

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER – BISKRA –  
Faculté des Sciences et de la Technologie

N° d'ordre : .....

Série : .....

Département de Génie Civil et Hydraulique

## MEMOIRE DE MAGISTER EN HYDRAULIQUE

*Option : Sciences Hydrauliques*

Présenté par :

**Mr ABED MOURAD**

*Ingénieur d'Etat en Hydraulique*

THEME

*Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme  
dans une conduite fermée de forme circulaire*

Soutenu le : 13./ 10./ 2010

Devant le jury :

Président :	B.REMINI	Professeur	Univ. Blida
Examineur :	N.MOUMMI	Professeur	Univ. Biskra
Examineur :	M.KHATAOUI	Maître de conférences	Univ.Tizi-Ouzou
Rapporteur :	B.ACHOUR	Professeur	Univ. Biskra

## INTRODUCTION GENERALE

Un canal ouvert est un conduit dans lequel l'écoulement est à surface libre. Il peut être naturel ou artificiel. Un canal artificiel, qui intéresse notre étude, est un canal construit ou conçu par l'homme. Les canaux artificiels peuvent être conçus en béton ou en maçonnerie, parfois en métal, en verre ou en plexiglas tels que ceux utilisés en laboratoire. Les canaux conçus avec une section transversale constante et une pente longitudinale invariable sont appelés canaux prismatiques. Les canaux artificiels sont généralement conçus avec des sections à géométrie régulière. Ils peuvent être également fermés, dotés d'un toit graduel ou rectiligne tels que les conduites circulaires, les conduites ovoïdales, les conduits trapézoïdaux ou même rectangulaires. Les conduites dotées d'un toit fermé graduel sont largement utilisées dans le domaine de l'assainissement.

Les parois internes des canaux artificiels sont caractérisées par une rugosité absolue. Ce paramètre peut être évalué en pratique et il définit l'état de la paroi interne du canal.

L'écoulement uniforme considéré dans la présente étude est caractérisé par la constance de la profondeur, de l'aire de la section mouillée et du débit volume dans toute section. En outre, la ligne de charge totale, la surface libre et la pente longitudinale du canal sont parallèles. De plus, l'écoulement uniforme est permanent, puisque l'écoulement uniforme non permanent n'existe pratiquement pas.

Dans la pratique, les relations de type *Chézy* et *Manning* sont celles qui sont le plus souvent utilisées pour l'étude de l'écoulement uniforme. En règle générale, les coefficients de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy* et  $n$  de *Manning* sont considérés comme constants, ce qui constitue une approche simplifiée. Il est pourtant évident que ces coefficients devraient varier en fonction de la profondeur, puisqu'ils sont liés à la résistance à l'écoulement. Les coefficients  $C$  et  $n$  peuvent être considérés comme étant constants lorsque l'écoulement est dans le domaine de pleine turbulence, ou turbulent rugueux.

Notre étude repose sur deux principaux chapitres. Le premier chapitre est entièrement consacré à l'état de connaissances sur l'écoulement uniforme. Les relations de *Chézy* et de *Manning* sont longuement présentées et discutées, en particulier les coefficients  $C$  et  $n$  qui sont théoriquement interprétés. La méthode de détermination du coefficient  $n$  est également présentée en se basant sur la répartition théorique des vitesses dans un canal à parois rugueuses.

En ayant recours aux relations de *Chézy* et de *Manning*, les notions de conductivité et de facteur de section sont rappelées. Le facteur de section relatif dans le cas de la conduite de forme circulaire, qui intéresse notre étude, est graphiquement représenté et interprété. Les caractéristiques de l'écoulement dans la conduite circulaire sont analysées selon les résultats obtenus par *Camp*

(1946).

Le second chapitre de notre étude est consacré à l'écoulement uniforme dans la conduite de forme circulaire. Au cours de ce chapitre, l'écoulement uniforme est, dans un premier temps, analysé pour  $C$  et  $n$  constants, puis étudié dans un second temps lorsque  $C$  et  $n$  sont variables. Des courbes adimensionnelles montrent clairement leur variation en fonction du taux de remplissage de la conduite circulaire considérée. L'étude se base exclusivement sur les relations de *Chézy* et de *Manning* qui mènent à l'expression analytique de la conductivité relative. Des relations approchées pour le calcul du diamètre de la conduite et de la profondeur normale de l'écoulement sont présentées et des exemples d'application sont proposés. Le calcul du diamètre de la conduite est basé sur la méthode du modèle rugueux (*Achour, 2007*) qui conduit à une démarche simple et fiable.

Enfin, l'écoulement critique est également étudié au cours du second chapitre. En ayant recours à la condition de criticité, le débit relatif est exprimé, de manière implicite, en fonction du taux de remplissage critique de la conduite considérée. Une relation approchée fiable est proposée pour le calcul du taux de remplissage critique et par conséquent de la profondeur critique.

# I. ECOULEMENT UNIFORME

## I.1. Introduction

Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur  $h$  ou  $y_n$  de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée  $A$ , la vitesse  $V$  de l'écoulement et le débit  $Q$ . La ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse  $V$  est généralement associée à la constance de la vitesse moyenne de l'écoulement; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens stricte du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières. Cette approche, bien que simplifiée, donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques.

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistances sont proportionnelles à  $V^2$ .

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place à un écoulement varié. La figure 1.1 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'un canal rectangulaire de grande longueur et de différentes pentes géométriques  $i$ . La pente  $i$

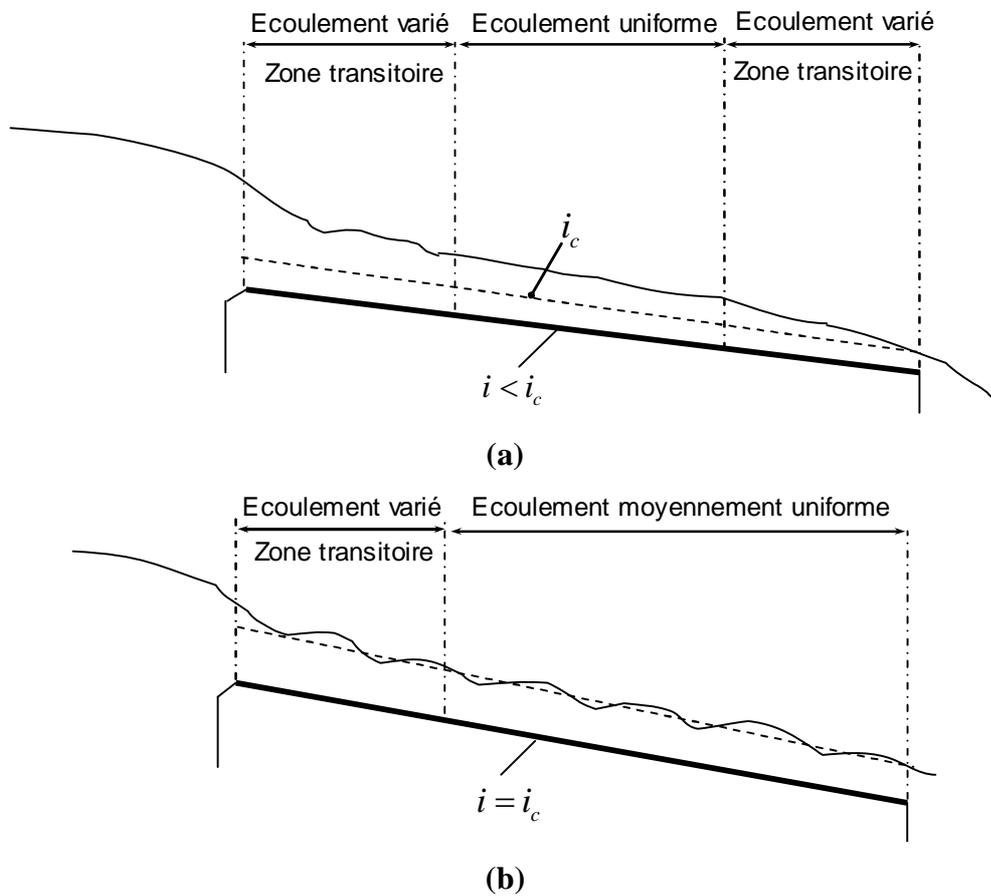
est comparée à la pente critique  $i_c$ .

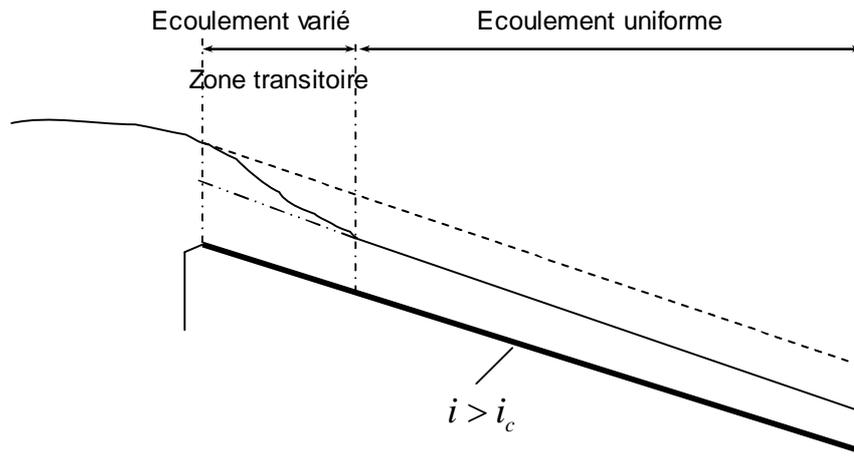
Lorsque la pente  $i$  est suave (figure 1.1.a), la zone transitoire se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement est uniforme au milieu du canal mais varie aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% de la valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente  $i$  correspond à la pente critique  $i_c$  (figure 1.1.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente  $i$  est supercritrique ou prononcée (figure 1.1.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone transitoire, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume  $Q$  entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci, telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone transitoire ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.





(c)

**Figure 1.1** : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur.  
 (- - -): profondeur critique. (—): profondeur normale de l'écoulement uniforme.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée profondeur normale de l'écoulement est très important. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure 1.1.c, la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère prononcé ou supercritique de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites " relations de l'écoulement normal ". Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme  $V = C R_h^\beta J^\gamma$  où  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $J$  est la pente de la ligne de charge. Comme nous l'avons déjà indiqué,  $J$  correspond également à la pente  $i$ . Le paramètre  $C$  traduit la résistance de l'écoulement et dépend de  $V$ , de  $R_h$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant les parois du canal, de la viscosité du liquide et de beaucoup d'autres facteurs.

La distinction doit être faite entre l'écoulement uniforme se produisant d'une part dans les canaux artificiels et dans les canaux naturels d'autre part. Dans la pratique, l'écoulement dans les canaux naturels est considéré comme étant uniforme à condition que la profondeur de l'écoulement ne subisse pas de variation brusque pouvant être causée par les irrégularités des parois du canal. L'application des relations de l'écoulement uniforme aux canaux naturels mène à des résultats plutôt approximatifs en raison du fait que l'écoulement dépend en réalité d'un plus grand nombre de facteurs que ceux qui influencent l'écoulement dans les canaux artificiels. Selon *Schnackenberg* (1951), une bonne relation de l'écoulement uniforme dans un canal naturel sans transport de sédiments est celle qui devrait tenir compte d'au moins 10 paramètres qui sont  $A$ ,  $V$ ,  $V_{ms}$  qui correspond à la vitesse maximale à la surface, le périmètre mouillé  $P$ ,

$R_h$ , la profondeur maximale  $y$  de l'écoulement, la pente  $S_w$  de la surface libre, le coefficient  $n$  qui caractérise la rugosité du canal, la viscosité dynamique  $\mu$  du liquide et la température  $T$ .

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk*, 1918; *Forchheimer*, 1930 ; *Lindquist*, 1933; *Vladislavjevitch*, 1951), on peut s'apercevoir que de très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de " bonne relation " selon la conception de *Schnackenberg*.

Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels, telle que celle de *Toebe*s (1955). Dans cette approche, une analyse par corrélation multiple est appliquée aux différents facteurs influençant la vitesse de l'écoulement dans un canal naturel. Ces facteurs, selon *Toebe*s (1955) sont  $A$ ,  $V_{ms}$ ,  $S_w$ ,  $n$  et  $T$ . Par cette approche, il est possible d'estimer l'influence de chacun des dits facteurs sur la vitesse  $V$  et la valeur de celle-ci est égale à la somme algébrique des diverses contributions de chacun des paramètres en question. Cependant, la méthode de *Toebe*s (1955) ne peut être appliquée que dans la région géographique pour laquelle a été faite l'analyse de l'influence des facteurs ci-dessus cités, ce qui malheureusement exclut toute généralisation de cette méthode.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou de *Manning – Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué  $V = C R_h^\beta J^\gamma$  où les exposants  $\beta$  et  $\gamma$  ont des valeurs bien déterminées. En raison de leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tentant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy – Weisbach* dont l'application est universelle. Cette relation joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît un grand succès.

Notre travail se présente en deux grandes parties. La première partie est consacrée à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme. Elle se propose de passer en revue les principales formules de l'écoulement uniforme, en mettant l'accent sur les relations de *Chézy*, *Manning – Strickler* et de *Darcy – Weisbach*.

Dans la deuxième partie de notre étude, nous avons tenté d'exposer notre contribution au calcul de l'écoulement uniforme. Notre recherche a pour principal objectif de proposer des relations approchées fiables au calcul de la profondeur normale ainsi que celles destinées au dimensionnement de la conduite considérée. Ces relations sont applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, comprenant l'écoulement lisse, de transition et turbulent rugueux.

## I.2. Formule de Chézy

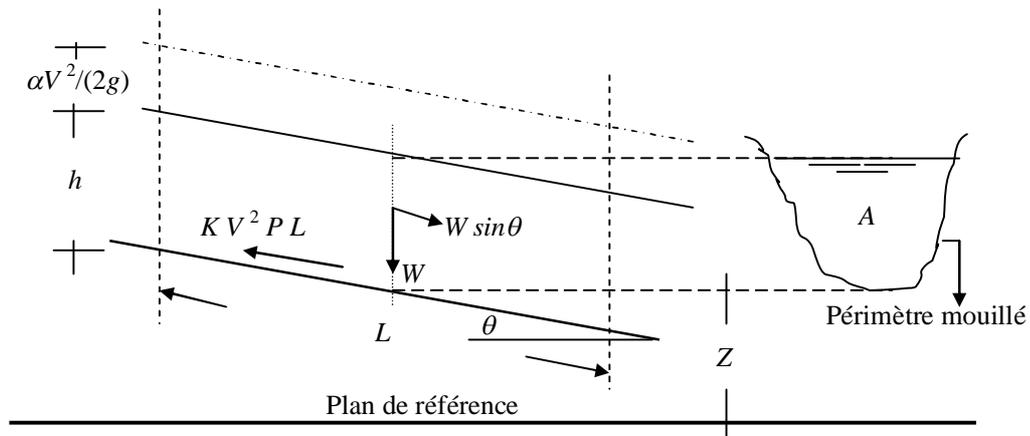
La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne  $V$  s'exprime par :

$$V = C \sqrt{R_h J} \quad (1.1)$$

Rappelons que  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge ( $J$  étant également la pente  $i$  du canal) et  $C$  est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement. Le facteur  $C$  est habituellement appelé coefficient de *Chézy*.

*Chézy* stipule que la force de résistance s'opposant à l'écoulement et par unité de surface de canal est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne  $V$ . Cette force peut donc s'écrire :  $F_r (1m^2) = K V^2$ , où  $K$  est le facteur de proportionnalité. Comme le montre la figure 1.2, la surface du canal en contact avec le liquide est égale au produit du périmètre mouillé  $P$  par la longueur  $L$  du canal. La force totale  $F_r$  mise en jeu s'écrit ainsi :

$$F_r = K V^2 P L \quad (1.2)$$



**Figure 1.2:** Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de *Chézy*.

Nous avons déjà indiqué que l'écoulement uniforme s'établit lorsque les forces de gravité sont équilibrées par les forces de résistance  $F_r$ . La quantité  $(W \sin \theta)$ , représentée sur la figure 1.2, correspond à la composante tangentielle du poids propre  $W$  du liquide. C'est cette composante qui intervient dans l'écoulement et qui doit être équilibrée par la force  $F_r$ . Le poids propre  $W$  peut s'écrire  $W = \rho g A L$  où  $\rho$  est la masse volumique du liquide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Le produit  $(A L)$  désigne le volume de liquide sur toute la longueur  $L$  considérée. Ainsi, nous pouvons écrire  $\rho g A L \sin \theta = K V^2 P L$ , soit :

En désignant par  $C^2 = (\rho g / K)$  et par  $J = \sin \theta$ , il vient que :

$$V = C R_h^{1/2} J^{1/2} \quad (1.3)$$

Comme l'exige la relation (1.3), le coefficient  $C$  de Chézy doit avoir pour unité  $[L^{1/2} T^{-1}]$ . Plusieurs relations ont été proposées au calcul du coefficient  $C$  et nous verrons dans ce qui suit les plus importantes d'entre elles.

### I.2.1. Détermination du coefficient $C$ de Chézy par la formule de Ganguillet – Kutter.

La formule de Ganguillet – Kutter (1869) exprime le coefficient  $C$  de Chézy en fonction de la pente  $J$  ou  $i$  du canal, du rayon hydraulique  $R_h$  et du coefficient de rugosité  $n$ . Elle a été élaborée à partir de mesures expérimentales effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.4)$$

Le coefficient  $n$  de la relation (1.4) est connu sous le nom de " coefficient  $n$  de Kutter ". Bien que la relation (1.4) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente  $J$ , afin de simplifier la forme de l'équation. On peut en effet s'apercevoir que le terme  $0,00155/J$  n'a pas d'effet significatif sur la valeur du coefficient  $C$ , pour une même valeur du coefficient de rugosité  $n$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . A titre indicatif, pour  $n = 0,01$  et  $R_h = 1,20$  m,  $C$  ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de  $J$  :  $102 \leq C \leq 103$  lorsque  $0,00005 \leq J \leq 0,01$ .

### I.2.2. Détermination du coefficient $C$ de Chézy par la formule de Bazin

Bazin (1897) considère que la valeur du coefficient  $C$  de Chézy dépend du rayon hydraulique  $R_h$  mais ne dépend pas de la pente  $J$  du canal. Le coefficient  $C$  peut alors être déterminé par la relation :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.5)$$

$m$  est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. Les valeurs de  $m$  sont sans commune mesure avec celles qui correspondent au coefficient de rugosité  $n$  figurant dans la relation (1.4) de Ganguillet – Kutter et ceci pour le même matériau. A titre indicatif, pour le cas d'un canal fabriqué en ciment lisse, les tables de valeurs indiquent que  $n = 0,01$  et  $m = 0,11$ .

La formule de *Bazin* a été développée à l'origine pour de petits canaux, si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

### I.2.3. Détermination du coefficient $C$ de *Chézy* par la formule de *Powell*

*Powell* (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient  $C$  de *Chézy*, mais elle se présente sous une forme implicite :

$$C = -23,2 \log \left( \frac{1,811C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.6)$$

" log " désigne le logarithme décimal,  $R$  est le nombre de *Reynolds*,  $\varepsilon$  est la rugosité absolue des parois du canal. A l'origine, la formule de *Powell* a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (1.6) sont alors différentes et beaucoup plus simples :

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.7)$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds*. Le terme  $C/(4R) \rightarrow 0$  et la relation (1.7) devient :

$$C = -42 \log \left( \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.8)$$

Par contre, pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est tellement faible que la relation (1.7) peut s'écrire :

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R} \right) \quad (1.9)$$

### I.3. Formule de *Manning-Strickler*

La vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de *Manning* (1891). La vitesse  $V$  est liée au coefficient  $C$  de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique  $R_h$  et à la pente  $J$  du canal. A l'origine, la formule de *Manning – Strickler* se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour s'écrire, avec  $C = k$  :

$$V = k R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.10)$$

La relation (1.10) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.11)$$

( $n$  selon *Manning* et  $1/n = k$  selon *Strickler*).

