentant des zones chaudes mal refroidies [11].

a) Défauts d'injection pouvant avoir une origine thermique

Parmi les nombreux défauts pouvant apparaître lors de l'injection, un certain nombre peut être lié à une mauvaise régulation de la température du moule.

- **Défauts dimensionnels** : Le type de défauts le plus grave est le non-respect des dimensions et de la forme des pièces injectées. Une température du moule trop faible peut par exemple conduire à des pièces incomplètes ou présentant des hésitations lors de l'écoulement (en particulier pour des pièces de faible épaisseur).

D'autre part, une température de moule trop élevée peut conduire à l'apparition de bavures (le polymère trop fluide se glisse dans le plan de joint) si le temps du refroidissement n'est pas adapté à cette température (en sortie du moule, la température au centre du polymère est trop élevée et par diffusion, la surface de la pièce chauffe et peut se déformer).

- **Défauts structurels :** Des mauvaises conditions de moulage peuvent conduire à des pièces ne possédant pas les propriétés (mécaniques, optiques...) souhaitées. Une température du moule trop faible peut amplifier l'apparition de retassures et vacuoles (dépressions en surface ou dans l'épaisseur dues à des retraits variables selon l'épaisseur de la pièce.

L'injection des pièces de précision, par exemple des lentilles optiques, nécessite un contrôle très précis de la température du moule car c'est l'un des paramètres les plus influents sur les contraintes résiduelles dans la pièce et sur ses propriétés optiques. Augmenter la température et le temps du refroidissement permet de réduire les distorsions optiques. De plus, à une température du moule donnée, augmenter le temps du refroidissement permet de réduire les erreurs de géométrie. Pour obtenir une qualité bonne d'une pièce le choix du temps du refroidissement doit être fait de manière à atteindre une température inférieure à la température de transition vitreuse T_g en tout point de la pièce et éventuellement un équilibre thermique avant l'éjection. L'évolution des températures étant très lentes en profondeur de la pièce (figure 1.9), le temps du refroidissement choisi doit être très long (supérieur à 140 secondes dans ce cas pour une pièce très épaisse

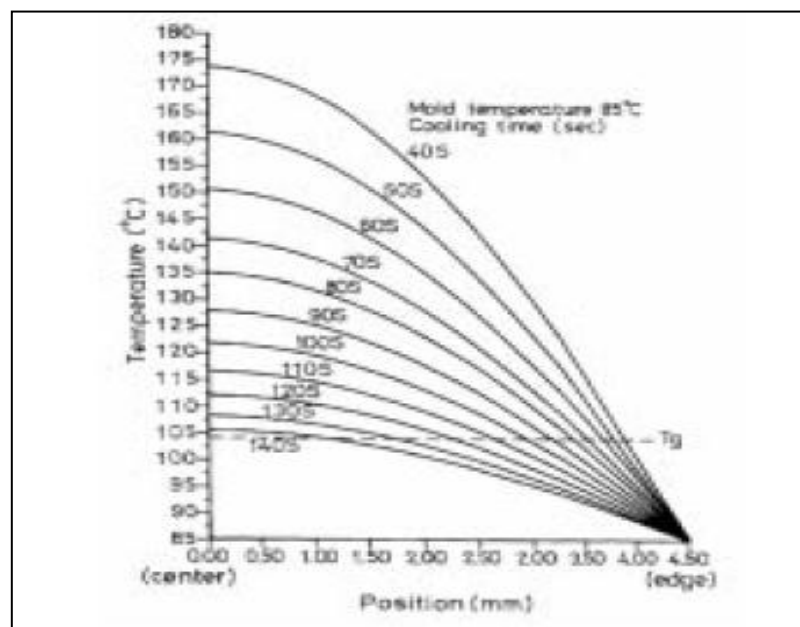


Figure 1.9 : Evolution de la température dans l'épaisseur du polymère (PMMA) avec le temps [11]

b) Calcul du temps de refroidissement

Un calcul monodimensionnel simplifié peut donner une bonne précision du temps du refroidissement. Les pièces injectées sont des pièces minces : l'épaisseur est beaucoup plus faible que les autres dimensions. Lors du refroidissement, on peut donc considérer que le transfert de chaleur n'a lieu que dans la direction de l'épaisseur. On considère alors une plaque infinie d'épaisseur e_p . La température à la surface de la pièce est supposée égale à la température en surface du moule qui est considérée constante et égale à T_M (figure 1.10). À l'instant initiale, on considère que la pièce est à une température uniforme égale à la température d'injection T_{inj} .

La température à l'intérieur du polymère vérifie l'équation de la chaleur (1.1) . a_p est la diffusivité thermique du polymère

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

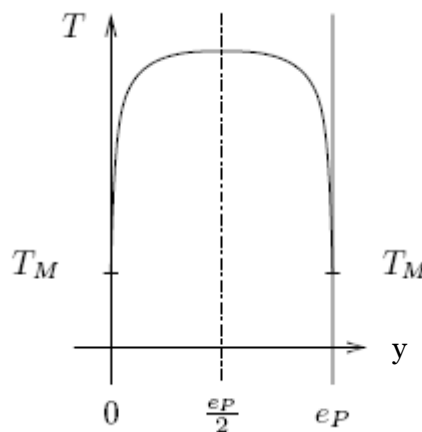


Figure 1.10 : Représentation schématique de la répartition de température dans le polymère [11].

Agassant rappelle la solution de l'équation (1.1) obtenue par Carslaw et Jaeger :

$$T(y, t) = T_M + \frac{4}{\pi} (T_{inj} - T_M) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n + 1} \cdot e^{-\frac{a_p (2n+1)^2 \pi^2 t}{e_p^2}} \cos\left(\frac{(2n + 1)\pi \cdot y}{e_p}\right) \right) \tag{1.2}$$

La série converge très vite lorsque $\frac{a_p \cdot t}{e_p^2}$ est grand (en pratique la solution approchée est très proche de la solution exacte si $\frac{a_p \cdot t}{e_p^2} > 0,1$. En se limitant au premier terme de la

série le temps du refroidissement t_{ref} est obtenu lorsque la température maximale dans la pièce (en $y = \frac{e_p}{2}$) est inférieure à la température d'éjection: T_{ej}

$$t_{ref} = \frac{e_p^2}{\alpha_p \cdot \pi^2} \cdot \log\left(\frac{4}{\pi} \left(\frac{T_{inj} - T_M}{T_{ej} - T_M}\right)\right) \quad (1.3)$$

Pour une diffusivité thermique de $10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et une épaisseur de 2mm, on a $\frac{\alpha_p}{e_p^2} = 0,025$

On peut considérer que la solution sera exacte après $t = 4\text{s}$.

Si on considère que le temps du refroidissement est atteint lorsque la température moyenne dans la pièce est inférieure à la température d'éjection (critère utilisé en particulier pour des pièces épaisses), on obtient une expression différente du temps du refroidissement :

$$t_{ref} = \frac{e_p^2}{\alpha_p \cdot \pi^2} \cdot \log\left(\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{T_{inj} - T_M}{T_{ej} - T_M}\right)\right) \quad (1.4)$$

Le temps de refroidissement est calculable de la même manière pour des pièces simples de forme cylindrique, sphérique ou cubique. Pour des hypothèses différentes (en particulier les conditions limites à la surface du moule), les coefficients de l'expression obtenue pour le temps du refroidissement sont légèrement différents

c) Retrait.

- Définitions

Le retrait total d'une pièce injectée est défini comme la somme du retrait au moulage et du post-retrait [12].

- **Le retrait au moulage R_M** : est « la différence relative entre les dimensions de la pièce moulée (D_p) et les dimensions du moule (D_M), mesurées après 24h ou 48h à 23°C et 50% d'humidité relative (HR) (Normes ISO 2577 et ASTM D955).

On a donc :

$$R_M = 1 - \frac{D_p}{D_M} \quad (1.5)$$

- **Le post retrait PR** : est « la différence relative entre la longueur après refroidissement (D_{av}) de l'éprouvette moulée et la longueur (D_{ap}) de la même éprouvette soumise à un traitement thermique dans une étuve à une température et pendant un temps défini par des spécifications de la matière essayée ou par accord entre les parties concernées » (Norme AFNOR NFT-53035)

On a donc :

$$PR = 1 - \frac{D_{ap}}{D_{av}} \quad (1.6)$$

Par abus de langage, nous désignerons par « retrait », Le retrait au moulage défini par la norme ISO2577.

Les grandeurs définies ci-dessus concernent des mesures unidirectionnelles. Nous étudierons également le **retrait volumique** R_V d'une pièce, défini par analogie comme la différence relative entre le volume de la pièce moulée V_P et celui du moule V_M mesurés après 24h ou 48h à 23°C et 50% HR.

On a donc :

$$R_V = 1 - \frac{V_P}{V_M} \quad (1.7)$$

R_V s'exprime en fonction des retraits unidirectionnels R_i :

$$R_V = 1 - (1 - R_1).(1 - R_2).(1 - R_3)$$

D'où :

$$R_V \neq R_1 + R_2 + R_3$$

Les retraits dépendent de nombreux paramètres, que l'on peut classer en 3 groupes :

- Les paramètres morphologiques : nature et structure du polymère, présence de charges ;
- Les paramètres géométriques : conception de la pièce et du moule ;
- Les paramètres technologiques : condition de mise en œuvre (Pressions, températures,...)

Les interactions complexes de ces différents facteurs, induisant des histoires thermomécaniques variables en différents points d'une pièce lors des phases dynamiques du cycle (remplissage) ou statiques (maintien en pression et refroidissement), conduisant généralement à des taux de retrait variables dans la pièce.

On introduit alors la notion de retraits différentiels dont l'action peut conduire à des défauts géométriques affectant la planéité ou la géométrie imposée.

Par abus de langage, les défauts géométriques seront désignés sous le terme « gauchissement ».

- Calcul du retrait

Une fois que le seuil est figé, certains auteurs poursuivent le calcul : la vitesse d'écoulement s'annule, une équation de la chaleur beaucoup plus simple est résolue (les termes de convection et de dissipation visqueuse disparaissent). On utilise l'équation d'état pour déterminer l'évolution

de la pression, la masse étant désormais constante et connue. Dans un premier temps, la pièce dans le moule est supposée avoir un volume constant (celui de la cavité, hors déformation éventuelle du moule induite par la pression), et le refroidissement calculé entraîne une diminution de la pression. Dans un deuxième temps, lorsque la pression atmosphérique est atteinte, la pièce subit un retrait thermique supplémentaire en rejoignant la température ambiante. Ceci peut se faire dans le moule (la pièce peut alors « décoller » de l'acier, ce qui va diminuer le transfert thermique), puis hors du moule. [10]

- exemple

Si on suit l'évolution du volume spécifique d'un polymère, se refroidissant à pression ambiante dans le moule, sur un diagramme PVT (figure 1.11), et si on considère le retrait volumique au moulage R_v défini par :

$$R_v = \frac{V_{\text{initial}} - V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}}$$

où V_{initial} est le volume spécifique du polymère injecté, c'est-à-dire le volume de la cavité du moule rapporté à la masse de la pièce, V_{final} le volume spécifique du polymère solidifié à température ambiante, alors le retrait volumique sera de l'ordre de 20% pour les polymères semi cristallins et de 10% pour les polymères amorphes. de telles valeurs de retraits volumiques, pour les quelles les pièces seraient nettement plus petites que la cavité après éjection, engendraient des retassures et des problèmes dimensionnels rendant les pièces non valides d'un point de vue industriel [13]

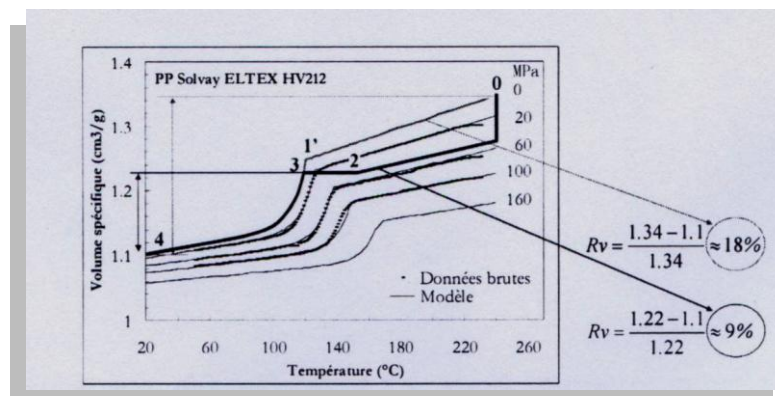


Figure 1.11 : Diagramme PVT pour un Ipp. Effet de la pression de maintien sur le retrait volumique (R_v) [13]

1.3.2.2 Conservation de la masse

Le calcul numérique de la masse de la pièce est effectué à partir de celui du volume. Connaissant la masse volumique et le volume dans chaque maille, on calcule la masse de la pièce.

(Figure 1.12)

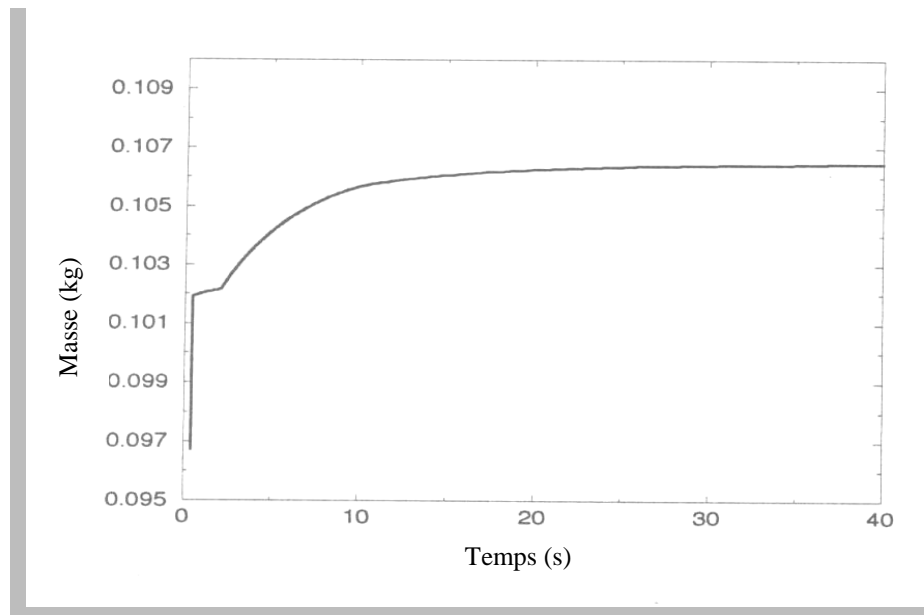


Figure 1.12 Variation de la masse au cours du temps- empreinte de 2 mm [2]

On voit sur cette figure l'augmentation de masse initiale due au compactage. Il est intéressant d'observer que nous n'agissons pas directement sur la variation de masse. Il suffit en effet d'augmenter la pression à volume constant- celui de l'empreinte- et à température constante pour que la résolution du diagramme PvT impose automatiquement une augmentation de masse dans la cavité. Il nous est ainsi possible d'évaluer la quantité de matière injectée dans le moule lors de la phase de compactage [2].

Chapitre 2

Comportements rhéologiques des polymères

2.1 Introduction

La rhéologie est la science qui étudie la déformation des corps sous l'effet des contraintes appliquées en tenant compte du temps (ou vitesse d'application de contraintes).

Plus généralement, elle étudie la relation entre la contrainte et la déformation en fonction du temps dans le matériau.

Les procédés de préparation de produits (solutions, pâtes, etc.) ou de la mise en forme des pièces (en métallurgie, en plasturgie, etc.) nécessitent immanquablement l'étude de l'écoulement de la matière, il est donc nécessaire de connaître le comportement de la matière pour déterminer les forces mises en jeu.

On peut classer la rhéologie en trois types:

- La rhéologie expérimentale : elle détermine expérimentalement la relation de comportement entre les contraintes et la vitesse de déformation.
- La rhéologie structurale : elle explique le comportement du matériau à partir de sa structure.
- La rhéologie théorique : elle fournit des modèles mathématiques en nombre limité des comportements indépendamment de la structure microscopique.

Dans le cas des polymères, la rhéologie n'étudie donc pas les déplacements qui sont grands par rapport à la taille des macromolécules. Les mouvements intramoléculaires et L'enchevêtrement des chaînes sont des mouvements que la rhéologie par nature ne peut pas décrire. En revanche, ces mouvements locaux sont à la base de l'explication du comportement rhéologique des polymères fondus. [14]

La viscosité est une mesure de la friction interne d'un liquide. C'est un paramètre très important dans l'étude de l'écoulement du polymère, cette dernière qui est d'environ 10^6 à 10^8 fois celle de l'eau. Elle est fonction de certains paramètres qui sont :

- Le poids moléculaire du polymère.
- La température.
- La pression.
- Le taux de cisaillement.

Ce chapitre décrit non seulement la loi newtonienne, et pseudo plastique mais aussi les formulations mathématiques de différentes lois d'écoulement non newtonien d'un polymère fondu.

Dans cette partie nous évoquerons les modèles fréquemment utilisés pour caractériser l'évolution de la viscosité en fonction de la température et du taux de cisaillement (ou de la pulsation en dynamique).La compressibilité peut jouer un rôle important ,notamment dans les matériaux très visqueux générant des pressions d'injection très élevées.

L'écoulement des polymères est très sensible au cisaillement par conséquent, la loi newtonienne qui considère la viscosité comme une unique fonction de la température ne s'applique pas. Les lois rhéologiques sont souvent construites de manière empirique, mais certaines présentent l'avantage d'avoir un sens physique et utilisent les paramètres fondamentaux du matériau. [4]

Les polymères à l'état fondu sont des fluides visqueux. La viscosité η caractérise le rapport entre contrainte et vitesse de déformation. Elle dépendra de la température, de la pression et de la vitesse de déformation. Pour décrire le comportement des polymères, différents modèles de comportement [11] :

- Le comportement newtonien.
- Le comportement non newtonien.
- Le comportement viscoélastique.

2.2 Les différents modèles de viscosité

2.2.1 Modèle newtonien

Un fluide est dit newtonien si sa viscosité ne dépend pas de la contrainte appliquée.

