

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra -
Faculté des Sciences et Sciences de L'ingénieur
Département de Génie Civil

N° d'ordre :.....

Série :.....

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en génie civil

Option: Mécanique de sol et Structures

Par

MEZIANI Nedjma

THÈME

CONTRIBUTION DE L'APPROCHE EN DÉFORMATION
DANS LA MODÉLISATION DES STRUCTURES
A CONTOUR CIRCULAIRE

Soutenu le :/...../ 2006

Devant le jury :

Président	:	S. BENMEBAREK	Prof.	Université de Biskra
Rapporteur	:	M.T. BELARBI	Prof.	Université de Biskra
Examineurs	:	L. BELOUNAR	M.C.	Université de Biskra
		A. ZATAR	M.C.	Université de Biskra

REMERCIEMENTS

J'exprime mes sincères et profonds remerciements et reconnaissances au Professeur BELARBI Mohamed Tahar, qui m'a encadré durant ce travail. Je le remercie aussi pour ses conseils et pour m'a voir dirigé et encouragé pendant l'accomplissement de ce travail. Je lui en suis profondément reconnaissante.

Je tiens également à remercier vivement le professeur Saddok BENMEBAREK pour l'honneur qu'il m'a fait en tant que président le jury de soutenance, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier profondément aussi les membres de jury :

Le Docteur L. BELOUNAR et le Docteur A. ZATAR qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail, je leurs exprime tous mes remerciements.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs J. HAMADI et M. BOUREZANE pour leurs aides précieuses.

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation, trouvent ici ma gratitude et mes remerciements.

Enfin mes remerciements vont à l'ensemble du corps enseignant de l'Institut de Génie Civil de l'Université de Biskra.

DÉDICACE

A mon père et ma mère

A toute ma famille

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce travail est d'évaluer et de tester des éléments secteurs basés sur l'approche en déformation pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane à contour circulaire.

Nous avons présenté des éléments secteurs à cinq nœuds possédant deux degrés de liberté par nœud (les déplacements radial U_r et circonférentiel V_θ), en appliquant la méthode de condensation statique pour condenser leurs nœuds internes, et deux autres éléments à quatre nœuds: "l'invariant de Djoudi" et "l'élément de Belarbi", qui sont caractérisés par la présence d'une rotation comme un degré de liberté additionnelle, pouvant simplement être combinés avec des éléments structuraux.

L'efficacité de ces éléments est testée par ses applications dans les problèmes de déformations rotationnelles symétriques et non symétriques des plaques à contours circulaires. Il est montré que les éléments secteurs basés sur le modèle de déformation convergent beaucoup mieux que ceux basés sur les déplacements, et ceci nécessite un nombre minimum d'éléments sur lequel la plaque est divisée.

Mots clés : Élément fini, Élément secteur, Modèle en déformation, Membrane, Degré de liberté de rotation, Elasticité plane, Condensation statique

ABSTRACT

The principal objective of this work is to evaluate and test the strain based sector elements for the analysis of plane elasticity problems with circular contour.

We present some sectors elements with five nodes; have two degrees of freedom per node (displacements radial U_r and circumferential V_θ), the static condensation method applies to condense their internal nodes, and two other elements have four nodes: "the Djoudi invariant " and " Belarbi element ", which are characterized by rotation degree of freedom, and they are easily able to be combined with structural elements.

The effectiveness of these elements is tested by its applications in problems of the symmetrical and unsymmetrical rotational deformations of the plates with circular contours. It is shown that the strain based sector elements converge much better than those based on displacements, and that requires a minimum number of elements on which plate is divided.

Key words: Finite Element, Sector Element, Strain Model, Membrane, Rotation Degree of Freedom, Plane Elasticity, Static Condensation

ملخص

U_r)

$(V_\theta$

"l'élément de Belarbi" "l'invariant de Djoudi" :

- - - - - :
- - - - -

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
------------------------------------	---

CHAPITRE I

GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

I-1 INTRODUCTION	3
I-1.1 Historique	3
I-1.2 Avantages et inconvénients de la Méthode des Eléments Finis	5
I-2 CARACTERISTIQUES D'UN ELEMENT FINI	6
I-2.1 Attributs d'un élément fini	6
I-2.2 Type des éléments	7
I-2.3 Choix des éléments finis	8
I-2.4 Qualité d'un élément fini	9
I-3 MODELISATION ET DISCRETISATION	9
I-3.1 Introduction	9
I-3.2 Modélisation	10
I-3.3 Discrétisation	10
I-4 CHOIX DES FONCTIONS DE DEPLACEMENT ET CONDITIONS DE CONVERGENCE	11
I-5 MODELES D'ÉLÉMENTS FINIS	12
I-5.1 Modèle déplacement	12
I-5.2 Modèle équilibre ou contrainte	12
I-5.3 Modèle mixte	12
I-5.4 Modèle hybride	13
I-5.5 Modèle de déformation	13
I-6 APPROCHE EN DEFORMATION	13
I-6.1 Avantages du modèle en déformation	14
I-6.2 Procédure de développement des éléments finis à modèle en déformation...	15
I-7 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA MODELISATION DES STRUCTURES A CONTOURS CIRCULAIRE	18
I-8 CONCLUSION	20

CHAPITRE II

RAPPEL EN ÉLASTICITÉ PLANE

II-1 INTRODUCTION	21
II-2 LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE	21
II-3 LES EQUATIONS DÉFORMATION–DÉPLACEMENT	23
II-4 LES EQUATIONS INTRINSEQUES DU MATÉRIAU	25
II-4.1 Contraintes planes	27
II-4.2 Déformations planes	28
II-5 ÉLASTICITÉ PLANE EN COORDONNÉES POLAIRES	29
II-6 CONCLUSION	31

CHAPITRE III

FORMULATION DES ÉLÉMENTS SECTEURS

III-1 INTRODUCTION	32
III-2 DESCRIPTION DE L'ÉLÉMENT SECTEUR	32
III-3 LES DIFFÉRENTES FORMULATION DES ÉLÉMENTS SECTEURS	33
III-3.1 Intégration directe	33
III-3.1.1. Élément de Bouzerira	33
III-3.1.1.a Description du mode de corps rigide (MCR)	33
III-3.1.1.b Champ de déformation	36
III-3.1.2 Élément de Djoudi	36
III-3.1.2.a Mode de corps rigide	36
III-3.1.2.b Champ de déformation	36
III-3.2 Transformation des coordonnées	37
III-3.2.1 Élément de Sabir et Salhi	38
III-3.2.1.a Mode de corps rigide (MCR)	38
III-3.2.1.b Champ de déformation	39
III-3.2.2 Élément de Djoudi	41
III-3.3 Approche directe	42
III-3.3.1 Élément de Raju et Rao	42
III-3.3.2 Élément de Sabir et Salhi	43
III-4 FORMULATION DES ÉLÉMENTS SECTEURS	43
III-4.1 Les éléments ont quatre nœuds et trois ddl par nœud	43
III-4.1.1 Formulation de SBS 1 "l'invariant de Djoudi"	43
III-4.1.2 Formulation de SBS 2 "l'élément de Belarbi"	45

III.4.2 Les éléments secteurs contiennent cinq nœuds à 2 ddl par nœud	46
III-4.2.1 Formulation de l'élément SBS3	46
III-4.2.2 Autres éléments secteurs SBS4, SBS5	47
III-5 CONDENSATION STATIQUE	49
III-5.1 Définition	49
III-5.2 Utilité de la condensation statique	49
III-5.3 Principe de la condensation statique	50
III-5.4 La méthode générale de condensation statique	52
III-5.4.1 Réduction du système d'équation	52
III-5.4.2 Une condensation statique avec $\{r_e\} = 0$	52
III-5.4.3 Une condensation statique avec $\{r_e\} \neq 0$	53
III-6 CONCLUSION	54

CHAPITRE IV

PRÉSENTATION DU PROGRAMME "G.C.B"

IV-1 INTRODUCTION	55
IV-2 PRÉSENTATION DU PROGRAMME "G.C.B"	55
IV-3 DESCRIPTION DETAILLE DES DIFFÉRENTES ÉTAPES DU PROGRAMME "G.C.B"	57
IV-3.1 Étape 1: Lecture et organisation des données	57
IV-3.2 Étape 2: Construction de la matrice et Des Vecteurs Globaux [K] et {F}, résolution du système des équations [K] {U}= {F}	58
IV-3.3 Étape 3: Impression des résultats	62
IV-4 PRÉSENTATION DE L'ORGANIGRAMME DU PROGRAMME	63
IV-5 LA CONDENSATION STATIQUE DANS LE PROGRAMME "G.C.B"	69
IV-5.1 La routine CONDE 1	69
IV-5.1.1 Paramètres de la routine CONDE 1	69
IV-5.1.2 Organigramme global de la routine CONDE 1	70
IV-5.2 La routine CONDE 2	71
IV-5.1.1 Paramètres de la routine CONDE 2	71
IV-5.2.2 Organigramme global de la routine CONDE 2	72
IV-6 CONCLUSION	72

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) : Etapes de l'analyse d'un problème aux limites	10
Figure (I.2) : Flexion pure d'une poutre	17
Figure (I.3) : Les modes du corps rigide	18
Figure (II.1) : Composantes de contrainte	22
Figure (II.2) : Déformation d'un élément dans le plan XY	24
Figure (II.3) : Élément infinitésimal dans les coordonnées polaires	29
Figure (III.1) : Géométrie de l'élément secteur à cinq nœuds	33
Figure (III.2) : Système de coordonnées et déplacements	38
Figure (III.3) : Exemples de condensation	50
Figure (IV.1) : Les étapes du programme "G.C.B"	56
Figure (IV.2) : Les symboles des opérations d'un organigramme	64
Figure (V.1) : Caractéristiques géométriques et mécaniques d'un cylindre épais ..	75
Figure (V.2) : Maillage 2x2 et forces nodales	76
Figure (V.3) : Convergence du déplacement radial en E pour un cylindre sous pression interne	77
Figure (V.4) : Convergence de la contrainte radiale en E pour un cylindre sous pression interne	78
Figure (V.5) : Convergence de la contrainte tangentielle en E pour un cylindre sous pression interne	78
Figure (V.6) : Variation du déplacement radial le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne	79
Figure (V.7) : Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne	79
Figure (V.8) : Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne	80
Figure (V.9) : Convergence du déplacement radial en E pour un cylindre sous pression interne et externe	80
Figure (V.10) : Variation de déplacement le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne et externe	81

Figure (V.11) : Convergence de la contrainte radiale en E pour un cylindre sous pression interne et externe	81
Figure (V.12) : Convergence de la contrainte tangentielle en E pour un cylindre sous pression interne et externe	82
Figure (V.13) : Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne et externe	82
Figure (V.14) : Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne et externe	83
Figure (V.15) : Convergence du déplacement radial en E pour un cylindre sous pression externe	83
Figure (V.16) : Convergence de la contrainte radiale en E pour un cylindre sous pression externe	84
Figure (V.17) : Convergence de la contrainte tangentielle en E pour un cylindre sous pression externe	84
Figure (V.18) : Variation de déplacement le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression externe	85
Figure (V.19) : Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression externe	85
Figure (V.20) : Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression externe	86
Figure (V.21) : Flexion pure d'un anneau semi circulaire	88
Figure (V.22) : Maillage 3x2 et 2x2	89
Figure (V.23) : Variation du déplacement radial le long de m'n' pour b/a=2	90
Figure (V.24) : Variation du déplacement tangential le long de m'n' pour b/a=2 ..	90
Figure (V.25) : Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour b/a=2	91
Figure (V.26) : Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour b/a=2	91
Figure (V.27) : Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour b/a=1,3	92
Figure (V.28) : Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour b/a=1,3	92
Figure (V.29) : Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour b/a=3	93
Figure (V.30) : Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour b/a=3	93

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (I.1) : Types des éléments finis	7
Tableau (V.1) : Les déplacements radiaux pour un cylindre épais sous pression interne	76
Tableau (V.2) : Les contraintes radiales et tangentielles pour un cylindre épais sous pression interne	77
Tableau (V.3) : Flexion pure d'un anneau semi circulaire	89
Tableau (V.4) : Coefficient "m" de l'équation (V.3)	95

NOTATION

M.C.R.	:	Mouvement de corps rigide
G.C.B.	:	Génie Civil Biskra
ddl	:	Degré de liberté
x, y, z	:	Coordonnées cartésiennes du repère global
U, V	:	Déplacements suivant les directions x et y respectivement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$:	Déformations directes suivant x et y respectivement.
γ_{xy}	:	Déformation tangentielle
σ_x, σ_y	:	Contraintes normales suivant les directions x et y respectivement.
τ_{xy}	:	Contrainte tangentielle
r, θ	:	Coordonnées polaires du repère global
U_r, V_θ	:	Déplacements suivant les directions r et θ respectivement
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$:	Déformations directes suivant r et θ respectivement
$\gamma_{r\theta}$:	Déformation tangentielle
σ_r, σ_θ	:	Contraintes normales suivant les directions r et θ respectivement
$\tau_{r\theta}$:	Contrainte tangentielle
∇^2	:	Opérateur Laplacien
λ et μ (G)	:	Les constantes de Lamé

ν	:	Coefficient de poisson
V	:	Volume d'un corps
E	:	Module de Young
I	:	L'inertie
a_1, a_2	:	Les mouvements de corps rigide
a_3	:	La rotation dans le plan
a_i	:	Paramètres généraux de l'approximation
$[B]$:	Matrice de déformation
$[D]$:	Matrice de HOOKE
$\{d\}$:	Vecteur des déplacements
$\{d_e\}$:	Les déplacements éliminés
$\{d_c\}$:	Les déplacements conservés
$\{F\}, \{g\}$:	Vecteur des charges extérieures
$\{r_c\}$:	Vecteur des forces internes après condensation
$[K_{cc}^*], [K^*]$:	Matrice condensée
$\{F_{cc}^*\}, \{F^*\}$:	Vecteur condensé

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le calcul des structures et en particulier les milieux continus, les problèmes concernés sont en général, très compliqués à résoudre par les méthodes analytiques usuelles. Ces problèmes peuvent être ceux de l'analyse des contraintes et de la diffusion thermique ou hydraulique.

Un problème d'ingénieur est généralement représenté par un modèle mathématique; des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur ses frontières. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de liberté. A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile sinon impossible de trouver une solution analytique au problème et d'étudier son comportement en une seule opération. Pour pouvoir trouver une solution, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalent ayant un nombre fini de degrés de liberté. Pour cela, il a le choix entre deux méthodes : "la méthode des différences finies" et "la méthode des éléments finis". La méthode des différences finies est très attrayante par sa simplicité quand il s'agit des problèmes à géométrie régulière. Par contre, elle est très difficile à généraliser aux problèmes à géométrie complexe et des conditions aux limites quelconques. De nos jours, elle est remplacée par la méthode des éléments finis dans presque toutes les applications en ingénierie.

La pratique montre que les ingénieurs préfèrent modéliser leurs structures avec des éléments finis simples, tels que les quadrilatères à 4 nœuds, les triangles à 3 nœuds..., il en résulte, en gardant le modèle en déplacement classique, des interpolations de degré peu élevé et une forte sensibilité aux phénomènes de blocage ou verrouillage de membrane et de cisaillement. De ce point de vue l'utilisation du modèle en déformation naturel joue un rôle essentiel dans la construction d'éléments finis robustes et de bonne qualité.

La modélisation des structures à contours circulaires dont le comportement est membranaire a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches surtout en ce qui concerne

l'approche en déformation, notamment les travaux de Sabir (1986), Djoudi (1990) et Belarbi (2000).

Notre objectif est d'évaluer l'approche en déformation dans la modélisation des structures courbées pour les problèmes d'élasticité plane. Donc nous avons formulés des éléments secteurs à cinq nœuds avec deux ddl par nœud, en appliquant la méthode de condensation statique pour condenser leurs nœuds internes. Ainsi nous avons utilisé et testé l'efficacité des éléments secteurs existants: "l'invariant de Djoudi", "l'élément de Belarbi" ayant quatre nœuds et possédant trois ddl par nœud, y compris la rotation comme degré de liberté additionnel. Ce dernier aide énormément la résolution des problèmes généraux d'élasticité plane ayant un contour circulaire d'une part et la facilité de jonction avec d'autres éléments possédant trois ddl par nœuds, d'autre part.

Ce mémoire est structuré en cinq chapitres :

Le premier chapitre présente une généralité sur la méthode des éléments finis, les fondements et l'historique de celle-ci. Les caractéristiques d'un élément fini, ses différentes formulations, en particulier celle basées sur le modèle déformation, ainsi qu'une bibliographie sur la modélisation des structures courbées.

Le second chapitre, contenant un rappel sur l'élasticité plane, présente quelques notions de base jugées utiles.

Nous montrons dans le troisième chapitre les approches de formulation des éléments secteurs avec un détail de formulation de quelques éléments. On présente la méthode de condensation statique qui est appliquée pour libérer les degrés de libertés internes des éléments secteurs à cinq noeuds.

Le mécanisme du programme "G.C.B" (génie civil Biskra), sa structure et son enchaînement sont présentés dans le quatrième chapitre.

Le cinquième chapitre est réservé aux tests de validation et aux applications numériques des cas des problèmes traités.

Finalement, le travail s'achève par des conclusions et des recommandations suivies d'une bibliographie et d'annexes.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR

LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS

FINIS

CHAPITRE I

GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

I-1 INTRODUCTION

En rendant la complexité des calculs une chose du passé, l'avènement de l'ordinateur a révolutionné les science de l'ingénieur. Des problèmes, autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques. Une de ces méthodes est la méthode des éléments finis. De ce point de vue, elle constitue un outil formidable à la disposition de l'ingénieur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines : sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles, méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques et informatique pour programmer et exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

I-1.1 Historique

Bien que le nom de la méthode des éléments finis soit nouveau, le concept est ancien et a été utilisé à chaque fois qu'une solution d'un problème réel par une méthode approximative s'est avéré indispensable. L'origine de la méthode remonte à l'aube du XX siècle où une technique de subdivision d'une structure complexe en un maillage régulier de poutre élastique était utilisée. A l'époque la théorie des poutres élastique était connue et utilisée pour approcher la solution exacte des structures. Il a fallu attendre le début des années 1940 pour que le mathématicien Courant suggère une approche similaire à celle de la M.E.F qui consiste à subdiviser la structure en maillage triangulaire défini par une interpolation polynomiale. Comme il manquait les ordinateurs pour effectuer les calculs, l'utilisation de cette méthode est

restée très restreinte. Une décennie après, La méthode des Eléments Finis est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion); on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956) [TUR 56].

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey) [ARG 60], certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangles [COU 43], mais elles restèrent sans suite.

Le terme méthode des éléments finis a été inventé par Clough en 1960. On reconnaissait désormais que la valeur pratique de la méthode était évidente. Des éléments nouveaux pour l'analyse en contraintes furent développés, mais largement par intuition ou raisonnement physique. En 1963, la méthode des éléments finis gagne en respectabilité lorsqu'on lui reconnaît de solides fondements mathématiques. Elle peut être vue comme la solution d'un problème variationnel par minimisation d'une fonctionnelle. Ainsi, la méthode paraît comme applicable à tous les problèmes qui peuvent être formulés sous forme variationnelle.

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis, signalons en particulier ceux de Zienkiewicz, Gallagher, Rockey. La méthode des éléments finis est très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la MEF, principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures, citons par exemple ANSYS, ADINA, SAP, ASKA, NASTRAN, etc. Ces programmes généraux sont conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs. Une nouvelle génération de programmes, plus modulaire et adaptée aux mini-ordinateurs, va permettre l'utilisation de la méthode des éléments finis par des entreprises et bureaux d'études de taille réduite.

Pour que la méthode des éléments finis soit efficace dans les applications industrielles, il faut utiliser des programmes d'assistance à la préparation des données et à l'interprétation des résultats.

I-1.2 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis [NGA 04]

De toutes les méthodes permettant de résoudre de manière approximative un problème aux limites (séries, différences finies, ...), la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément), sauf cas particuliers.

Ces avantages sont essentiellement les suivants :

- La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse ;
- Elle peut être applicable à une variété de problèmes physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque;
- Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite ;
- Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites) ;
- la méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle ;

La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients.

- Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique;
- Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple;
- Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires;
- Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés;
- L'expérience et un grand sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle;

- La plupart des problèmes comportent un grand nombre de données et une foule de résultats qu'on doit dépouiller avec méthode pour une compréhension optimale.

1-2 CARACTERISTIQUES D'UN ÉLÉMENT FINI

1-2.1 Attributs d'un élément fini

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.

- **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope, ...etc.).

- **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces...etc.

- **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

- **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ...etc.)

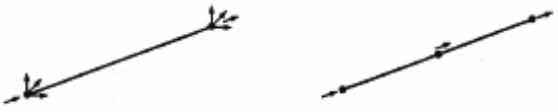
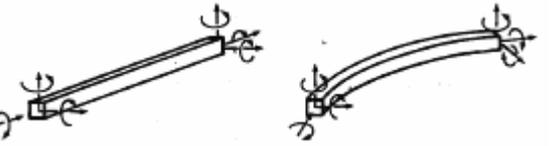
Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

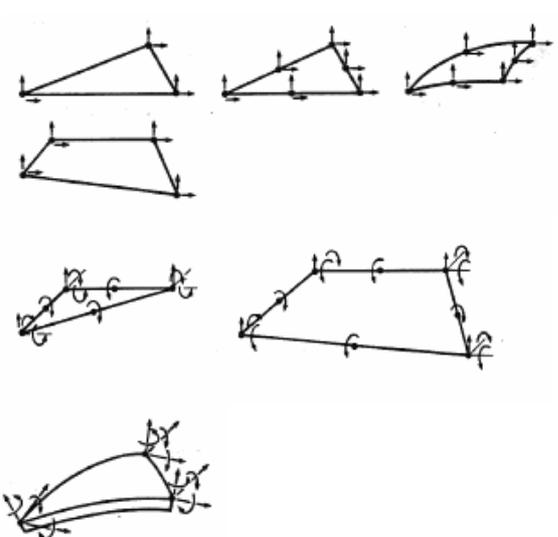
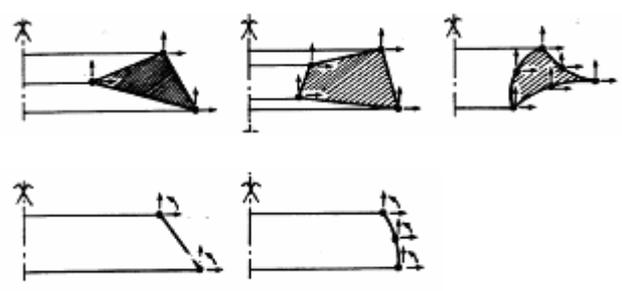
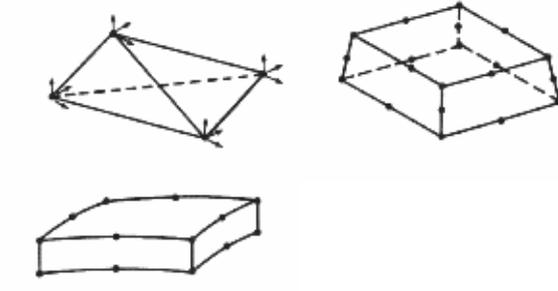
I-2.2 Type des éléments

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie (Tab. I.1) comme suit :

- *Les éléments unidimensionnels* : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile;
- *Les éléments bidimensionnels* : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire ;
- *Les éléments tridimensionnels* : éléments de volume ou coques épaisses ;
- *Les éléments axisymétriques* : qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques ou méridienne courbe.

Tableau (I.1) : Types des éléments finis [BAT 90a]

CLASSE	NOM	GÉOMÉTRIE
1 D.	Barre	
	Poutre	

2 D.	<p>Elasticité 2D membranes</p> <p>plaques en flexion</p> <p>Coques</p>	
AXISYM.	<p>Tores axisymétriques</p> <p>Coques axisymétriques</p>	
3 D.	<p>Volume</p> <p>Coque épaisse</p>	

I-2.3 Choix des éléments finis

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...)
- Convergence (critères et taux)
- Degré (des divers champs)

- Nœuds, et inconnues aux divers nœuds ;
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres ;
- Performances et limitations.

I-2.4 Qualité d'un élément fini

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes :

- Aucun défaut de base (mécanisme...) ;
- Convergence rapide ;
- Bonne précision, déjà dans un maillage grossier ;
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable ;
- Vecteurs forces consistants ;
- souplesse d'emploi ;
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles ;
- Dérivation théorique simple et claire ;
- Programmation efficace et limpide.

I-3 MODÉLISATION ET DISCRÉTISATION

I-3.1 Introduction

Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné il faut effectuer deux opérations essentielles, la modélisation dans un premier temps et la discrétisation dans un deuxième (Figure I.1). Ces opérations portent sur deux aspects principaux du problème pratique :

- Représentation de la géométrie, des conditions aux limites et du milieu,
- Choix des éléments finis et du maillage.

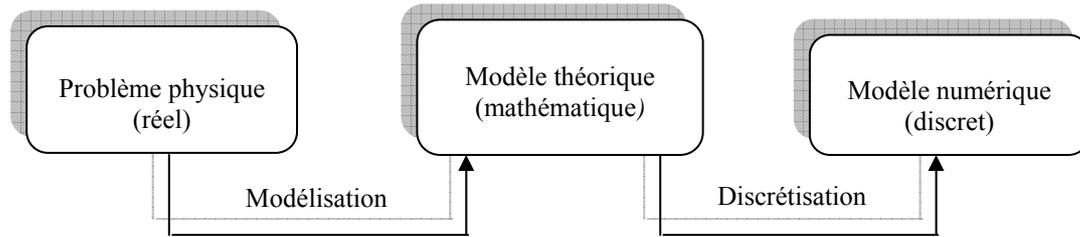


Figure (I.1) : Etapes de l'analyse d'un problème aux limites.

I-3.2 Modélisation

La modélisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des solides, structures et matériaux, capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. C'est à ce stade que s'opèrent deux options fondamentales :

- Choix cohérent du schéma statique et de la théorie décrivant la structure, c'est-à-dire à ramener la structure à une géométrie simple en choisissant des axes (barres, poutres, câbles), des plans (parois, plaques), des surfaces (coques), des volumes (solides), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie, à définir les conditions d'appui et les charges, à tenir compte d'éventuelles symétries ;

- Choix pertinent des lois constitutives décrivant chaque matériau, c'est-à-dire à choisir les lois décrivant les réponses mécaniques classiques (teneur en eau, discontinuité, perméabilité,...), et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales,...).

I-3.3 Discrétisation

L'opération de discrétisation implique essentiellement deux choix : l'un porte sur le type de grandeur à discrétiser, soit plus explicitement sur le type d'élément fini à utiliser, l'autre sur la finesse de cette discrétisation en liaison avec le maillage.

Le choix d'un maillage adapté à une structure particulière doit être, dans la mesure du possible basé sur les résultats des expériences antérieures. Si cela n'est pas possible, alors il faudra étudier la structure pour différents maillages pour tester le taux de convergence. De

plus, le type d'élément utilisé dans la modélisation a une influence considérable sur la précision de la solution, il doit être choisi avec précaution.

I-4 CHOIX DES FONCTIONS DE DEPLACEMENT ET CONDITIONS DE CONVERGENCE

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

Le choix des fonctions de forme limite, le nombre de degrés de liberté du système qui est en réalité infini, donc le minimum réel de l'énergie ne pourra jamais être atteint quelle que soit la finesse du maillage. Pour assurer la convergence de la solution vers la solution exacte, certaines conditions doivent être vérifiées, ces conditions sont les suivantes :

- *Critère 1 : représente des modes rigides* où la fonction de déplacements doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps rigide.

- *Critère 2 : représente des états de déformation constante* dont la fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtienne effectivement ces déformations constantes.

- *Critère 3 : condition de compatibilité* où les fonctions de déplacement doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient infinies.

Les critères 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. Le critère 3 par le terme élément compatible, si les éléments finis satisfont les conditions de complétude et de compatibilité; de tels éléments sont dits "éléments conformes", pour ce type d'élément la solution converge de façon monotone vers la solution exacte. Certains éléments ne satisfaisant pas toutes les conditions, de tels éléments sont dits "éléments non conformes", parmi ces éléments certains d'entre eux ne convergent pas, mais les autres convergent et pas nécessairement par le bas et de façon monotone. Comme il y a des éléments non conformes

qui présentent un taux de convergence supérieur à d'autres éléments conformes et qui sont très utilisés en pratique.

I-5 MODÈLES D'ÉLÉMENTS FINIS

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, l'intérieur ou la frontière. On peut créer divers types, dits "modèles" d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

I-5.1 Modèle déplacement

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendue à tout l'élément. Alors les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

I-5.2 Modèle équilibre ou contrainte

Contrairement au précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est par contre sommaires.

Ce modèle est rarement employé en pratique car, il conduit en général à qualité égale à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

I-5.3 Modèle mixte

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes des divers champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), étendues à tout l'élément. En général, les paramètres inconnus des champs de ce modèle sont conservés comme degrés de liberté. La mise au point peut être longue et coûteuse, mais les éléments peuvent être d'excellente qualité.

Parfois le modèle mixte est utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement, par exemple pour améliorer la précision au niveau des contraintes on interpole certaines composantes internes de la déformation, les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de telle sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

I-5.4 Modèle hybride

Ce modèle est basé sur deux interpolations a priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière. Le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire. Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement, surtout au niveau des contraintes.

I-5.5 Modèle de déformation

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

Cette formulation est une approche variationnelle qui consiste à minimiser l'énergie potentielle totale du système par rapport à un champ de déplacement de forme donnée.

I-6 APPROCHE EN DEFORMATION [BEL 00]

L'origine de modèle en déformation a été développé par Sabir et Ashwell [SAB 71], leur recherche a été effectué sur des arcs circulaires simple de toutes proportions, ils ont conclu qu'on peut avoir de meilleurs résultats avec un nombre réduit d'éléments, comparativement aux résultats donnés par le modèle en déplacement [ASH 71]. Une nouvelle classe d'éléments finis simples et efficaces a vu le jour. Les déformations sont indépendantes et le champ de ces déformations vérifie le critère de complétude. L'opportunité a été saisie pour développer un élément fini d'ordre supérieur qui ne nécessite que les degrés de liberté essentiels. Par ailleurs, un autre élément fini de coque cylindrique a été développé par le même auteur [ASH 72], les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour les déplacements que

pour les contraintes; d'autres études ont été menées sur des coques cylindriques minces, et les résultats obtenus étaient meilleurs comparé à l'élément de Cantin et Clough [CAN 68] et aussi l'élément simplifié de Sabir et Lock [SAB 72].

Sabir et Lock [SAB 73] ont développé un élément courbe pour l'analyse de la non linéarité géométrique des arcs circulaires et est basé sur la condition que la contrainte circonférentielle et la variation des courbures, plutôt que les déplacements doivent être des fonctions simples et indépendantes des coordonnées. Le travail a été étendu par Sabir [SAB75] pour le développement d'éléments d'arcs se déformant aussi bien hors plan de courbure que dans le plan. Pour étudier la performance de l'élément coque à modèle de déformation pour la prédiction des contraintes très élevées au voisinage de l'application des charges concentrées, Sabir et Ashwell [SAB 78] ont entamé des essais sur des coques minces et le chargement appliqué était soit des forces radiales ou des moments concentrés et les résultats obtenus correspondaient bien aux solutions théoriques données par Flügge et Fosberge [FLU 66].