La conversion en unité anglaise de la relation (1.10) donne :

$$V = \frac{1,486}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.12)$$

Dans cette conversion, la valeur numérique du coefficient de rugosité  $n$  reste inchangée et la même valeur est utilisée dans les deux systèmes d'unité. Comme l'exige la forme de la relation (1.10), le coefficient  $n$  doit avoir pour dimension  $[TL^{-1/3}]$ . Cependant, il paraît physiquement injustifié que la dimension de temps  $T$  puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisqu'elle celle-ci ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs énoncent que le numérateur de la relation (1.10) devrait contenir le terme  $\sqrt{g}$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur, ce qui conduirait à donner à  $n$  la dimension  $[L^{1/6}]$ . En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité  $n$  pouvait s'écrire :

$$n = [\phi(R_h / \varepsilon)] \varepsilon^{1/6} \quad (1.13)$$

où  $\varepsilon$  est la rugosité absolue. Si la fonction  $\phi(R_h / \varepsilon)$  doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité  $n$  doit alors avoir la même dimension que  $\varepsilon^{1/6}$ , c'est à dire  $[L^{1/6}]$ . *Hager* (1989) a pu montrer que la rugosité absolue  $\varepsilon$  et le coefficient  $k$  de Strickler sont liés par la relation :

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{g}} = 1 \quad (1.14)$$

D'autre part, il est également possible d'admettre que le terme  $1,486/n$  figurant dans la relation (1.12) puisse contenir de manière implicite la dimension  $[L^{1/3} T^{-1}]$ , ou que  $\phi(R_h / \varepsilon)$  contienne un facteur ayant une dimension. Ceci rendrait alors le coefficient  $n$  adimensionnel. Sous cette dernière condition, la conversion en unité anglaise conduit à la constante  $(3,2808)^{1/3} = 1,486$ , puisque  $1\text{m} = 3,2808\text{ft}$ .

Si l'on considère que la dimension de  $n$  est  $[L^{1/6}]$ , sa valeur numérique en unité anglaise doit être différente de sa valeur en unité métrique, à moins de tenir compte d'un facteur de correction ou de compensation.

Si  $n$  est la valeur du coefficient de rugosité en unité métrique et  $n'$  en unité anglaise, on peut écrire alors  $n' = (3,2808)^{1/6} n = 1,219 n$ . Lorsque la formule de *Manning* subit la conversion de l'unité métrique vers l'unité anglaise, la constante figurant dans l'expression qui en résulte est égale à

$$(3,2808)^{1/3 + 1/6} = \sqrt{3,2808} = 1,811 \text{ et la dimension de } n \text{ est alors } [L^{1/6}].$$

En raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, la formule de *Manning – Strickler* est celle qui est largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de  $n$  de *Manning* et  $n$  de *Kutter* sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant la formule de *Manning – Strickler*, exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy*, on peut écrire  $C = (1/n)R_h^{1/6}$ . Ainsi, la formule de *Manning – Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

De nombreuses études dont celle de *Bazin*, et qui concernent les canaux artificiels, ont montré que l'exposant de  $R_h$  ne serait pas égal à 2/3 comme le suggère *Manning*, mais sa valeur moyenne varie entre 0,6499 et 0,8395 suivant la forme du canal et la rugosité de celui-ci. Des études telle que ( ) suggère de prendre la valeur 3/4 pour l'exposant de  $R_h$ , tandis que *Blench* (1939) considère le coefficient  $C$  comme une variable qui dépend non seulement de  $n$  mais aussi de  $R_h$  et dont l'exposant dépend à son tour de  $n$  et de  $R_h$  ; c'est la formule dite de *Pavlovski* (1940) qui s'exprime, en unité métrique, par :

$$C = (1/n) R_h^y \tag{1.15}$$

$$\text{où } y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 0,10).$$

La relation (1.15) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour  $n$  compris entre 0,011 et 0,04. Des relations approchées au calcul de l'exposant  $y$  ont été également proposées :  $y = 1,5\sqrt{n}$  pour  $R_h < 1$  m et  $y = 1,3\sqrt{n}$  pour  $R_h > 1$  m.

L'application de la formule de *Manning – Strickler*, comme celle d'ailleurs de *Ganguillet – Kutter* est tributaire de la valeur du coefficient  $n$ . Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer  $n$ . Évaluer  $n$  revient à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. En se référant à la bibliographie, plusieurs auteurs concluent que pour estimer  $n$  les étapes suivantes sont nécessaires :

1. Recenser puis apprécier l'influence des paramètres pouvant affecter le coefficient  $n$ , tels que la présence de végétation dans le canal, la dimension moyenne des grains du matériaux constituant les parois du canal, l'irrégularité du canal due à la présence de courbures ou de variation même réduite de la section transversale de l'écoulement, etc...
2. Consulter les tables de valeurs de  $n$  déjà évalué pour des canaux de différents types.
3. Examiner et s'informer de l'état physique caractérisant des canaux existants et dont la valeur de  $n$  a

déjà été déterminée.

4. Déterminer la valeur de  $n$  par une approche analytique basée sur la répartition théorique de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement.

#### 1.4. Formule de *Darcy – Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement

La formule de *Darcy – Weisbach* exprime la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge  $J$ , la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement et le diamètre hydraulique  $D_h = 4A/P = 4R_h$ . Le facteur de proportionnalité étant le coefficient de frottement  $f$ . Le gradient  $J$  est inversement proportionnel à  $D_h$  et proportionnel au carré de la vitesse  $V$  :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.16)$$

La formule (1.16) est aussi bien valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées.

Le coefficient de frottement  $f$  peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

La formule de *Colebrook – White* permet d'évaluer le coefficient de frottement  $f$  lorsque l'écoulement est en régimes de transition, turbulent rugueux et lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) , R > 2300 \quad (1.17)$$

Dans le cas où le régime d'écoulement est de transition, le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon / D_h$  et du nombre de *Reynolds*  $R$ . La représentation graphique de la relation (1.17) dans un système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques montre que, pour la même valeur de  $\varepsilon / D_h$ , le coefficient de frottement  $f$  diminue lorsque  $R$  augmente. Pour des valeurs données de  $\varepsilon / D_h$  et de  $R$ , l'évaluation du coefficient de frottement  $f$ , par application de la relation (1.17), nécessite un procédé itératif. Une excellente relation approchée de (1.17) a été proposée par *Achour* (*Achour*, 2007):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.18)$$

A partir d'une valeur  $R = R_{lim}$  dépendant de la valeur de  $\varepsilon / D_h$ , le coefficient de frottement demeure pratiquement inchangé avec l'augmentation de  $R$ . Cette particularité caractérise la nature de l'écoulement dans la zone de pleine turbulence ou domaine rugueux. Dans ce domaine, le coefficient de frottement  $f$  peut être évalué par la relation explicite de *Nikuradse* :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} \right) \quad (1.19)$$

La relation (1.19) peut être obtenue à partir des relations (1.17) ou (1.18), en écrivant que  $R \rightarrow \infty$ .

Dans le domaine pratiquement lisse correspondant à  $\varepsilon / D_h \rightarrow 0$ , la relation (1.17) mène à écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (1.20)$$

et l'évaluation de  $f$  nécessite également un procédé itératif. Dans le même domaine d'écoulement, ce procédé itératif peut être évité par l'application de la relation (1.18) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.21)$$

Dans la large gamme  $2,35 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^9$ , l'application de la relation (1.21) occasionne un écart relatif inférieur à 0,7% par rapport à (1.20).

La formule de *Swamee* et *Jain* (1976) permet également d'évaluer de manière explicite le coefficient  $f$  dans le domaine pratiquement lisse :

$$f = \left[ 2 \log \left( \frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.22)$$

Mais, dans la même gamme de valeurs ci-dessus indiquée de  $R$ , l'application de (1.22) occasionne un écart relatif atteignant 2,8% par rapport à (1.20). Dans une gamme plus restreinte de  $R$  telle que  $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$ , cet écart se réduit mais atteint tout de même 1,5%.

En comparant les relations (1.1) et (1.16), on peut montrer que le coefficient  $C$  de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement  $f$  :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.23)$$

## 1.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme

### 1.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme

La distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent demeure quasi uniforme lorsque la couche limite est pleinement développée, et suit approximativement une loi logarithmique. La contrainte de cisaillement ou tangentielle en n'importe quel point de l'écoulement turbulent se produisant au-dessus d'une paroi solide est donnée par la relation de *Prandtl* (1926) :

$$\tau = \rho l^2 (dv/dy)^2 \quad (1.24)$$

$\rho$  est la masse volumique du liquide en écoulement,  $l$  est une longueur caractéristique dite longueur de mélange,  $dv/dy$  est le gradient de vitesse à la hauteur  $y$  de la paroi solide et normale à celle-ci. La longueur de mélange peut être interprétée comme étant la longueur au-delà de laquelle la particule liquide voit sa quantité de mouvement diminuer.

Dans la région proche de la paroi solide, *Prandtl* utilise deux approches:

1. La longueur de mélange est proportionnelle à  $y$ , soit  $l = Ky$  où  $K$  est le facteur de proportionnalité entre  $l$  et  $y$  et dont la valeur a été estimée à 0,40 environ.
2. La contrainte tangentielle est constante.

Puisque la contrainte tangentielle à la surface est égale à la force tractrice unitaire  $\tau_0$ , la constance de la contrainte tangentielle implique que  $\tau = \tau_0$ . La relation (1.16) devient :

$$dv = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{dy}{y} \quad (1.25)$$

L'intégration de la relation (1.25) mène à :

$$v = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (1.26)$$

"  $\operatorname{Ln}$  " désigne le logarithme népérien et  $y_0$  représente la constante d'intégration. La force tractrice  $\tau_0$  s'exprime par la relation  $\tau_0 = (\varpi R_h J)$  où  $\varpi = \rho g$  est le poids spécifique du liquide et  $J$  est la pente du canal. On peut alors écrire que  $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_h J} = v_f$ , où  $v_f$  a la dimension d'une vitesse et elle est connue

sous le nom de vitesse de frottement. La relation (1.26) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{y}{y_o} \quad (1.27)$$

La relation (1.27) indique que la vitesse dans un écoulement turbulent est une fonction logarithmique de la distance  $y$ . Elle est connue sous le nom de loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses. Cette loi a été vérifiée par plusieurs expériences et les résultats ont montré une remarquable similitude entre la distribution des vitesses observée expérimentalement et celle issue de la théorie. Lorsque la surface solide est lisse, la constante  $y_o$  ne dépend que de la vitesse de frottement  $v_f$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide :

$$y_o = m_o \frac{\nu}{v_f} \quad (1.28)$$

$m_o$  est une constante égale à 1/9 lorsque la surface solide est lisse. Cette constante a été déduite des essais de *Nikuradse* concernant les conduites lisses. La combinaison des relations (1.27) et (1.28) donne ainsi, pour les surfaces lisses, la répartition de la vitesse dans un écoulement turbulent :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{9y v_f}{\nu} \quad (1.29)$$

Lorsque la surface est rugueuse, la constante  $y_o$  dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$  :

$$y_o \approx m_o \varepsilon \quad (1.30)$$

La constante  $m_o$  est approximativement égale à 1/30.

La relation (1.27) devient alors :

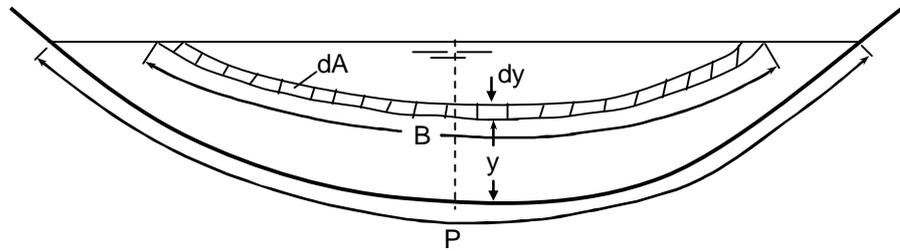
$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{30y}{\varepsilon} \quad (1.31)$$

### 1.5.2. Équation de *Keulegan*

En utilisant la loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses, *Keulegan* (1938) aboutit à des équations donnant la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent dans les canaux ouverts par une approche théorique simple. En se basant sur l'équation de continuité, le débit volume  $Q$  passant par une section quelconque de l'écoulement peut s'écrire :

$$Q = VA = \int_{\delta_o=0}^{y=h} v B dy \quad (1.32)$$

$V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $h$  est la profondeur,  $A$  est l'aire de la section mouillée,  $B$  est la longueur de la courbe d'égale vitesse (figure 1.3) et  $y$  est la profondeur verticale comptée à partir de la surface jusqu'à la courbe d'égale vitesse. la sous - couche laminaire d'épaisseur  $\delta_0$  est considérée comme étant très mince ( $\delta_0 = 0$ ).



**Figure 1.3 :** Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de *Keulegan*.

Le maximum de vitesse est supposé être à la surface et que la longueur  $B$  est proportionnelle à la distance  $y$  ; ceci permet d'écrire :

$$B = P - \gamma y \quad (1.33)$$

$P$  est le périmètre mouillé de la surface considérée et  $\gamma$  est une fonction dépendant de la forme de la section. Ainsi, l'aire de la section mouillée  $A$  est :

$$A = \int_0^h B dy = Ph - \frac{1}{2} \gamma h^2 \quad (1.34)$$

La combinaison des relations (1.27), (1.32), (1.33) et (1.34) permet d'écrire, après intégration :

$$V = v_f \left[ 5,75 \log \left[ \frac{h}{m_o R_h} \exp \left( -1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right] + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.35)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (1.35) est une fonction de la forme de la section du canal considéré. Cependant, la variation que subit ce terme pour différentes formes de canaux est relativement faible et il a été remplacé par une constante désignée par  $A_0$ . La relation (1.35) prend alors une forme plus simplifiée et s'écrit :

$$V = v_f \left[ A_0 + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.36)$$

La relation (1.36) représente l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts.

Pour les canaux à parois lisses, l'étude de *Keulegan*, basée sur les valeurs expérimentales de *Nikuradse*, montre que  $A_0 \approx 3,25$ . Ainsi, l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois lisses est, en tenant compte de (1.28):

$$V = v_f \left[ 3,25 + 5,75 \log \left( \frac{R_h v_f}{\nu} \right) \right] \quad (1.37)$$

En ce qui concerne les canaux ouverts à parois rugueuses, *Keulegan* montre, après avoir analysé les mesures de *Bazin*, que la constante  $A_0$  varie dans une large gamme, en fonction de la forme de la section du canal ( $3,23 \leq A_0 \leq 16,92$ ), et la valeur moyenne  $A_0 = 6,25$  est alors adoptée. Ainsi, l'expression théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois rugueuses est, en tenant compte de (1.30):

$$V = v_f \left[ 6,25 + 5,75 \log \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \right] \quad (1.38)$$

En combinant les expressions  $V = C \sqrt{R_h J}$  de *Chézy* (relation 1.1) et  $\sqrt{g R_h J} = v_f$  de la vitesse de frottement, on peut écrire :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (1.39)$$

ou bien, en faisant appel à (1.23):

$$\frac{V}{v_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{f}} \quad (1.40)$$

En tenant compte de (1.39) et de la définition du nombre de *Reynolds* modifié tel que  $R = VR_h/\nu$ , les relations (1.37) et (1.38) permettent d'exprimer les coefficients  $C$  et  $f$ , respectivement pour un canal à parois lisses et rugueuses :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 3,25 + 5,75 \log \left( \frac{R \sqrt{g}}{C} \right) \quad (1.41)$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 6,25 + 5,75 \log\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right) \quad (1.42)$$

ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,231 + 2,033 \log(R\sqrt{f}) \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,210 + 2,033 \log\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right) \quad (1.44)$$

## I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de *Manning*

En éliminant le coefficient  $C$  de *Chézy* entre les relations  $C = (1/n)R_h^{1/6}$  et (1.42), le coefficient  $n$  de *Manning* s'écrit :

$$n = \varepsilon^{1/6} \phi(R_h / \varepsilon) \quad (1.45)$$

avec :

$$\phi(R_h / \varepsilon) = \frac{\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right)^{1/6}}{\sqrt{g} \left[ 6,25 + 5,75 \log \frac{R_h}{\varepsilon} \right]} \quad (1.46)$$

La représentation graphique de (1.46), pour une large gamme de valeurs de la rugosité relative  $(R_h / \varepsilon)$ , se traduit par une courbe plate presque horizontale. La fonction  $\phi(R_h / \varepsilon)$  peut alors être remplacée par une constante dont la valeur est approximativement égale à 0,0342.

Si l'on admet que la fonction  $\phi(R_h / \varepsilon)$  est constante, la relation (1.45) indique alors que le coefficient  $n$  de *Manning* varie en fonction de la puissance 1/6 de la rugosité absolue  $\varepsilon$ . En d'autres termes, lorsque  $\varepsilon$  subit une variation de 1/1000 ème, le coefficient  $n$  ne varie que de 1/3 environ. Ainsi,  $\varepsilon$  est donc plus sensible que le coefficient  $n$ . En conséquence, l'application de la relation (1.45) n'entraîne qu'une erreur relativement faible sur le calcul du coefficient  $n$ .

L'étude comparative de *Bakhmeteff* et *Feodoroff* (1943) entre les formules de *Manning*, de *Ganguillet – Kutter* et de *Prandtl – Von – Karman* mise sous une forme identique à celle de la relation (1.45), montre que la formule de *Manning* est la plus adaptée.

## I.7. Méthode de détermination du coefficient de *Manning*

Deux méthodes de détermination du coefficient  $n$  de *Manning*, basées sur la répartition théorique des vitesses dans un canal à parois rugueuses, ont été développées. La première méthode, dite méthode liée à la mesure de la rugosité, admet la validité de la relation (1.46). Ainsi, la valeur de  $n$  peut être calculée en application de (1.45) pour la valeur connue de la rugosité absolue  $\varepsilon$ .

La seconde méthode est dite méthode liée à la mesure de la vitesse. En se référant à la loi logarithmique de la répartition de la vitesse exprimée par (1.31), on peut s'apercevoir que cette répartition dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$  liée au coefficient  $n$  de *Manning* par la relation (1.45). En d'autres termes, la rugosité dans le sens du coefficient  $n$  de *Manning* peut être considérée comme le facteur prédominant affectant la répartition de la vitesse. Si celle-ci était connue, le coefficient  $n$  de *Manning* peut alors être évalué.

On définit  $V_{0,2}$  la vitesse aux deux dixièmes de la profondeur ou à la distance  $0,8y$  comptée à partir du fond du canal de grande largeur et à parois rugueuses;  $y$  représente la profondeur de l'écoulement. En vertu de la relation (1.31), on peut écrire:

$$V_{0,2} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left( \frac{24y}{\varepsilon} \right) \quad (1.47)$$

$$V_{0,8} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left( \frac{6y}{\varepsilon} \right) \quad (1.48)$$

En éliminant la vitesse  $v_f$  entre les relations (1.47) et (1.48), on peut écrire en posant  $X = V_{0,2}/V_{0,8}$  :

$$(1 - X) \operatorname{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = X \operatorname{Ln} 6 - \operatorname{Ln} 24$$

ou bien :

$$\operatorname{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = \frac{1,792 X - 3,178}{1 - X} \quad (1.49)$$

L'équation (1.38), qui exprime la vitesse moyenne de l'écoulement dans un canal à parois rugueuses, devient alors pour un canal de grande largeur ( $R_h = y$ ):

$$\frac{V}{v_f} = \frac{1,775 X + 1,686}{X - 1} \quad (1.50)$$

En outre, la combinaison des relations  $C = (1/n)R_h^{1/6}$  et (1.38), pour  $R_h = y$ , donne :

$$\frac{V}{V_f} = \frac{y^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (1.51)$$

Ainsi, le coefficient  $n$  de *Manning* peut être évalué à partir de l'égalité des relations (1.50) et (1.51), soit :

$$n = \frac{y^{1/6} (X - 1)}{1,775\sqrt{g} (X + 0,95)} \quad (1.52)$$

La relation (1.52) permet ainsi d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning* pour le cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique.

## I.8. Calcul de l'écoulement uniforme

### I.8.1. Conductivité

Le débit volume  $Q$  de l'écoulement uniforme dans une conduite ou un canal s'exprime par le produit de la vitesse moyenne  $V$  et l'aire de la section mouillée  $A$  :

$$Q = VA = CAR_h^\beta J^\gamma \quad (1.53)$$

La relation (1.53) peut aussi s'écrire :

$$Q = KJ^\gamma \quad (1.54)$$

où :

$$K = CAR_h^\beta \quad (1.55)$$

Le facteur  $K$  est connu sous le terme de conductivité de la conduite ou du canal. Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que  $K$  est directement lié au débit volume  $Q$ .

Lorsque l'une des relations de *Chézy* ou de *Manning* est utilisée, correspondant à  $\gamma = 1/2$ , la relation (1.54) permet alors de déduire que la conductivité est :

$$K = Q / \sqrt{J} \quad (1.56)$$

La relation (1.56) peut être utilisée pour calculer la conductivité  $K$  lorsque le débit volume  $Q$  et la pente  $J$  sont donnés.

Lorsque la formule de *Chézy* est utilisée, correspondant à  $\gamma = 1/2$ , l'équation (1.55) devient :

$$K = CAR_h^{1/2} \quad (1.57)$$

$C$  est le coefficient de résistance de *Chézy*.

