

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>1 Préliminaires sur l'analyse fonctionnelle</b>	<b>1</b>
1.1 Espaces normés . . . . .	2
1.2 Espaces fonctionnels . . . . .	3
1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables .	4
1.2.2 Espaces de Lebesgue $L^p$ . . . . .	5
1.2.3 Espaces de Sobolev . . . . .	6
1.2.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	6
1.3 Théorèmes de point fixe . . . . .	9
1.4 Éléments d'analyse non linéaire . . . . .	13
1.4.1 Opérateurs linéaires . . . . .	13
1.4.2 Opérateurs non linéaires . . . . .	14
1.4.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement . . . . .	16
1.4.4 Différentiabilité et sous différentiabilité . . . . .	17

<b>2</b>	<b>Inéquations variationnelles et équations d'évolution</b>	<b>20</b>
2.1	Inéquations variationnelles elliptiques . . . . .	20
2.1.1	Inéquations variationnelles de première espèce . . . . .	21
2.1.2	Inéquations variationnelles de deuxième espèce . . . . .	22
2.1.3	Inéquations quasi-variationnelles . . . . .	23
2.2	Inéquations variationnelles paraboliques . . . . .	23
2.3	Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits . . . . .	24
2.4	Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire . . . . .	26
2.4.1	Opérateurs à mémoire . . . . .	26
2.4.2	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	26
2.5	Quelques inégalités élémentaires . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Modélisation des problèmes de contact</b>	<b>34</b>
3.1	Espaces fonctionnels en mécanique du contact . . . . .	35
3.1.1	Préliminaires . . . . .	35
3.1.2	Des espaces liés au champ des déplacements . . . . .	36
3.1.3	Des espaces liés au champ des contraintes . . . . .	38
3.1.4	Des espaces liés aux problèmes piézoélectriques . . . . .	39
3.1.5	Des espaces liés au champ des températures . . . . .	41
3.1.6	Des espaces liés à la densité des débris d'usure . . . . .	42
3.2	Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques	43
3.2.1	Cadre physique . . . . .	43
3.2.2	L'équation de mouvement . . . . .	44
3.2.3	Lois de comportement . . . . .	45
3.2.4	Conditions aux limites et lois de frottement . . . . .	52

3.3	Processus de contact avec adhésion . . . . .	58
3.4	Processus de contact avec usure . . . . .	61
3.5	Conditions thermiques . . . . .	64
3.6	Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques . . . . .	65
3.6.1	Cadre physique . . . . .	65
3.6.2	Lois de comportement . . . . .	67
3.6.3	Les conditions de contact . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Problèmes de contact sans frottement en thermoélasto-viscoplasticité</b>	<b>74</b>
4.1	Problème mécanique et hypothèses ( <b>cas dynamique</b> ) . . . . .	74
4.2	Formulation variationnelle . . . . .	80
4.3	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	82
4.4	Problème mécanique et hypothèses ( <b>cas quasi-statique</b> ) . . . . .	93
4.5	Formulation variationnelle . . . . .	97
4.6	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Problème de contact sans frottement en piézoélectricité</b>	<b>110</b>
5.1	Problème mécanique et hypothèses . . . . .	110
5.2	Formulation variationnelle . . . . .	118
5.3	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Problème de contact avec frottement en piézoélectricité avec effets</b>	
	<b>thermiques</b>	<b>136</b>
6.1	Problème mécanique et hypothèses . . . . .	136
6.2	Formulation variationnelle . . . . .	142
6.3	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	144



# Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact mécanique apparaissent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmission. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportement. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable ou lubrifiée. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (MTCM) a actuellement émergée. Elle concerne les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple [41, 53].

La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites de contact.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [24]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [20]. Des modèles généraux récents dans [22, 21, 25, 44] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction  $\beta$  ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque  $\beta = 1$ , il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque  $\beta = 0$ , le matériau est complètement endommagé et lorsque  $0 < \beta < 1$ , il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endommagement ont été étudiés dans [12, 40, 55].

Quant à l'usure, elle est l'une des principales cibles de la tribologie, cet effet est défini comme un processus de perte progressive de la matière des surfaces opérées des solides résultant de leur interaction de contact, par conséquent les dimensions du corps et sa masse diminuent par l'usure. Il peut y avoir plusieurs causes, tout d'abord, elle est provoquée par les ruptures du matériau sous des contraintes dans la processus de frottement, ou par les réactions chimiques et des processus électrochimiques. Alors l'étude des modèles qui introduisent l'usure a pour but, la réduction de l'énergie dans les processus de frottement et aussi les pertes de la matière dues à l'usure d'une part, et à l'augmentation de la durée de vie des composants et des pièces industrielles, d'autre part l'étude des modèles efficaces pour la prédiction de l'usure dans les milieux industriels est indispensable à l'ingénieur concepteur. Les modèles utilisés très fréquemment sont basés sur les observations d'Archard [6] où l'usure est identifiée comme une augmentation de l'écart entre le corps et la fondation. L'inclusion de l'usure dans des modèles mathématiques est récente et peut être trouvée dans [4, 26, 32],

comme il existe aussi une littérature abondante sur le sujet dans [37, 42, 47, 49, 61].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué.

Les matériaux piézoélectriques, pour lesquels les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques sont appelés "les matériaux électro-élasto-viscoplastiques". Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [10, 40]. Un problème de contact avec "slip-dependent" pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [56], un autre problème les matériaux électro-élasto-viscoplastiques a été étudié dans [28]. Des problèmes de contact sans frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques ont été étudiés dans [7, 57] en prenant une fondation isolante.

Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques. Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la théorie mathématique du contact mécanique (MTCM) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Un autre phénomène sera considéré dans cette thèse, il s'agit du phénomène de contact avec l'effet thermique. Les processus de contact et de frottement s'accompagnent invariablement d'une production de la chaleur qui peut être considérable. A titre d'exemple, le freinage brusque d'une voiture peut entraîner la dissipation d'une puissance importante sous forme de chaleur. L'effet thermique dans les processus de contact affecte la composition et la rigidité des surfaces et provoque des contraintes thermiques dans les corps en contact. La façon dont la chaleur affecte les propriétés

mécaniques d'une surface peut être partiellement prise en compte ( en supposant que le coefficient de frottement dépend de la température, voir [42]). Les modèles mathématiques en thermodynamique ont besoin de quatre éléments : la condition de production de la chaleur, la condition décrivant l'échange de la chaleur entre le corps et la fondation, la relation constitutive et l'équation de l'énergie. Ces modèles ont été développés récemment dans [5, 21, 26, 37, 60].

L'objectif de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. A cet effet nous considérons des différentes lois de comportement telles que : thermo-élasto-viscoplastiques, thermo-électro-viscoplastiques et thermo-électro-viscoélastiques. Nous avons étudié des problèmes de contact avec et sans frottement dans un processus dynamique ou quasistatique avec des conditions aux limites, pour lesquelles nous couplons effet thermique et adhésion ou effet électrique. Pour chacun de ces problèmes, nous donnons la formulation variationnelle, ensuite l'existence et l'unicité de la solution faible. La thèse est divisée en deux parties.

La première partie comporte les chapitres 1 et 2 et représente une brève introduction à l'étude des inéquations variationnelles. Le matériel présenté ici a été sélectionné en mettant l'accent sur les outils mathématiques utiles nécessaires à l'étude des problèmes de contact. Plus spécifiquement, le Chapitre 1 est dédié à quelques éléments d'analyse fonctionnelle et d'analyse non linéaire. Dans le chapitre 2, nous évoquons quelques résultats issus de la théorie des inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, équations d'évolution, les inéquations quasi-variationnelles avec terme mémoire et le lemme de Gronwall.

La deuxième partie contient les chapitres 3 à 6 et représente la partie principale de cette thèse. Elle est consacrée à la modélisation et à l'analyse des problèmes de contact avec ou sans frottement.

Le chapitre 3 est basé essentiellement sur la modélisation des différents problèmes de contact. Nous présentons le cadre physique, les lois de comportement de nature thermo-

élasto-viscoplastique, électro-élasto-viscoélastique et électro-thermo-élasto-viscoplastique considérées dans les problèmes de contact. Nous décrivons aussi les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans les problèmes de contact envisagés.

Le chapitre 4 porte sur l'étude mathématique de deux modèles mathématiques décrivant le contact sans frottement entre un corps thermo-élasto-viscoplastique et une base. Dans le premier modèle le processus est supposé dynamique et dans le deuxième modèle il est quasi-statique. Le contact est décrit par une condition de compliance normale sans frottement. Les matériaux sont modélisés par une loi constitutive générale de nature thermo-élasto-viscoplastique avec variable interne. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution moyennant les techniques de point fixe et des équations d'évolution d'ordre un avec des opérateurs monotones.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement entre un matériau piézoélectrique avec variable interne d'état en considération un effet thermique et une base adhésive et conductrice où le processus est mécaniquement dynamique et électriquement statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale où l'adhésion est prise en considération et une condition de conductivité électrique régularisée. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps thermo-électro-viscoélastique et une fondation électriquement conductrice. Le contact est modélisé par une condition modifiée de Signorini et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système triplé en termes de champs de déplacement, du potentiel électrique et de champ des températures. Aussi nous établissons un résultat d'existence d'une solution faible pour le modèle. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [54].

La nouveauté dans ce travail réside dans :

- 1) le choix des lois constitutives avec variable interne d'état, effet électrique et effet thermique.
- 2) le choix d'un contact sans frottement avec une base conductrice et adhésive (voir chapitre 5).
- 3) le choix d'un contact avec frottement avec une base conductrice et adhésive et l'introduction de l'adhésion dans les conditions aux limites de frottement ce qui donne une version originale de la loi de Coulomb avec adhésion.
- 4) finalement l'application de la théorie des inéquations quasi-variationnelles à mémoires (history-dependent) pour la résolution des problèmes de contact.

# Notations

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ ,
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière,
mes $\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ ,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie mesurable de $\Gamma$ ,
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ ,
$v_\nu, v_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel $v$ ,
$\sigma_\nu, \sigma_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\sigma$ ,
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\Omega$ ,
$H$	l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)^d$ ,
$\mathcal{Q}$	l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)_s^{d \times d}$ ,
$H_1$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ ,
$\mathcal{Q}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{Q} / Div \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $X$  est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de $X$ ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	le produit de dualité entre $X'$ et $X$ ,
$ \cdot _X$	la norme de $X$ ,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $X$ ,
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $X$ .

Si de plus  $[0, T]$  est un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $H$ ,
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans $H$ ,
$\mathbb{L}^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ dans $H$ ,
$ \cdot _{\mathbb{L}^p(0, T; H)}$	la norme de $\mathbb{L}^p(0, T; H)$ ,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres $k$ et $p$ ,
$ \cdot _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ ,
$\bar{I} = [0, T]$	intervalle du temps, et $I = (0, T)$ .

Pour une fonction  $f$  ; on note par

$\dot{f}, \ddot{f}$  les dérivées première et seconde de  $f$  par rapport au temps,  
 $\text{dom } f$  le domaine de  $f$ ;  
 $\text{supp } f$  le support de  $f$ ,  
 $\partial_i f, f_{,i}$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i$ ème composante  $x_i$ ,  
 $\nabla f$  le gradient de  $f$ ,  
 $\text{Div } f$  la divergence de  $f$ ,  
 $\varepsilon(f)$  la partie symétrique du gradient de  $f$ ,  
 $\partial f$  le sous différentiel de  $f$ ,  
 $\text{div } f$  la divergence de vecteur  $f$ .

#### Autre notations

$\liminf$  la limite inférieure,  
 $\limsup$  la limite supérieure,  
 $D(\Omega)$  l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,  
 $D(\Omega)^d = \{\varphi = (\varphi_i), \varphi_i \in D(\Omega), i = \overline{1, d}\},$   
 $C_0^\infty(\Omega)^d = \{f \in C^\infty(\Omega)^d, f = 0 \text{ sur } \Gamma\},$   
 $\mathbb{S}^d$  espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur  $\mathbb{R}^d$  c'est à dire  $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d},$   
 $" \cdot "$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d,$   
 $" |\cdot| "$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d,$   
 $C$  une constante générique strictement positive,  
 $\Lambda^n$  puissance  $n$  de l'opérateur  $\Lambda,$   
 $p.p.$  presque partout,  
 $\chi_K$  fonction indicatrice de  $K.$

# Chapitre 1

## Préliminaires sur l'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans cette thèse. Il nous est paru utile de donner quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels, le théorème de point fixe de Banach et un résultat de point fixe qui s'adapte aux inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire et pour plus de détails voir [1, 13, 53]. Finalement, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert.

## 1.1 Espaces normés

Soit  $X$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.1.** Une application  $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée *norme* si, et seulement si :

1.  $|u|_X \geq 0 \ \forall u \in X$  et  $|u|_X = 0 \Rightarrow u = 0_X$ . (Positivité et séparation)
2.  $|\alpha u|_X = |\alpha| |u|_X \ \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . (Homogénéité)
3.  $|u + v|_X \leq |u|_X + |v|_X \ \forall u, v \in X$ . (Inégalité triangulaire)

**Définition 1.1.2.** On appelle *espace vectoriel normé* un espace  $X$  muni d'une norme  $|\cdot|_X$ .

Passons maintenant à la notion d'espace vectoriel normé complet.

**Définition 1.1.3.** Un espace normé  $E$  est dit *complet* si toutes les suites de Cauchy de  $E$  convergent dans  $E$ . Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Nous présentons dans ce qui suit un type particulier d'espace normé, dans lequel la norme est définie d'une manière spéciale.

**Définition 1.1.4.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel, on appelle *produit scalaire* sur  $X$  toute forme bilinéaire symétrique définie positive autrement dit, toute application  $(\cdot, \cdot)_X$  de  $X \times X$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

1.  $(u, u)_X \geq 0$  et si  $(u, u)_X = 0$  alors  $u = 0_X \ \forall u \in X$ .
2.  $(u, v)_X = (v, u)_X \ \forall u, v \in X$ .
3.  $(\alpha u + \beta v, w)_X \leq \alpha(u, w)_X + \beta(v, w)_X \ \forall u, v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.5.** On appelle *espace préhilbertien réel* un espace vectoriel  $X$  muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ .

Il est bien connu qu'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  permet de définir une norme par la relation

$$|u|_X = \sqrt{(u, u)_X} \quad \forall u \in X.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)_X| \leq |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

De plus, l'égalité du parallélogramme est satisfaite

$$|u + v|_X^2 + |u - v|_X^2 = 2(|u|_X^2 + |v|_X^2) \quad \forall u, v \in X.$$

Parmi les espaces de produits scalaire, il y a une importance particulière pour les espaces de Hilbert.

**Définition 1.1.6.** Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associé à son produit scalaire.

**Théorème 1.1.1 (Représentation de Riesz).** Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $f \in H'$ . Alors il existe un et un seul élément  $T_f \in H$  tel que

$$\langle f, g \rangle = (T_f, g)_H \quad \forall g \in H.$$

De plus on a

$$|f|_{X'} = |T_f|_X.$$

**Preuve.** Pour une démonstration, voir ([13], page 81 – 82)

## 1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Pour plus de détail, voire par exemple [13, 20].

Étant donné un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_d)$  un élément de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  un multi-indice tel que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

### 1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables

On note par  $C(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .  $C(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\} = \max\{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Pour  $m \geq 0$ , l'espace  $C^m(\overline{\Omega})$  défini par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

Il est l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$  dont les dérivées d'ordre au plus  $m$  sont également continues sur  $\overline{\Omega}$ .

L'espace  $C^m(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs,  $C^\infty(\overline{\Omega})$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m = 0, 1, \dots\}.$$

Soit  $v$  une fonction dans  $\Omega$ , le support de  $v$  est défini par

$$\text{supp } v = \overline{\{v \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Si  $\text{supp } v$  est un sous-ensemble propre de  $\Omega$ , on dit que  $v$  est une fonction à support compact dans  $\Omega$ .

L'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact est donné par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

### 1.2.2 Espaces de Lebesgue $L^p$

Pour  $p \in [1, \infty[$ ,  $L^p(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ Lebesgue mesurable et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach, dont la norme est donné par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = \infty$  et  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable, alors

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |v(x)| = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est aussi un espace de Banach.

### 1.2.3 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. On renvoie le lecteur aux ouvrages [1, 13, 20] pour plus de détails.

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, \infty]$ . Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace  $W^{k,p}(\Omega)$  est définie par

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  est un espace de Banach.

Pour  $p = 2$ ,  $W^{k,2}(\Omega)$  sera noté par  $H^k(\Omega)$ , qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

### 1.2.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

On aura besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorielles dans l'étude des problèmes variationnels dépendant du temps. Soit  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach. Dans les problèmes de contact étudiés dans cette thèse  $[0, T]$  désigne l'intervalle de temps où  $T > 0$ .

**Espaces  $C^m(0, T; X)$ .** Nous définissons  $C(0, T; X)$  l'espace des fonctions  $v : [0, T] \rightarrow$

$X$  qui sont continues sur l'intervalle  $[0, T]$ . Avec la norme

$$\|v\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} |v(t)|_X.$$

L'espace  $C(0, T; X)$  est un espace de Banach.

Pour  $m \geq 0$ , nous définissons l'espace

$$C^m(0, T; X) = \{v \in C(0, T; X) : v^{(j)} \in C(0, T; X), j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Il est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m \max_{t \in [0,T]} |v^{(j)}|_X.$$

En particulier,  $C^1([0, T]; X)$  désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ . C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} |v(t)|_X + \max_{t \in [0,T]} |\dot{v}(t)|_X.$$

Soit aussi

$$\begin{aligned} C^\infty(0, T; X) &= \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(0, T; X) \\ &\equiv \{v \in C(0, T; X) : v \in C^m(0, T; X), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}, \end{aligned}$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ .

**Espaces  $L^p(0, T; X)$ .** Pour  $p \in [1, \infty)$ , l'espace  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables  $v : [0, T] \rightarrow X$  telle que  $\int_0^T |v|_X^p dt < \infty$ . L'espace  $L^p(0, T; X)$

est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T |v(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace  $L^\infty(0, T; X)$  est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables  $v : [0, T] \rightarrow X$  telle que  $|v(t)|_X < \infty$ . Avec la norme

$$|v|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} |v(t)|_X,$$

l'espace  $L^\infty(0, T; X)$  est un espace de Banach.

Lorsque  $(X, (\cdot, \cdot))$  est un espace de Hilbert,  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

**Espaces  $W^{k,p}(0, T; X)$ .** Pour  $k \in \mathbb{Z}_+$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , nous présentons l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{v \in L^p(0, T; X) : |v^{(m)}|_{L^p(0,T;X)} < \infty, \forall m \leq k\}.$$

Lorsque  $p < \infty$ , nous définissons la norme dans l'espace  $W^{k,p}(0, T; X)$  par

$$|v|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left( \int_0^T \sum_{0 \leq m \leq k} |v^{(m)}(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque  $p = \infty$ , la norme est définie par

$$|v|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} = \max_{0 \leq m \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} |v^{(m)}(t)|_X.$$

Si  $X$  est un espace de Hilbert et  $p = 2$ , alors l'espace

$$H^k(0, T; X) \equiv W^{k,2}(0, T; X),$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0, T; X)} = \sum_{0 \leq m \leq k} \int_0^T (u^{(m)}(t), v^{(m)}(t))_X dt.$$

Pour plus détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur par exemple à [13].

### 1.3 Théorèmes de point fixe

Le théorème de point fixe de Banach sera utilisé plusieurs fois dans cette thèse pour prouver l'existence des solutions aux problèmes variationnels en mécanique du contact.

Soit  $X$  un espace de Banach avec la norme  $|\cdot|_X$  et  $K$  est un sous-ensemble non vide fermé de  $X$ . Soit  $\Lambda : K \rightarrow X$  est un opérateur défini sur  $K$ . Nous sommes intéressés par l'existence d'une solution  $u \in K$  de l'équation d'opérateur

$$\Lambda u = u. \tag{1.1}$$

Un élément  $u \in K$  qui satisfait (1.1) est appelé un *point fixe* de l'opérateur  $\Lambda$ .

Nous présentons dans ce qui suit le théorème principal qui énonce l'existence des points fixes des opérateurs non linéaires.

**Théorème 1.3.1. (Point fixe de Banach).** Soit  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach. Soit  $K$  un sous-ensemble non vide fermé de  $X$ . Supposons que  $\Lambda : K \rightarrow K$  est une

contraction, c'est-à-dire il existe une constant  $\alpha \in [0, 1)$  telle que

$$|\Lambda u - \Lambda v|_X \leq \alpha |u - v|_X \quad \forall u, v \in K. \quad (1.2)$$

Alors il existe unique  $u \in K$  tel que  $\Lambda u = u$ .

**Preuve.** Soit  $u_0 \in K$  un élément quelconque de  $K$  et soit  $\{u_n\}$  la suite définie par

$$u_{n+1} = \Lambda u_n \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Car  $\Lambda : K \rightarrow K$ , la suite  $\{u_n\}$  est bien définie. Montrons d'abord que  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy. En utilisant le fait que  $\Lambda$  est une contraction, nous avons

$$|u_{n+1} - u_n|_X \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|_X \leq \dots \leq \alpha^n |u_1 - u_0|_X.$$

Alors pour tout  $m > n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |u_m - u_n|_X &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} |u_{n+j+1} - u_{n+j}|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^{n+j} |u_1 - u_0|_X \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |u_1 - u_0|_X. \end{aligned}$$

Comme  $\alpha \in [0, 1)$ , on résulte que

$$|u_m - u_n|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad m, n \rightarrow \infty$$

Ainsi,  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy et a une limite  $u \in K$ , puisque  $K$  est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach  $X$ . De plus, puisque  $u_n \rightarrow u$  dans  $K$ , il résulte de (1.2) que  $\Lambda u_n \rightarrow \Lambda u$  dans  $X$ . Par conséquent, en prenant la limite dans  $u_{n+1} = \Lambda u_n$  on obtient  $u = \Lambda u$ , ce qui conclut la partie d'existence du théorème.

Supposons que  $u_1, u_2 \in K$  sont des points fixes de  $\Lambda$ . Alors de  $u_1 = \Lambda u_1$  et  $u_2 = \Lambda u_2$  nous avons

$$u_1 - u_2 = \Lambda u_1 - \Lambda u_2,$$

et comme  $\Lambda$  est une contractante

$$|u_1 - u_2|_X = |\Lambda u_1 - \Lambda u_2|_X \leq \alpha |u_1 - u_2|_X,$$

ce qui implique que  $|u_1 - u_2|_X = 0$ , car  $\alpha \in [0, 1)$ . Donc, si  $\Lambda$  admet un point fixe, il en résulte que ce point fixe est unique, ce qui conclut la preuve. ■

Nous avons besoin d'une version du théorème de point fixe de Banach que nous rappelons dans ce qui suit. Pour un opérateur  $\Lambda$ , nous définissons  $\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1})$  pour  $m \geq 2$ .

**Théorème 1.3.2.** Supposons que  $K$  est un sous-ensemble non vide fermé d'un espace de Banach  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow K$ . Supposons que  $\Lambda^m : K \rightarrow K$  est une contraction pour un entier positif  $m$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique.

**Preuve.** D'après Théorème 1.3.1,  $\Lambda^m$  a un point fixe unique  $u \in K$ . De  $\Lambda^m(u) = u$ , on obtient

$$\Lambda^m(\Lambda u) = \Lambda(\Lambda^m u) = \Lambda u.$$

Ainsi  $\Lambda u \in K$  est aussi un point fixe de  $\Lambda^m$ , où  $\Lambda^m$  admet un point fixe unique nous avons

$$\Lambda u = u,$$

c'est-à-dire  $u$  est un point fixe de  $\Lambda$ . L'unicité du point fixe de  $\Lambda$  est une conséquence de l'unicité du point fixe de  $\Lambda^m$ . ■

Nous présentons maintenant un résultat de point fixe qui est utile pour la résolution des inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire.

**Proposition 1.3.1.** Soit  $\Lambda : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$  un opérateur satisfait la

propriété suivante : il existe  $k \in [0, 1)$  et  $c \geq 0$  tels que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X \leq k|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds$$

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Alors il existe un élément unique  $\eta^* \in C(0, T; X)$  tel que  $\Lambda\eta^* = \eta^*$ .

**Preuve.** On note par

$$|\eta|_\beta = \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} |\eta(t)|_X \quad \forall \eta \in C(0, T; X), \quad (1.4)$$

avec  $\beta > 0$  d'être choisi plus tard. Il est clair que  $|\cdot|_\beta$  définit une norme sur l'espace  $C([0, T], X)$  qui est équivalente à la norme usuelle  $|\cdot|_{C([0, T]; X)}$ . Par conséquence, il en résulte que  $C([0, T]; X)$  est un espace de Banach avec la norme  $|\cdot|_\beta$  aussi. Soit  $t \in [0, T]$ , en utilisant (1.3) et (1.4), il en résulte que

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X &\leq k e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c e^{-\beta t} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds \\ &= k e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c e^{-\beta t} \int_0^t (e^{-\beta s} |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X) e^{\beta s} ds \\ &\leq k |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta + c e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta \int_0^t e^{\beta s} ds \\ &= k |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta + \frac{c}{\beta} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta (1 - e^{-\beta t}), \end{aligned}$$

pour tout  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X)$ . Donc

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_\beta \leq \left(k + \frac{c}{\beta}\right) |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X).$$

Ensuite, nous choisissons  $\beta$  tel que  $\beta > \frac{c}{1-k}$ , ce choix est possible car  $k \in [0, 1)$ .

Alors  $k + \frac{c}{\beta} < 1$  et par conséquent, l'opérateur  $\Lambda$  est une contraction sur l'espace  $C([0, T]; X)$  muni de la norme  $|\cdot|_\beta$ . D'après Théorème 1.3.1, l'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in C(0, T; X)$ , ce qui conclut la preuve. ■

## 1.4 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section nous allons rappeler quelques notions d'analyse non linéaire qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail. En particulier des résultats sur les opérateurs monotones, les fonctions convexes et semi-continues inférieurement, la différentiabilité et sous différentiabilité.