L'approche en déformation a été davantage appliquée par Sabir [SAB 83] pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes. L'élément en question est rectangulaire, ayant uniquement les degrés de liberté essentiels (au nombre de huit), et satisfaisant aux conditions de modes libres de corps rigide et les équations de compatibilité au sein de l'élément ont été développées en premier lieu. Avec le développement continu de l'approche en déformation, beaucoup d'éléments finis de l'élasticité plane et les éléments de coques ont été conçus par d'autres chercheurs [SAB 85a], [SAB 85 b], [SAB 86], [BEL 98a], [BEL 98b], [BEL 98c], [BEL 99], [BEL 00].

I-6.1 Avantages du modèle en déformation

L'interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration); contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).

- Les équations déformations-déplacements sont couplées de telle manière que certaines déformations sont fonctions de plusieurs déplacements, par conséquent si les déplacements sont indépendants les uns des autres, les déformations ne le seront pas.

- Possibilité d'enrichir le champ de déplacement par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de noeuds intermédiaires, ni de degrés de liberté supplémentaires (permettant ainsi de traiter le fameux problème de verrouillage).

I-6.2 Procédure de développement des éléments finis à modèle en déformation

Pour illustrer la procédure par laquelle les champs du déplacement sont formulés suivant l'approche basée sur le modèle en déformation, un élément rectangulaire convenable pour les problèmes généraux de l'élasticité plane est considéré.

Dans un système des coordonnées cartésiennes x et y , les relations entre les déformations planes ε_x , ε_y , γ_{xy} et les déplacements de translation U et V , comme il est montré dans la figure (I.2.a), sont données par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1.1a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (1.1b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (1.1c)$$

Si on met les trois composantes de déformation égales à zéro et en intégrant les équations différentielles résultantes, on obtient les expressions suivantes pour les déplacements U et V :

$$U_R = a_1 - a_3 y \quad (1.2a)$$

$$V_R = a_2 + a_3 x \quad (1.2b)$$

Les équations (1.2.a) et (1.2.b) représentent les champs du déplacement qui correspondent au déplacement du corps rigide de l'élément. Nous remarquons que les trois constantes a_1 et a_2 représentent les mouvements de translation respectivement dans les directions x et y , a_3 représente la rotation dans le plan. (Figure I.3)

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et deux degrés de liberté par chaque nœud, le dernier champ du déplacement devra contenir huit constantes indépendantes. On a utilisé trois constantes pour la représentation des mouvements du corps rigide, il ne reste que cinq constantes qui peuvent être réparties entre les déformations de la manière suivante :

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad (1.3a)$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7 x \quad (1.3b)$$

$$\gamma_{xy} = a_8 \quad (1.3c)$$

Après l'intégration des équations (1.3) nous obtenons :

$$U_s = a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \quad (1.4a)$$

$$V_s = a_6 y - a_5 \frac{x^2}{2} + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} \quad (1.4b)$$

La forme finale de champs des déplacements s'écrit en ajoutant les équations (1.2) à (1.4) d'où :

$$U = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \quad (1.5a)$$

$$V = a_2 + a_3 x + a_6 y - a_5 \frac{x^2}{2} + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} \quad (1.5b)$$

On note que les déformations sont indépendantes l'une de l'autre, afin qu'aucun couplage inutile entre l'effet de flexion et celui de cisaillement existe [DJO 90] de là un état de flexion pure peut être obtenu. En plus, les fonctions de déplacement contiennent des termes du second degré pour tenir compte des changements de courbure, l'élément se déforme comme le montré la figure (I.2b).

Il est très utile de comparer quelques caractéristiques de cet élément avec l'élément équivalent basé sur le modèle déplacement, soit l'élément rectangulaire bilinéaire Q4 le plus utilisé dont le nom dérive de sa capacité de représenter des déplacements linéaires sur les deux cotés du rectangle, ses fonctions de déplacement sont données par :

$$U = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \quad (1.6a)$$

$$V = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \quad (1.6b)$$

Puisqu'il n'existe que deux nœuds sur chaque côté de l'élément, seuls les déplacements linéaires peuvent être interpolés si la continuité inter éléments reste conservée. Donc sous charge, l'élément demeure continu, sans se chevaucher, voir la figure (I.2c).

Les déformations sont données en différenciant les fonctions des déplacements. D'où :

$$\varepsilon_x = a_2 + a_4 y \quad (1.7a)$$

$$\varepsilon_y = a_7 + a_8 x \quad (1.7b)$$

$$\gamma_{xy} = a_3 + a_4 x + a_6 + a_8 y \quad (1.7c)$$

Ces déformations ne sont pas indépendantes, depuis qu'elles sont couplées par les constantes a_4 et a_8 . Par conséquent, il est clair que l'élément bilinéaire ne peut pas représenter un état de cisaillement indépendant à moins que $a_4 = a_8 = 0$, ce cas représente les champs ε_x et ε_y comme des constantes. De là un état de flexion pure associée avec des déformations directes linéaires et sans déformation de cisaillement ne peut pas être obtenue avec l'élément bilinéaire.

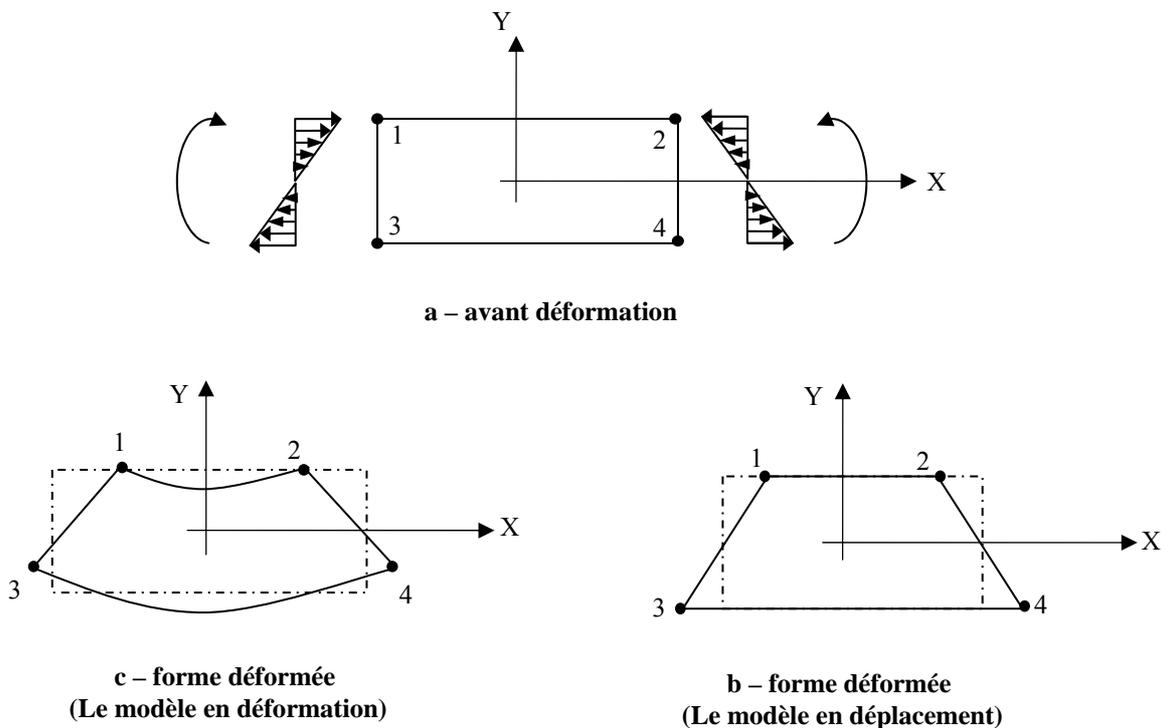


Figure (I.2) : Flexion pure d'une poutre

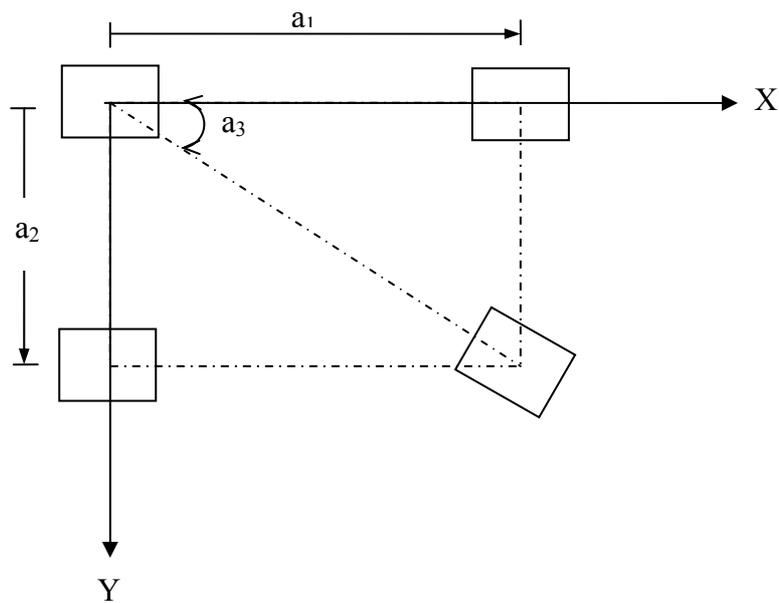


Figure (I.3) : Les modes du corps rigide

I-7 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA MODELISATION DES STRUCTURES A CONTOUR CIRCULAIRE

L'analyse des éléments finis pour les structures de forme arbitraires par la méthode de déplacement est simplifiée en utilisant des éléments ayant une géométrie spécifique. Par exemple pour l'analyse bidimensionnelle, Turner, Argyris et d'autres ont proposé l'utilisation des éléments rectilignes comme triangles, rectangles et quadrilatères, définis par trois ou quatre noeuds. Quand ces éléments sont employés pour modéliser des structures à contours circulaires, il est évident que ces structures doivent être divisées en un grand nombre d'éléments.

Donc, il apparaît un besoin des éléments avec des frontières courbes, les premiers travaux dans cette direction ont été fait par Ergatoudis, Irons et Zienkiewicz [ERG 68], qui ont présenté des éléments finis isoparamétriques dont les cotés peuvent être courbes appelés "éléments distordus".

Cependant, dans quelques cas particuliers où les frontières sont circulaires comme des disques, les anneaux et les plaques circulaires trouées, il sera plus convenable et économique d'analyser ces structures en utilisant des éléments secteurs qui sont appliqués avec un système des coordonnées polaires.

En 1969, Raju et Rao [RAJ 69] ont présenté une matrice de rigidité d'un élément secteur en contrainte plane avec deux degrés de liberté à chaque noeud. L'approche de l'élément secteur a été étendue par Olson et Lindberg [OLS 70], en développant des éléments finis de forme annulaire et circulaire pour les problèmes de flexion des plaques. D'autres recherches ont été effectuées par Raju, Krishna et Rao [RAJ 73], qui ont proposé trois éléments secteurs, deux pour les problèmes de contrainte plane et un pour la flexion des plaques. Avernesson [DER 84] a développé un élément secteur de plaque basé sur l'approche de déplacement qui a été appliqué pour l'analyse linéaire et géométriquement non linéaire des plaques en forme d'anneau.

Les recherches effectuées à l'université de Cardiff (G.B) concernant la convenance des éléments finis disponibles pour les structures courbes, ont montré que l'approche en déformation a été développée non seulement pour les structures courbes, mais aussi pour les structures planes. En 1986, deux éléments secteurs à modèle en déformation ayant 2 ddl par nœud ont été développés par Sabir et Salhi [SAB 86].

Le succès de l'application de l'approche en déformation aux problèmes d'élasticité plane [SAB 86], a encouragé la prolongation du travail au développement des éléments secteurs en coordonnées polaires ayant θz comme degré de liberté additionnel (DDL_A). De tels éléments sont utilisés dans certaines applications particulières où ils s'adaptent bien à la géométrie du problème, ainsi qu'aux structures complexes (comme les buses ou les tunnels enterrés). La combinaison de ces éléments avec les éléments poutres (arcs) ayant trois ddl par nœud, nécessite l'introduction d'un ddla aux éléments plans bidimensionnels.

En 1987 Bouzerira [BOU 87] a développé le premier élément secteur avec en plus des déplacements de translation comme degrés de liberté, une rotation autour de la normale en se basant sur le modèle en déformation, cependant les résultats obtenus en analysant quelques problèmes d'élasticité plane (cas de flexion pure) ont été non concluants à cause du choix inapproprié du champ de déformations. Les deux autres éléments secteurs de Djoudi [DJO 90] améliorent la qualité des résultats mais restent sensibles au rapport d'aspect.

Pour pallier ces inconvénients, Belarbi [BEL 00] est développé un élément secteur simple à quatre nœuds avec trois ddl par nœud, qui donne des résultats plus précis que les autres éléments.

I-8 CONCLUSION

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base : la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

Leur idée générale consiste à discrétiser un objet (ou une partie d'un objet) en sous-ensembles dont on veut étudier certaines de ses propriétés. Ces sous-ensembles sont appelés éléments, qui sont connectés entre eux par des nœuds. La discrétisation de l'objet se nomme le maillage. Ainsi notre objet est représenté par des fonctions définies sur chaque élément, qui ont l'avantage d'être plus simple que celles que l'on pourrait éventuellement utiliser pour représenter la totalité de l'objet. Pour déterminer ces fonctions on choisit un modèle d'élément fini, dans notre travail c'est le modèle en déformation qui donne la possibilité de pouvoir modéliser les structures courbées, avec l'application des éléments secteurs.

CHAPITRE II

RAPPEL EN ÉLASTICITÉ PLANE

CHAPITRE II

RAPPEL EN ÉLASTICITÉ PLANE

II-1 INTRODUCTION

Tous les matériaux possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est à dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance. Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite "théorie de l'élasticité" qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

Nous présentons dans ce chapitre, une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas général tridimensionnel, dans ce cas dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte).

II-2 LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ÉQUILIBRE

Pour le cas général tridimensionnel, nous considérons l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal dans la direction X seulement. Les autres directions Y et Z peuvent être traitées de la même façon (figure II.1).

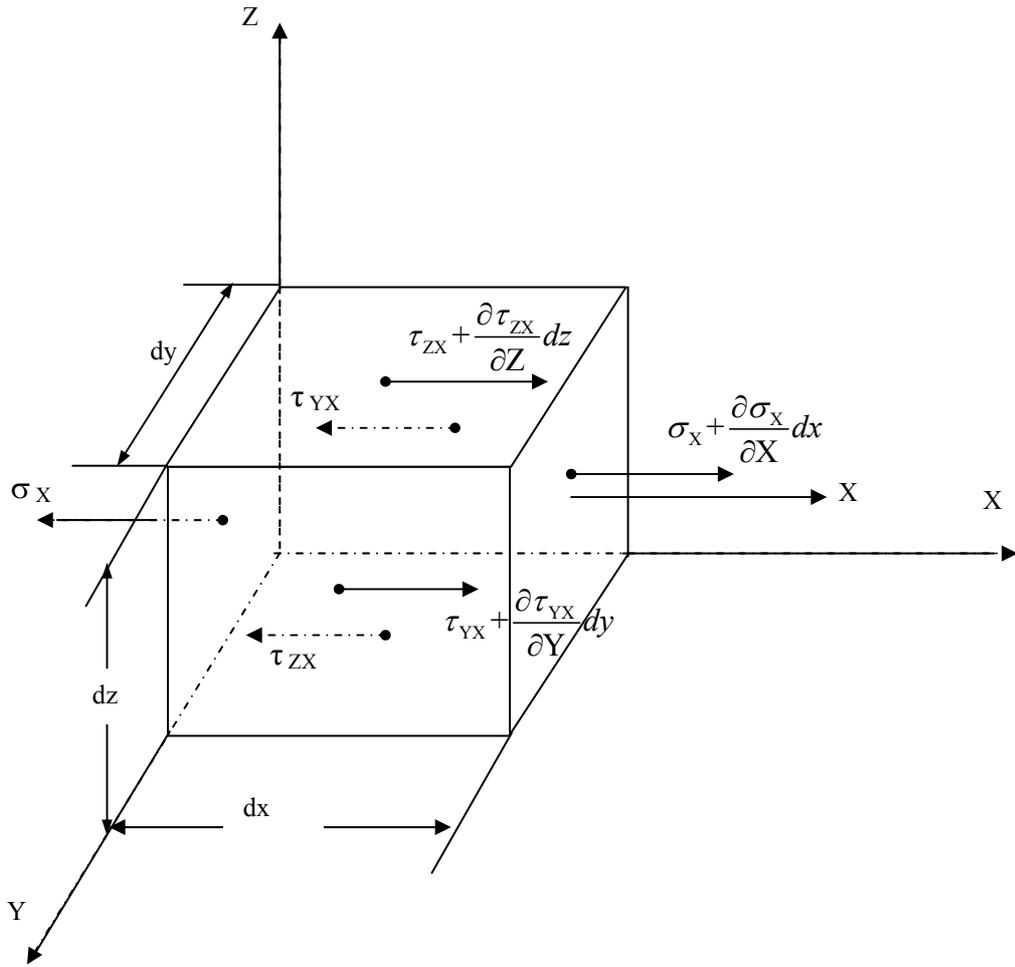


Figure (II.1) : Composantes de contrainte

Considérons maintenant l'équilibre de ce cube dans la direction X :

$$\begin{aligned} \sum F_X &= 0 \\ &= \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} dx \right) dy dz - \sigma_x dz dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} dy \right) dx dz \\ &\quad - \tau_{yx} dz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz \end{aligned}$$

X est la force de volume.

Après la simplification on obtient :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} + X \right) dx dy dz = 0 \tag{II.1}$$

(dx.dy.dz) étant différent de zéro, l'équation (II.1) se simplifie et devient:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} + X = 0 \quad (\text{II.2a})$$

Par analogie, on obtient les deux autres équations:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Z} + Y = 0 \quad (\text{II.2b})$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} + Z = 0 \quad (\text{II.2c})$$

Y et Z sont les forces de volume respectivement dans les directions Y et Z.

II-3 LES EQUATIONS DÉFORMATION–DÉPLACEMENT

On dit qu'un corps est déformé, quand les positions relatives entre les points appartenant à ce corps changent en fonction du système de forces appliquées. Dans le cas général deux types de déformations se produisent :

- Trois déformations directes (normales) ε_x , ε_y et ε_z qui sont définies en chaque point suivant les directions X, Y, Z respectivement.

- Trois composantes de déformation de cisaillement γ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz} qui sont définies en chaque point.

Avant de passer au cas général (tridimensionnel), considérons le problème de la déformation plane qui est défini par:

$$U = U(x,y)$$

$$V = V(x,y)$$

$$W = 0$$

Soit un élément infinitésimal ABCD (Figure II.2).

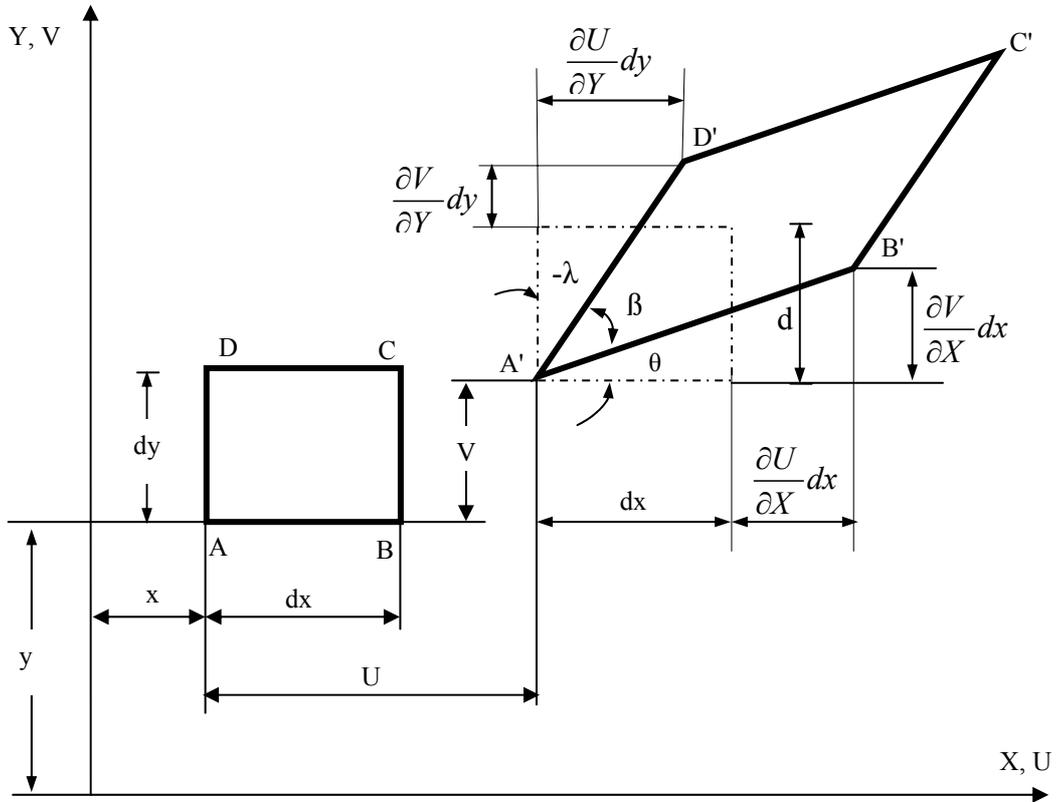


Figure (II.2): Déformation d'un élément dans le plan XY

Après déformation l'élément ABCD aura la configuration A'B'C'D'. Ainsi les déformations directes suivant X et Y seront:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial X} \quad (II.3a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (II.3b)$$

Et la déformation de cisaillement sera:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (II.3c)$$

Après avoir traité le cas bidimensionnel, on peut passer au cas tridimensionnel où l'élément considéré est à l'origine, un prisme rectangulaire. Les déformations seront:

- déformations directes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_X &= \partial U / \partial X \\ \varepsilon_Y &= \partial V / \partial Y \\ \varepsilon_Z &= \partial W / \partial Z\end{aligned}\tag{II.4}$$

- déformations de cisaillements:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X}\end{aligned}\tag{II.5}$$

II-4 LES EQUATIONS INTRINSÈQUES DU MATÉRIAU

Ces équations caractérisent les propriétés mécaniques du matériau. Soit un cube élémentaire soumis à des contraintes normales σ_X , σ_Y et σ_Z . La contrainte σ_X provoque une déformation suivant l'axe X, qui est égale à σ_X/E ; mais les contraintes σ_Y et σ_Z provoquent chacune d'elles une déformation dans l'axe X, donnée en fonction du coefficient de poisson ν et qui est égale à $-\nu \cdot \sigma_Y/E$ et $-\nu \cdot \sigma_Z/E$, ce qui fait au total:

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)]\tag{II.6a}$$

Puis par analogie:

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Y - \nu(\sigma_X + \sigma_Z)] \quad (\text{II.6b})$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Z - \nu(\sigma_X + \sigma_Y)] \quad (\text{II.6c})$$

Pour ce qui est des déformations angulaires, celles-ci sont causées par les contraintes tangentielles τ telle que:

$$\begin{aligned} \gamma_{XY} &= \tau_{XY} / G \\ \gamma_{XZ} &= \tau_{XZ} / G \\ \gamma_{YZ} &= \tau_{YZ} / G \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

G est le module d'élasticité en cisaillement.

$$G = E / (2 \cdot (1 + \nu))$$

Les expressions (II.6) et (II.7) constituent les équations de la loi de *HOOKE* généralisée.

Les contraintes σ_X , σ_Y et σ_Z provoquent les déformations ε_X , ε_Y et ε_Z qui causent elles même une variation de volume (dv).

$$\begin{aligned} dv &= dx \cdot (1 + \varepsilon_x) + dy \cdot (1 + \varepsilon_y) + dz \cdot (1 + \varepsilon_z) \\ dv &= dx dy dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur

$$dv / v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

En additionnant les termes des équations (II.6) on a:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 - 2\nu) \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / E$$

En considérant toujours ces mêmes équations généralisées, on peut exprimer les contraintes σ_x , σ_y et σ_z en fonction des déformations, on obtient alors la relation sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2.\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2.\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2.\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

λ et μ (G) sont les constantes de Lamé.

$$\lambda = \nu E / (1 - 2\nu)(1 + \nu) \quad ; \quad \mu = G = E / 2(1 + \nu)$$

Maintenant après avoir traité le problème en trois dimensions, on va le ramener à un problème dans le plan. Pour ce cas on considère les deux types de problèmes de l'élasticité plane.

II-4.1 Contraintes planes

Ces problèmes concernent les structures où la dimension suivant Z est très négligeable devant les dimensions dans le plan, ceci nous donne $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$ et $\tau_{yz} = 0$.

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{XY} &= \frac{2 \cdot (1 - \nu)}{E} \tau_{XY} \end{aligned} \tag{II.8}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}\sigma_X &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_X + \nu \cdot \varepsilon_Y) \\ \sigma_Y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_Y + \nu \cdot \varepsilon_X) \\ \tau_{XY} &= G \cdot \gamma_{XY}\end{aligned}\tag{II.9}$$

On obtient la relation matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$[D]$ est la matrice d'élasticité en contrainte plane.

II-4.2 Déformation plane

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres. Un tel problème est défini par : $\varepsilon_Z = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ et $\gamma_{yz} = 0$.

On trouve à la fin, la relation entre les contraintes et les déformations comme suit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix}$$

II-5 ÉLASTICITÉ PLANE EN COORDONNÉES POLAIRES

Le traitement de certains problèmes tels que les disques et les anneaux circulaires,...etc, nécessite l'utilisation des coordonnées polaires.

En coordonnées polaires la position d'un point quelconque P appartenant au plan moyen xy est définie par la distance qui le sépare de l'origine O et l'angle θ formé par le rayon r et l'axe ox (Figure II.3).

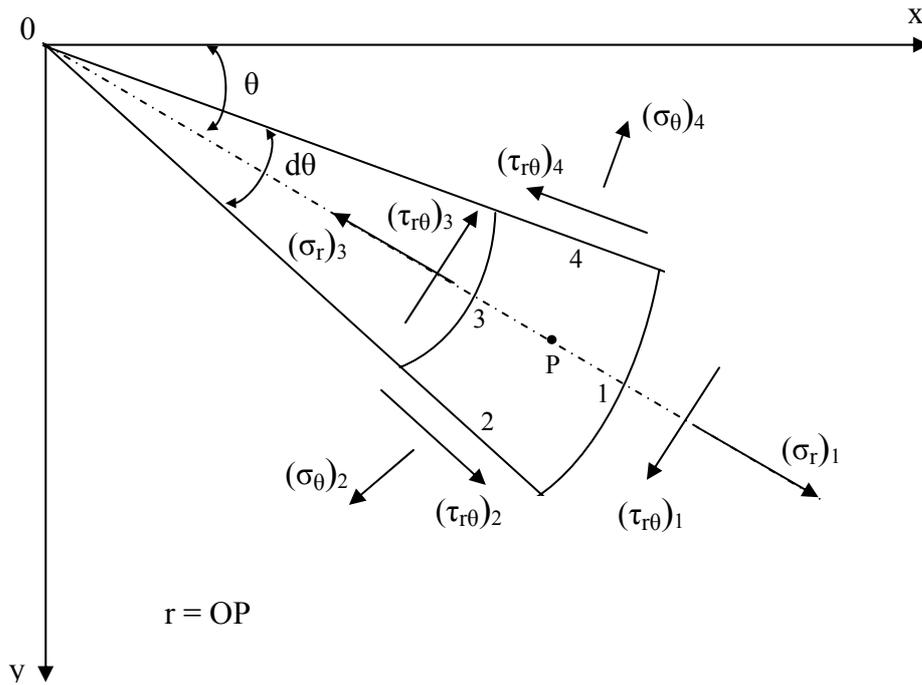


Figure (II.3) : Élément infinitésimal dans les coordonnées polaires

Soit un élément infinitésimal 1234 (Figure II.3), en théorie de l'élasticité les inconnues de base sont les contraintes σ_r , σ_θ et $\tau_{r\theta}$ pour les déterminer, on a les deux équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + H = 0 \tag{II.10}$$

R et H sont les composantes de forces de volumes.

Ces deux équations ne suffisent pas pour résoudre le problème qui comporte trois inconnus. Donc pour résoudre ce problème il nous faut une troisième équation de déformation qui est définie par les composantes suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U}{r} + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\end{aligned}\tag{II.11}$$

Ces trois composantes sont exprimées par deux fonctions continues U et V, elles ne peuvent donc être choisies arbitrairement car il existe entre ces déformations une relation qui se déduit facilement des équations (II.11) et qui est :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0\tag{II.12}$$

Cette équation différentielle est appelée "équation de compatibilité" des déformations. Mais elle n'est pas exprimée en terme de contrainte, pour ce faire, il faut écrire les déformations en fonctions des contraintes par le biais des équations de HOOKE généralisées.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta}\end{aligned}\tag{II.13}$$

En remplaçant les équations (II.13) dans l'équation (II.12), on aura:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = 2.(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \quad (\text{II.14})$$

En dérivant les équations d'équilibre (II.10), puis en les additionnant terme à terme on obtient par substitution dans l'équation précédente.

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sigma_\theta + \sigma_r) = -(1 + \nu) \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (\text{II.15})$$

Dans le cas où la seule force de volume est le poids, on a alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sigma_\theta + \sigma_r) = 0 \quad (\text{II.16})$$

Ou bien :

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II.17) est l'équation de compatibilité en terme de contraintes.

Une fois la troisième équation obtenue le problème est théoriquement résolu.

II-6 CONCLUSION

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statiques et dynamiques nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire, où ces équations facilitent la formulation des éléments et la conception du programme.

CHAPITRE III

FORMULATION DES ÉLÉMENTS

SECTEURS

CHAPITRE III

FORMULATION DES ÉLÉMENTS SECTEURS

III-1 INTRODUCTION

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être divisés en deux groupes distincts, les problèmes de contraintes planes et les problèmes de déformations planes. Pour le traitement de ces problèmes, une grande variété des éléments a déjà été formulée, surtout ceux qui sont basés sur les coordonnées paramétriques, ces coordonnées sont les plus largement utilisées pour la description des éléments, mais elles ne constituent qu'une possibilité parmi tant d'autres. Les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques constituent l'une de ces possibilités, et elles sont utilisées pour la formulation des éléments en forme de secteur circulaire dit " élément secteur ". De tels éléments sont utilisés dans certaines applications particulières où ils s'adaptent bien à la géométrie du problème.

III-2 DESCRIPTION DE L'ÉLÉMENT SECTEUR

L'élément secteur est limité par deux arcs circulaires concentriques et deux lignes radiales rectilignes. Il y a deux types d'éléments dans notre travail :

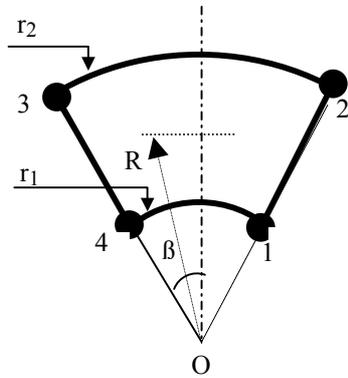
- Des éléments possédant quatre nœuds et trois ddl par nœud (figure III.1a) :

U_r : déplacement radial

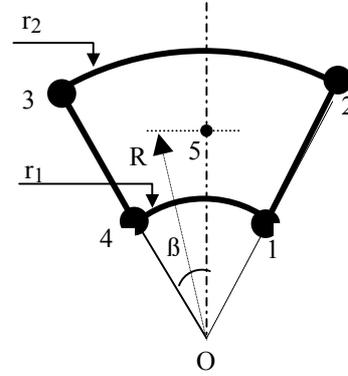
V_θ : déplacement circonférentiel (tangential)

θ_z : rotation autour de la normale au plan de l'élément

- et des éléments qui contiennent cinq nœuds (quatre au sommet et un nœud interne) et deux degrés de liberté par nœuds (déplacement radial et déplacement circonférentiel) (figure III.1b).