Lorsque la relation de *Manning* est utilisée, la conductivité  $K$  s'écrit :

$$K = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \quad (1.58)$$

Les relations (1.57) et (1.58) peuvent être utilisées pour calculer la conductivité  $K$ , lorsque la géométrie de la section ainsi que le coefficient de résistance sont connus.

### I.8.2. Facteur de section

L'expression  $AR_h^{2/3}$  est appelée facteur de section au calcul de l'écoulement uniforme. Selon la relation (1.58), nous pouvons écrire :

$$AR_h^{2/3} = nK \quad (1.59)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.56) :

$$AR_h^{2/3} = \frac{nQ}{\sqrt{J}} \quad (1.60)$$

Le second terme de la relation (1.60) contient les paramètres  $n$ ,  $Q$  et  $J$ , alors que le premier terme dépend de la géométrie de la section mouillée de la conduite ou du canal considéré. Pour les valeurs données de  $n$ ,  $Q$  et  $J$ , il n'existe qu'une profondeur possible pour maintenir l'écoulement uniforme, à condition toutefois que  $AR_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur. Cette profondeur est la profondeur normale.

Lorsque  $n$  et  $J$  sont connus, la relation (1.60) donne un seul débit pour maintenir l'écoulement uniforme dans la section considérée de la conduite ou du canal, à condition toutefois que  $AR_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur. Ce débit est appelé débit normal.

Notons que dans le cas le plus général, la quantité  $AR_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Dans ce cas,  $AR_h^{2/3}$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. La valeur maximale de  $AR_h^{2/3}$  est atteinte à une profondeur légèrement inférieure à la profondeur

de pleine section. En conséquence, il est possible d'avoir deux profondeurs pour la même valeur de  $AR_h^{2/3}$  ; une profondeur inférieure et l'autre supérieure à la profondeur correspondant au maximum de  $AR_h^{2/3}$ .

La relation (1.60) peut être très utile pour l'analyse et le calcul de l'écoulement uniforme. Lorsque le débit volume  $Q$ , la pente  $J$  et  $n$  sont connus, cette relation donne la valeur du facteur de section  $A_n R_{h,n}^{2/3}$ , où l'indice  $n$  désigne l'écoulement normal, et par suite la profondeur normale  $y_n$ . D'autre part, lorsque  $n$ ,  $J$  et  $y_n$  sont donnés, la relation (1.60) permet de calculer le débit volume normal  $Q_n$ .

Dans le but de simplifier le calcul, des courbes adimensionnelles ont été tracées pour le cas de la conduite de forme circulaire en particulier, montrant la relation entre la profondeur et le facteur de section  $AR_h^{2/3}$ . Ces courbes sont un moyen de détermination de la profondeur pour un facteur de section  $AR_h^{2/3}$  donné et vice-versa.

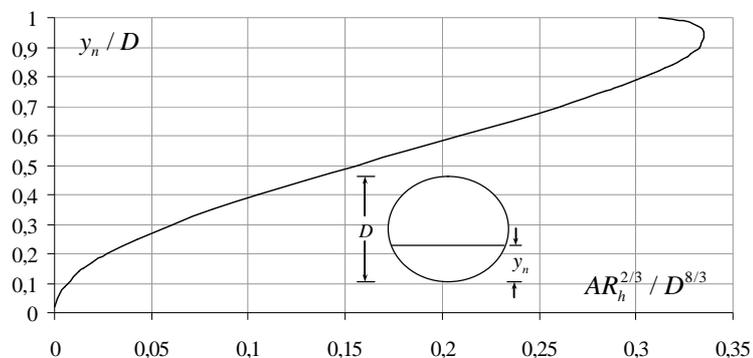
Pour le cas de la conduite de forme circulaire de diamètre  $D$ , le tableau de valeurs suivant a été dressé (Chow, 1973) et a permis le tracé de la courbe de la figure 1.4.

**Tableau 1.1** : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)

$y_n / D$	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,01	0,0000
0,02	0,0002
0,03	0,0005
0,04	0,0009
0,05	0,0015
0,06	0,0022
0,07	0,0031
0,08	0,0040
0,09	0,0052
0,10	0,0065
0,11	0,0079
0,12	0,0095
0,13	0,0113
0,14	0,0131
0,15	0,0152
0,16	0,0173
0,17	0,0196
0,18	0,0220
0,19	0,0247
0,20	0,0273
0,21	0,0301
0,22	0,0333
0,23	0,0359
0,24	0,0394
0,25	0,0427

**Tableau 1.1 (Suite) :** Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)

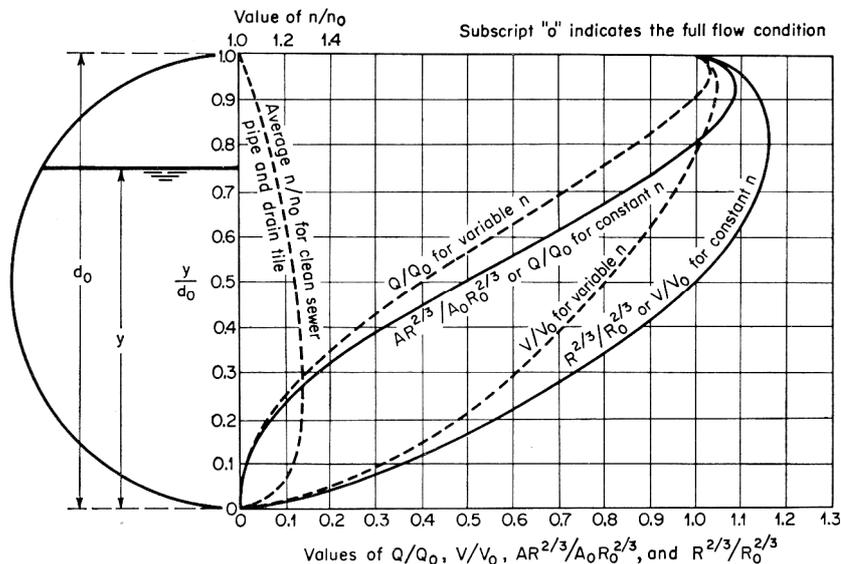
$y_n / D$	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,26	0,0464
0,27	0,0497
0,28	0,0536
0,29	0,0571
0,30	0,0610
0,31	0,0650
0,32	0,0690
0,33	0,0736
0,34	0,0776
0,35	0,0820
0,36	0,0864
0,37	0,0909
0,38	0,0955
0,39	0,1020
0,40	0,1050
0,41	0,1100
0,42	0,1147
0,43	0,1196
0,44	0,1245
0,45	0,1298
0,46	0,1348
0,47	0,1401
0,48	0,1452
0,49	0,1505
0,50	0,1558
0,55	0,1825
0,60	0,2092
0,65	0,2358
0,70	0,2608
0,75	0,2840
0,80	0,3045
0,85	0,3212
0,90	0,3324
0,95	0,3349
1,00	0,3117



**Figure 1.4 :** Facteur de section relatif en fonction de la profondeur normale relative pour le cas de la conduite de forme circulaire. Courbe tracée selon les valeurs du tableau 1.1.

### I.8.3. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire

En prenant pour exemple la conduite circulaire, les courbes adimensionnelles pour les quantités  $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$  et  $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$ , où l'indice « o » est relatif à l'état plein de la conduite, sont représentées sur la figure 1.5 (Camp, 1946).



**Figure 1.5 :** Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire selon Camp (1946).

Si la valeur du coefficient  $n$  de Manning est considéré comme une constante ou indépendant de la variation de la profondeur, les deux courbes  $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$  et  $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$  représentent respectivement la variation du rapport  $Q / Q_o$  et  $V / V_o$ . Les deux courbes, en trait plein, montre des valeurs maximales qui s'obtiennent à environ  $0,938d_o$  et  $0,81d_o$  respectivement. D'un point de vue mathématique, la profondeur correspondant au débit maximum, soit  $0,938d_o$ , peut être simplement obtenue en égalant à zéro la dérivée première de  $AR_h^{2/3}$  par rapport à la profondeur  $y$ , puisque le débit volume  $Q$ , calculé par la formule de Manning, est proportionnel à  $AR_h^{2/3}$  pour  $n$  et  $J$  constants. Parallèlement, puisque la vitesse moyenne  $V$ , selon la formule de Manning, est proportionnelle à  $R_h^{2/3}$ , la profondeur correspondant au maximum de la vitesse, soit  $0,81d_o$ , peut être obtenue en égalant à zéro la dérivée première de  $R_h^{2/3}$  par rapport à la profondeur  $y$ .

En outre, la courbe adimensionnelle  $Q / Q_o$  de la figure 1.5 montre que, lorsque la profondeur est environ plus grande que  $0,82d_o$ , il est possible d'avoir deux profondeurs différentes pour le même débit volume ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur  $0,938d_o$ .

En outre, la courbe  $V/V_0$  montre que, lorsque la profondeur est plus grande que  $y/d_0 = 1/2$ , il est possible d'avoir deux profondeurs différentes pour la même vitesse ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur  $0,81d_0$ .

Toutes ces remarques restent valables tant que le coefficient de résistance est supposé être constant, même si la profondeur varie. Il a été cependant constaté (figure 1.5) que le coefficient de résistance augmente de plus de 28% de  $1,00 d_0$  à  $0,25d_0$  où il apparaît clairement admette un maximum. Cette variation du coefficient de résistance fait que le maximum de débit et de vitesse apparaît à environ  $0,97d_0$  et  $0,94d_0$  respectivement. Les courbes correspondantes de  $Q/Q_0$  et de  $V/V_0$  ont été représentées en trait discontinu sur la figure 1.5.

En considérant comme étant constant le coefficient de résistance  $n$ , la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même que celle de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine que celle de l'écoulement à pleine section. Par contre, si l'on considère que  $n$  varie en fonction de la profondeur, comme il est indiqué sur la figure 1.5, alors la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

## I.9. Conclusion

Le chapitre précédent a eu pour objectif de passer en revue les principaux résultats connus sur l'écoulement uniforme. Nous avons précisé les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme dont les caractéristiques ont été représentées sur la figure 1.1, en comparant la pente du canal à la pente critique.

A partir d'un schéma de définition, nous avons montré les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, ce qui a conduit à la démonstration de la formule universellement connue de *Chézy*. Nous avons montré que le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* est tel que  $C = \sqrt{\rho g / K}$ , où  $\rho$  est la masse volumique du liquide en écoulement,  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $K$  est un facteur de proportionnalité intervenant dans l'expression de la force de résistance à l'écoulement (Relation 1.2). Nous avons présenté trois relations permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*. La première relation est celle de *Ganguillet – Kutter* dans laquelle le coefficient  $C$  est tel que  $C(J, R_h, n)$ , où  $J$  est la pente de la ligne de charge totale égale à la pente géométrique du canal,  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $n$  est le coefficient de rugosité. La seconde relation est celle de *Bazin* dans laquelle le coefficient  $C$  est tel que  $C(R_h, m)$ , où  $m$  est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal

considéré. La troisième relation est celle de *Powell*. Elle exprime de manière implicite le coefficient  $C$  en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal.

Nous avons présenté la formule de *Manning* ou de *Manning-Strickler* qui exprime la vitesse moyenne du liquide en écoulement. Le coefficient  $n$  selon *Manning* et  $1/n = k$  selon *Strickler*) a été discuté et son unité a été précisée. Le coefficient  $k$  est lié à la rugosité absolue  $\varepsilon$  par la relation de *Hager*. Nous avons surtout précisé qu'il n'existe aucune méthode analytique d'évaluation du coefficient  $n$  de *Manning*, à l'exception du cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique. Le coefficient  $n$  est alors donné par la relation (1.52), après avoir déterminé les vitesses  $V_{0,2}$  et  $V_{0,8}$ . Pour l'évaluation pratique du coefficient  $n$ , nous avons présenté les étapes à suivre, préconisées par certains auteurs.

La relation de *Darcy-Weisbach* a été présentée (Relation 1.16). Elle exprime la pente de la ligne de charge totale comme étant un paramètre inversement proportionnel au diamètre hydraulique et directement proportionnel à la hauteur capable de la vitesse de l'écoulement. Le facteur de proportionnalité est représenté par le coefficient  $f$ , appelé coefficient de frottement. Celui-ci peut être évalué par la relation de *Colebrook-White* en s'appuyant sur un procédé itératif. Des relations explicites au calcul de  $f$  ont été proposées par certains auteurs, tels que *Achour* et *Swamee*.

Le chapitre a été achevé par le calcul de l'écoulement uniforme qui intéresse notre étude. Nous avons rappelé la notion de conductivité qui est représentée par le facteur  $K$ . Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que  $K$  est directement lié au débit volume  $Q$  (Relation 1.56). Nous avons également rappelé la notion de facteur de section dont l'importance est capitale dans le calcul de l'écoulement uniforme. Le facteur de section est représenté par la quantité  $AR_h^{2/3}$  et dépend, par conséquent, de la géométrie de la section de la conduite ou du canal considéré. Nous avons indiqué que dans le cas le plus général, la quantité  $AR_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Pour ce type de conduites fermées, le facteur de section  $AR_h^{2/3}$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. Cette particularité a été illustrée sur la courbe adimensionnelle de la figure 1.4.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* (Figure 1.5) ont permis l'analyse des caractéristiques de l'écoulement dans une conduite de forme circulaire. Le facteur de section, rapporté à celui de la conduite pleine, a été représenté en fonction du paramètre de forme de la section pour les cas d'un coefficient de *Manning* supposé constant et dépendant de la variation de la profondeur. Dans le premier cas, la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même que celle de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine que celle de l'écoulement à pleine section. Par contre, dans le second cas, la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* ont pu mettre en évidence la nature variable du coefficient de *n* de *Manning* et son incidence sur les valeurs maximales du débit volume  $Q$  et de la vitesse moyenne  $V$ .

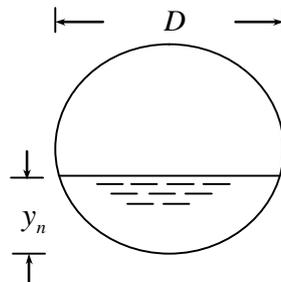
Au cours de paragraphes suivants de notre étude, nous allons examiner dans le détail l'écoulement uniforme dans les conduites de formes circulaire et en fer à cheval. Ce sont des ouvrages largement utilisées dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Une étude particulière de l'écoulement uniforme est présentée dans les cas des coefficients de *Chézy* et de *Manning* constants et variables en fonction de la profondeur. Des relations simples et explicites sont présentées pour le dimensionnement de telles conduites d'une part, et pour le calcul de la profondeur normale d'autre part. La méthode de la MMR (*Achour, 2007*) a pu nous mener à des relations fiables destinées à l'évaluation explicite des coefficients de *Chézy* et de *Manning*. De nombreux exemples d'applications sont présentés pour mieux illustrer la méthode préconisée.

## II. ECOULEMENT UNIFORME DANS UNE CONDUITE DE FORME CIRCULAIRE

### II.1. Introduction

L'écoulement uniforme en conduite circulaire se rencontre souvent dans de nombreux cas pratiques. La conduite circulaire est utilisée pour l'évacuation des eaux dans les domaines de l'assainissement et de l'aménagement. La figure 2.1 schématise l'écoulement uniforme de profondeur normale  $y_n$  dans une conduite circulaire de diamètre interne  $D$ .

Afin de définir la géométrie de l'écoulement dans une conduite circulaire partiellement occupée, il a été introduit le paramètre  $\eta = y_n / D$ , appelé paramètre de forme de la section mouillée. A titre d'exemple, la valeur  $\eta = 0,5$  indique que l'écoulement occupe la moitié de l'aire de la conduite, tandis que la valeur  $\eta = 1$  signifie que la conduite est entièrement remplie par l'écoulement. Le paramètre de forme  $\eta$  est souvent désigné sous le terme de taux de remplissage de la conduite.



**Figure 2.1** : Schéma de définition de l'écoulement uniforme en conduite circulaire

L'écoulement uniforme à surface libre dans les conduites et canaux artificiels est régi par cinq paramètres :

- Le débit volume  $Q$ .
- La dimension linéaire caractérisant la géométrie du canal. Dans le cas de la conduite circulaire qui intéresse notre étude, qu'elle soit partiellement occupée par l'écoulement ou en charge, cette dimension correspond au diamètre  $D$ .
- La pente longitudinale  $i$  du canal.
- La rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant l'état de la paroi interne du canal.
- La viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement.

La bibliographie montre que l'écoulement uniforme est souvent abordé en ayant recours aux formules usuelles telles que celle de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*. Celles-ci expriment le débit volume  $Q$  et s'écrivent respectivement :

$$Q = CA\sqrt{R_h} i \quad (2.1)$$

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.2)$$

Dans les relations (2.1) et (2.2), les paramètres  $C$ ,  $n$ ,  $A$  et  $R_h$  désignent respectivement le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Manning*, l'aire de la section mouillée de l'écoulement et le rayon hydraulique.

Les valeurs des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* sont, en règle générale, des constantes évaluées par expérience, selon le cas étudié et la nature de la paroi du canal ou de la conduite. Ce sont des valeurs tabulées que l'on peut consulter dans de nombreux ouvrages spécialisés.

Au regard de la forme des relations (2.1) et (2.2), il est bien utile de constater que l'effet de la viscosité cinématique  $\nu$  n'est pas considéré, ce qui laisse supposer que ces relations ne sont applicables que pour le cas de l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux. Les relations (2.1) et (2.2) doivent donc être utilisées avec précaution lorsque l'écoulement se situe dans les domaines de transition, lisse ou pratiquement lisse.

## II.2. Caractéristiques hydrauliques et géométriques

Les caractéristiques de la conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement sont, en particulier :

i. L'aire de la section mouillée  $A$ , telle que :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[ \cos^{-1}(1-2\eta) - 2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (2.3)$$

Il apparaît ainsi que l'aire de la section mouillée  $A$  est fonction du diamètre  $D$  de la conduite et du paramètre de forme  $\eta$ .

La relation (2.3) peut s'écrire :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \quad (2.4)$$

où :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) \quad (2.5)$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \quad (2.6)$$

Pour une conduite circulaire entièrement remplie, correspondant à  $\eta = 1$ , nous pouvons déduire des relations (2.5) et (2.6) respectivement que  $\sigma(\eta=1) = \pi$  et  $\varphi(\eta=1) = 1$ .

ii. Le périmètre mouillé  $P$ , tel que :

$$P = D \cos^{-1}(1-2\eta) \quad (2.7)$$

Ou bien :

$$P = D \sigma(\eta) \quad (2.8)$$

Le périmètre mouillé  $P$  est donc aussi fonction du diamètre  $D$  de la conduite et du paramètre de forme  $\eta$ .

iii. Le rayon hydraulique  $R_h = A/P$ , qui s'exprime, en ayant recours aux relations (2.4) et (2.8), par :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) \quad (2.9)$$

## II.3. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE CONSTANT

### II.3.1. Formule de Chézy

Considérons la formule (2.1) de Chézy. En nous aidant des relations (2.3) et (2.5). Le débit volume s'exprime alors par :

$$Q = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{C^2 i D^5} \quad (2.10)$$

En introduisant la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^3 i}} \quad (2.11)$$

la relation (2.10) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.12)$$

La conductivité relative  $Q^*$  n'est donc fonction que du paramètre de forme  $\eta$ . Pour le cas de la conduite circulaire entièrement remplie, correspondant à  $\eta = 1$ , la relation (2.12) mène à écrire que :

$$Q_p^* = \frac{\pi}{8} \cong 0,3927 = \text{constante} \quad (2.13)$$

où l'indice " p " désigne l'état plein de la conduite.

Pour un même diamètre  $D$ , une même pente longitudinale  $i$  et pour  $C = \text{constante}$ , le rapport des relations (2.12) et (2.13) donne :

$$\frac{Q}{Q_p} = \pi^{-1} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.14)$$

L'un des problèmes rencontrés en pratique est la détermination de la profondeur normale  $y_n$ , à partir des valeurs connues des paramètres  $C$ ,  $Q$ ,  $D$  et  $i$ . Ce problème peut trouver sa solution dans la résolution de l'équation (2.12), puisque le débit relatif  $Q^*$  est une donnée dont la valeur est tirée de la relation (2.11). L'objectif est donc de déterminer la valeur du paramètre de forme  $\eta$  qui permettrait alors de déduire celle de la profondeur normale  $y_n = \eta D$ . Cependant, au regard de la forme de la relation (2.12), il apparaît clairement que le paramètre de forme  $\eta$  est implicite vis-à-vis de  $Q^*$  et que sa détermination nécessiterait un procédé itératif ou graphique.

L'un des objectifs de notre étude est de proposer une solution explicite à la relation (2.12), permettant de calculer, avec une précision suffisante, le paramètre de forme  $\eta$  et par conséquent la profondeur normale  $y_n$ . Cette démarche pourrait éventuellement suggérer de présenter une relation, également explicite, au calcul de la profondeur critique  $y_c$ .