Exemple : eau, la plupart des solvants, huiles minérales, gaz rares....etc.

Les rhéogrammes, figure (2.1)

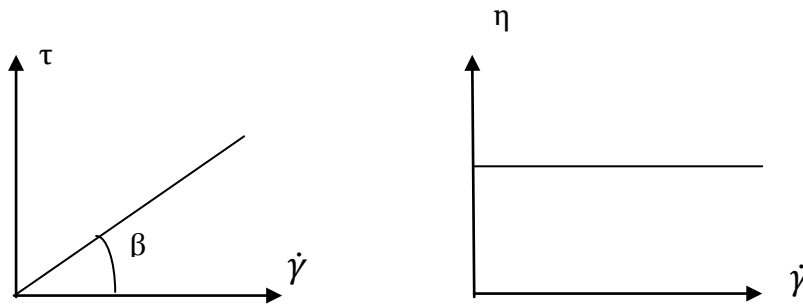


Figure 2. 1 : *Comportement newtonien*

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \operatorname{tg}\beta = \text{cte} \quad (2.1)$$

2.2.2 Modèle pseudo-plastique :(rhéofluidifiant)

- Description phénoménologique

Il est connu expérimentalement que les polymères fondu ne sont pas newtoniens. Leur viscosité apparente est fonction décroissante du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$; cette propriété est appelée la pseudoplasticité (rhéofluidité). [9]

Exemple : ce type de comportement est de loin le plus fréquent. Il concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments...

Un grand nombre de modèles a été utilisé pour décrire le comportement pseudo plastique, nous en citons brièvement quelques-uns.

2.2.2.1 La loi de puissance (loi d'Oswald)

Cette loi relie la viscosité à une puissance du taux de cisaillement :

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \cdot |\dot{\gamma}|^{m-1} \quad (2.2)$$

K : consistance de liquide

m : indice de pseudo plasticité

Les rhéogrammes (Figure 2.2) : ont l'aspect suivant.

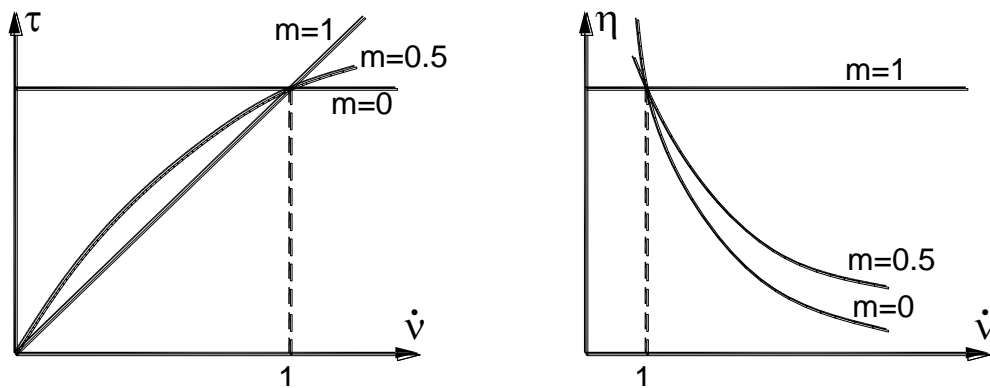


Figure 2.2 : Comportement pseudo plastique en loi puissance [9]

La relation entre η et $\dot{\gamma}$ est en général représentée en échelle logarithmique, la loi de puissance se traduisant alors par une droite de pente $(m-1)$.

Le défaut de cette modélisation est qu'elle fait tendre la viscosité vers l'infini lorsque $\dot{\gamma}$ tend vers zéro, alors que, pour la plus part des polymères fondus, la viscosité atteint un palier newtonien à faible taux de cisaillement. La figure (2.3) donne l'allure typique de la courbe $\eta(\dot{\gamma})$ d'un polymère fondu. [15]

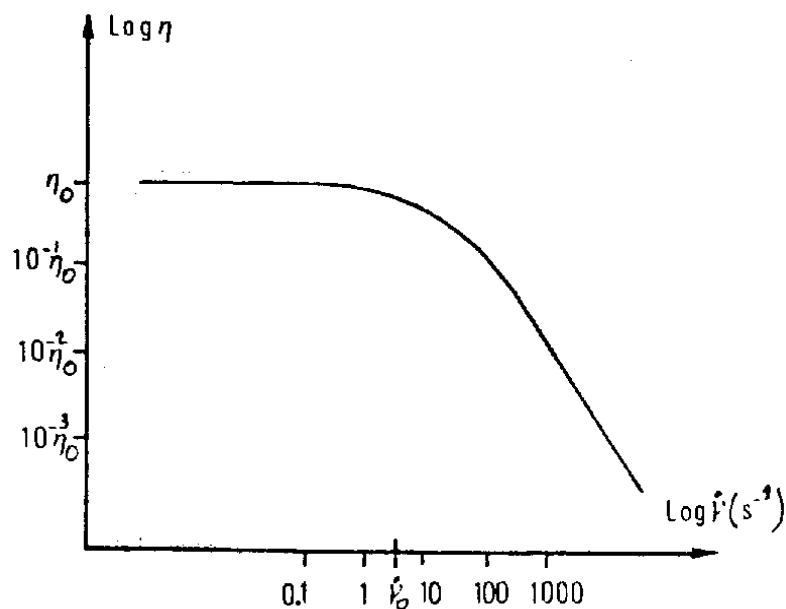


Figure 2.3 : Evolution typique de la viscosité d'un polymère fondu avec le taux de cisaillement [15]

2.2.2.2. Loi de Cross

Pour de nombreux matériaux, la viscosité tend, en fait, vers une constante appelée plateau newtonien (η_0 en pa .s). cross(1965) prend en compte cet effet à travers une loi à trois paramètres ($\eta_0, \lambda(s)$ et m) [5] :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_0}{(1 + \lambda\dot{\gamma})^{1-m}}$$

$\lambda(s)$ est le temps caractéristique propre au matériau

2.2.2.3 Loi de Carreau

Carreau(1972) modifie la loi de cross sans ajout de paramètres supplémentaires : Carreau propose un modèle permettant de modifier cette rupture de pente en modifiant la loi de cross sans ajouter de paramètres supplémentaires [5] :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_0(T)}{(1 + (\lambda\dot{\gamma})^2)^{\frac{1-m}{2}}}$$

η_0 : La viscosité newtonienne et $\lambda(s)$ un temps de relaxation caractéristique.

Conclusion : la loi puissance a très souvent été employée, mais il présente néanmoins deux graves inconvénients :

- La viscosité η_0 est infinie au taux de cisaillement nul.
- La viscosité η_∞ est égale à zéro

Les modèles cités ci-dessus ont été utilisés en remplacement de la loi puissance pour donner à la viscosité apparente une valeur convenable aux faibles et aux forts gradients de vitesse. De telles lois semi-empiriques sont cependant peu utilisées dans les modèles car la loi puissance, malgré son éloignement de la réalité à très faibles taux de cisaillement, conduit en général à de bonnes approximations et autorise une résolution analytique [15]

2. 2.3 Modèles pseudo-plastiques thermo-dépendants

Le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant tient compte de la variation de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et de la température.

Une augmentation de température résulte en une diminution de la viscosité due à l'augmentation de mobilité des chaînes de polymères. En règle générale la viscosité des

polymères amorphes est plus sensible à la variation de la température que la viscosité des polymères semi-cristallins.[14]

2.2.3.1 Loi puissance

La loi puissance relie la viscosité à une puissance du taux de cisaillement en faisant intervenir un paramètre qui dépend uniquement de la température [4]

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta_0(T) \dot{\gamma}^{m-1}$$

Cette loi permet de découpler l'effet de la température et du cisaillement. L'indice m est appelé indice d'écoulement ou indice de pseudo-plasticité. Il est sans unité et il vaut 1 pour un fluide newtonien et 0 pour un rigide plastique.

$\eta_0(T)$ est la consistance du matériau (en Pa. s^m). Les valeurs de m pour un thermoplastique sont de l'ordre de 0.3 à 0,7.

La thermo dépendance de $\eta_0(T)$ est relativement bien représentée par une loi de type Arrhenius lorsque la température est supérieure de 100°C à la température de transition vitreuse (T_g) :

$$\eta_0(T) = \eta_0(T_{ref}) \left[\exp \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right]$$

η_0 : est une constante à température de référence.

E_a : est l'énergie d'activation qui correspond à la relaxation du matériau.

T_{ref} : est la température choisie comme référence.

une autre loi est proposée pour des températures comprises entre T_g et $T_g + 100^\circ\text{C}$. Il s'agit de la loi WLF (Williams Landel Ferry) :

$$\eta_0(T) = \eta_0(T_{ref}) \cdot \exp \left[- \frac{C(T - T_{ref})}{D + T - T_{ref}} \right]$$

C et D sont deux paramètres caractéristiques du matériau, et la température de référence (T_{ref}) est souvent choisie comme la température de transition vitreuse.

2.2.3.2 Loi de Cross

Isayev et Wan ont travaillé sur un caoutchouc naturel et utilisent une loi de cross modifiée pour pouvoir prendre en compte l'effet de la température sur la viscosité newtonienne et sur le temps caractéristique :

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \frac{\eta_0(T)}{\left(1 + \left(\frac{\eta_0(T)\dot{\gamma}}{\tau}\right)\right)^{1-m}}$$

τ (Pa) permet de retrouver la dimension du temps caractéristique.

La loi de cross permet de passer d'un plateau newtonien aux faibles taux de cisaillement à une droite de pente égale à m aux forts taux de cisaillement. Ce passage entraîne une rupture de pente que le modèle de cross ne permet pas d'ajuster. [4]

2.2.3.3 Loi de Carreau

Carreau propose un modèle permettant de modifier cette rupture de pente en modifiant la loi de cross sans ajouter de paramètres supplémentaires [4] :

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \frac{\eta_0(T)}{\left(1 + \left(\frac{\eta_0(T)\dot{\gamma}}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{1-m}{2}}}$$

Le passage de la loi puissance au plateau newtonien se fait de façon plus claire.

2.2.3.4 Loi de Carreau-Yasuda

Une nette amélioration peut être apportée aux modèles précédents en utilisant un paramètre supplémentaire. Ce paramètre ajuste la transition entre le plateau newtonien et la partie en loi puissance de façon plus ou moins directe [4] :

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \frac{\eta_0(T)}{\left(1 + \left(\frac{\eta_0(T)\dot{\gamma}}{\tau}\right)^a\right)^{\frac{1-m}{a}}}$$

Nous retrouvons la loi de cross pour $a=1$ et la loi de carreau pour $a=2$

2.2.3.5 Dépendances de la viscosité avec la pression

Palit et Chen introduisent l'effet de la pression dans la loi de cross pour des thermoplastiques et montrent son importance en injection. la nouvelle loi s'écrit [4] :

$$\eta(T, \dot{\gamma}, P) = \frac{\eta_0(T, P)}{\left(1 + \left(\frac{\eta_0(T, P)\dot{\gamma}}{\tau}\right)\right)^{1-m}}$$

La pression (P) intervient dans le terme de viscosité au plateau newtonien au même titre que la température, suivant une loi exponentielle :

$$\eta(T, P) = \eta_0(T) \cdot \exp(\beta \cdot P)$$

β est le coefficient de sensibilité de la viscosité à la pression, il est de l'ordre de $1.5 \cdot 10^{-8}$ à $4 \cdot 10^{-8}$

2.3 Compressibilités

La pression joue également un rôle important sur la masse volumique du matériau. les courbes classiques utilisées en injection pour exprimer cette dépendance sont appelées diagrammes PVT (Pression volume Température) la Figure 1.4 indique le diagramme PvT de polymère amorphe et la Figure 1.5 celui de polymère semi- cristallin. La loi de Tait est souvent utilisée pour exprimer la dépendance entre le volume spécifique (inverse de la masse volumique), la pression et la température [4]:

$$v = f(T) \left(1 - C \ln\left(1 + \frac{p}{g(T)}\right)\right) \quad (2.3)$$

C est en général égal à 0.0894 quel que soit le polymère , $f(T)$ et $g(T)$ sont deux fonctions de la température qui s'expriment de la façon suivantes [16] :

$$f(T) = \begin{cases} b_{1,l} + b_{2,l} \cdot \bar{T} & \text{if } T > T_g \\ b_{1,s} + b_{2,s} \cdot \bar{T} & \text{if } T < T_g \end{cases}$$

$$g(T) = \begin{cases} b_{3,l} \cdot \exp(-b_{4,l} \cdot \bar{T}) & \text{if } T > T_g \\ b_{3,s} \cdot \exp(-b_{4,s} \cdot \bar{T}) & \text{if } T < T_g \end{cases}$$

$$\bar{T} = T - b_5 ,$$

$$T_g = b_5 + b_6 \cdot p ,$$

Les valeurs des constantes de ces équations se trouvent dans le chapitre (5).

On voit à la figure 2.4 que cette loi convient pour les polymères amorphes et prend en compte le changement de pente observé lors de l'évolution du volume spécifique avec la température. Le changement de pente est pris en considération en donnant deux jeux de paramètres différents. Cette transition correspond au passage de la température de transition vitreuse. Elle est très importante pour l'injection des thermoplastiques amorphes puisqu'elle indique le moment où la pièce est figée et peut être éjectée. Pour les semi-cristallins, la loi ne permet pas de prendre en compte la brusque variation du volumes spécifique (Figure 2.5)

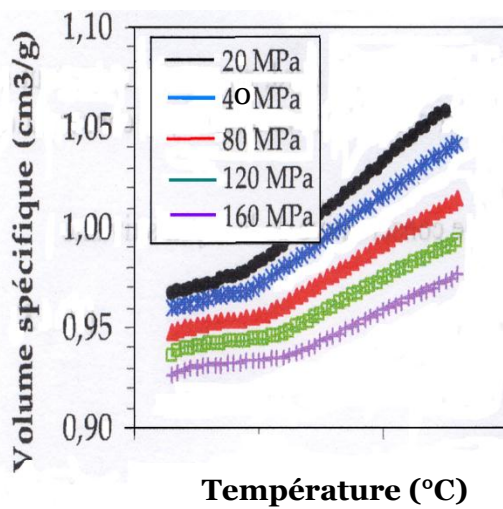


Figure 2.4 : Évolution du volume massique ($1/\rho$) en fonction de la température pour différentes pressions polymères amorphes : diagrammes PVT du PS (vitesse de refroidissement : $5^\circ \text{C}/\text{min}$) [4]

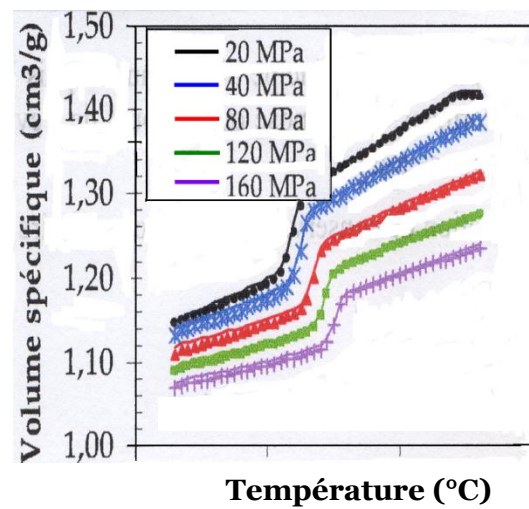


Figure 2.5 : Évolution du volume massique ($1/\rho$) en fonction de la température pour différentes pressions polymère semi-cristallin : diagrammes PVT du PPH (vitesse de refroidissement : $5^\circ \text{C}/\text{min}$) [4]

Chapitre 3

Modélisation de la phase post-remplissage

3.1 Introduction

3.1.1 Définition du post -remplissage

Après le remplissage à débit imposé, une quantité supplémentaire de matière est introduite dans le moule pour compenser le retrait dû au refroidissement, en imposant une pression de compactage ou de maintien.

On peut distinguer deux étapes après la fin de remplissage :

- pendant un temps très court, de l'ordre du dixième de seconde, le profil de pression dans la cavité passe d'un profil non uniforme en fin de remplissage (la pression est maximale à l'entrée, et nulle au front) à un profil pratiquement uniforme (mais pas exactement, car il y a un léger écoulement) ;
- pendant une période beaucoup plus longue (de l'ordre de la dizaine de secondes), que l'on appelle souvent maintien, la pression décroît progressivement. La fin de cette étape a lieu lorsque le polymère fige sur toute l'épaisseur, et dans une zone interdisant la transmission de la pression depuis la buse, par exemple aux environs du seuil si celui-ci est de petite section. En générale, la pression dans le moule n'est pas nulle à la fin de cette étape.

Comme la pression est élevée, et comme la température évolue très significativement, la dépendance de la masse volumique avec ces deux paramètres ne peut être négligée. En première approximation :

- Pendant la première partie du compactage, l'écoulement est principalement dû à une variation de la masse volumique induite par les variations de pression, et l'influence de la variation de la température peut être négligée ;
- Pendant la deuxième partie, l'écoulement est principalement dû à une variation de masse volumique induite par le refroidissement.

Les variations de la masse volumique doivent donc être prises en compte, ce qui nécessite des données reliant pression, volume massique (l'inverse de la masse volumique) et température, connues sous le nom de courbes PvT [10] (Figure 2.4).

3.1.2 Hypothèses

La modélisation de la phase post-remplissage repose sur les hypothèses suivantes [7] :

- On néglige les forces de masses et d'inertie
- On néglige les forces de gravités : la pression hydrostatique due à la gravité est tout à fait négligeable devant la pression de compactage.
- Non glissement en paroi : vitesse (paroi) nulle
- Symétrie par rapport à l'axe d'écoulement : le gradient de vitesse et température (sur l'axe sont nuls)
- Gradient de pression constant le long du trajet d'écoulement
- Une dimension de la plaque est très inférieure aux deux autres :

La conduction thermique se fait uniquement à travers l'épaisseur de la pièce.