(a) élément secteur à quatre nœuds



(b) élément secteur à cinq nœuds

Figure (III.1) : Géométrie de l'élément secteur

III-3 LES DIFFÉRENTES FORMULATIONS DES ÉLÉMENTS SECTEURS

Le développement des éléments secteurs à modèle en déformation, peut être traité par les trois approches suivantes :

III-3.1 Intégration directe

Les variables cinématiques sont directement exprimées en coordonnées polaires par intégration des équations reliant les déformations aux déplacements. Pour cette formulation on trouve l'élément secteur de Bouzerira [BOU 87] et l'élément de Djoudi [DJO 90].

III-3.1.1. Élément de Bouzerira [BOU 87]

III-3.1.1.a Description du mode de corps rigide (MCR)

Les relations "déformation-déplacement" en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \tag{III.1a}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{U_r}{r} + \frac{\partial V_{\theta}}{r \partial \theta} \quad (\text{III.1b})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} - \frac{V_{\theta}}{r} \quad (\text{III.1c})$$

Les équations (III.1) doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps rigide (M.C.R). Donc on peut écrire que :

$$\varepsilon_r = 0 \quad (\text{III.2a})$$

$$\varepsilon_{\theta} = 0 \quad (\text{III.2b})$$

$$\gamma_{r\theta} = 0 \quad (\text{III.2c})$$

L'intégration de (III.2a) permet d'obtenir une première solution particulière :

$$U = A + f(\theta) \quad (\text{III.3})$$

L'intégration de (III.2b) permet d'obtenir une deuxième solution particulière :

$$V = -\int f(\theta) d\theta - A\theta + g(r) \quad (\text{III.4})$$

Où A est une constante.

Substituant (III.3) et (III.4) dans (III.2c) on aura :

$$\frac{f'(\theta)}{r} + \frac{1}{r} \left(\int f(\theta) d\theta + A\theta \right) + g'(r) - \frac{1}{r} g(r) = 0 \quad (\text{III.5a})$$

$$\text{Soit : } f'(\theta) + \left(\int f(\theta) d\theta + A\theta \right) + rg'(r) - g(r) = 0 \quad (\text{III.5b})$$

Remarquons que l'équation ci dessus ne s'annule que si :

$$f'(\theta) + \left(\int f(\theta) d\theta + A\theta \right) = 0 \quad (\text{III.6a})$$

$$\text{Et } rg'(r) - g(r) = 0 \quad (\text{III.6b})$$

Dérivons l'équation (III.6a) par rapport à θ :

$$f''(\theta) + f(\theta) = -A \quad (\text{III.7})$$

$$\text{Soit : } f(\theta) = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta - A \quad (\text{III.8})$$

Dérivons l'équation (III.6b) par rapport à r :

$$rg''(r) = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\text{D'où : } g(r) = B + Cr \quad (\text{III.10})$$

Substituant (III.10) dans (III.6b) on aura :

$$Cr - Cr - B = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Soit : } g(r) = Cr = a_3 r \quad (\text{III.12})$$

Par conséquent, on obtient en vertu des fonctions $f(\theta)$ et $g(r)$:

$$U = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta \quad (\text{III.13a})$$

$$V = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 r \quad (\text{III.13b})$$

Et la rotation ϕ est donnée par :

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{r \partial \theta} - \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) \right) = a_3 \quad (\text{III.13c})$$

Les équations (III.13) représentent le champ de déplacement correspondant au MCR.

III-3.1.1.b Champ de déformation

Soit le champ de déformation proposé par [BOU 87] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= a_4 + a_5\theta + a_6r \\
 \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8\theta + \frac{a_9}{r} + (a_6r) \\
 \gamma_{r\theta} &= a_{10} + \frac{a_{11}\theta}{r} + a_{12}r + \left(\frac{a_6r\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

On constate bien qu'il y a couplage entre les trois composantes du vecteur déformation.

Les termes entre parenthèse sont additionnés pour satisfaire l'équation de compatibilité ci dessous exprimée en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{III.15}$$

III-3.1.2 Élément de Djoudi

III-3.1.2.a Mode de corps rigide

Les équations (III.13) restent valables pour la description du mode de corps rigide.

III-3.1.2.b Champ de déformation

Soit le champ de déformation proposé par [DJO 90] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= a_4 + a_5\theta + (a_6r) \\
 \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8\theta + \frac{a_9}{r} + \left(\frac{a_6r}{2} \right) \\
 \gamma_{r\theta} &= a_{10} + \frac{a_{11}\theta}{r} + a_{12}r
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

Il est clair qu'il n'y a pas de couplage entre la déformation de cisaillement ($\gamma_{r\theta}$) et les deux autres composantes de déformations ($\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$).

En substituant (III.16) dans (III.1) et après intégration nous obtenons :

$$U = a_4 r + a_5 r \theta + a_6 r^2 / 2 + a_9 + a_{11} \quad (\text{III.17a})$$

$$V = a_4 r \theta - a_5 r \theta^2 / 2 + a_7 r \theta + a_8 r \theta^2 / 2 + (a_{10} - a_5) r \log(r) - a_{11} \theta + a_{12} r^2 \quad (\text{III.17b})$$

Par conséquent, d'après la relation (III.13c) :

$$\phi = -a_4 \theta - a_5 (2 - 2 \log(r) - \theta^2) / 2 + a_7 \theta - a_8 \theta^2 / 2 + a_{10} (2 \log(r) + 1) / 2 - a_{11} \theta / (2r) + 3 a_{12} r / 2 \quad (\text{III.17c})$$

Le champ de déplacement final sera obtenu par combinaison de (3.13) et (3.17) :

$$U_r = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta + a_4 r + a_5 r \theta + a_6 r^2 / 2 + a_9 + a_{11}$$

$$V_\theta = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 r - a_4 r \theta - a_5 r \theta^2 / 2 + a_7 r \theta + a_8 r \theta^2 / 2 + (a_{10} - a_5) r \log(r) - a_{11} \theta + a_{12} r^2 \quad (\text{III.18})$$

$$\phi = a_3 - a_4 \theta - a_5 (2 - 2 \log(r) - \theta^2) / 2 + a_7 \theta - a_8 \theta^2 / 2 + a_{10} (2 \log(r) + 1) / 2 - a_{11} \theta / (2r) + 3 a_{12} r / 2$$

Le premier élément secteur engendré de Djoudi [DJO 90] est désigné par "I" et sert de comparaison par la suite.

III-3.2 Transformation des coordonnées

Les variables cinématiques dans cette approche sont développées en coordonnées cartésiennes (x, y), puis transformées en coordonnées polaires (r, θ) comme illustré dans la figure (III.2).

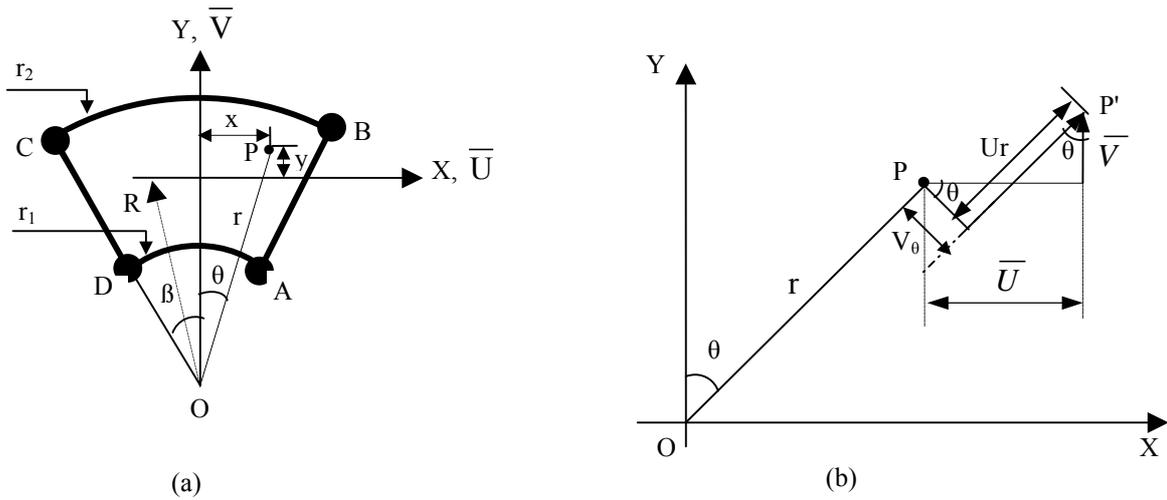


Figure (III.2) : Système de coordonnées et déplacements

Le passage en coordonnées polaires, nécessite l'utilisation des expressions suivantes :

$$x = r \sin \theta \tag{III.19a}$$

$$y = r \cos \theta - R \tag{III.19b}$$

$$U_r = \bar{U} \sin \theta + \bar{V} \cos \theta \tag{III.19c}$$

$$V_\theta = \bar{U} \cos \theta - \bar{V} \sin \theta \tag{III.19d}$$

Sabir et Salhi [SAB 86] ont utilisé cette approche dans le développement d'un élément secteur de base à 2 ddl par nœud, et on trouve aussi Djoudi [DJO 90] qui applique cette méthode dans le développement d'un élément secteur avec rotation dans le plan.

III-3.2.1 Élément de Sabir et Salhi [SAB 86]

III-3.1.1.a Mode de corps rigide

Dans les coordonnées cartésiennes (x, y) les relations "déformation-déplacement" de point quelconque P sont données par [SAB 86] :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{III.20a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (\text{III.20b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{III.20c})$$

Où :

ε_x et ε_y : Déformation directe.

γ_{xy} : Déformation tangentielle.

U et V : Déplacement suivant x et y respectivement.

Si on prend les trois composantes de déformation égales à zéro et en intégrant les équations différentielles résultantes, on trouve les déplacements U et V :

$$U_R = a_1 - a_3 y \quad (\text{III.21a})$$

$$V_R = a_2 + a_3 x \quad (\text{III.21b})$$

Les équations (III.21) représentent les champs du déplacement qui correspondent au déplacement du corps rigide de l'élément secteur. Nous remarquons que les deux constantes a_1 et a_2 représentent les mouvements de translation respectivement dans les directions x et y, et la constante a_3 représente la rotation dans le plan.

III-3.2.1.b Champ de déformation

Pour l'élément secteur avec quatre nœuds aux sommets et deux degrés de liberté par chaque nœud, le champ du déplacement devra contenir huit constantes. On a utilisé trois constantes pour la représentation des mouvements du corps rigide, et il reste cinq constantes qui peuvent être réparties entre les déformations de la manière suivante :

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad (\text{III.22a})$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7 x \quad (\text{III.22b})$$

$$\gamma_{xy} = a_8 \quad (\text{III.22c})$$

En substituant (III.22) dans (III.20) et après l'intégration, on obtient :

$$U_s = a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \quad (\text{III.23a})$$

$$V_s = -a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} \quad (\text{III.23b})$$

La forme finale de champs des déplacements s'écrit en ajoutant les équations (III.21) à (III.23) d'où :

$$\bar{U} = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \quad (\text{III.24a})$$

$$\bar{V} = a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} \quad (\text{III.24b})$$

Pour transférer aux coordonnées polaires, en substituant l'équation (III.24) dans (III.19) on obtient :

$$\begin{aligned} U &= a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 R \cos \theta + a_4 r \sin^2 \theta \\ &+ a_5 r \sin^2 \theta (r \cos \theta / 2 - R) + a_6 \cos \theta (r \cos \theta - R) \\ &+ a_7 \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta - R^2) / 2 + a_8 \sin \theta (r \cos \theta - R / 2) \end{aligned} \quad (\text{III.25a})$$

$$\begin{aligned} V &= a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta + a_3 (R \cos \theta - r) + a_4 r \sin \theta \cos \theta \\ &+ a_5 r \sin \theta (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta / 2) + a_6 \sin \theta (R - r \cos \theta) \\ &- a_7 (r^2 \cos^3 \theta - R^2 \cos \theta + 2r^2 \sin^2 \theta \cos \theta - 2rR) / 2 \\ &+ a_8 (\cos 2\theta - R \cos \theta) / 2 \end{aligned} \quad (\text{III.25b})$$

III-3.2.2 Elément de Djoudi [DJO 90]

Djoudi [DJO 90] propose le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 U_r = & a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 R \sin \theta + a_4 r \sin^2 \theta - a_5 \sin \theta (R - 2r \cos \theta) \\
 & - a_6 r \sin^2 \theta (R - r \cos \theta) + a_7 \cos \theta (r \cos \theta - R) \\
 & + a_8 r \sin \theta \cos \theta (r \cos \theta - R) + a_9 \sin \theta (r \cos \theta - R)^2 \\
 & + a_{10} R r \sin^2 \theta (R - r \cos \theta) - a_{11} R r^2 \sin^2 \theta (R - r \cos \theta)^2 \\
 & + a_{12} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{III.26a}$$

$$\begin{aligned}
 V_\theta = & a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta - a_3 (r - R \cos \theta) + a_4 r \sin \theta \cos \theta \\
 & - a_5 (r + R \cos \theta - 2r \cos^2 \theta) + a_6 r \sin \theta \cos \theta (r \cos \theta - R) \\
 & + a_7 \sin \theta (R - r \cos \theta) + a_8 r \sin^2 \theta (R - r \cos \theta) \\
 & + a_9 \cos \theta (r \cos \theta - R)^2 + a_{10} r \sin \theta (r \cos \theta - R) (r - R \cos \theta) \\
 & - a_{11} r^2 \sin^2 \theta (r - R \cos \theta) (r \cos \theta - R)^2 + a_{12} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{III.26b}$$

$$\begin{aligned}
 \phi = & a_3 - a_6 (r/2) \sin \theta - a_8 (R - r \cos \theta)/2 - a_9 (r \cos \theta - R) \\
 & - 2a_{10} r \sin \theta (r \cos \theta - R) - 3 a_{11} r^2 \sin^2 \theta (R - r \cos \theta)^2 + a_{12} r \sin \theta
 \end{aligned} \tag{III.26c}$$

Après transformation et substitution, on obtient les composantes de déformations :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r = & a_4 s_2 - 2 a_5 s_1 c_1 - a_6 s_2 (R - 2 r c_1) + a_7 c_2 + a_8 s_1 c_1 (2 r c_1 - R) \\
 & + 2 a_9 r s_1 c_1 + a_{10} R s_2 (R - 2 r c_1) - 2 a_{11} R r s_3 (R - r c_1) \\
 & (R - r c_1 + c_1) + 2 a_{12} r s_2 c_1
 \end{aligned} \tag{III.27a}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\theta = & a_4 c_2 - 2 a_5 s_1 c_1 + a_6 (r c_3 - r c_2) + a_7 s_2 + a_8 (R s_1 c_1 \\
 & - r s_1 c_2 + r s_3) + 2 a_9 s_1 c_1 (R - r c_1) + a_{10} (R^2 c_2 \\
 & + r^2 c_2 - r^2 s_2 - R r c_3 + R r s_2 c_1 + R r c_1) + a_{11} (2 r^4 s_1 c_3 \\
 & - 2 r^4 s_3 c_1 + 4 R^2 r^2 s_1 c_3 - 2 R^2 r^2 c_1 s_3 + 2 R^2 r^2 s_1 c_1 \\
 & - 4 R r^3 s_1 c_2 + 4 R r^3 s_3 - 2 R^3 r s_1 c_2 - 4 R r^3 s_3 c_4 \\
 & + 3 R r^3 s_5 c_2 + R^3 r s_3 - R r^3 s_3 c_2) - 3 a_{12} r s_2 c_1
 \end{aligned} \tag{III.27b}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\theta} = & 2 a_4 s_1 c_1 + 2 a_5 (3 c_2 - s_2 - R c_1/r) + a_6 (3 r s_1 c_2 \\
& - r s_3 - 2 R s_1 c_1) - 2 a_7 s_1 c_1 + a_8 (r c_3 - 3 r c_1 s_2 \\
& - R c_2) + a_9 (2 R s_2 + 2 r c_3 - 2 R c_2 - 2 r s_2 c_1) \\
& + a_{10} (2 R^2 s_1 c_1 - 3 R r s_1 c_2 + 2 r^2 s_1 c_1 - R r s_1 \\
& + R r s_3) + a_{11} (2 R r^3 s_4 c_1 - 4 R r^3 s_2 c_3 - 6 R^3 r s_2 c_1 \\
& - 10 R r^3 s_1 c_1 - 2 R^2 r^2 s_2 + 14 R^2 r^2 s_2 c_2 + 6 r^4 s_2 c_2 \\
& - 4 R r^3 s_4 c_3 - 2 R^2 r^2 s_4) + 2 a_{12} r s_1 (c_2 - s_2)
\end{aligned} \tag{III.27c}$$

où:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \cos \theta & c_2 &= \cos^2 \theta & c_3 &= \cos^3 \theta \\
s_1 &= \sin \theta & s_2 &= \sin^2 \theta & s_3 &= \sin^3 \theta \\
s_4 &= \sin^4 \theta & s_5 &= \sin^5 \theta
\end{aligned}$$

Le deuxième élément secteur engendré de Djoudi [DJO 90] sera désigné "II" par la suite.

III-3.3 Approche directe

Cette approche a été introduite pour la première fois par Raju et Rao (RAJ 69), elle consiste à interpoler sur les variables polaires r et θ de la même manière qu'on le fait sur les variables cartésiennes x et y , tout en vérifiant l'équation de compatibilité (exprimées en coordonnées polaires). On trouve aussi quelques chercheurs qui ont appliqué cette méthode pour le développement d'un élément secteur comme Sabir et Salhi [SAB 86] et Belarbi [BEL 00] qui a utilisé cette approche pour la première fois dans l'évolution d'un élément secteur membranaire à trois degrés de liberté par nœud, y compris la rotation dans le plan comme ddl.

III-3.3.1 Élément de Raju et Rao [RAJ 69]

L'un des éléments finis les plus utilisés dans l'analyse des problèmes de l'élasticité plane est l'élément quadratique bilinéaire, ses fonctions de déplacement en coordonnées cartésiennes sont :

$$\bar{U} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \tag{III.28a}$$

$$\bar{V} = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \quad (\text{III.28b})$$

Raju et Rao ont développé un élément secteur **PSL** (Sector element with Linear displacement variation), utilisant le champ des déplacements (III.10) soit :

$$U_r = a_1 + a_2 r + a_3 \theta + a_4 r \theta \quad (\text{III.29a})$$

$$V_\theta = a_5 + a_6 r + a_7 \theta + a_8 r \theta \quad (\text{III.29b})$$

III-3.3.2 Élément de Sabir et Salhi [SAB 86]

Sabir et Salhi ont introduit un nouveau champ de déplacement soit :

$$U_r = a_1 - a_3 \theta + a_4 r + a_5 r \theta - a_7 \frac{\theta^2}{2} + a_8 \frac{\theta}{2} \quad (\text{III.30a})$$

$$V_\theta = a_2 + a_3 r - a_5 \frac{r^2}{2} + a_6 \theta + a_7 r \theta + a_8 \frac{r}{2} \quad (\text{III.30b})$$

III-4 FORMULATION DES ÉLÉMENTS SECTEURS

III-4.1 Les éléments ont quatre nœuds et trois ddl par nœud

III-4.1.1 Formulation de SBS 1 " l'invariant de Djoudi "

En appliquant l'intégration directe dans le développement de cet élément, dont une simple modification est faite sur le champ de déformation de l'élément "I" de Djoudi [DJO 90] (relation III.16), on aura :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_4 + a_5 \theta + (a_6 r) \\ \varepsilon_\theta &= a_7 - a_8 \theta + \frac{a_9}{r} + \left(\frac{a_6 r}{2} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= a_{10} + \frac{a_{11} \theta}{r} + a_{12} r \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Les équations (III.31) vérifiées l'équation de compatibilité (III.15) (annexe E).

En substituant (III.31) dans (III.1) et après intégration nous obtenons :

$$U = a_4 r + a_5 r \theta + a_6 r^2 / 2 + a_9 + a_{11} \quad (\text{III.32a})$$

$$V = -a_4 r \theta - a_5 r \theta^2 / 2 + a_7 r \theta - a_8 r \theta^2 / 2 + (a_{10} - a_5) r \log(r) - a_{11} \theta + a_{12} r^2 \quad (\text{III.32b})$$

Par conséquent, d'après la relation (III.13c) :

$$\phi = a_4 \theta + a_5 (2 + 2 \log(r) + \theta^2) / 2 - a_7 \theta + a_8 \theta^2 / 2 - a_{10} (2 \log(r) + 1) / 2 + a_{11} \theta / (2r) - 3 a_{12} r / 2 \quad (\text{III.33c})$$

Le champ de déplacement final sera obtenu par combinaison de (III.13) qui représente le champ de déplacement correspondant au MCR et (III.33) :

$$\begin{aligned} U_r &= a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta + a_4 r + a_5 r \theta + a_6 r^2 / 2 + a_9 + a_{11} \\ V_\theta &= -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 r - a_4 r \theta - a_5 r \theta^2 / 2 + a_7 r \theta \\ &\quad - a_8 r \theta^2 / 2 + (a_{10} - a_5) r \log(r) - a_{11} \theta + a_{12} r^2 \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} \phi_z &= -a_3 + a_4 \theta + a_5 (2 + 2 \log(r) + \theta^2) / 2 - a_7 \theta + a_8 \theta^2 / 2 \\ &\quad - a_{10} (2 \log(r) + 1) / 2 + a_{11} \theta / (2r) - 3 a_{12} r / 2 \end{aligned}$$

La matrice de déformation [B] s'obtient en substituant les équations (III.34) dans les équations de déformation (III.1) :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2} & 1 & -\theta & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\theta}{r} & r \end{bmatrix}$$

Pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ de "l'invariant de Djoudi", on suit les techniques habituelles de la méthode des éléments finis.

$$[K_e] = [A^{-1}]^T \left[\iint_s [B]^T [D] [B] . r dr d\theta \right] [A^{-1}] \quad (\text{IV.34a})$$

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (\text{IV.34b})$$

avec :

$$[K_0] = \iint_s [B]^T [D] [B] . r dr d\theta \quad (\text{IV.34c})$$

Pour un matériau élastique, homogène et isotrope en contraintes planes, la matrice [D] est :

$$[D] = \frac{E.t}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

La construction des matrices [K₀] et [A] sont détaillées en annexe A.

III-4.1.2 Formulation de SBS 2 " l'élément de Belarbi "

Cet élément est développé par Belarbi [BEL 00], le champ de déplacement est :

$$\bar{U} = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \quad (\text{III.36a})$$

$$\bar{V} = a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \quad (\text{III.36b})$$

$$\theta_z = a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \quad (\text{III.36c})$$

Il fait des interpolations sur les variables r et θ dans le passage en coordonnées polaires, donc les relations (III.36) deviennent :

$$U_r = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta + a_6r\theta + a_8 \frac{\theta^2}{2} + a_9\theta^2 + a_{10}r\theta^2 + a_{11}r^2\theta^3 \quad (\text{III.37a})$$

$$V_\theta = a_2 + a_3r + a_5r + a_6 \frac{r^2}{2} + a_7\theta + a_8r\theta - a_{10}r^2\theta - a_{11}\theta^2r^3 + a_{12}r^2 \quad (\text{III.37b})$$

$$\theta_z = a_3 - a_9\theta - 2a_{10}r\theta - 3a_{11}r^2\theta^2 + a_{12}r \quad (\text{III.37c})$$

Les matrices [A], [B] et [K₀] sont détaillées en annexe B.

III-4.2 Les éléments secteurs contiennent cinq nœuds à 2 ddl par nœud

III-4.2.1 Formulation de l'élément SBS 3

Considérons l'élément secteur illustré sur la figure (III.1b). Le champ de déformation proposé est :

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5x + a_9y \quad (\text{III.38a})$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7x + a_{10}y \quad (\text{III.38b})$$

$$\gamma_{xy} = a_8 \quad (\text{III.38c})$$

Donc le champ de déplacement de l'élément SBS3 est donné par :

$$U = a_1 - a_3y + a_4x + a_5 \frac{x^2}{2} - \frac{a_7y^2}{2} + \frac{a_8y}{2} + a_9xy \quad (\text{III.39a})$$

$$V = a_2 + a_3x + a_6y + a_7xy + \frac{a_8x}{2} - \frac{a_9x^2}{2} + \frac{a_{10}y^2}{2} \quad (\text{III.39b})$$

Dans le passage en coordonnées polaires, on fait des interpolations similaires sur les variables r et θ , comme l'a effectué Raju et Rao [Raj 69], Sabir et Salhi [SAB86].

Les relations (III.39) deviennent :

$$U_r = a_1 - a_3\theta + a_4r + \frac{a_5r^2}{2} - \frac{a_7\theta^2}{2} + \frac{a_8\theta}{2} + a_9r\theta \quad (\text{III.40a})$$

$$V_\theta = a_2 + a_3r + a_6\theta + a_7r\theta + \frac{a_8r}{2} - \frac{a_9r^2}{2} + \frac{a_{10}\theta^2}{2} \quad (\text{III.40b})$$

La matrice de déformation [B] s'obtient en substituant les équations (III.40) dans les équations de déformation (III.1) :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \frac{r}{2} & \frac{1}{r} & 1 - \frac{\theta^2}{2r} & \frac{\theta}{2r} & \theta & \frac{\theta}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & -\frac{\theta}{r} & -\frac{\theta}{r} & \frac{1}{2r} & 1 - \frac{r}{2} & -\frac{\theta^2}{2r} \end{bmatrix}$$

Pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ de SBS 3, on suit les techniques habituelles de la méthode des éléments finis, et les matrices [A] et $[K_0]$ sont détaillées en annexe C.

III-4.2.2 Autres éléments secteurs SBS 4, SBS 5,...

On propose quelques éléments secteurs où on applique dans leurs développements la même approche appliquée dans le développement de l'élément SBS 3 l'approche directe, les champs de déplacement donnés sont :

***-SBS 4 :**

$$U = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - \frac{a_7\theta^2}{2} + \frac{a_8\theta}{2} + \frac{a_{10}r^2}{2} \quad (\text{IV.41a})$$

$$V = a_2 + a_3r - \frac{a_5r^2}{2} + a_6\theta + a_7r\theta + \frac{a_8r}{2} + \frac{a_9\theta^2}{2} \quad (\text{IV.41b})$$

***-SBS 5:**

On applique l'approche directe sur le champ de déplacement de l'élément (SBRIE 1) [SAB 95], on obtient :

$$U = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - \frac{a_7\theta^2}{2} + \frac{a_8\theta}{2} + \frac{a_{10}\theta^2}{2} \quad (\text{IV.42b})$$

$$V = a_2 + a_3r - \frac{a_5r^2}{2} + a_6\theta + a_7r\theta + \frac{a_8r}{2} + \frac{a_9r^2}{2} \quad (\text{IV.42b})$$

***-SBS 6:**

On effectue la même procédure sur le champ de déplacement de l'élément (SBRIE 2) [SAB 95] avec $f=150$.

$$U = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - a_7 \frac{(r^2 + \theta^2)}{2} + a_8 \frac{\theta}{2} + a_{10}(150r^2 + \theta^2) \quad (\text{IV.43a})$$

$$V = a_2 + a_3r - a_5 \frac{(r^2 + \theta^2)}{2} + a_6\theta + a_7r\theta + a_8 \frac{r}{2} + a_9 \frac{(r^2 - 150\theta^2)}{2} \quad (\text{IV.43b})$$

***-SBS 7:**

$$U = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta + a_6 \frac{r^2}{2} - a_8 \frac{\theta^2}{2} + a_{10} \frac{\theta}{2} \quad (\text{IV.44a})$$

$$V = a_2 + a_3r - a_5 \frac{r^2}{2} + a_7\theta + a_8 r\theta + a_9 \frac{\theta^2}{2} + a_{10} \frac{r}{2} \quad (\text{IV.44b})$$

Nous remarquons ici, que les fonctions de déplacement finales pour tous les éléments contiennent des termes cubiques et/ou quadratiques permettant ainsi le changement de courbure.

III-5 CONDENSATION STATIQUE

Dans la détermination de la matrice de rigidité élémentaire des éléments secteurs à cinq nœuds, on a besoin d'utiliser des méthodes qui libèrent les degrés de liberté correspondant au nœud interne, en utilisant la méthode de condensation statique.

III-5.1 Définition

Le terme de condensation se rapporte à la réduction de la taille d'un système des équations par élimination d'un certain nombre de degrés de liberté, où ces degrés de liberté (DDL) du modèle initial sont séparés en degrés de liberté de jonction (ou maîtres) et degrés de liberté internes (ou esclaves) qui vont être éliminés.

Cette méthode permet d'éliminer les DDL internes pour un élément seul ou pour un groupe d'éléments. Elle peut être considérée comme une méthode de calcul agissant au niveau de l'élément.

Le principe de la méthode est très utilisé en pratique pour :

- Le système de sous structures;
- L'élimination volontaire de certains DDL (problème dynamique, rotule);
- La création de super éléments;
- L'amélioration de la qualité d'un élément.

III-5.2 Utilité de la condensation statique

1- La transformation de la matrice de rigidité globale d'un ensemble d'éléments triangulaires à une matrice de rigidité élémentaire d'un élément rectangulaire (fig. III.3a), par la condensation du nœud interne, on aura comme conséquence une matrice de rigidité élémentaire de l'élément rectangulaire (réduction le temps du calcul et la capacité de mémoire).

2- Transformer une poutre bi-encastree à une autre poutre encastree appuyée (figure III.3b).

3- Si on a deux éléments ayant une différence en DDL au nœud (interaction d'élément à 3DDL/ nœud avec élément à 2DDL/nœud) (figure III.3c).

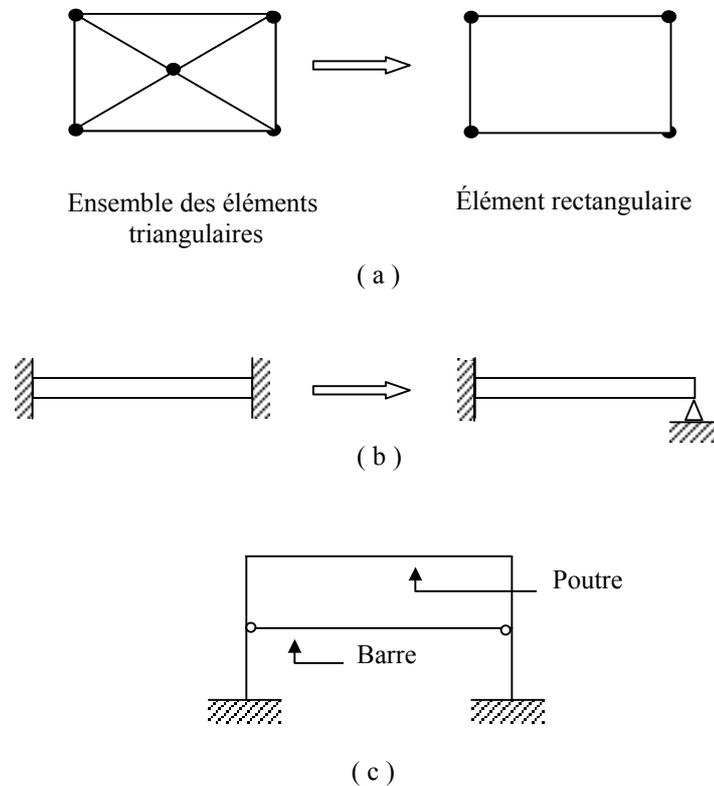


Figure (III.3) : Exemples de condensation

III-5.3 Principe de la condensation statique (JEA 91)

La condensation statique est une technique qui permet de libérer des degrés de liberté d'un élément (introduction d'articulations,...) en agissant sur le système d'équation d'équilibre (réduction de la matrice de rigidité, des vecteurs de charges,...) avant (ou après) l'assemblage de la structure (globale).