### 1.4.1 Opérateurs linéaires

Soient  $(X, |\cdot|_X)$  et  $(Y, |\cdot|_Y)$  deux espaces normés et soit  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur.

Un opérateur  $L : X \rightarrow Y$  est *linéaire* si

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Un opérateur linéaire est *continu* si et seulement s'il est borné, c'est-à-dire il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$|L(v)|_Y \leq M|v|_X \quad \forall v \in X.$$

Nous utiliserons la notation  $\mathcal{L}(X, Y)$  pour l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de  $X$  dans  $Y$ . Pour  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ , la quantité

$$|L|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|Lv|_Y}{|v|_X} \tag{1.5}$$

---

est appelée l'*opérateur norme* de  $L$  et  $L \rightarrow |L|_{\mathcal{L}(X,Y)}$  définit une norme sur l'espace  $\mathcal{L}(X, Y)$ . De plus, si  $Y$  est un espace de Banach alors  $\mathcal{L}(X, Y)$  est aussi un espace de Banach. Pour un opérateur linéaire  $L$ , nous écrivons habituellement  $L(v)$  comme  $Lv$ , mais parfois, nous écrivons aussi  $Lv$  même lorsque  $L$  n'est pas linéaire.

Pour un espace normé  $X$ , l'espace  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  est appelé l'*espace dual* de  $X$  et il est désigné par  $X'$ . Les éléments de  $X'$  sont des fonctionnelles continues et linéaires sur  $X$ . Le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$  est généralement désigné par  $l(v)$  ou  $\langle v', v \rangle$  ou  $\langle v', v \rangle_{X' \times X}$  pour  $v' \in X'$  et  $v \in X$ . Il résulte de (1.5) qu'une norme sur  $X'$  est donnée par

$$|l|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|l(v)|}{|v|_X}, \quad (1.6)$$

et  $(X', |\cdot|_X)$  est toujours un espace de Banach.

## 1.4.2 Opérateurs non linéaires

**Définition 1.4.1.** Soit  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme  $|\cdot|_X$  et soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur.

L'opérateur  $A$  est dit *monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

L'opérateur  $A$  est *strictement monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, \quad u \neq v.$$

L'opérateur  $A$  est dit *fortement monotone* s'il existe  $m > 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X.$$

L'opérateur  $A$  est de *Lipschitz* s'il existe  $M > 0$  tel que

$$|Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, nous considérons les opérateurs définis sur un espace normé avec des valeurs dans son dual. En notant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pour le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ , une extension de la Définition 1.4.1 pour ce cas est la suivante.

**Définition 1.4.2.** Soit  $X$  un espace normé et soit  $X'$  son dual. Un opérateur  $A : X \rightarrow X'$  est dit *monotone* si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.7)$$

L'opérateur  $A : X \rightarrow X'$  est dit *hémicontinu* si l'application  $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$  est continu sur  $[0, 1]$  pour tout  $u, v, w \in X$ .

Soit maintenant  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire.

**Définition 1.4.3.** La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est dite

- *continue* s'il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$a(u, v) \leq M|u|_X|v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

- *X-elliptique* s'il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$a(v, v) \geq m|v|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

- *symétrique* si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

### 1.4.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

---

**Définition 1.4.4.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel et soit la fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . On dit que la fonction  $\varphi$  est *propre* si  $\varphi(v) > -\infty$  pour tout  $v \in X$  et  $\varphi(u) < \infty$  pour certains  $u \in X$ . La fonction  $\varphi$  est *convexe* si

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v), \quad (1.8)$$

pour tout  $u, v \in X$  et  $t \in [0, T]$ . La fonction  $\varphi$  est *strictement convexe* si l'inégalité (1.8) est stricte pour  $u \neq v$  et  $t \in (0, 1)$ .

Notons que si  $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  sont des fonctions convexes et  $\lambda \geq 0$ , alors les fonctions  $\varphi + \psi$  et  $\lambda\varphi$  sont aussi convexes.

**Définition 1.4.5.** Une fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) en  $u \in X$  si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u), \quad (1.9)$$

pour chaque suite  $\{u_n\} \subset X$  convergente vers  $u$  dans  $X$ . La fonction  $\varphi$  est *s.c.i.* si elle est s.c.i. en chaque point  $u \in X$ . Lorsque l'inégalité (1.9) est vérifiée pour toute suite  $\{u_n\} \subset X$  qui converge faiblement vers  $u$ , on dit que la fonction  $\varphi$  est faiblement semi-continue inférieurement à  $u$ . La fonction  $\varphi$  est faiblement s.c.i. si elle est faiblement s.c.i. en chaque point  $u \in X$ .

Notons que si  $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  sont des fonctions s.c.i. et  $\lambda \geq 0$ , alors les fonctions  $\varphi + \psi$  et  $\lambda\varphi$  sont aussi s.c.i. De plus, si  $\varphi$  est une fonction continue, alors elle est aussi s.c.i. Cependant, l'inverse n'est pas vrai puisque la semi-continuité inférieure n'implique pas la continuité.

Comme la convergence forte dans  $X$  implique la convergence faible, il en résulte qu'une fonction faiblement semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement. De plus, on peut montrer qu'une fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  propre et convexe est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

**Exemple 1.4.1.** (Fonction indicatrice) Soient  $X$  un espace réel normé et  $K \subset X$ . On appelle fonction indicatrice de  $K$  la fonction  $\psi_K : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  définie par :

$$\psi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \in K, \\ +\infty & \text{if } v \notin K. \end{cases} \quad (1.10)$$

On peut démontrer que  $K$  est un ensemble non vide, fermé et convexe de  $X$  si et seulement si la fonction indicatrice  $\psi_K$  est propre, convexe et s.c.i.

#### 1.4.4 Différentiabilité et sous différentiabilité

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions Gâteaux-différentiables.

**Définition 1.4.6.** Soient  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espace préhilbertien,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u \in X$ . Alors  $\varphi$  est Gâteaux-différentiable au point  $u$  s'il existe un élément  $\nabla\varphi(u) \in X$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.11)$$

L'élément  $\nabla\varphi(u)$  qui satisfait (1.11) est unique et s'appelle le *gradient* de  $\varphi$  en  $u$ . La fonction  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *Gâteaux-différentiable* si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de  $X$ . Dans ce cas, l'opérateur  $\nabla\varphi : X \rightarrow X$  qui associe chaque élément  $u \in X$  par l'élément  $\nabla\varphi(u)$  est appelé l'*opérateur gradient* de  $\varphi$ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée comme suit.

**Proposition 1.4.1.** Soit  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espace préhilbertien et soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Gâteaux-différentiable. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i)  $\varphi$  est une fonction convexe ;
- (ii)  $\varphi$  satisfait l'inégalité

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.12)$$

(iii) le gradient de  $\varphi$  est un opérateur monotone

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.13)$$

**Corollaire 1.4.1.** Soit  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  un espace préhilbertien et soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors  $\varphi$  est semi-continue inférieurement.

**Définition 1.4.7.** Soit  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  et soit  $u \in X$ . Le sous-différentiel de  $\varphi$  en  $u$  est l'ensemble

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}. \quad (1.14)$$

On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \quad (1.15)$$

La Fonction  $\varphi$  est dite sous-différentiable en  $u \in X$  si  $u \in D(\partial\varphi)$ , et chaque élément  $f \in \partial\varphi(u)$  s'appelle sous-gradient de  $\varphi$  en  $u$ . La fonction  $\varphi$  est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de  $X$ , c'est-à-dire si  $D(\partial\varphi) = X$ .

On peut montrer qu'une fonction  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  sous-différentiable est convexe et semi-continue inférieurement. En outre, pour les fonctions convexes, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par le résultat suivant.

**Proposition 1.4.2** Soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et Gâteaux différentiable. Alors  $\varphi$  est sous-différentiable et  $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$  pour tout  $u \in X$ .

**Exemple 1.4.2.** (Sous-différentiel de la fonction indicatrice) Soit  $X$  un espace normé réel et soit  $K \subset X$  un ensemble convexe. Considérons le sous-différentiel de la fonction d'indicateur  $\psi_K$  définie dans l'exemple 1.4.1, et on suppose que  $u \in K$ . Alors  $u' \in \partial\psi_K$  si et seulement si

$$\psi_K(u) \geq \langle u', v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

c'est-à-dire

$$\langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Ainsi, pour  $u \in K$  nous avons

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

et pour  $u \notin K$ , nous avons  $\partial\psi_K(u) = \emptyset$ .

Nous avons toujours  $0 \in \partial\psi_K(u)$  pour  $u \in K$ . On voit facilement que si  $u \in \text{int}(K)$  (l'intérieur de  $K$ ) alors  $\partial\psi_K(u) = \{0\}$ .

# Chapitre 2

## Inéquations variationnelles et équations d'évolution

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques résultats standards d'existence et d'unicité pour des inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, des équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits et les inéquations quasi-variationnelles dans le cadre des opérateurs à mémoire. Ces résultats seront nécessaires dans ce qui suit et pour plus de détails voir [58]. Dans ce chapitre,  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et la norme associée  $|\cdot|_X$ .

### 2.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions concernant les inéquations variationnelles elliptiques avec des opérateurs monotones. Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce, puis nous passons aux équations variationnelles elliptiques de deuxième espèce, ainsi que les inéquations quasi-variationnelles

elliptiques.

### 2.1.1 Inéquations variationnelles de première espèce

Étant donné un opérateur  $A : X \rightarrow X$ , un sous-ensemble  $K \subset X$  et un élément  $f \in X$ , nous considérons le problème de trouver un élément  $u$  tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.1)$$

Une inéquation de la forme (2.1) s'appelle *inéquation variationnelle elliptique de première espèce*.

Nous avons le résultat standard suivant d'existence et d'unicité de la solution.

**Théorème 2.1.1** Soit  $X$  un espace de Hilbert et soit  $K \subset X$  un sous-ensemble fermé non vide et convexe. Supposons que  $A : K \rightarrow X$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout  $f \in X$  l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique.

Supposons maintenant que  $K = X$ . Puis, en prenant  $v = u \pm w$ , il est facile de voir que l'inéquation variationnelle (2.1) est équivalente à l'équation variationnelle

$$(Au, w)_X = (f, w)_X \quad \forall w \in X.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant dans l'étude des équations non linéaires impliquant des opérateurs monotones.

**Théorème 2.1.2.** Soit  $X$  un espace de Hilbert et soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout  $f \in X$  il existe un élément unique  $u \in X$  tel que  $Au = f$ .

Le corollaire précédent représente un cas particulier du théorème de Minty Browder (voir par exemple [13] page 88).

### 2.1.2 Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Étant donné un ensemble  $K \subset X$ , un opérateur  $A : K \rightarrow X$ , une fonction  $j : K \rightarrow \mathbb{R}$  et un élément  $f \in X$ , nous considérons le problème de trouver un élément  $u$  tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.2)$$

Une inéquation variationnelle de la forme (2.2) est appelée *inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce*. Dans le cas particulier lorsque  $j \equiv 0$ , l'inéquation variationnelle (2.2) représente une inéquation variationnelle de la forme (2.1), c'est-à-dire une inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

Dans l'étude de (2.2) nous supposons les hypothèses suivantes :

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe non vide de } X, \quad (2.3)$$

$A : K \rightarrow X$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{b) Il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad |Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$j : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.} \quad (2.5)$$

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

**Théorème 2.1.3.** Soit  $X$  un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.3)-(2.5) sont vérifiées. Alors pour tout  $f \in X$  l'inéquation variationnelle elliptique (2.2) admet une solution unique.

### 2.1.3 Inéquations quasi-variationnelles

Pour les inéquations variationnelles étudiées dans cette sous-section nous considérons que la fonction  $j$  dépend de la solution elle-même. Par conséquent, étant donné un sous-ensemble  $K \subset X$ , un opérateur  $A : K \rightarrow X$ , une fonction  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  et un élément  $f \in X$ , nous considérons le problème de trouver un élément  $u$  tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.6)$$

Une inéquation de la forme (2.6) est appelée *inéquation quasi-variationnelle elliptique*.

Dans l'étude de (2.6), en plus de (2.3) et de (2.4), nous considérons l'hypothèse suivante sur la fonction  $j$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Pour tout } \eta \in K, \quad j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i.} \\ b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \alpha |\eta_1 - \eta_2|_X |v_1 - v_2|_X \\ \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.6).

**Théorème 2.1.4.** Soit  $X$  un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.7) sont satisfaites. De plus, supposons que  $m > \alpha$  où  $m > 0$ . Alors, pour tout  $f \in X$  l'inéquation quasi-variationnelle (2.6) admet une solution unique.

## 2.2 Inéquations variationnelles paraboliques

Soient  $V$  et  $H$  des espaces de Hilbert réels tels que  $V$  est dense dans  $H$  et l'injection de  $V$  dans  $H$  est continue,  $H$  est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual  $V'$  de  $V$ , c'est-à-dire

$$V \subset H \subset V',$$

cette inclusion définit un triplet de Gelfand. Les notations  $|\cdot|_V$ ,  $|\cdot|_{V'}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times V'}$  représentent les normes sur les espaces  $V$  et  $V'$  et la dualité entre  $V'$  et  $V$ , respectivement.

Un résultat standard pour les inéquations variationnelles paraboliques est donné par le théorème suivant, pour plus de détails sur le sujet voir par exemple [60].

**Théorème 2.2.1.** Soit  $V \subset H \subset V'$  un triplet de Gelfand. Soit  $K$  un ensemble non vide, fermé et convexe de  $V$ . Supposons que  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire continue et symétrique telle que pour certaines constantes  $\alpha > 0$  et  $c_0$ ,

$$a(v, v) + c_0|v|_H^2 \geq \alpha|v|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , il existe une fonction unique  $u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$  telle que

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

## 2.3 Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits

Le résultat sera utilisé dans l'étude des problèmes dynamiques présentés dans les chapitres 4 et 5.

**Théorème 2.3.1.** Soit  $V \subset H \subset V'$  un triplet de Gelfand et soit  $A : V \rightarrow V'$  un

opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \omega |u|_V^2 + \lambda \quad \forall u \in V, \quad (2.8)$$

$$|Au|_{V'} \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V, \quad (2.9)$$

où les constantes  $\omega > 0$ ,  $c > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une fonction unique  $u$  qui satisfait

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Nous rappelons aussi le théorème classique de Cauchy-Lipschitz.

**Théorème 2.3.2.** Supposons que  $(X, |\cdot|_X)$  est un espace de Banach réel. Soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $(0, T)$  qui satisfait aux conditions suivantes :

-Il existe  $L_F > 0$  tel que  $|F(t, u) - F(t, v)|_X \leq L_F |u - v|_X \quad \forall u, v \in X, \quad \text{p.p. } t \in (0, T)$ .

-Il existe  $1 \leq p \leq \infty$  tel que  $t \rightarrow F(t, v) \in L^p(0, T; X) \quad \forall v \in X$ .

Alors, pour tout  $u_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $u \in W^{1,p}(0, T; X)$  telle que

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= F(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Ce théorème sera utilisé aux chapitres 5 pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution des problèmes intermédiaires impliquant le champ d'adhésion.

## 2.4 Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire

Dans cette section, nous introduisons le concept et un résultat d'existence et d'unicité des inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire.

### 2.4.1 Opérateurs à mémoire

Soient  $(X, |\cdot|_X)$  et  $(Y, |\cdot|_Y)$  deux espaces vectoriels normés et un opérateur  $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$ . L'opérateur  $\mathcal{S}$  est un opérateur de mémoire si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } r_s > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) |_Y \leq r_s \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Un exemple d'opérateur  $\mathcal{S}$  qui satisfait (2.10) dans le cas où  $Y = X$  est donné par  $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$  tel que

$$\mathcal{S}v(t) = \int_0^t v(s)ds + u_0, \quad \forall u \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T].$$

et  $u_0 \in X$

### 2.4.2 Résultat d'existence et d'unicité

Soit  $X$  un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et la norme associée  $|\cdot|_X$  et  $Y$  un espace normé avec la norme  $|\cdot|_Y$ . Soit  $K$  un sous-ensemble de  $X$ , nous considérons les opérateurs  $A : K \rightarrow X$ ,  $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$ , les fonctions  $\varphi : Y \times K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : [0, T] \rightarrow X$ . Nous sommes intéressées par le

problème de trouver une fonction  $u \in C(0, T; X)$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
 u(t) \in K, \quad (Au(t), v - u(t))_X + \varphi(\mathcal{S}u(t), v) - \varphi(\mathcal{S}u(t), u(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), u(t)) \\
 \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

L'inégalité (2.11) représente une inéquation variationnelle dépendant du temps gouvernée par deux fonctions  $\varphi$  et  $j$  qui dépendent de la solution, et par conséquent, (2.11) représente une *inéquation quasi-variationnelle avec des opérateurs à mémoire*.

Dans l'étude de (2.11), nous supposons que

$$K \text{ est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de } X. \tag{2.12}$$

$A : K \rightarrow X$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\
 \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m|u_1 - u_2|_X^2 \quad \forall u_1, u_2 \in K. \\
 (b) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\
 \quad |Au_1 - Au_2| \leq M|u_1 - u_2|_X \quad \forall u_1, u_2 \in K.
 \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Les fonctions  $\varphi : Y \times K \rightarrow \mathbb{R}$  et  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Pour tout } y \in Y, \varphi(y, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i. sur } K. \\
 (b) \text{ Il existe } \beta \geq 0 \text{ tel que} \\
 \quad \varphi(y_1, u_2) - \varphi(y_1, u_1) + \varphi(y_2, u_1) - \varphi(y_2, u_2) \leq \beta|y_1 - y_2|_Y|u_1 - u_2|_X \\
 \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \forall u_1, u_2 \in K.
 \end{array} \right. \tag{2.14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ Pour tout } u \in K, j(u, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i. sur } K. \\
 (b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\
 \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha|u_1 - u_2|_X|v_1 - v_2|_X \\
 \quad \forall u_1, u_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in K.
 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

De plus, nous supposons que

$$m > \alpha, \tag{2.16}$$

où  $m$  et  $\alpha$  sont les constantes dans (2.13) et (2.15), respectivement.

L'opérateur  $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } r_s > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)|_Y \leq r_s \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Finalemment, nous supposons que

$$f \in C(0, T; X). \tag{2.18}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant.

**Théorème 2.4.1.** Supposons que les hypothèses (2.12)-(2.18) sont vérifiées. Alors l'inéquation variationnelle (2.11) admet une solution unique  $u \in C(0, T; K)$ .

La démonstration du théorème 2.4.1 est basée sur un argument de point fixe et sera établie en plusieurs étapes. Dans la première étape soit  $\eta \in C(0, T; X)$  donné et on note par  $y_\eta \in C(0, T; Y)$  la fonction

$$y_\eta(t) = \mathcal{S}\eta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.19}$$

Considérons maintenant le problème de trouver une fonction  $u_\eta : [0, T] \rightarrow X$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$  l'inéquation ci-dessous est vérifiée.

$$\begin{aligned} u_\eta(t) \in K, \quad & (Au_\eta(t), v - u_\eta(t))_X + \varphi(y_\eta(t), v) - \varphi(y_\eta(t), u_\eta(t)) \\ & + j(\eta(t), v) - j(\eta(t), u_\eta(t)) \geq (f(t), v - u_\eta(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Lemme 2.4.1.** Le problème (2.20) admet une solution unique  $u_\eta \in C(0, T; K)$ .

**Preuve.** Les hypothèses (2.12), (2.13), (2.14) (a), (2.15) (a) et (2.18) avec le théorème 2.1.3 nous donne l'existence d'un élément unique  $u_\eta(t)$  solution de (2.20), pour tout  $t \in [0, T]$ . Montrons maintenant que  $u_\eta : [0, T] \rightarrow K$  est continue, pour cela on considère  $t_1, t_2 \in [0, T]$ . Pour simplifier l'écriture, nous notons  $u_\eta(t_i) = u_i$ ,  $\eta_i(t_i) = \eta_i$ ,  $y(t_i) = y_i$ ,  $f(t_i) = f_i$  pour  $i = 1, 2$ . Par (2.20) nous avons

$$\begin{aligned} u_1 \in K, \quad & (Au_1, v - u_1)_X + \varphi(y_1, v) - \varphi(y_1, u_1) \\ & + j(\eta_1, v) - j(\eta_1, u_1) \geq (f_1, v - u_1)_X \quad \forall v \in K, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} u_2 \in K, \quad & (Au_2, v - u_2)_X + \varphi(y_2, v) - \varphi(y_2, u_2) \\ & + j(\eta_2, v) - j(\eta_2, u_2) \geq (f_2, v - u_2)_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On prend  $v = u_2$  dans (2.21) et  $v = u_1$  dans (2.22), puis par addition de deux inéquations nous trouvons que

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X &\leq \varphi(y_1, u_2) - \varphi(y_1, u_1) + \varphi(y_2, u_1) - \varphi(y_2, u_2) \\ &+ j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Après, on utilise les hypothèses (2.13)(a), (2.14)(b) et (2.15)(b) pour obtenir

$$m|u_1 - u_2|_X \leq \beta|y_1 - y_2|_Y + \alpha|\eta_1 - \eta_2|_X + |f_1 - f_2|_X. \quad (2.24)$$

On déduit de (2.24) que  $t \rightarrow u_\eta(t) : [0, T] \rightarrow K$  est une fonction continue, qui conclut la preuve. ■

Dans la deuxième étape, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; K) \subset C(0, T; X)$$

défini par

$$\Lambda\eta = u_\eta \quad \forall \eta \in C(0, T; X). \quad (2.25)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.4.2.** L'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in C(0, T; K)$ .

**Preuve.** Soient  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X)$  et soit  $y_i$  la fonction définie par (2.19) pour  $\eta = \eta_i$ , c'est-à-dire  $y_i = y_{\eta_i}$ , pour  $i = 1, 2$ . On note par  $u_i$  la solution de l'inéquation variationnelle (2.20) pour  $\eta = \eta_i$  c'est-à-dire  $u_i = u_{\eta_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $t \in [0, T]$ , de la définition (2.25) nous avons

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X = |u_1(t) - u_2(t)|_X. \quad (2.26)$$

De plus, un argument similaire à celui de la démonstration de (2.24) montre que

$$m|u_1(t) - u_2(t)|_X \leq \beta|y_1(t) - y_2(t)|_Y + \alpha|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X. \quad (2.27)$$

Ensuite, nous utilisons (2.19) et la propriété (2.17) de l'opérateur  $\mathcal{S}$  pour voir que

$$|y_1(t) - y_2(t)|_Y = |\mathcal{S}\eta_1(t) - \mathcal{S}\eta_2(t)|_Y \leq L_S \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds.$$

L'utilisation de cette inégalité dans (2.27) nous donne

$$|u_1(t) - u_2(t)|_X \leq \frac{\beta L_S}{m} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds + \frac{\alpha}{m} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X. \quad (2.28)$$

Nous combinons maintenant (2.26) et (2.28) pour trouver que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X \leq \frac{\beta L_S}{m} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds + \frac{\alpha}{m} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X. \quad (2.29)$$

Finalemment, nous utilisons (2.29), l'hypothèse (2.16) et la proposition 1.2 pour voir que l'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in C(0, T; X)$ . Car  $\Lambda\eta \in C(0, T; K)$ , on en déduit que  $\eta^* \in C(0, T; K)$ , qui conclut la démonstration. ■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer le théorème 2.8.

**Preuve.** (du Théorème 2.4.1)

**1) Existence.** Soit  $\eta^* \in C(0, T; K)$  le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ , c'est-à-dire  $\Lambda\eta^* = \eta^*$ . Il résulte de (2.19) et (2.25) que pour tout  $t \in [0, T]$

$$y_{\eta^*}(t) = \mathcal{S}\eta^*(t), \quad u_{\eta^*}(t) = \eta^*(t). \quad (2.30)$$

Nous écrivons maintenant l'inéquation (2.20) pour  $\eta = \eta^*$  et nous utilisons les équations (2.30) pour conclure que la fonction  $\eta^* \in C(0, T; K)$  est une solution de l'inéquation quasi-variationnelle (2.11).

**2) Unicité.** L'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et on peut prouver comme suit. On note par  $\eta^* \in C(0, T; K)$  la solution de l'inéquation quasi-variationnelle (2.11) obtenu ci-dessus. Soit  $\eta \in C(0, T; X)$  une autre solution de l'inéquation (2.11). Considérons la fonction  $y_\eta \in C(0, T; Y)$  définie par (2.19). Alors, il résulte de (2.11) que  $\eta$  est une solution de l'inéquation variationnelle (2.20) et puisque, par Lemme 2.4.1, cette inéquation admet une solution unique, notée  $u_\eta$ , nous concluons que

$$\eta = u_\eta.$$

Cette équation montre que  $\Lambda\eta = \eta$ , où  $\Lambda$  est l'opérateur défini par (2.25). Donc par lemme 2.4.2 nous obtenons que  $\eta = \eta^*$  qui conclut l'unicité de la solution. ■

## 2.5 Quelques inégalités élémentaires

L'inégalité Gronwall suivante sera utilisée fréquemment dans l'analyse des problèmes de contact, pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on pourra consulter par exemple [30].

**Lemme 2.5.1. (Inégalité de Gronwall).** Soient  $f, g \in C([0, T])$  et supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Si  $g$  est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

La démonstration de ce lemme peut être trouver dans [27].

Nous avons également besoin du résultat suivant.