3.2 Modélisation de la phase post-remplissage

3.2.1 Introduction :

La modélisation du cycle de moulage nécessite sa décomposition en plusieurs phases distinctes (Figure 3.1), le plus souvent est décomposé en trois phases.

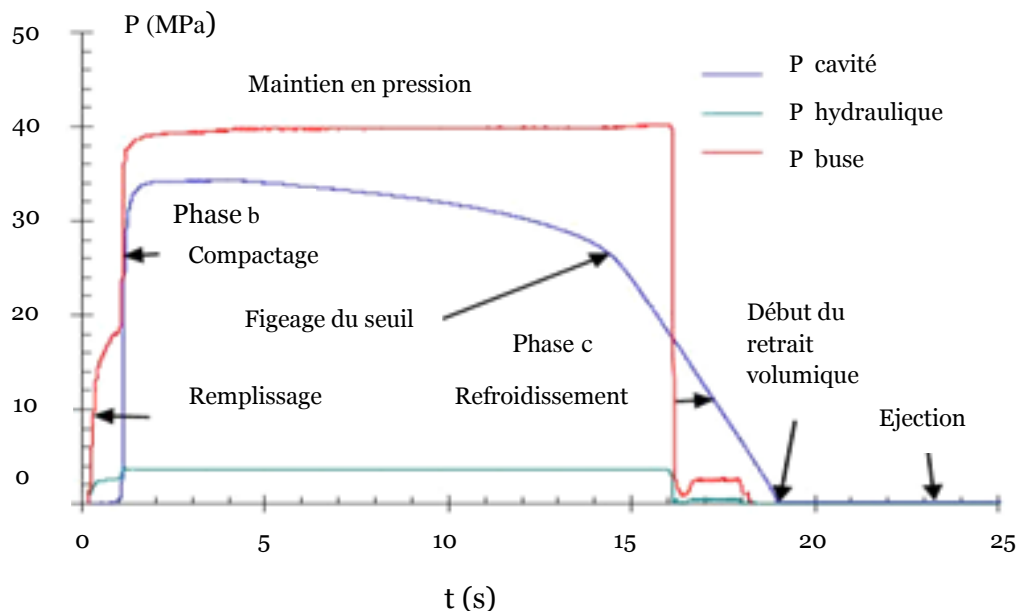


Figure 3.1 : Phases du moulage par injection des thermoplastiques [13]

Le but de ce découpage est de séparer le calcul de mécanique de celui de thermique. Il semble, en effet, que la montée en pression très rapide (phase b) soit peu affectée par la conduction thermique ; tandis que, lors de la descente en pression (phase c), l'écoulement de matière est très réduit.

Cette approche du compactage est simplifiée car l'expérience montre que l'écoulement peut se poursuivre pendant la descente en pression. D'autre part, nous allons montrer que les phénomènes thermiques, pendant le compactage, sont déterminants. [7]

3.2.2 Les paramètres de modélisation

a) Paramètres d'entrée de la modélisation

- La géométrie de l'empreinte.
- Condition de fin de remplissage (température, pression, taux de cisaillement, vitesse).
- Caractéristique de la matière.
- Conditions de moulage (temps de compactage, température de refroidissement)

b) Paramètres de sortie de la modélisation

- Vitesse
- Pression
- Taux de cisaillement
- Température
- Volume spécifique
- Masse
- Retrait volumique

3.2.3 Formulation mathématique

Le modèle simulant le compactage s'appuie sur trois principes de la physique des milieux continus [12]

La conservation de la masse qui se traduit par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}[\rho \cdot u] = 0$$

- La conservation de la quantité de mouvement qui se traduit par l'équation de l'équilibre dynamique :

$$\text{div}[\sigma] + \rho(\vec{F} - \vec{G}) = 0$$

σ (Pa) : tenseur des contraintes

u (m/s) : vecteur vitesse

ρ (kg/m³) : masse volumique

\vec{F} (N) : force d'inertie

\vec{G} (N) : force de masse

- La conservation de l'énergie qui se traduit par l'équation de la chaleur :

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}[k \cdot \text{grad}(T)] + \dot{w} = 0$$

Avec : $\dot{w} = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$

c (J. °C⁻¹.kg⁻¹) : capacité calorifique.

k (w.m⁻¹. °C⁻¹) : conductivité thermique.

\dot{w} (w.m⁻³): puissance dissipée par unité de volume.

t (s) : temps.

A ces équations de conservation peut s'ajouter l'équation du comportement du fluide qui s'écrit :

$$\sigma = -pI + 2\eta(T, \dot{\gamma})\dot{\epsilon}$$

p (Pa) : pression hydrostatique

I : tenseur identité

La modélisation de compactage consiste à résoudre numériquement les quatre équations précédentes en tenant compte :

- Des hypothèses indiquées auparavant et les hypothèses suivantes [7]:
 - Le polymère est compressible visqueux.
 - Le régime est laminaire.
 - La conductivité thermique et la chaleur massique sont constantes.

L'analyse du compactage revient à étudier l'écoulement dans un volume constant d'un fluide compressible en refroidissement. Sachant que les lois de comportement dynamique et thermodynamique dépendent de la température.

Nous proposons de décomposer cette étude en calcul élémentaires : à partir d'un champ de pression initial (arbitraire ou résultant de l'analyse du remplissage), un calcul de mécanique nous permet de connaître le champ de vitesse et le débit.

A chaque incrément du temps, nous effectuons un bilan de masse dans les éléments de volume du maillage. Cette variation de masse volumique, à une température connue (calcul de thermique) pendant l'intervalle de temps dt considéré, entraîne une variation de pression calculée par l'équation d'état : calcul de thermodynamique.

3.3 Modélisation de post-remplissage dans un moule (plaque)

On suppose que l'écoulement est unidirectionnel (figure 3.2)

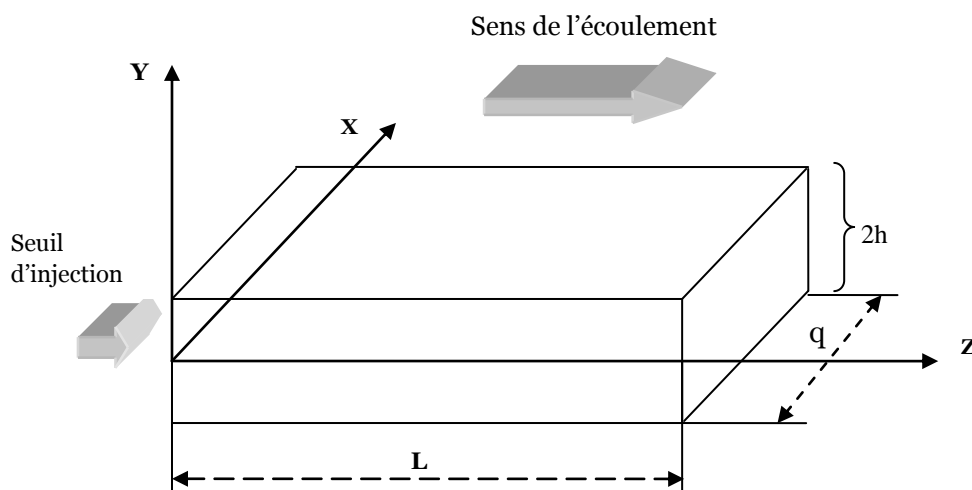


Figure 3.2 : Schéma du moule en forme de plaque [14]

3.3.1 Calcul dynamique

Ecoulement plan :

Considérons l'écoulement d'un polymère entre plaques parallèles (Figure 3.3)

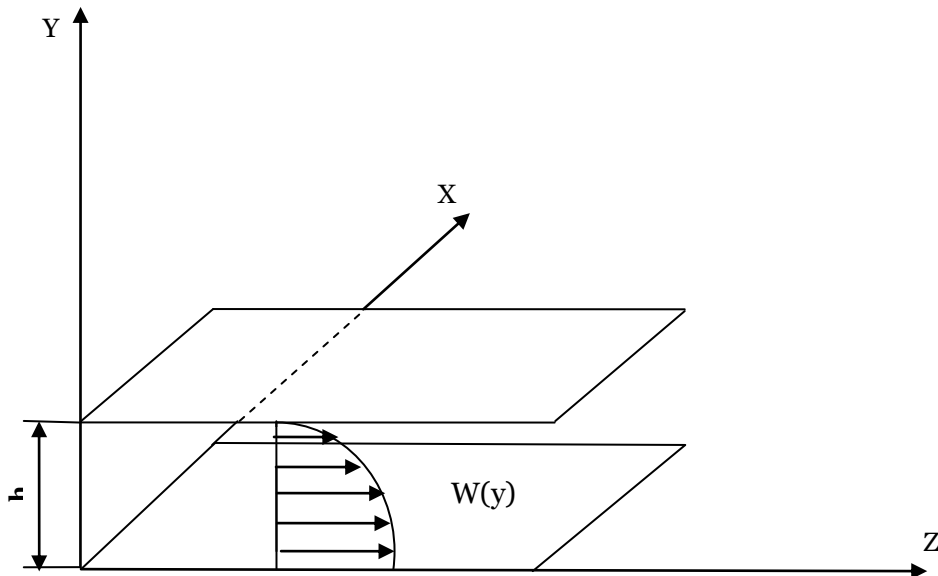


Figure 3.3 : Géométrie plane [7]

Hypothèse cinématique :

Le vecteur de vitesse comporte un seul composant w suivant l'axe Z

$$\vec{U} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = w(y) \end{cases}$$

Equation de continuité [7] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} [\rho \cdot \vec{U}] = 0 \quad (2.4)$$

- En prenant en compte que, pendant un incrément de temps, de séparer l'influence de la compressibilité, du calcul de dynamique.

En coordonnées cartésiennes :

$$(2.4) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

D'après les hypothèses de cinématique : $u=v=0$

$$(2.5) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Pendant un incrément de temps très court :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Hypothèse de cinématique :

$$w = w(y) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(2.5) \Rightarrow w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Cette équation est une autre façon d'écrire que l'écoulement, calculé avec nos hypothèses cinématiques, est celui d'un fluide incompressible.

L'erreur, introduite dans le calcul des vitesses par cette simplification, est limitée à un élément de maillage géométrique. A chaque incrément de temps, un calcul de thermodynamique viendra corriger ce champ de vitesse en tenant compte, a posteriori, de la compressibilité du matériau.

Tenseur de vitesse de déformation :

Est donné par :

$$[\varepsilon_{ij}] = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow [\dot{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$[\dot{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

En supposant que le matériau à un comportement newtonien équivalent.

Cela signifie que, pendant un incrément de temps et localement, la viscosité sera constante. L'influence de la température, de la vitesse de cisaillement et de la pression sera décomposée suivant chaque élément de découpage géométrique et dans le temps.

La viscosité η sera une matrice $\eta(y, z)$ à chaque pas de temps.

Le tenseur de contrainte :

$$[\sigma] = -pI + 2\eta [\dot{\varepsilon}]$$

p : pression hydrostatique

I : matrice identité

Si nous adoptons une loi de comportement newtonienne, le tenseur de contrainte s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & \eta \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \eta \frac{\partial w}{\partial y} & -P \end{pmatrix}$$

Les équations de l'équilibre dynamique [7] :

$$\text{div}[\sigma] + \rho(\vec{F} - \vec{G}) = 0$$

\vec{F} : force de masse.

\vec{G} : force d'inertie.

On considère que \vec{F} et \vec{G} sont négligeable devant σ

$$\Rightarrow \text{div}[\sigma] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = 0 & (2.4) \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 & (2.5) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 & (2.6) \end{cases}$$

on suppose que : $p = p(z)$ (voir remarque (1) ci-dessous)

$$(2.5) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \eta = \eta(y, z) \end{array} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \Rightarrow \eta = \eta(y)$$

$$(2.5) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \eta = \eta(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) = A = \text{Cte}$$

(Voir remarque 2 ci-dessous)

$$\Rightarrow \eta \frac{\partial w}{\partial y} = Ay + B \quad \text{par symétrie : } \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{A}{\eta} y \quad (3.7)$$

Remarque 1 :

Dans un moule décomposé selon la méthode décrite précédemment, la longueur de trajet d'écoulement est nettement supérieure aux autres dimensions.

Un gradient de pression orthogonale à l'écoulement disparaîtra donc beaucoup plus rapidement que le long de z

Remarque 2 :

L'hypothèse : $\frac{dp}{dz} = A = \text{constante}$, est limitée à l'écoulement entre deux petits éléments cette approximation est celle d'une différence finie par rapport à une dérivée.

Le raffinement du maillage selon z devra nous permettre de tendre vers la valeur de cette dérivée et d'estimer l'erreur due à cette hypothèse.

3.3.1.1 Résolution par intégration numérique

Etant donnée la dépendance complexe de η en y , nous allons procéder à une intégration numérique [7] .

$$\text{Résolution numérique de : } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{A}{\eta(y)} \cdot y \quad (3.7)$$

Par une procédure de discrétisation classique (schéma d'Euler):

$i \in [0, n]$

n : nombre de divisions de la demi-épaisseur h

$y = i \Delta y$

$$\frac{W(i+1) - w(i)}{\Delta y} = A \frac{i \Delta y}{\eta(i)} \quad (2.8)$$

$h = n \Delta y$

$$\Rightarrow W(n-1) = w(n) - A \frac{(n-1)\Delta y^2}{\eta(n-1)}$$

Avec l'hypothèse de non glissement en paroi : $w(n) = 0$

Et par récurrence

$$W(n-i) = -A \Delta y^2 \sum_{p=1}^i \frac{(n-p)}{\eta(n-p)} \quad (2.9)$$

En discrétisant également l'autre membre de l'équation (2.8)

$j \in [0, m]$

m : nombre de division de la longueur de la plaque : Z

$z = j \cdot \Delta z$

$$A = \frac{dp}{dz} = \frac{P(j+1) - P(j)}{\Delta Z}$$

$Z = m \cdot \Delta z$

$$(2.9) \Rightarrow W(n-i) = - \left(\frac{P(j+1) - P(j)}{\Delta Z} \right) \Delta y^2 \sum_{p=1}^i \frac{(n-p)}{\eta(n-p)} \quad (2.10)$$

Condition aux limites propre au compactage : $w(n+1) = 0$

Nous pouvons remonter au débit par :

$$\frac{dQ}{dy} = 2 l w(y) dy \Rightarrow Q(n-i) = 2w(n-i) \Delta y l$$

En remplaçant $w(n-1)$ par sa valeur :

$$Q(n-i) = -2 \left(\frac{P(j+1) - P(j)}{\Delta Z} \right) \Delta y^3 l \sum_{p=1}^i \frac{(n-p)}{\eta(n-p)} \quad (3.11)$$

3.3.1.2 Résolution analytique

a) **Modèle newtonien [10]** : Dans ce cas la viscosité est constante.

- **Calcul du champ de vitesses dans le moule.**

L'équation (2,6) devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = A = Cte$$

En intégrant l'équation précédente, on trouve :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot y + C_1$$

L'hypothèse de symétrie axiale du profil entraîne :

$$z = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{dw}{dy} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

En intégrant à nouveau par rapport à y, on trouve :

$$w(y) = \left(\frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot y^2 + C_2$$

L'hypothèse d'adhérence du fluide à la paroi se traduit par une vitesse nulle, ce qui s'écrit :

$$W(\pm h) = 0$$

Ce qui permet de déterminer C_2 , on trouve :

$$C_2 = \frac{-A \cdot h^2}{2}$$

En considérant que le débit Q est connu et constant, nous obtenons l'expression du champ de vitesse :

$$w(y) = \frac{3 \cdot Q}{4hq} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

- L'évolution de la pression dans le moule

Elle s'écrit :

$$p(z) = \frac{3Q \cdot h \cdot (L - z)}{2h^3 \cdot q}$$

b) Modèle pseudo-plastique [7] :

Dans ce cas $\eta = k \cdot |\dot{\gamma}|^{m-1}$

On effectue le même type d'hypothèse cinématique, on a :

Le tenseur de contraintes.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & k \cdot |\dot{\gamma}|^{m-1} \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & k \cdot |\dot{\gamma}|^{m-1} \frac{\partial w}{\partial y} & -P \end{pmatrix}$$

Equilibre dynamique : $\text{div}[\sigma] + \rho(\vec{F} - \vec{G}) = 0$ (3.12)

On considère que \vec{F} et \vec{G} sont négligeable devant σ : $\Rightarrow \text{div}[\sigma] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 & (3,14) \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k |\dot{\gamma}|^{m-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 & (3,15) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(k |\dot{\gamma}|^{m-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 & (3,16) \end{cases}$$

On suppose que : $P = P(z)$ (remarque 1)

$$(3.13) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k |\dot{\gamma}|^{m-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \eta = \eta(y, z) \end{array} \right) \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \Rightarrow \eta = \eta(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{k \cdot dz} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dw}{dy} \right)^m = A \quad (3.16)$$

Calcul de champs de vitesse :

Par intégration de l'équation (3.16) nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^m = Ay + B \quad \text{par symetrie : } \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = (A \cdot y)^{\frac{1}{m}} \quad (3.17)$$

En intégrant l'équation (3.17) :

$$W(y) = \frac{m}{m+1} \cdot A^{\frac{1}{m}} \cdot y^{\frac{1+m}{m}} + c \quad (3.18)$$

En utilisant les conditions aux limites (vitesse nulle à la paroi $w(h)=0$)

$$W(h) = \frac{m}{m+1} \cdot A^{\frac{1}{m}} \cdot h^{\frac{1+m}{m}} + c = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{m+1}{m} \cdot A^{\frac{1}{m}} \cdot h^{\frac{1+m}{m}}$$

En substituant la valeur de « c » dans (2.18) nous obtenons :

$$W(y) = -\frac{m}{m+1} \cdot A^{\frac{1}{m}} \cdot \left[1 - \left(\frac{|y|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right] \cdot h^{\frac{1+m}{m}} \quad (3.19)$$

Calcul de débit :

$$Q = 2 \int_0^h w(y) \cdot q \, dy$$

$$Q = 2 \int_0^h \left(-\frac{m}{m+1} \right) \cdot A^{\frac{1}{m}} \cdot \left[1 - \left(\frac{|y|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right] \cdot h^{\frac{1+m}{m}} q \, dy.$$

$$Q = -\frac{2m}{2m+1} \cdot A \frac{1}{m} \cdot h^{\frac{2m+1}{m}} \cdot q \quad (3.20)$$

La vitesse moyenne :

$$w_m = \frac{Q}{h \cdot q}$$

$$w_m = -\frac{2 \cdot m}{2 \cdot m + 1} \cdot A \frac{1}{m} \cdot h^{\frac{1+m}{m}}$$

En tenant compte que le débit est constant, l'expression du champ de vitesse s'écrit :

$$w(y) = \frac{2m+1}{m} \cdot w_m \cdot \left[1 - \left(\frac{|y|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right] \cdot h^{\frac{1+m}{m}} \quad (3.21)$$

Calcul de l'évolution de la pression dans le moule :

L'intégration du premier membre de l'équation (3.16) conduit à l'expression de la pression dans le moule :

$$\frac{dp}{k \cdot dz} = A \Rightarrow dp(z) = A \cdot k \cdot dz$$

$$\text{Par intégration : } \int dp(z) = \int A \cdot k \cdot dz \Rightarrow p(z) = A \cdot k \cdot z + d$$

En utilisant les conditions aux limites ($p(L)=0$)

$$\Rightarrow p(L) = A \cdot k \cdot L + d = 0 \Rightarrow d = -A \cdot L \cdot k$$

$$d'où \quad p(z) = A \cdot k(z - L)$$

$$\text{Avec : } A \frac{1}{m} = \frac{-Q \cdot (2m+1)}{2 \cdot h \cdot q \cdot m h^{\frac{1+m}{m}}}$$

L'expression de pression devient :

$$P(z) = \left[\frac{Q \cdot (2m+1)}{2 \cdot h \cdot q \cdot m \cdot h^{\frac{1+m}{m}}} \right]^m \cdot k(L-z) \quad (3.22)$$

3.3.2 Calcul thermique :

3.3.2.1 Calcul thermique lors de compactage [7]

L'équation de la chaleur régissant la température dans le moule s'écrit en supposant que la conductivité thermique et la capacité calorifique sont indépendantes de la température :

$$\left[\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + U \cdot \text{grad}(T) \right] = k_p \cdot \Delta T + \dot{w} \quad (3.23)$$

ρ (kg/m³) : masse volumique.

c (J. °C⁻¹.kg⁻¹) : capacité calorifique.(chaleur massique)

k_p (w.m⁻¹. °C⁻¹) : conductivité thermique.