On part de la relation donnant les forces internes (au niveau élémentaire) :

$$\{r\} = [K]\{d\} + \{F\} \quad (\text{III.45})$$

où :

$[K]$: la matrice de rigidité de l'élément

$\{d\}$: le vecteur des déplacements

$\{F\}$: le vecteur des charges extérieures (structure en équilibre)

Effectuons une partition des vecteurs des déplacements, des réactions et des forces équivalentes, ainsi que la matrice de rigidité de l'élément, en supposant que les équations à éliminer sont dotées par le suffixe « e » et celles qui sont conservées par le suffixe « c ».

$$\{d\} = \begin{cases} \{d_c\} \\ \{d_e\} \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ddl à conserver} \\ \rightarrow \text{ddl à éliminer (libérer)} \end{array}$$

$$\{r\} = \begin{cases} \{r_c\} \\ \{r_e\} \end{cases}, \quad \{F\} = \begin{cases} \{F_c\} \\ \{F_e\} \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{ce}] \\ [K_{ec}] & [K_{ee}] \end{bmatrix}$$

avec : $[K_{ce}] = [K_{ec}]^T$

D'où dans (III.45) :

$$\begin{Bmatrix} \{r_c\} \\ \{r_e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{ce}] \\ [K_{ec}] & [K_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_c\} \\ \{d_e\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_c\} \\ \{F_e\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.47})$$

III-5.4 La méthode générale de condensation statique

La méthode générale de condensation statique pour libérer des DDL est :

III-5.4.1 Réduction du système d'équation

On tire de la seconde ligne de (III.47) on obtient :

$$\{d_c\} = [k_{cc}]^{-1} (\{r_c\} - [k_{cc}]\{d_c\} - \{F_c\}) \quad (III.48)$$

Puis on remplace $\{d_c\}$ dans la première ligne pour obtenir le système réduit suivant :

$$\begin{aligned} \{r_c\} &= \left([k_{cc}] - [k_{cc}] [k_{cc}]^{-1} [k_{cc}] \right) \{d_c\} \\ &+ [k_{cc}] [k_{cc}]^{-1} (\{r_c\} - \{F_c\}) + \{F_c\} \end{aligned} \quad (III.49)$$

III-5.4.2 Une condensation statique avec $\{r_c\} = 0$

$$\{r_c\} = 0 \quad (III.50)$$

En effet, lorsqu'on libère des degrés de liberté, les efforts associés doivent être nuls (exemple : si on libère le DDL associé à une rotation (rotule), le moment doit être nul).

On remplace la relation (III.50) dans (III.48) et (III.49), les équations deviennent :

$$\{d_c\} = -[k_{cc}]^{-1} ([k_{cc}] \{d_c\} + \{F_c\}) \quad (III.51.a)$$

$$\{r_c\} = [k_{cc}^*] \{d_c\} + \{F_c^*\} \quad (III.51.b)$$

avec :

$$[k_{cc}^*] = [k_{cc}] - [k_{cc}] [k_{cc}]^{-1} [k_{cc}] \quad (III.52.a)$$

$$\{F_c^*\} = \{F_c\} - [k_{cc}] [k_{cc}]^{-1} \{F_c\} \quad (III.52.b)$$

Tel que :

- $\{d_e\}$: représente les déplacements éliminés.
- $\{r_c\}$: représente le vecteur des forces internes après condensation.
- $[K_{cc}^*]$: représente la matrice de rigidité condensée.
- $\{F_c^*\}$: représente le vecteur de charge condensé.

III-5.4.3 Une condensation statique avec $\{r_e\} \neq 0$

Le système (III.49) s'écrit :

$$\begin{aligned} \{r_c\} &= [k_{cc}] \{d_c\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] \{d_c\} + [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{r_e\} \\ &\quad + \{F_c\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{F_e\} \\ \Rightarrow \{r_c\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{r_e\} &= \underbrace{\left([k_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] \right)}_{[K_{cc}^*]} \{d_c\} \\ &\quad + \underbrace{\left(\{F_c\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{F_e\} \right)}_{\{F_c^*\}} \end{aligned}$$

avec (III.52) on trouve :

$$[K_{cc}^*] \{d_c\} + \{F_c^*\} = \{r_c^*\} = \{r_c\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{r_e\} \quad (\text{III.53})$$

Ce qui montre que les forces internes $\{r\}$ se condensent semblablement aux charges équivalentes.

Dans le cas fréquent d'un assemblage conduisant à une relation de type :

$$[K] \{d\} = \{g\} \quad (\text{III.54})$$

$$\text{avec : } \{g\} = \begin{Bmatrix} \{g_c\} \\ \{g_e\} \end{Bmatrix}$$

La condensation de $[K]$ et $\{g\}$ obéit toujours aux relation (III.52), tandis que les déplacements sont ensuite tirés de :

$$\{d_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{g_e\} - [K_{ec}]\{d_c\}) \quad (\text{III.55})$$

III-6 CONCLUSION

Les éléments qui ont été présentés dans ce chapitre possèdent les caractéristiques suivantes :

- Description correcte du MCR ;
- Représentation les états de déformations constantes ;
- Continuité à l'intérieur de l'élément ;
- Évaluation simple et efficace de la matrice de rigidité.

Dans l'utilisation des éléments à cinq nœuds on applique la technique de condensation statique qui est couramment utilisée dans la méthode des éléments finis, chaque fois qu'on désire éliminer des degrés de liberté internes.

CHAPITRE IV

PRÉSENTATION

DU

PROGRAMME "G.C.B"

CHAPITRE IV

PRÉSENTATION DU PROGRAMME "G.C.B"

IV-1 INTRODUCTION

La résolution d'un problème par la M.E.F, nécessite la manipulation des matrices et vecteurs de grandes tailles (matrice des raideurs, matrice de rotation, vecteurs forces, etc.) ainsi que différentes techniques numériques (Assemblage, résolution,...). Ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle pour l'application de la méthode.

Du point de vue pratique, l'utilisation de la méthode se fait à travers l'utilisation d'un programme qui offre à l'utilisateur un certain nombre de possibilités à travers : une bibliothèque d'éléments, un ensemble de lois de comportement de matériaux et de liaisons, un ensemble d'algorithmes de résolution, etc. Donc, dans ce chapitre on présente le programme "G.C.B" qui permet la modélisation des éléments structuraux en élasticité plane, qui a été élaboré par le Prof. BELARBI M.T. en 1990, ce programme calcule les structures à contours circulaires, c'est un versatile pouvant être utilisé quelque soit le type du matériau (isotropes -anisotropes -orthotropes) et quelque soit le type d'appuis (rigides ou élastique).

IV-2 PRÉSENTATION DU PROGRAMME "G.C.B"

Le programme "G.C.B" a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous-programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous programme mais par le biais de bloc commun (COMMON) étiquetés, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à l'autre.

Comme tout programme d'éléments finis, ce programme est constitué par les étapes illustrées sur la figure (IV.1).

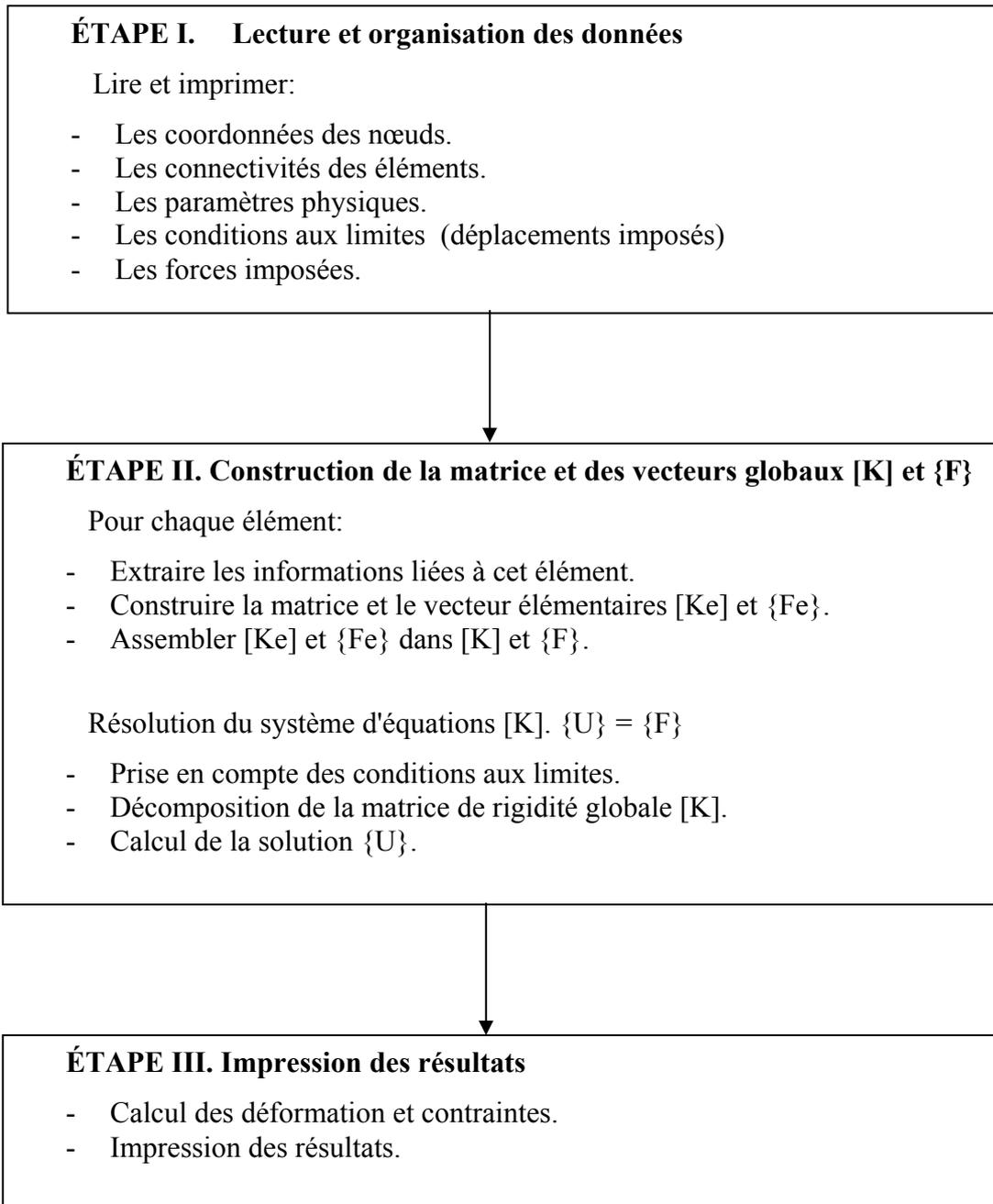


Figure (IV.1) : Les étapes du programme "G.C.B"

IV-3 DESCRIPTION DÉTAILLÉE DES DIFFÉRENTES ÉTAPES DU PROGRAMME "G.C.B"

Une description détaillée des différentes étapes est présentée :

IV-3.1 Étape 1: Lecture et organisation des données

On divise la structure en un certain nombre d'éléments reliés aux nœuds. Ces éléments représentent les caractéristiques élastiques du milieu idéalisé. Donc les données portent essentiellement sur les nœuds comme les coordonnées, les conditions aux limites et les chargements, et pour les éléments la numérotation des coefficients physiques du matériau.

La subroutine d'entrée des données doit transmettre aux autres subroutines les informations nécessaires à la résolution du problème, elle sert à partir du fichier (**Nom.DAT**)

Les paramètres constants qui définissent l'élément et la structure sont les suivants :

- NNOEL** : nombre de nœud par élément.
- NDLEL** : nombre de degré de liberté par élément
- NDLNO** : nombre de degré de liberté par nœud
- NTNO** : nombre total de nœud (de la structure idéalisée)
- NTEL** : nombre total d'éléments (de la structure idéalisée)
- NTDI** : nombre total des déplacements imposés
- NTFI** : nombre total des forces imposées
- LB** : largeur de bande
- IVEC** : dimension de [K] stockée sous forme vectorielle.

Les paramètres physiques qui doivent être entrés sont :

- NSECT** : l'épaisseur "t"
- NPHYS (I,1)** : module d'élasticité longitudinal "E"
- NPHYS (I,2)** : coefficient de poisson "ν"

Tout ces paramètres sont gérés par la sous routine **DÉFINITION**, qui peut accéder à plusieurs blocs communs, où elle stocke les paramètres lus, afin qu'ils puissent être exploités par d'autres routines. Ces blocs sont les suivants :

COMMON/ELEMENT/ NDIM, NNOEL, NDLEL, NDLNO, NSECT, NPHYS
COMMON/ PROBLÈME/ NTNO, NTEL, NTDL, NTDI, NTFI, LB, IVEC

L'entrée des données est traitée dans une routine appelée **LIRE**, qui permet de saisir puis d'imprimer les données concernant la structure à modéliser. Les données principales sont lues et imprimées à l'aide des sous routines suivantes:

DCOOR : pour les coordonnées, il réalise un maillage automatique.

DICON : pour les connections.

DSECT : pour les sections.

DPHYS : pour les matériaux (YOUNG ; POISSON ; GAMA).

Si GAMA =1 cas de déformation plane.

Si GAMA=0 cas de contrainte plane.

DDEPI : pour les conditions d'appuis.

DFORI : pour les forces imposée.

Ces données seront utilisées ultérieurement, on doit introduire les matrices et les vecteurs calculés dans l'argument de la sous-routine :

LIRE (ICON, COOR, PHYS, SECT, DEPI, VDEPI, FORI, VFORI)

IV-3.2 Étape 2: Construction de la matrice et du vecteur globaux [k] et {f} et résolution du système des équations [K] {U}= {F}

Cette étape est la plus importante du programme, car on y effectue toutes les opérations nécessaires pour aboutir à la solution finale du problème, elle est élaborée par le sous programme **DÉPLACEMENT**.

Ces opérations sont les suivantes:

- Evaluation des matrices de rigidité élémentaire

Cette étape est la plus importante et la plus difficile du problème. Après la lecture des données et la formation des tables nécessaires à la modélisation, on procède maintenant à l'élaboration des matrices et vecteurs élémentaires par le biais du sous-programme *DEPLACEMENT* qui permet de former la matrice de rigidité élémentaire.

$$[K_e] = [A^{-1}]^T \left[\iint_s [B]^T [D] [B] . r dr d\theta \right] [A^{-1}] \quad (\text{IV.1a})$$

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (\text{IV.1b})$$

$$[K_0] = \iint_s [B]^T [D] [B] . r dr d\theta \quad (\text{IV.1c})$$

Les sous-routines correspondantes à cette étape sont :

XCOOR, XNODE, XCHARACTER : faire extraire les données relatives à l'élément
(coordonnées, table de connexion,
caractéristiques de section et de matériaux)

FORMAP : Calcule la matrice de forme [A]

INVERS : l'inverse de la matrice [A]= [A]⁻¹

FORMKO : déterminer la matrice [K₀]

TRANS : Transposé de l'inverse de la matrice [A]=[A]⁻¹T

PROD : Multiplacation de :

- [A]⁻¹T * [K₀]=[E0]
- [E0]* [A]⁻¹=[ELK]

- Calcul des vecteurs élémentaires des forces

Il s'agit des forces nodales équivalentes élémentaires.

- Assemblage

Toutes les matrices représentant les éléments de la structure sont assemblées pour créer un modèle global représenté par un ensemble d'équations. Le principe est basé sur le fait qu'à chaque nœud où des éléments sont reliés, la valeur du déplacement est la même pour tous les éléments reliés à ce nœud.

L'assemblage des matrices de rigidités élémentaires est géré par la sous-routine *ASSEMV*, et celui qui concerne les vecteurs forces élémentaires est effectué par la routine *ASSEMF*.

Parmi les méthodes de stockage de la matrice de rigidité globale, nous avons opté au stockage vectoriel, car ce type de stockage a l'avantage de diminuer un grand nombre d'éléments ce qui aussi améliore la convergence de la solution.

- La prise en compte des conditions aux limites

Sans l'application des conditions aux limites, la structure peut subir une translation ou une rotation sans se déformer, ce sont des déplacements dits de « corps rigide » ou « déplacement d'ensemble ».

Donc il est important de s'assurer que la structure soit liée aux conditions d'appuis adéquats avant de procéder à la résolution, sous peine de rendre le problème insoluble.

En général, la structure s'appuie sur plusieurs nœuds pour lesquels certains déplacements sont interdits. Dans de tels cas il est nécessaire d'enlever les lignes et les colonnes appropriées de la matrice de rigidité globale stockée vectoriellement {RIGID}.

Il existe actuellement différentes méthodes pour mener à bien cette opération, on peut citer :

a- Méthode du terme diagonal dominant

Multiplier les termes diagonaux de [K] correspondant aux déplacements fixés, soit $K(i,i)$ par un grand nombre tel que $10^{40} = \text{GRAND}$.

Par exemple, imposons au déplacement (x) du nœud (i) d'être nul, ce qui implique que $(U_i=0)$, sachant que : $\{F\} = [K]\{U\}$

$$\{F_{xi}\} = K(i,1)U_1 + K(i,2)U_2 + \dots + K(i,n)U_n, \text{ en multipliant } K(i,i) \text{ par GRAND}$$

$$\{F_{xi}\} = K(i,1)U_1 + K(i,2)U_2 + \dots + \text{GRAND} * K(i,i)U_i + K(i,n)U_n$$

On remarque que le terme diagonal est maintenant beaucoup plus grand que les autres termes (non diagonaux), et comme F_{xi} est resté constante, ce qui signifie que la valeur du déplacement (U_i) tend vers zéro.

b- Méthode du terme unité sur la diagonale

Remplacer les termes diagonaux de [K] correspondant aux déplacements fixés par l'unité et remplacer le reste des lignes et des colonnes correspondantes par des zéros.

c- Méthode de suppression des équations

Elle consiste à restructurer la matrice [K], de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés.

On a utilisé la première technique qui est gérée par la sous-routine **LIMIT1**.

- La résolution du système d'équations

La méthode de résolution utilisée dans notre programme est celle de CHOLESKY, elle s'applique aux matrices symétriques, définies positivement.

Elle consiste à décomposer la matrice [RIGID] en deux matrices triangulaires. Cette opération est effectuée par la sous routine *DECOM*, et l'appel de cette sous-routine se fait par l'énoncé : *CALL DECOM (RIGID)*.

Les paramètres à utiliser pour faire cette décomposition sont déclarés en *COMMON*.

NTDL : nombre total de degré de liberté.

LB : largeur de bande.

IVEC : NTDL*LB dimension de RIGID.

RIGID : représente la matrice de rigidité en forme vectorielle

Il faut noter que le vecteur (RIGID) contient (après l'appel de la sous routine) la matrice décomposée [U].

Pour trouver les vecteurs de déplacement (Q), on fait l'appel de la sous routine *RESOL2* par l'énoncé : *CALL RESOL2 (RIGID, CHARG, DEPLA, NTDL , LB, IVEC)*

Où : - RIGID : vecteur décomposé.

- CHARG : vecteur de charge dont la dimension est NTDL.

- DEPLA : vecteur de déplacement dont la dimension est NTDL.

IV-3.3 Étape 3: Impression des résultats

Après le calcul du vecteur de déplacement global, il reste à évaluer les déformations puis les contraintes au centre de chaque élément en fonction de ces déplacements nodaux en utilisant les sous routines suivantes:

MATDEF: pour évaluer les déformations {DEFOR}, on fait l'appel par l'énoncé : *CALL MATDEF (BD, NDLEL, ELDL, DEFOR)*.

Avec :

BD : matrice de déformation.

ELDG : vecteur de déplacement élémentaire (exprimé dans le repère global).

NDLEL : nombre de degré de liberté par élément.

DEFFOR : vecteur de déformation par élément (en chaque nœud).

MATCON : pour trouver les contraintes {CONTR}, on fait l'appel par l'énoncé :
CALL MATCON (BC, NDLEL, ELDG, CONTR).

avec :

BC : matrice de contrainte.

CONTR : vecteur de contrainte par élément (en chaque nœud).

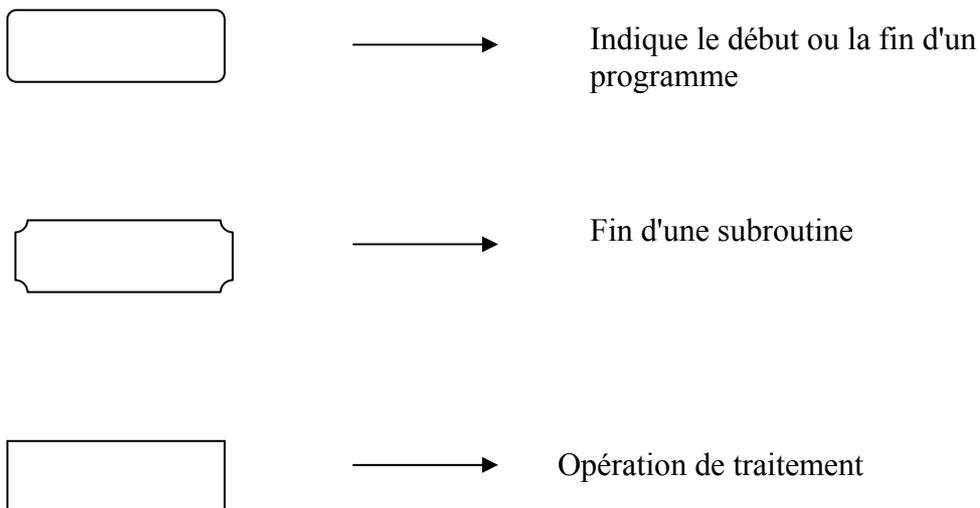
L'opération de l'impression des résultats est effectuée par les sous-routines :

SORTIE1: pour imprimer les déplacements {DEPLA}, on fait l'appel par l'énoncé :
Call SORTIE1 (DEPLA).

SORTI4: pour imprimer les contraintes {CONTR}, on fait l'appel par l'énoncé : Call
SORTI4 (III,NODE,CONTR).

IV-4 PRÉSENTATION DE L'ORGANIGRAMME DU PROGRAMME

On peut dire que l'organigramme est la présentation graphique d'une suite logique d'opération, et est un outil adopté à la construction d'un programme. Chaque type d'opération d'un organigramme est représenté par un symbole pour faciliter sa lecture. (Figure IV.2)