Le dimensionnement de la conduite, c'est-à-dire le calcul de son diamètre  $D$ , est également l'un des objectifs principaux de notre étude. Le calcul du diamètre  $D$  nécessite la connaissance des quatre autres paramètres régissant l'écoulement, c'est-à-dire le coefficient  $C$  de Chézy, le débit volume  $Q$ , la pente longitudinale  $i$  de la conduite et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Comme le montre la relation (2.12), le calcul du diamètre  $D$  n'est pas aisé. Cette relation nécessite quelques transformations et réarrangements pour permettre de répondre à notre objectif.

Toutes les considérations que nous venons d'exposer se rapportent à la relation (2.12) et reposent sur le fait que le coefficient de résistance  $C$  de Chézy demeure constant, quelle que soit la valeur du paramètre de forme  $\eta$ . En d'autres termes, le remplissage de la conduite, provoqué par l'augmentation du débit volume  $Q$ , s'effectue à valeur constante du coefficient  $C$ . Ceci mérite d'être discuté et commenté du fait que la résistance à l'écoulement devrait en principe être affectée par les variations de la profondeur de l'écoulement. La relation (2.12) doit donc faire l'objet d'une étude particulière. Il serait ainsi intéressant d'examiner la courbe de remplissage de la conduite  $\eta(Q/Q_p)$  pour  $C = \text{constante}$ , ainsi que celle de  $\eta(Q/Q_p)$  pour  $C$  variable.

L'étude des courbes de remplissage de la conduite pour  $C = \text{constante}$  et  $C$  variable devrait conduire aux relations du débit maximal  $Q_{\max}$ , correspondant à la capacité d'évacuation de la conduite. Cette étude devra mettre en évidence l'influence de la viscosité cinématique ainsi que celle de la résistance à l'écoulement sur la valeur du paramètre de forme  $\eta$ , notamment au passage du débit maximal.

L'étude de l'écoulement uniforme en conduite circulaire que nous envisageons de mener devra être ponctuée par des applications pratiques. Celles-ci permettront au lecteur de mieux appréhender les relations proposées et d'apprécier le degré de leur validité et de leur efficacité.

### II.3.1.1. Courbe de remplissage de la conduite pour $C = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, se traduit par la variation du paramètre de forme  $\eta(Q/Q_p)$  défini par la relation (2.14). En donnant des valeurs à  $\eta$ , arbitrairement choisies entre 0 et 1, la relation (2.14) a permis de dresser le tableau 2.1.

**Tableau 2.1 :** Valeurs de  $\eta(Q/Q_p)$  pour  $C = \text{constante}$ , calculées selon la relation (2.14).

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_p$
0,10	0,02623352
0,15	0,05733124
0,20	0,09888547
0,25	0,1497216
0,30	0,20863996
0,35	0,27441175
0,40	0,34577372
0,45	0,42142142
<b>0,50</b>	<b>0,5</b>
0,55	0,58009178
0,60	0,66019853
0,65	0,73871546
0,70	0,81389076
0,75	0,88375891
0,80	0,9460203
0,85	0,99779656
<b>0,85245</b>	<b>1</b>
0,90	1,03503019
<b>0,95</b>	<b>1,05041386</b>
0,96	1,04951605
0,97	1,04661445
0,98	1,04098028
0,99	1,03087227
<b>1</b>	<b>1</b>

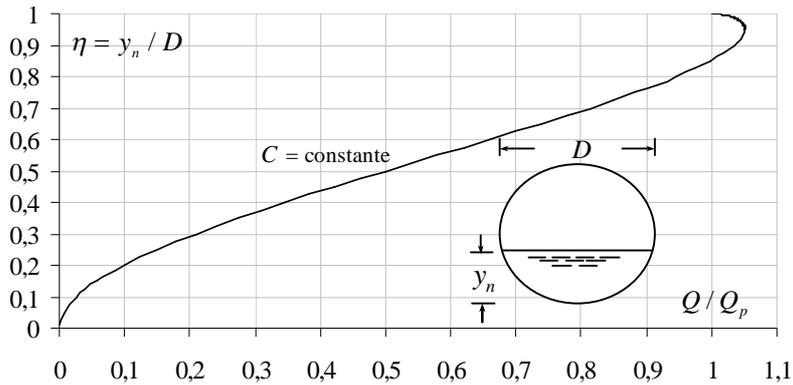
Il ressort du tableau 2.1 que :

- i. le rapport  $Q/Q_p$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur maximale  $Q_{\text{max.}}/Q_p = 1,05041386$ , indiquée en gras dans le tableau 2.1, pour un taux de remplissage  $\eta \cong 0,95$ . La capacité d'évacuation de la conduite correspond donc au débit maximal égal à environ 1,05 fois le débit de remplissage  $Q_p$ . Au-delà de sa valeur maximale, le rapport  $Q/Q_p$  diminue avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur  $Q/Q_p = 1$  pour le taux de remplissage  $\eta = 1$ . Notons également la valeur

particulière  $\eta = 0,85245$ , indiquée en gras dans le tableau 2.1, à laquelle correspond, sans aucune justification physique, le rapport  $Q / Q_p = 1$ .

ii. Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,5$ , indiqué en gras dans le tableau 2.1, le débit  $Q$  vaut la moitié du débit de remplissage  $Q_p$ .

Les observations ci-dessus indiquées sont traduites graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions cartésiennes de la figure 2.2.



**Figure 2.2 :** Représentation graphique de  $\eta(Q/Q_p)$  pour le coefficient de Chézy  $C = \text{constante}$ , selon les valeurs du tableau 2.1 calculées par la relation (2.14).

Dans la large gamme pratique  $0.15 \leq \pi \leq 0.85$ , correspondant à  $0,0573 \leq Q / Q_p \leq 0,9977$ , nos calculs ont montré que le taux de remplissage  $\eta(Q/Q_p)$  de la conduite pouvait s'exprimer de manière explicite par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,938\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,52} \quad (2.15)$$

Les écarts relatifs occasionnés par l'application de la relation approchée (2.15) sont consignés dans le tableau 2.2. Nous pouvons observer d'une part que l'erreur relative maximale reste dans tous les cas inférieure à 0,4% et que les plus grands écarts sont obtenus pour les valeurs extrêmes de la gamme choisie de  $\eta$  d'autre part, valeurs indiquées en gras dans le tableau 2.2.

**Tableau 2.2 :** Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.15) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q/Q_p)$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_p$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs (%)
0,15	0,05733124	0,14967554	<b>0,22</b>
0,20	0,09888547	0,19992175	0,04
0,25	0,1497216	0,24996879	0,01
0,30	0,20863996	0,29985817	0,05
0,35	0,27441175	0,34965773	0,10
0,40	0,34577372	0,39944695	0,14
0,45	0,42142142	0,44930952	0,15
0,50	0,5	0,49932761	0,13
0,55	0,58009178	0,54957477	0,08
0,60	0,66019853	0,60010366	0,02
0,65	0,73871546	0,65092159	0,14
0,70	0,81389076	0,70193865	0,28
0,75	0,88375891	0,75285076	<b>0,38</b>

### II.3.1.2. Relation approchée au calcul de la profondeur normale

Cette partie de l'étude se propose d'établir une relation approchée susceptible de mener à un calcul explicite de la profondeur normale  $y_n$ , pour les valeurs connues des paramètres  $C$ ,  $Q$ ,  $D$  et  $i$ , et par conséquent de celle de la conductivité relative  $Q^*$ . La relation sera établie dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,85$  et devra être appliquée lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est une constante, indépendante de la variation du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. Avant d'établir cette relation, il est utile de noter que :

$$\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{Q}{Q_{\max}} \quad (2.16)$$

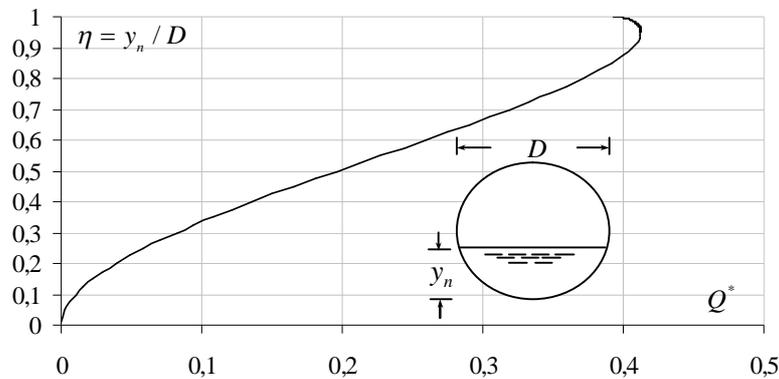
La conductivité relative  $Q^*$  est fonction du taux de remplissage  $\eta$  conformément à la relation (2.12). En faisant varier le taux de remplissage  $\eta$  dans la gamme  $0 < \eta \leq 1$ , la relation (2.12) a permis de dresser le tableau 2.3.

Il ressort du tableau 2.3 que la conductivité relative  $Q^*$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  jusqu'à la valeur maximale  $Q_{\max}^* \cong 0,4125$ , indiquée en gras dans le tableau, correspondant à  $\eta = 0,95$ . Au-delà de sa valeur maximale,  $Q^*$  diminue avec l'augmentation du taux de remplissage  $\eta$ . A l'état de remplissage, correspondant à  $\eta = 1$ , la conductivité relative prend la valeur  $Q^* \cong 0,3927$ .

**Tableau 2.3 :** Valeurs de  $\eta(Q^*)$  calculées selon la relation (2.12).

$\eta = y_n / D$	$Q^*$	$Q^* / Q_{\max}^* = Q / Q_{\max}$
0,15	0,02251392	0,05457967
0,20	0,03883223	0,09413954
0,25	0,05879554	0,14253582
0,30	0,08193272	0,19862644
0,35	0,10776124	0,26124155
0,40	0,13578502	0,32917856
0,45	0,1654918	0,4011956
0,50	0,19634954	0,47600286
0,55	0,22780151	0,55225069
0,60	0,25925936	0,62851277
0,65	0,29009288	0,70326133
0,70	0,31961415	0,77482865
0,75	0,34705131	0,84134353
0,80	0,3715013	0,90061673
0,85	0,39183379	0,94990802
0,90	0,40645541	0,98535465
<b>0,95</b>	<b>0,41249656</b>	<b>1</b>
0,975	0,4100595	0,99409193
1	0,39269908	0,95200571

Les valeurs consignées dans le tableau 2.3 ont permis de tracer, sur la figure 2.3, la variation  $\eta(Q^*)$ . Dans le tableau 2.3, ont été aussi consignées les valeurs de  $Q^* / Q_{\max}^*$  qui correspondent également aux valeurs du rapport  $Q / Q_{\max}$ , conformément à la relation (2.15).



**Figure 2.3 :** Représentation graphique de  $\eta(Q^*)$ , selon la relation (2.12).

Dans la gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,85$ , correspondant à  $0,0225 \leq Q^* \leq 0,392$ , les calculs ont montré que le taux de remplissage  $\eta(Q^*)$  de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,4% seulement (Tableau 2.4), par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1,525 Q^{*0,52} \quad (2.17)$$

**Tableau 2.4 :** Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.17) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q^*)$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q^*$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs (%)
0,15	0,02251392	0,14966789	0,22
0,20	0,03883223	0,19991141	0,04
0,25	0,05879554	0,24995564	0,02
0,30	0,08193272	0,29984209	0,05
0,35	0,10776124	0,34963851	0,10
0,40	0,13578502	0,39942434	0,14
0,45	0,1654918	0,44928319	0,16
0,50	0,19634954	0,49929713	0,14
0,55	0,22780151	0,54953958	0,08
0,60	0,25925936	0,60006298	0,01
0,65	0,29009288	0,65087439	0,13
0,70	0,31961415	0,70188349	0,27
0,75	0,34705131	0,7527856	0,37
0,775	0,35971333	0,7779804	0,38
0,8	0,3715013	0,80278095	0,35
0,825	0,3822664	0,82689481	0,23
0,85	0,39183379	0,84985538	0,02

De même, dans la gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,85$ , correspondant à  $0,0546 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,95$ , les calculs ont montré que le taux de remplissage  $\eta(Q / Q_{\max.})$  de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,35% seulement (Tableau 2.5), par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,962\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,52} \quad (2.18)$$

**Tableau 2.5 :** Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.18) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q / Q_{\max.})$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_{\max.}$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs en (%)
0,15	0,05457967	0,14962823	0,25
0,20	0,09413954	0,19985778	0,07
0,25	0,14253582	0,2498875	0,04
0,30	0,19862644	0,29975869	0,08
0,35	0,26124155	0,34953885	0,13
0,40	0,32917856	0,39930712	0,17
0,45	0,4011956	0,4491467	0,19
0,50	0,47600286	0,49913912	0,17
0,55	0,55225069	0,5493571	0,12
0,60	0,62851277	0,59985209	0,02
0,65	0,70326133	0,6506297	0,10
0,70	0,77482865	0,70159754	0,23
0,75	0,84134353	0,75244791	0,33
0,80	0,90061673	0,80237682	0,30
0,825	0,92671415	0,82645058	0,18
0,85	0,94990802	0,8493662	0,07

### II.3.1.3. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$

La relation (2.12), traduisant la variation  $\eta(Q^*)$ , peut être transformée en introduisant la conductivité relative rapportée à la profondeur normale  $y_n$  :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} \quad (2.19)$$

Notons que :

$$Q^* = \eta^{5/2} Q_y^* \quad (2.20)$$

En ayant recours à la relation (2.20), la relation (2.12) s'écrit alors :

$$Q_y^* = \frac{1}{8} \eta^{-5/2} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.21)$$

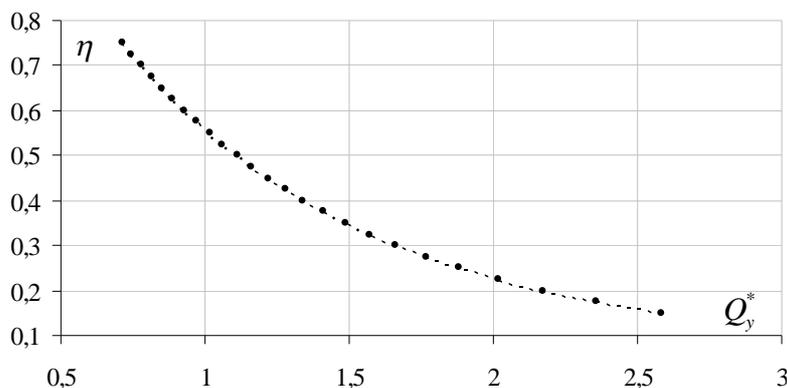
La conductivité relation  $Q_y^*$  ne dépend donc que du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et la variation  $\eta(Q_y^*)$  est représentée graphiquement, en trait discontinu, sur la figure 2.4. Celle-ci montre que la conductivité relative  $Q_y^*$  augmente lorsque le taux de remplissage  $\eta$  diminue. La relation (2.21) est intéressante dans la mesure où elle permettrait la détermination du taux de remplissage  $\eta$ , et donc celle du diamètre  $D$  de la conduite, pour les valeurs imposées des paramètres  $C$ ,  $i$ ,  $Q$  et  $y_n$ . Ceci revient donc à rechercher le diamètre  $D$  pour la valeur imposée de la conductivité relative  $Q_y^*$ . Pour l'état plein de la conduite, correspondant à  $\eta = 1$  ou à  $\sigma(\eta=1) = \pi$  et  $\varphi(\eta=1) = 1$ , la relation (2.21) conduit à écrire que  $Q_y^* = \pi / 8 \cong 0,3927$ . Ainsi, pour le taux de remplissage  $\eta < 1$ , la conductivité relative  $Q_y^*$  doit être telle que  $Q_y^* > 0,3927$ .

Cependant, la relation (2.21) montre clairement que le taux de remplissage  $\eta$  est implicite vis-à-vis de la conductivité relative  $Q_y^*$ . Une relation approchée de  $\eta(Q_y^*)$  a été recherchée et nos calculs ont montré que :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{1,461(1 + 0,543 Q_y^{*2})} - 0,454 Q_y^*}{1 + 0,402 Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.22)$$

La relation approchée (2.22) est applicable dans la gamme  $0,01 \leq \eta \leq 0,90$ , et occasion une erreur relative maximale inférieure à 0,4%.

La relation (2.22) a été également représentée sur la figure 2.4 en motifs plein et les écarts relatifs qu'elle occasionne dans la large gamme  $0,01 \leq \eta \leq 0,90$  sont consignés dans le tableau 2.6. Nous pouvons ainsi observer que les écarts relatifs sont extrêmement faibles dans la gamme choisie de  $\eta$ , permettant alors de conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.22). Notons que les plus grands écarts relatifs sont obtenus pour les valeurs extrêmes de la gamme de  $\eta$ , indiquées en gras dans le tableau 2.6.



**Figure 2.4 :** Variation du taux de remplissage  $\eta$  en fonction de la conductivité relative  $Q_y^*$ .  
 (- - -) : Relation (2.21), (●) : Relation approchée (2.22).

**Tableau 2.6 :** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.22) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q_y^*$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecarts relatifs en (%)
0,10	3,257739971	0,099871325	0,129
0,15	2,583586832	0,149960061	0,027
0,20	2,170787922	0,200088369	0,044
0,25	1,881457147	0,250216026	0,086
0,30	1,662088901	0,300308806	0,103
0,35	1,486936669	0,350339218	0,097
0,40	1,341843577	0,400287461	0,072
0,45	1,218274647	0,450142699	0,032
0,50	1,110720735	0,499904857	0,019
0,55	1,015429721	0,549587206	0,075
0,60	0,929728862	0,599220254	0,13
0,65	0,851635349	0,648857828	0,176
0,70	0,779616288	0,698587112	0,202
0,75	0,712427264	0,748546281	0,194
0,80	0,648986068	0,798958313	0,13
0,85	0,588240026	0,850204213	0,024
0,90	0,528940267	0,903014511	0,335

### II.3.1.4. Exemple d'application 1

On souhaite déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre  $D = 2\text{ m}$ , écoulant un débit volume  $Q = 0,98\text{ m}^3/\text{s}$  sous une pente longitudinale  $i = 10^{-4}$ . Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy est  $C = 88\text{ m}^{0,5}/\text{s}$ .

#### Solution

- i. Vérifions que la conductivité relative de la conduite  $Q^*$  est bien inférieure à la conductivité relative maximale  $Q_{\max}^* = 0,41249656$  :

Selon la relation (2.11), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{0,98}{\sqrt{88^2 \times 2^5 \times 10^{-4}}} = 0,19686496 < Q_{\max}^*$$

- ii. L'application de la relation approchée (2.17) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left( 1,525 Q^{*0,52} \right)$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left( 1,525 \times 0,19686496^{0,52} \right) = 0,50012363 \cong 0,50$$

La conduite considérée est donc à moitié remplie.

- iii. Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est :

$$y_n = \eta D = 0,50012363 \times 2 = 1,00024726\text{ m} \cong 1\text{ m}$$

- iv. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la formule de Chézy. Selon Chézy, le débit volume est donné par la relation (2.1), soit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,50012363) = 1,571043587$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,50012363) \times \sqrt{0,50012363 \times (1 - 0,50012363)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,50012363)} = 1,000157386 \cong 1 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  est, selon la relation (2.4) :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{2^2}{4} \times 1,571043587 \times 1,000157386 = 1,57129085 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est donné par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{2}{4} \times 1,000157386 = 0,50007869 \text{ m} \cong 0,5 \text{ m}$$

- Le débit volume  $Q$  serait donc, selon Chézy :

$$Q = CA\sqrt{R_h} i = 88 \times 1,57129085 \times \sqrt{0,50007869 \times 10^{-4}} = 0,9778189 \text{ m}^3 / \text{s}$$

L'écart relatif entre le débit volume que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,23% seulement. Ceci permet de conclure à la validité des calculs que nous avons effectués.