\dot{w} (w. m⁻³): puissance dissipée par unité de volume (dissipation visqueuse)

grad : Le gradient

U : vitesse

t : Temps

Δ : Laplacien

$$U \cdot \text{grad}(T) = u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

Hypothèse de calcul :

L'écoulement est unidirectionnel suivant z, cela élimine les termes

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{et} \quad v \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$$

L'échange de la chaleur de la matière plastique avec le moule suivant le sens de l'écoulement est négligeable par rapport à l'échange dans le sens transversal.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial T}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\rho \cdot c \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k_p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dot{w} \quad (3.24)$$

Tel que les termes de dissipation visqueuse:

$$\dot{w} = \eta \cdot \dot{\gamma}^2 \quad (\text{Pour le cas newtonien})$$

$$\dot{w} = k \cdot |\dot{\gamma}|^{(m+1)} \quad (\text{Pour le cas pseudo plastique})$$

- **Résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finis:**

Pour résoudre ce genre d'équation il existe plusieurs méthodes, on a choisi la méthode de différences finies, et elle comprend essentiellement trois types de méthode de base : méthode explicite, implicite et du type Crank – Nicholson.

Dans cette méthode on transforme l'équation de la chaleur en un système d'équation aux différences finies. La discrétisation des variables est obtenue en découpant le domaine à étudier par un maillage. Pour des raisons de symétrie suivant l'épaisseur, on n'a modélisé que la moitié supérieure de la pièce [14] (figure 3.4)

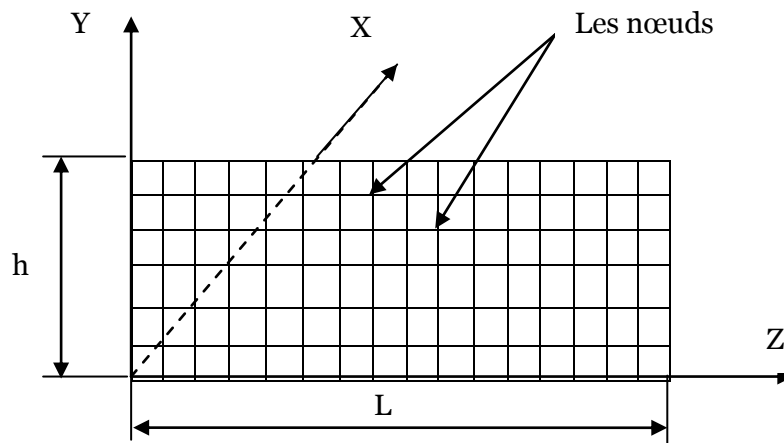


Figure 3.4 : Représentation du maillage de la moitié supérieur de l'épaisseur d'un moule

3.3.2.2 Cas pseudo- plastique :

Soit l'équation de la chaleur :

$$\rho \cdot c \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \cdot |\dot{\gamma}|^{(m+1)} \quad (3.25)$$

D'après la méthode des différences finies, on calcule la température d'un nœud (i,j) à un instant $t + \Delta t$ en fonction des températures des nœuds qui l'entoure au temps t comme le montre la figure ci-dessous. Dans notre cas on a utilisé la méthode explicite

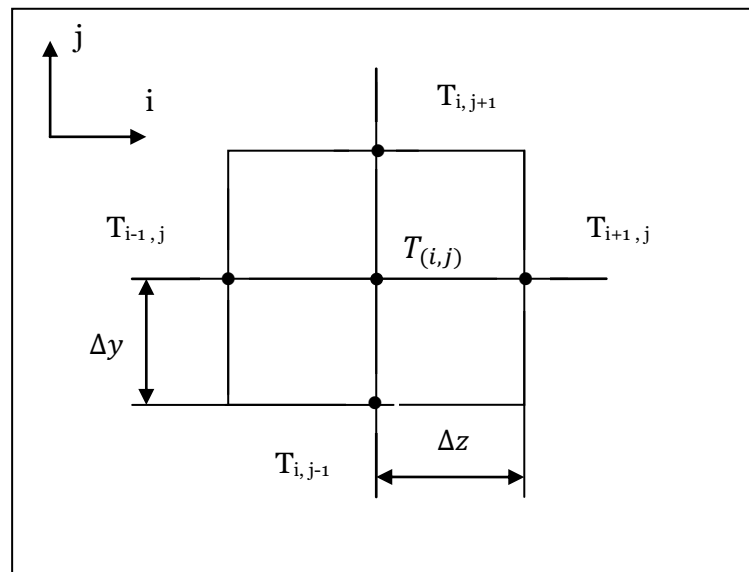


Figure 3 .5 : Nœud interne

Schéma numérique :

Les dérivées secondes apparaissant dans l'équation aux dérivées (3.25), s'écrivent en un point pivot (i, j) du domaine à l'aide d'un schéma de différences centrées :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^t - 2 \cdot T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{\Delta y^2} \quad (a)$$

- On exprime la dérivée première temporelle à l'aide des différences finies en avant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (b)$$

- On exprime la dérivée première de l'espace z à l'aide des différences finies en avant :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_{i+1,j}^t - T_{i-1,j}^t}{2 \cdot \Delta z} \quad (c)$$

a) Pour les nœuds internes :

Ce sont les nœuds situés à l'intérieur du domaine (Figure 3. 5)

En substituant les équations (a), (b), (b) dans l'équation (3.25), on trouve la température pour un point d'indice (i, j) à l'instant $t + \Delta t$:

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{2\Delta y^2 \cdot \Delta z} \cdot [2 \cdot a \cdot (T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t) \cdot \Delta z - w_{i,j}^t \cdot (T_{i+1,j}^t - T_{i-1,j}^t) \cdot \Delta y^2] + \left(1 - \frac{2 \cdot a \cdot \Delta t}{\Delta y^2}\right) \cdot T_{i,j}^t + \frac{k}{\rho \cdot c} \cdot \left[\frac{w_{i,j}^t - w_{i,j-1}^t}{\Delta y}\right]^{(m+1)} \cdot \Delta t \quad (3,26)$$

Avec : $a = \frac{k_p}{\rho \cdot c}$; a : la diffusivité thermique

$$\dot{\gamma} = \frac{w_{i,j}^t - w_{i,j-1}^t}{\Delta y}$$

b) Pour les nœuds situés au milieu de la plaque :

Dans ce cas et pour des raisons de symétrie on suppose que la température du nœud j sera égale à celle de $[-j]$ (Figure 3.6), soit :

$$T_{i,j} = T_{i,-j}$$

Les températures des nœuds ($i, (j = -1, -2, -3, \dots)$) sont symétriques aux nœuds ($i, (j = 1, 2, 3, \dots)$) par rapport au milieu de la plaque.

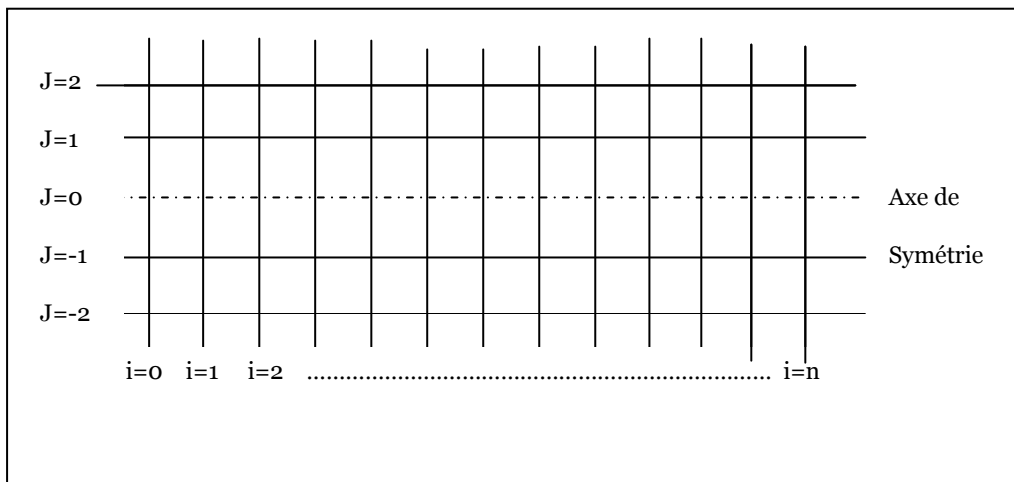


Figure 3. 6 : Numérotations du maillage

Par le même raisonnement fait pour les nœuds internes on trouve :

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{2\Delta y^2 \cdot \Delta z} \cdot [4 \cdot a \cdot (T_{i,j+1}^t) \cdot \Delta z - w_{i,j}^t \cdot (T_{i+1,j}^t - T_{i-1,j}^t) \cdot \Delta y^2] + \left(1 - \frac{2 \cdot a \cdot \Delta t}{\Delta y^2}\right) \cdot T_{i,j}^t + \frac{k}{\rho \cdot c} \cdot \left[\frac{w_{i,j}^t - w_{i,j-1}^t}{\Delta y}\right]^{(m+1)} \cdot \Delta t \quad (3.27)$$

Avec :

$$\dot{\gamma} = \frac{w_{i,j}^t - w_{i,j-1}^t}{\Delta y}$$

c) Pour les nœuds situés à l'interface de la plaque et le moule :

Pour ce genre des nœuds on va supposer que le flux absorbé par le fluide de refroidissement est égale au flux dégagé par la matière plastique, (Figure 3.7).

L'équation du flux :

$$\vec{\phi} = -k \cdot S \cdot \overrightarrow{grad} (T)$$

Sous forme algébrique :

$$\phi = -k \cdot S \cdot \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

ϕ : la densité du flux thermique

ΔT : difference de temperature

k_{ac} : conductivité thermique de l'acier

k_p : conductivité thermique du polymère

ϕ_1 : le flux rentrant.

ϕ_2 : le flux sortant.

\circ : nœuds

e : distance entre le canal

de refroidissement et la matière.

Δy : distance entre deux nœuds suivant y .

Δz : distance entre deux nœuds suivant z .

T_r : Température du fluide

de refroidissement.

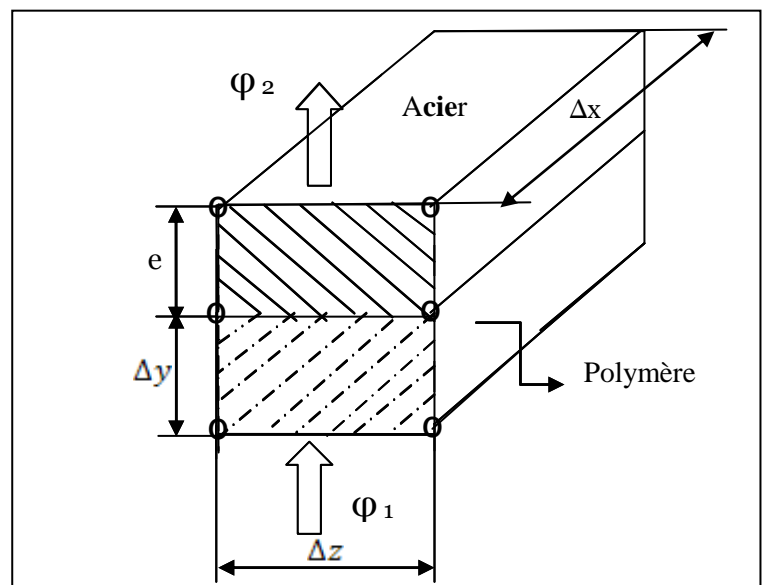


Figure 3.7 : Echange thermique entre la plaque et le fluide de refroidissement

La loi de Fourier permet d'exprimer les densités de flux de chaleur φ_1 et φ_2 .

$$\varphi_1 = \frac{k_p \cdot (T_{i,j-1}^t - T_{i,j}^t) \cdot \Delta z \cdot \Delta x}{\Delta y}$$

$$\varphi_2 = \frac{k_{ac} \cdot (T_{i,j}^t - T_r) \cdot \Delta z \cdot \Delta x}{e}$$

On a supposé : $\varphi_1 = \varphi_2$

D'où :

$$\frac{k_p \cdot (T_{i,j-1}^t - T_{i,j}^t)}{\Delta y} = \frac{k_{ac} \cdot (T_{i,j}^t - T_r)}{e}$$

On trouve :

$$T_{i,j}^t = \frac{k_p \cdot e \cdot T_{i,j-1}^t + k_{ac} \cdot \Delta y \cdot T_r}{k_p \cdot e + k_{ac} \cdot \Delta y} \quad (3.28)$$

3.3.2.3 Calcul thermique au cours de refroidissement:

Une fois que le seuil est figé, certains auteurs poursuivent le calcul : la vitesse d'écoulement s'annule, une équation de la chaleur beaucoup plus simple est résolue (les termes de convection et de dissipation visqueuse disparaissent) [10].

L'équation de la chaleur de la phase de refroidissement est donnée par :

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k_p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.29)$$

3.3.3 Calcul thermodynamique :

3.3.3.1 Introduction

Les équations d'état ou les équations constitutives sont un complément indispensable à la physique des milieux continus. Certaines lois physiques, comme la conservation de la masse, l'équation du moment et d'énergie, s'appliquent à tous les corps continus indépendamment de leur constitution. En général ces lois sont insuffisantes pour une caractérisation des variables propres au matériau. [7]

Cependant ces relations d'états sont nécessaires pour poser complètement le système d'équation à résoudre. La quantité et la forme des équations d'état dépendent du problème particulier traité, aussi elles doivent répondre à un certain nombre de conditions.

Dans les problèmes thermomécaniques, on doit connaître les équations reliant le tenseur des contraintes à l'histoire thermique.

Le cas particulier d'un champ de contrainte isostatique, ou les effets dépendent du temps sont négligés, est important.