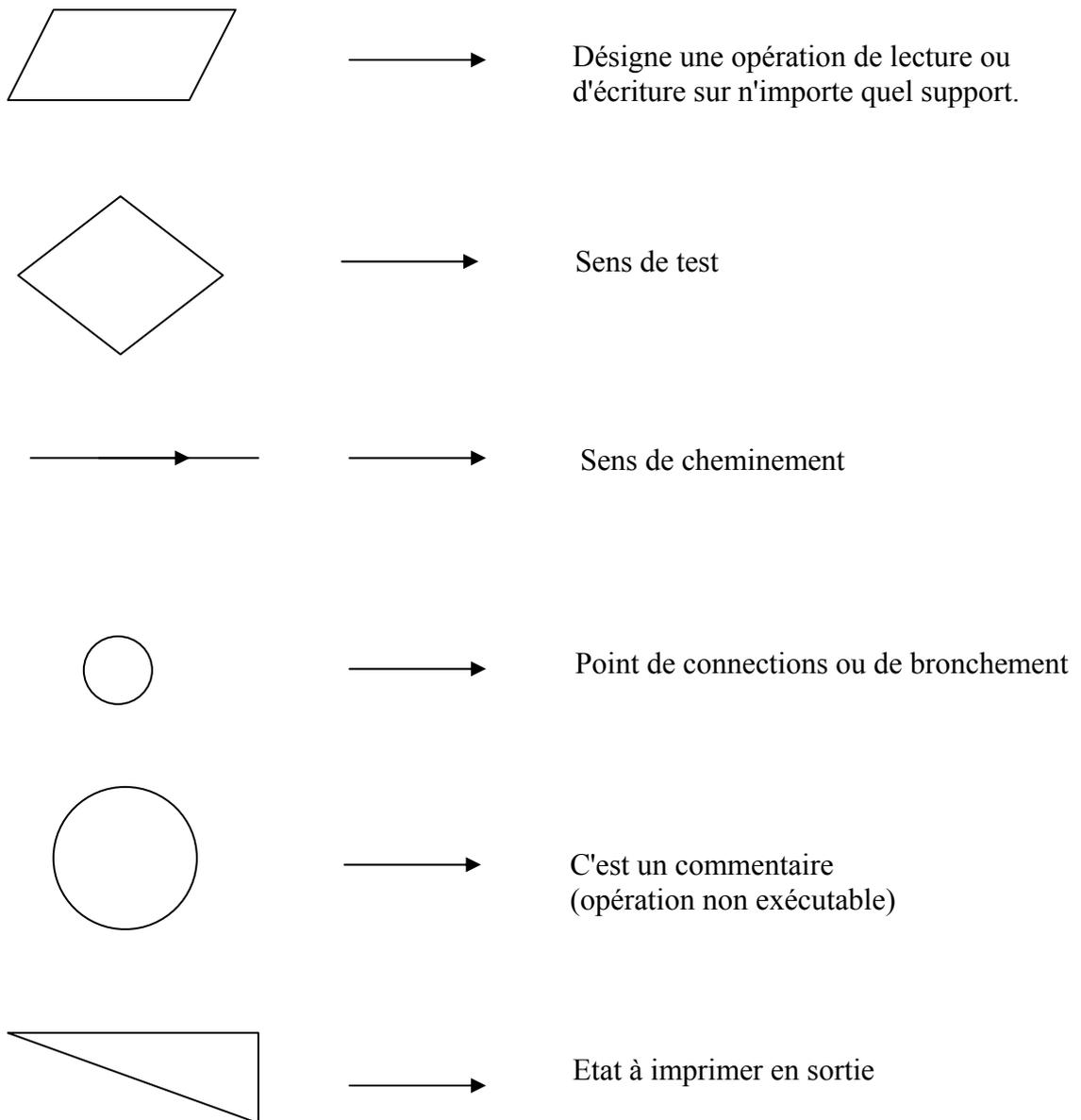
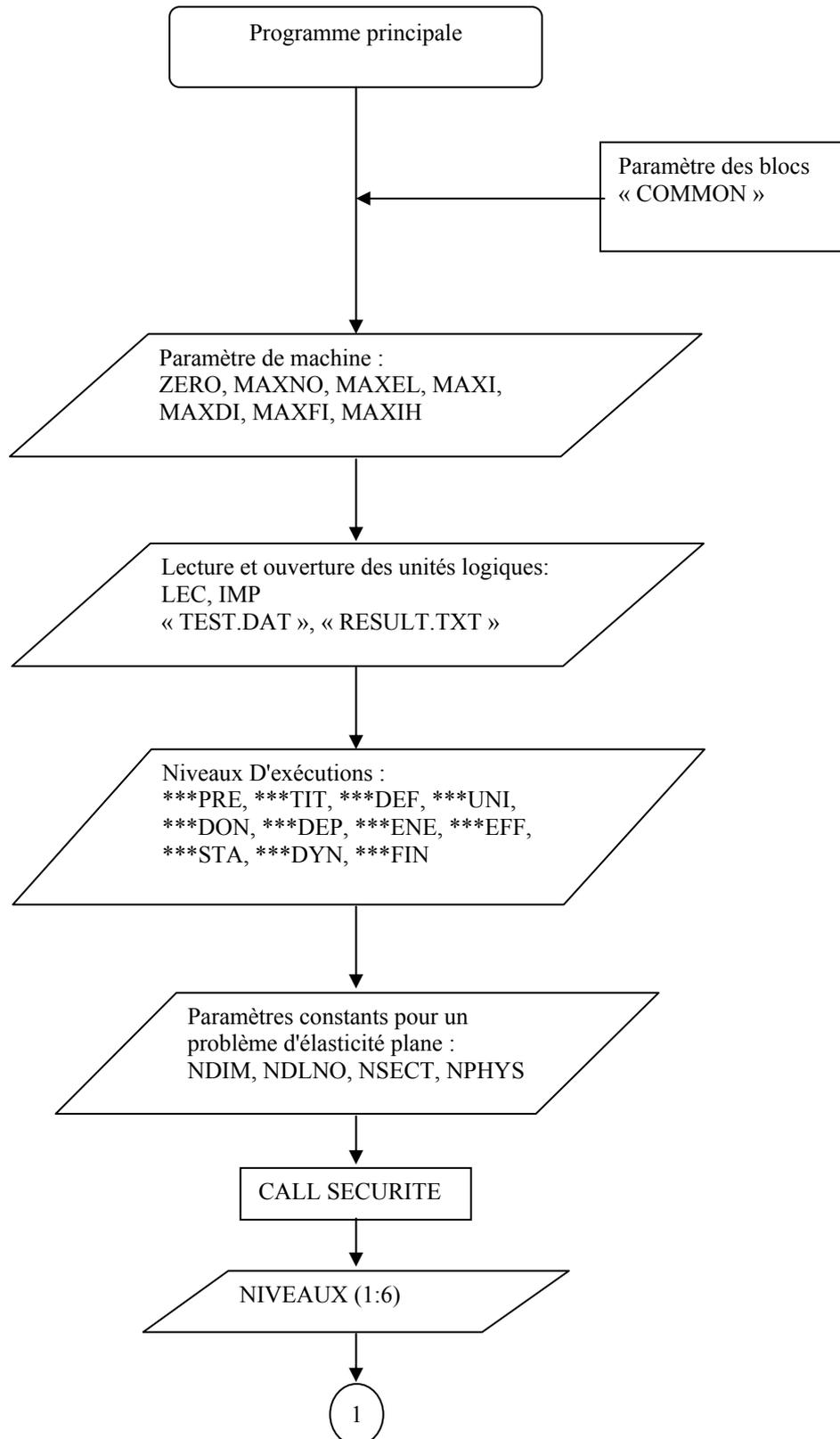
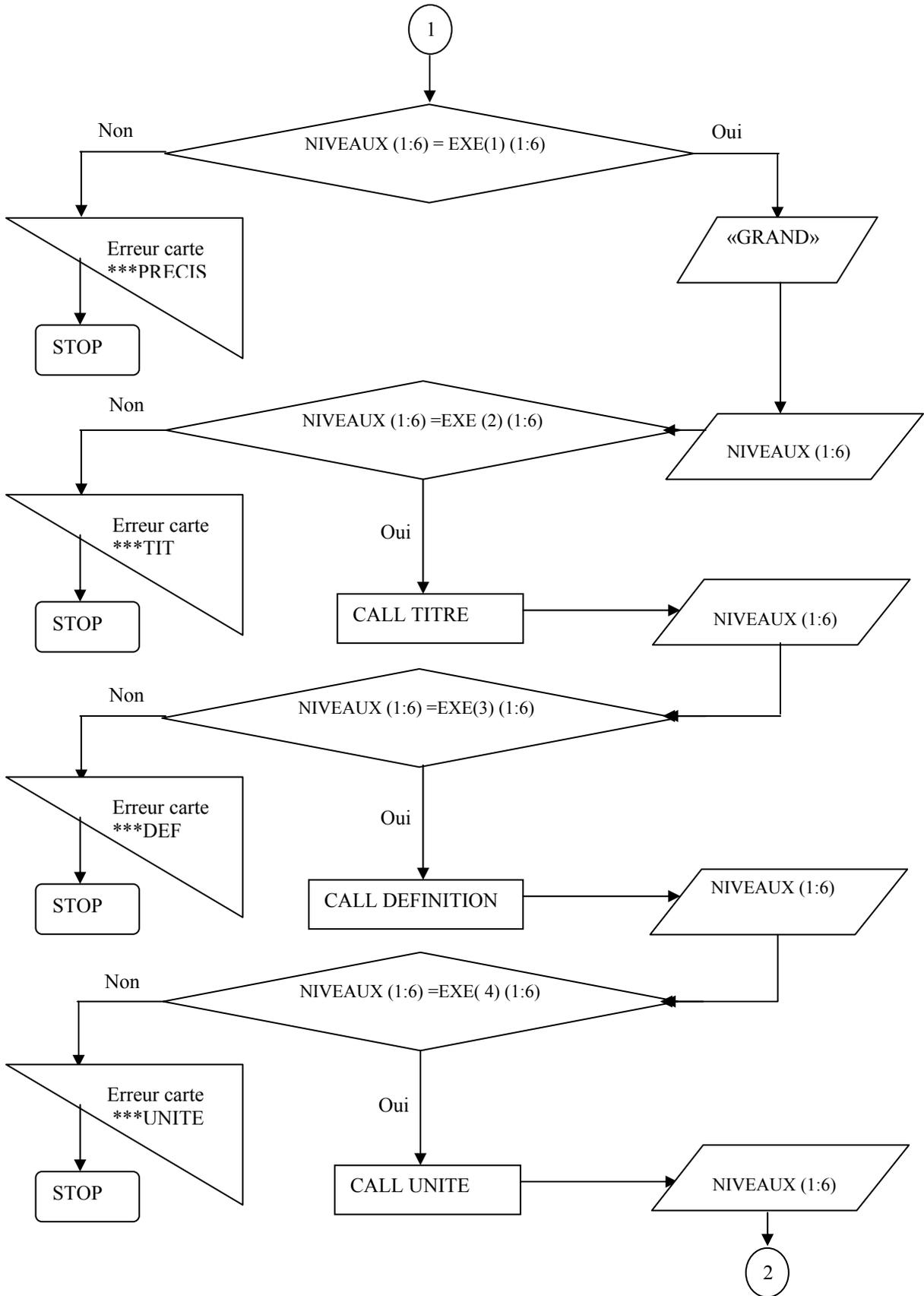
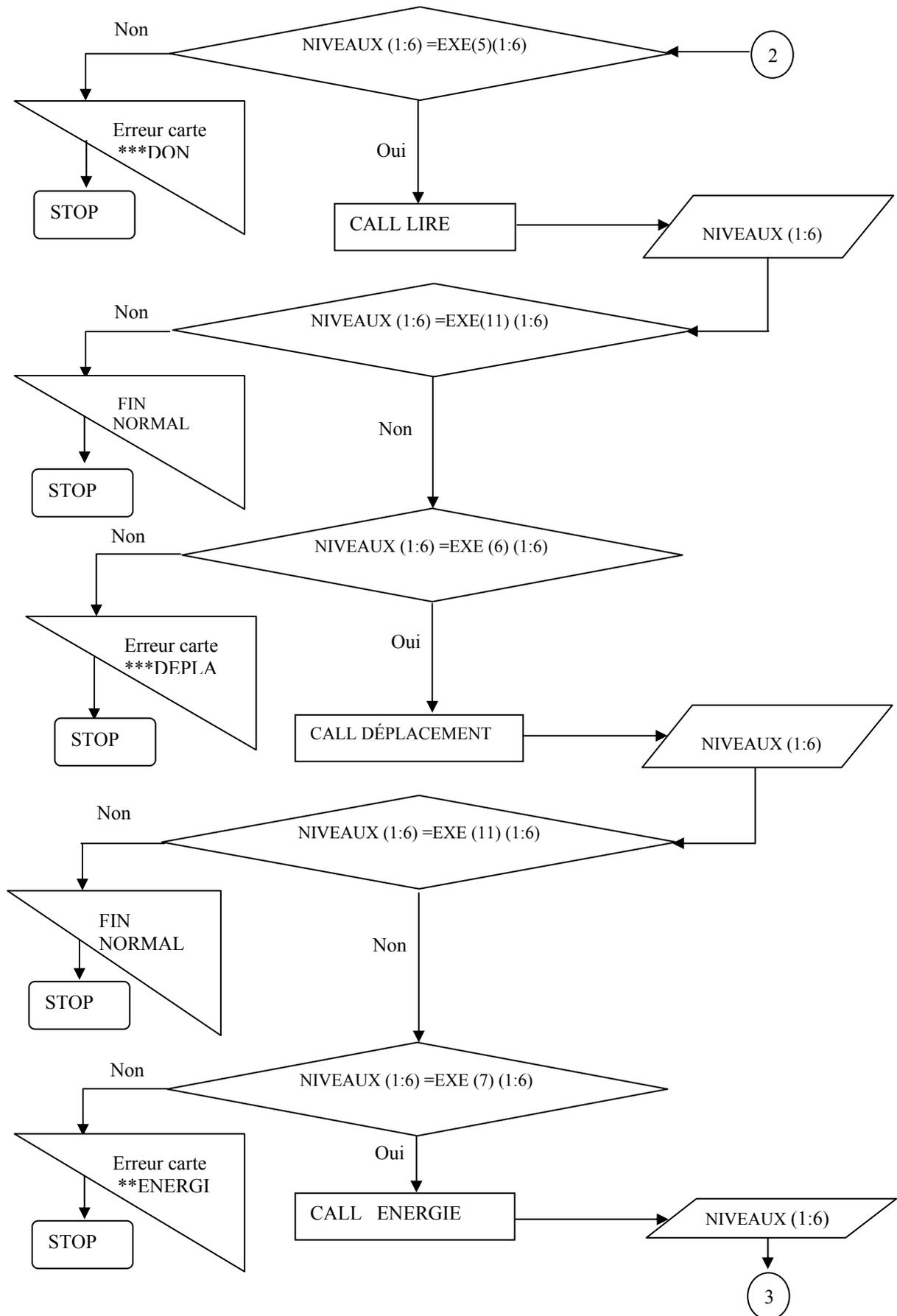
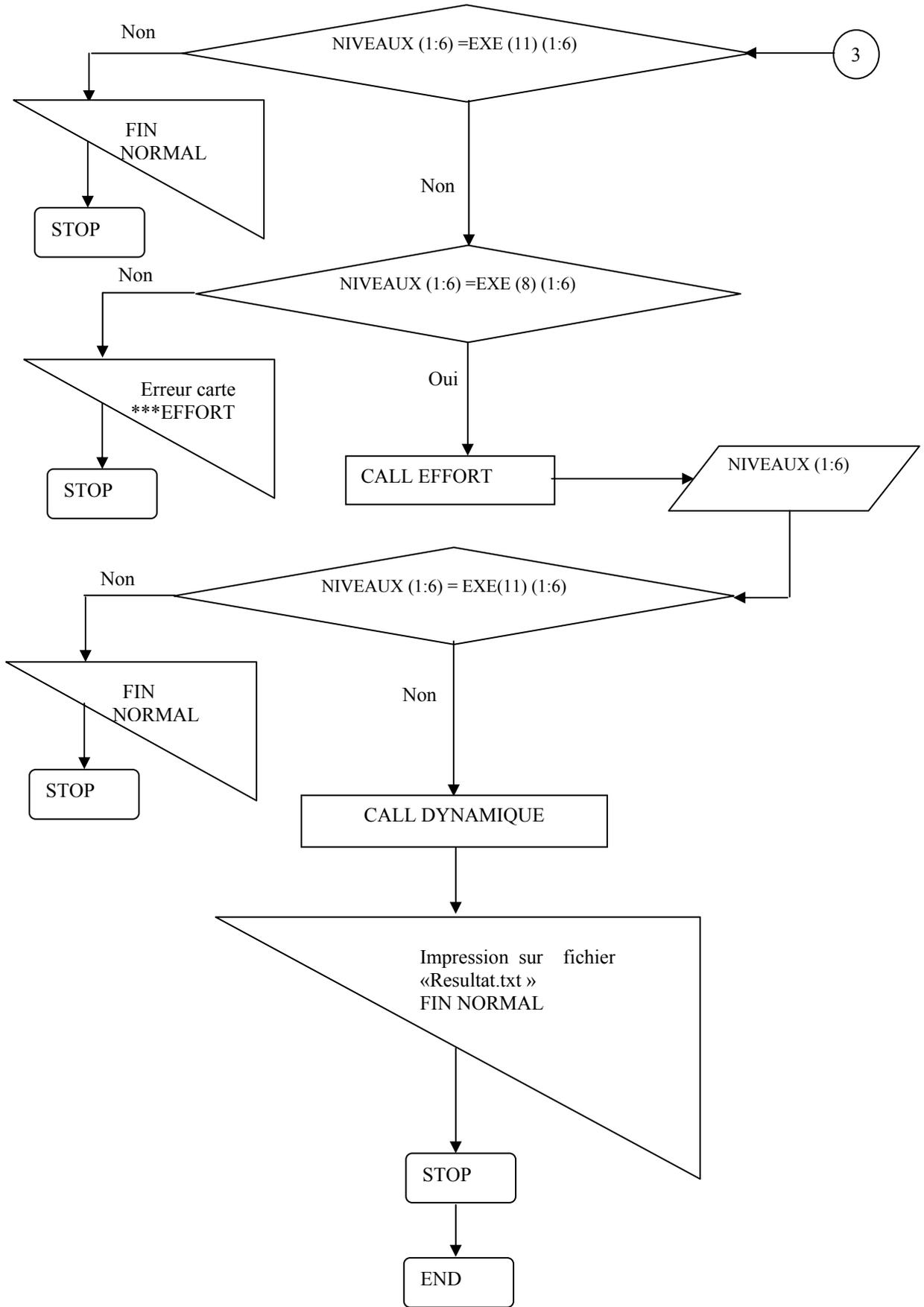


Figure (IV.2) : Les symboles des opérations utilisés pour un organigramme









V-5 LA CONDENSATION STATIQUE DANS LE PROGRAMME "G.C.B"

Pour les éléments secteurs à cinq nœuds, il doit éliminer le nœud interne donc libérer leur DDL, pour cela il faut condenser la matrice de rigidité de ces éléments en appliquant la méthode de condensation statique.

Dans ce cas on effectue quelques modifications sur le programme "GCB" basé spécifiquement sur le fait de programmer la condensation de la matrice de rigidité, qui est effectué par les routines CONDE 1 et CONDE 2.

IV-5.1 La routine CONDE 1

Cette routine est applicable pour condenser une matrice carrée, symétrique dont les termes diagonaux sont différents de zéro. La procédure de son programmation permet d'éliminer n'importe quelle DDL celle-ci est valable pour qu'elle soit le NNOEL et le NDLNO. L'effet de cette procédure est de rechercher les déplacements condensés où elle est basée sur l'utilisation d'élimination de Gauss. Cette routine est généralement traitée sous forme de vecteurs.

IV-5.1.1 Paramètres de la routine CONDE 1

L'appel de la routine CONDE 1 nécessite l'emploi de plusieurs paramètres, qui peuvent être classés dans un groupe de paramètres fixes, ces paramètres sont :

NNOEL, NDLEL, NDLNO, NTNO, NTEL, NDLC

RPD ($\text{NDLEL} * \text{NDLNO} * (\text{NNOEL} + 1) / 2$) : vecteur à condenser, c'est un vecteur dans lequel on stocke la moitié de la matrice de rigidité et en même temps les termes condensés.

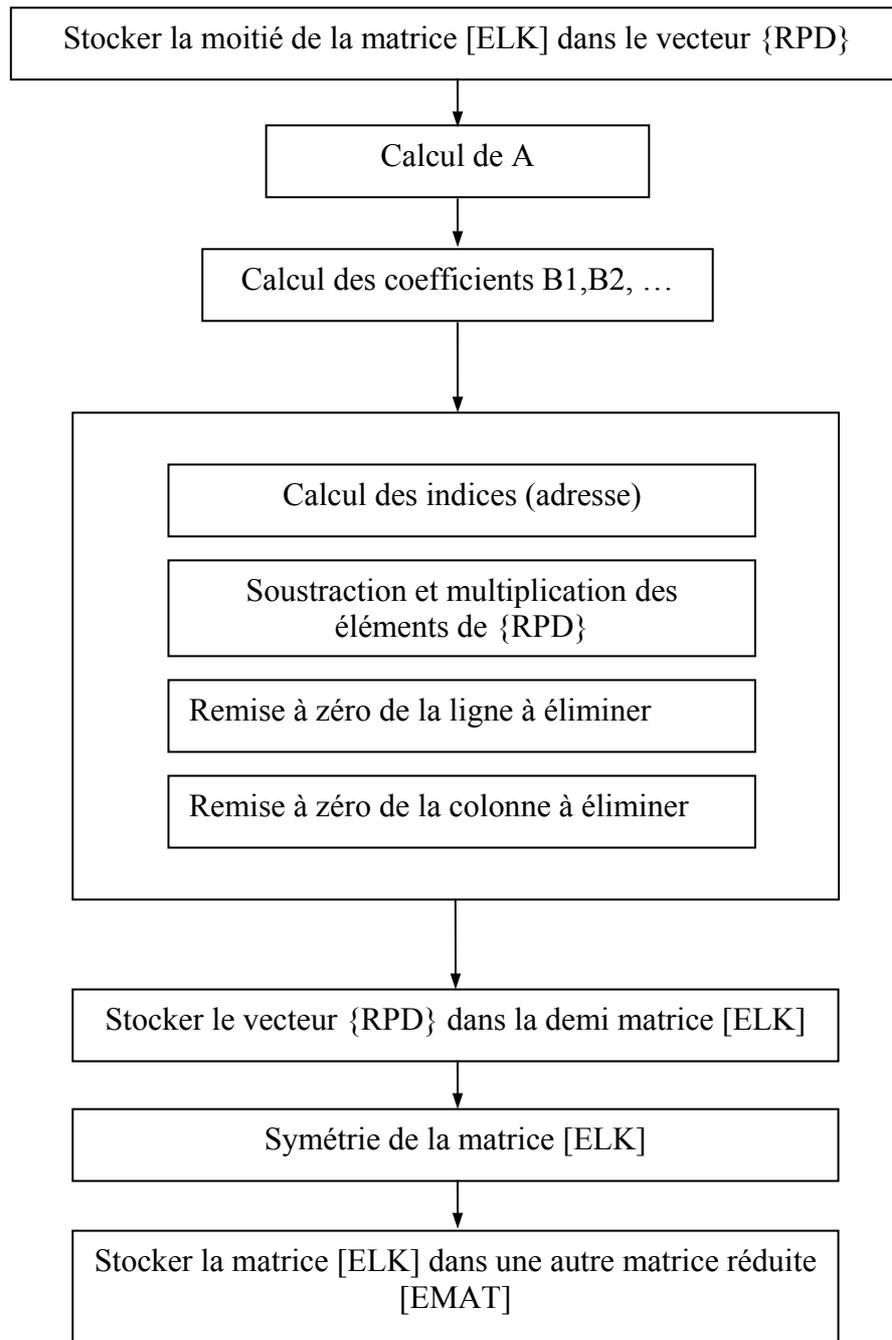
KROTUL (**NDLEL**) : vecteur indiquant les degrés de liberté à condenser.

COND (**NDLEL**) : c'est un vecteur où on stocke les coefficients des DDL (B_1, B_2, \dots), ces coefficients sont mémorisés pendant la condensation de la matrice de rigidité, s'il y en a plusieurs DDL à condenser, ces coefficients écrasés sont renouvelés par les derniers coefficients correspondant aux derniers DDL condensés.

EMAT (NDLEL-NDLC, NDLLEL-NDLC) : est une matrice réduite dans laquelle on injecte les termes condensés sans les termes qui reviennent à zéro.

ELK (NDLEL) : est une matrice qu'on doit condenser.

IV-5.1.2 Organigramme global de la routine CONDE 1



IV-5.2 La routine CONDE 2

Pour obtenir les contraintes condensées (de l'influence des déplacements condensés), il faut réduire par la condensation la taille de la matrice $[A]^{-1}$, on sait que cette matrice n'est pas symétrique et la routine CONDE1 n'est pas valable pour condenser $[A]^{-1}$ à cause de l'effet de la symétrie, donc on a utilisé la routine CONDE 2, qui est applicable dans la condensation d'une matrice carrée, symétrique ou non symétrique dont les termes diagonaux à éliminer doivent être différents ou égale à zéro.

IV-5.1.1 Paramètres de la routine CONDE 2

On utilise plusieurs paramètres pour appeler la routine CONDE 2, qui peuvent être classés dans un groupe de paramètres fixes, ces paramètres sont :

NDLEL, NDLC

KROTUL (NDLEL)

[Ree] (NDLC, NDLC)

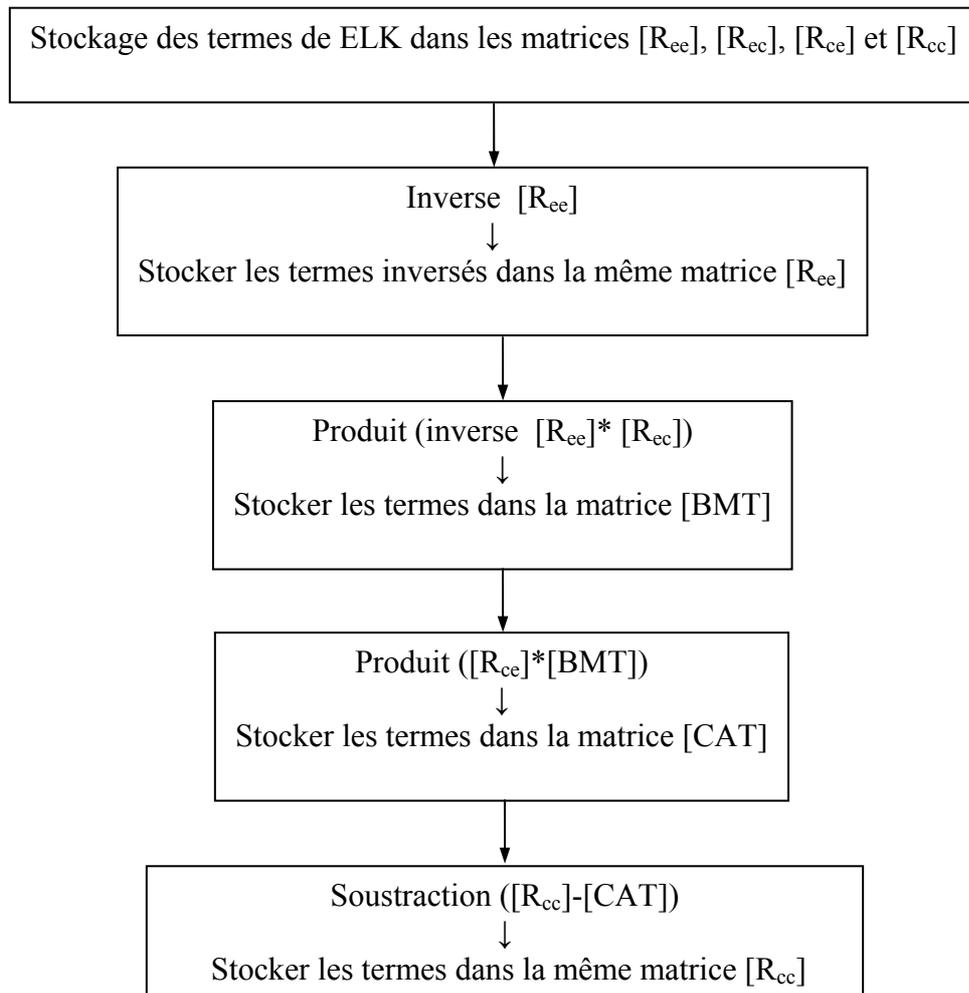
[Rec] (NDLC, NDLEL-NDLC)

[Rce] (NDLEL-NDLC, NDLC)

[Rcc] (NDLEL-NDLC, NDLEL-NDLC)

[ELK] (NDLEL, NDLEL)

IV-5.2.2 Organigramme global de la routine CONDE 2



avec :

[BMT] est de dimension (NDLC, NDLEL-NDLC)

[CAT] est de dimension (NDLEL-NDLC, NDLEL-NDLC)

IV-6 CONCLUSION

La programmation efficace de la méthode des éléments finis requiert une bonne expérience tant dans le domaine des éléments finis que dans le domaine de l'informatique. En effet:

- Les programmes sont compliqués car ils doivent exécuter des opérations très diverses (organisation des données, résolution de systèmes,...);

- Les quantités des données manipulées par un programme d'éléments finis peuvent être très importantes et il faut souvent avoir recours à des techniques informatiques peu répandues en calcul scientifique classique;

- Il est préférable que le programme peut s'appliquer à de nombreux types des problèmes.

Enfin, l'importance est que l'ingénieur doit effectuer une évaluation détaillée des résultats d'ordinateur afin de juger le degré de précision et par conséquent la fiabilité de son modèle.

CHAPITRE V
VALIDATION ET APPLICATION

CHAPITRE V

VALIDATION ET APPLICATION

V-1 INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de montrer l'intérêt du modèle en déformation pour le calcul des structures à contours circulaires, et l'évaluation de la précision obtenue par les éléments représentés dans ce travail à travers des tests, qui sont limités à des applications simples mais suffisantes pour montrer les principales performances des éléments secteurs. Les tests les plus instructifs pour les structures à contour circulaire sont:

- pour le problème à déformation rotationnelle symétrique, on prend un cylindre épais creux soumis à différents cas de chargement.
- pour le problème à déformation rotationnelle antisymétrique, on étudie un anneau semi circulaire, soumis à la flexion pure.

V-2 APPLICATION NUMÉRIQUE

Pour l'utilisation des éléments secteurs à cinq nœuds dans la modélisation, on étudie les déplacements seulement en utilisant le premier test.

V-2.1 Problème à déformation rotationnelle symétrique

V-2.1.1 Présentation des données

Considérons dans ce problème, un cylindre soumis à différents cas de chargement et dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure (V.1). Pour des raisons de la symétrie on prend un quart du cylindre seulement qui est modélisé par une densité de maillage.

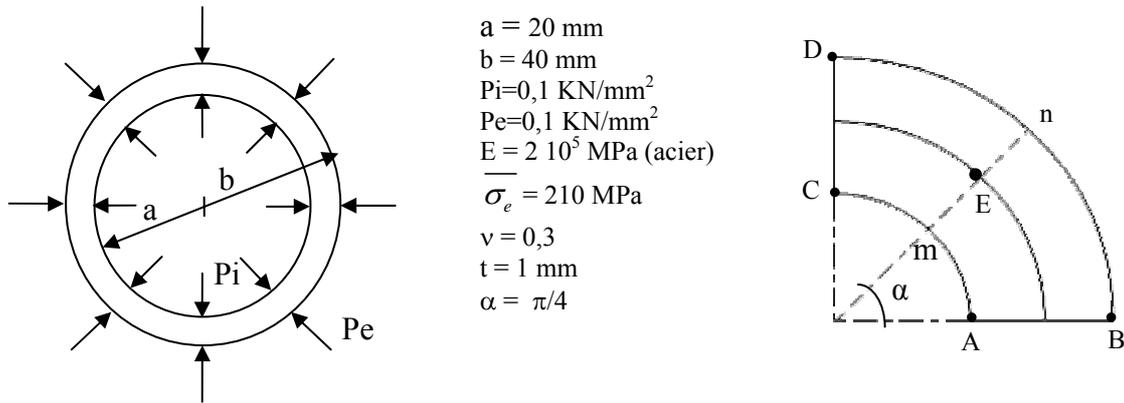


Figure (V.1): Caractéristiques géométriques et mécaniques d'un cylindre épais

V-2.1.2 Solution analytique

Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique donnée par Rekach [REK 80] :

$$U_r = \frac{(1+\nu)}{E(b^2-a^2)} \left[(1-2\nu)(a^2P_i - b^2P_e)r + \frac{a^2b^2}{r}(P_i - P_e) \right]$$

$$V_\theta = 0$$

$$\sigma_r = \frac{1}{(b^2-a^2)} \left[a^2P_i - b^2P_e + \frac{a^2b^2}{r^2}(P_e - P_i) \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{(b^2-a^2)} \left[a^2P_i - b^2P_e - \frac{a^2b^2}{r^2}(P_e - P_i) \right]$$

(V.1)

V-2.1.3 Présentation des résultats

V-2.1.3.1 Cas1: Cylindre épais soumis à une pression interne ($P_i \neq 0$ et $P_e = 0$)

Les convergences du déplacement radial (U_r), du contraintes radiale (σ_r) et tangentielle (σ_θ) au point E ($r = 30$ mm) sont montrées sur le tableau (V.1) et (V.2) et sur les figures (V.3) à (V.5) pour différents maillages (figure V.2).

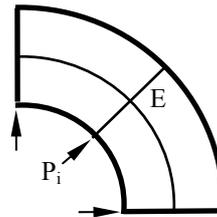


Figure (V.2) : Maillage 2x2 et forces nodales

- Le déplacement radial U_r (mm)

Tableau (V.1) : Les déplacements radiaux pour un cylindre épais sous pression interne

Maillage*	SBS 1	SBS 2	SBS 3	SBS 4	SBS 5	SBS 6	SBS 7
2x2	0,13715	0,13718	0,14146	0,13777	0,14598	0,13768	0,14146
4x2	0,13966	0,14036	0,14155	0,13767	0,14597	0,13758	0,14155
6x2	0,14069	0,14101	0,14155	0,13766	0,14597	0,13757	0,14155
8x2	0,14102	0,14125	0,14156	0,13766	0,14597	0,13756	0,14155
10x2	0,14114	0,14136	0,14157	0,13766	0,14597	0,13756	0,14156
12x2	0,14137	0,14142	0,14156	0,13766	0,14597	0,13755	0,14157
14x2	0,14138	0,14145	0,14155	0,13765	0,14597	0,13755	0,14156
Solution exacte	0,14155**						

*1/4 du cylindre

** Réf. [REK 80]

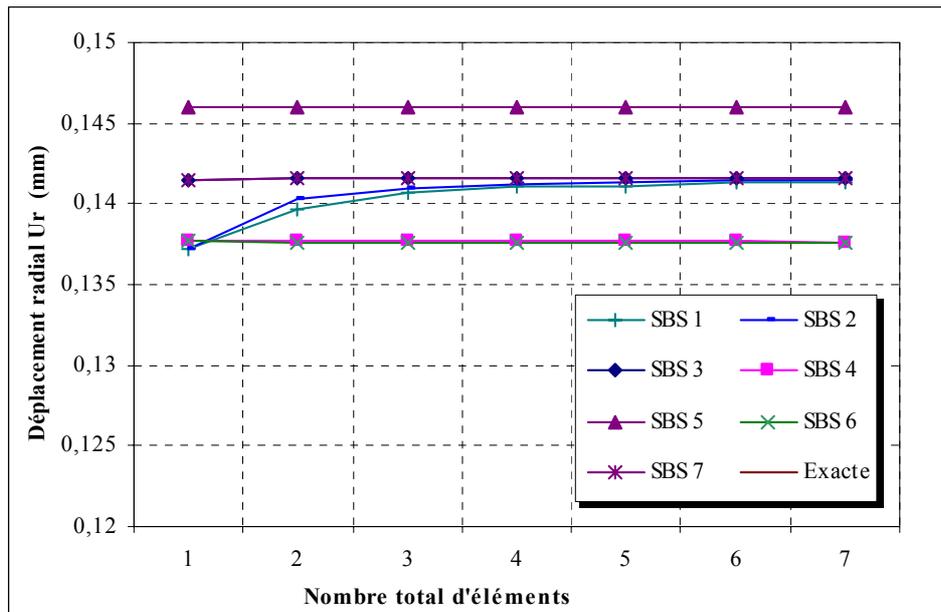


Figure (V.3): Convergence du déplacement radial en E pour un cylindre sous pression interne

- Les contraintes radiales et tangentielles

Tableau (V.2) : Les contraintes radiales et tangentielles pour un cylindre épais sous pression interne

Maillage*	Contrainte radiale σ_r (MPa)		Contrainte tangentielle σ_θ (MPa)	
	SBS 1	SBS 2	SBS 1	SBS 2
2x2	0,40013	0,36684	0,55992	0,85107
4x2	0,29214	0,28275	0,67257	0,90706
6x2	0,27699	0,26959	0,91019	0,91700
8x2	0,32049	0,26505	0,89650	0,92118
10x2	0,26508	0,26296	0,92041	0,92289
12x2	0,26101	0,26182	0,92398	0,92380
14x2	0,26220	0,26114	0,923405	0,92436
Solution exacte	0,259259**		0,925900**	

*1/4 du cylindre
 ** Réf. [REK 80]

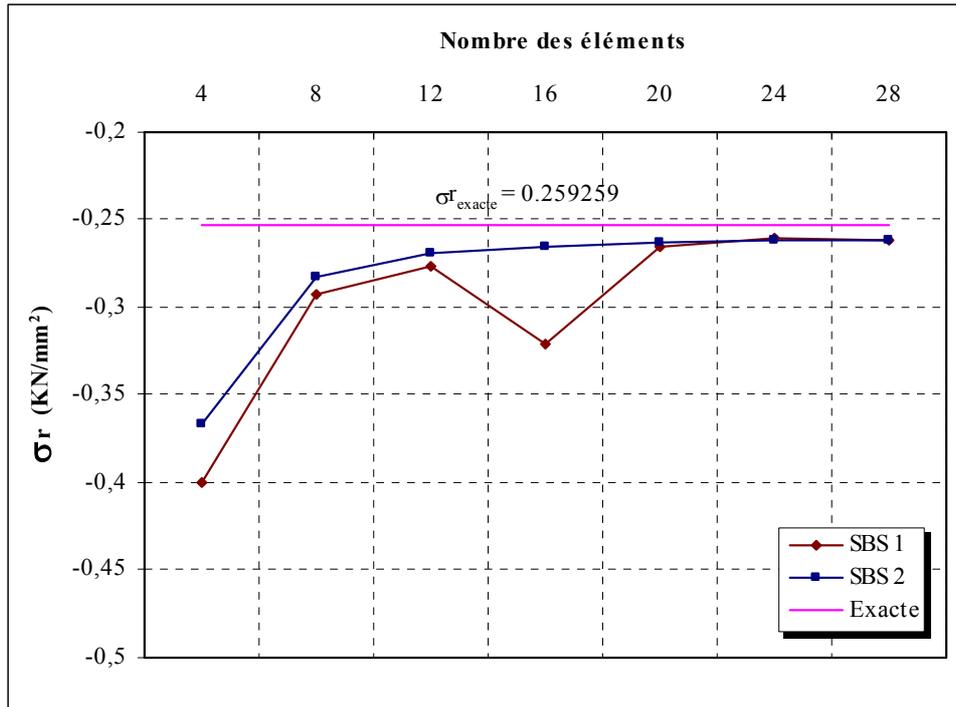


Figure (V.4): Convergence de la contrainte radiale en E pour un cylindre sous pression interne

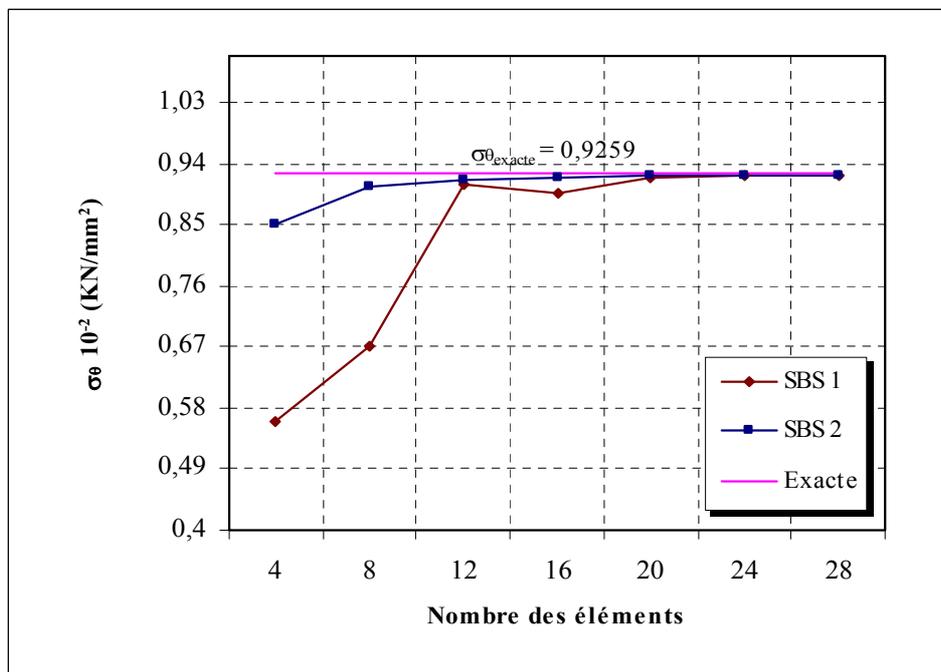


Figure (V.5): Convergence de la contrainte tangentielle en E pour un cylindre sous pression interne

La variation de U_r , σ_r et σ_θ le long d'une section droite (**m n**) pour un maillage de 14x2 éléments est illustrée sur les figures (V.6) à (V.8).