- v. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en déterminant le taux de remplissage  $\eta(Q/Q_p)$  par application de la relation (2.15), soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,938 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[ 0,938 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,52} \right]$$

Dans cette dernière relation, le rapport  $Q/Q_p$  est  $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ , où  $Q_p^* = \pi/8$  conformément à la relation (2.13). Ainsi :

$$Q / Q_p = 0,19686496 / (\pi / 8) = 0,50131249$$

Par suite :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,938 \times 0,50131249^{0,52} \right] = 0,50015418 \cong 0,50$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

vi. La relation (2.18) peut également servir à la vérification des calculs, soit :

$$\sin \left( \frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,962 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[ 0,962 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,52} \right]$$

Dans cette relation, le rapport  $Q / Q_{\max.}$  est tel que  $Q / Q_{\max.} = Q^* / Q_{\max.}^*$ , où  $Q_{\max.}^* = 0,41249656$  conformément au tableau 2.3. Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,962 \times \left( \frac{0,19686496}{0,41249656} \right)^{0,52} \right] = 0,49996525 \cong 0,50$$

Il s'agit, bien encore une fois, de la même valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

vii. Utilisant la relation approchée (2.22) pour évaluer le taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$ . La conductivité relative  $Q_y^*$  est, selon la relation (2.19) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} = \frac{0,98}{\sqrt{88^2 \times 10^{-4} \times 1,00024726^5}} = 1,11294826$$

Ainsi, le taux de remplissage correspondant à cette conductivité relative est, conformément à la relation (2.22) :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{1,461(1 + 0,543Q_y^{*2})} - 0,454Q_y^*}{1 + 0,402Q_y^{*2}} \right]^2$$

$$= \left[ \frac{\sqrt{1,461 \times (1 + 0,543 \times 1,11294826^2)} - 0,454 \times 1,11294826}{1 + 0,402 \times 1,11294826^2} \right]^2 = 0,49880872 \cong 0,50$$

Nous retrouvons bien, avec un écart relatif de 0,25% seulement, la valeur de  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

### II.3.1.5. Exemple d'application 2

On souhaite déterminer le diamètre  $D$  d'une conduite circulaire dans laquelle l'écoulement est maintenu à la profondeur normale  $y_n = 1,08 m$ . La conduite écoule un débit volume  $Q = 1,89 m^3 / s$  sous une pente longitudinale  $i = 5.10^{-4}$ . Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy est  $C = 75 m^{0.5} / s$ .

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q_y^*$  de la conduite selon la relation (2.19), soit :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 y^{5i}}} = \frac{1,89}{\sqrt{75^2 \times 5.10^{-4} \times 1,08^5}} = 0,92972851 \cong 0,93$$

ii. La relation approchée (2.22) permet alors de déterminer le taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$ , soit :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{1,461(1 + 0,543Q_y^{*2})} - 0,454Q_y^*}{1 + 0,402Q_y^{*2}} \right]^2$$

Ou bien :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{1,461 \times (1 + 0,543 \times 0,92972851^2)} - 0,454 \times 0,92972851}{1 + 0,402 \times 0,92972851^2} \right]^2 = 0,59922047 \cong 0,60$$

iii. Le diamètre recherché est par suite :

$$D = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1,08}{0,6} = 1,8 m$$

- iv. Vérifions, pour le diamètre  $D$  ainsi calculé, que la conductivité relative  $Q^*$  est bien inférieure à la conductivité relative maximale  $Q_{\max}^* = 0,41249656$  :

Selon la relation (2.11),  $Q^*$  est :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,89}{\sqrt{75^2 \times 1,8^5 \times 5 \cdot 10^{-4}}} = 0,25925926 \cong 0,26 < Q_{\max}^*$$

- v. Vérifions nos calculs au cours de cette étape. L'application de la relation approchée (2.17) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left( 1,525 Q^{*0,52} \right)$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left( 1,525 \times 0,25925926^{0,52} \right) = 0,60006282 \cong 0,60$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculé à l'étape (ii).

- vi. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en calculant le taux de remplissage  $\eta(Q/Q_p)$  par application de la relation (2.15), soit :

$$\sin \left( \frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,938 \left( \frac{Q}{Q_p} \right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[ 0,938 \left( \frac{Q}{Q_p} \right)^{0,52} \right]$$

Dans cette dernière relation, le rapport  $Q/Q_p$  est  $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ , où  $Q_p^* = \pi/8$  conformément à la relation (2.13). Ainsi :

$$Q/Q_p = 0,25925926 / (\pi/8) = 0,66019828$$

Par suite :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,938 \times 0,66019828^{0,52} \right] = 0,6001035 \cong 0,60$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

vii. La relation (2.18) peut également servir à la vérification des calculs, soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,962\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left[0,962\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,52}\right]$$

Dans cette relation, le rapport  $Q/Q_{\max.}$  est  $Q/Q_{\max.} = Q^*/Q_{\max.}^*$ , où  $Q_{\max.}^* = 0,41249656$  conformément au tableau 2.3. Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1}\left[0,962 \times \left(\frac{0,25925926}{0,41249656}\right)^{0,52}\right] = 0,59985193 \cong 0,60$$

Il s'agit bien encore une fois de la même valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

viii. Vérifions une dernière fois nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la formule de Chézy. Selon Chézy, le débit volume  $Q$  est donné par la relation (2.1), soit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,6) \times \sqrt{0,6 \times (1-0,6)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,6)} = 1,11057682$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  est, selon la relation (2.4) :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,8^2}{4} \times 1,77215425 \times 1,11057682 = 1,59417188 m^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est donné par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{1,8}{4} \times 1,11057682 = 0,49975957 \text{ m} \cong 0,5 \text{ m}$$

- Le débit volume  $Q$  serait donc, selon *Chézy* :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = 75 \times 1,59417188 \times \sqrt{0,5 \times 5 \cdot 10^{-4}} = 1,89045529 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,890 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Il s'agit bien du débit volume  $Q$  donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

## II.3.2. Formule de *Manning-Strickler*

### II.3.2.1. Conductivité relative

En ayant recours aux relations (2.4) et (2.9), la relation (2.2) de *Manning-Strickler* permet d'écrire que :

$$Q = \frac{1}{n} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \frac{D^{8/3}}{4^{5/3}} \sqrt{i} \quad (2.23)$$

En introduisant le débit relatif, ou plus précisément la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.24)$$

la relation (2.23) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = 4^{-5/3} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.25)$$

La relation (2.25) traduit ainsi la variation de la conductivité relative  $Q^*$  de la conduite en fonction du taux de remplissage  $\eta$ . Pour le cas particulier de la conduite à l'état plein, correspondant à la valeur  $\eta = 1$  et à  $Q^* = Q_p^*$ , la relation (2.25) permet de déduire que :

$$Q_p^* = \frac{\pi}{4^{5/3}} \cong 0,3117 = \text{constante} \quad (2.26)$$

Comparée à la valeur de  $Q_p^*$  obtenue par application de la relation de *Chézy* (relation 2.13), celle donnée par la relation de *Manning-Strickler* est donc plus faible. L'écart relatif entre les deux valeurs est de l'ordre de 20,5%. Les valeurs de  $\eta(Q^*)$  calculées selon la relation (2.25) sont consignées dans le tableau 2.7 et elles ont permis le tracé de la figure 2.5. En outre, nous avons également porté dans le tableau 2.7 les valeurs de  $Q/Q_{\max.}$  qui correspondent à celles de  $Q^*/Q_{\max.}^*$ , conformément à la relation (2.16).

Les valeurs du tableau 2.7 ainsi que la figure 2.5 suggèrent les observations suivantes :

- i. La conductivité relative  $Q^*$  de la conduite augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur maximale  $Q_{\max.}^* \cong 0,3353$ , indiquée

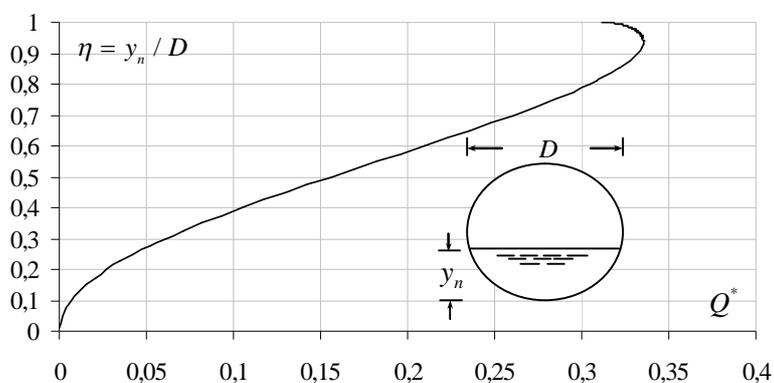
en gras dans le tableau 2.7, pour le taux de remplissage  $\eta = 0,94$ . La conductivité maximale de la conduite n'est donc pas atteinte à l'état plein, mais seulement à 94% de cet état.

ii. Au-delà de sa valeur maximale, la conductivité relative  $Q^*$  de la conduite diminue avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur  $Q^* \cong 0,3117$  pour le taux de remplissage  $\eta = 1$ .

iii. Lorsque la conduite est à moitié remplie, correspondant au taux de remplissage  $\eta = 0,5$  indiqué en gras dans le tableau 2.7, la conductivité relative est  $Q^* \cong 0,156$ .

**Tableau 2.7 :** Valeur de  $\eta(Q^*)$  calculées selon la relation (2.25).

$\eta = y_n / D$	$Q^*$	$Q^* / Q^*_{\max.} = Q / Q_{\max.}$
0,10	0,006507312	0,01940896
0,15	0,015150827	0,04518944
0,20	0,027294706	0,08141023
0,25	0,042695238	0,12734445
0,30	0,061037735	0,18205348
0,35	0,081954527	0,24444071
0,40	0,10503419	0,31327899
0,45	0,129826223	0,38722465
<b>0,50</b>	<b>0,155842734</b>	<b>0,46482249</b>
0,55	0,182557584	0,54450323
0,60	0,209402827	0,62457287
0,65	0,235761513	0,7031913
0,70	0,260954811	0,77833379
0,75	0,284219023	0,84772252
0,80	0,304662223	0,90869719
0,85	0,321173306	0,95794377
0,90	0,332193544	0,99081316
<b>0,94</b>	<b>0,33527365</b>	<b>1</b>
0,95	0,334910569	0,99891706
0,975	0,330927791	0,98703787
<b>1</b>	<b>0,311685468</b>	<b>0,92964499</b>



**Figure 2.5 :** Courbe de variation du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite circulaire en fonction de la conductivité relative  $Q^*$ , selon les valeurs du tableau 2.7 calculées par la relation (2.25).

### II.3.2.2. Relation approchée au calcul de la profondeur normale

La détermination de la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement passe par l'estimation du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, pour les paramètres connus  $n, Q, D$  et  $i$ , et par conséquent de la conductivité relative  $Q^*$ . Cependant, la relation (2.25) montre que  $\eta$  est implicite vis-à-vis de  $Q^*$  et sa détermination nécessite un procédé itératif ou graphique.

Cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée explicite au calcul du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, impliquant ainsi celui de la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement. L'une des approches que nous avons adoptée a consisté à rechercher la meilleure courbe de tendance de la variation  $\eta(Q^*)$ . Le calcul a montré que la relation (2.25) pouvait être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation explicite suivante :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1,614Q^{*0,485} \quad (2.27)$$

La relation (2.27) a été établie dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,75$ , correspondant à  $0,0152 \leq Q^* \leq 0,284$ . Le tableau 2.8 montre les écarts relatifs occasionnés par la relation (2.27) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q^*)$  de la conduite. Au regard des écarts relatifs réduits ainsi obtenus, nous pouvons conclure que la relation (2.27) est une excellente relation approchée explicite. Notons que les plus grands écarts relatifs correspondent aux valeurs extrêmes de la gamme considérée de  $\eta$ , indiquées en gras dans le tableau 2.8.

**Tableau 2.8 :** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.27) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q^*)$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q^*$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecarts relatifs en (%)
0,15	0,015150827	0,14927321	<b>0,48</b>
0,20	0,027294706	0,19979393	0,10
0,25	0,042695238	0,25014131	0,06
0,30	0,061037735	0,30032168	0,11
0,35	0,081954527	0,35037462	0,11
0,40	0,10503419	0,40035261	0,09
0,45	0,129826223	0,45030941	0,07
0,50	0,155842734	0,50029013	0,06
0,55	0,182557584	0,55031856	0,06
0,60	0,209402827	0,60037638	0,06
0,65	0,235761513	0,65036461	0,06
0,70	0,260954811	0,70002711	0,00
0,75	0,284219023	0,74879058	<b>0,16</b>

Une seconde approche a été adoptée pour établir une relation explicite au calcul de la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement. Cette approche consiste à rechercher la meilleure courbe de tendance de la variation du taux de remplissage  $\eta(Q/Q_{\max.})$  dans la gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,75$ , correspondant à  $0,0452 \leq Q/Q_{\max.} \leq 0,8477$  (Tableau 2.7).

Le rapport entre les valeurs de  $Q^*$  données par la relation (2.25) et la valeur  $Q_{\max.}^* \cong 0,3353$  donnée par le tableau 2.7, permet de déduire que :

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{5/3}}{3,379} \quad (2.28)$$

Les calculs ont montré que le taux de remplissage  $\eta(Q/Q_{\max.})$  de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,5% seulement (Tableau 2.9), par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,95\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,485} \quad (2.29)$$

Le tableau 2.9 regroupe les valeurs de  $\eta = y_n / D$  calculées selon la relation (2.28) ainsi que celles de  $(\eta = y_n / D)_{\text{approché}}$  déterminées par application de la relation approchée (2.29). Les écarts relatifs entre ces valeurs, pour la gamme choisie  $0,15 \leq \eta \leq 0,75$ , ont été également consignés dans le tableau 2.9. Au regard de ces écarts réduits, nous pouvons conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.29). Notons (Tableau 2.9) que les plus grands écarts relatifs occasionnés par la relation approchée (2.29) s'obtiennent pour les valeurs extrêmes de la gamme choisie de  $\eta$ , indiquées en gras dans le tableau.

**Tableau 2.9 :** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.29) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q/Q_{\max.})$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_{\max.}$	$(\eta = y_n / D)_{\text{approché}}$	Ecarts relatifs en (%)
0,15	0,04518944	0,14927368	<b>0,48</b>
0,20	0,08141023	0,19979458	0,10
0,25	0,12734445	0,25014213	0,06
0,30	0,18205348	0,30032268	0,11
0,35	0,24444071	0,35037582	0,11
0,40	0,31327899	0,40035402	0,09
0,45	0,38722465	0,45031105	0,07
0,50	0,46482249	0,50029202	0,06
0,55	0,54450323	0,55032074	0,06
0,60	0,62457287	0,60037891	0,06
0,65	0,7031913	0,65036754	0,06
0,70	0,77833379	0,70003051	0,00
0,75	0,84772252	0,74745245	<b>0,34</b>

### II.3.2.3. Courbe de remplissage de la conduite pour $n = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*, se traduit par la variation du paramètre de forme  $\eta(Q/Q_p)$ . Celui-ci peut être défini par le rapport des relations (2.25) et (2.26) qui mène à écrire que, pour un même diamètre  $D$ , la même pente longitudinale  $i$  de la conduite et la même valeur du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  :

$$\frac{Q}{Q_p} = \pi^{-1} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.30)$$

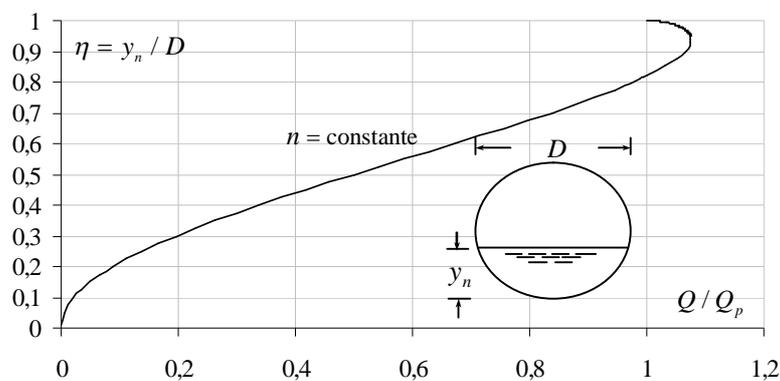
En donnant des valeurs à  $\eta$ , arbitrairement choisies entre 0 et 1, la relation (2.30) a permis de dresser le tableau 2.10 ainsi que le tracé de la figure 2.6.

Il ressort du tableau 2.10 que :

- i. le rapport  $Q/Q_p$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur maximale  $Q_{\text{max.}}/Q_p = 1,07567944$ , indiquée en gras dans le tableau 2.10, pour un taux de remplissage  $\eta \cong 0,94$ . La capacité d'évacuation de la conduite correspond donc au débit maximal égal à environ 1,076 fois le débit de remplissage  $Q_p$ . Au-delà de sa valeur maximale, le rapport  $Q/Q_p$  diminue avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur  $Q/Q_p = 1$  pour le taux de remplissage  $\eta = 1$ . Notons également la valeur particulière  $\eta = 0,85245$ , indiquée en gras dans le tableau 2.10, à laquelle correspond, sans aucune justification physique, le rapport  $Q/Q_p = 1$ .
- ii. pour le taux de remplissage  $\eta = 0,5$ , indiqué en gras dans le tableau 2.10, le débit volume  $Q$  vaut la moitié du débit volume de remplissage  $Q_p$ .

**Tableau 2.10 :** Valeurs de  $\eta(Q/Q_p)$  pour  $n = \text{constante}$ , calculées selon la relation (2.30).

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_p$
0,10	0,02087782
0,15	0,04860935
0,20	0,08757132
0,25	0,1369818
0,30	0,19583119
0,35	0,26293984
0,40	0,33698777
0,45	0,4165296
<b>0,50</b>	<b>0,5</b>
0,55	0,58571093
0,60	0,6718402
0,65	0,75640842
0,70	0,83723766
0,75	0,91187769
0,80	0,97746688
<b>0,81962945</b>	<b>1</b>
0,85	1,03044042
0,90	1,06579734
<b>0,94</b>	<b>1,07567944</b>
0,95	1,07451455
0,96	1,07137353
0,97	1,06574504
0,98	1,05669403
0,99	1,04196158
<b>1</b>	<b>1</b>



**Figure 2.6 :** Représentation graphique de  $\eta(Q/Q_p)$  pour le coefficient de Manning  $n = \text{constante}$ , selon les valeurs du tableau 2.10 calculées par la relation (2.30).

Dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,75$ , correspondant à  $0,0486 \leq Q/Q_p \leq 0,912$ , nos calculs ont montré que la meilleure courbe de tendance de  $\eta(Q/Q_p)$  se traduit par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,917\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,485} \quad (2.31)$$

L'erreur relative maximale occasionnée par la relation approchée (2.31) est, dans tous les cas, inférieure à 0,5% (Tableau 2.11). Les plus grands écarts relatifs sont observés pour les valeurs extrêmes de la gamme choisie de  $\eta$ , indiquées en gras dans le tableau 2.11. Au regard des écarts relatifs réduits indiqués dans le tableau 2.11, nous pouvons aisément conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.31).

**Tableau 2.11** : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.31) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q/Q_p)$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_p$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs (%)
0,15	0,04860935	0,14927784	<b>0,48</b>
0,20	0,08757132	0,19980021	0,10
0,25	0,1369818	0,2501493	0,06
0,30	0,19583119	0,30033147	0,11
0,35	0,26293984	0,35038633	0,11
0,40	0,33698777	0,40036638	0,09
0,45	0,4165296	0,45032545	0,07
0,50	0,5	0,50030869	0,06
0,55	0,58571093	0,55033998	0,06
0,60	0,6718402	0,60040112	0,07
0,65	0,75640842	0,65039324	0,06
0,70	0,83723766	0,70006042	0,01
0,75	0,91187769	0,74882963	<b>0,16</b>

#### II.3.2.4. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$

La relation (2.25) traduisant la variation  $\eta(Q^*)$  peut être transformée en introduisant la conductivité relative rapportée à la profondeur normale  $y_n$  :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.32)$$

Notons que, compte tenu de la relation (2.24) :

$$Q^* = \eta^{8/3} Q_y^* \quad (2.33)$$

En ayant recours à la relation (2.33), la relation (2.25) s'écrit alors :

$$Q_y^* = 4^{-5/3} \eta^{-8/3} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.34)$$

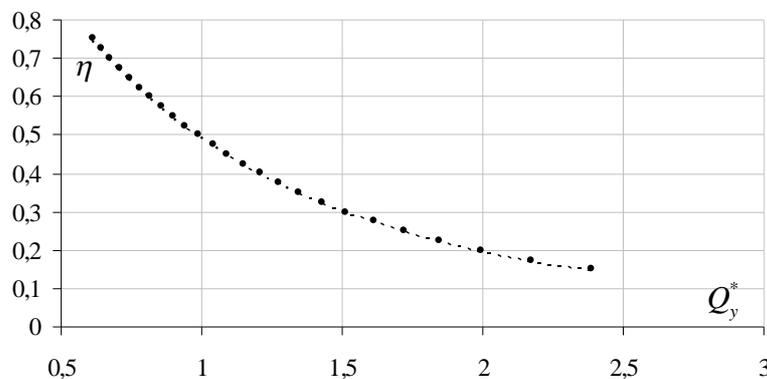
La conductivité relation  $Q_y^*$  ne dépend donc que du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et la variation  $\eta(Q_y^*)$  est représentée graphiquement, en trait discontinu, sur la figure 2.7. Celle-ci montre

que la conductivité relative  $Q_y^*$  augmente lorsque le taux de remplissage  $\eta$  diminue.