Cas d'un polymère amorphe [7]

Nous rappelons que ce calcul permet de déterminer l'évolution de la pression, dans un élément de volume dont la masse volumique a varié, d'après le bilan de masse de l'instant précédent. (Figure 3.8)

3.3.3.2 Calcul de la masse injectée

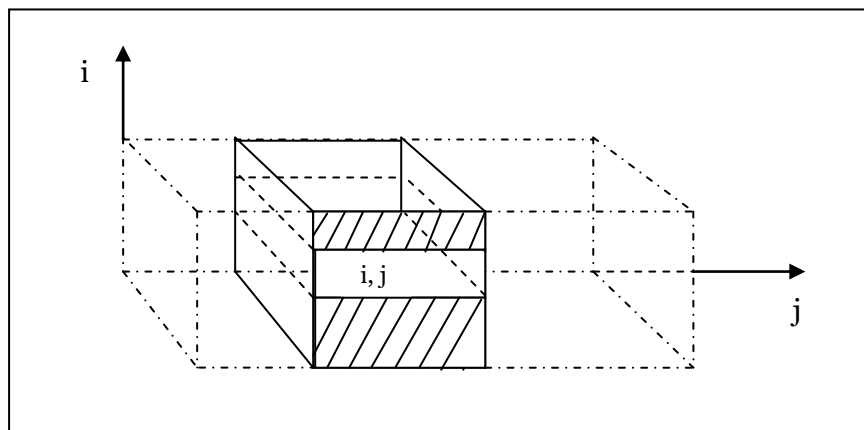


Figure 3.8 : Élément de volume [7]

Nous supposons que la pression est uniforme le long de l'épaisseur de (coordonnée i) : quel que soit j : $P(i, j) = P(j)$

Ce dernier nous donne également la masse totale de la tranche j :

$$m(j) = \sum_i \frac{v(i, j)}{V(i, j)} \quad (3,30)$$

v : volume de l'élément (i, j)

V : volumique spécifique de la matière dans cet élément

Soit E l'équation d'état du polymère :

$$m(j) = \sum_i \frac{v(i,j)}{E(P(j), T(i,j))}$$

Il faut inversé cette relation pour connaître P(j) ;

Nous prenons la relation de tait comme équation d'état :

$$E(P(i,j), T(i,j)) = V(i,j) = f(T(i,j)) \cdot \left[1 - C \ln \left(1 - \frac{P(j)}{g(T(i,j))} \right) \right] \quad (3.31)$$

C : constant de tait

f, g : fonctions de la température

Application à l'équation de tait :

$$E = f(T(i,j)) \cdot \left[1 - C \ln \left(1 - \frac{P(j)}{g(T(i,j))} \right) \right]$$

$$m(j) = \sum_i \frac{v(i,j)}{f(T(i,j)) \cdot \left[1 - c \ln \left(1 + \frac{P(j)}{g(T(i,j))} \right) \right]} \quad (3.32)$$

$$m(j) = \sum \frac{v}{f(T) \cdot \left[1 - c \ln \left(1 + \frac{P}{g(T)} \right) \right]}$$

3.3.3.3 Calcul de la pression dans le moule

Nous allons procéder à certain nombre d'hypothèses :

$$\frac{P}{g(T)} \ll 1 \rightarrow \ln \left(1 + \frac{P}{g(T)} \right) \approx \frac{P}{g(T)}$$

D'autre part C (Constante de tait = 0.0894) est inférieur à 1 :

$$\frac{1}{1 - C * \frac{P}{g(T)}} \approx 1 + c \frac{P}{g(T)}$$

En réécrivant notre expression initiale, nous obtenons :

$$P(j) = \left[m(j) - \sum_i \frac{v(i,j)}{f(T(i,j))} \right] * \left[\frac{1}{C * \sum_j \frac{v(i,j)}{f(T(i,j)) * g(T(i,j))}} \right] \quad (3.33)$$

3.3.3.4 Calcul du retrait volumique :

Une fois que le seuil est figé (après figeage), certains auteurs poursuivent le calcul : la vitesse d'écoulement s'annule, une équation de la chaleur beaucoup plus simple est résolue (les termes de convection et de dissipation visqueuse disparaissent). On utilise l'équation d'état pour déterminer l'évolution de la pression, la masse étant désormais constante et connue [10] :

- Dans un premier temps, la pièce dans le moule est supposée avoir un volume constant (celui de la cavité, hors déformation éventuelle du moule induite par la pression), et le refroidissement calculé entraîne une diminution de la pression.
- Dans un deuxième temps, lorsque la pression atmosphérique est atteinte, la pièce subit un retrait thermique supplémentaire en rejoignant la température ambiante.

Notre modélisation se fonde sur :

La masse étant constante « m_2 » est égale à la dernière masse de l'élément calculée.

Volume de l'élément (après le retrait) étant inconnu est noté par $v_{velt}(i, j)$

* Calcul de volume massique « v_2 » par l'équation empirique de Tait (3,31)

* Calcul de l'élément $v_{velt}(i, j)$ par l'équation :

$$m_2(i, j) = \frac{v_{velt}(i, j)}{v_2(i, j)}$$

$$v_{velt}(i, j) = m_2(i, j) * v_2(i, j) \quad (3.34)$$

* Calcul du retrait par l'équation :

$$retr(i, j) = 1 - \frac{v_{velt}(i, j)}{v_{elt}(i, j)} \quad (3.35)$$

Chapitre 4

Programmation

Le but essentiel de notre travail est la simulation des phénomènes thermomécaniques au cours de la phase post-remplissage (compactage-refroidissement). Cette simulation permet de pouvoir connaître l'histoire thermique, l'évolution de la pression et le volume spécifique de la matière pendant et à la fin de cette phase. Donc elle nous donne la possibilité de prévoir le retrait volumique.

Le programme est effectué dans l'environnement MATLAB 7.10. Ce choix est justifié parce qu'il possède les meilleures fonctionnalités adaptées à notre calcul [17].

4.1 Organisation générale du programme

Notre organigramme peut être représenté de la façon suivante :

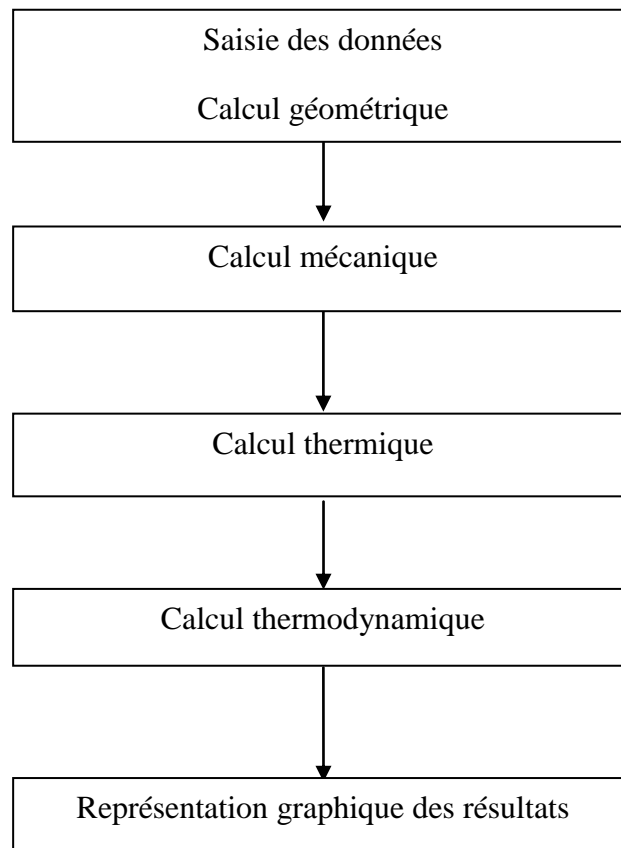


Figure 4 .1 : *Organigramme global du programme*

4.2 Organigramme détaillé du programme :

Notre programme comprend essentiellement quatre parties :

4.2.1 Calcul géométrique (voir figure 3.4)

Calcul de coordonnées de nœuds de maillage de l'épaisseur

On a pris une plaque de dimensions suivantes

L : longueur de la plaque

h : demi hauteur

q : largeur

- On a divisé la longueur totale de la plaque en n nœuds (N=17), suivant le sens de l'écoulement, la longueur entre deux nœuds successifs est Δz :

$$\Delta z = \frac{L}{N - 1}$$

- Et on divise l'épaisseur h suivant le sens transversal M nœuds (M=18), la longueur entre deux nœuds successif est Δy :

$$\Delta y = \frac{h}{M - 1}$$

4.2.2 Calcul mécanique :

- Calcul de quelques paramètres physiques : débit moyen « Q », vitesse moyenne « w_m »
- Calcul des champs de vitesse d'après l'équation (3.21), et de la pression d'après l'équation (3.22).

4.2.3 Calcul de l'échange thermique:

Il comprend :

- Initialisation de la température, de fin de remplissage

Par manque de logiciel permettant la simulation de la phase de remplissage, cette température est supposée uniforme et égale à la température d'injection

Calcul de l'échange thermique :

Il comprend :

- Les nœuds situés au milieu de la plaque par l'équation (3.27)
- Les nœuds internes, par l'équation (3.26)
- Les nœuds à l'interface moule (acier)-plaque (polymère), par l'équation (3.28)

Ce calcul de l'échange thermique se fait par un calcul :

- Avant figeage (phase de compactage)
- Après figeage (phase de refroidissement) : vitesse nulle et la masse constante

4.2.4 Calcul thermodynamique :

- Calcul de volume de l'élément (i, j) d'une maille de l'épaisseur
- Calcul de volume spécifique « V_1 » par l'équation empirique de «Tait » (3.31)
- Calcul de la masse total de la tranche i « $m_1(i)$ » par l'équation (3.32)
- Calcul la pression « $p_1(i)$ » par l'équation (3.33) .
- Calcul du retrait volumique par l'équation (3.35)

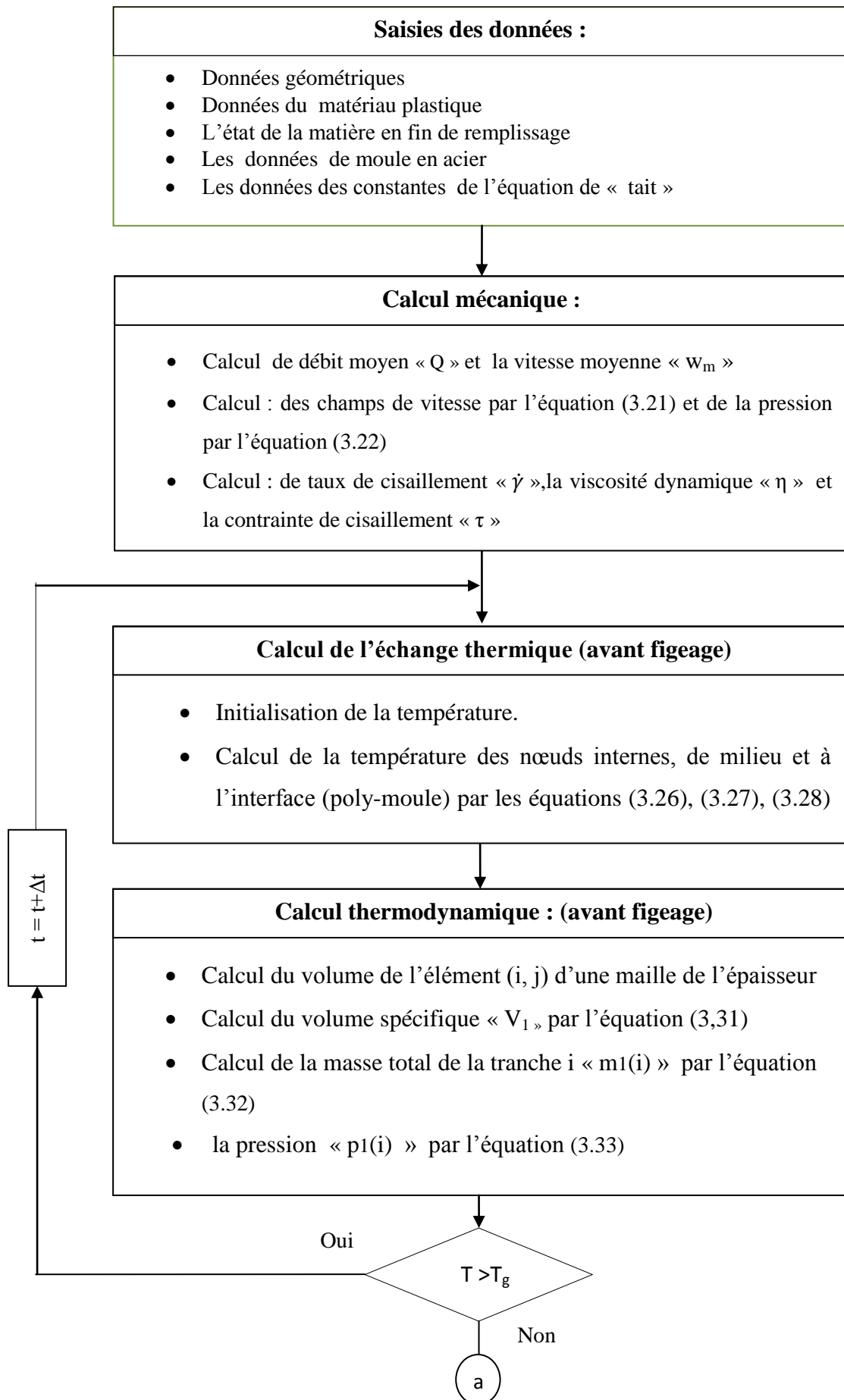
Il comprend :

- On reprend le calcul de l'échange thermique (avec une équation de la chaleur plus simple, où les termes de convection et de dissipation visqueuse disparaissent) Par l'équation (3.29)

La masse « m_2 » étant constante, elle correspond à la masse calculée du dernier élément.

Le volume de l'élément (après le retrait) étant inconnu est noté par $v_{vel}(i, j)$

- Calcul de volume spécifique « V_2 » par l'équation empirique de Tait (3.31)
(simplifie).
- Calcul de l'élément $v_{vel}(i, j)$ par l'équation (3,34)
- Calcul du retrait $retr(i, j)$ par l'équation (3,35)



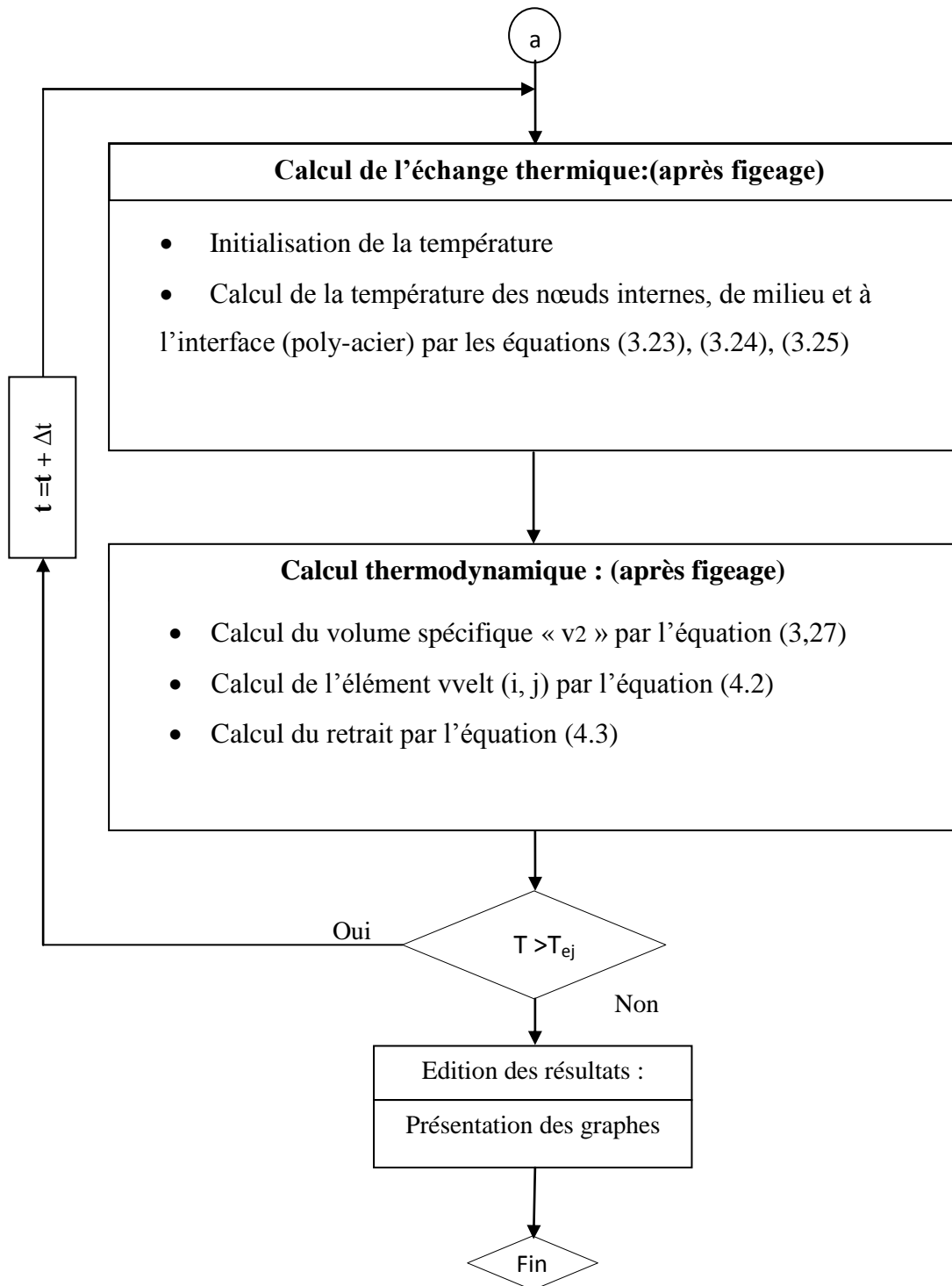


Figure 4.2 : L'organigramme détaillé du programme

L'organigramme de la figure (4.1) fonctionne selon les étapes présentées ci-dessous :

- Calcul géométrique :
- Calcul mécanique : Il comprend
 - Calcul des grandeurs physiques tels que , débit moyen « Q » et vitesse moyenne « w_m » afin de pouvoir déterminer le champ de vitesse et le champ de pression d'après les équations respectivement (3.18), (3.19)
 - Calcul des paramètres rhéologiques nous adoptons la loi de puissance pour modéliser l'écoulement de polymère.
- Calcul de l'échange thermique :

Le calcul de l'échange thermique est suivi immédiatement d'un calcul thermodynamique.

- On choisit la méthode de différences finies le schéma de résolution est explicite.
- Initialisation de la température de fin de remplissage.
- Cet échange s'exécute (boucler) tant que la température serait supérieure à la température de transition vitreuse " T_g ". On calcule à l'intérieure du boucle :
 - Le volume massique « v_1 », par l'équation (3.27)
 - La masse totale de la tranche i « m_1 », par l'équation (3.28)
 - la pression $p_1(i)$ par l'équation (3.29)

Ce calcul se fait après avoir calculé le volume de l'élément (i, j) d'après l'équation(4.1)

- Quand la température atteint une valeur inférieure à la température de transition vitreuse, on sort de la boucle et on marquera la fin de cette étape que l'on appelle : la phase de compactage
- On reprend le calcul de l'échange thermique par l'équation de chaleur simple, l'équation (3.20).

Le refroidissement se poursuit tant que la température (au voisinage d'un point du seuil c'est-à-dire au cœur de la pièce) est supérieure à la température d'éjection. Au cours de cet échange on calcule :

- Le volume spécifique « v_2 ». Par l'équation (3.27) de "Tait" simplifiée, c'est-à-dire en tenant compte seulement de la condition où $T < T_g$
- Le volume de l'élément (i, j) après avoir subi le retrait par l'équation (3.20)
- Le retrait volumique par l'équation (3.21)

- Quand la pièce refroidie atteint la température d'éjection, on sort du boucle et le programme affichera les résultats sous formes graphiques et numériques.