**Lemme 2.5.2. (Inégalité de Young).** Soient  $a, b \geq 0$  et  $1 < p, q < \infty$  deux exposants conjugués. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{q^b}{q}.$$

Un cas simple (relativement fréquent) de l'inégalité de Young est l'inégalité avec des exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

qui donne également l'inégalité de Young avec  $\varepsilon$  (valide pour tout  $\varepsilon > 0$ ) :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

# Chapitre 3

## Modélisation des problèmes de contact

Dans ce chapitre, nous présentons les notations et les préliminaires qui sont nécessaires à l'étude des problèmes aux limites présentés dans les chapitres 4-6. Nous commençons par introduire les espaces fonctionnels qui seront utiles pour l'étude des problèmes de contact. Ensuite, nous fournissons une description générale de la modélisation mathématique des processus impliqués dans le contact entre un corps élasto-viscoplastique ou thermo-viscoélastique ou piézoélectrique et une fondation. Il s'agit d'introduire le cadre physique et de rappeler quelques notions de la mécanique des milieux continus, en particulier l'équation du mouvement et d'équilibre, les lois constitutives pour les matériaux considérés, ainsi que les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement. Pour plus de détails voir [41.53].

Dans ce qui suit, on suppose que  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) avec une frontière  $\Gamma$  de Lipschitz partitionnée en trois parties  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  telles que  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Nous utilisons des lettres gras pour les vecteurs et les tenseurs. La normale unitaire sortante à  $\Gamma$  est notée par  $\nu$ .

## 3.1 Espaces fonctionnels en mécanique du contact

Afin d'introduire les modèles mathématiques qui décrivent différents processus de contact, nous devons décrire les espaces fonctionnels auxquels appartiennent les données et les inconnus. L'objectif de cette section est de présenter ces espaces avec leurs propriétés.

### 3.1.1 Préliminaires

Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Le produit scalaire et la norme associée sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$  sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & |v| &= (v \cdot v)^{1/2} & \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\tau| &= (\tau \cdot \tau)^{1/2} & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert munis des produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et  $(\cdot, \cdot)_Y$  et les normes associées  $|\cdot|_X$  et  $|\cdot|_Y$ , respectivement. On note par  $X^d$  et  $X_s^{d \times d}$  les espaces

$$X^d = \{x = (x_i) : x_i \in X, \quad 1 \leq i \leq d\},$$

$$X_s^{d \times d} = \{x = (x_{ij}) : x_{ij} = x_{ji} \in X, \quad 1 \leq i, j \leq d\},$$

et aussi, on note par  $X \times Y$  l'espace produit

$$X \times Y = \{z = (x, y) : x \in X, \quad y \in Y\},$$

avec le produit scalaire

$$(z_1, z_2)_{X \times Y} = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y \quad z_k = (x_k, y_k) \in X \times Y,$$

pour  $k = 1, 2$  et la norme associée est  $|\cdot|_{X \times Y}$ .

Ici et tout au long de cette thèse,  $1 \leq i, j \leq d$ . Nous allons utiliser les espaces

$$H = L^2(\Omega)^d = \{u = (u_i) : u_i \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d\}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Q} = L^2(\Omega)_s^{d \times d} = \{\tau = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d\}. \quad (3.2)$$

Ce sont des espaces de Hilbert munis de produits scalaires suivants :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)^d} = \int_{\Omega} u_i v_i dx = \int_{\Omega} u \cdot v dx,$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx,$$

et les normes associées sont notées par  $|\cdot|_{L^2(\Omega)^d}$  et  $|\cdot|_{\mathcal{Q}}$ , respectivement.

Nous avons besoin des espaces fonctionnels spécifiques pour le champ des déplacements et le champ des contraintes.

### 3.1.2 Des espaces liés au champ des déplacements

Dans les problèmes de contact présentés dans cette thèse, les déplacements sont recherchés dans l'espace

$$H^1(\Omega)^d = \{v = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d\},$$

ou dans ses sous-espaces ou sous-ensembles, selon les conditions aux limites données.

L'espace  $H^1(\Omega)^d$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)^d} = \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) dx.$$

La norme associée est

$$|v|_{H^1(\Omega)^d} = \left( \int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) dx \right)^{1/2}.$$

Soit  $\varepsilon : H^1(\Omega)^d \rightarrow \mathcal{Q}$  l'opérateur de déformation défini par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Le tenseur  $\varepsilon$  s'appelle le *tenseur des déformations linéarisé*.

$$((u, v))_{H^1(\Omega)^d} = (u, v)_{L^2(\Omega)^d} + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)^d, \quad (3.3)$$

la norme associée est définie par

$$|v|_{H^1(\Omega)^d}^2 = |v|_{L^2(\Omega)^d}^2 + |\varepsilon(v)|_{\mathcal{Q}}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (3.4)$$

Par le théorème de trace sur les espaces de Sobolev, nous pouvons définir la trace  $\gamma v$  d'une fonction  $v \in H^1(\Omega)^d$  sur  $\Gamma$ , telle que  $\gamma v = v|_{\Gamma}$  si  $v \in H^1(\Omega)^d \cap C(\bar{\Omega})^d$ . Pour un élément  $v \in H^1(\Omega)^d$  nous utilisons la notation  $v$  pour désigner la trace  $\gamma v$  de  $v$  sur  $\Gamma$ . L'opérateur de trace  $\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est un opérateur linéaire et continu, c'est-à-dire il existe une constante positive  $c$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c |v|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (3.5)$$

Pour tout champ de vecteurs  $v \in H^1(\Omega)^d$  nous notons par  $v_{\nu}$  et  $v_{\tau}$  les composantes normale et tangentielle de  $v$  sur la frontière données par

$$v_{\nu} = v \cdot \nu, \quad v_{\tau} = v - v_{\nu} \nu. \quad (3.6)$$

Dans l'étude des problèmes de contact, nous introduisons un sous-espace  $V$  de  $H^1(\Omega)^d$  donné par

$$V = \{v = (v_i) \in H^1(\Omega)^d : v = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1\}. \quad (3.7)$$

Ici, la condition " $v = 0$  p.p. sur  $\Gamma_1$ " au sens de trace, c'est-à-dire  $\gamma v = 0$  p.p. sur  $\Gamma_1$ . Comme l'opérateur de trace est un opérateur linéaire et continu alors  $V$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)^d$ . De plus, puisque  $mes(\Gamma_1) > 0$ , l'inégalité de Korn est vérifiée sur  $V$ , c'est-à-dire il existe une constante  $c_k > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{Q}} \geq c_k |v|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall v \in V. \quad (3.8)$$

Nous définissons le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  sur  $V$  par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad (3.9)$$

et la norme associée est

$$|u|_V = |\varepsilon(u)|_{\mathcal{Q}}. \quad (3.10)$$

Il résulte de (3.4), (3.8) et (3.10) que  $|\cdot|_V$  et  $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$  sont des normes équivalentes sur  $V$ , donc  $(V, |\cdot|_V)$  est un espace de Hilbert. De plus, l'opérateur de déformation  $\varepsilon : V \rightarrow \mathcal{Q}$  est un opérateur linéaire continu. Finalement, on note que par (3.5), (3.8) et (3.10) il existe une constante positive  $c_0$  dépendant de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Des espaces liés au champ des contraintes

On utilise la notation  $\text{Div} \sigma$  ou  $\sigma_{ij,j}$  pour la divergence de  $\sigma$  et on définit l'espace

$$\mathcal{Q}_1 = \{\sigma \in \mathcal{Q} : \text{Div} \sigma \in L^2(\Omega)^d\}. \quad (3.12)$$

L'espace  $\mathcal{Q}_1$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}} + (\text{Div}\sigma, \text{Div}\tau)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q}_1,$$

et  $|\cdot|_{\mathcal{Q}_1}$  la norme associée.

Nous désignons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle d'un champ des contraintes sur la frontière tels que

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu. \quad (3.13)$$

En outre, la formule suivante de Green est satisfaite

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div}\sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma_\nu \cdot v da \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (3.14)$$

### 3.1.4 Des espaces liés aux problèmes piézoélectriques

Dans l'étude des problèmes de contact en piézoélectricité, outre les espaces présentés ci-dessus, nous avons besoin des espaces spécifiques associés aux variables électriques à savoir le champ potentiel électrique et le champ de déplacement électrique. Pour introduire ces espaces, nous considérons un sous-ensemble mesurable  $\Gamma_a \subset \Gamma$  tel que  $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$ .

L'espace du champ potentiel électrique est donné par

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_a\} \quad (3.15)$$

Notons que  $W$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ . De plus, comme  $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$  alors l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite

$$|\nabla\psi|_{L^2(\Omega)^d} \geq c_F |\psi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \psi \in W. \quad (3.16)$$

Ici,  $c_F$  est une constante positive dépendant de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  et  $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$  est l'opérateur de gradient, e.g.  $\nabla\psi = (\psi_{,i})$ . Sur  $W$  on considère le produit scalaire suivant

$$(\phi, \psi)_W = (\nabla\phi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d}, \quad (3.17)$$

et  $|\cdot|_W$  la norme associée. Rappelons que la norme dans l'espace  $H^1(\Omega)$  est donnée par

$$|\psi|_{H^1(\Omega)}^2 = |\psi|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla\psi|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (3.18)$$

Il résulte de (3.16)-(3.18) que  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  et  $|\cdot|_W$  sont des normes équivalentes sur  $W$  et ainsi  $(W, |\cdot|_W)$  est un espace de Hilbert.

Soit un ensemble mesurable  $\Gamma_3 \subset \Gamma$ , d'après le théorème de trace de Sobolev il existe une constante positive  $\tilde{c}_0$  dépendant de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|\psi|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\psi|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (3.19)$$

Pour le champ de déplacement électrique, nous introduisons l'espace

$$\mathcal{W}_1 = \{D \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} D \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.20)$$

C'est un espace de Hilbert muni avec le produit scalaire

$$(D, E)_{\mathcal{W}_1} = (D, E)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée  $|\cdot|_{\mathcal{W}_1}$ . L'opérateur de divergence  $\operatorname{div} : \mathcal{W}_1 \rightarrow L^2(\Omega)$  est un opérateur linéaire et continu. De plus, lorsque  $D \in \mathcal{W}_1$  est une fonction régulière, la formule suivante de Green est satisfait

$$(D, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \psi da \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (3.21)$$

### 3.1.5 Des espaces liés au champ des températures

Soit  $E$  un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  donné par

$$E = \{y \in H^1(\Omega) / y = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante  $C$  telle que

$$|\nabla y|_H \geq C |y|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y \in E, \quad (3.22)$$

ici,  $C$  est une constante positive en fonction des données du problème mais est indépendante des solutions, sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Nous définissons le produit scalaire sur  $E$  par

$$(y, z)_E = (\nabla y, \nabla z)_H \quad \forall y, z \in E, \quad (3.23)$$

Il résulte de (3.22) et (3.23) que  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  et  $|\cdot|_E$  sont des normes équivalentes sur  $E$ . Donc  $(E, |\cdot|_E)$  est un espace de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $\tilde{C}_\Gamma > 0$  qui dépend uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|\theta|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_\Gamma |\theta|_E \quad \forall \theta \in E. \quad (3.24)$$

$E'$  est l'espace dual de  $E$ . Identifiant  $L^2(\Omega)$  avec son propre dual, nous pouvons écrire

$$E \subset L^2(\Omega) \subset E'.$$

On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $E'$  et  $E$ , et  $|\cdot|_{E'}$  dénote la norme sur  $E'$ . Aussi,

$$\langle \theta, \eta \rangle = (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)},$$

pour  $\theta \in L^2(\Omega)$  et  $\eta \in E$ .

### 3.1.6 Des espaces liés à la densité des débris d'usure

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  avec une frontière  $\Gamma$  de Lipschitz. Supposons que  $\Gamma_3$  est un domaine régulier dans le plan  $Ox_1x_2$  avec une frontière de Lipschitz  $\partial\Gamma_3$ . Pour la fonction de densité des particules de surface, nous utiliserons l'espace

$$H_0^1(\Gamma_3) = \{ \xi \in H^1(\Gamma_3) / \xi = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_3 \}.$$

C'est un espace de Hilbert réel muni de produit scalaire

$$(\zeta, \xi)_{H_0^1(\Gamma_3)} = (\nabla\zeta, \nabla\xi)_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

où  $\nabla : H^{-1}(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)^2$  est l'opérateur gradient,  $\nabla\xi = (\xi_{,x_1}, \xi_{,x_2})$ . Par l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, il existe une constante  $\tilde{C}_\Gamma > 0$  qui dépend de  $\Gamma_3$  telle que

$$|\zeta|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_\Gamma |\zeta|_{H_0^1(\Gamma_3)} \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Gamma_3). \quad (3.25)$$

Nous utilisons la notation  $H^{-1}(\Gamma_3)$  pour le dual de l'espace  $H_0^1(\Gamma_3)$ . Identifiant  $L^2(\Gamma_3)$  avec son propre dual, nous pouvons écrire

$$H_0^1(\Gamma_3) \subset L^2(\Gamma_3) \subset H^{-1}(\Gamma_3).$$

On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $H^{-1}(\Gamma_3)$  et  $H_0^1(\Gamma_3)$ , et  $|\cdot|_{H^{-1}(\Gamma_3)}$  dénote la norme sur  $H^{-1}(\Gamma_3)$ . Aussi,

$$\langle \zeta, \xi \rangle = (\zeta, \xi)_{L^2(\Gamma_3)},$$

pour  $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$  et  $\xi \in H_0^1(\Gamma_3)$ .

## 3.2 Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques

Dans cette section, nous présentons un cadre physique général concernant les différents problèmes de contact de la thèse. Puis nous introduisons l'équation de mouvement, les lois constitutives des différents matériaux et les conditions aux limites utilisés dans cette thèse.

### 3.2.1 Cadre physique

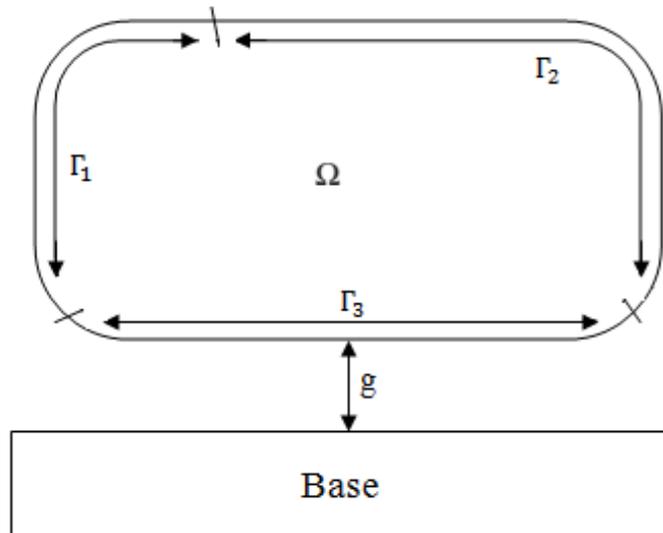


FIGURE 3.1- Le cadre physique ;  $\Gamma_3$  est la surface de contact.

En général, le cadre physique a été illustré dans la Figure 3.1 et sera décrit ci-dessous. On considère un corps déformable occupant un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  avec une frontière  $\Gamma$  de Lipschitz divisée en trois parties disjointes et mesurables

$\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , telles que  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Le corps est supposé fixé sur la partie  $\Gamma_1$  de sa frontière alors que des forces volumiques et surfaciques de densités  $f_0$  et  $f_2$  agissent respectivement dans  $\Omega$  et sur  $\Gamma_2$ . Sur  $\Gamma_3$  le corps est susceptible d'entrer en contact avec un obstacle, la dite fondation. Nous supposons que dans la configuration de référence, il peut y avoir un interstice  $g$  entre  $\Gamma_3$  et la fondation, qui est mesuré le long de la normale  $\nu$ .

Soit  $u$  le vecteur de déplacement,  $\sigma$  le tenseur des contraintes et  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  le tenseur des déformations linéarisé. Ce sont des fonctions qui dépendent de la variable spatiale  $x$  et la variable de temps  $t$ . Néanmoins, dans ce qui suit, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de ces quantités par rapport à  $x$  et à  $t$ , par exemple nous écrivons  $\sigma$  au lieu de  $\sigma(x)$  ou  $\sigma(x, t)$ .  $T$  est une constante positive et  $[0, T]$  désigne l'intervalle de temps en question. Le point au-dessus d'une fonction représente la dérivé par rapport au temps, c'est-à-dire  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Pour présenter un modèle mathématique d'un processus de contact spécifique nous avons besoin de décrire la loi de comportement, l'équation de mouvement ou d'équilibre, les conditions aux limites et, éventuellement, les conditions initiales.

### 3.2.2 L'équation de mouvement

Nous nous intéressons à un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable en contact avec une fondation, ses inconnues sont le champ de déplacement  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , avec  $T > 0$ . L'évolution de l'état mécanique du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy

$$Div\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.26)$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la densité de la masse,  $f_0$  est la densité des forces volumiques,  $\dot{u}$  représente la vitesse du corps et  $\ddot{u}$  représente l'accélération.

Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier, par exemple dans

le cas où le champ des vitesses  $\dot{u}$  varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire le terme  $\rho\ddot{u}$  peut être négligé et on obtient l'équation d'équilibre

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, T]. \quad (3.27)$$

Les processus modélisés par l'équation du mouvement (3.26) s'appellent *processus dynamiques* et les processus modélisés par l'équation d'équilibre (3.27) s'appellent *processus quasi-statiques*. Dans le cas *statique*, l'équation d'équilibre est valable dans  $\Omega$ .

La description de notre modèle n'est pas encore terminée, puisque nous avons des inconnues plus que des équations. L'équation est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général les lois de comportement, cela fait l'objet du paragraphe suivant.

### 3.2.3 Lois de comportement

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement, on cite à titre d'exemple les quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Les lois de comportements (ou lois constitutives) sont des relations entre le tenseur des contraintes  $\sigma$ , le tenseur des déformations  $\varepsilon$  et leur dérivées temporelles  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$ . Notons que d'autres paramètres, tels que la pression ou la température, peuvent intervenir dans une loi de comportement.

#### **Lois de comportement visco-élastiques.**

le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u), \quad (3.28)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonctions constitutives non linéaires, tel que  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{G}$  est l'opérateur d'élasticité.

Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u)). \quad (3.29)$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u),$$

où  $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$  est le tenseur de viscosité et  $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$  est le tenseur d'élasticité, pour  $i, j, k, l = 1, \dots, d$ .

Dans le cas viscoélastique avec mémoire longue, le corps suit une loi de comportement de *Kelvin – Voigt* de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \quad (3.30)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonctions constitutives non linéaires.  $\mathcal{G}$  représente l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{A}$  désigne l'opérateur d'élasticité. Ici  $\mathcal{B}$  est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau à mémoire longue

lorsque  $\mathcal{B} \cong 0$  on retrouve la viscoélasticité de la mémoire courte :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) \quad (3.31)$$

### Lois de comportement visco-plastiques

Pour les matériaux viscoplastiques, la loi de comportement est de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon), \quad (3.32)$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $G$  est l'opérateur de plasticité.

### Lois de comportement élasto-viscoplastique

La loi de comportement élasto-viscoplastique peut être écrite sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds, \quad (3.33)$$

où les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des tenseur d'ordre quatre et non linéaires ; leurs composantes  $a_{ijkl}$  et  $b_{ijkl}$  s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement et  $\mathcal{G}$  représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.

Cette loi modifie légèrement la description des phénomènes thermo-mécaniques ou électro-mécaniques car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de température  $\theta$ , le champ de déplacements électriques  $D = (D_i)$  ainsi que le champ électrique  $E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i})$ . Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans cette thèse, elles correspondent à trois catégories particulières de matériaux : matériaux thermo-élasto-viscoplastiques, matériaux thermo-électro-élasto-viscoplastiques et matériaux thermo-électro-viscoélastiques.

### Lois de comportement thermo-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état

Une loi de constitutive d'un matériau thermo-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \theta M_e \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $u$  désigne le champ de déplacement,  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes,

$\varepsilon(u)$  est le tenseur des déformations linéarisé,  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{F}$  est l'opérateur d'élasticité.  $\mathcal{G}$  est une fonction constitutive non linéaire décrivant le comportement viscoplastique du matériau et dépendant de la variable interne d'état  $k$ . L'évolution du champ de variable interne d'état est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (3.35)$$

où  $\phi$  est une fonction non linéaire dépendant aussi de la variable interne d'état  $k$ . L'ensemble des variables internes d'état admissibles défini par

$$Y = \{\alpha = (\alpha_i) \quad : \quad \alpha_i \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

La température  $\theta$  est définie par une équation différentielle, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -\mathcal{M}_e \cdot \nabla \dot{u} + q_e, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.36)$$

où  $q_e(x, t)$  est la quantité de chaleur dans le volume  $\Omega$  durant l'intervalle de temps où  $K = (k_{ij})$  représente le tenseur de conductivité thermique,  $\operatorname{div}(K\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})$  représente la densité du volume de la source température et  $\mathcal{M}_e$  est un opérateur de dilatation thermique. On utilise cette loi de comportement dans le chapitre 4 de cette thèse.

### **Lois de comportement thermo-viscoélastique avec mémoire longue.**

Si nous prenons en considération l'effet thermique du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (3.30), qui est une loi de comportement thermo-visco-élastique avec mémoire longue ayant la forme

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \theta(t)\mathcal{M}_e. \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.37)$$

La température  $\theta$  est définie par une équation différentielle, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -\mathcal{M}_e \cdot \nabla \dot{u} + q_e, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.38)$$

où  $q_e(x, t)$  est la quantité de chaleur dans le volume  $\Omega$  durant l'intervalle de temps où  $K = (k_{ij})$  représente le tenseur de conductivité thermique,  $\operatorname{div}(K\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})$  représente la densité du volume de la source température et  $\mathcal{M}_e$  est un opérateur de dilatation thermique.

Ici et ci-dessous,  $K_1$  et  $K_0$  sont des constantes strictement positives, qui représente les coefficients de diffusion microfissuré,  $\partial\varphi_K$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\varphi_K$  et  $S$  est une fonction constitutive donnée; qui représente la source de l'endommagement dans le système.

### Lois thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement

Parmi les lois thermo-élasto-viscoplastiques avec endommagement, une loi de comportement qui est même une généralisation de la loi (3.33), et peut être écrite sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \theta(s)) ds. \quad (3.39)$$

L'évolution du champ de température  $\theta$  est régie par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie et définie par l'équation parabolique suivante

$$\dot{\theta} - K_0 \Delta \theta = \psi(\sigma, \varepsilon(\dot{u}), \theta) + q_e, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.40)$$

où  $\psi$  est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures et  $q_e(x, t)$  est la quantité de chaleur dans le volume  $\Omega$  durant l'intervalle de temps.

L'endommagement  $\beta$  est une variable interne causé par déformation viscoplastique, l'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\beta} - K_1 \Delta \beta + \partial \varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta), \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.41)$$

### Lois de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne d'état

Une loi de constitutive d'un matériau élasto-viscoplastique avec variable interne d'état est donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \quad (3.42)$$

où  $u$  désigne le champ de déplacement,  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes,  $\varepsilon(u)$  est le tenseur des déformations linéarisé,  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{F}$  est l'opérateur d'élasticité.  $\mathcal{G}$  est une fonction constitutive non linéaire décrivant le comportement viscoplastique du matériau et dépendant de la variable interne d'état  $k$ . L'évolution du champ de variable interne d'état est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (3.43)$$

où  $\phi$  est une fonction non linéaire dépendant aussi de la variable interne d'état  $k$ .

L'ensemble des variables internes d'état admissibles défini par

$$Y = \{\alpha = (\alpha_i) \quad : \quad \alpha_i \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Des exemples et interprétation mécanique des lois constitutives de la forme (3.42) sans variable interne d'état  $k$  peuvent être trouvés dans [27, 59]. Un problème dynamique de contact sans frottement pour des matériaux suivant la loi (3.42)-(3.43) est donné dans [48].

### **Lois de comportement thermo-viscoélastique avec endommagement**

En prenant en considération l'effet thermique et l'endommagement du matériau durant le contact, nous obtenons une loi de comportement thermo-viscoélastique avec endommagement de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}(\varepsilon(u), \alpha) - C(\theta, \alpha), \quad (3.44)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$  sont des opérateurs non linéaires décrivant les propriétés visqueuses et élastiques du matériau respectivement et  $C$  est un opérateur de dilatation thermique. Ici,  $\alpha$  est une variable interne représentant l'endommagement du matériau causé par des déformations élastiques et  $\theta$  est le champ de température.

L'évolution de champ de température  $\theta$  est régie par l'équation de la chaleur obtenu à partir de la conservation d'énergie comme suit.

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = \psi(\dot{u}, \theta, \alpha) + q_e, \quad (3.45)$$

où  $\psi$  est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendré par les forces intérieures,  $K = (k_{ij})$  est le tenseur de conductivité thermique avec  $\operatorname{div}(K\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$  et  $q_e$  est une donnée qui représente la densité de la source thermique.

L'inclusion différentielle suivante est utilisée pour décrire l'évolution du champ

d'endommagement

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial \varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(u), \theta, \alpha), \quad (3.46)$$

où  $k_1$  est un coefficient positif,  $\partial \varphi_K$  représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\varphi_K$ ,  $\phi$  est une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement du système et  $\theta$  est la fonction de température.  $K$  représente l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles défini par

$$K = \{ \zeta \in H^1(\Omega) \quad : \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

Lorsque  $\alpha = 1$ , il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque  $\alpha = 0$ , il y a un endommagement total, et pour  $0 < \alpha < 1$ , il y a un endommagement partiel.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur  $\Gamma_3$ . D'ailleurs nous décrivons dans ce qui suit les conditions de contact et lois avec ou sans frottement.

### 3.2.4 Conditions aux limites et lois de frottement

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées conditions de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de compliance normale (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est réactive). À part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (le glissement se produit lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca, elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

Les conditions aux limites sont aussi influencées par la prise en considération des différents phénomènes sous-jacents au contact avec frottement, adhérence, usure et effets thermiques. Par ailleurs, même si on néglige ces phénomènes et on se limite au contact frottant avec seuil, la dépendance du seuil de frottement par rapport au glissement ou à la vitesse de glissement peut être envisagée, influençant ainsi les conditions aux limites du modèle mathématique considéré.