La relation (2.34) est intéressante dans la mesure où elle peut permettre la détermination du taux de remplissage  $\eta$ , et donc celle du diamètre  $D$  de la conduite, pour les valeurs imposées des paramètres  $n, i, Q$  et  $y_n$ . Le problème revient donc à rechercher le diamètre  $D$  pour la valeur imposée de la conductivité relative  $Q_y^*$ . Cependant, la relation (2.34) montre que le taux de remplissage  $\eta$  est implicite vis-à-vis de la conductivité relative  $Q_y^*$  et une relation approchée a été recherchée. Nos calculs ont montré que la relation  $\eta(Q_y^*)$  admet pour relation approchée :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{1,456(1+0,468Q_y^{*2})} - 0,609Q_y^*}{1+0,213Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.35)$$

La relation (2.35) a été également représentée sur la figure 2.7 en motifs plein et les écarts relatifs qu'elle occasionne dans la large gamme pratique  $0,01 \leq \eta \leq 0,75$ , correspondant à  $0,612 \leq Q_y^* \leq 10,113$ , sont consignés dans le tableau 2.12. Nous pouvons ainsi observer que les écarts relatifs sont extrêmement faibles dans la gamme choisie de  $\eta$ , permettant alors de conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.35). Notons que le plus grand écart relatif est obtenu pour la plus faible valeur de la gamme de  $\eta$ , indiquée en gras dans le tableau 2.12.



**Figure 2.7 :** Variation du taux de remplissage  $\eta$  en fonction de la conductivité relative  $Q_y^*$ .  
 ( - - ) : Relation (2.30), ( ● ) : Relation approchée (2.35).

**Tableau 2.12 :** Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.35) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$  de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q_y^*$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs en (%)
0,01	10,113037	0,00997844	<b>0,22</b>
0,15	2,38520838	0,15001391	0,01
0,20	1,99525514	0,20009625	0,05
0,25	1,72136411	0,25016883	0,07
0,30	1,5133582	0,30021018	0,07
0,35	1,34707414	0,35020571	0,06
0,40	1,20921645	0,40014878	0,04
0,45	1,09176471	0,45004206	0,01
0,50	0,98953968	0,49989937	0,02
0,55	0,89901314	0,54974841	0,05
0,60	0,81767215	0,59963484	0,06
0,65	0,7436535	0,64962885	0,06
0,70	0,67551843	0,69983606	0,02
0,75	0,61210102	0,75041686	0,06

### II.3.2.5. Exemple d'application 3

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre  $D = 1,8 m$ , écoulant un débit volume  $Q = 1,89 m^3 / s$  sous une pente longitudinale  $i = 5.10^{-4}$ . Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est  $n = 0,0148 m^{-1/3} s$ .

#### Solution

- i. Vérifions que la conductivité relative de la conduite  $Q^*$  est bien inférieure à la conductivité relative maximale  $Q_{max}^* \cong 0,3353$  :

Selon la relation (2.24), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,0148 \times 1,89}{1,8^{8/3} \times \sqrt{5.10^{-4}}} = 0,26092268 \cong 0,261 < Q_{max}^*$$

- ii. L'application de la relation approchée (2.27) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left( 1,614 Q^{*0,485} \right)$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left( 1,614 \times 0,26092268^{0,485} \right) = 0,69996204 \cong 0,70$$

iii. Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est :

$$y_n = \eta D = 0,69996204 \times 1,8 = 1,25993167 \text{ m} \cong 1,26 \text{ m}$$

iv. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la formule de *Manning-Strickler*. Selon *Manning-Strickler*, le débit volume est donné par la relation (2.2) :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i}$$

- Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7) = 1,98231317$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,7) \times \sqrt{0,6 \times (1 - 0,7)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7)} = 1,18493852$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  est, selon la relation (2.4) :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,8^2}{4} \times 1,98231317 \times 1,18493852 = 1,90262458 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est donné par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{1,8}{4} \times 1,18493852 = 0,53322233 \text{ m}$$

- Le débit volume  $Q$  serait donc, selon *Manning* :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,0148} \times 1,90262458 \times 0,53322233^{2/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}} = 1,89023271 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,89 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Le débit volume que nous venons de calculer correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré. Ceci permet de conclure à la validité des calculs que nous avons effectués.

v. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en déterminant le taux de remplissage  $\eta(Q/Q_p)$  par application de la relation (2.31), soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,917 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,485}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[ 0,917 \left( \frac{Q}{Q_p} \right)^{0,485} \right]$$

Dans cette dernière relation,  $Q / Q_p = Q^* / Q_p^*$ , où  $Q_p^* = \frac{\pi}{4^{5/3}} \cong 0,3117$  conformément à la relation

(2.26). Ainsi :

$$Q / Q_p = 0,26092268 \times 4^{5/3} / \pi = 0,83713458$$

Par suite :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,917 \times 0,83713458^{0,485} \right] = 0,69999535 \cong 0,70$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

vi. La relation (2.29) peut également servir à la vérification des calculs, soit :

$$\sin \left( \frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,95 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,485}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[ 0,95 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,485} \right]$$

Dans cette relation,  $Q / Q_{\max.} = Q^* / Q_{\max.}^*$ , où  $Q_{\max.}^* = 0,33527365$  conformément au tableau 2.7.

Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,95 \times \left( \frac{0,26092268}{0,33527365} \right)^{0,485} \right] = 0,69996544 \cong 0,70$$

Il s'agit bien encore une fois de la même valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

vii. Utilisant la relation approchée (2.35) pour évaluer le taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$ . La conductivité relative  $Q_y^*$  est, selon la relation (2.32) :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,0148 \times 1,89}{1,25993167^{8/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} = 0,67553294$$

Ainsi, le taux de remplissage correspondant à cette conductivité relative est, conformément à la relation (2.35) :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{1,456(1 + 0,468Q_y^{*2})} - 0,609Q_y^*}{1 + 0,213Q_y^{*2}} \right]^2$$

$$= \left[ \frac{\sqrt{1,456 \times (1 + 0,468 \times 0,67553294^2)} - 0,609 \times 0,67553294}{1 + 0,213 \times 0,67553294^2} \right]^2 = 0,69982492 \cong 0,70$$

Nous retrouvons bien la valeur de  $\eta$  calculée à l'étape (ii).

## II.4. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE

Il est tout à fait justifié d'admettre que, pour une même conduite, le coefficient de résistance à l'écoulement varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$ . Ceci serait valable aussi bien pour le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* que pour le coefficient  $n$  de *Manning*. En pratique, lorsqu'il s'agit de dimensionner une conduite circulaire à écoulement libre, les paramètres connus sont le débit volume  $Q$ , la pente longitudinale  $i$  de la conduite, la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, le taux de remplissage  $\eta$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Notons que ni le coefficient de résistance de *Chézy*, ni celui de *Manning* ne constitue une donnée du problème. Lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* doit être utilisée pour dimensionner la conduite, il sera alors nécessaire de déterminer la valeur de  $C$  ou celle de  $n$ . Ceci constitue l'un des objectifs principaux de cette partie de l'étude.

### II.4.1. Relation générale du coefficient de résistance de *Chézy*

Pour mettre en évidence la variation du coefficient  $C$  de *Chézy* en fonction de tous les paramètres régissant l'écoulement, la formule de *Achour* et *Bedjaoui* (2006) est d'une grande utilité. Cette relation, applicable à tous les profils géométriques, a été établie dans le domaine entier de l'écoulement turbulent englobant ainsi les régimes d'écoulement turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux. Selon *Achour* et *Bedjaoui* (2006), le débit volume  $Q$  s'exprime par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.36)$$

où  $\varepsilon$  est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et  $R$  est un nombre de *Reynolds* que l'on peut exprimer par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.37)$$

Pour une conduite circulaire en charge de diamètre  $D$  et dont le rayon hydraulique est  $R_h = D/4$ , la relation (2.37) devient alors :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.38)$$

où l'indice «  $p$  » désigne l'état plein de la conduite.

En comparant les relations (2.1) et (2.36), il apparaît clairement que le coefficient  $C$  de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.39)$$

ou bien, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.40)$$

Tenant compte de la relation (2.9), la relation (2.39) montre bien que le coefficient de résistance  $C$  de Chézy dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et d'un nombre de Reynolds  $R$ , lui-même fonction de la pente  $i$ , du diamètre  $D$  de la conduite, de  $\eta$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (2.41)$$

Tenant compte de la relation (2.9), la relation (2.37) s'écrit :

$$R = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.42)$$

ou bien :

$$R = R_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.43)$$

En ayant recours aux relations (2.9) et (2.43), la relation (2.40) s'écrit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.44)$$

Il apparaît ainsi que le coefficient de résistance  $C$  de Chézy dépend de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ , du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Lorsque ces paramètres sont donnés, la relation (2.44) permet la détermination explicite du coefficient  $C$ . Cependant, lorsqu'il s'agit de dimensionner la conduite, le diamètre  $D$  n'est plus une donnée du problème et seuls les paramètres  $Q, \eta, i, \varepsilon, \nu$  sont connus. Dans ce cas, la relation (2.44) ne permet plus de déterminer de manière explicite le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy.

Pour le cas de la conduite circulaire pleine, correspondant à  $\eta = 1$  ou à  $\varphi(\eta) = 1$ , la relation (2.44) mène à écrire que :

$$\frac{C_p}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R_p}\right) \quad (2.45)$$

ou bien :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R_p}\right) \quad (2.46)$$

Pour les valeurs données de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , la relation (2.46) permet d'évaluer la valeur du coefficient de résistance  $C_p$  de Chézy, pour le cas de l'écoulement en conduite circulaire pleine.

#### II.4.1.1. Calcul du coefficient de résistance de Chézy par la Méthode du modèle rugueux (MMR)

Lorsque le diamètre  $D$  de la conduite n'est plus une donnée du problème, la relation (2.44) ne peut être utilisée pour le calcul du coefficient  $C$  de Chézy. Les paramètres connus sont le débit volume  $Q$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, la pente longitudinale  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Pour déterminer le coefficient  $C$  de Chézy, sous ces conditions du problème, la méthode du modèle rugueux (MMR) peut être d'une grande utilité.

Rappelons que le modèle rugueux de référence (Achour, 2007) est caractérisé par un coefficient de frottement  $\bar{f} = 1/16$ , ce qui se traduit par un coefficient de résistance de Chézy :

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (2.47)$$

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre  $\bar{D}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , sous une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour déterminer le coefficient de résistance  $C$  de Chézy, caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{D} \neq D$
- ii.  $\bar{Q} = Q$
- iii.  $\bar{i} = i$

iv.  $\bar{\eta} = \eta$

v.  $\bar{\nu} = \nu$

Selon la relation (2.11), la conductivité relative du modèle rugueux de référence est alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.48)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.47) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g D^5 i}} \quad (2.49)$$

Par suite, la relation (2.12) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128 g i D^5}} = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.50)$$

Soit :

$$\bar{D} = [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0.4} [\varphi(\eta)]^{-0.6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0.4} \quad (2.51)$$

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , les relations (2.5), (2.6) et (2.51) permettent le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.42) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.52)$$

Soit :

$$\bar{R} = \bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.53)$$

où :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.54)$$

Selon la MMR, le coefficient  $C$  de Chézy est tel que :

$$C = \frac{\bar{C}}{\psi^{5/2}} \quad (2.55)$$

où  $\psi$  est un paramètre adimensionnel défini par la relation :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.56)$$

En tenant compte des relations (2.47) et (2.56), la relation (2.55) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.57)$$

ou bien, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.58)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\bar{D}$ ,  $\eta$  et  $\bar{R}$ , la relation (2.57) permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème. L'exemple d'application suivant illustre la démarche à suivre pour le calcul de  $C$ .

#### II.4.1.2. Exemple d'application 4

Une conduite circulaire de diamètre  $D$ , siège d'un écoulement uniforme, écoule un débit volume  $Q = 0,987 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous une pente longitudinale  $i = 3.10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par une rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$  et le taux de remplissage est  $\eta = 0,6$ .

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre  $D$ .

#### Solution

- i. En application des relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) = \cos^{-1}(1-2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,6) \times \sqrt{0,6 \times (1-0,6)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,6)} = 1,110576819$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \left[ \sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} \left[ \varphi(\eta) \right]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[ \sqrt{2} \times 1,77215425 \right]^{-0,4} \times 1,110576819^{-0,6} \times \left( \frac{0,987}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,075071373 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2,075071373^3}}{10^{-6}} = 917317,5$$

Ainsi, selon la relation (2.57), le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est :

$$\begin{aligned} C &= -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \\ &= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left( \frac{10^{-4} / 2,304526164}{4,75 \times 1,110576819} + \frac{8,5}{917317,5 \times 1,110576819^{3/2}} \right) = 79,79486326 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \\ &\cong 79,8 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \end{aligned}$$

- ii. La relation (2.10) permet de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$\begin{aligned} D &= \left[ 0,125 \sigma(\eta) \right]^{-0,4} \left[ \varphi(\eta) \right]^{-0,6} \left( \frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[ 0,125 \times 1,77215425 \right]^{-0,4} \times 1,110576819^{-0,6} \times \left( \frac{0,987}{79,79486326 \times \sqrt{3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Remarquons que les relations (2.10) et (2.51) permettent de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite peut s'écrire :

$$D = 2,639 \bar{D} \left( \frac{\sqrt{g}}{C} \right)^{0,4}$$

Soit :

$$D = \bar{D} \left( \frac{8\sqrt{2g}}{C} \right)^{0,4} = 2,075071373 \times \left( \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{79,79486326} \right)^{0,4} = 1,49974997 \text{ m} \cong 1,5 \text{ m}$$

iii. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre  $D$  ainsi calculé, le débit volume  $Q$  par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- L'aire de la section mouillée  $A$  par la relation (2.4), soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,5^2}{4} \times 1,77215425 \times 1,110576819 = 1,107063803 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,5 \times 1,110576819 = 0,41646631 \text{ m}$$

- Le nombre de Reynolds  $R$  par la relation (2.37), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 0,41646631^3}}{10^{-6}} = 659826,745$$

Ainsi, selon la relation générale (2.36), le débit volume  $Q$  serait égal à :

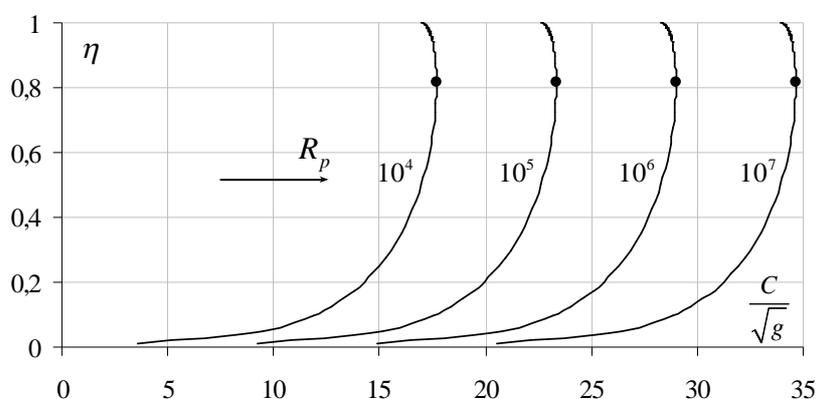
$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,107063803 \times \sqrt{0,41646631 \times 3 \cdot 10^{-4}} \times \log \left( \frac{10^{-4}}{14,8 \times 0,41646631} + \frac{10,04}{659826,745} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$Q = 0,98716 \text{ m}^3 / \text{s}$  bien, avec un écart relatif de moins 0,017% seulement, au débit bien, avec un écart relatif de moins 0,017% seulement, au débit volume  $Q$  donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

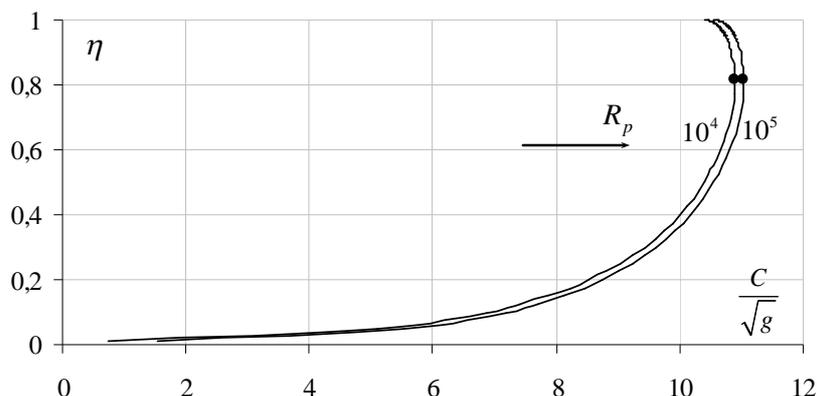
### II.4.1.3. Coefficient de résistance maximal de Chézy

Selon la relation (2.44), le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est fonction de trois variables adimensionnelles qui sont la rugosité relative  $\varepsilon / D$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et le nombre de Reynolds  $R_p$ . Sa représentation graphique n'est donc pas aisée, mais l'on peut montrer, à titre indicatif, sa variation pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ . Cette démarche a été exécutée pour différentes valeurs de  $\varepsilon / D$  et pour des nombres de Reynolds  $R_p$  variant entre  $10^4$  et  $10^7$ . Parmi tous les graphiques ainsi obtenus, ceux des figures 2.8a et 2.8b en sont représentatifs. La figure 2.8a traduit la variation de  $C / \sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , pour la valeur  $\varepsilon / D = 0$  correspondant à un état lisse de la paroi interne de la conduite. La figure 2.8b représente par contre la variation de  $C / \sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , pour la valeur  $\varepsilon / D = 0,05$  correspondant à un état rugueux de la paroi interne de la conduite. Ces valeurs choisies de  $\varepsilon / D$  correspondent en fait aux courbes enveloppes du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.



**Figure 2.8a :** Variation de  $C / \sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$  et de  $R_p$  selon la relation (2.44), pour  $\varepsilon / D = 0$ .

(●) Valeurs maximales  $C_{\max.} / \sqrt{g}$  obtenues pour  $\eta \cong 0,8128$ .



**Figure 2.8b :** Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$  et de  $R_p$  selon la relation (2.42), pour  $\varepsilon/D = 0,05$ . (●) Valeurs maximales  $C_{\max.}/\sqrt{g}$  obtenues pour  $\eta \cong 0,8128$ .

La figure 2.8a montre clairement que, pour une valeur donnée du nombre de Reynolds  $R_p$ ,  $C/\sqrt{g}$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  jusqu'à une valeur maximale représentée par le symbole plein sur la figure. Au-delà de celle-ci,  $C/\sqrt{g}$  diminue avec l'augmentation de  $\eta$  et cette diminution se poursuit jusqu'à l'état plein de la conduite correspondant à  $\eta = 1$ . Il est à noter également que, quelle que soit la valeur de  $R_p$ , la variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction  $\eta$  s'effectue de manière rapide dans un premier temps, puis de manière lente dans un second temps. La variation rapide de  $C/\sqrt{g}$  s'observe pour une gamme réduite de  $\eta$  que l'on pourrait définir par  $0 < \eta \leq 0,2$ . Au-delà de la valeur  $\eta = 0,2$ ,  $C/\sqrt{g}$  subit une très lente variation dans une large gamme de  $\eta$  indépendamment de la valeur du nombre de Reynolds  $R_p$ . Cet état de variation de  $C/\sqrt{g}$  peut être également observé sur la figure 2.8b. Celle-ci indique, en outre, que pour la forte valeur de la rugosité choisie ( $\varepsilon/D = 0,05$ ), les courbes de variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$  sont très proches les unes des autres et se confondent pour les valeurs de  $R_p > 10^5$ . Cela met en évidence le caractère turbulent rugueux de l'écoulement, pour lequel  $C/\sqrt{g}$  est quasi indépendant du nombre de Reynolds  $R_p$  et ne dépend que de la valeur du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite.

Le résultat le plus significatif, obtenu lors du tracé de la variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , est que la valeur maximale  $C_{\max.}/\sqrt{g}$  est atteinte pour le taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$ , quelle que soit la valeur de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et de celle du nombre de Reynolds  $R_p$ . En d'autres termes, la valeur maximale  $C_{\max.}/\sqrt{g}$ , et donc  $C_{\max.}$ , s'obtient à la profondeur normale  $y_n \cong 0,813D$ . Pour la valeur  $\eta = 0,8128$ , la fonction  $\varphi(\eta)$  définie par la relation (2.6) prend la valeur :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,8128) \times \sqrt{0,8128 \times (1 - 0,8128)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,8128)} = 1,217233628 \cong 1,21723$$

En substituant cette valeur de  $\varphi(\eta)$  dans la relation (2.44), celle-ci devient :

$$\frac{C_{\max.}}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.59)$$

ou bien :

$$C_{\max.} = -4\sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.60)$$

Rappelons que dans les relations (2.59) et (2.60), le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est donné par la relation (2.38).