4.3 Données et résultats du programme

4.3.1 Données :

Pour l'organigramme précédent (Figure 4.1), on doit saisir les données suivantes :

- Géométrie :

Plaque :

- L_p : longueur de la plaque [m]
- h : hauteur de la plaque [m]
- q : largeur [m]

- Maillage :

- N : le nombre des nœuds suivant la longueur
- M : le nombre des nœuds suivant la hauteur

- Caractéristiques de la matière plastique :

- La conductivité thermique : k_p [w/m^2]
- Capacité calorifique : C_p [$j/kg.k$]

- Caractéristiques du moule :

- k_{ac} : conductivité thermique de l'acier [$w/m^o.c$]
- e : distance entre la canal de refroidissement et la paroi contact [m]
- T_{ref} : température de refroidissement

- État de la matière à la fin de remplissage :

- T : température à la fin de remplissage [oC]
- W_m : Vitesse [cm/s]
- P : Pression [MPa]
- $\dot{\gamma}$: Taux de cisaillement en fin de remplissage [$1/s$]

4.3.2 Résultats :

L'exécution de l'organigramme va donner les résultats suivants :

- Les valeurs de la température dans les différents nœuds du maillage
- Les valeurs du champ de vitesse dans les différents nœuds du maillage
- Les valeurs du champ de pression dans les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de la viscosité dynamique dans les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de la contrainte de cisaillement dans les différents nœuds du maillage
- L'évolution de la température au cours du temps
- La variation du volume spécifique en fonction de la température
- L'évolution du volume spécifique en fonction du temps
- L'évolution de la masse injectée au cours du temps
- L'évolution du retrait au cours du temps

Chapitre 5

Étude d'un cas d'application (une plaque)

Dans ce chapitre on va entamer un cas de géométrie élémentaire de forme rectangulaire avec l'influence de la loi de comportement (Loi puissance) sur les calculs de paramètres mécaniques et thermiques.

5.1 Données géométriques :

On a pris une plaque de dimensions suivantes [15] :

L : longueur du plaque $L = 0.120 \text{ [m]}$

h : demi hauteur $h = 0.004 \text{ [m]}$

q : largeur $q = 0.05 \text{ [m]}$

5.2 Maillage :

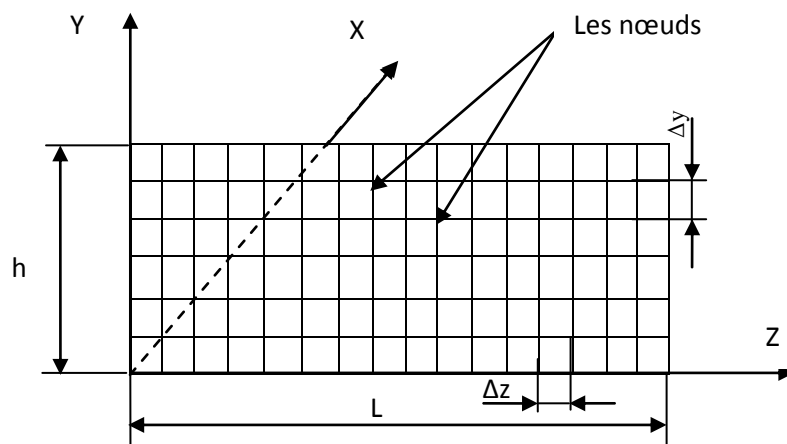


Figure 5.1 : maillage de la moitié supérieur du plaque

- On a divisé la longueur totale de plaque en n nœuds ($N = 17$), suivant le sens de l'écoulement. La longueur entre deux nœuds successifs est Δz
- Et on divise l'épaisseur h suivant le sens transversal M nœuds ($M = 18$), la longueur entre deux nœuds successif est Δy :

Cette discrétisation est représentée par la figure 5.1

On a choisi l'élément, une maille de volume de section (Δz , Δy) et de largeur l'unité, qui entoure le nœud :

$$velt(i,j) = \Delta z \cdot \Delta y$$

5.3 Matériau :

Le matériau choisi est le polystyrène (PS) :

- La viscosité :

Pour le modèle pseudo plastique la viscosité η est donnée par :

$$\eta = k \cdot |\dot{\gamma}|^{m-1} \quad (\text{Loi de puissance})$$

$$k : \text{Consistance du polymère} \quad k = 7277 \text{ [Pa.s}^m] \text{ [22]}$$

$$m : \text{indice de pseudo- plasticité} \quad m = 0.357 \quad [22]$$

- la conductivité thermique du polystyrène: $k_p = 0.13 \text{ [w/m.K]}$
- la masse volumique du polystyrène : $\rho = 1040 \text{ [kg/m}^3] \text{ [23]}$
- capacité calorifique du polystyrène : $C_p = 1420 \text{ [j/kg.K]} \text{ [23]}$
- **Données des constantes de l'équation de « Tait ».** [24] (Voir chapitre 2)

$$C = 0.0894$$

$$b_{1,l} = 9,88.1e - 4 \quad [m^3/kg].$$

$$b_{2,l} = 6,10.1e - 7 \quad [m^3/(kg \cdot ^\circ C)].$$

$$b_{3,l} = 115 \quad [MPa].$$

$$b_{4,l} = 3,66.1e - 3 \quad [1/^\circ C].$$

$$b_{1s} = 9,88.1e - 4 \quad [m^3/kg].$$

$$b_{2s} = 1,49.1e - 7 \quad [m^3/(kg \cdot ^\circ C)].$$

$$b_{3,s} = 238 \quad [\text{MPa}].$$

$$b_{4s} = 2,10.1e - 3 \quad [1/^\circ\text{C}].$$

$$b_5 = 112 \quad [^\circ\text{C}]$$

$$b_6 = 7,8.1e - 8 \quad [^\circ\text{C}. 1/\text{Pa}].$$

5.4 Moule (en acier) [14] :

- e : distance entre le canal de refroidissement et la paroi de contact, $e = 4.10^{-3}[\text{m}]$
- k_{ac} : conductivité thermique de l'acier, $k_{ac} = 15 \quad [\text{w}/\text{m}. \text{K}]$

5.5 État de la matière:

- T : La température à la fin de remplissage ; $T = 250 \quad [^\circ\text{C}]$
- T_{ref} : La température de refroidissement ; $T_{ref} = 23 \quad [^\circ\text{C}]$
- T_{ej} : La température d'éjection ; $T_{ej} = 57 \quad [^\circ\text{C}]$
- T_g : La température de transition vitreuse ; $T_g = 100 \quad [^\circ\text{C}]$
- t_r : Le temps de remplissage ; $t_r = 9 \quad [\text{s}]$

5.6 Calcul des paramètres physiques

- Calcul de volume du moule v_m :

$$v_m = 2. q. L. h$$

- Calcul de débit moyen :

$$Q = \frac{v_m}{t_r}$$

- Calcul vitesse moyenne « w_m » :

$$s = 2. q. h \quad (\text{s: la surface latérale du moule})$$

$$w_m = \frac{Q}{s}$$

5.7 Graphes et Interprétations

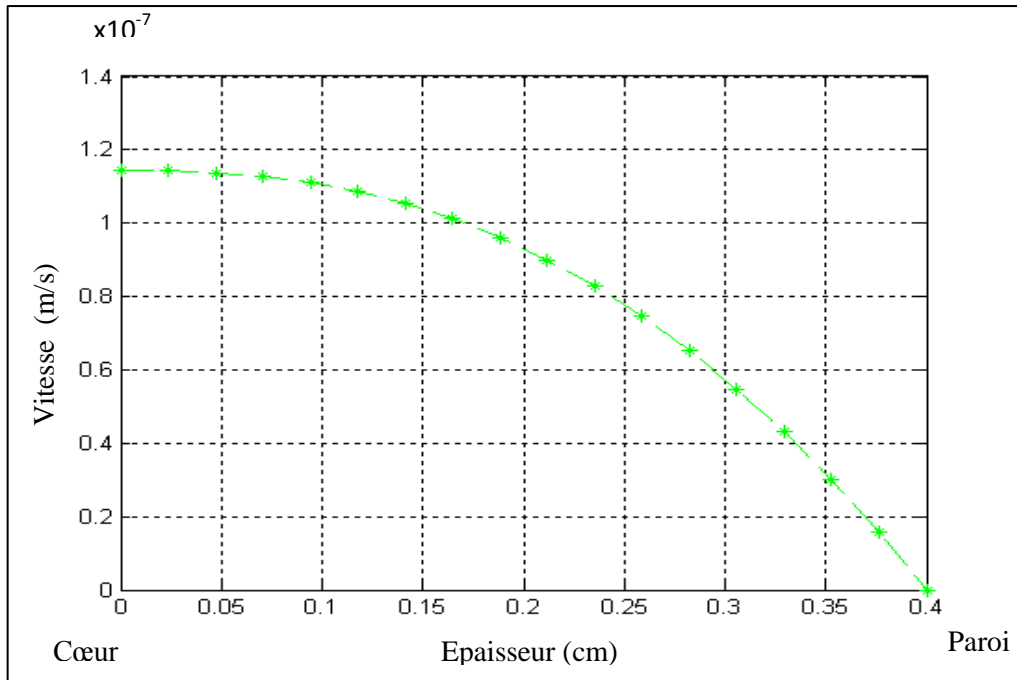


Figure 5.2 : *Champ de la vitesse*

La Figure 5.2 : représente la variation de la vitesse dans l'épaisseur, elle est maximale au cœur et décroît d'une façon parabolique jusqu'à ce qu'elle s'annule en contact de la paroi froide (condition de non glissement).

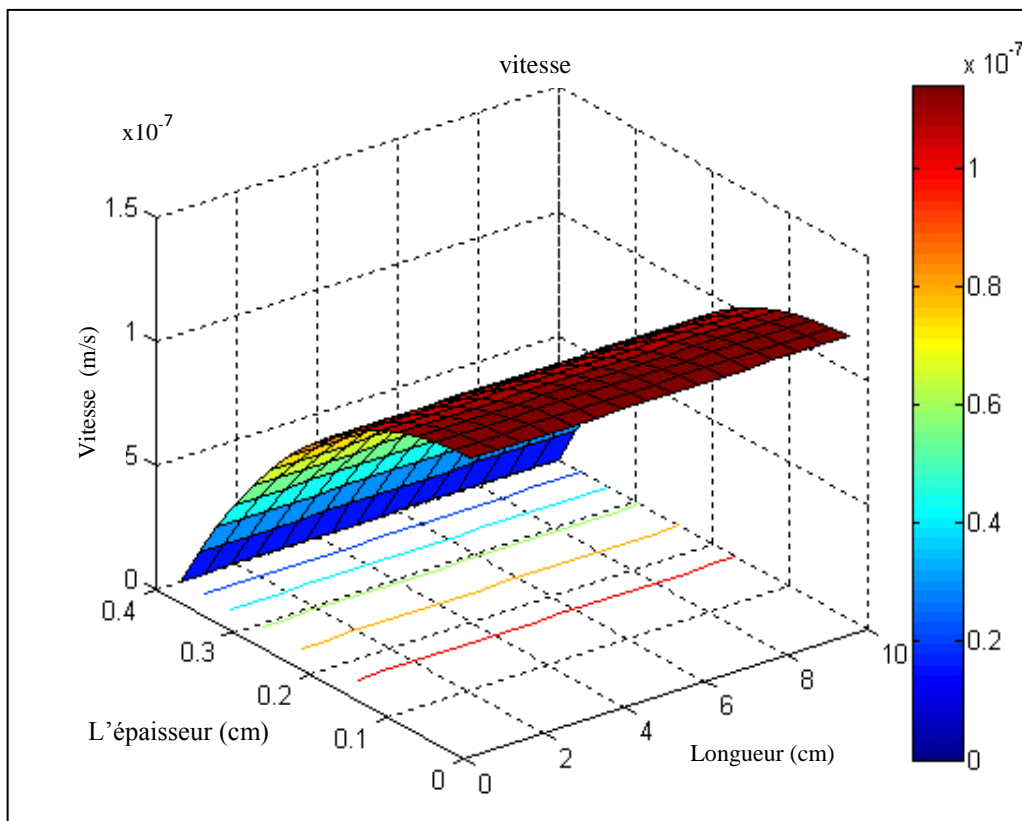
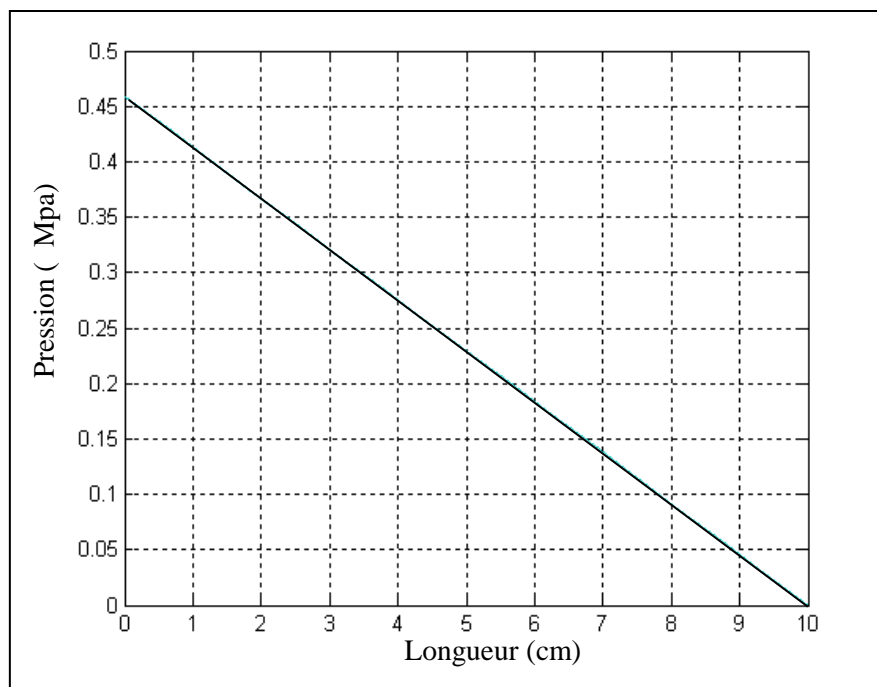


Figure 5.3 : Carte du champ de vitesse

La Figure 5.3 montre la carte du champ de vitesse dans le moule. Suivant l'épaisseur la vitesse est parabolique et elle est constante suivant le sens de l'écoulement en accord avec l'hypothèse cinématique $w = w(y)$.

Figure 5.4: *Pression du compactage*

La Figure 5.4 : la pression décroît linéairement entre le seuil d'injection et le front de la matière. Cette linéarité est en accord avec l'hypothèse $dP/dz = A = Cte$ (page 41).

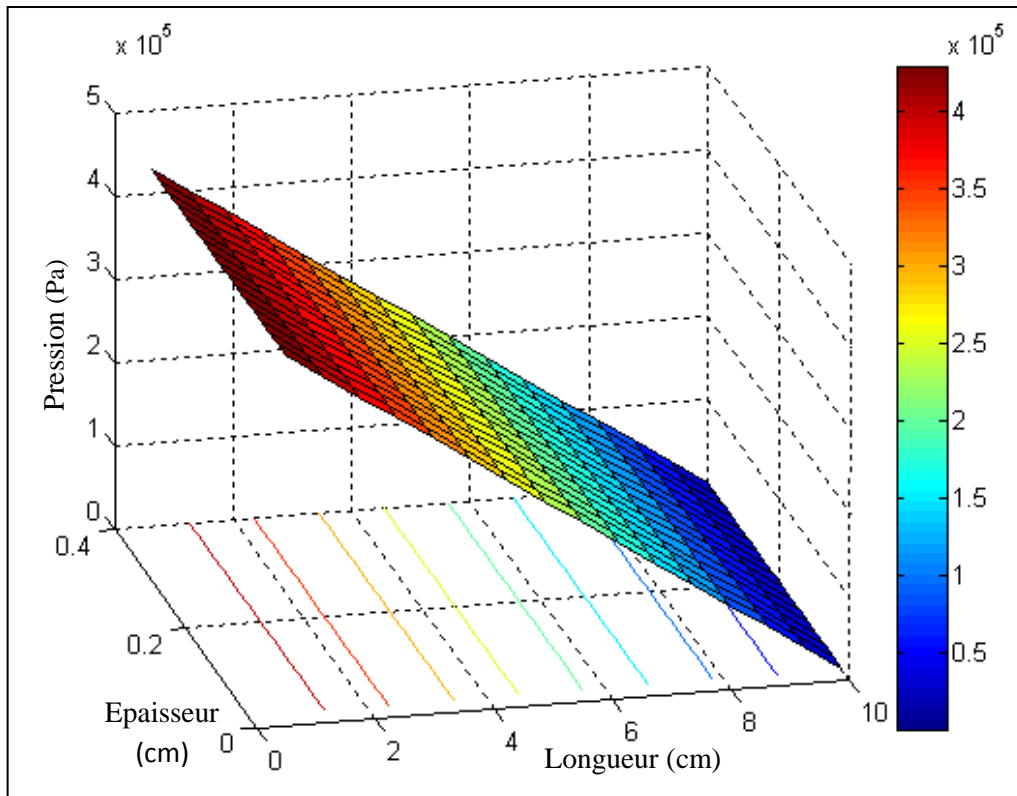


Figure 5.5 : *carte de pression du compactage*

La Figure 5.5 donne la carte de pression dans le moule, la pression est constante dans l'épaisseur et décroissante dans le sens de l'écoulement.