Rappelons que la frontière  $\Gamma$  est divisée en trois parties disjointes et mesurable  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  telles que  $mes(\Gamma_1) > 0$ , nous donnons dans ce paragraphe les conditions aux limites sur chacune des trois parties.

### **Conditions aux limites de déplacement-traction**

Dans tous les problèmes qui seront étudiés dans cette thèse, le corps est encastré sur la partie  $\Gamma_1$ , donc

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.47)$$

cette relation représente la condition aux limites *de déplacement*. Une traction surfacique de densité  $f_2$  agit sur la partie  $\Gamma_2$  et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma\nu$  satisfait :

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T). \quad (3.48)$$

Cette condition est appelée la condition aux limites *de traction*.

Pour compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur  $\Gamma_3$ , c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous allons décrire dans ce qui suit.

### **Conditions de contact avec compliance normale**

C'est le cas où la fondation est supposée déformable dans ce cas la pénétration est possible et la contrainte normale  $\sigma_\nu$  satisfait :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal,  $g$  représente l'interstice initial entre le corps et la fondation et  $p_\nu$  est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette relation est dite condition *de compliance normale* et signifie que la fondation exerce une réaction suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration  $u_\nu - g$  qui s'annule lorsqu'il y a séparation ( c'est-à-dire  $u_\nu < g$ ).

Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend  $g = 0$ .

Comme exemple de fonction de compliance normale  $p_\nu$  nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

ou, plus généralement

$$p_\nu(r) = c_\nu (r_+)^m,$$

où  $c_\nu > 0$  est le coefficient de raideur de la surface,  $m > 0$  est l'exposant de la compliance normale et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un coefficient positif lié à l'usure et la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact de compliance normale signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, c'est-à-dire quand elle dépasse  $\alpha$ , la fondation se désintègre et n'offre aucune résistance à la pénétration.

#### **Conditions de contact avec réponse normale instantanée**

Une condition de contact avec *réponse normale instantanée* a été utilisé principalement pour décrire un contact lubrifié. Cette condition suppose que la contrainte normale sur la surface de contact est liée à la vitesse normale, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu),$$

où,  $p_\nu$  est une fonction donnée qui s'annule lorsque l'argument est négatif.

Nous passons maintenant aux conditions dans les directions tangentielles, appelées conditions de frottement ou lois de frottement.

**-Lois de contact bilatéral**

On suppose que le contact entre le corps et la fondation se produit avec frottement bilatéral c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement. cette propriété se traduit mathématiquement par

$$u_\nu = 0, \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.49)$$

**-Lois de contact de Signorini**

On dit que le contact entre le corps et une base rigide est sans frottement, si les mouvement tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\sigma_\tau = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.50)$$

Puisque la base est rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante

$$u_\nu = u \cdot \nu \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.51)$$

Aux points de  $\Gamma_3$  tels que  $u_\nu < 0$ , le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

$$u_\nu < 0 \implies \sigma_\nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.52)$$

Aux points de  $\Gamma_3$  tels que  $u_\nu = 0$ , on suppose que la base rigide exerce une réaction inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers  $\Omega$ . On a

$$u_\nu = 0 \implies \sigma_\nu \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.53)$$

Pour résumer, les conditions de contact (3.50) – (3.53) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.54)$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (3.54) sont aussi appelées conditions de contact de Signorini.

Les conditions de contact de Signorini (3.54) modélisent le contact d'un corps déformable avec une base rigide. On peut envisager donc des conditions de contact d'un corps déformable avec une base déformable.

#### **-Lois de frottement de type Coulomb**

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique.

Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases} \quad (3.55)$$

où  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement.

Une version quasi-statique de lois de Coulomb peut s'énoncer sous la forme

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq F_b, \\ -\sigma_\tau = F_b \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.56)$$

Ici,  $\dot{u}_\tau$  est la vitesse tangentielle ou le taux de glissement et  $F_b$  représente le seuil

frottement (ce seuil n'est pas fixé et dépend du coefficient de frottement et de la solution du problème).

Nous pouvons prendre pour  $F_b$  le choix suivant :

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = \mu|\sigma_\nu|,$$

où  $\mu > 0$  est le coefficient de frottement. Ce choix dans (3.56) conduit à la version classique de la loi de Coulomb. Les choix

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = p_\tau(u_\nu - g) \quad \text{et} \quad F_b = F_b(\sigma_\nu) = p_\tau(\dot{u}_\nu)$$

sont compatibles avec la condition de contact de compliance normale et de réponse normale instantanée, respectivement. Ici,  $p_\tau$  est une fonction positive qui s'annule pour les arguments négatifs, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de contact.

La loi de Coulomb est souvent utilisée pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi de seuil. Tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement.

#### **-Loi de Coulomb non locale généralisée**

Finalement, on présente la loi de frottement qui généralise la loi précédente. Soit l'opérateur  $R$  une régularisante normale, c'est à dire un opérateur linéaire continu  $R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$ . La régularisante  $R$  est introduite pour des raisons techniques car la trace du tenseur des contraintes sur la frontière est très irrégulière. Cette loi s'énonce comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu p(|R\sigma_\nu|), \\ |\sigma_\tau| < \mu p(|R\sigma_\nu|) \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu p(|R\sigma_\nu|) \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \end{cases} \quad (3.57)$$

où  $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est le seuil de frottement vérifiant les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \text{il existe } M > 0 \text{ tel que : } |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, p.p \ x \in \Gamma_3, \\ (b) : \text{L'application } : x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+, \\ (c) : p(x, 0) = 0, p.p \ x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.58)$$

La présence de l'opérateur  $R$  dans (3.57) nous conduit à appeler (3.57) loi de frottement non local.

### 3.3 Processus de contact avec adhésion

Pour modéliser le phénomène d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. On introduit une variable interne de surface appelée champ d'adhésion notée par  $\beta$  qui prend ses valeurs entre zéro et un. Lorsque  $\beta = 1$  à un point de  $\Gamma_3$ , l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, lorsque  $\beta = 0$  tous les liens sont inactifs et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque  $0 < \beta < 1$  c'est le cas d'une adhésion partielle.

Si on suppose que la partie compressive de la contrainte de contact est décrite par la compliance normale, la condition de contact de compliance normale avec adhésion est donné par

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.59)$$

où  $\gamma_\nu$  est un coefficient d'adhésion positif,  $p_\nu$  est la fonction de compliance normale et

$R_\nu$  est l'opérateur du troncature défini par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (3.60)$$

où  $L > 0$  est la longueur caractéristique du lien, au delà de laquelle il s'étire sans offrir aucune résistance complémentaire. La contribution d'adhésion à la traction normale est donnée par le terme  $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$ . Ainsi, la traction adhésive est proportionnelle avec un coefficient de proportionnalité  $\gamma_\nu$ , par rapport au carré de l'intensité d'adhésion et le déplacement normal, mais tant que  $u_\nu$  n'excède pas la longueur du lien  $L$ .

On considère une autre relation qui représente la condition de contact adhésif sans frottement sur le plan tangentiel,

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où l'opérateur de troncature  $R_\tau$  est donné par

$$\mathbf{R}_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq L, \\ L \frac{v}{|v|} & \text{si } |v| > L. \end{cases} \quad (3.61)$$

Cette relation indique que la contrainte tangentielle dépend du champ adhésion et du déplacement tangentiel. La traction tangentielle de frottement est supposée beaucoup plus petite que la traction adhésive, et par conséquent, elle est nulle.

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est

gouvernée par une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -(\beta(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau|\mathbf{R}_\tau(u_\tau)|^2) - \epsilon_a)_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \dot{\beta}(0) &= \beta_0 && \text{sur } \Gamma_3, \end{aligned}$$

où  $\gamma_\nu$ ,  $\gamma_\tau$  et  $\epsilon_a$  sont des coefficients d'adhésion positifs et  $R_\nu$ ,  $R_\tau$  sont des opérateurs de troncature définis par (3.60) et (3.61) respectivement.  $\beta_0$  est l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3.$$

Pour le champ d'adhésion, nous introduisons l'ensemble

$$Z = \{\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3) \quad : \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T] \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3\}.$$

### Condition de frottement avec adhésion

La version de la loi de frottement de Coulomb avec adhésion de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)| < p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)| = p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Ici,  $p_\nu$ ,  $p_\tau$  sont des fonctions données et  $g$  représente l'interstice initiale.  $\gamma_\nu$  et  $\gamma_\tau$  sont des paramètres matériel,  $R_\nu$ ,  $R_\tau$  sont des opérateurs de troncature définis par (3.60) et (3.61) respectivement.

### 3.4 Processus de contact avec usure

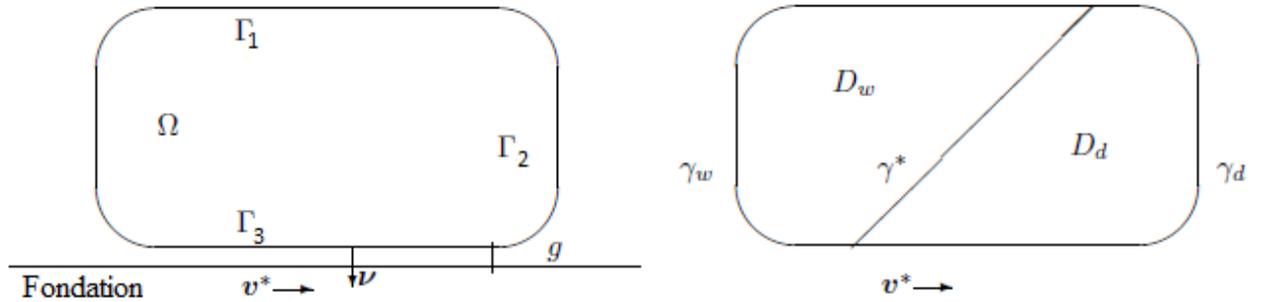


FIGURE 3.2 - Le modèle (à gauche) ; La surface de contact  $\Gamma_3$  l'usure est produite en  $D_w$  ; diffusion des débris dans  $D_w \cup D_d$  (à droite).

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et  $\Gamma_3 \subset \mathbb{R}^2$ . Pour simplifier le modèle nous supposons que  $\Gamma_3$  est un domaine régulier dans le plan  $x_3 = 0$ , de frontière  $\gamma$ , alors que la fondation est plane et se déplace dans le plan  $x_3 = -g \leq 0$  avec une vitesse  $v^*$ . Nous supposons que  $\Gamma_3$  est divisée en deux sous-domaines  $D_d$  et  $D_w$  par une courbe lisse  $\gamma^*$ . L'usure a lieu seulement sur la partie  $D_w$  de la surface de contact, tandis que la diffusion des particules d'usure a lieu dans tout le domaine de contact  $\Gamma_3$ . La frontière  $\gamma = \partial\Gamma_3$  de  $\Gamma_3$  est supposé Lipschitzienne et se compose de deux parties  $\gamma_d$  et  $\gamma_w$ . Alors  $\partial D_w = \gamma_w \cup \gamma^*$  et  $\partial D_d = \gamma_d \cup \gamma^*$  (voir Figure 3.2).

L'usure de la surface est décrite par la fonction d'usure  $\omega = \omega(x, t)$  qui est définie sur  $D_w$  et la diffusion des débris d'usure est décrite par la densité surfacique des particules d'usure  $\zeta = \zeta(x, t)$  qui est définie sur  $\Gamma_3$ . Ici,  $x = (x_1, x_2, 0)$ , puisque  $\Gamma_3$  appartient au plan  $Ox_1x_2$ . La fonction d'usure  $\omega$  mesure la densité volumique du matériau enlevé

par unité de surface. La fonction  $\zeta$  mesure la densité surfacique de la diffusion des particules d'usure.

Nous supposons que  $\omega = \lambda\zeta$  dans  $D_\omega$ , où  $\lambda$  est un facteur de conversion positif de la densité surfacique des débris d'usure à la profondeur d'usure. Puis, nous prolongeons  $\omega$  par zéro à tout  $\Gamma_3$

$$\omega = \lambda\zeta\chi_{[D_\omega]} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.63)$$

où  $\chi_{[D_\omega]}$  est la fonction caractéristique de  $D_\omega$  (c'est-à-dire,  $\chi_{[D_\omega]}(\mathbf{x}) = 1$  si  $x \in D_\omega$  et  $\chi_{[D_\omega]}(x) = 0$  si  $x \notin D_\omega$ ). Le coefficient de diffusion d'usure  $k$  est donné par

$$k = k(x) = \begin{cases} k_w & \text{dans } D_\omega, \\ k_d & \text{dans } D_d. \end{cases}$$

Ici, la diffusion d'usure est décrite par l'équation de diffusion non linéaire suivante

$$\dot{\zeta} - \text{div}(k\nabla\zeta) = \kappa |\sigma_\tau| |\dot{u}_\tau - v^*| \chi_{[D_\omega]} \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.64)$$

Nous utilisons  $\chi_{[D_\omega]}$  dans (3.64) car les débris ne sont produits que dans  $D_\omega$ . Ici,  $\kappa$  est le coefficient de taux d'usure. Nous notons que (3.64) est une version de la loi d'Archard avec diffusion. Le taux d'usure est proportionnel à l'intensité de frottement et le taux de glissement relatif. En effet, lorsque la diffusion des particules d'usure est négligeable, (3.64) peut être écrit comme

$$\dot{\zeta} = \kappa |\sigma_\tau| |\dot{u}_\tau - v^*| \chi_{[D_\omega]} \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.65)$$

qui est la forme différentielle de la loi d'usure d'Archard. Maintenant, pour éviter des difficultés mathématiques qui se posent lorsque le taux de glissement est très grand, nous remplaçons le terme  $|\dot{u}_\tau - v^*|$  dans (3.64) par le terme  $R^*(|\dot{u}_\tau - v^*|)$  où

$R^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est l'opérateur de troncature

$$R^*(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \leq R, \\ R & \text{si } r > R, \end{cases} \quad (3.66)$$

où,  $R$  est une constante positive donnée. Nous notons que du point de vue physique, cela ne provoque pas de changement réel dans le modèle, car dans la pratique la vitesse de glissement est limitée et aucune hypothèse est imposée sur  $R$ , donc il peut être choisi aussi grand que nécessaire dans chaque application. Pour conclure, la diffusion d'usure est décrite par l'équation de diffusion non linéaire suivante

$$\dot{\zeta} - \operatorname{div}(k\nabla\zeta) = \kappa |\sigma_\tau| R^*(|\dot{u}_\tau - v^*|)\chi_{[D_w]} \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.67)$$

Nous supposons qu'une fois une particule d'usure atteint la frontière  $\gamma = \partial\Gamma_3$  elle disparaît, ce qui se traduit par la condition absorbante suivante.

$$\zeta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Gamma_3 \times (0, T).$$

### Condition de frottement avec diffusion d'usure

Maintenant, nous décrivons le processus de contact avec frottement sur la surface  $\Gamma_3$ . Nous utilisons une version de la condition de compliance normale pour modéliser le contact. Puisque le processus implique l'usure de surface de contact, nous prenons en considération le changement de la géométrie en remplaçant  $g$  par  $g + w$ . Donc,

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - \lambda\zeta\chi_{[D_w]} - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

La loi de frottement est choisi comme (3.56), où  $F_b = \mu p_\nu$ , ainsi

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu p_\nu, \\ \sigma_\tau = -\mu p_\nu \frac{\dot{u}_\tau - v^*}{|\dot{u}_\tau - v^*|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq v^* \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où  $p_\nu = p_\nu(u_\nu - \lambda \zeta \chi_{[D_w]} - g)$  et  $\mu = \mu(\zeta, \theta, |\dot{u}_\tau - v^*|)$  est le coefficient de frottement qui dépend de la densité des particules d'usure, la température et le taux de glissement.

### 3.5 Conditions thermiques

La condition au bord associée à la température dérivée de la condition de Fourier

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \nu_j = k_e (\theta - \theta_R) - h_\tau (|\dot{u}_\tau|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.68)$$

$$\theta = 0, \quad \text{dans } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.69)$$

où  $\theta_R$  est la température de fondation,  $k_e$  représente l'échange de la température entre le corps déformable et la fondation,  $h_\tau$  la fonction tangentielle. (3.69) est la condition aux limites de la température sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

On considère également les conditions

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \quad (3.71)$$

où (3.70) représente une condition à la limite de Fourier pour la température et (3.71) représente une condition à la limite de Neumann homogène pour le domaine de l'endommagement sur  $\Gamma$ . où  $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$  représente la dérivée normale de  $\beta$ .

## 3.6 Modélisation des problèmes de contact piézo-électriques

Cette section est dédiée au cadre physique, aux lois de comportement et aux conditions aux limites concernant les problèmes piézoélectriques.

### 3.6.1 Cadre physique

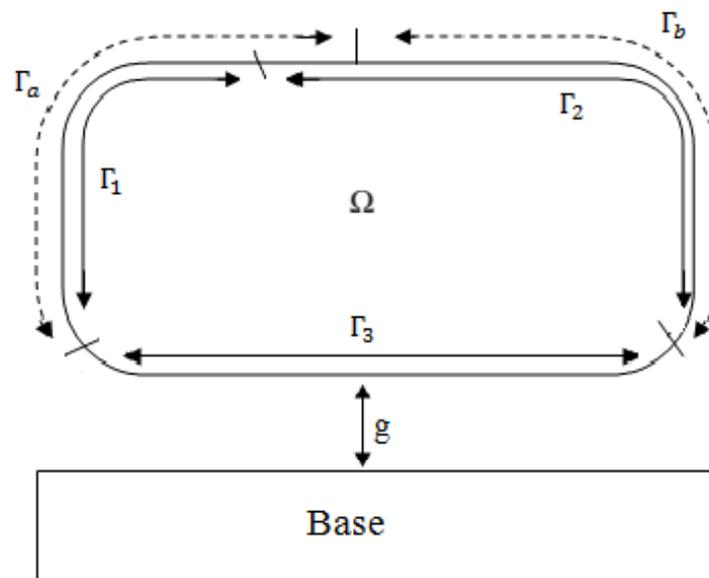


FIGURE 3.3- Le cadre physique pour un matériau piézoélectrique ;  $\Gamma_3$  est la surface de contact.

Pour modéliser les problèmes de contact avec des matériaux piézoélectriques, nous considérons le cadre physique représenté dans la Figure 3.3.

On considère un corps déformable occupant un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ),

de frontière  $\Gamma$  de Lipschitz, divisée en trois parties disjointes et mesurables  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , d'une part, et une partition de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  en deux parties disjointes et mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , d'une autre part, telles que  $mes(\Gamma_1) > 0$  et  $mes(\Gamma_a) > 0$ . Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$ , alors le champ de déplacement est nul sur cette partie. Des forces surfaciques de densité  $f_2$  agissent sur  $\Gamma_2$  et des forces volumiques de densité  $f_0$  agissent dans  $\Omega$ . Nous supposons aussi que le potentiel électrique est nulle sur  $\Gamma_a$  et une charge électrique de densité surfacique  $q_b$  est donnée sur  $\Gamma_b$ . Le corps est en contact avec une fondation adhésive et conductive (avec ou sans frottement) sur la partie  $\Gamma_3$ .

Nous sommes intéressées par des modèles mathématiques qui décrivent l'évolution de l'état mécanique et électrique du corps piézoélectrique pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$ , avec  $T > 0$ . Outre le champ des contraintes  $\sigma = \sigma(x, t)$  et le champ de déplacement  $u = u(x, t)$ , on introduit le champ de déplacement électrique  $D = D(x, t)$  et le potentiel électrique  $\varphi = \varphi(x, t)$ . Les fonctions inconnues du problème de contact piézoélectrique sont  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ ,  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Si le processus est dynamique alors l'équation du mouvement pour le champ des contraintes est donnée par l'équation (3.26), et si le processus est quasi-statique alors l'équation d'équilibre pour le champ des contraintes est donnée par l'équation (3.27). L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique

$$divD - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.72)$$

où  $q_0$  est la densité des charges électriques volumiques et " $div$ " est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire  $divD = (D_{i,i})$ .

Nous passons maintenant aux conditions aux limites sur  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . D'abord, car le corps piézoélectrique est fixé sur  $\Gamma_1$ , nous imposons la condition aux limites de

déplacement (3.47). En outre, la condition aux limites de traction sur  $\Gamma_2$  est donnée par (3.48). Ensuite, puisque le potentiel électrique est nul sur  $\Gamma_a$  au cours du processus, nous imposons la condition aux limites

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (3.73)$$

De plus, nous rappelons qu'une charge électrique de densité surfacique  $q_b$  est donnée sur  $\Gamma_b$ , et par conséquent,

$$D \cdot \nu = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (3.74)$$

Pour compléter un modèle mathématique pour un processus de contact piézoélectrique spécifique, outre les équations des équilibres et les conditions aux limites ci-dessus, nous avons besoin d'introduire les lois de comportement et les conditions aux limites de contact.

### 3.6.2 Lois de comportement

Pour introduire la loi de comportement d'un matériau piézoélectrique, nous définissons le champ électrique  $E(\varphi)$  par la relation

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}), \quad (3.75)$$

où  $\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ .

Une loi constitutive générale de matériau électro-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(t)) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (3.77)$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (3.78)$$

où  $u$  est le champ de déplacement,  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $\varepsilon(u)$  est le tenseur des contraintes linéarisé et  $D$  est le champ de déplacement électrique.  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité, non forcément linéaire,  $\mathcal{F}$  est l'opérateur d'élasticité et  $\mathcal{G}$  représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau et dépend de la variable interne d'état  $k$ .  $\phi$  est une fonction constitutive non linéaire qui dépend de  $k$ .  $E$  est le champ électrique qui satisfait  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ , où  $\varphi$  est le potentiel électrique.  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  représente le tenseur piézoélectrique de troisième ordre,  $\mathcal{E}^*$  est son transposé et  $B$  est le tenseur de permittivité électrique.

Nous supposons la décomposition de la forme  $\sigma = \sigma^{EVP} + \sigma^E$ , où  $\sigma^E = -\mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) = \mathcal{E}^*\nabla\varphi$  est la partie électrique de la contrainte et  $\sigma^{EVP}$  est la partie élasto-viscoplastique de la contrainte qui satisfait :

$$\sigma^{EVP}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^{EVP}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds,$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma^{EVP}(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)).$$

Un problème de contact sans frottement pour des matériaux élasto-viscoplastiques avec variable interne d'état a été étudié dans [48, 51].

Lorsque  $\mathcal{G} = 0$  la loi de comportement (3.76)-(3.78) se réduit à la loi constitutive

électro-viscoélastique donnée par (3.76) et

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t).$$

Lorsque  $\mathcal{G} = 0$  et  $\mathcal{A} = 0$  la loi de comportement (3.76)-(3.78) devient la loi constitutive électro-élastique donnée par (3.76) et

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t).$$

Une loi constitutive générale de matériau thermo-électro-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(t)) - \theta M_e \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(s)) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (3.80)$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (3.81)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -M_e\nabla\dot{u} + q_e \quad (3.82)$$

on utilise cette lois de comportement dans le chapitre 5 de cette thèse.

### Lois de comportement électro-viscoélastique

Les matériaux piézoélectriques sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont viscoélastiques est appelé matériau électro-viscoélastique et pour la contrainte on a  $\sigma = \sigma^{ve} + \sigma^{el}$ , où  $\sigma^{ve}$  et  $\sigma^{el}$  sont respectivement les parties viscoélastiques et électriques de la contrainte, telles que  $\sigma^{ve}$  définie par (3.28) et  $\sigma^{el} = -\xi^* E(\varphi)$ .

A partir de la loi (3.28), nous obtenons une loi de comportement électro-viscoélastique comme suit

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi), & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ D = \beta E(\varphi) + \xi\varepsilon(u), & \text{dans } \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (3.83)$$

dans laquelle les opérateurs  $\mathcal{A}, \mathcal{G}$ , sont définis ci-dessus,  $\xi$  le tenseur piézoélectrique,  $\beta$  représente le tenseur de la primitivité électrique.

### Lois de comportement thermo-électro-viscoélastique

Une loi de constitutive d'un matériau thermo-électro-viscoélastique est donnée par

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi) - \theta M_e, \\ D = \beta E(\varphi) + \xi\varepsilon(u), \\ \dot{\theta} - \operatorname{div}(k\nabla\theta) = -M_e \nabla\dot{u} + q_e, \end{cases} \quad (3.84)$$

dans laquelle les opérateurs  $\mathcal{A}, \mathcal{G}$ , sont définis ci-dessus,  $\xi$  le tenseur piézoélectrique,  $\beta$  représente le tenseur de la primitivité électrique.

on utilise cette lois de comportement dans le chapitre 6 de cette thèse.

### 3.6.3 Les conditions de contact

Dans cette section nous allons énoncer les conditions de contact électrique associées aux problèmes piézoélectriques sur la partie  $\Gamma_3$  de la surface de contact. Nous considérons le cas lorsque la fondation est électriquement conductrice et son potentiel est maintenu à  $\varphi_0$ .

Nous supposons que la condition électrique sur la surface de contact est donnée par

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g)\Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.85)$$

où  $\psi$  et  $\Phi$  sont des fonctions données qui sont décrite ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qu'on peut obtenir de la manière suivante.