Pour les valeurs données de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , la relation (2.61) permet d'évaluer la valeur maximale du coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, pour le cas de l'écoulement uniforme en conduite circulaire.

Lorsque le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, la détermination du coefficient de résistance maximal  $C_{\max.}$  de *Chézy* est possible en ayant recours à la relation (2.57). Dans cette relation, le taux de remplissage prend la valeur  $\eta = 0,8128$ , correspondant à  $\varphi(\eta) = 1,217233628$ . Ainsi :

$$C_{\max.} = -5,343\sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{5,782} + \frac{6,329}{R_p} \right) \quad (2.61)$$

Selon les relations (2.61), le coefficient de résistance  $C_{\max.}$  se rapporte aux caractéristiques connues du modèle rugueux de référence, ce qui permet de le calculer de manière aisée même si le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas donné. L'exemple d'application suivant montre les étapes à suivre pour le calcul du coefficient de résistance maximal  $C_{\max.}$  de *Chézy*.

#### II.4.1.4. Exemple d'application 5

Une conduite circulaire de diamètre  $D$  est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume  $Q = 0,942 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous une pente longitudinale  $i = 4.10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par une rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$  et le taux de remplissage est  $\eta = 0,65$ .

Calculer la valeur du coefficient de résistance maximal  $C_{\max.}$  de *Chézy*.

#### Solution

- i. En application des relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) = \cos^{-1}(1-2 \times 0,65) = 1,87548898$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,65) \times \sqrt{0,65 \times (1-0,65)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,65)} = 1,15259048$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= [\sqrt{2} \times 1,87548898]^{-0,4} \times 1,15259048^{-0,6} \times \left( \frac{0,942}{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,838305722 \text{ m} \end{aligned}$$

- ii. Selon la relation (2.54), le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  est :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 1,838305722^3}}{10^{-6}} = 883214,31$$

- iii. Par suite, le coefficient de résistance  $C_{\max}$  de Chézy est, en vertu de la relation (2.61) :

$$\begin{aligned} C_{\max} &= -5,343\sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{5,782} + \frac{6,329}{\bar{R}_p} \right) \\ &= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left( \frac{10^{-4} / 1,838305722}{5,782} + \frac{6,329}{883214,31} \right) = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \end{aligned}$$

## II.4.2. Expression du débit volume maximal $Q_{\max}$ .

Pour déterminer l'expression du débit volume maximal  $Q_{\max}$ , nous pouvons faire appel à la relation (2.36). Celle-ci peut s'écrire, en tenant compte des relations (2.4), (2.9) et (2.43):

$$Q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{g i D^5} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.62)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est donné par la relation (2.38), tandis que la fonction  $\varphi(\eta)$  est définie par la relation (2.6).

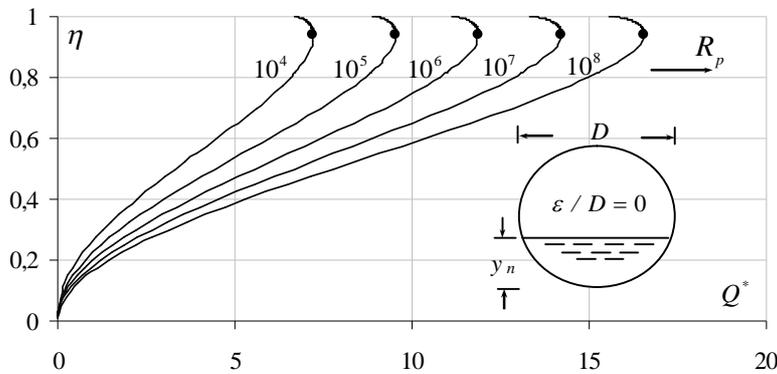
Définissons la conductivité relative  $Q^*$  telle que :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i D^5}} \quad (2.63)$$

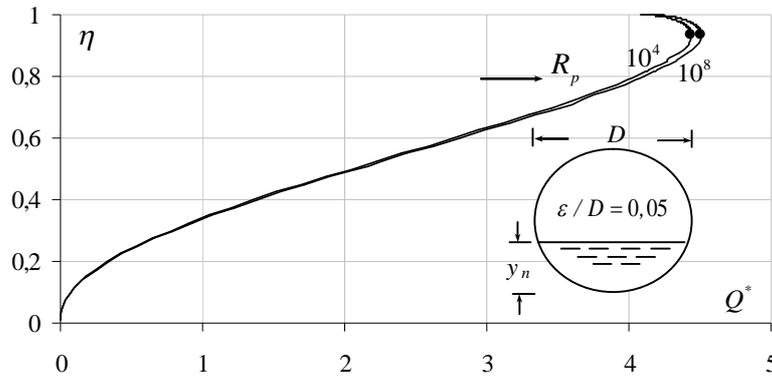
La relation (2.62) peut alors s'écrire, en termes adimensionnels :

$$Q^* = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.64)$$

La conductivité relative  $Q^*$  est donc une fonction de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ , du nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein et du taux de remplissage  $\eta$ . L'étude détaillée de la relation (2.64) a été effectuée pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ . La figure 2.9 (a et b) montre la variation du taux de remplissage  $\eta$  en fonction de  $Q^*$  pour les valeurs extrêmes de la rugosité relative, soit respectivement pour  $\varepsilon / D = 0$  et  $\varepsilon / D = 0,05$ .



**Figure 2.9a :** Variation de  $\eta(Q^*)$  pour diverses valeurs du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , à  $\varepsilon / D = 0$ , conformément à la relation (2.64). (●) Valeurs maximales de  $Q^*$  correspondant à  $0,9355 \leq \eta \leq 0,9431$ .



**Figure 2.9b :** Variation de  $\eta(Q^*)$  pour diverses valeurs du nombre de Reynolds  $R_p$  à  $\varepsilon/D = 0,05$ , conformément à la relation (2.64). (●) Valeurs maximales de  $Q^*$  correspondant à  $0,9340 \leq \eta \leq 0,9346$ .

La figure 2.9a montre bien que la valeur maximale du débit relatif  $Q^*$  n'est pas unique pour les faibles valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . Par contre, la figure 2.9b indique que pour les fortes rugosités relatives, la valeur maximale de  $Q^*$  demeure quasiment invariable quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds  $R_p$ .

Pour l'ensemble des domaines considérés des rugosités relatives  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , tels que  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$  et  $10^4 \leq R_p \leq 10^8$ , les valeurs du taux de remplissage  $\eta$  correspondant à  $Q = Q_{\max}$  sont regroupées dans le tableau 2.8.

**Tableau 2.8 :** Valeurs du taux de remplissage  $\eta$  pour  $Q = Q_{\max}$ , calculées selon la relation (2.62) pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ .

$\varepsilon/D \rightarrow$	0	$10^{-5}$	$5.10^{-5}$	$10^{-4}$	$5.10^{-4}$	$10^{-3}$	$5.10^{-3}$	$10^{-2}$	0,02	0,05	
$R_p$	$10^4$	0,93546 3	0,93547	0,93549 8	0,93553 2	0,93541 5	0,93598 5	0,93651 8	0,93636 9	0,935 7	0,934 0
	$5.10^4$	0,937862	0,93789 6	0,93802 1	0,93815 7	0,93876 6	0,93901 6	0,93860 1	0,93783 2	0,936 7	0,934 5
	$10^5$	0,938664	0,93872 9	0,93895 2	0,93916 6	0,93982 3	0,93990 6	0,93896 8	0,93805 5	0,936 8	0,934 6
	$5.10^5$	0,940164	0,94043 4	0,94101 8	0,94129 7	0,94129 3	0,94092 0	0,93928 9	0,93824 1	0,936 9	0,934 6
	$10^6$	0,940692	0,94115 2	0,94180 5	0,94196 2	0,94155 9	0,94107 7	0,93933 2	0,93826 5	0,936 9	0,934 6
	$5.10^6$	0,941771 8	0,94277 7	0,94293 6	0,94273 5	0,94179 3	0,94120 9	0,93936 6	0,93828 4	0,936 9	0,934 6
	$10^7$	0,942092	0,94330 6	0,94314 4	0,94285 6	0,94182 3	0,94122 6	0,93937 0	0,93828 7	0,936 9	0,934 6
	$5.10^7$	0,942838	0,94392 9	0,94332 7	0,94295 7	0,94184 8	0,94123 9	0,93937 3	0,93828 9	0,936 9	0,934 6
	$10^8$	0,9431	0,9440	0,9434	0,9430	0,9418	0,9412	0,9394	0,9383	0,936 9	0,934 6

Il ressort du tableau 2.8 que :

- 1) Pour une valeur fixée de la rugosité relative,  $\eta(Q = Q_{\max.})$  augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds*  $R_p$  et tend à devenir constant.
- 2) Pour une valeur fixée du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , le taux de remplissage  $\eta(Q = Q_{\max.})$  augmente dans un premier temps puis diminue dans un second temps en passant par un maximum.
- 3) Pour les valeurs pratiques de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , indiquées dans l'espace grisâtre du tableau 2.8, la valeur moyenne  $\eta(Q = Q_{\max.}) = 0,9407 \cong 0,941$  semble être la mieux appropriée.

Pour la valeur  $\eta(Q = Q_{\max.}) \cong 0,941$  et selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,941) = 2,65088585$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,941) \times \sqrt{0,941 \times (1 - 0,941)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,941)} = 1,15679361$$

Tenant compte de ces valeurs, la relation (2.62) permet d'écrire que :

$$Q_{\max.} = -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \quad (2.65)$$

La relation (2.65) permet d'évaluer le débit maximal que peut évacuer une conduite circulaire à écoulement uniforme, lorsque la rugosité absolue  $\varepsilon$ , le diamètre  $D$ , la pente longitudinale  $i$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement sont connus. L'exemple d'application suivant indique les étapes à suivre pour la détermination du débit maximal  $Q_{\max.}$ .

#### II.4.2.1. Exemple d'application 6

Déterminer la capacité d'évacuation d'une conduite circulaire de diamètre  $D = 1,5 \text{ m}$ , de pente longitudinale  $i = 5.10^{-4}$  et dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ . La viscosité cinématique du liquide en écoulement est  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{ s}$ .

#### **Solution**

Pour les données imposées, nous pouvons évaluer :

- i.* La rugosité relative  $\varepsilon / D$ , soit :

$$\varepsilon / D = 10^{-3} / 1,5 = 6,6667.10^{-4}$$

ii. Le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , en vertu de la relation (2.38), soit :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 727832,398$$

iii. Ainsi, le débit maximal  $Q_{\max.}$  serait, selon la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,5^5} \times \log \left( \frac{6,6667.10^{-4}}{4,28} + \frac{8,07}{727832,398} \right) = 1,70 m^3 / s \end{aligned}$$

#### II.4.3. Relation approchée de la profondeur normale

Cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. Pour établir cette relation, il a été nécessaire d'avoir recours aux relations (2.62) et (2.65). La démarche adoptée est identique à celle ayant servi à la détermination des relations (2.18) et (2.29).

Cette démarche a donc consisté à déterminer la loi de variation du taux de remplissage  $\eta$  en fonction de  $Q / Q_{\max.}$ . Pour cela, il a été nécessaire d'étudier la variation de  $\eta(Q / Q_{\max.})$  pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , en s'appuyant sur les relations (2.62) et (2.65).

Nos calculs ont pu montrer que, dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , le taux de remplissage  $\eta(Q / Q_{\max.})$  de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin \left( \frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,953 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \quad (2.66)$$

La profondeur normale  $y_n$  s'exprime alors par :

$$y_n = \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[ 0,953 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] \quad (2.67)$$

La relation (2.66) a été soumise à des vérifications intenses en l'appliquant à plus de 600 exemples numériques. Il a été alors constaté que la relation (2.66) entraîne une erreur maximale de 0,5%

seulement sur le calcul du taux de remplissage  $\eta$ . L'exemple d'application suivant montre les étapes à suivre pour la détermination de la profondeur normale  $y_n$  par application de la relation (2.66) ou (2.67).

#### II.4.3.1. Exemple d'application 7

Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement uniforme dans une conduite circulaire écoulant le débit volume  $Q = 1,3 \text{ m}^3 / \text{s}$  et dont le taux de remplissage est  $\eta = 0,7$ . La conduite est caractérisée par une pente longitudinale  $i = 5 \cdot 10^{-4}$  et une rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ . La viscosité cinématique du liquide en écoulement est  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ .

#### Solution

i. Pour les données du problème et selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7) = 1,98231317$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,7) \times \sqrt{0,7 \times (1 - 0,7)}}{1,98231317} = 1,18493852$$

ii. Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= [\sqrt{2} \times 1,98231317]^{-0,4} \times 1,18493852^{-0,6} \times \left( \frac{1,3}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,923787694 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,923787694^3}}{10^{-6}} = 1057134,407$$

Ainsi, selon la relation (2.57), le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right)$$

$$= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left( \frac{10^{-3} / 1,923787694}{4,75 \times 1,18493852} + \frac{8,5}{1057134,407 \times 1,18493852^{3/2}} \right) = 67,04248101 m^{0,5} / s$$

iii. La relation (2.10) permet de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = [0,125 \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left( \frac{Q}{C\sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

$$= [0,125 \times 1,98231317]^{-0,4} \times 1,18493852^{-0,6} \times \left( \frac{1,3}{67,04248101 \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} \cong 1,49 m$$

iv. Adoptons le diamètre  $D = 1,5 m$ .

Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 727832,398$$

v. La rugosité relative est :

$$\varepsilon / D = 10^{-3} / 1,5 = 6,6667 \cdot 10^{-4}$$

vi. Ainsi, le débit maximal  $Q_{\max}$  serait, selon la relation (2.65) :

$$Q_{\max} = -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right)$$

$$= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,5^5} \times \log \left( \frac{6,6667 \cdot 10^{-4}}{4,28} + \frac{8,07}{727832,398} \right) = 1,70 m^3 / s$$

vii. Par suite, selon la relation (2.66), le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[ 0,953 \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,953 \times \left( \frac{1,3}{1,7} \right)^{0,495} \right] = 0,691326435$$

viii. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est donc :

$$y_n = \eta D = 0,691326435 \times 1,5 = 1,037 m \cong 1,04 m$$

ix. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre  $D$  ainsi adopté, le débit volume  $Q$  par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- Les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  par les relations (2.5) et (2.6) respectivement, pour la nouvelle valeur calculée de  $\eta$  :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,691326435) = 1,963462328$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,691326435) \times \sqrt{0,691326435 \times (1 - 0,691326435)}}{1,963462328} = 1,180054383 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  par la relation (2.4), soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,5^2}{4} \times 1,963462328 \times 1,180054383 = 1,303308183 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,5 \times 1,180054383 = 0,442520394 \text{ m}$$

- Le nombre de Reynolds  $R$  par la relation (2.37), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,442520394^3}}{10^{-6}} = 933005,9581$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  serait égal, selon la formule générale (2.36), à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,303308183 \times \sqrt{0,442520394 \times 5 \cdot 10^{-4}} \times \log\left(\frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,442520394} + \frac{10,04}{933005,9581}\right) \end{aligned}$$

Soit :  $Q = 1,300648 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,3 \text{ m}^3 / \text{s}$

Ce débit volume, calculé en application de la formule générale (2.36), correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

#### II.4.4. Expression générale du diamètre

L'exemple d'application 4 a montré les étapes à suivre pour déterminer la valeur du diamètre  $D$  de la conduite. Le calcul de  $D$  a nécessité la détermination des valeurs des fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$ , celle du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence et enfin l'estimation du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*. La démarche ainsi adoptée peut être simplifiée en tenant compte des relations (2.51) et (2.56) et après avoir noté que le diamètre  $D$  est le produit de  $\psi$  et de  $\bar{D}$ . Ainsi :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \quad (2.68)$$

Nous obtenons ainsi la relation générale du diamètre  $D$  de la conduite dans laquelle ne figure plus le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*. Les étapes de calcul de  $D$  sont alors les suivantes :

- i. A partir des valeurs connues du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, les relations (2.5) et (2.6) permettent de déterminer la valeur des fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  respectivement.
- ii. Les valeurs connues de  $\sigma(\eta)$ ,  $\varphi(\eta)$ ,  $Q$  et  $i$  sont introduites dans la relation (2.51) pour le calcul de  $\bar{D}$ .
- iii. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  est alors déduit de la relation (2.54).
- iv. Ainsi, tous les paramètres de la relation (2.68) sont connus pour l'évaluation du diamètre  $D$  recherché de la conduite.

##### II.4.4.1. Exemple d'application 8

Reprendre les données de l'exemple d'application 7 et déterminer le diamètre  $D$  de la conduite par application de la relation générale (2.68).

### Solution

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence ainsi que les paramètres  $\sigma(\eta)$ ,  $\varphi(\eta)$  et  $\bar{R}_p$  ont été déjà calculés au cours de l'exemple d'application 7, soient :

$$\bar{D} = 1,923787694 \text{ m}, \varphi(\eta) = 1,180054383 \text{ et } \bar{R}_p = 1057134,407 .$$

Selon la relation générale (2.68), le diamètre  $D$  de la conduite serait égal à :

$$\begin{aligned} D &= 1,35 \bar{D} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 1,923787694 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3} / 1,923787694}{4,75 \times 1,180054383} + \frac{8,5}{1057134,407 \times 1,180054383^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} = 1,4907 \text{ m} \\ &\cong 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

#### II.4.4.2. Exemple d'application 9

On désire maintenir le taux de remplissage  $\eta = 0,75$  dans une conduite circulaire écoulant un débit volume  $Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ . La conduite est caractérisée par une pente longitudinale  $i = 5 \cdot 10^{-4}$  et une rugosité absolue  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Déterminer la valeur :

- i. des coefficients de Chézy  $C$  et  $C_{\max}$ . Commenter.
- ii. du diamètre  $D$  de la conduite.
- iii. de la profondeur normale  $y_n$  et déduire la valeur réelle du taux de remplissage  $\eta$ .
- iv. vérifier les calculs.

### Solution

- i. les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,75) = 2,0943951$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,75) \times \sqrt{0,75 \times (1 - 0,75)}}{2,0943951} = 1,20674834$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \left[ \sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[ \sqrt{2} \times 2,0943951 \right]^{-0,4} \times 1,20674834^{-0,6} \times \left( \frac{3}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,60088548 \text{ m}\end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,60088548^3}}{10^{-6}} = 1661790,76$$

Ainsi, selon la relation (2.57), le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est :

$$\begin{aligned}C &= -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \\ &= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left( \frac{8,5}{1661790,76 \times 1,20674834^{3/2}} \right) = 90,595043 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 90,6 \text{ m}^{0,5} / \text{s}\end{aligned}$$

En vertu de la relation (2.61), la valeur de  $C_{\max}$  est :

$$\begin{aligned}C_{\max} &= -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{5,782} + \frac{6,329}{\bar{R}_p} \right) = -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left( \frac{6,329}{1661790,76} \right) = 90,6897 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \\ &\cong 90,7 \text{ m}^{0,5} / \text{s}\end{aligned}$$

Le faible écart observé entre les valeurs de  $C$  et de  $C_{\max}$  s'explique par le fait que le coefficient de Chézy subit de très lentes variations dans une large gamme du taux de remplissage  $\eta$ . Cette caractéristique du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy a été mise en évidence lors du tracé des figures 2.8a et 2.8b.

ii. Selon la relation (2.68), le diamètre de la conduite serait égal à :

$$\begin{aligned}D &= 1,35 \bar{D} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 2,60088548 \times \left[ -\log \left( \frac{8,5}{1661790,76 \times 1,20674834^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} = 1,786739 \text{ m}\end{aligned}$$

Adoptons alors le diamètre :

$$D = 1,8m$$

iii. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 956760,534$$

Le débit volume maximal  $Q_{\max.}$  est, en vertu de la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^5} \times \log \left( \frac{8,07}{956760,534} \right) = 3,60224927 m^3 / s \cong 3,60 m^3 / s \end{aligned}$$

La profondeur normale  $y_n$  recherchée est, selon la relation (2.67) :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[ 0,953 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times 1,8 \times \sin^{-1} \left[ 0,953 \times \left( \frac{3}{3,60224927} \right)^{0,495} \right] \\ &= 1,33134451m \cong 1,331m \end{aligned}$$

Pour le diamètre  $D = 1,8m$ , le taux de remplissage  $\eta$  est :

$$\eta = y_n / D = 1,33134451 / 1,8 = 0,73963584 \cong 0,74$$

iv. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre  $D$  ainsi adopté, le débit volume  $Q$  par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- Les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  par les relations (2.5) et (2.6) respectivement, pour la nouvelle valeur calculée de  $\eta$  :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,73963584) = 2,07062101$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,73963584) \times \sqrt{0,73963584 \times (1 - 0,73963584)}}{2,07062101} = 1,20314714 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  par la relation (2.4), soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,8^2}{4} \times 2,07062101 \times 1,20314714 = 2,01792202 m^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,8 \times 1,20314714 = 0,54141621 m$$

- Le nombre de Reynolds  $R$  par la relation (2.37), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,54141621^3}}{10^{-6}} = 1262645,31$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  serait égal, selon la formule générale (2.36), à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,01792202 \times \sqrt{0,54141621 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{1262645,31}\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$Q = 2,99982663 m^3 / s \cong 3 m^3 / s$$

Ce débit volume, calculé en application de la formule générale (2.36), correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

#### II.4.5. Expression de la vitesse maximale $V_{\max}$ .

En ayant recours à la relation générale (2.36) du débit volume  $Q$  et compte tenu du fait que la vitesse moyenne de l'écoulement est  $V = Q / A$ , il est aisé de déduire que :

$$V = -4\sqrt{2g} \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.69)$$

En tenant compte des relations (2.9) et (2.43), la relation (2.69) devient :

$$V = -2\sqrt{2g} [\varphi(\eta)]^{1/2} \sqrt{g i D} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.70)$$

Définissons le paramètre adimensionnel  $V^*$  tel que :

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{g i D}} \quad (2.71)$$

La relation (2.70) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$V^* = -2\sqrt{2}[\varphi(\eta)]^{1/2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p[\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.72)$$

Le paramètre  $V^*$  est donc fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ . Nous avons représenté sur les figures 2.10a et 2.10b, à titre qualitatif, la variation de  $V^*$  en fonction de  $\eta$  pour quelques valeurs du nombre de *Reynolds*  $R_p$  et pour les rugosités relatives  $\varepsilon/D = 0$  et  $\varepsilon/D = 0,01$  respectivement.