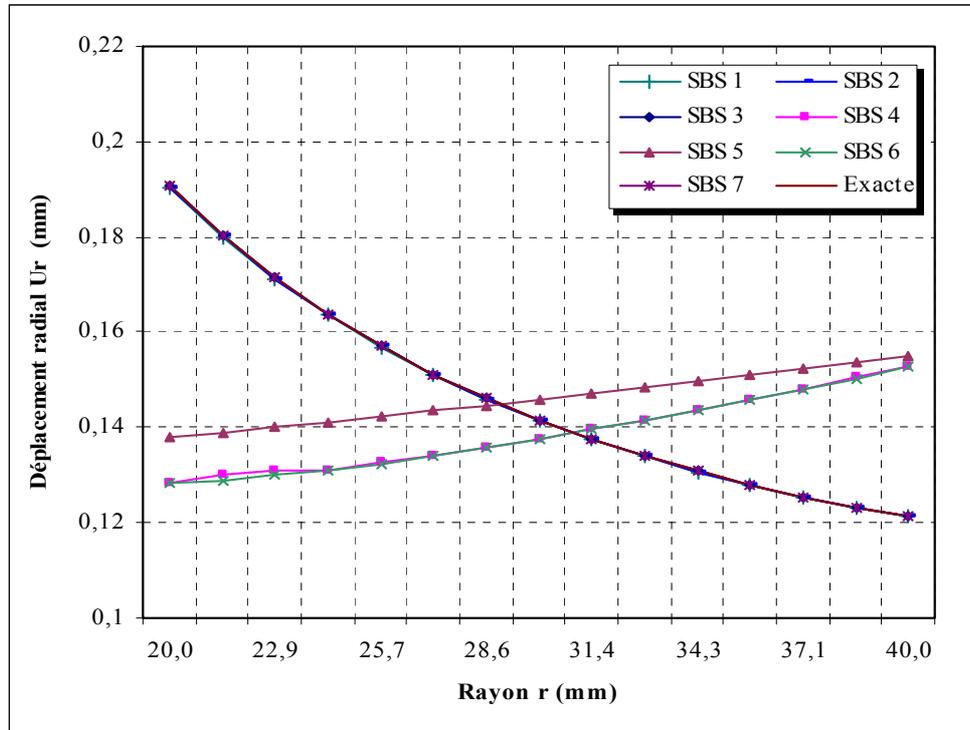


Figure (V.6): Variation du déplacement radial le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne

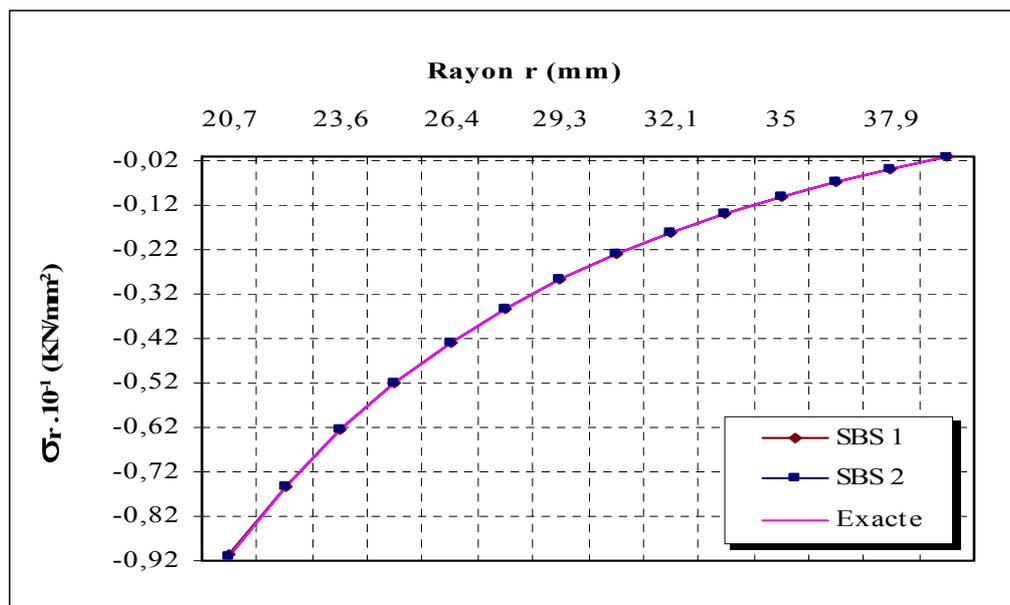


Figure (V.7): Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne

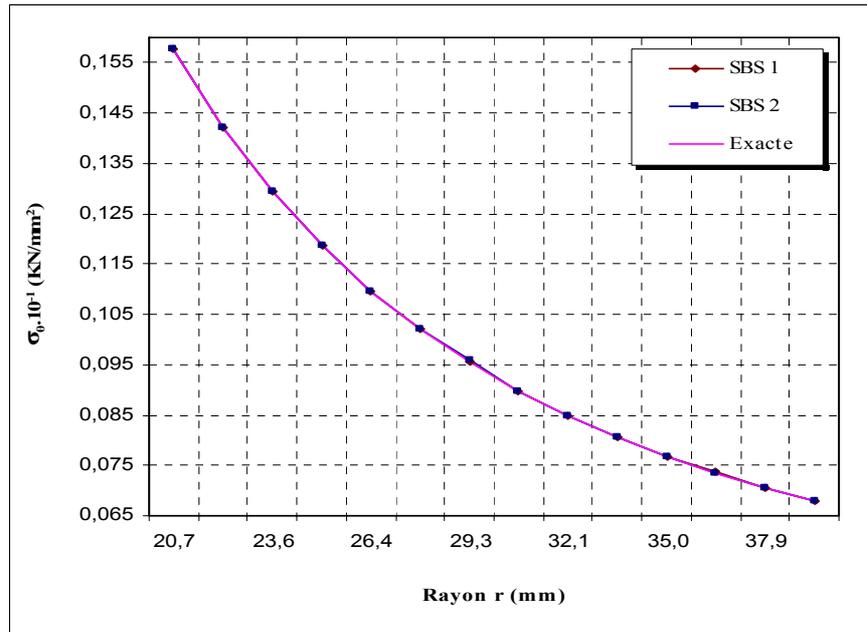


Figure (V.8): Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne

V-2.1.3.2 Cas 2: Cylindre épais soumis à des pressions uniformes (Pi ≠ 0 et Pe ≠ 0)

Les convergences du déplacement radial (U_r) et leur variation avec la solution exacte le long de la section droite 'mn' sont montrées sur les figures (V.9) et (V.10), et celles qui concernent les contraintes (σ_r) et (σ_θ) sont représentées sur les figures (V.11) à (V.14).

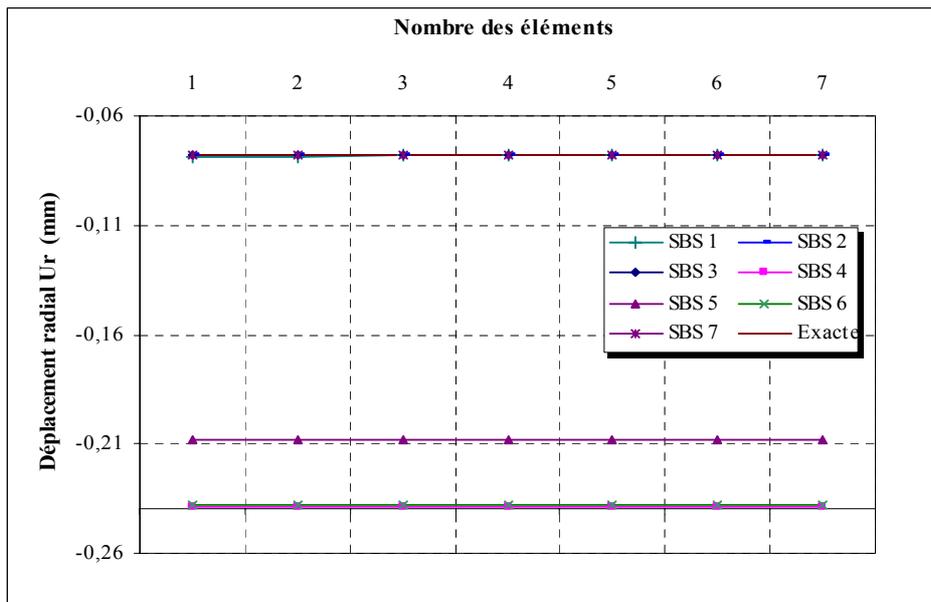


Figure (V.9): Convergence du déplacement radial en E pour un cylindre sous pression interne et externe

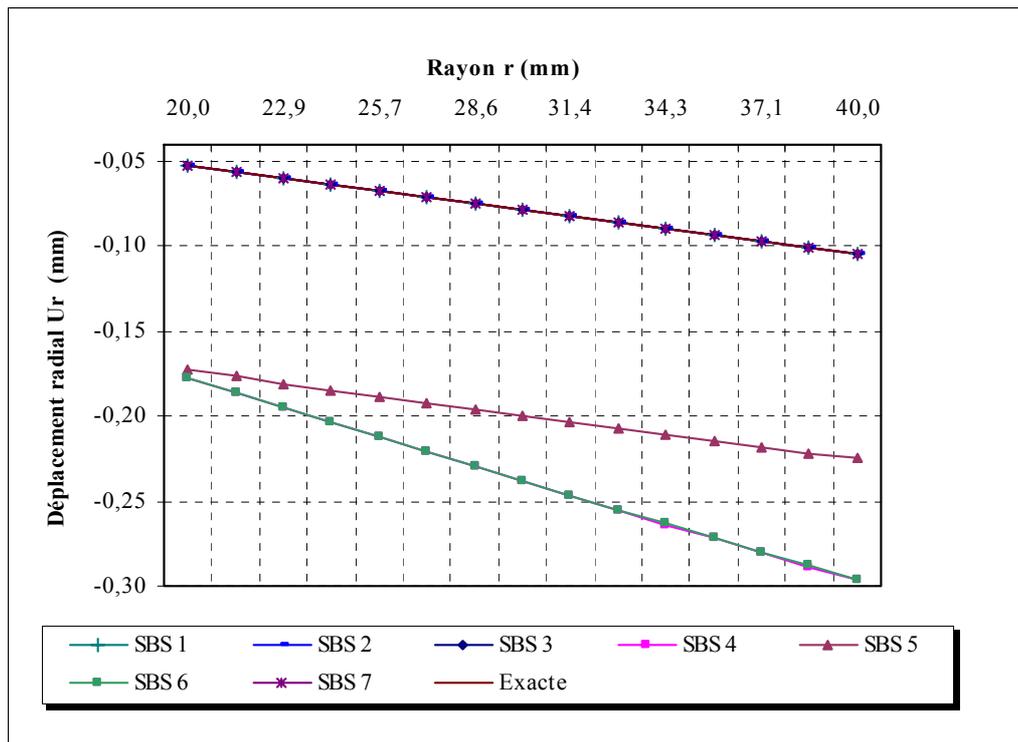


Figure (V.10): Variation de déplacement le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne et externe

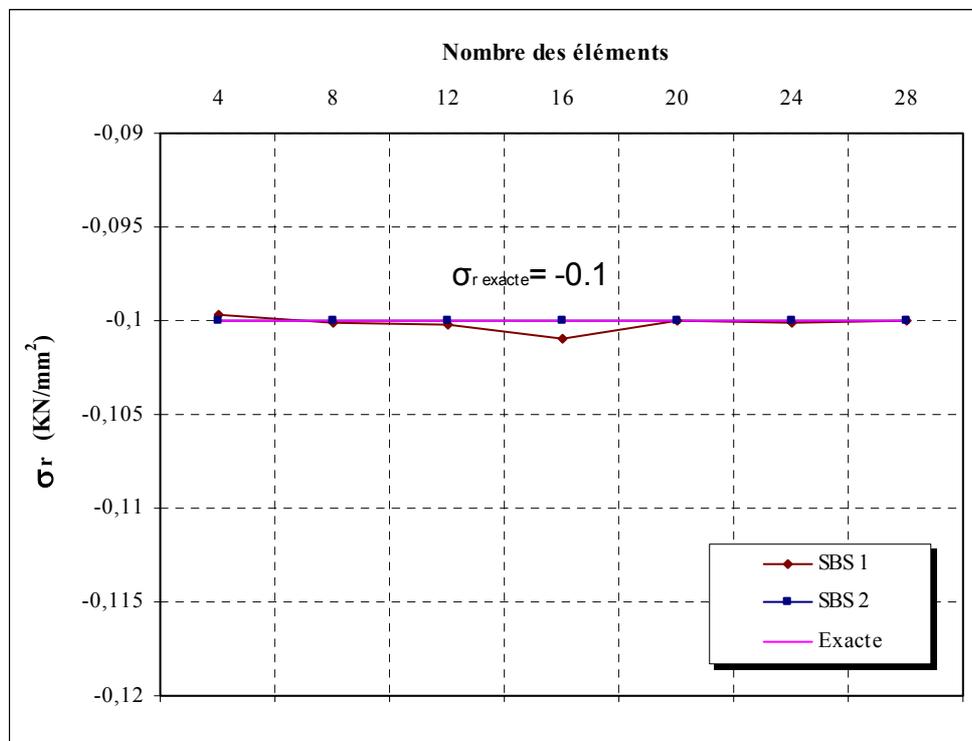


Figure (V.11): Convergence de la contrainte radiale en E pour un cylindre sous pression interne et externe

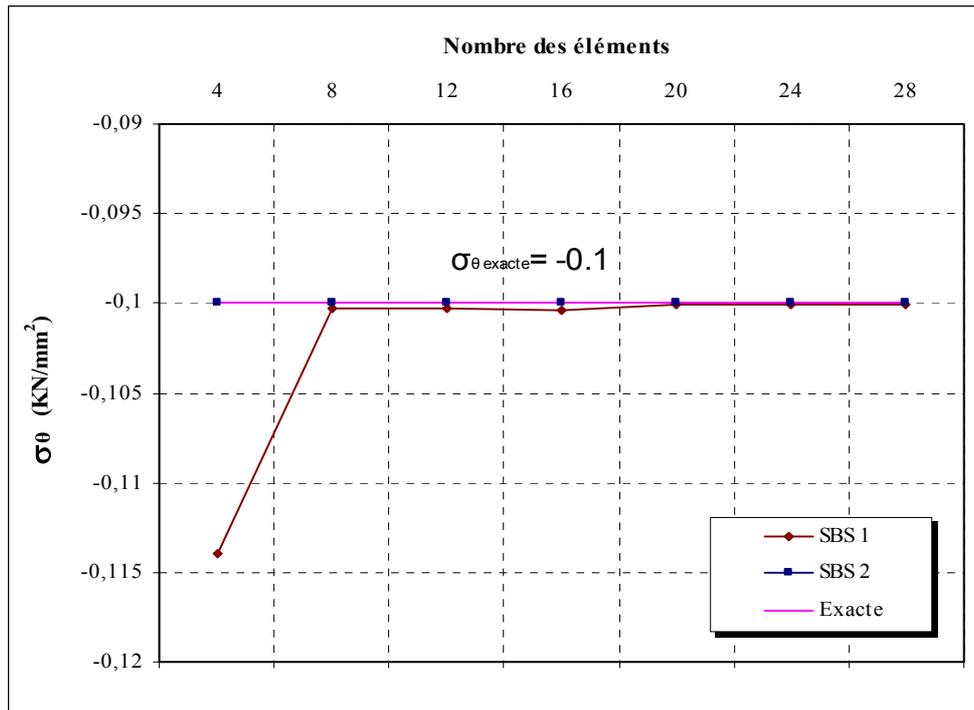


Figure (V.12): Convergence de la contrainte tangentielle en E pour un cylindre sous pression interne et externe

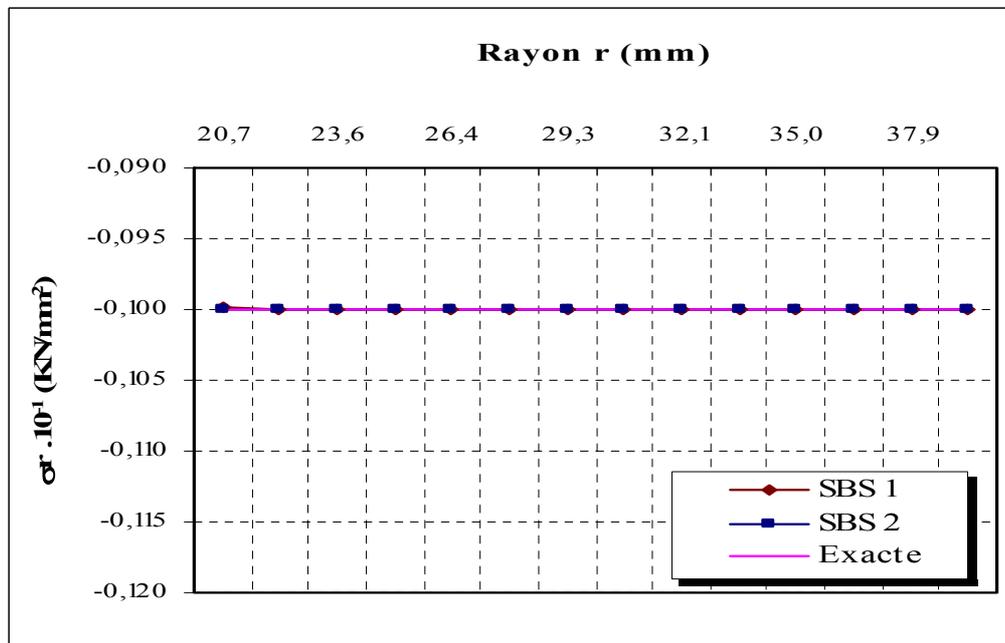


Figure (V.13): Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne et externe

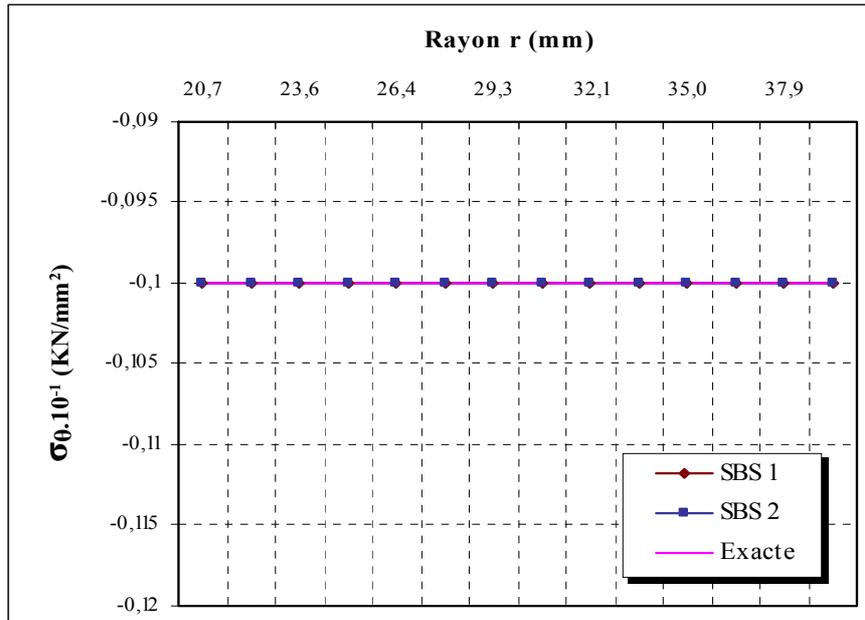


Figure (V.14): Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression interne et externe

V-2.1.3.3 Cas 3: Cylindre épais soumis à une pression externe ($P_i = 0$ et $P_e \neq 0$)

Les convergences du déplacement radial (U_r), des contraintes radiales (σ_r) et tangentielles (σ_θ) au point E, sont présentées sur les figures (V.15) à (V.17) pour différents maillages.

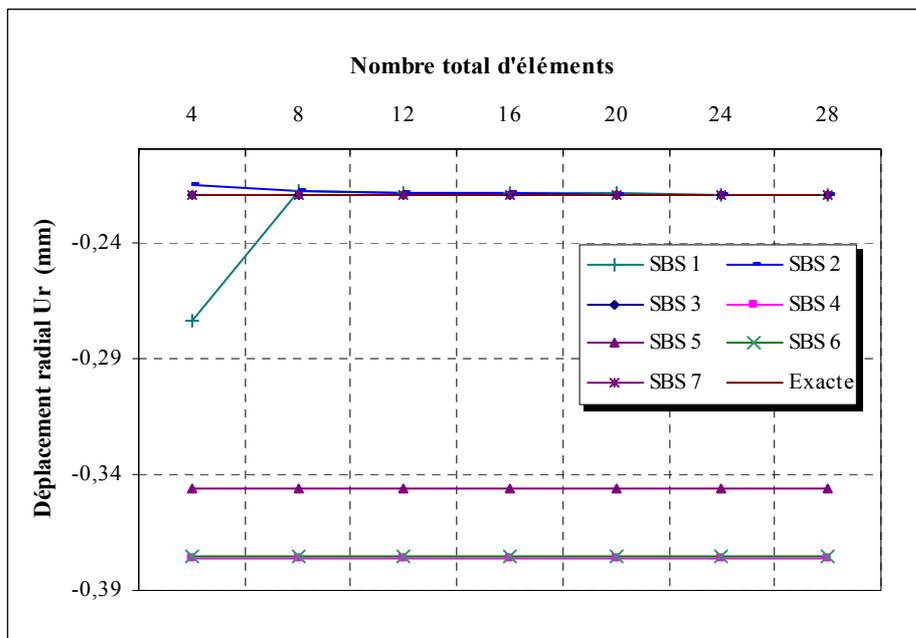


Figure (V.15): Convergence du déplacement radial en E pour un cylindre sous pression externe

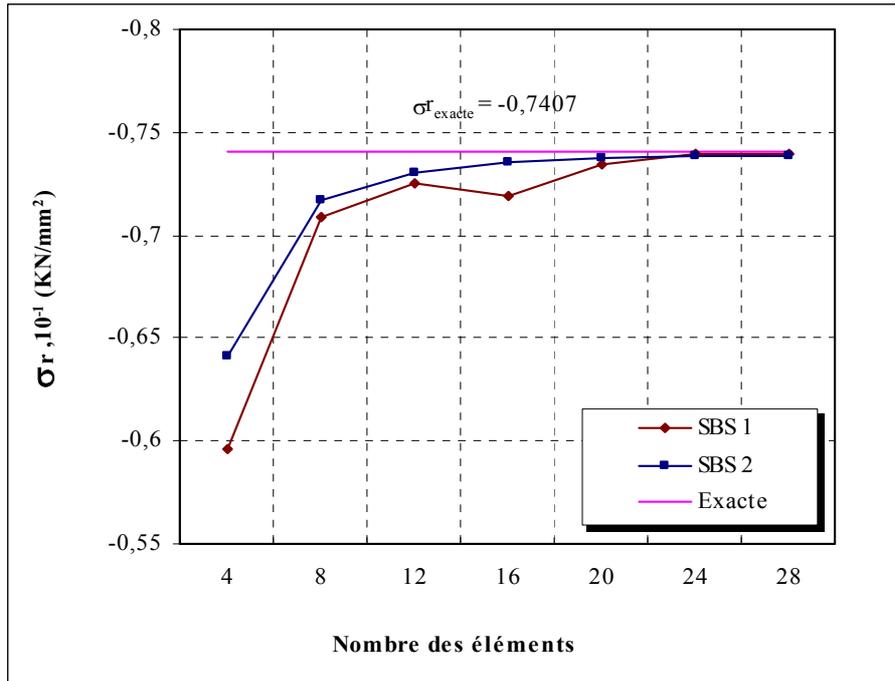


Figure (V.16): Convergence de la contrainte radiale en E pour un cylindre sous pression externe

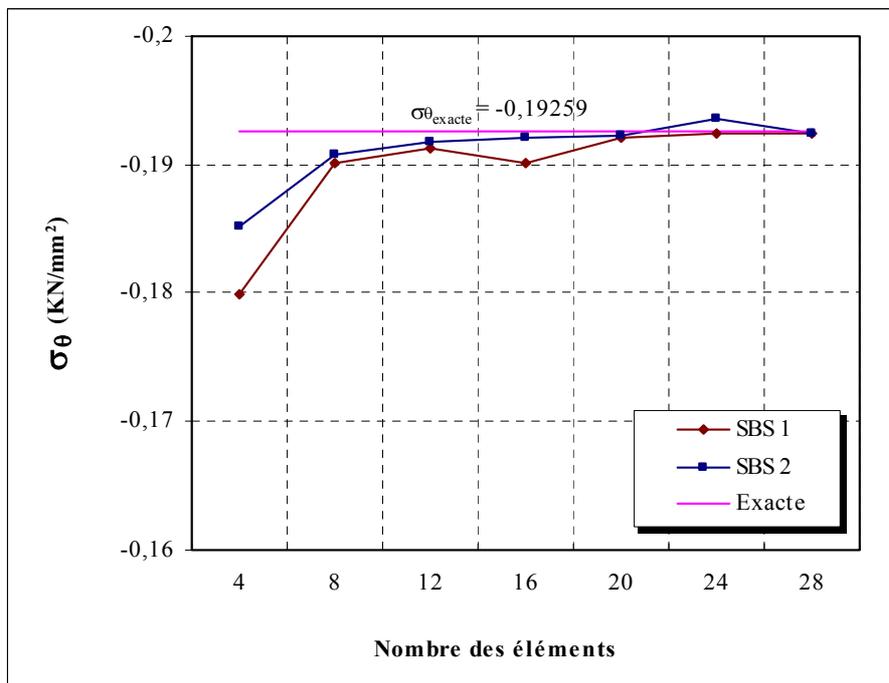


Figure (V.17): Convergence de la contrainte tangentielle en E pour un cylindre sous pression externe

Les figures (V.18) à (V.20) illustrent la variation de U_r , σ_r et σ_θ le long d'une section droite (m n).

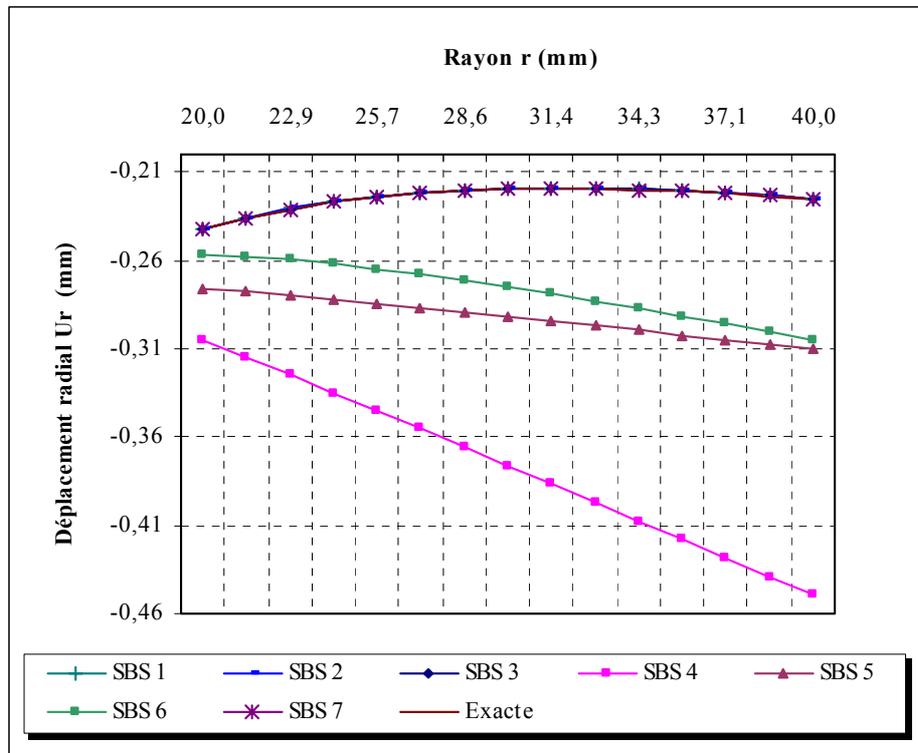


Figure (V.18): Variation de déplacement le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression externe

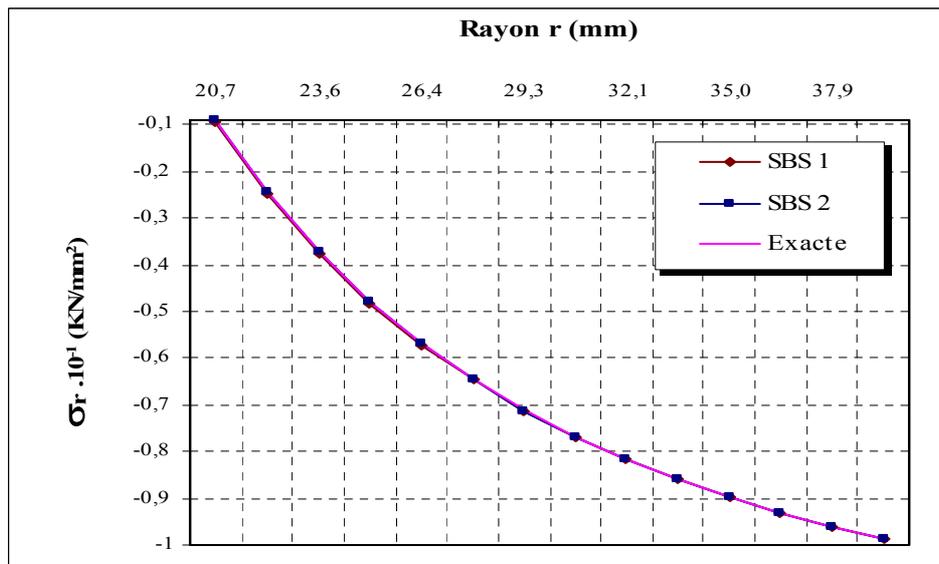


Figure (V.19): Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression externe

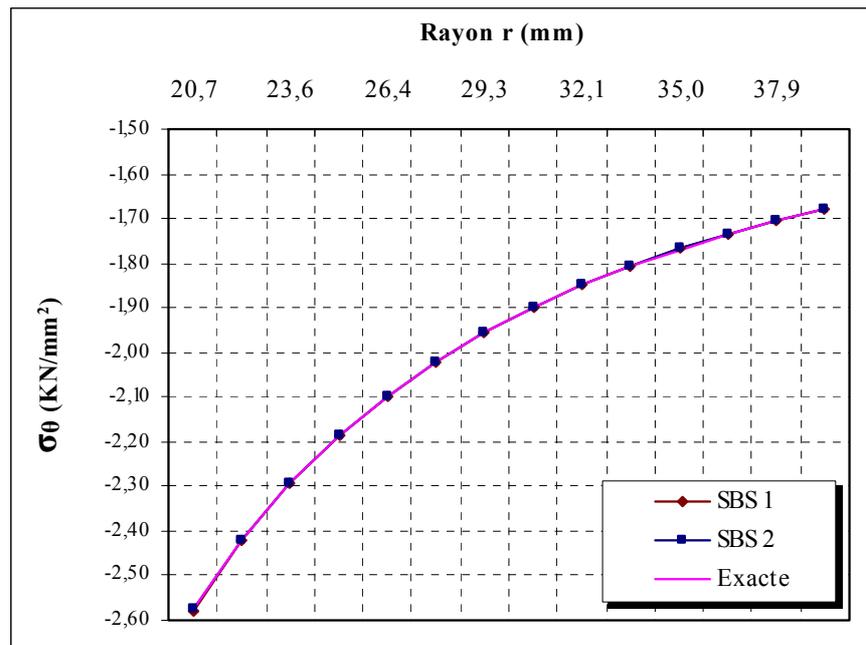


Figure (V.20): Variation de la contrainte tangentielle le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous pression externe

V-2.1.4 Interprétation des résultats

Ce test représente un des tests les plus instructifs pour les structures à contours circulaires. Les résultats calculés pour la flèche normale au point milieu le long de la section radial (droite) ($\theta=45$) sont montrés sur le tableau (V.1) et sur les figures (V.3), (V.6), (V.9), (V.10), (V.15) et (V.18), ils illustrent:

- Le haut degré de précision des résultats obtenus par les éléments secteurs SBS 1, SBS2, SBS 3 et SBS 7 pour tous les cas de chargements. La variation des déplacements est très proche avec la solution exacte (d'élasticité) où on trouve a titre d'exemple, dans le cas de sous pression interne et pour une maille 14x2, l'erreur est de moins de 0.07 % de la solution exacte pour SBS 2, SBS 3 et SBS 7 et de 0.12 % pour SBS 1.
- Les éléments SBS 4, SBS 5 et SBS 6 donnent des résultats acceptables seulement sous pression interne, et mauvais pour les autres cas, par exemple les erreurs sont de 2.75% et 2.83% dans le cas de pression interne et 71% et 25 % sous pression externe pour les éléments SBS 4 et SBS 6 respectivement.