Lorsqu'il n'y a pas de contact (c'est-à-dire  $u_\nu < g$ ), il n'y a pas de charges électriques libres sur la surface et la composante normale du champ de déplacement électrique disparaît. Ainsi,

$$u_\nu < g \Rightarrow D \cdot \nu = 0. \quad (3.86)$$

Pendant le processus de contact (c'est-à-dire lorsque  $u_\nu \geq g$ ), la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé proportionnel à la différence entre le potentiel de la base et le potentiel surfacique du corps, avec une constante positive  $l$  comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \Rightarrow D \cdot \nu = l(\varphi - \varphi_0). \quad (3.87)$$

Combinions (3.86) et (3.87) pour obtenir

$$D \cdot \nu = l\chi_{[0,\infty)}(u_\nu - g)(\varphi - \varphi_0), \quad (3.88)$$

où  $\chi_{[0,\infty)}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \infty)$ , qui est donnée par

$$\chi_{[0,\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (3.88) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (3.88) et l'écrire comme (3.85) dans laquelle  $l\chi_{[0,\infty)}(u_\nu)$  est remplacée par  $\psi$  qui est une fonction régulière (va

être décrite ci-dessous) et  $\Phi$  est une fonction de troncature

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < -L, \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L, \end{cases}$$

où  $L$  est une constante positive très grande. Notons que cette troncature ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque  $L$  peut être arbitrairement grand, plus grand que toute tension de pointe possible dans le système, et donc dans les applications  $\Phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$ .

Les raisons de la régularisation (3.85) de (3.88) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction  $l\chi_{[0,\infty)}$  dans (3.88) par une fonction Lipschitzienne  $\psi$ . Un choix possible est

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ l\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq 1/\delta, \\ l & \text{si } r > 1/\delta, \end{cases} \quad (3.89)$$

où  $\delta > 0$  est un paramètre petit. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface et se stabilise quand la pénétration  $u_\nu - g$  atteint la valeur  $\frac{1}{\delta}$ . Deuxièmement, nous avons besoin du terme  $\Phi(\varphi - \varphi_0)$  pour rendre le terme  $\varphi - \varphi_0$  borné.

Notons que lorsque  $\psi \equiv 0$  dans (3.85), nous obtenons

$$D.\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.90)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (3.90) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [11, 56, 57]. La condition (3.85) à lieu de (3.90), introduit un couplage fort entre

les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard.

# Chapitre 4

## Problèmes de contact sans frottement en thermoélasto-viscoplasticité

Dans ce chapitre, nous considérons deux modèles mathématiques décrivant le contact sans frottement entre un corps thermo-élasto-viscoplastique et une base. Dans le premier modèle le processus est supposé dynamique et dans le deuxième modèle il est quasi-statique. Le contact est décrit par une condition de compliance normale sans frottement. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution moyennant les techniques de point fixe et des équations d'évolution d'ordre un avec des opérateurs monotones.

### 4.1 Problème mécanique et hypothèses ( cas dynamique)

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans le chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.1). Nous considérons un corps thermo-élasto-viscoplastique

en contact avec une base déformable où le processus est mécaniquement dynamique. Alors, la formulation mécanique du problème de contact sans frottement avec compliance normale en thermo-élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état est donnée par :

**Problème P.** Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ de variable interne d'état  $k : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  et un champ de température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \theta M_e \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\dot{k} = \phi(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(u), k) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -M_e\nabla\dot{u} + q_e \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$\rho\ddot{u} = \operatorname{Div}\sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.5)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu - g), \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \nu_j = k_e(\theta - \theta_R) - h_\Gamma(|\dot{u}_\Gamma|) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\theta = 0 \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad k(0) = k_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.10)$$

Les équations (4.1)-(4.2) représentent la loi constitutive thermoélasto-viscoplastique avec variable interne d'état. L'équation (4.3) décrit l'évolution du champ de température, où  $K := (k_{ij})$  représente le tenseur de conductivité thermique,  $M_e := (m_{ij})$  représente le tenseur de dilatation thermique,  $q_e$  la densité de la source thermique. La

condition aux limites de température associée est donnée par (4.8) où  $\theta_r$  est la température de la fondation, et  $k_e$  est le coefficient de l'échange entre le corps et l'obstacle. L'équation (4.9) signifie que la température disparaît sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T)$ . L'équation (4.4) représente l'équation du mouvement. Les équations (4.5)-(4.6) sont les conditions de déplacement-traction. L'équation (4.7) représente la condition de compliance normale sans frottement. Des conditions de compliance normale ont été introduites dans [38] dans l'étude des problèmes dynamiques pour des matériaux élastiques et linéaires et ont été utilisées plus tard dans la littérature, voir par exemple les références [8, 46]. Dans (4.10),  $u_0$  est le déplacement initial,  $v_0$  est la vitesse initiale et  $k_0$  est la variable interne d'état initiale, et  $\theta_0$  est la température initiale.

Dans l'étude du problème mécanique (4.1)-(4.10) nous supposons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a) \text{ Ils existent des constants } C_{\mathcal{A}}^1, C_{\mathcal{A}}^2 > 0 \text{ telles que} \\
 \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon)| \leq C_{\mathcal{A}}^1 |\varepsilon| + C_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\
 b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\
 \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\
 c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\
 d) \text{ L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega.
 \end{array} \right. \tag{4.11}$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\
 \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\
 b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\
 c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}.
 \end{array} \right. \tag{4.12}$$

L'opérateur de viscoplasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

La fonction  $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

La fonction de compliance normale  $p_{\nu} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_p > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_{\nu}(x, r_1) - p_{\nu}(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } r \mapsto p_{\nu}(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ d) \text{ } p_{\nu}(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \text{ et p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

la fonction  $h_{\tau} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{b) } x \mapsto p_\tau(\cdot, 0) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

De même, nous supposons que la densité de masse volumique et la fonction  $g$  satisfont :

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (4.17)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.18)$$

Nous supposons que les forces volumiques  $f_0$  et les tractions surfaciques  $f_2$  ont la régularité suivante

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (4.19)$$

Les tenseurs thermiques et la densité de la source de chaleur satisfont

$$M_e = (m_{ij}), m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad q_e \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.20)$$

et pour certains  $c_k > 0$ , pour tous  $(\zeta_i) \in R_d$  :

$$K = (k_{i,j}), k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad k_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq c_k \zeta_i \zeta_j \quad (4.21)$$

Enfin, les données initiales satisfont :

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad k_0 \in Y, \quad \theta_0 \in E, \quad \theta_R \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad (4.22)$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega)^d$  donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H,$$

et soit  $\|\cdot\|_H$  la norme associée, c'est-à-dire

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H.$$

En utilisant l'hypothèse (4.17) il vient que  $\|\cdot\|_H$  et  $|\cdot|_H$  sont des normes équivalentes sur  $H$ . De plus l'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, \|\cdot\|_H)$  est continue et dense. Nous notons par  $V'$  l'espace dual de  $V$ . En identifiant  $H$  avec son propre dual nous obtenons le triplet de Gelfand  $V \subset H \subset V'$ . Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  pour la dualité entre  $V'$  et  $V$  et rappelons que

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V. \quad (4.23)$$

L'hypothèse (4.19) permet de définir une fonction  $f(t) \in V'$  par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, \quad (4.24)$$

pour p.p.  $t \in (0, T)$  et on note que

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (4.25)$$

On définit l'espace suivant

$$E = \{\gamma \in H^1(\Omega) / \gamma = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Nous considérons aussi la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da \quad \forall u, v \in V. \quad (4.26)$$

## 4.2 Formulation variationnelle

Supposons que le problème (4.1)-(4.10) admet une solution régulière  $(u, \sigma, k, \theta)$  et soit  $v \in V$ . En utilisant la formule de Green (3.14), (4.4), (4.23) et la définition (4.24), nous obtenons

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = (f(t), v)_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da.$$

Puis, en utilisant la condition (4.7) combinée avec la définition (4.26) pour trouver

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V.$$

Maintenant pour la température on a pour tout  $\tau \in E$  :

$$\int_{\Omega} \dot{\theta} \tau dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(K \nabla \theta) \tau dx = \int_{\Omega} -(M \cdot \nabla \dot{u}) \tau dx + \int_{\Omega} q \tau dx$$

$$\int_{\Omega} \dot{\theta} \tau dx - \int_{\Omega} (K_{ij} \theta_{,i})_{,j} \tau dx = - \int_{\Omega} (M \cdot \nabla \dot{u}) \tau dx + \int_{\Omega} q \tau dx$$

D'après la formule de Green

$$\int_{\Omega} \dot{\theta} \tau dx - \int_{\Gamma} (k_{ij} \theta_{,i}) \nu_{j \cdot} \tau ds + \int_{\Omega} (k_{ij} \theta_{,j}) \tau_{,j} dx = - \int_{\Omega} (M \cdot \nabla \dot{u}) \tau dx + \int_{\Omega} q \tau dx$$

D'après la condition (4.8)

$$\int_{\Omega} \dot{\theta} \tau dx + \int_{\Gamma} (K_e(\theta - \theta_R) - h_\tau(|\dot{u}_\tau|)) \tau ds + \int_{\Omega} (K \nabla \theta) \nabla \tau dx = - \int_{\Omega} (M \cdot \nabla \dot{u}) \tau dx + \int_{\Omega} q \tau dx,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\theta} \tau dx + \int_{\Gamma_3} (K_e \theta) \tau ds + \int_{\Omega} (K \nabla \theta) \nabla \tau dx &= - \int_{\Omega} (M \nabla \dot{u}) \tau dx + \int_{\Gamma_3} h_{\tau} (|\dot{u}_{\tau}|) \tau ds \\ &+ \int_{\Omega} q \tau dx + \int_{\Gamma_3} K_e (\theta_R) \tau ds. \end{aligned}$$

On pose

$$Q : [0, T] \rightarrow E'.$$

$$K : E \rightarrow E'.$$

$$R : V \rightarrow E'.$$

$$(Q(t), \mu)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} K_e \theta_R \mu ds + \int_{\Omega} q \mu dx,$$

$$(K\tau, \mu)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} K_e \tau \mu ds,$$

$$(R\mu, v)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} h_{\tau} (|v_{\tau}|) \mu ds - \int_{\Omega} (M \nabla v) \mu dx.$$

Donc on obtient

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad \text{dans } E'.$$

On déduit la formulation variationnelle suivante du problème mécanique (4.1)-(4.10).

**Problème PV.** Trouver un champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , un champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$  et un champ de variable interne d'état  $k : [0, T] \rightarrow Y$ , et un champ de température  $\theta : [0, T] \rightarrow E$  tels que pour p.p.  $t \in (0, T)$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \theta M_e + \\ &\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (4.28)$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (4.29)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \quad (4.30)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad k(0) = k_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (4.31)$$

où  $Q : [0, T] \rightarrow E'$ ,  $K : E \rightarrow E'$ ,  $R : V \rightarrow E'$  sont donnés par

$$(Q(t), \mu)_W = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R \mu da + \int_{\Omega} q \mu dx, \quad (4.32)$$

$$(K\tau, \mu)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \mu da, \quad (R\mu, v)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} h_{\tau} (|v_{\tau}|) \mu da - \int_{\Omega} (M \nabla v) dx, \quad (4.33)$$

pour tout  $v \in V, \mu, \tau \in E$ .

### 4.3 Résultat d'existence et d'unicité

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du Problème  $PV$  nous avons le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** Sous les hypothèses (4.11)-(4.22), le problème  $PV$  admet une solution unique  $\{u, \sigma, k, \theta\}$  satisfaisant

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (4.34)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q}), \quad Div\sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (4.35)$$

$$k \in W^{1,2}(0, T; Y). \quad (4.36)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \quad (4.37)$$

Pour démontrer ce théorème nous construisons trois problèmes auxiliaires et nous démontrons l'existence et l'unicité de leurs solutions. Ensuite nous construisons une application contractante où son unique point fixe est la solution du problème faible du problème mécanique de départ.

Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant dans lequel la fonction  $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  donnée.

**Problème**  $PV_\eta$ . Trouver un champ des déplacements  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (4.38)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (4.39)$$

Concernant le problème  $PV_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.2.** Il existe une solution unique du problème  $PV_\eta$  ayant la régularité (4.34).

**Preuve.** Nous utilisons le résultat abstrait d'existence et d'unicité donnée par Théorème 2.3.1 Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.40)$$

Il résulte de (4.40) et (3.9) que

$$|Au - Av|_{V'} \leq c|\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.41)$$

De l'hypothèse (4.11) et du théorème de Krasnoselski (voir par exemple [31]), on déduit que  $A : V \rightarrow V'$  est continu et donc hémicontinu.

En utilisant les hypothèses (4.11)(b) et (3.9), il vient que

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}}|u - v|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (4.42)$$

ce qui implique que  $A : V \rightarrow V'$  est un opérateur monotone. Nous choisissons  $v = 0_V$  dans (4.42) pour obtenir

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - |A0_V|_{V'}|u|_V \\ &\geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}|A0_V|_{V'}^2, \quad \forall u \in V. \end{aligned}$$

Donc, l'opérateur  $A$  satisfait la condition (2.8) avec  $\omega = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}$  et  $\lambda = \frac{-1}{2m_{\mathcal{A}}}|A0_V|_{V'}^2$ .

Ensuite, par (4.40), (4.11)(a) et (3.9) on en déduit que

$$|Au|_{V'} \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V,$$

où  $c$  est une constante positive. Cela implique que  $A$  satisfait la condition (2.9).

Enfin, nous rappelons que par (4.22) et (4.24) on a  $f - \eta^1 \in L^2(0, T; V')$  et  $v_0 \in H$ .

Alors, il résulte du Théorème 2.3.1 qu'il existe une fonction unique  $v_{\eta}$  qui satisfait :

$$v_{\eta} \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{v}_{\eta} \in L^2(0, T; V'), \quad (4.43)$$

$$\dot{v}_{\eta}(t) + Av_{\eta}(t) + \eta^1(t) = f(t), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.44)$$

$$v_{\eta}(0) = v_0. \quad (4.45)$$

Soit  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  défini par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.46)$$

De (4.40) et (4.43)-(4.46) il résulte que  $u_\eta$  est l'unique solution du problème  $PV_\eta$  et elle satisfait la régularité (4.34). Ceci donne la partie d'existence du Lemme 4.2. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de la solution du problème (4.44)-(4.45), garantie par le Théorème 2.3.1. ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons la solution  $u_\eta$  du problème  $PV_\eta$  pour formuler le second problème auxiliaire suivant.

**Problème  $PV_\theta$ .** Trouver  $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow E$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = R\dot{u}_\eta(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \text{ dans } E', \quad (4.47)$$

$$\theta_\eta(0) = \theta_0. \quad (4.48)$$

**Lemme 4.3.** Le Problème  $PV_\theta$  admet une solution unique

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0; T; E') \cap L^2(0; T; E) \cap C(0; T; L^2(\Omega)) \quad , C > 0; \quad \forall \eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$$

satisfait

$$|\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.49)$$

**Preuve.** La vérification du résultat d'existence et d'unicité (4.47) découle de la résultat classique sur l'équation d'évolution du premier ordre, appliqué au triple d'évolution de Gelfand

$$E \subset F \equiv F' \subset E'$$

On vérifie que l'opérateur  $K$  est linéaire, continu, fortement monotone, et à partir de l'expression de l'opérateur  $R$ ,  $v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \Rightarrow Rv_\eta \in W^{1,2}(0, T; F)$ , comme  $Q \in W^{1,2}(0, T; E)$  puis  $Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0, T; E)$ .

On en déduit (4.49) voir [1].

On défini  $k_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$  par

$$k_\eta(t) = k_0 + \int_0^t \eta^2(s) ds. \quad (4.50)$$

Dans la troisième étape nous utilisons la solution  $u_\eta$  obtenu du Problème  $PV_\eta$ , la solution  $\theta_\eta$  obtenu du Problème  $PV_\theta$  et  $k_\eta$  défini par (4.50) pour considérer le problème de Cauchy pour le champ des contraintes suivant.

**Problème  $QV_\eta$ .** Trouver un champ des contraintes  $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$  tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}_\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.51)$$

Pour l'étude du Problème  $QV_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.4.** Le problème  $QV_\eta$  admet une solution unique  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ .

De plus, si  $\sigma_i$ ,  $u_i$ , et  $\theta_i$  représentent les solutions des problèmes  $QV_{\eta_i}$ ,  $PV_\eta$  et  $PV_{\theta_{\eta_i}}$ , respectivement, et  $k_i$  est défini dans (4.50) pour  $\eta_i \in L^2(0, T; V' \times Y)$ ,  $i = 1, 2$ , alors il existe  $c > 0$  tel que

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds \\ &\quad + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

**Preuve.** Soit  $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{Q}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{Q})$  donné par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds \quad (4.53)$$

pour  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  et  $t \in [0, T]$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ , nous utilisons (4.52) et (4.13) pour obtenir, pour tout  $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}} ds.$$

Il s'ensuit que pour  $p$  est assez grand, la puissance  $\Lambda_\eta^p$  est une contraction sur l'espace de Banach  $L^2(0, T; \mathcal{Q})$ . Donc il existe unique  $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  tel que  $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$ . De plus,  $\sigma_\eta$  est l'unique solution du problème  $QV_\eta$ . En utilisant (4.51), la régularité de  $u_\eta$ , la régularité de  $\theta_\eta$ , la régularité de  $k_\eta$  et les propriétés des opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , il en résulte que  $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$ .

Nous considérons maintenant  $(\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  et pour  $i = 1, 2$ , nous notons  $u_{\eta_i} = u_i$ ,  $\theta_{\eta_i} = \theta_i$ ,  $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$  et  $k_{\eta_i} = k_i$ . Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), k_i(s), \theta_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

et en utilisant les propriétés (4.12) et (4.13) de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \\ &+ \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.54)$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall pour déduire (4.52).

Dans la quatrième étape soit  $\eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$ , on note par  $u_\eta$  la solution du première problème auxiliaire,  $\theta_\eta$  la solution du deuxième problème auxiliaire, par  $\sigma_\eta$  la solution du troisième problème auxiliaire et soit  $k_\eta$  la variable interne d'état donnée

par (4.50). Maintenant on considère l'application

$$\Lambda\eta(t) = (\Lambda^1\eta(t), \Lambda^2\eta(t)) \in V' \times Y, \quad (4.55)$$

définie par

$$\begin{aligned} (\Lambda^1\eta(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} - (\theta_\eta M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\ &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} + j(u_\eta(t), v) \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\Lambda^2\eta(t) = \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), k_\eta(t)). \quad (4.57)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.5.** L'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in L^2(0, T; V' \times Y)$ .

**Preuve.** Soient  $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V' \times Y)$ . Nous écrivons pour  $i = 1, 2$ ,

$$u_{\eta_i} = u_i, \quad \dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, \quad \sigma_{\eta_i} = \sigma_i, \quad k_{\eta_i} = k_i, \quad \theta_{\eta_i} = \theta_i.$$

En utilisant (3.9), (4.12), (4.13) et (4.15) on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1\eta_1(t) - \Lambda^1\eta_2(t)\|_{V'}^2 &\leq c(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{Q}}^2 ds \\ &+ \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|k_1(s) - k_2(s)\|_Y^2 ds \\ &+ \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds), \end{aligned} \quad (4.58)$$

Nous utilisons l'estimation (4.52) pour voir que

$$\begin{aligned}
 |\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

Par des arguments similaires et de (4.57), (4.52) et (4.14) on déduit que

$$\begin{aligned}
 |\Lambda^2 \eta_1(t) - \Lambda^2 \eta_2(t)|_Y^2 &\leq c \left( |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right) \\
 &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 |\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq c (|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \\
 &\quad + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \\
 &\quad + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.61}
 \end{aligned}$$

De plus, de (4.38) on obtient

$$\left( \dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} + \left( \mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2) \right)_{\mathcal{Q}} + \left( \eta_1^1 - \eta_2^1, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} = 0 \tag{4.62}$$

p.p.  $t \in (0, T)$ .

En intégrant cette égalité sur l'intervalle  $[0, t]$  et en prenant en considération les conditions initiales  $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ , l'hypothèse (3.9) et (4.11) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds \quad (4.63)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité  $2ab \leq a^2/\gamma + \gamma b^2$ , pour obtenir

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.64)$$

D'autre part, à partir de (4.50)

$$|k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_Y^2 ds. \quad (4.65)$$

Car  $u_1$  et  $u_2$  ont la même valeur initiale on a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds.$$

De cette inégalité et (4.61) et (4.49) nous avons que

$$\begin{aligned} & |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \\ & \leq c \left( \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Il découle de (4.64) et (4.65) que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

En réitérant l'inégalité précédente  $n$  fois, nous constatons que

$$|\Lambda^n \eta_1 - \Lambda^n \eta_2|_{L^2(0, T; V' \times Y)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

Pour  $n$  assez grand, cette dernière inégalité implique que  $\Lambda^n$  est un opérateur contractant dans l'espace de Banach  $L^2(0, T; V' \times Y)$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour fournir la démonstration du Théorème 4.1

**Démonstration du théorème 4.1.** Soit  $\eta_* = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  le point fixe de  $\Lambda$  défini par (4.55)-(4.57) et on note

$$u = u_{\eta_*}, \quad k = k_{\eta_*}, \theta = \theta_{\eta_*} \tag{4.66}$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \theta M_e + \sigma_{\eta_*}. \tag{4.67}$$

On démontre que  $(u, \sigma, k, \theta)$  satisfait (4.27)-(4.31) et (4.34)-(4.37). En effet, nous écrivons (4.51) pour  $\eta = \eta_*$  et nous utilisons (4.66)-(4.67) pour obtenir (4.27). On utilise (4.38) pour  $\eta = \eta_*$  et la première égalité dans (4.66) pour trouver

$$(\ddot{u}, v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \tag{4.68}$$

Les égalités  $\Lambda^1(\eta_*) = \eta^1$  et  $\Lambda^2(\eta_*) = \eta^2$  combinées avec (4.56), (4.57), (4.66) et (4.67)

impliquent que

$$\begin{aligned}
(\eta^1(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} - (\theta M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) \\
&\quad + \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s) + \theta(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} \quad \forall v \in V, \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$\eta^2(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)). \quad (4.70)$$

De (4.70) et (4.66) on déduit que (4.29) est vérifié. En substituant (4.69) dans (4.68) et on utilise (4.27) pour voir que  $(u, \sigma, k, \theta)$  satisfait (4.28). Puis, (4.31), les régularités (4.34) et (4.37) résultent du Lemme 4.2 et (4.50). La régularité  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  résulte des lemmes 4.2, 4.3, 4.4, l'hypothèse (4.11) et (4.67). Finalement, (4.28) implique que

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V', \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

De (4.17) et (4.19) on trouve que  $\text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V')$  et nous déduisons que la régularité (4.35) est vérifiée, ce qui démontre la partie d'existence du Théorème 4.1.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (4.55) -(4.57) et l'unicité de la solution des problèmes  $PV_\eta, PV_\theta, QV_\eta$ . ■

## 4.4 Problème mécanique et hypothèses ( cas quasi-statique)

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans le chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.1). Nous considérons un corps thermo-élasto-viscoplastique en contact avec une base déformable où le processus est mécaniquement quasi-statique. Alors, la formulation mécanique du problème de contact sans frottement avec compliance normale en thermo-élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état est donnée par :

**Problème P.** Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ de variable interne d'état  $k : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  et un champ de temperature  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \theta M_e \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\dot{k} = \phi(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(u), k) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.72)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -M_e\nabla\dot{u} + q_e \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.73)$$

$$\operatorname{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.74)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.75)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.76)$$

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu - g), \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.77)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \nu_j = k_e (\theta - \theta_R) - h_\Gamma (|\dot{u}_\Gamma|) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.78)$$

$$\theta = 0 \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.79)$$

$$u(0) = u_0, \quad k(0) = k_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.80)$$

Les équations (4.71)-(4.72) représentent la loi constitutive thermoélasto-viscoplastique avec variable interne d'état. L'équation (4.73) décrit l'évolution du champ de température, où  $K := (k_{ij})$  représente le tenseur de conductivité thermique,  $M_e := (m_{ij})$  représente le tenseur de dilatation thermique,  $q_e$  la densité de la source thermique. La condition aux limites de température associée est donnée par (4.78) où  $\theta_r$  est la température de la fondation, et  $k_e$  est le coefficient de l'échange entre le corps et l'obstacle. L'équation (4.79) signifie que la température disparaît sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T)$ . L'équation (4.74) représente l'équation d'équilibre. Les équations (4.75)-(4.76) sont les conditions de déplacement-traction. L'équation (4.77) représente la condition de compliance normale sans frottement. Dans (4.80),  $u_0$  est le déplacement initial,  $v_0$  est la vitesse initiale et  $k_0$  est la variable interne d'état initiale, et  $\theta_0$  est la température initiale.

Dans l'étude du problème mécanique (4.71)-(4.80) nous supposons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Ils existent des constants } C_{\mathcal{A}}^1, C_{\mathcal{A}}^2 > 0 \text{ telles que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon)| \leq C_{\mathcal{A}}^1 |\varepsilon| + C_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ d) \text{ L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.81)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (4.82)$$

L'opérateur de viscoplasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (4.83)$$

La fonction  $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right. \quad (4.84)$$

La fonction de compliance normale  $p_{\nu} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_p > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_{\nu}(x, r_1) - p_{\nu}(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } r \rightarrow p_{\nu}(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ d) \text{ } p_{\nu}(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \text{ et p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.85)$$

la fonction  $h_{\tau} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{b) } x \mapsto p_\tau(\cdot, 0) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (4.86)$$

De même, nous supposons la fonction  $g$  satisfait :

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.87)$$

Nous supposons que les forces volumiques  $f_0$  et les tractions surfaciques  $f_2$  ont la régularité suivante

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (4.88)$$

Les tenseurs thermiques et la densité de la source de chaleur satisfont

$$M_e = (m_{ij}), m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad q_e \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.89)$$

et pour certains  $c_k > 0$ , pour tous  $(\zeta_i) \in R_d$  :

$$K = (k_{i,j}), k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad k_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq c_k\zeta_i\zeta_j \quad (4.90)$$

Enfin, les données initiales satisfont :

$$u_0 \in V, \quad k_0 \in Y, \quad \theta_0 \in E, \quad \theta_R \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad (4.91)$$

L'hypothèse (4.88) permet de définir une fonction  $f(t) \in V'$  par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, \quad (4.92)$$

pour p.p.  $t \in (0, T)$  et on note que

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (4.93)$$

On définit l'espace suivant

$$E = \{\gamma \in H^1(\Omega) / \gamma = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Nous considérons aussi la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu \, da \quad \forall u, v \in V. \quad (4.94)$$

## 4.5 Formulation variationnelle

Supposons que le problème (4.71)-(4.80) admet une solution régulière  $(u, \sigma, k, \theta)$  et soit  $v \in V$ . En utilisant la formule de Green (3.14), (4.74), et la définition (4.92), nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = (f(t), v)_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau \, da.$$

Puis, en utilisant la condition (4.77) combinée avec la définition (4.94) pour trouver

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V.$$

En utilisant la formule de Green nous obtenons

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T),$$

On déduit la formulation variationnelle suivante du problème mécanique (4.71)-(4.80).