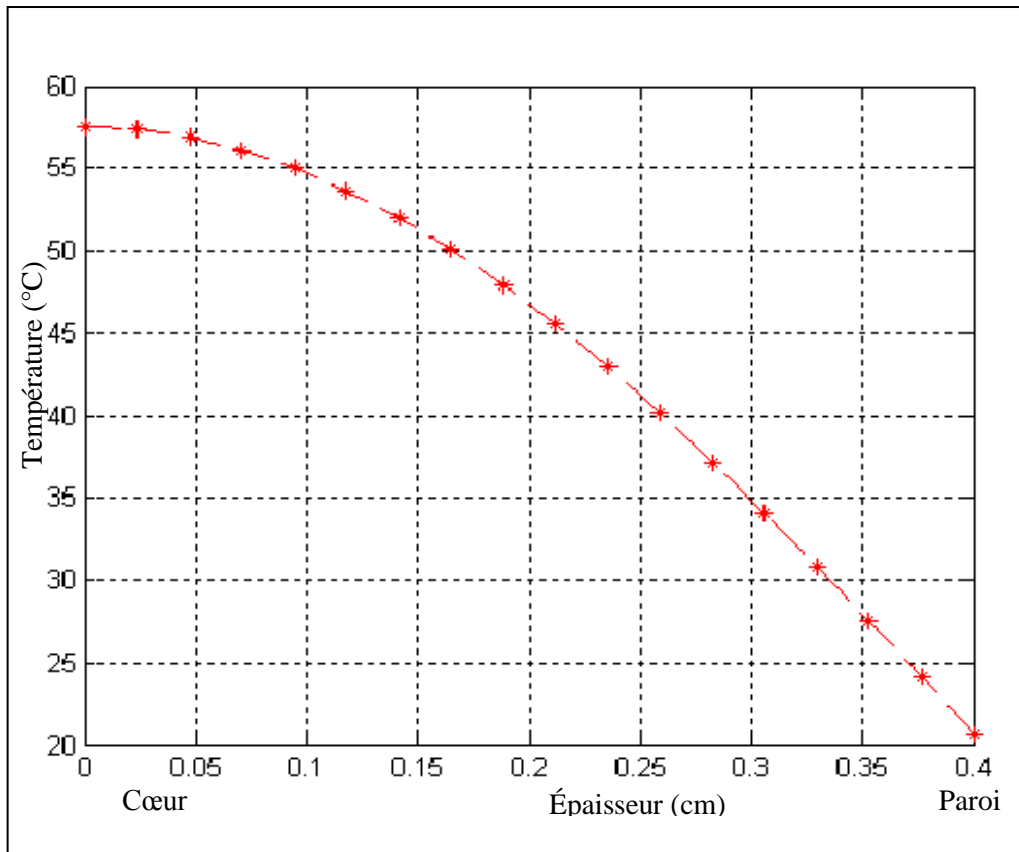


Figure 5.6 : La distribution de la température dans l'épaisseur à l'éjection

La Figure 5.6 donne le profil de température dans l'épaisseur, elle est maximale au milieu de la plaque et chute au niveau de la paroi du moule à cause de refroidissement.

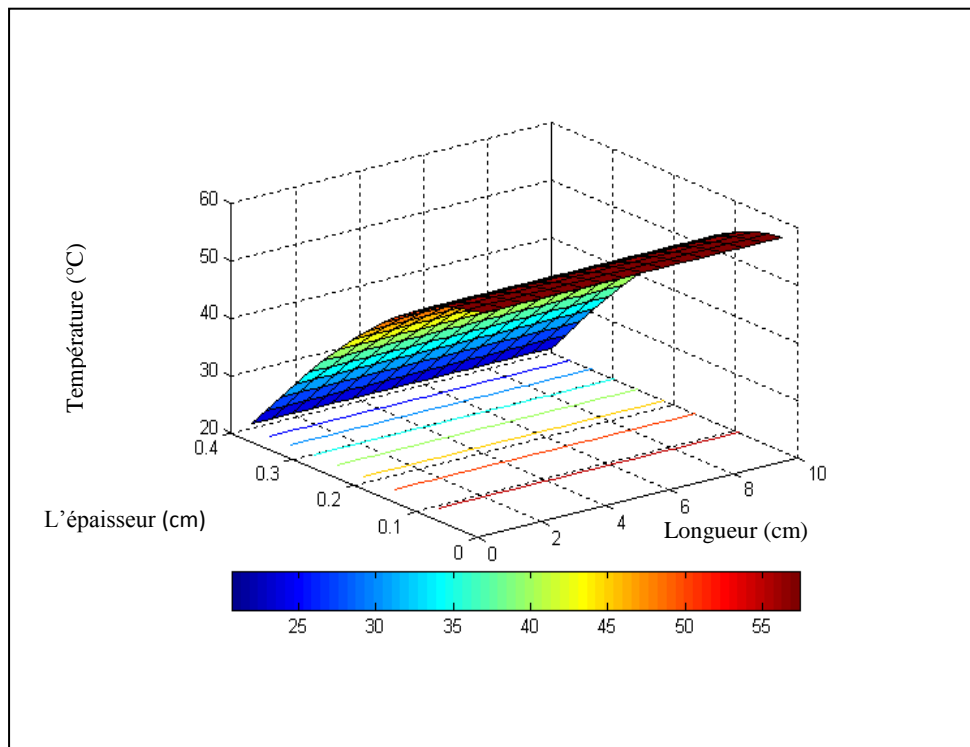


Figure 5.7 : Carte de température dans le moule à l'éjection

La Figure 5.7 donne le champ de température dans le moule , cette carte montre que l'écoulement est isotherme suivant la longueur de la plaque.

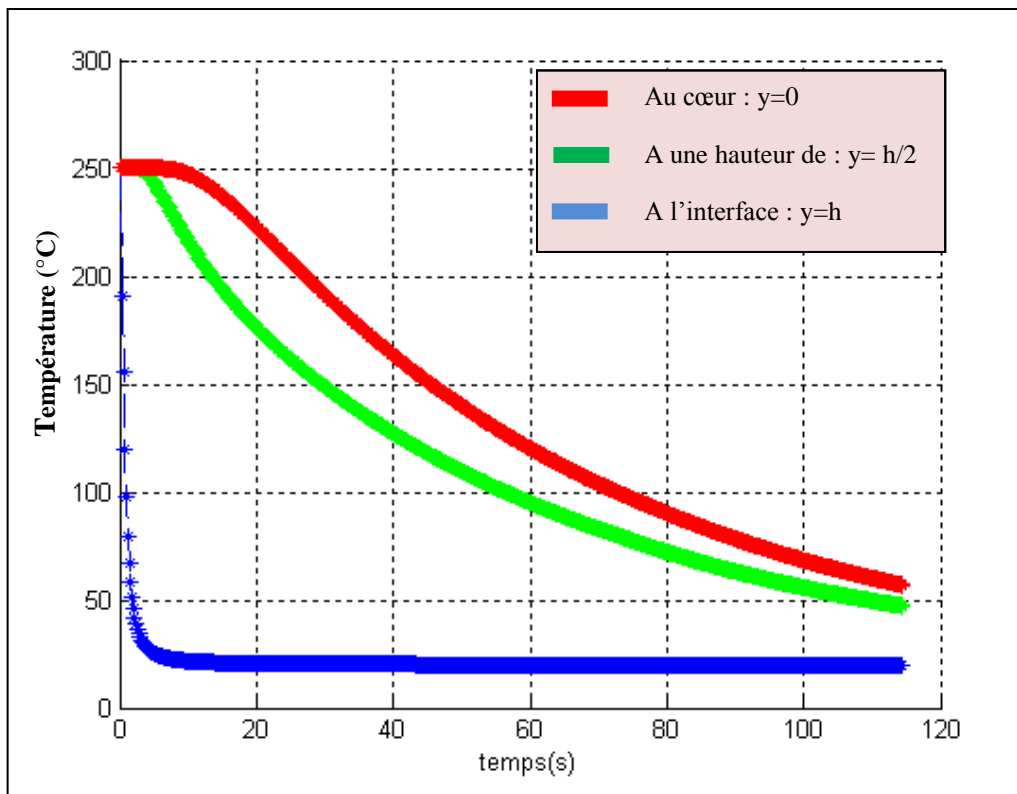


Figure 5.8 : Evolution de la température au cours du temps à différentes positions de l'épaisseur de la plaque

La Figure 5.8 à tous les niveaux la température décroît influencée par la circulation du liquide de refroidissement. À l'interface acier- polymère, la température chute rapidement et atteint une température proche de celle du liquide de refroidissement.

Quand on s'éloigne de la paroi, la vitesse de décroissance de température diminue. La chute de la température est plus lente au cœur qu'à l'interface. On remarque que la température reste constante pendant un temps trop court avant de chuter. Ce temps est plus grand au cœur, il diminue quand on s'approche de l'interface où il s'annule.

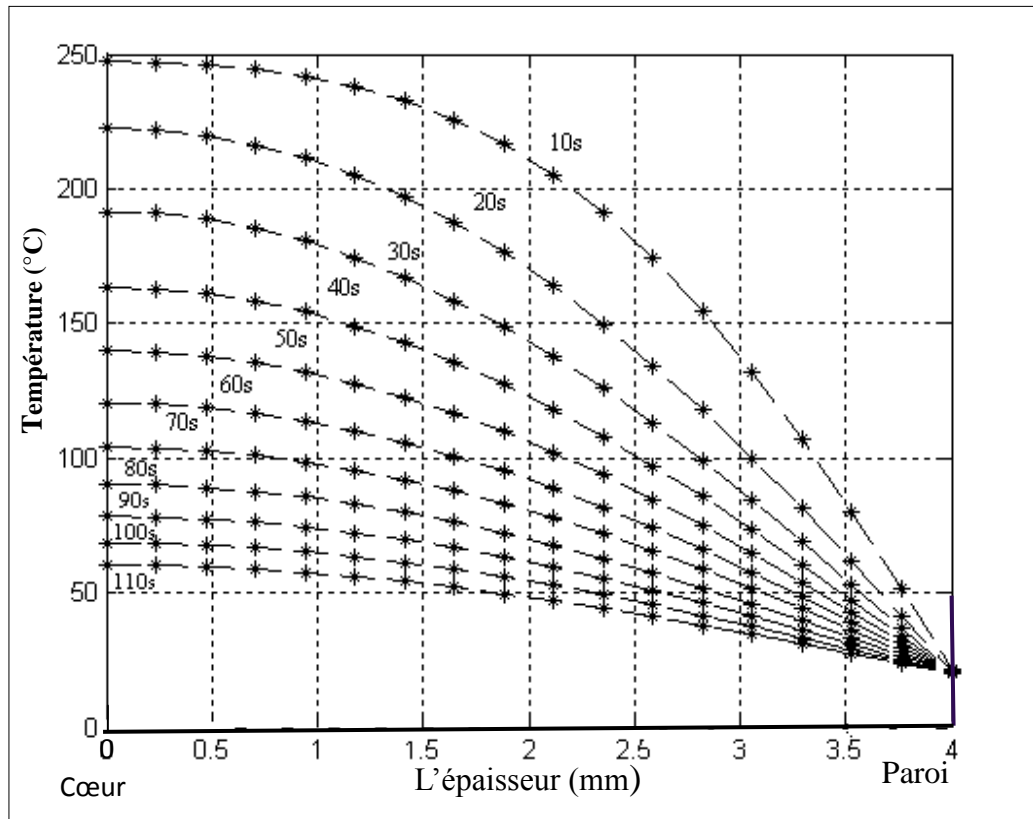


Figure 5.9 : Evolution de la température dans l'épaisseur de la plaque avec le temps

La figure 5.9 montre la variation décroissante de la température du cœur de la pièce jusqu'à la paroi du moule. La température au contact du moule dépend de la température régulée du liquide de refroidissement. Cette température dans l'épaisseur décroît au cours du temps pour atteindre la température d'éjection.

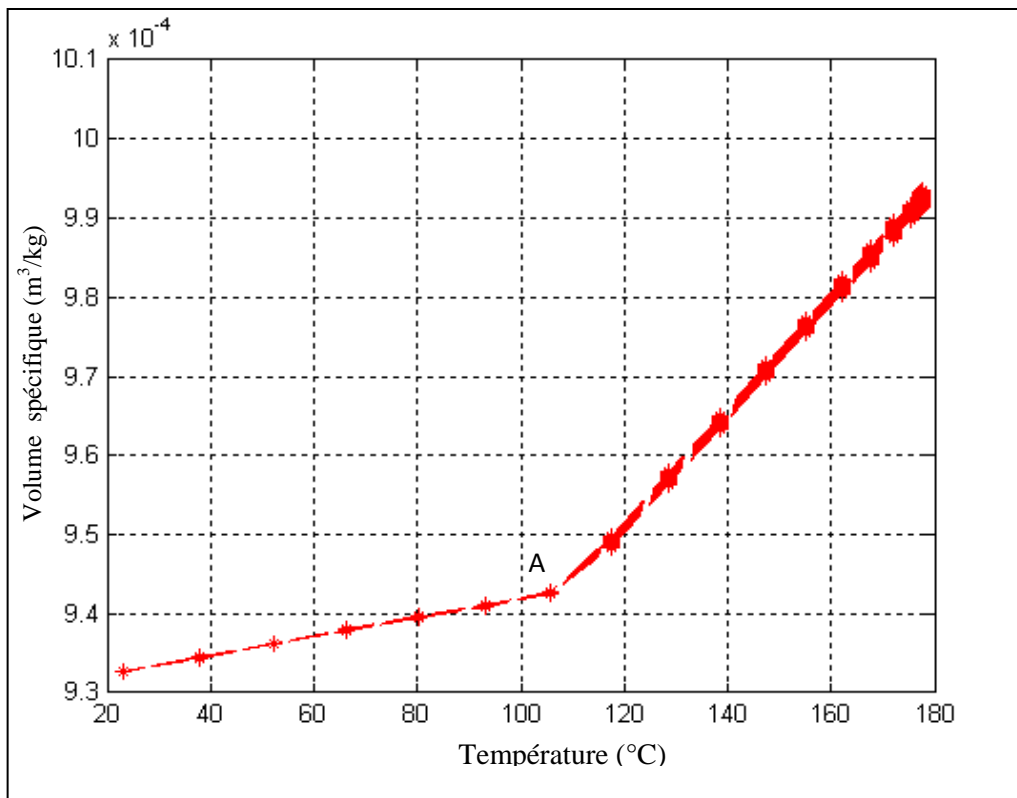


Figure 5.10 : Variation du volume spécifique en fonction de la température

La Figure 5.10 présente l'évolution du volume spécifique du polymère lors du refroidissement. On constate deux types de comportements, de part et d'autre du point A qui correspond à la température de transition vitreuse T_g qui marque le passage de l'état liquide surfondu à l'état solide vitreux amorphe.

Dans la phase solide, le volume spécifique croît avec la température jusqu'à ce qu'il atteigne la température T_g .

Dans la phase liquide, l'augmentation du volume spécifique devient plus rapide.

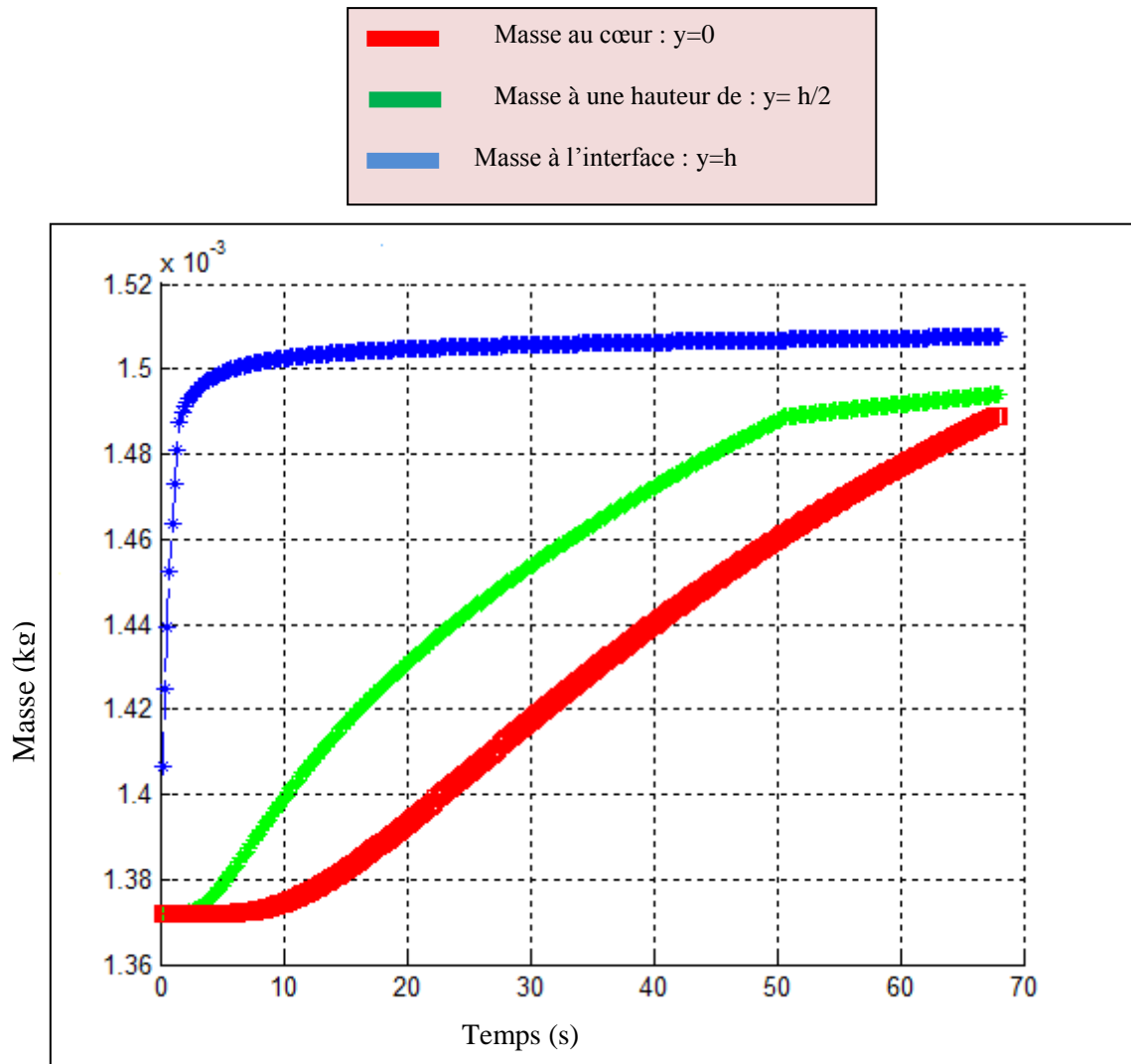


Figure 5.11 : Variation de la masse au cours du temps dans l'épaisseur

La figure 5.11 présente l'évolution de la masse dans une maille (on fixe l'abscisse z , $z = \text{cte}$) au cours du temps et à différentes positions dans l'épaisseur.