Pour les contraintes, on étudie les deux éléments à quatre nœuds, les résultats des différentes composantes de contrainte sont aussi obtenues, les courbes de convergences des contraintes radiales et tangentielles au milieu de la section droite $r=30$ mm sont montrées dans le tableau (V.2) et les figures (V.4), (V.5), (V.11), (V.12), (V.16) et (V.17).

La distribution de ces contraintes a été aussi étudiée par exemple pour le cas de pression interne, les figures (V.7), (V.8) illustrent la variation des contraintes le long de la section droite pour une maille de 14×2 éléments où on peut observer que:

- L'élément SBS 2 donne des résultats des contraintes radiales étonnantes de telle façon qu'à quatre chiffres et parfois même cinq chiffres significatifs, les résultats coïncident carrément avec ceux de la solution exacte (d'élasticité), l'erreur pour les contraintes tangentielles est de 0.04%.

- l'erreur des contraintes radiales et tangentielles pour SBS 1 est respectivement de 1.6% et 0.05%.

Et pour les autres cas de chargement, on se contente de donner les figures (V.13), (V.14), (V.19) et (V.20).

V-2.2 Problème à déformation rotationnelle antisymétrique

V-2.2.1 Présentation des données [BEL 00]

Soit un anneau semi-circulaire ($a \times b = 40 \times 80$) déformé en flexion pure par un moment d'extrémité ($M = 1$). Par raison de symétrie, seule la moitié de l'anneau est considérée (figure V.21), celle-ci est discrétisée par un seul élément secteur membranaire (figure V.21b), le moment peut être appliqué par des forces nodales formant un couple (cc1).

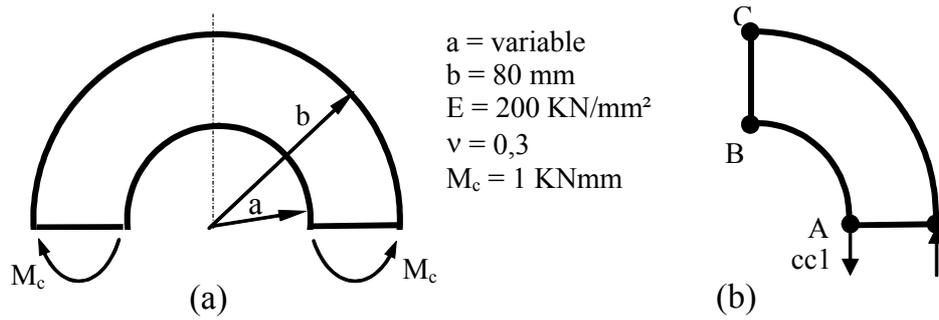


Figure (V.21): Flexion pure d'un anneau semi circulaire

V-2.2.2 Solution analytique

La solution analytique donnant les flèches et les contraintes à n'importe quel point est donnée par Timoshenko et al [TIM 51] :

$$\begin{aligned}
 U_r &= \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)}{r} A + 2(1-\nu) Br \text{Log}(r) - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r + K \cos \theta \right] \\
 V_\theta &= \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \\
 \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left[\frac{a^2 b^2}{r^2} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \text{Log}\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \text{Log}\left(\frac{a}{r}\right) \right] \\
 \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left[-\frac{a^2 b^2}{r^2} \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \text{Log}\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \text{Log}\left(\frac{a}{r}\right) + b^2 - a^2 \right]
 \end{aligned} \tag{V.2}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) \\
 B &= -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2) \\
 C &= \frac{M}{N} \left[b^2 - a^2 + 2(b^2 \text{Log}(b) - a^2 \text{Log}(a)) \right] \\
 N &= (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\text{Log}\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2
 \end{aligned}$$

$$K = -\frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)}{r_0} A + 2(1-\nu) B r_0 \text{Log}(r_0) - B(1+\nu) r_0 + 2C(1-\nu) r_0 \right]$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2}$$

V-2.2.3 Présentation des résultats

Les résultats des déplacements radial U_r et tangentiel V_θ ainsi que la contrainte tangentielle σ_θ en différents points (A, B et C) sont reportés sur le tableau (V.3).

Tableau (V.3): Flexion pure d'un anneau semi circulaire

	SBS 1	SBS 2	Solution analytique [TIM 51]
U_{rA}	$1,937 \cdot 10^{-3}$	$2,97010^{-3}$	$3,25010^{-3}$
$V_{\theta A}$	-0,147	-0,191	-0,202
$\sigma_{\theta B}$	$2,821 \cdot 10^{-3}$	$4,827 \cdot 10^{-3}$	$4,847 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\theta C}$	$1,386 \cdot 10^{-3}$	$-3,038 \cdot 10^{-3}$	$-3,073 \cdot 10^{-3}$

Lors de notre analyse, plusieurs rapports d'aspect b/a sont considérés, et dans tous les cas "b" est pris constant tandis que "a" varie pour donner :

$$\frac{b}{a} = 3, 2 \text{ et } 1,3$$

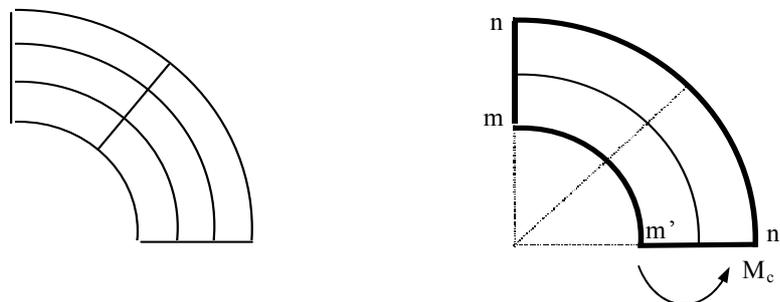


Figure (V.22): Maillage 3x2 et 2x2

Les figures (V.23) et (V.24) montrent la variation du déplacement radial U_r et tangentiel V_θ suivant une section droite ($m'n'$) pour un maillage de 3×2 éléments et un rapport d'aspect $b/a = 2$.

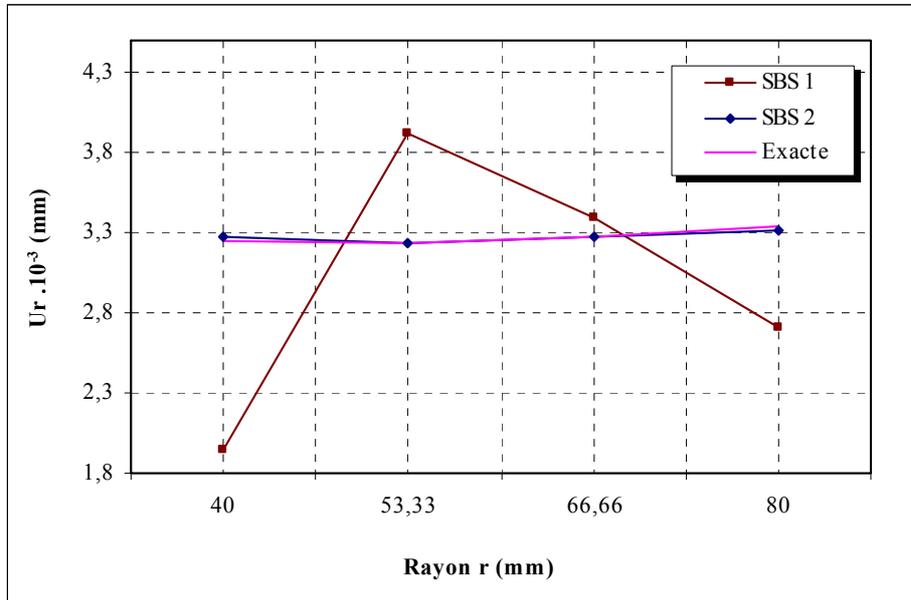


Figure (V.23): Variation du déplacement radial le long de $m'n'$ pour $b/a=2$

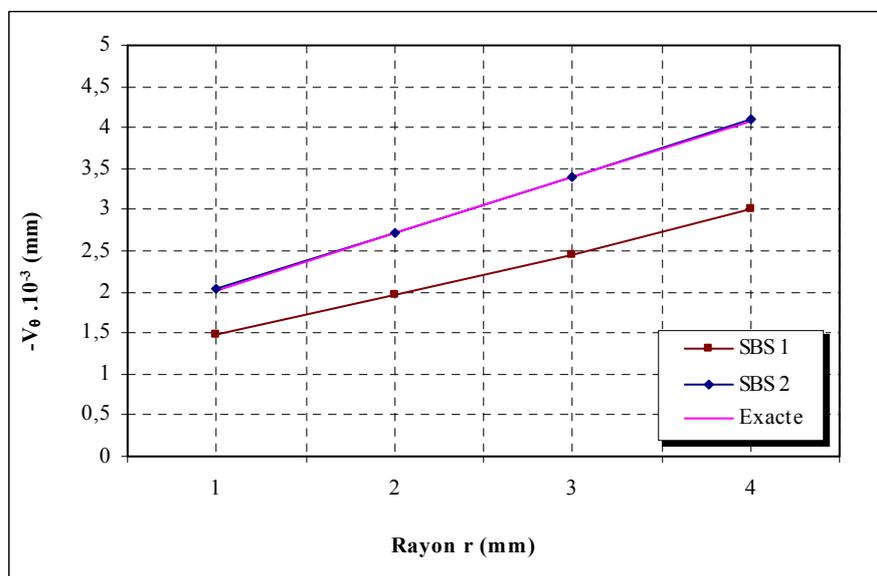


Figure (V.24): Variation du déplacement tangentiel le long de $m'n'$ pour $b/a=2$

La variation des contraintes tangentielles σ_θ et normales σ_r de l'élément SBS 2 est représentée sur les figures (V.25) à (V.30), pour $b/a = 3, 2$ et 1.3 et un maillage de 13×3 éléments.

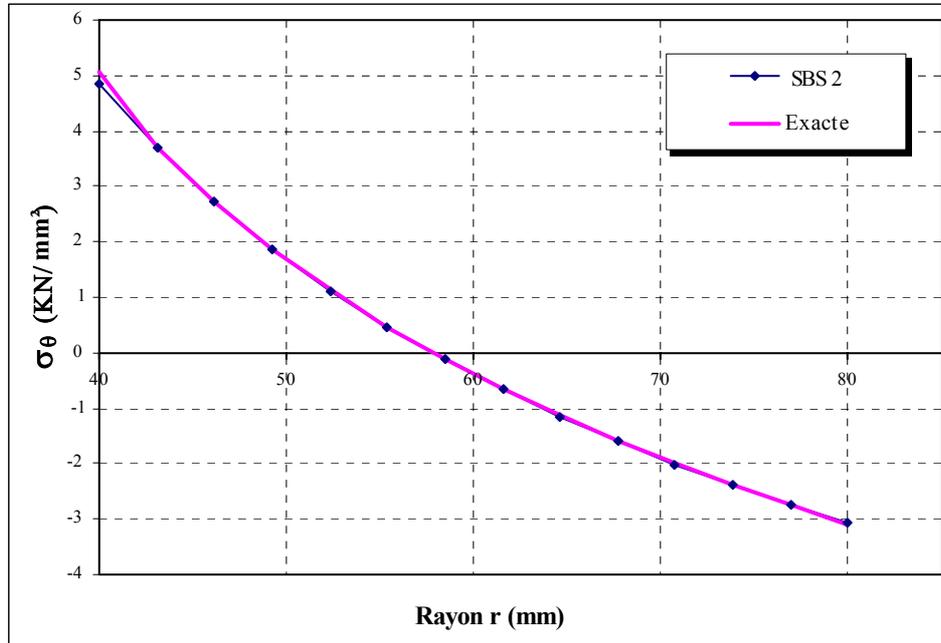


Figure (V.25) : Variation du contrainte tangentielle le long d'une section droite m n pour $b/a=2$

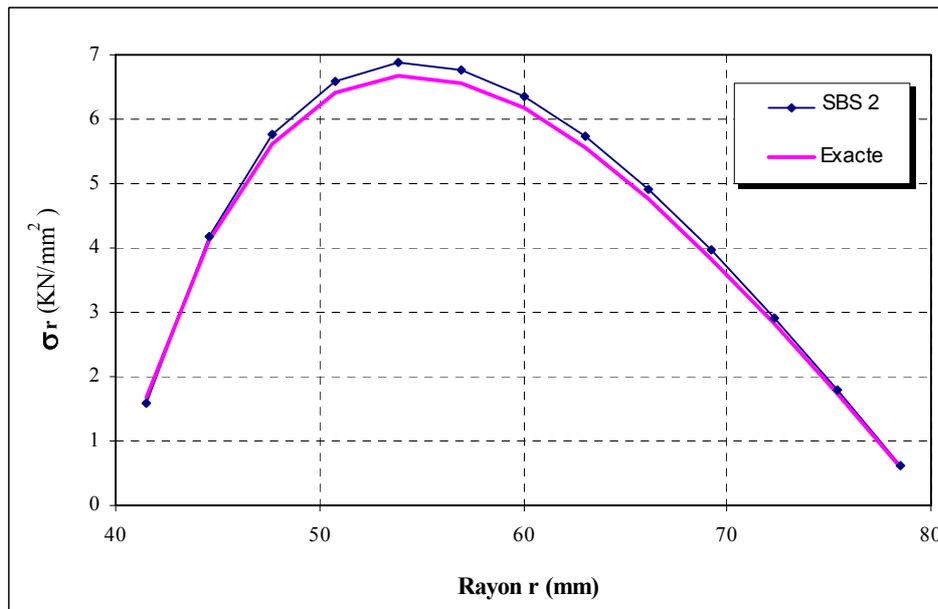


Figure (V.26): Variation du contrainte radiale le long d'une section droite m n pour $b/a=2$

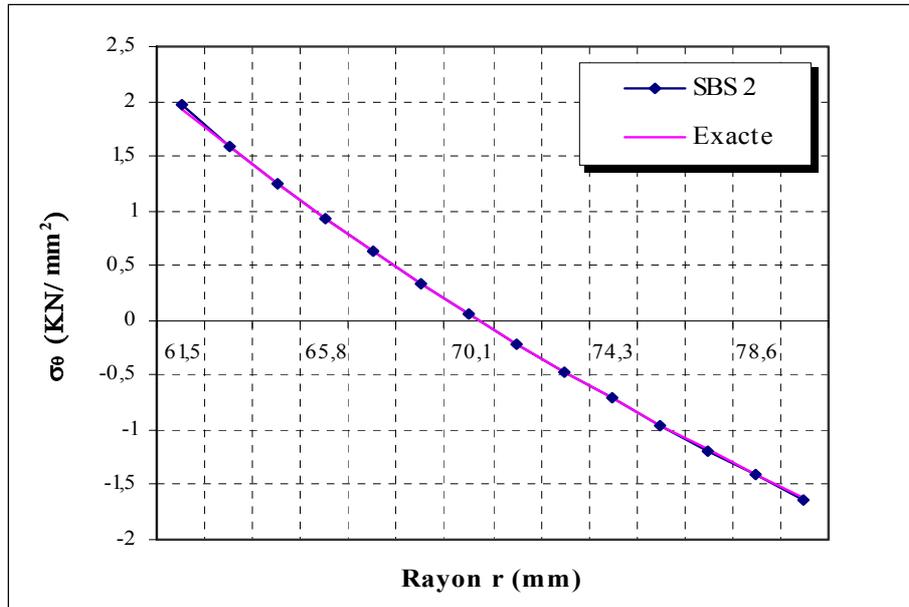


Figure (V.27): Variation du contrainte tangentielle le long d'une section droite m n pour b/a=1,3

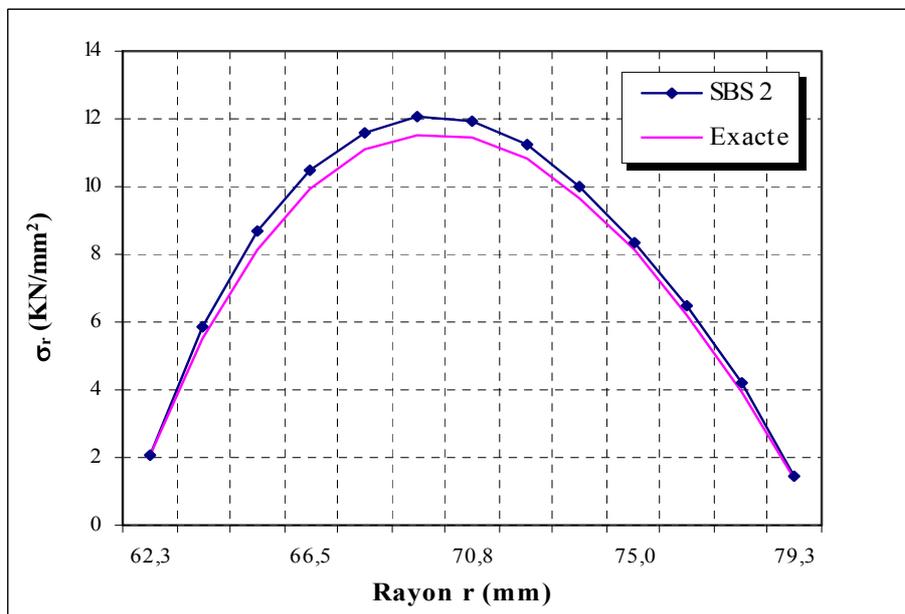


Figure (V.28): Variation du contrainte radiale le long d'une section droite m n pour b/a=1,3

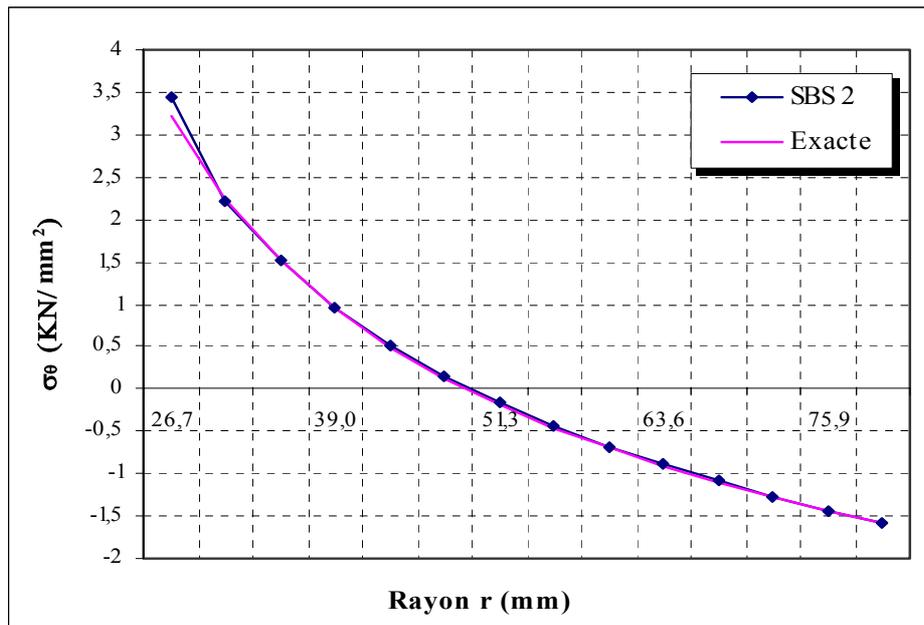


Figure (V.29) : Variation du contrainte tangentielle le long d'une section droite m n pour b/a=3

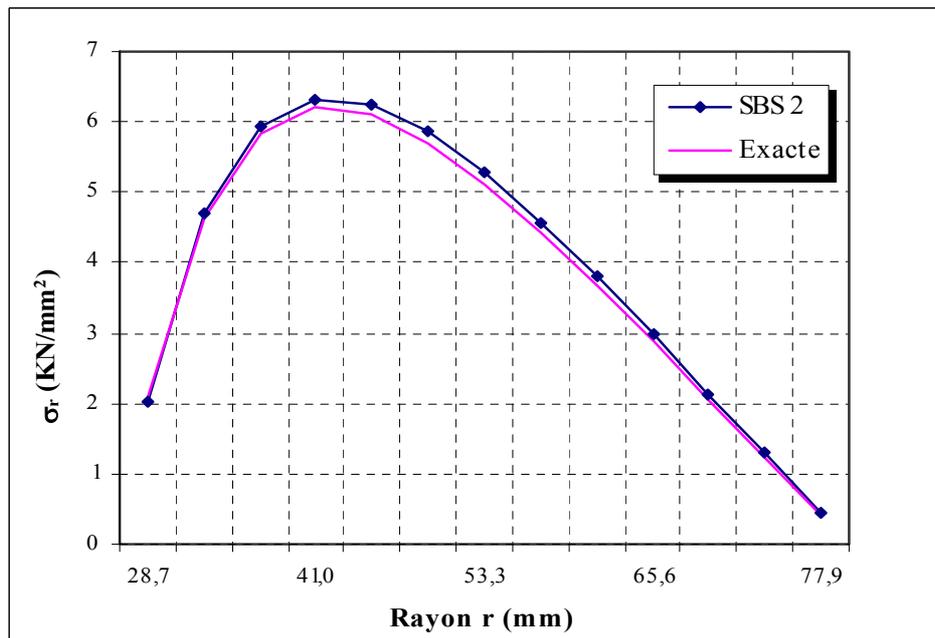


Figure (V.30) : Variation du contrainte radiale le long d'une section droite m n pour b/a=3

V-2.2.4 Interprétation des résultats

On peut conclure pour un maillage de 3x2 à partir des courbes illustrées sur les figures (V.23), (V.24) et le tableau (V.3) que SBS 2 permet un bon encadrement des solutions analytiques [TIM 51] associées aux déplacements et aux contraintes contrairement à SBS 1.

Pour un maillage de 13x3 la variation des contraintes pour l'élément SBS 2 est montrée sur les figures (V.25) à (V.30) ce qui nous permet de constater que le nombre réduit d'éléments suivant la direction circonférentielle n'affecte pas les résultats. Les résultats obtenus confirment que cet élément satisfait bien au patch test d'ordre supérieur ([BAT 90] et [TAY 86]).

V-3 COMPARAISON AVEC D'AUTRES ÉLÉMENTS SECTEUR [BEL 00]

La comparaison se fait sur la base de l'exemple de l'anneau semi-circulaire. L'élément de Belarbi avec:

- les éléments secteurs **I** et **II** de Djoudi [DJO 90] dont les champs de déplacement présentés au chapitre III.
- les solutions élémentaires de la résistance des matériaux ;
- la solution analytique (exacte) donnée par Timoshenko [TIM 51].

Les maxima et minima de la tension σ_θ peuvent être présentés sous la forme :

$$\sigma_\theta = m (M_c/a^2) \quad (V.3)$$

Les valeurs du facteur numérique "m" obtenues pour les différents cas figurent sur le tableau (V.4). Nous constatons que pour les rapports $b/a = 2$ et 3 , les valeurs obtenues pour les trois éléments **SBS 2**, **I** et **II** sont en accord avec ceux de la solution exacte. Cependant pour le cas d'un anneau mince ($b/a = 1,3$) seul SBS 2 donne des résultats très satisfaisants.

Tableau (V.4) : Coefficient "m" de l'équation (V.3)

b/a	Distribution des tensions suivant une loi linéaire	Distribution des tensions suivant une loi hyperbolique	Solution exacte	[DJO 90] " I "	[DJO 90] " II "	SBS 2
1,3	+66,67	+72,98	+73,05	+92,40	+109,032	+72,980
	-66,67	-61,27	-61,35	-88,54	-79,547	-61,268
2	+6,00	+7,725	+7,755	+8,145	+8,523	+7,723
	-6,00	-4,863	-4,917	-5,305	-5,148	-4,861
3	+1,50	+2,285	+2,292	+2,357	+2,412	+2,283
	-1,50	-1,095	-1,130	-1,165	-1,150	-1,094
Degrés de liberté actifs				242	242	10

La très bonne performance de **SBS 2** a été démontrée sur le tableau (V.4), les résultats correspondants sont globalement plus précis que les éléments **I** et **II** pour ce type de problème dominé par la flexion.

V-4 CONCLUSION

Les résultats obtenus par le programme 'G.C.B' pour les éléments présentés dans ce travail spécifiquement pour le calcul des déplacements, concordent avec satisfaction et convergent vers la solution théorique (élasticité) proportionnellement à l'augmentation du nombre des éléments.

CONCLUSIONS
ET
RECOMMANDATIONS

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

CONCLUSIONS

Nous avons présenté dans cette étude des éléments secteurs basés sur le modèle de déformation, et fondé sur la théorie linéaire de l'élasticité plane. Ces éléments sont différents au niveau du nombre des nœuds et des degrés de liberté. A cet effet on constate qu'il y a des éléments à cinq nœuds (quatre nœuds aux sommets et un nœud interne) possédant deux degrés de liberté U_r et V_θ à chaque nœud, les autres sont: "l'invariant de Djoudi" et "l'élément de Belarbi" ayant quatre nœuds aux sommets et en plus de ces degrés une rotation additionnelle. Les deux derniers éléments sont utilisés pour éviter les difficultés associées aux problèmes de jonction des éléments secteur en membrane avec l'élément arc comme le cas des tunnels enterrés ou des buses...

On a obtenu des très bons résultats de déplacement pour le problème à déformation rotationnelle symétrique avec les éléments à cinq nœuds (SBS3, SBS7) et les éléments secteurs à quatre nœuds pour tous les cas de charges, mais en ce qui concerne les contraintes, on a étudié seulement les derniers éléments qui ont donnés de bons résultats.

Pour le problème à déformation rotationnelle antisymétrique, on a étudié seulement "l'élément de Belarbi" et "l'invariant de Djoudi", en découvrant que seul le premier élément nous donne un bon résultat, ce qui nous amène à conclure que cet élément est efficace en flexion pure.

Actuellement, le modèle en déformation gagne du terrain, ne serait-ce que parce qu'il permet d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires. Enfin, nous pouvons conclure que les nombreuses applications numériques étudiées à ce jour prouvent

la validité et l'efficacité du modèle en déformation à résoudre les problèmes d'élasticité plane.

RECOMMANDATIONS

Il serait intéressant de coupler l'élément de Belarbi avec un élément secteur de plaque riche en flexion tel que **BSN** [RAJ 73] (Sector plate **B**ending element based on the **N**atural stiffness approach) pour obtenir un élément secteur coque à facette plane à six DDL par nœud. Un tel élément pourrait s'avérer très performant pour certaines applications particulières qui s'adaptent convenablement à la géométrie du problème.

Les éléments SBS 3 et SBS 7 donnent de très bons résultats pour les déplacements, donc il est important de concentrer les recherches sur ces deux éléments pour déterminer et améliorer les résultats des contraintes.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [ARG 60] Argyris J.H. and Kelsey S., *Energy theorems and Structural Analysis*, Butterworth, London, 1960.
- [ASH 71] Ashwell D.G., Sabir A.B. and Roberts T.M., *Further studies in the application of curved finite elements to circular arches*, *IJMS Vol. 13*, pp. 507-517, 1971
- [ASH 72] Ashwell D.G. et Sabir A.B., *A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain function*, *IJMS Vol. 14*, pp. 171-183, 1972.
- [BAT 90a] Batoz J. L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 1: Solides élastiques*, Eds. Hermès, Paris, 1990.
- [BAT 90b] Batoz J. L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 2: Poutres et plaques*, Eds. Hermès, Paris, 1990.
- [BEL 90] Belarbi M.T., *Développement d'algorithmes et éléments dans la méthode des éléments finis*, thèse de Magistère, Université de Annaba, Juillet 1990.
- [BEL 98a] Belarbi M.T. et Charif A., *Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan*, *Revue Européenne de Eléments finis*, VOL. 7, N° 4, pp. 439-458, Juin 1998.
- [BEL 98b] Belarbi M.T. et Charif A., *Nouveau Quadrilatère "SBQ4" avec Drilling rotation*, *Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur CIMASI 98*, 27-29 octobre, Casablanca, Vol. 2, pp. 136-141, 1998.

- [BEL 98c] Belarbi M.T. et Charif A., *Nouvel hexaédre simple "SBH8" pour l'étude des plaques minces et épaisses*, les annales Maghrébines de l'ingénieur, Vol. 12, N° Hors série, extrait de l'acte du 6^{ème} colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur CMMNI6, Tunis 24-26 Nov., Vol. 2, pp. 632-627, 1998.
- [BEL 99] Belarbi M.T. et Charif A., *Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses*, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 8, N° 2, pp. 135-157, 1999.
- [BEL 00] Belarbi M.T., *Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire et non linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Constantine, Février 2000. 235 pages.
- [BOU 87] Bouzerira C., *Finite element analysis for general plane elasticity*, Msc. Thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B.), 1987.
- [CAN 68] Cantin G. and Clough R.W., *A curved cylindrical shell Finite Element*, AIAA Journal, Vol. 6, N° 6, pp. 1057-1062, June 1968.
- [COU 43] Courant R., *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 49; pp. 1-23, 1943.
- [DER 84] Der Avanesian G.V., *Finite element analysis of curved box girder bridges*, PhD thesis University College Cardiff; 1984.
- [DJO 90] Djoudi M.S., *Strain based Finite Elements for linear and geometrically analysis of structures*, PHD thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B.), June 1990.