**Problème PV.** Trouver un champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , un champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ , un champ de variable interne d'état  $k : [0, T] \rightarrow Y$ , et un champ de température  $\theta : [0, T] \rightarrow E$  tels que pour p.p.  $t \in (0, T)$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \theta M_e + \\ &\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (4.96)$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (4.97)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \quad (4.98)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad k(0) = k_0. \quad (4.99)$$

où  $Q : [0, T] \rightarrow E'$ ,  $K : E \rightarrow E'$ ,  $R : V \rightarrow E'$  sont donnés par

$$(Q(t), \mu)_W = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R \mu da + \int_{\Omega} q \mu dx, \quad (4.100)$$

$$(K\tau, \mu)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \mu da, \quad (R\mu, v)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} h_{\tau} (|v_{\tau}|) \mu da - \int_{\Omega} (M \nabla v) dx, \quad (4.101)$$

pour tout  $v \in V, \mu, \tau \in E$ .

## 4.6 Résultat d'existence et d'unicité

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du Problème  $PV$  nous avons le théorème suivant.

**Théorème 4.4.1.** Sous les hypothèses (4.81)-(4.91), le problème  $PV$  admet une solution unique  $\{u, \sigma, k, \theta\}$  satisfaisant

$$u \in C^1(\bar{I}; V), \quad (4.102)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q}), \quad \text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (4.103)$$

$$k \in W^{1,2}(0, T; Y). \quad (4.104)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \quad (4.105)$$

Pour démontrer ce théorème nous construisons trois problèmes auxiliaires et nous démontrons l'existence et l'unicité de leurs solutions. Ensuite nous construisons une application contractante où son unique point fixe est la solution du problème faible du problème mécanique de départ.

Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant dans lequel la fonction  $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  donnée.

**Problème  $PV_\eta$ .** Trouver un champ des déplacements  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (4.106)$$

$$u_\eta(0) = u_0. \quad (4.107)$$

Concernant le problème  $PV_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.4.2.** Le problème  $PV_\eta$  admet une solution unique  $u \in C^1(\bar{I}; V)$ .

**Preuve.** Nous utilisons le résultat abstrait d'existence et d'unicité donnée par Théorème 2.3.1 Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.108)$$

Il résulte de (4.108) et (3.9) que

$$|Au - Av|_{V'} \leq c|\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.109)$$

De l'hypothèse (4.81) et du théorème de Krasnoselski (voir par exemple [31]), on déduit que  $A : V \rightarrow V'$  est continu et donc hémicontinu.

En utilisant les hypothèses (4.81)(b) et (3.9), il vient que

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}}|u - v|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (4.110)$$

ce qui implique que  $A : V \rightarrow V'$  est un opérateur monotone. Nous choisissons  $v = 0_V$  dans (4.110) pour obtenir

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - |A0_V|_{V'}|u|_V \\ &\geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}|A0_V|_{V'}^2, \quad \forall u \in V. \end{aligned}$$

Donc, l'opérateur  $A$  satisfait la condition (2.8) avec  $\omega = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}$  et  $\lambda = \frac{-1}{2m_{\mathcal{A}}}|A0_V|_{V'}^2$ .

Ensuite, par (4.108), (4.81)(a) et (3.9) on en déduit que

$$|Au|_{V'} \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V,$$

où  $c$  est une constante positive. Cela implique que  $A$  satisfait la condition (2.9).

Enfin, nous rappelons que par (4.91) et (4.92) on a  $f - \eta^1 \in L^2(0, T; V')$  et  $v_0 \in H$ .

Alors, il résulte du Théorème 2.3.1 qu'il existe une fonction unique  $v_\eta$  qui satisfait :

$$v_\eta \in C(\bar{I}; V), \quad (4.111)$$

$$Av_\eta(t) + \eta^1(t) = f(t), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.112)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (4.113)$$

Soit  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  défini par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.114)$$

De (4.108) et (4.111)-(4.114) il résulte que  $u_\eta$  est l'unique solution du problème  $PV_\eta$  et elle satisfait la régularité (4.102). Ceci donne la partie d'existence du Lemme 4.4.2. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de la solution du problème (4.112)-(4.113), garantie par le Théorème 2.3.1. ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons la solution  $u_\eta$  du problème  $PV_\eta$  pour formuler le second problème auxiliaire suivant.

**Problème  $PV_\theta$**  . Trouver  $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow E$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = Ru_\eta(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \text{ dans } E', \quad (4.115)$$

$$\theta_\eta(0) = \theta_0. \quad (4.116)$$

**Lemme 4.4.3.** Le Problème  $PV_\theta$  admet une solution unique

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0; T; E') \cap L^2(0; T; E) \cap C(0; T; L^2(\Omega)) \quad , C > 0; \quad \forall \eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$$

satisfait

$$|\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.117)$$

**Preuve.** La vérification du résultat d'existence et d'unicité (4.115) découle de la résultat classique sur l'équation d'évolution du premier ordre, appliqué au triple d'évolution de Gelfand

$$E \subset F \equiv F' \subset E'$$

On vérifie que l'opérateur  $K$  est linéaire, continu, fortement monotone, et à partir de l'expression de l'opérateur  $R$ ,  $v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \Rightarrow Rv_\eta \in W^{1,2}(0, T; F)$ , comme  $Q \in W^{1,2}(0, T; E)$  puis  $Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0, T; E)$ .

On en déduit (4.117) voir [1].

On défini  $k_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$  par

$$k_\eta(t) = k_0 + \int_0^t \eta^2(s) ds. \quad (4.118)$$

Dans la troisième étape nous utilisons la solution  $u_\eta$  obtenu du Problème  $PV_\eta$ , la solution  $\theta_\eta$  obtenu du Problème  $PV_\theta$  et  $k_\eta$  défini par (4.118) pour considérer le problème de Cauchy pour le champ des contraintes suivant.

**Problème  $QV_\eta$ .** Trouver un champ des contraintes  $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$  tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.119)$$

Pour l'étude du Problème  $QV_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.4.4.** Le problème  $QV_\eta$  admet une solution unique  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ .

De plus, si  $\sigma_i$ ,  $u_i$ , et  $\theta_i$  représentent les solutions des problèmes  $QV_{\eta_i}$ ,  $PV_\eta$  et  $PV_{\theta_{\eta_i}}$ , respectivement, et  $k_i$  est défini dans (4.118) pour  $\eta_i \in L^2(0, T; V' \times Y)$ ,  $i = 1, 2$ , alors

il existe  $c > 0$  tel que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.120)$$

**Preuve.** Soit  $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{Q}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{Q})$  donné par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds \quad (4.121)$$

pour  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  et  $t \in [0, T]$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ , nous utilisons (4.121) et (4.83) pour obtenir, pour tout  $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq L_G \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}} ds.$$

Il s'ensuit que pour  $p$  est assez grand, la puissance  $\Lambda_\eta^p$  est une contraction sur l'espace de Banach  $L^2(0, T; \mathcal{Q})$ . Donc il existe unique  $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  tel que  $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$ . De plus,  $\sigma_\eta$  est l'unique solution du problème  $QV_\eta$ . En utilisant (4.119), la régularité de  $u_\eta$ , la régularité de  $\theta_\eta$ , la régularité de  $k_\eta$  et les propriétés des opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , il en résulte que  $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$ .

Nous considérons maintenant  $(\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  et pour  $i = 1, 2$ , nous notons  $u_{\eta_i} = u_i$ ,  $\theta_{\eta_i} = \theta_i$ ,  $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$  et  $k_{\eta_i} = k_i$ . Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), k_i(s), \theta_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

et en utilisant les propriétés (4.82) et (4.83) de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
 |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \\
 + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \forall t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall pour déduire (4.120).

Dans la quatrième étape soit  $\eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$ , on note par  $u_\eta$  la solution du première problème auxiliaire et  $\theta_\eta$  la solution du deuxième problème auxiliaire et par  $\sigma_\eta$  la solution du troisième problème auxiliaire et soit  $k_\eta$  la variable interne d'état donnée par (4.118). Maintenant on considère l'application

$$\Lambda\eta(t) = (\Lambda^1\eta(t), \Lambda^2\eta(t)) \in V' \times Y, \tag{4.123}$$

définie par

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^1\eta(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} - (\theta_\eta M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\
 &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} + j(u_\eta(t), v) \quad \forall v \in V.
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\Lambda^2\eta(t) = \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), k_\eta(t)). \tag{4.125}$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.4.5.** L'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in L^2(0, T; V' \times Y)$ .

**Preuve.** Soient  $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V' \times Y)$ . Nous écrivons pour  $i = 1, 2$ ,

$$u_{\eta_i} = u_i, \quad \dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, \quad \sigma_{\eta_i} = \sigma_i, \quad k_{\eta_i} = k_i, \quad \theta_{\eta_i} = \theta_i.$$

En utilisant (3.9), (4.82), (4.83) et (4.85) on obtient

$$\begin{aligned}
|\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds \\
&\quad + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds \\
&\quad + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds), \tag{4.126}
\end{aligned}$$

Nous utilisons l'estimation (4.120) pour voir que

$$\begin{aligned}
|\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \tag{4.127} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).
\end{aligned}$$

Par des arguments similaires et de (4.125), (4.120) et (4.84) on déduit que

$$\begin{aligned}
|\Lambda^2 \eta_1(t) - \Lambda^2 \eta_2(t)|_Y^2 &\leq c \left( |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right) \\
&\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \tag{4.128}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \\
 &\quad + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \\
 &\quad + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 ds) \quad \forall t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{4.129}$$

De plus, de (4.106) on obtient

$$\left( \dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} + \left( \mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2) \right)_{\mathcal{Q}} + \left( \eta_1^1 - \eta_2^1, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} = 0 \tag{4.130}$$

p.p.  $t \in (0, T)$ .

En intégrant cette égalité sur l'intervalle  $[0, t]$ , l'hypothèse (3.9) et (4.81) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds \tag{4.131}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité  $2ab \leq a^2/\gamma + \gamma b^2$ , pour obtenir

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.132}$$

D'autre part, à partir de (4.118)

$$|k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_Y^2 ds. \tag{4.133}$$

Car  $u_1$  et  $u_2$  ont la même valeur initiale on a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds.$$

De cette inégalité et (4.129) et (4.117) nous avons que

$$\begin{aligned} & |A\eta_1(t) - A\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \\ & \leq c \left( \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Il découle de (4.132) et (4.133) que

$$|A\eta_1(t) - A\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

En réitérant l'inégalité précédente  $n$  fois, nous constatons que

$$|A^n \eta_1 - A^n \eta_2|_{L^2(0, T; V' \times Y)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

Pour  $n$  assez grand, cette dernière inégalité implique que  $A^n$  est un opérateur contractant dans l'espace de Banach  $L^2(0, T; V' \times Y)$ . Alors  $A$  admet un point fixe unique.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour fournir la démonstration du Théorème 4.4.1

**Démonstration du théorème 4.4.1.** Soit  $\eta_* = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  le

point fixe de  $\Lambda$  défini par (4.123)-(4.125) et on note

$$u = u_{\eta_*}, \quad k = k_{\eta_*}, \quad \theta = \theta_{\eta_*} \quad (4.134)$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \theta M_e + \sigma_{\eta_*}. \quad (4.135)$$

On démontre que  $(u, \sigma, k, \theta)$  satisfait (4.95)-(4.99) et (4.102)-(4.105). En effet, nous écrivons (4.119) pour  $\eta = \eta_*$  et nous utilisons (4.134)-(4.135) pour obtenir (4.95). On utilise (4.106) pour  $\eta = \eta_*$  et la première égalité dans (4.134) pour trouver

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (4.136)$$

Les égalités  $\Lambda^1(\eta_*) = \eta^1$  et  $\Lambda^2(\eta_*) = \eta^2$  combinées avec (4.124), (4.125), (4.134) et (4.135) impliquent que

$$\begin{aligned} (\eta^1(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} - (\theta M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) \\ &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \theta(s)), \varepsilon(u(s)), k(s) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\eta^2(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)). \quad (4.138)$$

De (4.138) et (4.134) on déduit que (4.97) est vérifié. En substituant (4.137) dans (4.136) et on utilise (4.95) pour voir que  $(u, \sigma, k, \theta)$  satisfait (4.96). Puis, (4.99), les régularités (4.102) et (4.105) résultent du Lemme 4.4.2 et (4.118). La régularité  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  résulte des lemmes 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4, l'hypothèse (4.81) et (4.135). Finalement, (4.96) implique que

$$0 = \text{Div}\sigma(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V', \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

De (4.88) on trouve que  $\text{Div}\sigma \in L^2(0, T; V')$  et nous déduisons que la régularité (4.103) est vérifiée, ce qui démontre la partie d'existence du Théorème 4.4.1.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $A$  défini par (4.123) -(4.125) et l'unicité de la solution des problèmes  $PV_\eta$ ,  $PV_\theta$ ,  $QV_\eta$ .

■

# Chapitre 5

## Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

Ce chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement entre un matériau piézoélectrique avec variable interne d'état en considération un effet thermique et une base adhésive et conductrice où le processus est mécaniquement dynamique et électriquement statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale où l'adhésion est prise en considération, une condition de conductivité électrique régularisée et de la température. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration repose sur des équations d'évolution non linéaires avec des opérateurs monotones, sur des équations différentielles et des arguments de point fixe.

### 5.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans le chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.3). On considère un corps thermo-électro-élasto-viscoplastique

en contact avec une base adhésive et conductrice. Le contact est modélisé avec une condition de compliance normale avec adhésion, une condition de conductivité électrique régularisée et de la température. Sous ces considérations, le problème mécanique considéré se formule de la façon suivante.

**Problème  $P$ .** Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ d'adhésion  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ de variable interne d'état  $k : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , et un champ de temperature  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) - \theta M_e \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\dot{k} = \phi(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(u), k) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\varepsilon(u) - \mathbf{B}\nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.3)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -M_e\nabla\dot{u} + q_e \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.4)$$

$$\rho\ddot{u} = \operatorname{Div}\sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.5)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.6)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (5.7)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.8)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.9)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta)\mathbf{R}_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.10)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau|\mathbf{R}_\tau(u_\tau)|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.11)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (5.12)$$

$$D.\nu = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (5.13)$$

$$D.\nu = \psi(u_\nu)\Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.14)$$

$$-k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}v_j = k_e(\theta - \theta_R) - h_\Gamma(|\dot{u}_\Gamma|) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.15)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.16)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad k(0) = k_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.17)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (5.18)$$

Les équations (5.1)-(5.4) représentent la loi constitutive thermo-électro-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état. Les équations (5.5)-(5.6) représentent l'équation du mouvement et l'équation d'équilibre électrique, respectivement. Les conditions (5.7) et (5.8)

sont les conditions aux limites de déplacement-traction. La condition (5.9) représente la condition de compliance normale avec adhésion et (5.10) représente la condition de contact adhésif sur le plan tangentiel. L'équation (5.11) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion avec la condition initiale (5.18), où  $\beta_0$  est un champ d'adhésion donné. Les équations (5.12)-(5.13) représentent les conditions aux limites électriques. (5.14) est la condition de contact électrique sur  $\Gamma_3$ . L'évolution du champ de température  $\theta$  est régie par l'équation de la chaleur, obtenue de la conservation d'énergie et définie par l'équation différentielle donnée dans (5.4), où  $K := (k_{ij})$  représente le tenseur de conductivité thermique avec  $\text{div}(K\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$  et  $q_e(x;t)$  est la densité de la source thermique,  $M_e := (m_{ij})$  représente le tenseur de dilatation thermique,  $\theta_R$  est la température de fondation,  $k_e$  représente échange de la température entre le corps déformable et la fondation,  $h_\tau$  la fonction tangentielle. La condition aux limites de température associée est donnée par (5.15). Dans (5.16) la température est nulle sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Finalement, dans (5.17),  $u_0$  est le déplacement initial,  $v_0$  est la vitesse initiale  $k_0$  est la variable interne d'état initiale, et  $\theta_0$  est la température initiale.

Pour l'étude variationnelle du problème mécanique (5.1)-(5.18) nous avons besoin d'introduire les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Ils existent des constantes } C_{\mathcal{A}}^1, C_{\mathcal{A}}^2 > 0 \text{ telles que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon)| \leq C_{\mathcal{A}}^1 |\varepsilon| + C_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ d) \text{ L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

L'opérateur de viscoplasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

La fonction  $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Le tenseur de permittivité électrique  $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \mathbf{B}(x, E) = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \quad b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ c) \quad \text{Il existe une constante } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathbf{B}E \cdot E \geq m_B |E|^2 \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \quad e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (5.24)$$

La fonction de compliance normale  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \text{Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) \quad \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ c) \quad p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

La fonction de contact tangentiel  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \text{Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2)| \leq L_\tau |d_1 - d_2| \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) \quad \text{Il existe } M_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(x, d)| \leq M_\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ c) \quad \text{L'application } x \mapsto p_\tau(x, d) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}. \\ d) \quad \text{L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (5.26)$$

Un exemple d'une fonction de compliance normale  $p_\nu$  qui satisfait les conditions (5.25) est donné par  $p_\nu(r) = c_\nu r_+$  où  $c_\nu$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ .

La fonction de conductivité électrique de surface  $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \text{Il existe une constante } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) \quad \text{Il existe } M_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u)| \leq M_\psi \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ c) \quad \text{L'application } x \mapsto \psi(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ d) \quad \psi(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.27)$$

la fonction  $h_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ |h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{b) } x \mapsto p_\tau(\cdot, 0) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Nous supposons que la masse volumique satisfait :

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (5.29)$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques, les tractions surfaciques et la densité des charges électriques ont la régularité

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (5.30)$$

$$q_0 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_b \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (5.31)$$

$$q_e \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad \theta_r \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad (5.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = (k_{ij}), (k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega)), \\ \forall c_k \geq 0, \zeta_i \in \mathbb{R}^d, k_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq c_k \zeta_i \zeta_j \end{array} \right. \quad (5.33)$$

$$M_e = (m_{ij}), m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega). \quad (5.34)$$

Les coefficients d'adhésion satisfont :

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (5.35)$$

Finalelement, les données initiales satisfont :

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \theta_0 \in E, \quad k_0 \in Y. \quad (5.36)$$

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (5.37)$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3). \quad (5.38)$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega)^d$  donnée par

$$((u, v))_H = (\rho u, v) \quad \forall u, v \in H,$$

et soit  $\|\cdot\|_H$  la norme associée, c'est-à-dire

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H.$$

En utilisant l'hypothèse (5.29) il vient que  $\|\cdot\|_H$  et  $|\cdot|_H$  sont des normes équivalentes sur  $H$ . De plus l'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, \|\cdot\|_H)$  est continue et dense. Nous notons par  $V'$  l'espace dual de  $V$ . En identifiant  $H$  avec son propre dual nous obtenons le triplet de Gelfand  $V \subset H \subset V'$ . Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  pour la dualité entre  $V'$  et  $V$  et rappelons que

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V. \quad (5.39)$$

On définit l'espace suivant

$$E = \{\gamma \in H^1(\Omega) / \gamma = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Nous définissons  $j : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : V \times W \rightarrow W$ ,  $f : [0, T] \rightarrow V'$  et

$q : [0, T] \rightarrow W$ , respectivement par

$$j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta) R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu da, \quad (5.40)$$

$$(h(u, \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu) \Phi(\varphi - \varphi_0) \zeta da, \quad (5.41)$$

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da, \quad (5.42)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_b(t) \zeta da, \quad (5.43)$$

pour tout  $u, v \in V$ ,  $\varphi, \zeta \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Nous notons que de (5.30)-(5.31) il vient que

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad q \in W^{1,p}(0, T; W). \quad (5.44)$$

## 5.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (3.14), les relations (5.5), (5.39) et la définition (5.42), nous obtenons

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = (f(t), v)_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da.$$

Puis, en utilisant les conditions (5.9) et (5.10) combinées avec la définition (5.40), pour voir que

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(\beta(t), u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V.$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Green (3.21) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (5.6), (5.12), (5.13) et la définition (5.43) pour

obtenir

$$(D(t), \nabla \zeta)_H = (q(t), \zeta)_W + \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu da.$$

Combinons cette dernière égalité avec (5.3), (5.14) et la définition (5.41), nous trouvons

$$(\mathbf{B} \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_H + (h(u(t), \varphi(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W.$$

En suit, nous utilisons la formule de Green et (5.4) ainsi que les conditions (5.15), (5.16) et la définition (5.33) et (5.34) nous trouvons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\theta} \tau dx + \int_{\Gamma_3} (K_e \theta) \tau da + \int_{\Omega} (K \nabla \theta) \nabla \tau dx &= - \int_{\Omega} (M \nabla \dot{u}) \tau dx + \int_{\Gamma_3} h_{\tau} |\dot{u}_{\tau}| \tau da \\ &+ \int_{\Omega} q \tau dx + \int_{\Gamma_3} K_e (\theta_R) \tau da. \end{aligned}$$

On pose

$Q : [0, T] \rightarrow E'$ ,  $K : E \rightarrow E'$ ,  $R : V \rightarrow E'$  sont donnés par

$$\begin{aligned} (Q(t), \mu)_{E' \times E} &= \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R \mu da + \int_{\Omega} q \mu dx, \\ (K \tau, \mu)_{E' \times E} &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \mu da, \\ (R \mu, v)_{E' \times E} &= \int_{\Gamma_3} h_{\tau} (|v_{\tau}|) \mu da - \int_{\Omega} (M \nabla v) dx, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in V, \mu, \tau \in E$ .

Donc nous obtient

$$\dot{\theta}(t) + K \theta(t) = R \dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T)$$

Alors, la formulation variationnelle du problème mécanique (5.1)-(5.18) est la sui-

vante.

**Problème PV.** Trouver un champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , un champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ , un champ potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , un champ d'adhésion  $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ , un champ de variable interne d'état  $k : [0, T] \rightarrow Y$ , et un champ de temperature  $\theta : [0, T] \rightarrow E$  tels que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{F}(\varepsilon(u(t))) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) - \theta M_e \quad (5.45) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(s) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \end{aligned}$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (5.46)$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T), \quad (5.47)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \quad (5.48)$$

$$(B\nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_H = (h(t), \varphi(t), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, t \in (0, T), \quad (5.49)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t) (\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau(t))|^2) - \varepsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (5.50)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad k(0) = k_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (5.51)$$

Pour étudier ce problème, nous posons l'hypothèse de petitesse suivante.

$$M_\psi \leq \frac{m_B}{\tilde{c}_0^2}, \quad (5.52)$$

où  $M_\psi$ ,  $m_B$  et  $\tilde{c}_0$  sont donnés dans (5.27), (5.23) et (3.19) respectivement. L'élimination de cette hypothèse reste une question pour les futures recherches, car elle est faite pour des raisons mathématiques.

L'existence et l'unicité de la solution du problème PV sont données dans la section suivante. Pour cela, nous considérons la remarque suivante.

**Remarque 1.** Nous notons que, dans les problème  $P$  et  $PV$  nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction  $0 \leq \beta \leq 1$ . De plus, l'équation (5.50) garantit que  $\beta(x, t) \leq \beta_0(x)$  et par conséquent, l'hypothèse (5.37) indique que  $\beta(x, t) \leq 1$  pour  $t \geq 0$ , p.p.  $x \in \Gamma_3$ . D'autre part, si  $\beta(x, t_0) = 0$  en  $t_0$  alors il vient (5.50) que  $\beta(x, t) = 0$  pour tout  $t \geq t_0$  et par conséquent,  $\beta(x, t) = 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , p.p.  $x \in \Gamma_3$ . Nous concluons que  $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$  pour tout  $t \in [0, T]$ , p.p.  $x \in \Gamma_3$ .

### 5.3 Résultat d'existence et d'unicité

Pour établir l'existence et l'unicité du problème  $PV$ , nous avons le théorème suivant.

**Théorème 5.1.** Sous les hypothèses (5.19)-(5.38) et (5.52) le problème  $PV$  admet une solution unique  $\{u, \sigma, k, \varphi, \beta, \theta\}$  satisfaisant

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (5.53)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (5.54)$$

$$k \in W^{1,2}(0, T; Y), \quad (5.55)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (5.56)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (5.57)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.58)$$

Nous concluons que, sous les hypothèses (5.19)-(5.38) et (5.52) le problème mécanique (5.1)-(5.18) admet une solution faible unique avec la régularité (5.53)-(5.58).

La démonstration du Théorème 5.1 est obtenue en plusieurs étapes. Elle repose sur un résultat classique concernant les équations d'évolutions avec des opérateurs monotones et des arguments de point fixe.

Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant où la fonction  $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ .

**Problème  $PV_\eta$ .** Trouver un champ des déplacements  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (5.59)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (5.60)$$

Concernant le problème  $PV_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.2.** Il existe une solution unique du problème  $PV_\eta$  ayant la régularité (5.53).

**Preuve.** Voir la démonstration du Lemme 5.2 (Chapitre 4). [cas dynamique] ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons la solution  $u_\eta$  du problème  $PV_\eta$  pour formuler le second problème auxiliaire suivant.

**Problème  $QV_\eta$ .** Trouver un champ potentiel électrique  $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\zeta)_H + (h(u_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W, \quad (5.61)$$

pour tout  $\zeta \in W$  et  $t \in [0, T]$ .