Le calcul de cette masse est effectué à partir du volume spécifique et le volume de la maille.

Sous l'effet de la pression de maintien cette masse augmente pour compenser le retrait volumique. Du fait de la variation décroissante de la température du cœur vers la paroi, l'augmentation de la masse diminue du cœur vers la paroi. (la pente des courbes est maximale au cœur, elle est presque nulle à l'interface)

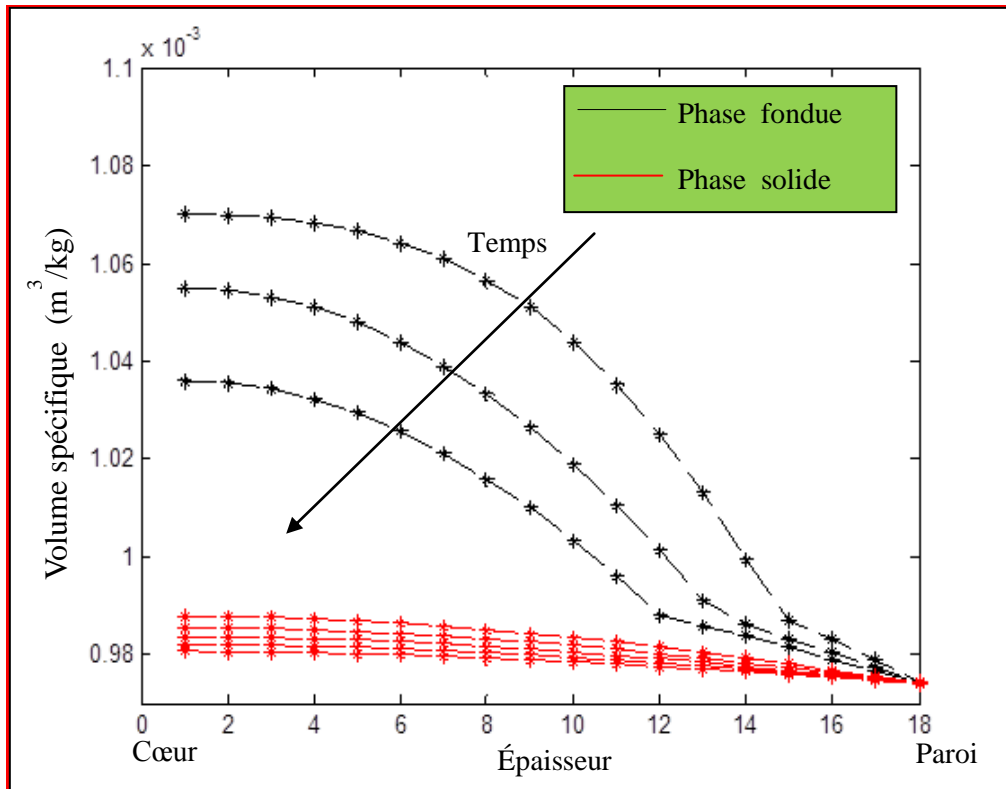


Figure 5. 12 : *Évolution du volume spécifique d'une maille dans l'épaisseur au cours du temps*

La figure 5.12 présente l'évolution du volume spécifique dans l'épaisseur à différents instants au cours du refroidissement.

Le volume spécifique est maximal au cœur, et diminué progressivement en direction de la paroi. Les valeurs de volume spécifique sont maximales dans la phase liquide et diminuent au cours de refroidissement pour être minimales dans la phase solide.

Cette évolution du volume spécifique avec la température est en accord avec la courbe PvT relative à la loi de Tait (figure 5.10).

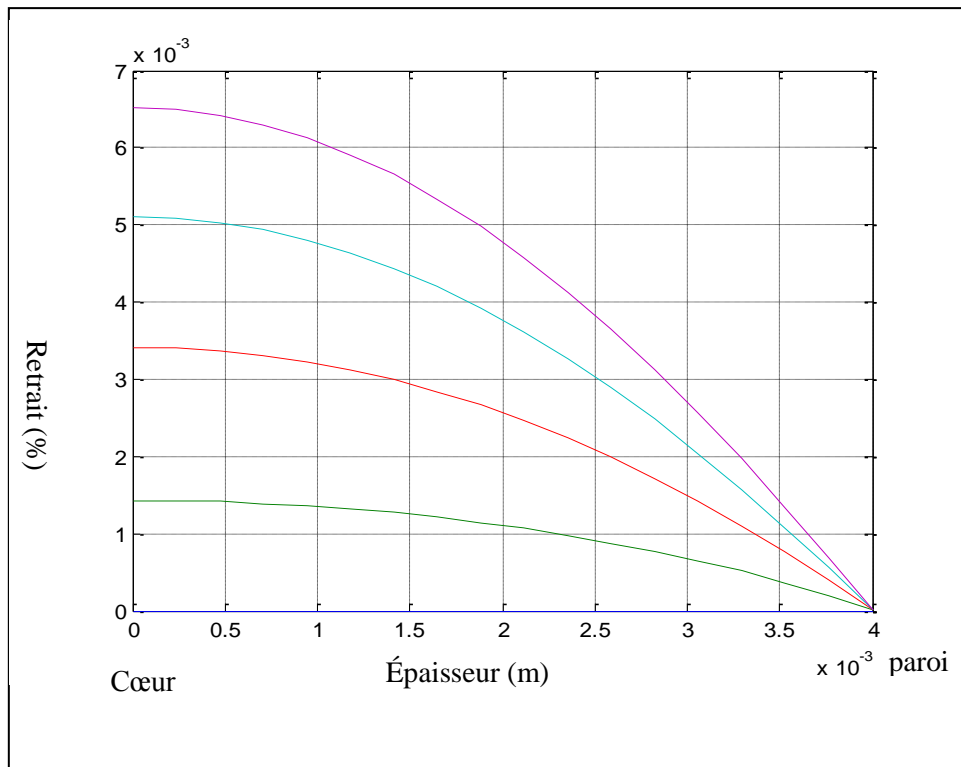


Figure 5.13 Evolution du retrait dans l'épaisseur

La figure 5.13 présente l'évolution du retrait volumique dans l'épaisseur à différents instants du refroidissement.

Le retrait volumique décroît du cœur de la pièce à la paroi, il est en accord avec la variation de la température (figure 5.6) et du volume spécifique (figure 5.12).

Au cours du temps, ce retrait qui présente la différence entre le volume de la matière et celui du moule, augmente pour donner en fin de refroidissement (dernière courbe) le retrait global de la pièce.

Conclusion et perspective

Le procédé de moulage par injection a pris une importance considérable sur le marché de la mise en forme des polymères. Cependant le rebut des pièces injectées à cause du retrait a posé des problèmes sérieux chez les industriels.

La simulation numérique du procédé d'injection a permis de répondre à certains de ces problèmes posés, sans avoir passé par des essais industriels, coûteux en temps et en moyen.

Cette étude a permis d'analyser la phase post-remplissage du procédé de moulage par injection des thermoplastiques. Parce que c'est la partie la plus longue du cycle d'injection est la plus coûteuse, durant laquelle le polymère se refroidit, induisant des retraits. Elle a commencé par une présentation des polymères et une description du moulage par injection des matières plastiques, suivie par la modélisation du phénomène thermomécanique présent dans le moule. Cette modélisation a été basée sur les équations de la mécanique des milieux continus, en considérant que le matériau a un comportement pseudo plastique.

Le volume spécifique, la température et la pression sont des caractéristiques importantes, pour la modélisation des phénomènes thermiques, mécaniques et thermodynamiques dans la phase post-remplissage. On a utilisé le modèle pseudo plastique " loi puissance " pour établir le couplage entre les équations de la mécanique, et les équations du transfert thermique, celles-ci ont été résolues numériquement par la méthode des différences finies schéma explicite, alors que le volume spécifique a été modélisé par l'équation semi-empirique de "Tait" .

La programmation de cette méthode a été implémentée sous l'environnement MATLAB, ce choix a été fortement justifié vu les différentes fonctionnalités numériques et graphiques utilisées. Ceci a permis de mettre au point un programme dont les résultats obtenus permettent le suivi de la pression, des champs de températures et le volume spécifique du polymère. Donc il nous donne la possibilité de prévoir le retrait volumique de la pièce moulée et par conséquent l'évaluation de sa masse injectée dans le moule.

Nous avons comparé le résultat de notre travail à d'autres travaux, une correspondance est bien remarquée en ce qui concerne les courbes résultant de l'échange thermique. Aussi un bon accord qualitatif est obtenu pour les courbes de volumes spécifiques et des retraits.

Perspectives :

Les perspectives de cette étude sont nombreuses et touchent plusieurs domaines de compétences. Citant par exemple :

- Mécanique :

On pourrait pousser notre travail pour étudier l'évolution des caractéristiques thermo-physique du matériau comme la diffusivité et la conductivité thermique en fonction de la température, qui étaient constantes dans notre étude.

- Transfert et chaleur thermique :

On a considéré le contact à l'interface est parfait mais en réalité ce n'est pas le cas, au moment de décollement de la pièce du moule, il se produit une lame d'air entre le polymère et le moule qui va retarder le refroidissement du polymère, ce qui induit des erreurs dans la quantification de l'échange thermique. On devrait mettre en évidence la résistance thermique de contact qui est un facteur très important dans l'étude de refroidissement des moules (la résistance thermique est négligé dans notre étude).

- Rhéologie : Généralisation du programme par les différents modèles rhéologiques.

- Comportement des matériaux :

- L'utilisation de la loi viscoélastique pourrait modéliser plus finement le comportement des polymères solide (Après l'éjection de la pièce moulée).
- On pourrait envisager une étude dans le cas des polymères semi cristallins (phénomène de cristallisation).
- On pourrait envisager une étude de la déformation des pièces en sortie du moule ainsi que les contraintes résiduelles piégées dans le polymère.

Références bibliographiques

- [1]. **G.W Ehrenstein , F. Montagne** , « Matériaux polymères - structure, propriétés et application ». Edition française hermès science publication, paris, 2000.
- [2]. **H. Massé**, « Couplage thermomécaniques lors de la solidification de matériaux polymère ».Thèse de doctorat, Université bordeaux I , France , 2000.
- [3]. **D. William, jr. Callister**, « Science et génie des matériaux », éditeur : Dunod, collection : Science sup, 2003.
- [4]. **R.El Otmani** , « Étude du refroidissement d'un polymère chaud sur une paroi métallique froide : influence des paramètres d'interfaces application à l'injection des polymères » .Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2009.
- [5]. **N. Brahmia**, « Contribution à la modélisation de la cristallisation des polymères sous cisaillement : application à l'injection des polymères semi- cristallins ». Thèse de doctorat, l'institut national des sciences Appliquées de Lyon, France, 2007.
- [6]. **A. Azwan bin Abdul Zahra**, « Effect of injection molding gate mechanism on parameters machining and defect of book tray». These de doctorate (Bachelor of Mechanical Engineering with Manufacturing Engineering), Faculty of Mechanical Engineering university Malaysia Pahang, 2009.
- [7]. **R. Déterre**, « Analyse du compactage lors de l'injection des thermoplastiques ». Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France, 1984.
- [8]. **L. Alexandra Rocha Da Silva**, « Viscoélastique compressible flow and applications in 3D injection molding simulation ». Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [9]. **X. Huang , C. zhou** , « Postfilling Analtsis of viscoelastic Poymers with internal structure parameter ». Polymer engineering and science, vol.39, No.11, 1999
- [10]. **J.F. Agassant , Vincent .M**, «Modélisation de l'injection : Compactage et contraintes résiduelles ».Techniques de l'ingénieur, Traité Plastiques et composites, Doc.AM 3 696, 2003.
- [11]. **E. Mathey**, « Optimisation numérique du refroidissement des moules d'injection de thermoplastiques basée sur la simulation des transferts thermiques par la méthode des éléments frontières ».Thèse doctorat, Université Toulouse III-Paul Sabatier École Matériaux Structure Mécanique, 2004.

- [12]. **P. Delebarre**, « Précision et stabilité dimensionnelles des thermoplastiques injectés ». Thèse de doctorat, Université des sciences et techniques de Lille Flandres Artois, N° 91LiL10087, France, 1991.
- [13]. **R. Mendoza**, « Morphologies induites dans les pièces en polyoléfine moulées par injection ». Thèse de doctorat, école nationale supérieure d'arts et métiers, France, 2005.
- [14]. **T. Djoudi** « Étude de l'écoulement du polymère fondu dans les moules résolution par la méthode des volumes finis (MVF) ». Mémoire de magistère, 2005. Université de Biskra.
- [15]. **J.F. Agassant, P. Avenas, J.P. Sergent**, « La mise en forme des matières Plastiques ». Edition Technique Documentation, Lavoisier, 1986.
- [16]. **W-Bing Young**, « Residual stress induced by solidification of thermo-viscoelastic melts in the post filling stage ». Journal of Material Processing Technology, 2004.
- [17]. **M. Moktari, A. Mesbah**, « Apprendre et maîtriser MATLAB » version 4,5 et simulink, Edition Springer, 1997.
- [18]. **K. Anukulthanakorn, S. Limtrakul, T. Vatanatham**, « Commercial polystyrene melt behavior in rod capillary die extrusion ». Article (Department of chemical Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University, 50 Paholyothin Rd. Bangkok 10900, Thailand, 2006.
- [19]. **J-L. Battaglia**, « Transfert thermiques dans les procédés de mise en forme des matériaux cours et exercices corrigés ». Lavoisier, 75008 Paris, 2007.
- [20]. **R. Déterre, P. Mousseau, A. Sarda**, « Injection des polymères : simulation, optimisation et conception ». Edition TEC et DOC, Lavoisier, 2003.
- [21]. **H. Massé, E. Arquis, D. Delaunay, S. Quilliet, P.H. Le Bot**, « Heat transfer with mechanically driven thermal contact resistance at the polymer-mold interface in injection molding of polymers » International Journal of heat and MASS transfer, 47, 2004.
- [22]. **Kittima Anukulthanakorn, Sunun Limtrakul, Terdthai Vatanatham**, « Commercial polystyrene melt behavior in rod capillary die extrusion ». Article (Department of chemical Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University, 50 Paholyothin Rd. Bangkok 10900, Thailand, 2006.

[23]. **Z. Pu**, « Polymer Data Handbook » .Copyright by Oxford University Press,inc,1999.

[24]. **A. E Varela, M. Suarez**, « FEMLAB Simulation of Thermoplastics Injection-molding ».Excerpt from the proceedings of the COMSOL multiphysics User's conference, Boston, 2005.

Résumé :

Le moulage par injection occupe une place importante dans les procédés de mise en forme dans le domaine de plasturgie. Pour éviter les essais répétés, coûteux en temps et en moyen, on procède à la simulation de ses différentes phases.

La modélisation présentée permet de simuler la phase de compactage et du refroidissement d'un polymère thermoplastique fondu (amorphe) dans une empreinte de moule d'injection. Un couplage a été effectué entre les transferts thermique (équation de l'énergie), mécanique (en tenant compte de comportement pseudo plastique du polymère " loi puissance ") et le comportement thermodynamique (diagramme PvT) représenté par l'équation semi empirique de " Tait ". L'équation de l'énergie a été résolue par la méthode aux différences finie, schéma explicite. Le volume spécifique a été modélisé par l'équation de " Tait ", pour connaître l'état de la matière au cours de la phase post-remplissage.

La programmation a été implémentée sous l'environnement MATLAB. Les résultats obtenus permettent le suivi de la pression, des champs de températures et le volume spécifique du polymère. Donc il nous donne la possibilité de prévoir le retrait volumique de la pièce moulée, par conséquent l'évaluation de sa masse injectée dans le moule.

خلاصة : إن عملية القولبة تأخذ حيزا مهما في أغلب المجالات الصناعية وخاصة في صناعة المواد اللدنة (البلاستيك) و من أجل تحاشي التجارب المتكررة والمكلفة في الوقت والوسائل نقوم بمحاكاة هذه العملية. إن الدراسة المقدمة هنا تسمح بمحاكاة مرحلة التبريد ليوليمرات الحرارية (Amorphe) في قالب بواسطة عملية الحقن بالقولبة باستعمال قوانين ميكانيكا المادة والتغير الحرارية, و الطرق الريولوجية ("Loi puissance") وكذا الطرق الترموديناميكية (معادلة " Tait ") لنموذج الحجم النوعي للمادة المنصهرة, وكل هذه الدراسات والطرق تمت باستعمال طريقة الفوارق الرقمية المختلفة من أجل معرفة حالة المادة أثناء عملية التبريد والتبريد. البرمجة تمت بواسطة برنامج " Matlab " و النتائج المحصلة عليها تسمح بمعرفة الضغط, الحرارة و الحجم النوعي للقطعة و بالتالي يمكن التنبؤ بالانكماش الحجمي للقطعة داخل القالب ومنه استنتاج مقدار الكتلة القابلة للتبريد كميًا.

Abstract:

Injection molding occupies a better place in the processes of formatting in the domain of plastic parts. To avoid the expensive tests in time and in means, one simulates this process.

The presented modeling permits to simulate the phase of packing and the cooling of an amorphous thermoplastic polymer in a print of injection mold. A coupling has been done between the transfers thermal (equation of the energy), mechanical (while taking into account shear thinning behavior of the polymer "law power ") and the behavior thermodynamic (PvT diagram) is represented by " Tait "equation. The equation of the energy has been solved by the explicit finite -difference method. The specific volume was modeling by the semi-empiric model of " Tait ". To know the state of matter during the post filling phase.

The programming was implemented under the MATLAB environment. The gotten results permit the follow-up of the pressure, of the fields of temperatures and the specific volume of the polymer. Therefore it gives us the possibility to foresee shrinkage of the piece cast, therefore the assessment of its injected mass in the mold.