- [ERG 68] Ergatoudis J.G., Irons B.M. and Zienkiewicz O.C., *Curvedisoparametric, quadrilateral elements for finite element analysis*, Int. J. Solids Struct., Vol. 4, pp. 31-42, 1968.
- [FLU 66] Flugge W. and Fosberge K., *Point load on shallow elliptic paraboloid*, J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 575-585, 1966.
- [FRE 01] Fre F. et Jirousk J., *Analyse des structures et milieux continus, Méthode des éléments finis*, Vol. 6 Eds P.P.U.R., 1^{ère} Edition, Lausanne, 2001.
- [IMB 84] Imbert J.F., *Analyse des structures par éléments finis*, Eds Cepadues, 2^{ème} Edition, France, 1984.
- [JEA 91] Jea-Luc SARF., *La condensation statique dans FELINA* (nouvelle édition), rapport interne LSC N° 91/22.
- [OLS 70] Olson M.D. and Lindberg G.M., *Annular and circular sector finite element for plate bending*, IJMS. Vol. 12, pp. 17-33, 1970.
- [NGA 04] Ngamy D. et Didier F., *Les Fondements de la Méthode des Eléments finis*, Les Ouvrages de la " Cameroon University Press" (CAMUP),2004.
- [RAJ 69] Raju I.S. and Rao A.K., *Stiffness matrices for sector elements*, AIAA J.7, pp. 156-157, 1969.
- [RAJ 73] Raju I.S., Krishna A.V. and Rao A.K., *Sector elements for matrix displacement analysis*, IJNME. Vol. 6, pp. 553-563, 1973.
- [REK 80] Rekach V., *Problèmes de la théorie de l'élasticité*, Edition Mir Moscou, 1980.
- [ROC 79] Rockey L., Evans R., Griffiths W. et Nethercot D., *Introduction à la Méthode des Eléments Finis*. Eds Eryolles, Paris 1979.

- [SAB 71] Sabir A.B. and Ashwell D.G., *A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems*, journal of sound and Vibration, Vol. 18, N° 11, pp. 555-563, 1971.
- [SAB 72] Sabir A.B. and Lock A.C., *A curved cylindrical shell finite element*, IJMS. Vol. 14, pp. 125-135, 1972.
- [SAB 73] Sabir A.B. and Lock A.C., *Large deflection geometrically nonlinear finite element analysis of circular arches*, IJMS. Vol. 15, pp. 37-47, 1973.
- [SAB 75] Sabir A.B., *Stiffness matrices for the general deformation of curved beam members based on independent strain function*, the Math. F. E. and Appli. II^{ed} J.R. Whiteman, Academic Press, 1975.
- [SAB 78] Sabir A.B. and Ashwell D.G., *Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells*, The Math. F. E. and Appli. III^{ed} J.R. Whiteman, Academic Press, 1978.
- [SAB 83] Sabir A.B., *A new class of boite Elements for plane elasticity problems*, CAFEM 7th, Int. Cof. Struct. Mech. In Reactor Technology, Chicago, 1983.
- [SAB 85a] Sabir A.B., *A rectangular and Triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom*, Chapter 9 in proceeding of the second international conference on variational methods in engineering, Southampton University, Springer-verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [SAB 85b] Sabir A.B. and Ramdhani F., *A shallow shell finite element for general shell analysis*, variational methods in engineering proceeding of the 2nd international conference, Southampton University, England, 1985.
- [SAB 86] Sabir A.B. and Salhi H.Y., *A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates*, Res. Mechanica 19, pp. 1-16, 1986.

- [SAB 95] Sabir A.B. and Sfindji A., *Triangular and rectangular plane elasticity finite elements*, Thin-walled, Structures 21. pp.225-232, 1995.
- [TIM 51] Timoshenko S. and Goodier J.N., *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill, New York, 1951.
- [TOU 81] Touzot G. et Dhatt G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Eds. P.U.L.Q., France, 1981.
- [TUR 56] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C. and Topp L.J., *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. of Aeron. Sci., Vol. 23, pp. 805-824, 1956.
- [ZIE 00] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., *The Finite Element Method*, Vol. 1: The Basis. 5th Edition. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

ANNEXES

Annexe A: SBS 1 " l'invariant de Djoudi"

1/ composantes de la matrice de déplacement [A]

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_1 & -R_1\beta & \frac{R_1^2}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1\beta & -R_1\left(\frac{\beta^2}{2} + \log(R_1)\right) & 0 & -R_1\beta & \frac{-R_1\beta^2}{2} & 0 & R_1 \log(R_1) & \beta & R_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \frac{(2 + 2\log(R_1) + \beta^2)}{2} & 0 & \beta & \frac{\beta^2}{2} & 0 & \frac{-(2 \log(R_1) + 1)}{2} & \frac{-\beta}{2.R_1} & \frac{-3.R_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & -R_2\beta & \frac{R_2^2}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2\beta & \frac{-R_2\beta^2}{2} & 0 & -R_2\beta & \frac{-R_2\beta^2}{2} & 0 & R_2 \log(R_2) & \beta & R_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \frac{(2 + 2\log(R_2) + \beta^2)}{2} & 0 & \beta & \frac{\beta^2}{2} & 0 & \frac{-(2 \log(R_2) + 1)}{2} & \frac{-\beta}{2.R_2} & \frac{-3.R_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & R_2\beta & \frac{R_2^2}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2\beta & \frac{-R_2\beta^2}{2} & 0 & R_2\beta & \frac{-R_2\beta^2}{2} & 0 & R_2 \log(R_2) & -\beta & R_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \frac{(2 + 2\log(R_2) + \beta^2)}{2} & 0 & -\beta & \frac{\beta^2}{2} & 0 & \frac{-(2 \log(R_2) + 1)}{2} & \frac{\beta}{2.R_2} & \frac{-3.R_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & R_1\beta & \frac{R_1^2}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_1\beta & \frac{R_1\beta^2}{2} & 0 & R_1\beta & \frac{-R_1\beta^2}{2} & 0 & R_1 \log(R_1) & -\beta & R_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \frac{(2 + 2\log(R_1) + \beta^2)}{2} & 0 & -\beta & \frac{\beta^2}{2} & 0 & \frac{-(2 \log(R_1) + 1)}{2} & \frac{\beta}{2.R_1} & \frac{-3.R_1}{2} \end{bmatrix}$$

2/ composantes de la matrice de déformation [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2} & 1 & -\theta & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\theta}{r} & r \end{bmatrix}$$

3/ composantes de la matrice de rigidité [K]

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_1 & 0 & H_2 & H_3 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & H_5 & 0 & 0 & H_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & H_7 & H_8 & 0 & H_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & H_{10} & 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & H_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & H_{14} & 0 & H_{15} & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{16} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & H_{17} & 0 \end{bmatrix}$$

symét.

On a:

$$D_{11} = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu); \quad D_{12} = \nu D_{11}/(1-\nu); \quad D_{22} = D_{11}; \quad D_{33} = E/2(1+\nu)$$

$$E_i = (r_2^i - r_1^i) \quad i=1,4;$$

$$C = A \text{Log} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

$$C_1 = 0.66667$$

$$C_2 = 0.500$$

$$C_3 = 0.33333$$

$$C_4 = 0.25$$

$$H_1 = \beta \cdot D_{11} \cdot E_2$$

$$H_2 = C_1 \cdot \beta \cdot E_3 \cdot (D_{11} + C_2 \cdot D_{12})$$

$$H_3 = \beta \cdot D_{12} \cdot E_2$$

$$H_4 = 2 \cdot \beta \cdot E_1 \cdot D_{12}$$

$$H_5 = C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{11} \cdot E_2$$

$$H_6 = -C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot E_2$$

$$H_7 = C_2 \cdot \beta \cdot E_4 \cdot (D_{11} + D_{12} + C_4 \cdot D_{22})$$

$$H_8 = C_1 \cdot \beta \cdot E_3 \cdot (D_{12} + C_2 \cdot D_{22})$$

$$H_9 = \beta \cdot E_2 \cdot (D_{12} + C_2 \cdot D_{22})$$

$$H_{10} = \beta \cdot D_{22} \cdot E_2$$

$$H_{11} = 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot E_1$$

$$H_{12} = C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot E_2$$

$$H_{13} = 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot C$$

$$H_{14} = \beta \cdot D_{33} \cdot E_2$$

$$H_{15} = C_1 \cdot \beta \cdot E_3 \cdot D_{33}$$

$$H_{16} = C_1 \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot C$$

$$H_{17} = C_2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot E_4$$

Annexe B: SBS 2 " l'élément de Belarbi"

1/ composantes de la matrice de déplacement [A]

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & R_1 & -\beta & -R_1\beta & 0 & \frac{\beta^2}{2} & \beta^2 & R_1\beta^2 & -R_1^2\beta^3 & 0 \\ 0 & 1 & R_1 & 0 & R_1 & \frac{R_1^2}{2} & -\beta & -R_1\beta & 0 & R_1^2\beta & -\beta^2R_1^3 & R_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 2R_1\beta & -3R_1^2\beta^2 & R_1 \\ 1 & 0 & \beta & R_2 & -\beta & -R_2\beta & 0 & \frac{\beta^2}{2} & \beta^2 & R_2\beta^2 & -R_2^2\beta^3 & 0 \\ 0 & 1 & R_2 & 0 & R_2 & \frac{R_2^2}{2} & -\beta & -R_2\beta & 0 & R_2^2\beta & -\beta^2R_2^3 & R_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 2R_2\beta & -3R_2^2\beta^2 & R_2 \\ 1 & 0 & -\beta & R_2 & \beta & R_2\beta & 0 & \frac{\beta^2}{2} & \beta^2 & R_2\beta^2 & R_2^2\beta^3 & 0 \\ 0 & 1 & R_2 & 0 & R_2 & \frac{R_2^2}{2} & \beta & R_2\beta & 0 & -R_2^2\beta & -\beta^2R_2^3 & R_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & -2R_2\beta & -3R_2^2\beta^2 & R_2 \\ 1 & 0 & -\beta & R_1 & \beta & R_1\beta & 0 & \frac{\beta^2}{2} & \beta^2 & R_1\beta^2 & R_1^2\beta^3 & 0 \\ 0 & 1 & R_1 & 0 & R_1 & \frac{R_1^2}{2} & \beta & R_1\beta & 0 & -R_1^2\beta & -\beta^2R_1^3 & R_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & -2R_1\beta & -3R_1^2\beta^2 & R_1 \end{bmatrix}$$

2/ composantes de la matrice de déformation [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \theta & 0 & 0 & \theta^2 & 2.r\theta^3 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \frac{\theta}{r} & \theta & \frac{1}{r} & \left(1 + \frac{\theta^2}{2r}\right) & \frac{\theta^2}{r} & (\theta^2 - r) & (r\theta^3 - 2.r^2\theta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} & \left(1 + \frac{r}{2}\right) & -\frac{\theta}{r} & \frac{\theta}{r} & \frac{2.\theta}{r} & (2.\theta - r\theta) & (3.r\theta^2 - 2.r^2\theta^2) & r \end{bmatrix}$$

3/ composantes de la matrice de rigidité [K]

$$[K] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & 0 & 0 \\ & H_7 & H_8 & 0 & H_9 & H_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & H_{12} \\ & & H_{13} & 0 & H_{14} & H_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{16} & H_{17} \\ & & & H_{18} & 0 & 0 & H_{19} & H_{20} & H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ & & & & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{25} & H_{26} \\ & & & & & H_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{28} & H_{29} \\ & & & & & & H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 \\ & & & \text{symét.} & & & & & H_{37} & H_{38} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & H_{39} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{40} & H_{41} \\ & & & & & & & & & & & H_{42} \end{bmatrix}$$

On a:

$$D_{11} = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu); \quad D_{12} = \nu D_{11}/(1-\nu); \quad D_{22} = D_{11}; \quad D_{33} = E/2(1+\nu)$$

$$E_i = (r_2^i - r_1^i) \quad i=1,6;$$

$$AL = A \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

$$A_1 = D_{11}$$

$$A_2 = D_{11} + D_{12}$$

$$A_3 = D_{33}$$

$$A_4 = 2 \cdot D_{12} + D_{11}$$

$$A_5 = 2 \cdot D_{11} + D_{12}$$

$$A_6 = D_{12}$$

$$A_7 = D_{11} + D_{33}$$

$$A_8 = D_{12} + D_{11}/2 - D_{33}$$

$$A_9 = D_{11} + D_{12} + 2 \cdot D_{33}$$

$$A_{10} = 5 \cdot D_{11} + 4 \cdot D_{12}$$

$$A_{11} = 8 \cdot D_{11} + 16 \cdot D_{12} + 24 \cdot D_{33}$$

$$A_{12} = D_{11} + D_{12} + D_{33}/4$$

$$H_1 = 2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_1$$

$$H_2 = 2 \cdot \beta \cdot E_1 \cdot A_2$$

$$H_3 = 2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_1$$

$$H_4 = (\beta^3 \cdot AL/3 + 2 \cdot \beta \cdot E_1) \cdot A_1$$

$$H_5 = 2 \cdot \beta^3 \cdot AL \cdot A_1/3$$

$$H_6 = 2 \cdot \beta^3 \cdot E_1 \cdot A_2/3 - \beta \cdot E_2 \cdot A_1$$

$$H_7 = 2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_3$$

$$H_8 = 2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_3$$

$$H_9 = -2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_3$$

$$H_{10} = -2 \cdot \beta \cdot A_3 \cdot (E_2/4 + E_1)$$

$$H_{11} = 2 \cdot \beta^3 \cdot A_3 \cdot (2 \cdot E_3/3 - 3 \cdot E_2/2)/3$$

$$H_{12} = -\beta \cdot E_2 \cdot A_3$$

$$H_{13} = 2 \cdot \beta^3 \cdot AL \cdot A_1/3 + 2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_3$$

$$H_{14} = -2 \cdot \beta^3 \cdot AL \cdot A_1/3 - 2 \cdot \beta \cdot AL \cdot A_3$$

$$H_{15} = -2 \cdot \beta^3 \cdot E_1 \cdot A_2/3 - 2 \cdot \beta \cdot A_3 \cdot (E_1 + E_2/4)$$

$$H_{16} = -\beta^5 \cdot E_2 \cdot A_4/5 + 4 \cdot \beta^3 \cdot 3 \cdot A_7/9 - \beta^3 \cdot E_2 \cdot A_3$$

$$H_{17} = -\beta \cdot E_2 \cdot A_3$$

$$H_{18} = 2 \cdot \beta \cdot E_2 \cdot A_2$$

$$H_{19} = 2 \cdot \beta \cdot E_1 \cdot A_2$$

$$H_{20} = (\beta \cdot E_2 + \beta^3 \cdot E_1/3) \cdot A_2$$

$$H_{21} = 2 \cdot \beta^3 \cdot E_1 \cdot A_2/3$$

$$H_{22} = 2 \cdot \beta^3 \cdot E_2 \cdot A_2/3 - 2 \cdot \beta \cdot E_3 \cdot A_2/3$$

$$\begin{aligned}
H_{23} &= 2. \beta^3. AL. A_1/3 + 2. \beta. AL. A_3 & - \beta. E_2. A_1 \\
H_{24} &= 2. \beta^3. E_1. A_2/3 + 2. \beta. A_3. (E_1 & H_{34} = \beta^3. (A_1. (2. E_1/3 + \beta^2. AL/10) \\
&+ E_2/4) & + 2. AL. A_3/3) + \beta. E_2. A_1 \\
H_{25} &= (\beta^2. E_2. A_4/5 - 4. E_3. A_7/9 & H_{35} = \beta^3. (A_1. (2. E_1/3 + \beta^2. AL/5) \\
&+ E_2. A_3). \beta^3 & + 4. AL. A_3/3) \\
H_{26} &= \beta. E_2. A_3 & H_{36} = \beta^3. (A_2. \beta^2. E_1/5 + A_8. E_2/3 \\
& & + 4. E_1. A_3/3) - 2. \beta. A_1. E_3/3 \\
H_{27} &= 2. \beta^3. E_2. A_2/3 + \beta. A_3. (E_2 & H_{37} = 2. \beta^3. AL. (\beta^2. A_1/5 + 4. A_3/3) \\
&+ 2. E_3/3 + E_4/8) & H_{38} = \beta^3. (2. \beta^2. E_1. A_2/5 - E_2. A_1/3 \\
& & + A_3. (8. E_1/3 - 2. E_2/3)) \\
H_{28} &= \beta^3. (2. A_2. \beta^2. E_3/5 - A_{12}. E_4/3 & H_{39} = \beta^3. (2. A_2. \beta^2. E_2/5 - 4. A_9. E_3/9 \\
&+ A_3. (2. E_3/3 - 2. E_5/15)) & + A_3. E_4/6 + 4. A_3. E_2/3) \\
H_{29} &= (2. E_3/3 + E_4/4). \beta. A_3 & + \beta. E_4. A_1/2 \\
H_{30} &= 2. \beta. AL. (A_1 + \beta^2. A_3/3) & H_{40} = \beta^5. (A_{10}. E_4. \beta^2/14 - A_{11}. E_5/25 \\
& & + 4. A_3. E_6/15 + 9. A_3. E_4/10) \\
H_{31} &= \beta. (A_1. (2. E_1 + \beta^2. AL/3) & + 4. \beta^3. A_1. E_6/9 \\
&- 2. \beta^2. AL. A_3/3) & H_{41} = \beta^3. A_3. (E_4/2 - 4. E_5/15) \\
H_{32} &= 2. \beta^3. AL. (A_1 - 2. A_3)/3 & H_{42} = \beta. E_4. A_3/2
\end{aligned}$$

$$H_{33} = (\beta^3/3). (2. E_1. A_2 + (E_2 - 4. E_1). A_3)$$

Annexe C: "SBS 3"

1/ composantes de la matrice de déplacement [A]

$$[A] = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \beta & R_1 & \frac{R_1^2}{2} & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\beta R_1 & 0 \\
0 & 1 & R_1 & 0 & 0 & -\beta & -\beta R_1 & \frac{R_1}{2} & -\frac{R_1^2}{2} & \frac{\beta^2}{2} \\
1 & 0 & \beta & R_2 & \frac{R_2^2}{2} & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\beta R_2 & 0 \\
0 & 1 & R_2 & 0 & 0 & -\beta & -\beta R_2 & \frac{R_2}{2} & -\frac{R_2^2}{2} & \frac{\beta^2}{2} \\
1 & 0 & -\beta & R_2 & \frac{R_2^2}{2} & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & \frac{\beta}{2} & \beta R_2 & 0 \\
0 & 1 & R_2 & 0 & 0 & \beta & \beta R_2 & \frac{R_2}{2} & -\frac{R_2^2}{2} & \frac{\beta^2}{2} \\
1 & 0 & -\beta & R_1 & \frac{R_1^2}{2} & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & \frac{\beta}{2} & \beta R_1 & 0 \\
0 & 1 & R_1 & 0 & 0 & \beta & \beta R_1 & \frac{R_1}{2} & -\frac{R_1^2}{2} & \frac{\beta^2}{2} \\
1 & 0 & 0 & R & \frac{R^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{2} & -\frac{R^2}{2} & 0
\end{bmatrix}$$

2/ composantes de la matrice de déformation [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \frac{r}{2} & \frac{1}{r} & 1-\frac{\theta^2}{2r} & \frac{\theta}{2r} & \theta & \frac{\theta}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & -\frac{\theta}{r} & -\frac{\theta}{r} & \frac{1}{2r} & 1-\frac{r}{2} & -\frac{\theta^2}{2r} \end{bmatrix}$$

3/ composantes de la matrice de rigidité [K₀]

$$[K_0] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & 0 & 0 & 0 \\ & H_6 & H_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & H_9 & H_{10} \\ & & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ & & & H_{15} & H_{16} & H_{17} & H_{18} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & H_{19} & H_{20} & H_{21} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & H_{24} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & H_{25} & H_{26} & H_{27} \\ & & & & & & & & H_{28} & H_{29} \\ & & & & & & & & & H_{30} \end{bmatrix}$$

symét.

$$A_2 = A \text{Log} \begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = r_2 - r_1$$

$$A_3 = r_2 + r_1$$

$$A_4 = (r_2^2 - r_1^2)$$

$$A_6 = (r_2^3 - r_1^3)$$

$$A_7 = (r_2^4 - r_1^4)$$

$$C_2 = 0.500$$

$$C_3 = 0.6666666667$$

$$C_4 = 0.25$$

$$C_5 = 0.125$$

$$C_6 = 0.08333333333$$

$$C_7 = 0.1$$

$$C_8 = 0.1666666667$$

$$E = 0.3333333333$$

$$H_1 = 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_2$$

$$H_2 = 2 \cdot \beta \cdot D_{12} \cdot A_1 + 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_1$$

$$H_3 = 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_2$$

$$H_4 = -E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 + 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_1$$

$$H_5 = \beta \cdot D_{12} \cdot A_4 + C_2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_4$$

$$H_6 = 2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_7 = 2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_8 = -2 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_1 + C_2 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_4$$

$$H_9 = -\beta \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{10} = E \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{11} = C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 + 2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{12} = C_2 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_4 - 2 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_1$$

$$- C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot A_1 - C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_1$$

$$H_{13} = -E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 - \beta \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{14} = -C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 + E \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{15} = \beta \cdot D_{11} \cdot A_4 + 2 \cdot \beta \cdot D_{12} \cdot A_4 + \beta \cdot D_{22} \cdot A_4$$

$$H_{16} = 2 \cdot \beta \cdot D_{12} \cdot A_1 + 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_1$$

$$H_{17} = \beta \cdot D_{12} \cdot A_4 - E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_1 + \beta \cdot D_{22} \cdot A_4 - E \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot A_1$$

$$H_{18} = C_3 \cdot \beta \cdot D_{11} \cdot A_6 + \beta \cdot D_{12} \cdot A_6 + E \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_6$$

$$H_{19} = C_5 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_7 - C_3 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_6 + E \cdot \beta^3 \cdot D_{11} \cdot A_4 + C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot A_4 + E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_4 + D_{33} \cdot \beta \cdot A_4$$

$$H_{20} = -C_4 \cdot D_{33} \cdot \beta \cdot A_4 + D_{33} \cdot \beta \cdot A_1 + E \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot A_1 + E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_1$$

$$H_{21} = C_6 \cdot D_{33} \cdot \beta^3 \cdot A_4 - E \cdot D_{33} \cdot \beta^3 \cdot A_1 + C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot A_1 + C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_1$$

$$H_{22} = 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_2 + C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{23} = 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_1 - E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 + C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{24} = \beta \cdot D_{12} \cdot A_4 + C_2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_4$$

$$H_{25} = \beta \cdot D_{22} \cdot A_4 + C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot A_2 - C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_1 + C_7 \cdot \beta^5 \cdot D_{22} \cdot A_2$$

$$H_{26} = C_3 \cdot \beta \cdot D_{12} \cdot A_6 - C_6 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_4 + E \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_6 - C_8 \cdot \beta^3 \cdot D_{12} \cdot A_4$$

$$H_{27} = C_8 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 + C_2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{28} = E \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 - C_8 \cdot \beta^3 \cdot D_{33} \cdot A_2$$

$$H_{29} = C_2 \cdot \beta \cdot D_{11} \cdot A_7 + C_2 \cdot \beta \cdot D_{12} \cdot A_7 + C_5 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot A_7$$

$$H_{30} = C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot A_2 + C_7 \cdot \beta^5 \cdot D_{33} \cdot A_2$$

Annexe D: "SBS 4"

1/ composantes de la matrice de déplacement [A]

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & R_1 & -\beta R_1 & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & -\frac{\beta}{2} & 0 & \frac{R_1^2}{2} \\ 0 & 1 & R_1 & 0 & -\frac{R_1^2}{2} & -\beta & -\beta R_1 & \frac{R_1}{2} & \frac{\beta^2}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \beta & R_2 & -\beta R_2 & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & -\frac{\beta}{2} & 0 & \frac{R_2^2}{2} \\ 0 & 1 & R_2 & 0 & -\frac{R_2^2}{2} & -\beta & -\beta R_2 & \frac{R_2}{2} & \frac{\beta^2}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\beta & R_2 & \beta R_2 & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & \frac{\beta}{2} & 0 & \frac{R_2^2}{2} \\ 0 & 1 & R_2 & 0 & -\frac{R_2^2}{2} & \beta & \beta R_2 & \frac{R_2}{2} & \frac{\beta^2}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\beta & R_1 & \beta R_1 & 0 & -\frac{\beta^2}{2} & \frac{\beta}{2} & 0 & \frac{R_1^2}{2} \\ 0 & 1 & R_1 & 0 & -\frac{R_1^2}{2} & \beta & \beta R_1 & \frac{R_1}{2} & \frac{\beta^2}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \\ 0 & 1 & R & 0 & -\frac{R^2}{2} & 0 & 0 & \frac{R}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } R = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

2/ composantes de la matrice de déformation [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \theta & \frac{1}{r} & 1-\frac{\theta^2}{2r} & \frac{\theta}{2r} & \frac{\theta}{r} & \frac{r}{2} \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 1-\frac{r}{2} & -\frac{\theta}{r} & -\frac{\theta}{r} & \frac{1}{2r} & -\frac{\theta^2}{2r} & 0 \end{bmatrix}$$

3/ composantes de la matrice de rigidité [K]

$$[K_0] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 & 0 & 0 & H_5 \\ & H_6 & H_7 & 0 & H_8 & 0 & 0 & H_9 & H_{10} & 0 \\ & & H_{11} & 0 & H_{12} & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 \\ & & & H_{15} & 0 & H_{16} & H_{17} & 0 & 0 & H_{18} \\ & & & & H_{19} & 0 & 0 & H_{20} & H_{21} & 0 \\ & & & & & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & H_{24} \\ & & & & & & H_{25} & 0 & 0 & H_{26} \\ & & & & & & & H_{27} & H_{28} & 0 \\ & & & & & & & & H_{29} & 0 \\ & & & & & & & & & H_{30} \end{bmatrix}$$

symét.

$$D_{11} = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu); \quad D_{12} = \nu D_{11}/(1-\nu); \quad D_{22} = D_{11}; \quad D_{33} = E/2(1+\nu)$$

$$C = A \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right); \quad E_i = (r_2^i - r_1^i) \quad i=1,4;$$

$$C_1=0.333$$

$$C_5=0.500$$

$$C_2=0.1667$$

$$C_6=0.250$$

$$C_3=0.6667$$

$$C_7=0.100$$

$$C_4=0.125$$

$$H_1=2.D_{22}.\beta.C$$

$$H_5=\beta.E_2.(D_{12} + C_5.D_{22})$$

$$H_2=2.\beta.E_1.(D_{12} + D_{22})$$

$$H_6=2.\beta.D_{33}.C$$

$$H_3=2.\beta.D_{22}.C$$

$$H_7=2.\beta.D_{33}.C$$

$$H_4=2.\beta.D_{22}.(E_1 - C_2.\beta^2.C)$$

$$H_8=-2.\beta.D_{33}.E_1 + C_5.\beta.D_{33}.E_2$$

$$\begin{aligned}
H_9 &= -\beta \cdot D_{33} \cdot C & H_{20} &= \beta \cdot E_1 \cdot (D_{33} + C_1 \cdot \beta^2 \cdot (D_{12} + D_{22})) \\
H_{10} &= C_1 \cdot C \cdot \beta^3 \cdot D_{33} & & - C_6 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot E_2 \\
H_{11} &= C_3 \cdot \beta^3 \cdot D_{22} \cdot C + 2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot C & H_{21} &= C_1 \cdot \beta^3 \cdot (C_6 \cdot D_{33} \cdot E_2 + E_1 \cdot (2 \cdot D_{12} \\
H_{12} &= C_5 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot E_2 - C_3 \cdot \beta^3 \cdot C \cdot (D_{12} + D_{22})) & & - D_{33} + 2 \cdot D_{22})) \\
& - 2 \cdot \beta \cdot D_{33} \cdot E_1 & H_{22} &= 2 \cdot \beta \cdot C \cdot (D_{22} + C_3 \cdot \beta^2 \cdot D_{33}) \\
H_{13} &= -\beta \cdot C \cdot (C_1 \cdot \beta^2 \cdot D_{22} + D_{33}) & H_{23} &= 2 \cdot \beta \cdot D_{22} \cdot E_1 + C_1 \cdot \beta^3 \cdot C \cdot (2 \cdot D_{33} - D_{22}) \\
H_{14} &= C_1 \cdot \beta^3 \cdot C \cdot (D_{33} - 2 \cdot D_{22}) & H_{24} &= \beta \cdot E_2 \cdot (D_{12} + C_5 \cdot D_{22}) \\
H_{15} &= \beta \cdot E_2 \cdot (D_{11} + 2 \cdot D_{12} + D_{22}) & H_{25} &= \beta \cdot D_{22} \cdot (E_2 - C_3 \cdot \beta^2 \cdot E_1) \\
H_{16} &= 2 \cdot \beta \cdot E_1 \cdot (D_{12} + D_{22}) & & + \beta^3 \cdot C \cdot (C_3 \cdot D_{33} + C_7 \cdot \beta^2 \cdot D_{22}) \\
H_{17} &= -C_1 \cdot \beta^3 \cdot E_1 \cdot (D_{12} + D_{22}) & H_{26} &= C_1 \cdot \beta \cdot (2 \cdot D_{12} + D_{22}) \cdot (E_3 - C_6 \cdot \beta^2 \cdot E_2) \\
& + \beta \cdot (D_{12} + D_{22}) \cdot E_2 & H_{27} &= C_5 \cdot \beta \cdot C \cdot (C_1 \cdot \beta^2 \cdot D_{22} + D_{33}) \\
H_{18} &= \beta \cdot E_3 \cdot (C_3 \cdot D_{11} + D_{12} + C_1 \cdot D_{22}) & H_{28} &= C_1 \cdot \beta^3 \cdot C \cdot (D_{22} - C_5 \cdot D_{33}) \\
H_{19} &= D_{33} \cdot \beta \cdot (C_4 \cdot E_4 - C_3 \cdot E_3) & H_{29} &= 2 \cdot \beta^3 \cdot C \cdot (C_1 \cdot D_{22} + C_7 \cdot \beta^2 \cdot D_{33}) \\
& + \beta \cdot E_2 \cdot (C_1 \cdot \beta^2 \cdot (D_{11} + 2 \cdot D_{12} + D_{22}) & H_{30} &= C_5 \cdot \beta \cdot E_4 \cdot (D_{11} + D_{12} + C_6 \cdot D_{22}) \\
& + D_{33})
\end{aligned}$$

Annexe E:

Vérification de l'équation de compatibilité pour SBS 1 « l'invariant de Djoudi »:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2} & 1 & -\theta & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\theta}{r} & r \end{bmatrix}$$

Coefficients	$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta}$ (2)	$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2}$ (3)	$-r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2}$ (4)	$-2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}$ (5)	$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r}$ (6)	$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta}$ (7)	Equation (1)
a ₁	0	0	0	0	0	0	0
a ₂	0	0	0	0	0	0	0
a ₃	0	0	0	0	0	0	0
a ₄	0	0	0	0	0	0	0
a ₅	0	0	0	0	0	0	0
a ₆	0	0	0	-1	+1	0	0
a ₇	0	0	0	0	0	0	0
a ₈	0	0	0	0	0	0	0
a ₉	0	0	$-2/r^2$	$+2/r^2$	0	0	0
a ₁₀	0	0	0	0	0	0	0
a ₁₁	$-1/r^2$	0	0	0	0	$1/r^2$	0
a ₁₂	0	0	0	0	0	0	0

$$\text{Equation (1)} = (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7)$$