Nous avons le résultat suivant pour le problème  $QV_\eta$ .

**Lemme 5.3.**  $QV_\eta$  admet une solution unique  $\varphi_\eta$  qui satisfait la régularité (5.56).

De plus, si  $\varphi_i$  représente la solution du problème  $QV_{\eta_i}$  pour  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$ , alors il existe  $c > 0$  tel que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c|u_1(t) - u_2(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.62)$$

**Preuve.** Soit  $t \in [0, T]$ . En utilisant le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur  $A_\eta(t) : W \rightarrow W$  par :

$$(A_\eta(t)\varphi, \zeta)_W = (\mathbf{B}\nabla\varphi, \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\zeta)_H + (h(u_\eta(t), \varphi), \zeta)_W, \quad (5.63)$$

pour tout  $\varphi, \zeta \in W$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ , les hypothèses (5.23) et (5.41) impliquent que

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \\ & \geq m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\eta\nu}(t)) (\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \Phi(\varphi_2 - \varphi_0)) (\varphi_1 - \varphi_2) da. \end{aligned}$$

La positivité de  $\psi$  combinée avec la monotonie de la fonction  $\Phi$  nous donnent

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2, \quad (5.64)$$

alors  $A_\eta(t)$  est un opérateur fortement monotone sur  $W$ . D'autre part, nous utilisons à nouveau (5.23), (5.24), (5.27) et (5.41) nous avons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W \leq c_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\zeta|_W + \int_{\Gamma_3} M_\psi |\varphi_1 - \varphi_2| |\zeta| da \quad \forall \zeta \in W, \quad (5.65)$$

où  $c_B$  est une constante positive qui dépend de  $\mathbf{B}$ . Il résulte de (5.65) et (3.19) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W \leq (c_B + M_\psi \tilde{c}_0^2) |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\zeta|_W,$$

ainsi,

$$|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2|_W \leq (c_B + M_\psi \tilde{c}_0^2) |\varphi_1 - \varphi_2|_W, \quad (5.66)$$

ce qui montre que  $A_\eta : W \rightarrow W$  est de Lipschitz. Puisque  $A_\eta$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur  $W$ , nous déduisons qu'il existe un élément

unique  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (5.67)$$

Nous combinons maintenant (5.63) et (5.67) pour démontrer que  $\varphi_\eta(t) \in W$  est l'unique solution de l'équation variationnelle non linéaire (5.61).

Ensuite, nous montrons que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ . Soient  $t_1, t_2 \in [0, T]$ . Pour simplifier l'écriture on note  $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$ ,  $q(t_i) = q_i$ , pour  $i = 1, 2$ . En utilisant (5.61), (5.23), (5.24) et (5.41) nous trouvons

$$\begin{aligned} m_B|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 &\leq c_\mathcal{E}|u_1 - u_2|_V|\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W|\varphi_1 - \varphi_2|_W \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} |\psi(u_1)\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2)\Phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da, \end{aligned} \quad (5.68)$$

où  $c_\mathcal{E}$  est une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ .

De  $|\psi(u_i)| \leq M_\psi$ ,  $|\Phi(\varphi_1 - \varphi_0)| \leq L$ , la fonction de Lipschitz  $\psi$  et  $\Phi$  et l'inégalité (3.19) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} |\psi(u_1)\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2)\Phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0 |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W. \end{aligned}$$

L'insertion de cette dernière inégalité dans (5.68) nous donne

$$m_B|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq (c_\mathcal{E} + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0) |u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W + M_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_W. \quad (5.69)$$

Il résulte de l'inégalité (5.69) et l'hypothèse (5.52) que

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c(|u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W). \quad (5.70)$$

Car  $u_\eta \in C^1(0, T; H)$  et  $q \in W^{1,p}(0, T; W)$ , l'inégalité (5.69) implique que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ .

Soient  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$  et  $u_{\eta_i} = u_i$ , pour  $i = 1, 2$ . nous utilisons (5.61) et des arguments semblables à ceux utilisés dans la démonstration de (5.69) pour déduire que

$$m_B |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq (c_\mathcal{E} + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0) |u_1(t) - u_2(t)|_V + M_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W,$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Cette inégalité combinée avec l'hypothèse (5.52) nous donne (5.62). ■

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement  $u_\eta$  que nous avons obtenu dans Lemme 5.2 et nous considérons le problème suivant.

**Problème  $PV_\beta$ .** Trouver un champ d'adhésion  $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = - \left( \beta_\eta(t) \left( \gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(u_{\eta\tau}(t))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+, \quad (5.71)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0, \quad (5.72)$$

où  $u_{\eta\nu}, u_{\eta\tau}$  désignent respectivement la composante normale et tangentielle de la fonction  $u_\eta$ . Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.4.** Le problème  $PV_\beta$  admet une solution unique  $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$ .

**Preuve.** Soit l'application  $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  définie par

$$F_\eta(t, \beta) = - \left( \beta \left( \gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(u_{\eta\tau}(t))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+,$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et  $\beta \in L^2(\Gamma_3)$ . Il résulte d'après les propriétés des opérateurs de troncature  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  que  $F_\eta$  est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, et elle est uniformément continue par rapport au temps. De plus, pour tout  $\beta \in L^2(\Gamma_3)$ , l'application  $t \rightarrow F_\eta(t, \beta)$  appartient à  $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$ . L'application  $F_\eta$  est lipschitzienne par rapport au second variable  $\beta$  et uniformément continue par rapport

au temps  $t$ . Alors, le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence d'une fonction unique  $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$  qui satisfait (5.71) et (5.72). En outre, les arguments utilisés dans Remarque 1 indiquent que  $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$  pour tout  $t \in [0, T]$ , p.p. sur  $\Gamma_3$ . Par conséquent, par la définition de l'ensemble  $Z$ , on trouve que  $\beta_\eta \in Z$ , ce qui conclut la démonstration du Lemme 5.4. ■

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ de déplacement  $u_\eta$  que nous avons obtenu dans Lemme 5.2 et nous considérons le problème suivant.

**Problème  $PV_\theta$**  . Trouver  $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow E$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = R\dot{u}_\eta(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \text{ dans } E', \quad (5.73)$$

$$\theta_\eta(0) = \theta_0. \quad (5.74)$$

**Lemme 5.5.** Le Problème  $PV_\theta$  admet une solution unique

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0; T; E') \cap L^2(0; T; E) \cap C(0; T; L^2(\Omega)) \quad , C > 0; \quad \forall \eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$$

satisfait

$$|\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (5.75)$$

**Démonstration.** La vérification du résultat d'existence et d'unicité (5.73) découle du résultat classique sur l'équation d'évolution du premier ordre, qui peut être considérée comme un cas particulier du théorème 2 ( voir [2] ) appliquée au triplet de Gelfand  $E \subset F \equiv F' \subset E'$ . On vérifie que l'opérateur  $K : E \rightarrow E'$  est linéaire, continue et fortement monotone, et à partir de l'expression de l'opérateur  $R$ ,  $v_\eta \in W^{1,2}(0; T; V) \implies Rv_\eta \in W^{1,2}(0; T; F)$ , comme  $Q \in W^{1,2}(0; T; E')$  alors

$Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0; T; E')$ . Maintenant pour  $\eta_1, \eta_2 \in W$ , nous avons pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t))_{E' \times E} + (K\theta_{\eta_1}(t) - K\theta_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t))_{E' \times E} = \\ (Rv_{\eta_1}(t) - Rv_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t))_{E' \times E}. \end{aligned}$$

Puis intégrant la dernière propriété sur  $(0, T)$  en utilisant la forte monotonie de  $K$  et la continuité de Lipshitz de  $R : V \rightarrow E'$ , on en déduit (5.75).

Maintenant, nous définissons  $k_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$  par

$$k_\eta(t) = k_0 + \int_0^t \eta^2(s) ds. \quad (5.76)$$

Dans la cinquième étape, nous utilisons le champ de déplacement  $u_\eta$  obtenu dans Lemme 5.2 et  $\theta_\eta$  obtenu dans Lemme 4.5 et  $k_\eta$  défini dans (5.76) pour considérer le problème de Cauchy suivant pour le champ des contraintes.

**Problème  $SV_\eta$ .** Trouver un champ des contraintes  $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$  tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.77)$$

Dans l'étude du problème  $SV_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**lemme 5.6.** Le problème  $SV_\eta$  admet une solution unique  $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$ . De plus, si  $\sigma_i$ ,  $u_i$  et  $\theta_i$  représentent les solutions du problème  $SV_{\eta_i}$ ,  $PV_{\eta_i}$ ,  $PV_{\theta_{\eta_i}}$  respectivement, et  $K_i$  est défini dans (5.76) pour  $\eta_i \in L^2(0; T; V' \times Y)$ ,  $i = 1, 2$ , alors il existe  $c > 0$  tel que

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds \\ + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds), \text{ for all } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

**Preuve.** Nous considérons l'opérateur  $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{Q}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{Q})$  défini par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds, \quad (5.79)$$

pour tout  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  et  $t \in [0, T]$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ , nous utilisons (5.79) et (5.21) pour trouver que, pour tout  $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}} ds.$$

De cette inégalité il résulte que, pour  $p$  assez grand,  $\Lambda_\eta^p$  est un opérateur contractant dans l'espace de Banach  $L^2(0, T; \mathcal{Q})$ , donc il existe unique  $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  tel que  $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$ . De plus,  $\sigma_\eta$  est l'unique solution de problème  $SV_\eta$ .

En utilisant (5.77), la régularité de  $u_\eta$ , la régularité de  $k_\eta$  et les propriétés des opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  pour voir que  $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$ .

Considérons maintenant  $(\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ . Pour  $i = 1, 2$ , on note  $u_{\eta_i} = u_i$ ,  $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ ,  $\theta_{\eta_i} = \theta_i$  et  $k_{\eta_i} = k_i$ . Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), k_i(s), \theta_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

et en utilisant les propriétés (5.20) et (5.21) de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \\ &\forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(5.80)

De cette inégalité et de l'inégalité de Gronwall nous déduisons l'estimation (5.78). ■

Enfin, comme conséquence des résultats précédents et de l'utilisation des propriétés des opérateurs  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\phi$  et  $j$  pour  $t \in [0, T]$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda\eta(t) = (\Lambda^1\eta(t), \Lambda^2\eta(t)) \in V' \times Y, \quad (5.81)$$

défini par

$$\begin{aligned} (\Lambda^1\eta(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} - (\theta_\eta M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\ &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(u_\eta(s)), k_\eta(s), \theta_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} + j(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v) \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\Lambda^2\eta(t) = \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), k_\eta(t)). \quad (5.83)$$

Ici, pour chaque  $\eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$ ,  $u_\eta$ ,  $\varphi_\eta$ ,  $\beta_\eta$ ,  $\theta_\eta$  et  $\sigma_\eta$  représentent le champ des déplacements, le champ potentiel électrique, le champ d'adhésion, la température et le champ des contraintes obtenus dans lemmes 5.2, 5.3, 5.5, 5.6 respectivement, et  $k_\eta$  est la variable interne d'état donnée par (5.76). Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.7.** L'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in L^2(0, T; V' \times Y)$ .

**Preuve.** Soient  $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V' \times Y)$ . Nous écrivons pour  $i = 1, 2$ ,

$$u_{\eta_i} = u_i, \quad \dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, \quad \varphi_{\eta_i} = \varphi_i, \quad \beta_{\eta_i} = \beta_i, \quad \sigma_{\eta_i} = \sigma_i, \quad k_{\eta_i} = k_i, \quad \theta_{\eta_i} = \theta_i.$$

En utilisant (3.9), (5.20), (5.21), (5.24), (5.25), (5.26) et la définition de  $R_\nu$ ,  $R_\tau$  on obtient

$$\begin{aligned}
\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t) \Big|_{V'}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_Q^2 ds \\
&\quad + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
&\quad + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds),
\end{aligned} \tag{5.84}$$

De (5.78) et (5.62) on trouve

$$\begin{aligned}
|\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t) \Big|_{V'}^2 &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right. \\
&\quad + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \\
&\quad \left. |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Par des arguments similaires et de (5.83), (5.78) et (5.22) on déduit que

$$\begin{aligned}
|\Lambda^2 \eta_1(t) - \Lambda^2 \eta_2(t) \Big|_Y^2 &\leq c \left( |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_Q^2 + |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right) \\
&\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \right. \\
 &+ |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \\
 &\left. + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.87)
 \end{aligned}$$

De plus, de (5.59) on obtient

$$\begin{aligned}
 \left( \dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} + \left( \mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2) \right)_{\mathcal{Q}} + \left( \eta_1^1 - \eta_2^1, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} = 0 \\
 \text{p.p. } t \in (0, T).
 \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité sur l'intervalle  $[0, t]$  et en prenant en considération les conditions initiales  $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ , l'hypothèse (5.9) et (3.9) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité  $2ab \leq a^2/\gamma + \gamma b^2$ , nous en déduisons que

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.88)$$

D'autre part, par le problème de Cauchy (5.71)-(5.72) on peut écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left( \beta_i(s) \left( \gamma_\nu (R_\nu(u_{i\nu}(s)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(u_{i\tau}(s))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+ ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \left| \beta_1(s) (R_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \beta_2(s) (R_\nu(u_{2\nu}(s)))^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\
 &\quad + c \int_0^t \left| \beta_1(s) |\mathbf{R}_\tau(u_{1\tau}(s))|^2 - \beta_2(s) |\mathbf{R}_\tau(u_{2\tau}(s))|^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds.
 \end{aligned}$$

Notons que  $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$  et par la définition de  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  nous voyons que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Nous appliquons l'inégalité de Gronwall et nous utilisons la relation (3.11) pour obtenir

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds. \quad (5.89)$$

De plus, à partir de (5.76) nous avons

$$|k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_Y^2 ds. \quad (5.90)$$

Car  $u_1$  et  $u_2$  ont la même valeur initiale on a

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds.$$

De cette inégalité, (5.87), (5.75), (5.76) et (5.89) nous trouvons que

$$\begin{aligned}
 & |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \\
 & \leq c \left( \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + |k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |k_1(s) - k_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

Il découle de (5.88) et (5.90) que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

En réitérant l'inégalité précédente  $n$  fois, nous constatons que

$$|\Lambda^n \eta_1 - \Lambda^n \eta_2|_{L^2(0, T; V' \times Y)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

Pour  $n$  assez grand, cette dernière inégalité implique que  $\Lambda^n$  est un opérateur contractant dans l'espace de Banach  $L^2(0, T; V' \times Y)$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$ .

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 5.1 c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique  $P$ .

**Démonstration du théorème 5.1.** Soit  $\eta_* = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$  le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (5.81)-(5.83) et on note

$$u = u_{\eta_*}, \quad k = k_{\eta_*}, \quad \varphi = \varphi_{\eta_*}, \quad \beta = \beta_{\eta_*}, \quad \theta = \theta_{\eta_*} \quad (5.91)$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi - \theta M_e + \sigma_{\eta_*}. \quad (5.92)$$

Nous démontrons que  $(u, \sigma, k, \varphi, \beta, \theta)$  satisfait (5.45)-(5.51) et (5.53)-(5.58). En effet, nous écrivons (5.77) pour  $\eta = \eta_*$  et nous utilisons (5.91)-(5.92) pour obtenir (5.45).

On utilise (5.59) pour  $\eta = \eta_*$  et la première égalité dans (5.91) pour trouver que

$$(\ddot{u}, v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (5.93)$$

Les égalités  $\Lambda^1(\eta_*) = \eta^1$  et  $\Lambda^2(\eta_*) = \eta^2$  combinées avec (5.82), (5.83), (5.91) et (5.92) impliquent que

$$\begin{aligned} (\eta^1(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} - (\theta M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \left( \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s) + \theta M_e, \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + j(\beta(t), u(t), v) \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\eta^2(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(u_\eta(t)), k_\eta(t)). \quad (5.95)$$

De (5.95) et (5.76) on déduit que (5.46) est satisfait. En substituant (5.94) dans (5.93) et on utilise (5.45) pour voir que (5.47) est satisfait. Nous écrivons maintenant (5.61), (5.71) et (5.73) pour  $\eta = \eta_*$  et nous utilisons (5.91) pour trouver (5.48), (5.49) et (5.50). Après, (5.51), les régularités (5.53), (5.55), (5.56), (5.57) et (5.58) résultent de Lemme 5.2, Lemme 5.3, Lemme 5.4, et lemme 5.5 la relation (5.76).

La régularité  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$  suit de Lemme 5.6, les hypothèses (5.19), (5.24) et (5.92). Finalement, (5.47) implique que

$$\rho\ddot{u} = \text{Div}\sigma + f_0 \quad \text{dans } V', \text{ p.p. } t \in (0, T)$$

et de (5.29) et (5.30) on trouve que  $\text{Div}\sigma \in L^2(0, T; V')$ . On en déduit que la régularité (5.54) est vérifiée.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et de l'unicité de la solution des problèmes  $PV_\eta$ ,  $QV_\eta$ ,  $PV_\beta$ ,  $PV_\theta$  et  $SV_\eta$  garantie par Lemmes 5.2, 5.3, 5.4 5.5 et 5.6.

Nous concluons que  $(u, \sigma, k, \varphi, \beta, \theta)$  est une solution du problème  $PV$  qui satisfait (5.53)-(5.58). ■

# Chapitre 6

## Problème de contact avec frottement en piézoélectricité avec effets thermiques

Nous considérons un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps thermo-électro-viscoélastique et une fondation électriquement conductrice. Le contact est modélisé par une condition de Signorini, une condition électrique régularisée et de la température. Le frottement est formulé par la loi de Coulomb. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration repose sur des arguments d'inégalité d'évolution du second ordre du système à d'inégalité d'évolution du premier ordre et le théorème de point fixe de Banach. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [54].

### 6.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans le chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.3). On considère un corps thermo-électro-viscoélastique en

contact avec une fondation électriquement conductrice. le contact et le frottement sont modélisés avec une condition de Signorini et une loi de frottement de Coulomb non locale, une condition de conductivité électrique régularisée et de la température. Sous ces considérations, le problème mécanique se formule de la façon suivante.

**Problème P.** Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0.T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0.T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , un champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0.T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0.T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi) - \theta M_e \quad \text{dans } \Omega \times [0.T], \quad (6.1)$$

$$D = \beta E(\varphi) + \xi \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times [0.T], \quad (6.2)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0.T], \quad (6.3)$$

$$\text{div } D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0.T], \quad (6.4)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(k \nabla \theta) = -M_e \nabla \dot{u} + q_e \quad \text{dans } \Omega \times [0.T], \quad (6.5)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial v} v_j = k_e (\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0.T], \quad (6.6)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (6.7)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0.T], \quad (6.8)$$

$$\sigma_\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0.T], \quad (6.9)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad u_\nu \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0.T], \quad (6.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu p |R \sigma_\nu| \\ |\sigma_\tau| < \mu p |R \sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p |R \sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0.T], \quad (6.11)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0.T], \quad (6.12)$$

$$D\nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0.T], \quad (6.13)$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0 \text{ et } \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0.T]. \quad (6.14)$$

Pour ce problème, les équations (6.1)-(6.2) représentent la loi de comportement thermo-électro-viscoélastique du matériel, nous notons  $\varepsilon(u)$  (respectivement ;  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\xi$ ,  $\xi^*$ ,  $\beta$ ) le tenseur de déformation linéarisée (respectivement ; champ électrique, le tenseur non linéaire de viscosité, le tenseur d'élasticité, le tenseur piézoélectrique du troisième ordre et sa transposition, le tenseur de permittivité électrique),  $\theta$  représente la température,  $M_e := (m_{ij})$  représente le tenseur de dilatation thermique, (6.3) représente l'équation du mouvement où  $\rho$  représente la masse volumique, (6.4) représente l'équation d'équilibre pour le champ des déplacement électriques, l'équation (6.5) décrit l'évolution du champ de température, où  $k := (k_{ij})$  représente le tenseur de conductivité thermique,  $q_e$  la densité de la source thermique. La condition aux limites de température associée est donnée par (6.6) où  $\theta_r$  est la température de la fondation, et  $k_e$  est le coefficient de l'échange entre le corps et l'obstacle. L'équation (6.7) signifie que la température disparaît sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T)$ . Les équations (6.8)-(6.9) représentent les condition aux limites de déplacement-traction. Les équations (6.10)-(6.11) sont les conditions de contact du Signorini avec la loi de frottement de Coulomb non local.  $u_\nu$  et  $u_\tau$  (respectivement ;  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$ ) désignent le déplacement normal et le déplacement tangentiel (respectivement ; le contrainte normale et contrainte tangentielle).  $R$  représentera un opérateur de fonctionnalisation qui est un opérateur linéaire

et continu  $R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Gamma)$ . (6.12), (6.13) représentent les conductions aux limites électriques. Finalement, dans (6.14),  $u_0$  est le déplacement initial,  $v_0$  est la vitesse initiale et  $\theta_0$  est la température initiale.

Dans l'étude du problème (6.1)- (6.14) nous considérons les hypothèses suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d, \\ (b) : \exists M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que : } |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq M_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega, \\ (c) : \exists m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que : } |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2| \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega, \\ (d) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (e) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{Q}, \end{array} \right. \quad (6.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d, \\ (b) : \exists M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que : } |\mathcal{G}(x, \xi_1) - \mathcal{G}(x, \xi_2)| \leq M_{\mathcal{G}} |\xi_1 - \xi_2| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega, \\ (d) : \text{L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \xi) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, \\ (e) : \text{l'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{Q}, \end{array} \right. \quad (6.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \xi = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) : \xi(x, \tau) = (e_{ijk}(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega, \\ (c) : e_{ijk} = e_{ikj} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \end{array} \right. \quad (6.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \beta = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (b) : \beta(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, p.p. x \in \Omega, \\ (c) : b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \\ (d) : \exists m_\beta > 0 \text{ telle que : } b_{ij}(x) E_i E_j \geq m_\beta |E|^2 \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.18)$$

A partir des hypothèses (6.17) et (6.18), nous déduisons que le fonctionnement

piézoélectrique l'opérateur  $\xi$  (respectivement ; l'opérateur de permittivité électrique  $\beta$ ) est linéaire, a une mesure composante bornée surable notée  $e_{ijk}$  (respectivement ;  $b_{ij}$  ) et de plus,  $\beta$  est symétrique et positif défini.

Rappelons également que l'opérateur transposé  $\xi^*$  est donné par  $\xi^* = (e_{ijk}^*)$  où  $e_{ijk}^* = e_{kij}$  et l'égalité suivante est vérifiée :

$$\xi \sigma . v = \sigma . \xi^* v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

La fonction de frottement satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ verifies :} \\ (a) : \exists M > 0 \text{ telle que } : |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) : \text{L'application } : x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (c) : p(x, 0) = 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

On note que (6.19) est satisfait dans le cas où p donné par (6.11).

tandis que le coefficient de frottement  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$  satisfont

$$\begin{aligned} \mu &\in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3), \mu(x) \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \\ \rho &\in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Nous supposons également que les forces volumiques et les tractions de surface ont la régularité :

$$f_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; H), \quad h \in \mathbb{L}^2\left(0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_2)^d\right), \quad (6.21)$$

Les tenseurs thermiques et la densité de la source de chaleur satisfont

$$M_e = (m_{ij}), m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad q_e \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (6.22)$$

et pour certains  $c_k > 0$ , pour tous  $(\zeta_i) \in R_d$  :

$$K = (k_{ij}), k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), k_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq c_k\zeta_i\zeta_j \quad (6.23)$$

ainsi que les densités de charges électriques satisfont :

$$q_0 \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad q_2 \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathbb{L}^2(\Gamma_b)). \quad (6.24)$$

Finalement, les données initiales satisfont :

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \theta_0 \in E, \quad \theta_R \in W^{1,2}(0.T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad (6.25)$$

Nous définissons la fonction  $f : [0.T] \rightarrow V$  et  $q : [0.T] \rightarrow W$  par :

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_\Omega f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} h(t) v da \quad \forall v \in V, \quad t \in [0.T], \quad (6.26)$$

$$(q(t), \psi)_W = - \int_\Omega q_0(t) \psi dx + \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi da \quad \forall \psi \in W, \quad t \in [0.T], \quad (6.27)$$

pour tout  $u, v \in V, \psi \in W$  et  $t \in [0.T]$ , et notons que les conditions (6.21) et (6.24) implique que

$$f \in \mathbb{L}^2(0.T; V'), \quad q \in \mathbb{L}^2(0.T; W). \quad (6.28)$$

Soit la fonctionnelle de frottement  $j : \mathcal{Q} \times V \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$j(\sigma, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R \sigma_\nu| |v_\tau| da. \quad (6.29)$$

On définit l'espace suivant

$$E = \{\gamma \in H^1(\Omega) / \gamma = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

La fonction  $r : V \rightarrow L_2(\Omega)$  vérifie qu'il existe une constante  $L_r > 0$  telle que

$$|r(v_1) - r(v_2)|_{L_2(\Omega)} \leq L_r |v_1 - v_2|_V, \forall v_1, v_2 \in V \quad (6.30)$$

On note  $U$  le sous-ensemble convexe de champ des déplacements admissibles donné par

$$U = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (6.31)$$

Par une procédure standard basée sur la formule de Green, nous obtenons ce qui suit formulation du problème mécanique (6.1) - (6.14).

## 6.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (3.14), les relations (6.3), (5.39) et la (6.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), w - \dot{u})_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} &= (f(t), w - \dot{u}(t))_{V' \times V} \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(w_\nu - \dot{u}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(w_\tau - \dot{u}_\tau) da. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant les conditions (6.9), (6.10), (6.11) combinées avec la définition (6.29) pour voir

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, w - \dot{u})_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\sigma, w) - j(\sigma, \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), w - \dot{u}(t)) \quad \forall u, w \in V \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Green (3.21) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (6.4), (6.12), (6.13) et la définition (6.27) pour obtenir

$$(D(t), \nabla \zeta)_H = (q(t), \zeta)_W + \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu da.$$

Combinons cette dernière égalité avec (6.2), nous trouvons

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\zeta)_H = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W.$$

En suit, nous utilisons la formule de Green et (6.5) ainsi que les conditions (6.6), (6.7) et la définition (6.22) et (6.23) nous trouvons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\theta}\tau dx + \int_{\Gamma_3} (K_e\theta)\tau da + \int_{\Omega} (K\nabla\theta)\nabla\tau dx &= - \int (M\nabla\dot{u})\tau dx \\ &+ \int_{\Omega} q\tau dx + \int_{\Gamma_3} K_e(\theta_R)\tau da. \end{aligned}$$

On pose

$Q : [0, T] \rightarrow E'$ ,  $K : E \rightarrow E'$ ,  $R : V \rightarrow E'$  sont donnés par

$$(Q(t), \mu)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e\theta_R\mu da + \int_{\Omega} q\mu dx,$$

$$(K\tau, \mu)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} \frac{\partial\mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e\tau\mu da, \quad (R\mu, v)_{E' \times E} = - \int_{\Omega} (M\nabla v) dx,$$

pour tout  $v \in V, \mu, \tau \in E$ .

Donc nous obtient

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T)$$

**Problème PV.** Trouver un champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ des déplacements électriques

$D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de température  $\theta : [0, T] \rightarrow E$  tels que :

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, w - \dot{u})_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\sigma, w) - j(\sigma, \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), w - \dot{u}(t)) \quad \forall u, w \in V \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$(D(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W \quad (6.33)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \quad \forall \psi \in W \quad (6.34)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \text{ et } \theta(0) = \theta_0 \quad (6.35)$$

où  $Q : [0, T] \rightarrow E'$ ,  $K : E \rightarrow E'$ ,  $R : V \rightarrow E'$  sont donnés par

$$(Q(t), \mu)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R \mu da + \int_{\Omega} q \mu dx, \quad (6.36)$$

$$(K\tau, \mu)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \mu da, \quad (R\mu, v)_{E' \times E} = - \int_{\Omega} (M \nabla v) dx, \quad (6.37)$$

pour tout  $v \in V, \mu, \tau \in E$ .

L'existence et l'unicité de la solution du problème  $PV$  est énoncée et démontrée dans la prochaine section.

## 6.3 Résultat d'existence et d'unicité

Notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution du problème  $PV$  est le suivant.

**Théorème 6.1.** Supposons que les hypothèses (6.15) – (6.25) sont vérifiées. Alors, le problème  $PV$  admet une solution unique  $\{u, \varphi, D, \theta\}$  satisfaisant

$$u \in C^1(0.T; H) \cap W^{1,2}(0.T; V) \cap W^{2,2}(0.T; V') \quad (6.38)$$

$$\varphi \in W^{1,2}(0.T; W) \quad (6.39)$$

$$\sigma \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q}), \text{Div}\sigma \in \mathbb{L}^2(0.T; V') \quad (6.40)$$

$$D \in W^{1,2}(0.T; \mathcal{W}_1) \quad (6.41)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \quad (6.42)$$

Nous concluons que sous les hypothèses (6.15) - (5.30), le problème mécanique (6.1) - (6.14) a une solution faible unique avec la régularité (6.38) -(6.42). La démonstration de ce théorème se fera en plusieurs étapes. Il est basé sur les arguments des inégalités non linéaires d'évolution du premier ordre (voir Réf. [13, 19]), les équations d'évolution (voir Réf. [9]) et les arguments à point fixe.

Soit  $G \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q})$  et  $\eta \in \mathbb{L}^2(0.T; V')$  donnés, on en déduit une formulation variationnelle du problème  $PV$ .

**Problème  $PV_{G\eta}$ .** Trouver un champ des déplacements  $u_{G\eta} : [0.T] \rightarrow V$  tel que

$$\begin{cases} u_{G\eta}(t) \in U & (\ddot{u}_{G\eta}, w - \dot{u}_{G\eta})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{G\eta}(t)), \varepsilon(w - \dot{u}_{G\eta}(t)))_{\mathcal{Q}^+} \\ (\eta, w - \dot{u}_{G\eta}(t))_{V' \times V} + j(G, w) - j(G, \dot{u}_{G\eta}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}_{G\eta}(t)) & \forall w \in V \end{cases} \quad (6.43)$$

$$\dot{u}_{G\eta}(0) = v(0) = v_0 \quad (6.44)$$

On définit  $f_\eta(t) \in V$  pour p.p  $t \in [0.T]$  par

$$(f_\eta(t), w)_{V' \times V} = (f(t) - \eta(t), w)_{V' \times V}, \forall w \in V. \quad (6.45)$$

de (6.28), on déduit que

$$f_\eta \in \mathbb{L}^2(0.T; V') \quad (6.46)$$

Soit maintenant  $u_{G\eta} : [0.T] \rightarrow V$  la fonction définie par

$$u_{G\eta}(t) = \int_0^t v_{G\eta}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0.T] \quad (6.47)$$

On définit l'opérateur  $A : V' \rightarrow V$  par

$$(Av, w)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall v, w \in V. \quad (6.48)$$

**Lemme 6.2.** Pour tout  $G \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q})$  et  $\eta \in \mathbb{L}^2(0.T; V')$ ,  $PV_{G\eta}$  admet une solution unique de la régularité

$$v_{G\eta} \in C(0.T; H) \cap \mathbb{L}^2(0.T; V) \text{ et } \dot{v}_{G\eta} \in \mathbb{L}^2(0.T; V'). \quad (6.49)$$

**Preuve.** La preuve des inégalités d'évolution du premier ordre non linéaire, donnée dans Réfs ([20]).

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement  $u_{G\eta}$  pour considérer le problème variationnel suivant.

**Problème  $PV1_{G\eta}$ .** Trouver un champ potentiel électrique  $\varphi_{G\eta} : \Omega \times [0.T] \rightarrow W$  tel que :

$$(\beta \nabla \varphi_{G\eta}(t), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} - (\xi \varepsilon(u_{G\eta}(t)), \nabla \psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0.T]. \quad (6.50)$$

Nous avons le résultat suivant pour  $PV1_{G\eta}$ .

**Lemme 6.3.** Il existe une solution unique  $\varphi_{G\eta} \in W^{1,2}(0.T; W)$  satisfait (6.50), de

plus si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux solutions de (6.50). Alors, Il existe une constante  $c > 0$  tel que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c |u_1(t) - u_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.51)$$

**Preuve.** Soit  $t \in [0, T]$ . En utilisant le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur  $A_\eta(t) : W \rightarrow W$  par :

$$(A_\eta(t)\varphi, \psi)_W = (\mathbf{B}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}, \quad (6.52)$$

pour tout  $\varphi, \psi \in W$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ , les hypothèses (6.18) impliquent que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \quad (6.53)$$

alors  $A_\eta(t)$  est un opérateur fortement monotone sur  $W$ . D'autre part, nous utilisons à nouveau (6.18), (6.17) nous avons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \psi)_W \leq c_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\psi|_W \quad \forall \psi \in W, \quad (6.54)$$

où  $c_B$  est une constante positive qui dépend de  $\mathbf{B}$ .

ainsi,

$$|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2|_W \leq c_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W, \quad (6.55)$$

ce qui montre que  $A_\eta : W \rightarrow W$  est de Lipschitz. Puisque  $A_\eta$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur  $W$ , nous déduisons qu'il existe un élément unique  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (6.56)$$

Nous combinons maintenant (6.52) et (6.56) pour démontrer que  $\varphi_\eta(t) \in W$  est l'unique solution de l'équation variationnelle non linéaire (6.50).

Ensuite, nous montrons que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ . Soient  $t_1, t_2 \in [0, T]$ . Pour simplifier

l'écriture on note  $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$ ,  $q(t_i) = q_i$ , pour  $i = 1, 2$ . En utilisant (6.50), (6.18), (6.17) nous trouvons

$$m_B|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \leq c_\mathcal{E}|u_1 - u_2|_V|\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W|\varphi_1 - \varphi_2|_W, \quad (6.57)$$

où  $c_\mathcal{E}$  est une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ .

Cette dernière inégalité nous donne

$$m_B|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c_\mathcal{E}|u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W. \quad (6.58)$$

Il résulte de l'inégalité (6.58) que

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq \frac{c_\mathcal{E}}{m_B}|u_1 - u_2|_V + \frac{1}{m_B}|q_1 - q_2|_W.$$

donc

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c(|u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W). \quad (6.59)$$

Car  $u_\eta \in C^1(0, T; H)$  et  $q \in W^{1,p}(0, T; W)$ , l'inégalité (6.58) implique que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ .

Soient  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$  et  $u_{\eta_i} = u_i$ , pour  $i = 1, 2$ . nous utilisons (6.50) et des arguments semblables à ceux utilisés dans la démonstration de (6.58) pour déduire que

$$m_B|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c_\mathcal{E}|u_1(t) - u_2(t)|_V,$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Cette inégalité nous donne (6.51). ■

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement  $u_\eta$  obtenu dans le lemme 6.2 pour considérer le problème variationnel suivant.

**Problème**  $PV1_{\theta\eta}$ . Trouver  $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow E$  tel que pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = R\dot{v}_\eta(t) + Q(t) \quad t \in (0, T), \text{ dans } E', \quad (6.60)$$

$$\theta_\eta(0) = \theta_0. \quad (6.61)$$

Nous avons le résultat suivant pour  $PV1_{\theta\eta}$ .

**Lemme 6.4.** Le problème  $PV1_{\theta\eta}$  admet une solution unique

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0; T; E') \cap L^2(0; T; E) \cap C(0; T; L^2(\Omega)) \quad , C > 0; \quad \forall \eta \in L^2(\bar{I}; V' \times Y)$$

satisfait

$$|\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (6.62)$$

**Preuve.** La vérification du résultat d'existence et d'unicité (6.60) découle de la résultat classique sur l'équation d'évolution du premier ordre, appliqué au triple d'évolution de Gelfand

$$E \subset F \equiv F' \subset E'$$

On vérifie que l'opérateur  $K$  est linéaire, continu, fortement monotone, et à partir de l'expression de l'opérateur  $R$ ,  $v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \Rightarrow Rv_\eta \in W^{1,2}(0, T; F)$ , comme  $Q \in W^{1,2}(0, T; E)$  puis  $Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0, T; E)$ .

On en déduit (6.62) voir [2].

Nous considérons l'opérateur

$$\begin{aligned}
 \Lambda : \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{Q} \times V') &\rightarrow \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{Q} \times V') \text{ défini par} \\
 \Lambda(G, \eta) &= (\Lambda_1(G), \Lambda_2(\eta)), \forall G \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{Q}), \forall \eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V'), \\
 \Lambda_1(G_{G\eta}) &= \mathcal{A}\varepsilon(v_{G\eta}) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}) - \theta_{G\eta} M_e. \\
 (\Lambda_2 \eta_{G\eta}, \varkappa)_{V' \times V} &= (\mathcal{G}\varepsilon(u_{G\eta}) - \xi^* E(\varphi_{G\eta}) - \theta_{G\eta} M_e, \varkappa)_{V' \times V} \quad \forall \varkappa \in V. \\
 |\Lambda(G_1, \eta_1) - \Lambda(G_2, \eta_2)|^2 &= |\Lambda_1(G_1) - \Lambda_1(G_2)|^2 + |\Lambda_2(\eta_1) - \Lambda_2(\eta_2)|^2.
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

Nous montrons que  $\Lambda$  a un point fixe unique.

**Lemme 6.5.** Il existe un unique élément  $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{Q} \times V')$  tel que

$$\Lambda(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*). \tag{6.64}$$

**Preuve.** Soit  $(G_i, \eta_i)$  des fonctions dans  $\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{Q} \times V')$  et désignées par  $(u_i, \varphi_i, \theta_i)$  les fonctions obtenues dans le lemme 6.1, le lemme 6.2 et le lemme 6.3, pour  $(G, \eta) = (G_i, \eta_i)$   $i = 1, 2$ . Soit  $t \in [0, T]$

De (6.1) il résulte

$$|G_2 - G_1|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c \left( |v_2(t) - v_1(t)|_V^2 + |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|_W^2 + |u_2(t) - u_1(t)|_V^2 + |\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \tag{6.65}$$

Par conséquent, (6.51) et (6.62) donne

$$|G_2 - G_1|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c \left( |v_2(t) - v_1(t)|_V^2 + |u_2(t) - u_1(t)|_V^2 + \int_0^T |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \right). \tag{6.66}$$

En utilisant (6.43), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & (\dot{v}_2(t) - \dot{v}_1(t), v_2(t) - v_1(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)), v_2(t) - v_1(t)) + \\
 & (\eta_2(t) - \eta_1(t), v_2(t) - v_1(t)) + j(G_2, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) + j(G_1, v_1(t)) \leq 0
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

Et nous avons

$$\begin{aligned}
 & j(G_2, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) + j(G_1, v_1(t)) \leq \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{2\nu}| |v_{2\tau}| da - \\
 & - \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{2\nu}| |v_{1\tau}| da - \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{1\nu}| |v_{2\tau}| da + \int_{\Gamma_3} \mu p |R G_{1\nu}| |v_{1\tau}| da.
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

De plus, à partir de (6.19), (6.20) et en utilisant la propriété de  $R$ , on trouve

$$j(G_2, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) + j(G_1, v_1(t)) \leq c |G_2 - G_1|_{\mathcal{Q}} |v_2 - v_1|_V \tag{6.69}$$

Donc (6.67) sera

$$\begin{aligned}
 & (\dot{v}_2(t) - \dot{v}_1(t), v_2(t) - v_1(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)), v_2(t) - v_1(t)) + \\
 & (\eta_2(t) - \eta_1(t), v_2(t) - v_1(t)) \leq c |G_2 - G_1|_{\mathcal{Q}} |v_2 - v_1|_V
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

Nous intégrons cette égalité sur l'intervalle  $[0, t]$ . Nous utilisons les conditions initiales  $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ , la relation (6.15) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour tout  $t \in [0, T]$ . Ensuite, en utilisant l'inégalité  $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{A}}b^2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} |v_2(t) - v_1(t)|_V^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V^2 ds \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_2(s) - \eta_1(s)|_{V'}^2 ds \\
 & + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V^2 ds + c \left( \int_0^t |G_2(s) - G_1(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds + \int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V^2 ds \right)
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Nous appliquons l'inégalité de Gronwall pour obtenir

$$|v_2(t) - v_1(t)|_V^2 \leq c \left( \int_0^t |G_2(s) - G_1(s)|_Q^2 ds + \int_0^t |\eta_2(s) - \eta_1(s)|_{V'}^2 ds \right). \quad (6.72)$$

D'un autre côté

$$|\eta_2(t) - \eta_1(t)|_{V'}^2 \leq c \left( |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|_W^2 + |u_2(t) - u_1(t)|_V^2 + |\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (6.73)$$

Par conséquent, (6.51) et (6.62) donne

$$|\eta_2(t) - \eta_1(t)|_{V'}^2 \leq c \left( \int_0^T |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \right) \quad (6.74)$$

En utilisant (6.43), nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_2(t) - \dot{v}_1(t), v_2(t) - v_1(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)), v_2(t) - v_1(t)) + \\ & (\eta_2(t) - \eta_1(t), v_2(t) - v_1(t)) + j(G_2, v_2(t)) - j(G_2, v_1(t)) - j(G_1, v_2(t)) + j(G_1, v_1(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Nous intégrons cette égalité sur l'intervalle  $[0, t]$ . Nous utilisons les conditions initiales  $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ , les relations (6.15), (6.69) et l'inégalité de Cauchy-Scwartz pour tout  $t \in [0, T]$ . Ensuite, en utilisant l'inégalité  $ab \leq c(a^2 + b^2)$ , on obtient

$$\int_0^t |v_2(s) - v_1(s)|_V^2 ds \leq c \left( \int_0^t |\eta_2 - \eta_1|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_2 - G_1|_Q^2 ds \right) \quad (6.76)$$

Appliquer l'inégalité (6.47) dans (6.76). Donc (6.66) sera

$$|G_2(t) - G_1(t)|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c \left( \int_0^t |\eta_2(s) - \eta_1(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_2(s) - G_1(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds \right). \quad (6.77)$$

De (6.47), (6.74) et (6.76) nous trouvons

$$|\eta_2 - \eta_1|_{V'}^2 \leq c \left( \int_0^t |\eta_2 - \eta_1|_{V'}^2 ds + \int_0^t |G_2 - G_1|_{\mathcal{H}}^2 ds \right). \quad (6.78)$$

En utilisant (6.61), pour voir que

$$|\Lambda(G_2, \eta_2) - \Lambda(G_1, \eta_1)|^2 \leq c \int_0^t |(G_2, \eta_2) - (G_1, \eta_1)|_{\mathcal{Q} \times V'}^2 ds. \quad (6.79)$$

Et dénotant par  $p$  les puissances de l'opérateur  $\Lambda$ , (6.77) impliquent par récurrence cette

$$|\Lambda^p(G_2, \eta_2) - \Lambda^p(G_1, \eta_1)|_{\mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q} \times V')}^2 \leq \frac{(ct)^p}{p!} |(G_2, \eta_2) - (G_1, \eta_1)|_{\mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q} \times V')}^2. \quad (6.80)$$

Cette inégalité montre que pour un  $p$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda^p$  est un contraction sur l'espace de Banach  $\mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q} \times V')$  et donc il existe un élément unique  $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q} \times V')$  tel que

$$\Lambda(G^*, \eta^*) = (G^*, \eta^*). \quad (6.81)$$

De (6.63), on trouve

$$(G^*, \eta^*) = \left( \sigma_{G^* \eta^*}, \xi^* \nabla \varphi_{G^* \eta^*} + \mathcal{G} \varepsilon(u_{G^* \eta^*}) - \theta_{G^* \eta^*} M_e \right). \quad (6.82)$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour fournir la preuve de Théorème 6.1.

**Démonstration du théorème 6.1.** Existence. Soit  $(G^*, \eta^*) \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathcal{Q} \times V')$  le

point fixe de  $\Lambda$  et soit  $(u^*, \varphi^*, \theta^*)$  la solution aux problèmes  $PV_{G\eta}$ ,  $PV1_{G\eta}$  et  $PV1_{\theta\eta}$  pour  $(G, \eta) = (G^*, \eta^*)$ , c'est-à-dire,  $u^* = u_{G^*\eta^*}$ ,  $\varphi^* = \varphi_{G^*\eta^*}$  et  $\theta^* = \theta_{G^*\eta^*}$ . Il résulte de (6.32), (6.33) et (6.34) que  $(u^*, \varphi^*, \theta^*)$  est un solution du problème  $PV$ . Les propriétés (6.38), (6.39) et (6.42) découle des lemmes 6.2, 6.3 et 6.4.

Unicité. Le caractère unique de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur défini par (6.63).

## Conclusion

Dans cette thèse on a proposé une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. A cet effet on a considéré des différentes lois de comportement telles que : thermo-élasto-viscoplastiques avec variable interne d'état, thermo-électro-élasto-viscoplastiques et thermo-électro-viscoélastiques. On a étudié des problèmes de contact avec et sans frottement dans un processus dynamique ou quasistatique avec des conditions aux limites, pour lesquelles nous couplons un effet thermique et l'adhésion ou un effet électrique. Pour chacun de ces problèmes, nous donnons la formulation variationnelle, ensuite l'existence et l'unicité de la solution faible, respectivement il on reste de trouver l'existence et l'unicité de ces problèmes par la méthode de contrôle variationnel ainsi que l'étude numérique.

# Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] S. Adly and O. Chau, *On some dynamic thermal non clamped contact problems*, Math. Programm., Ser. B (2013)139 :5-26.
- [3] C. Anca, *Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement*, Preprint nr. 10/2011.
- [4] K. T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, *A Dynamic Thermoviscoelastic Contact Problem with Friction and Wear*, Int. J. Eng. Sci, Vol 35, No 14, 1291-1309. (1997).
- [5] K. T. Andrews, K. L. Kuttler and M. Shillor (1997), *On the dynamic behavior of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle*, Euro. J. Appl. Math. 8, 417-436.
- [6] J. F. Archard (1953), *Contact and rubbing of flat surfaces*, J. Appl. Phys. 24 (8), 981-988.
- [7] M. Barboteu, J. R. Fernandez, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. (in press).
- [8] M. Barboteu, A. Matei, M. Sofonea, *Analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with normal compliance*, Q. J. Mech. Appl. Math. 65 (4), 555-579 (2012).
- [9] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).

- [10] R. C. Batra , J. S. Yang, *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*, Journal of Elasticity, 38 (1995), 209-218.
- [11] P. Bisegna, F. Lebon and F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*, J. A. C. Martins and M. D. P. Monteiro. Marques (eds.), Contact Mechanics, 347-354 (2002)
- [12] E. Bonetti , G. Bonfanti, *Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermo-viscoelastic System*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003, No. 50, pp. 1-15.
- [13] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987).
- [14] H. Brézis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier, Tome 18, n 1, (1968), p. 115-175.
- [15] O. Chau, *On a class of second order evolution inequality and application*, Int. J. of Appl. Math. and Mech. 4 (1) : 24-48, 2008.
- [16] O. Chau, J.R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math 159 (2003), no. 2, 431–465.
- [17] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, Z. Angew. Math. Phys 55 (2004), 32–47.
- [18] N. Cristescu and I. Suliciu, *Viscoplasticity, Mechanics of plastic Solids 5*, Martinus Nijhoff publishers, The Hague, 1982.
- [19] S. Drabla, Z. Zellagui, *Analysis of a electro-elastic contact problem with friction and adhesion*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 54 (2009), 75-99.
- [20] G. Duvaut , J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).

- [21] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [22] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 156, pp. 323-335, 1995.
- [23] M. Frémond , B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [24] M. Frémond, K. L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2), pp. 541-570, 1998.
- [25] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [26] R. J. Gu and M. Shillor (2001), *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*, Int. J. Solids Structures 38 (14), 2323-2333.
- [27] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI-International Press, 2002.
- [28] W. Han, M. Sofonea, K. Kazmi, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 3915-3926.
- [29] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [30] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [31] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques applications aux équations elliptiques*, Springer, 1993.
- [32] K. L. Kuttler and M. Shillor (2002), *Dynamic contact with normal compliance wear and discontinuous friction coefficient*, SIAM J. Math. Anal. 34 (1), 1-27.
- [33] S. Latreche, L. Selmani, *Analysis of a frictionless contact problem with adhesion for piezoelectric materials*, Taiwanese journal of mathematics 21 (1), 81-105 (2017).

- [34] S. Latreche, Thèse Doctorat LMD, *Analyse variationnelle de différents problèmes aux limites en mécanique du contact*, Université F. Abbas, Sétif, 2018.
- [35] N. Lebri, *Existence resultat for quasistatic contact problem with internal state variable*, *ijpam. eu*, Vol 87, No. 2; pp. 205-217; 2013.
- [36] N. lebri, *Etude variationnelle et numérique de quelques problèmes en viscoplasticité*, Thèse de doctorat, Université Sétif, 2008.
- [37] G. Leszek, A. Ochala, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion. Nonlinear Analysis : R. W. A* (27), 183-202. (2016).
- [38] J. A. C Martins and J. T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, *Nonlinear Anal.* 11 (3), 407-428 (1987).
- [39] R.D Mindlin; *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, *Int. J. Solids* 4 (1969), 1197-1213.
- [40] R. D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, *Int. J. Solids Structures* 4 (1968), 637-663.
- [41] J. Necas, I. Hlavacek, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [42] E. Rabinowiz (1995), *Friction and Wear of Materials*, (2nd ed.) Wiley, N. Y.
- [43] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 177 (1999), no. 3-4, 383–399.
- [44] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis of Quasistatic Viscoelastic Problem with Friction and Damage*, *Adv. Math. Sci. App.* 10, 2002, 173-189.
- [45] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with directional friction and damped response. Appl. Anal.* 68, 409-422 (1998).

- [46] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with normal compliance and friction*, J. Elasticity 51, 105-126 (1998).
- [47] J. Rojek and J. J. Telega, *Contact problems with friction, Adhesion and wear in Orthopaedic Biomechanics. I : General developments*, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 655-677.
- [48] L. Selmani, *A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variable*, Applicationes Mathematicae, 40 (1), 1-20 (2013)
- [49] M. Selmani, *Frictional contact problem with wear for Electro-Viscoelastic Materials with long Memory*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin 20 (2013), 461-479.
- [50] L. Selmani, N. Bensebaa; *An Electro-viscoelastic Contact Problem with Adhesion and Damage*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino- Vol. 66, 2 (2008).
- [51] M. Selmani, L. Selmani, *Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material*. Nonlinear Analysis : Modelling and Control, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117
- [52] M. Selmani, L. Selmani, *Frictional contact problem for elastic-viscoplastic materials with thermal effect*, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed., 34 (6), 761-776 (2013).
- [53] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [54] S. Smata, N. Lebri, *A dynamic electroviscoelastic problem with thermal effects*. Studia Univ. Babeş bolayai, Mathematica : accepted in December, 2019.
- [55] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo-Elasto-Visco-Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Bucharest, (1988) (in Romanian).
- [56] M. Sofonea, El. H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2004, 229-242.
- [57] M. Sofonea, E.H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl.14 (1) (2004) 25-40.

- [58] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, (Boca Raton) 276, Chapman, Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. <https://doi.org/10.1201/9781420034837>.
- [59] M. Sofonea, S. Migórski and A. Ochal, *Two history-dependent contact problems*, Advances in variational and hemivariational inequalities, 355-380 (2015).
- [60] N. Stromberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, Friction and Wear*, Thesis No, 491, Departement of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden, (1995).
- [61] N. Stromberg, L. Johansson, A.Klarbing, *Dervation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, 33 (1996), 1817-1836.
- [62] A Touzaline, *A viscoelastic frictionless contact problem with adhesion*, Bll. Pol. Acad. Sci. Math. 63 (2015), 53-66.