Les courbes des figures 2.10a et 2.10b montrent que, pour la même valeur du nombre de *Reynolds*  $R_p$ ,  $V^*$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , jusqu'à un maximum, puis diminue dans un second temps lorsque  $\eta$  continue d'augmenter. Les calculs ont montré que la valeur maximale de  $V^*$  s'obtient pour le taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$ , quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds*  $R_p$  ou de celle de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ .  $V_{\max}^*$ , et donc la vitesse moyenne  $V_{\max}$ , apparaît à la profondeur  $y_n = 0,8128D$  comme pour le cas du coefficient de résistance maximal  $C_{\max}$  de *Chézy*.

Les courbes des figures 2.10a et 2.10b révèlent aussi que plus la rugosité relative est élevée et plus les courbes de variation de  $V^*$  se resserrent et se confondent quasiment au-delà de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,01$ . Pour cette rugosité relative, la figure 2.10b montre clairement que les courbes  $\eta(V^*)$  se confondent pour  $R_p \geq 10^5$ .

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,8128$ , la fonction  $\varphi(\eta)$  prend la valeur :

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,8128) \times \sqrt{0,8128 \times (1 - 0,8128)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,8128)} = 1,21723363 \end{aligned}$$

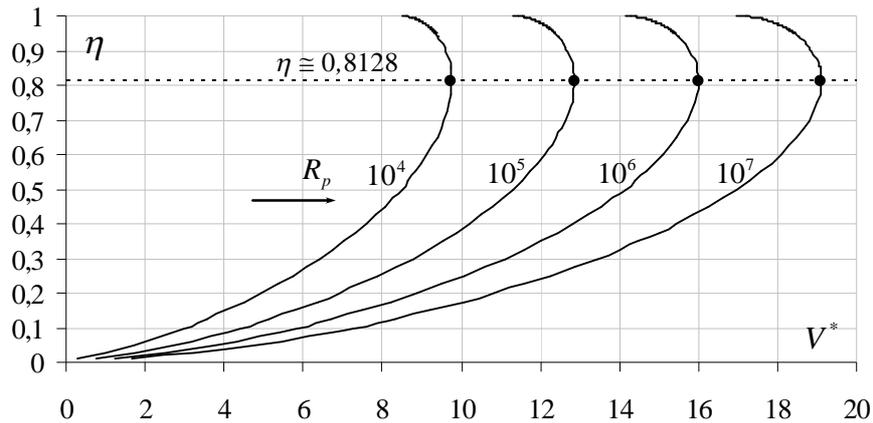
En substituant cette valeur de  $\varphi(\eta)$  dans la relation (2.72), il vient que :

$$V_{\max}^* = -3,12 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p}\right) \quad (2.73)$$

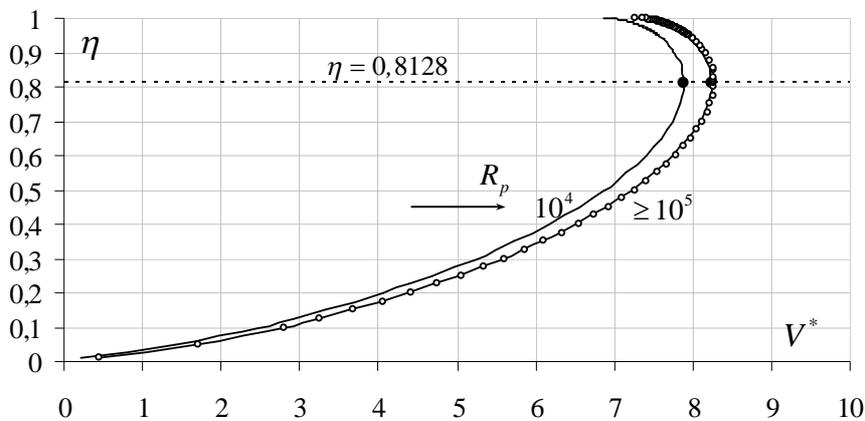
En tenant compte de la relation (2.71), la relation (2.73) permet d'écrire que :

$$V_{\max.} = -3,12 \sqrt{g i D} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.74)$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la vitesse maximale  $V_{\max.}$  de l'écoulement uniforme dans une conduite circulaire, applicable dans le domaine entier de l'écoulement turbulent. Rappelons que le nombre de Reynolds  $R_p$  est donné par la relation (2.38).



a)



b)

**Figure 2.10 :** Variation de la vitesse relative  $V^*$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour quelques valeurs du nombre de Reynolds  $R_p$ . **a) :**  $\varepsilon / D = 0$ , **b) :**  $\varepsilon / D = 0,01$ .

(●) Valeurs maximales de  $V^*$  obtenues pour  $\eta \cong 0,8128$ .

#### II.4.5.1. Exemple d'application 10

Soit une conduite circulaire en béton de rugosité absolue  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ . On admet que la vitesse d'auto-curage doit être supérieure ou égale à  $0,2 \text{ m/s}$  et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder  $2,5 \text{ m/s}$  à  $3 \text{ m/s}$ . La conduite écoule le débit

volume  $Q = 1,7 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous une pente longitudinale  $i = 3 \cdot 10^{-4}$ . Le taux de remplissage de la conduite est  $\eta = 0,6$ .

Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement.

### Solution

i. Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,6) \times \sqrt{0,6 \times (1-0,6)}}{1,77215425} = 1,11057682$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \left[ \sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} \left[ \varphi(\eta) \right]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[ \sqrt{2} \times 1,77215425 \right]^{-0,4} \times 1,11057682^{-0,6} \times \left( \frac{1,7}{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,579204314 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 2,579204314^3}}{10^{-6}} = 1271155,673$$

ii. En application de la relation (2.68), le diamètre de la conduite est égal à :

$$\begin{aligned} D &= 1,35 \bar{D} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 2,579204314 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3} / 2,579204314}{4,75 \times 1,11057682} + \frac{8,5}{1271155,673 \times 1,11057682^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,9799512 \text{ m} \cong 1,98 \text{ m} \end{aligned}$$

Adoptons alors le diamètre :

$$D = 2 \text{ m}$$

iii. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2^3}}{10^{-6}} = 867990,783$$

Le débit volume maximal  $Q_{\max.}$  est, selon la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2^5} \times \log \left( \frac{10^{-3} / 2}{4,28} + \frac{8,07}{867990,783} \right) \\ &= 2,79046163 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,79 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

La profondeur normale  $y_n$  recherchée est, en application de la relation (2.67) :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[ 0,953 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times 2 \times \sin^{-1} \left[ 0,953 \times \left( \frac{1,7}{2,79046163} \right)^{0,495} \right] \\ &= 1,17866169 \text{ m} \cong 1,18 \text{ m} \end{aligned}$$

Pour le diamètre  $D = 2 \text{ m}$ , le taux de remplissage  $\eta$  serait égal à :

$$\eta = y_n / D = 1,17866169 / 2 = 0,58933 \cong 0,59$$

iv. Déterminons la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement, après avoir calculé l'aire de la section mouillée  $A$  par la relation (2.4). Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,59$ , les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,59) = 1,75178278$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,59) \times \sqrt{0,59 \times (1 - 0,59)}}{1,75178278} = 1,10107417$$

L'aire de la section mouillée  $A$  est par suite :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{2^2}{4} \times 1,75178278 \times 1,10107417 = 1,92884277 \text{ m}^2$$

La vitesse moyenne  $V$  est donc :

$$V = Q / A = 1,7 / 1,92884277 = 0,88135748 \text{ m / s} \cong 0,88 \text{ m / s}$$

La vitesse  $V$  ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage de  $0,2 \text{ m / s}$ , imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

v. Déterminons la vitesse maximale  $V_{\max}$  par la relation (2.74), soit :

$$\begin{aligned} V_{\max} &= -3,12 \sqrt{g i D} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \\ &= -3,12 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2} \times \log \left( \frac{10^{-3} / 2}{4,504} + \frac{7,476}{867990,783} \right) = 0,93884059 \text{ m / s} \cong 0,94 \text{ m / s} \end{aligned}$$

La vitesse  $V_{\max}$  ainsi calculée est bien inférieure à la vitesse admissible indiquée dans l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

vi. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre  $D$  ainsi adopté, le débit volume  $Q$  par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- Le rayon hydraulique  $R_h$  par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 2 \times 1,10107417 = 0,550537985 \text{ m}$$

- Le nombre de *Reynolds*  $R$  par la relation (2.37), soit :

$$R = \frac{32 \sqrt{2} \sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 0,550537985^3}}{10^{-6}} = 1002859,229$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  serait égal, selon la formule générale (2.36), à :

$$\begin{aligned} Q &= -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,92884277 \times \sqrt{0,550537985} \times 3.10^{-4} \times \log \left( \frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,550537985} + \frac{10,04}{1002859,229} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$Q = 1,70276702 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,703 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Ce débit volume, calculé en application de la formule générale (2.36), correspond, avec un écart relatif inférieur à 0,18% seulement, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

#### II.4.6. Relation générale du coefficient $n$ de Manning

L'expression générale du coefficient  $n$  de *Manning* peut être déduite des relations (2.2) et (2.36). En comparant ces deux relations, nous pouvons en effet déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.75)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, pour rappel, donné par la relation (2.37). La relation (2.75) montre que le coefficient  $n$  de *Manning* est fonction de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du nombre de *Reynolds*  $R$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . Cette dépendance de  $n$  vis-à-vis de  $R_h$  traduit bien le fait que  $n$  varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. Mais nous verrons, lors de la représentation graphique de  $n$ , que cette variation n'est que relative, voire faible.

En ayant recours aux relations (2.9) et (2.43) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (2.75) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -7,127\sqrt{g} D^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.76)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.77)$$

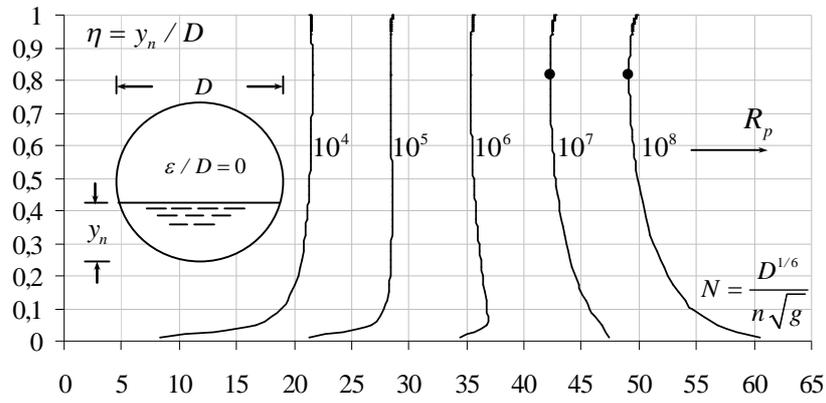
la relation (2.77) s'écrit alors :

$$N = -7,127 [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.78)$$

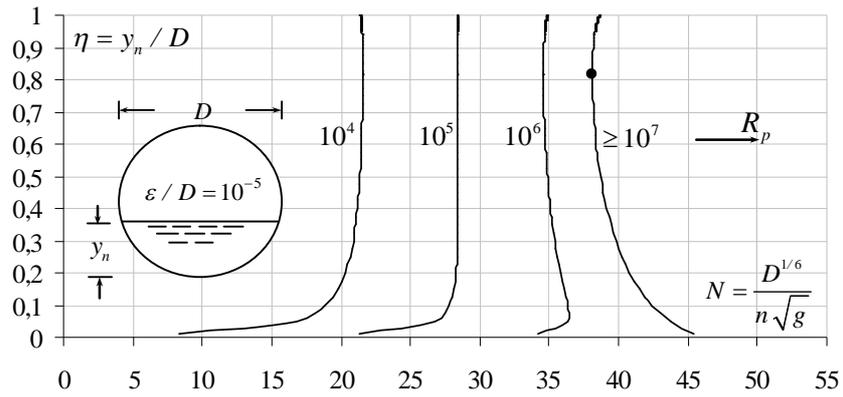
Lorsque les paramètres  $\eta$ ,  $\varepsilon$ ,  $D$  et  $\nu$  sont connus, la relation (2.76) ou (2.78) permet d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning*.

Sur les figures 2.11a à 2.11h a été tracée la variation du coefficient  $N$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ . Il ressort des figures obtenues que :

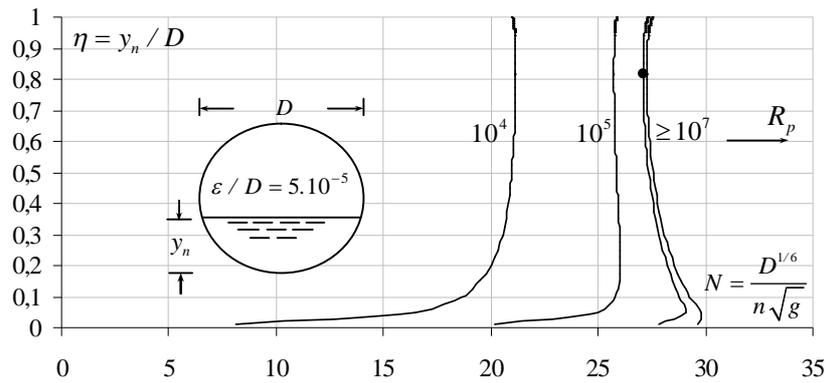
- i. Quelles que soient les valeurs de  $R_p$  et de  $\varepsilon / D$ , le coefficient  $N$  subit une variation très rapide pour les faibles valeurs du taux de remplissage  $\eta$  ( $\eta \leq 0,1$ ). Pour ces faibles valeurs de  $\eta$ , le coefficient  $N$  peut augmenter ou diminuer avec l'augmentation de  $\eta$ , selon la valeur du nombre de *Reynolds*  $R_p$ . C'est ainsi que  $N$  augmente avec l'accroissement de  $\eta$  pour des valeurs de  $R_p$  inférieures ou égales à  $10^6$  environ, mais diminue avec l'accroissement de  $\eta$  lorsque  $R_p$  est supérieur à  $10^6$ .
- ii. Pour  $\eta > 0,1$ , le coefficient  $N$  subit une variation très faible et tend à devenir constant au fur et à mesure de l'augmentation de  $\eta$ . La variation de  $\eta$  n'a que peu d'influence sur la valeur du coefficient  $N$ . La constance du paramètre  $N$  est remarquable pour la valeur  $R_p = 10^5$ . Cette dernière valeur de  $R_p$ , qui est par ailleurs la plus faible valeur pratique, semble être la limite au-delà de laquelle s'opère un changement de concavité des courbes. Ce changement de concavité est ponctué par l'apparition d'une valeur minimale du paramètre  $N$ . Mais, notons que la valeur minimale de  $N$  n'est pas remarquable lorsqu'on la compare aux autres valeurs que prend le paramètre  $N$ . En effet, l'écart entre la valeur minimale de  $N$  et les autres valeurs que peut prendre ce paramètre n'est pas significatif. Notons que les valeurs minimales du paramètre  $N$  apparaissent pour le taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$ , valeur pour laquelle le coefficient  $C$  de *Chézy* atteint son maximum.
- iii. Pour une valeur fixée de  $\eta$ , le coefficient  $N$  augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds*  $R_p$ .
- iv. Au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et de celle du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , les courbes des figures 2.11a à 2.11h se resserrent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur donnée de  $R_p$  indiquée sur les figures. A titre indicatif, les courbes de la figure 2.11c, correspondant à la rugosité relative  $\varepsilon / D = 5.10^{-5}$ , se confondent pour les valeurs de  $R_p \geq 10^7$ . Pour la plus forte rugosité relative considérée, soit  $\varepsilon / D = 10^{-2}$ , les courbes de la figure 2.11h se confondent pour  $R_p \geq 10^5$ .



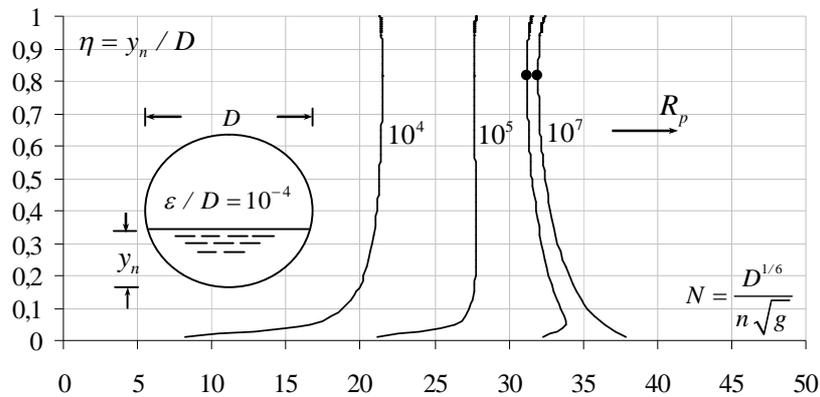
a)



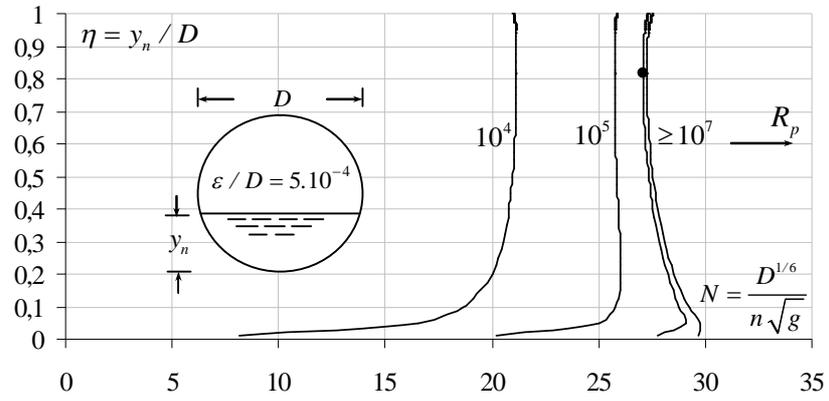
b)



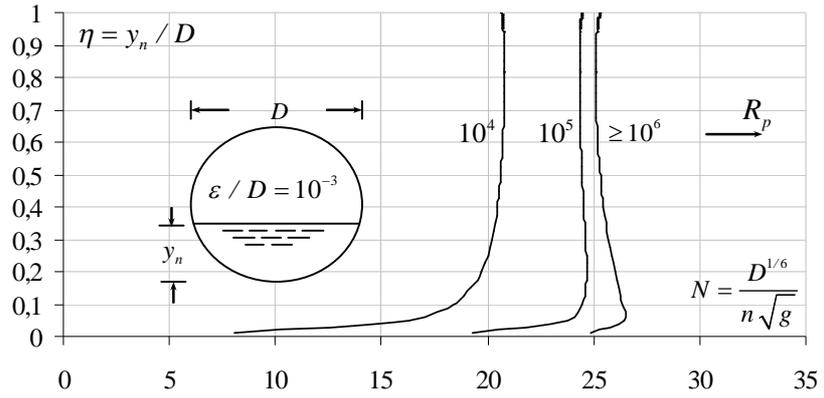
c)



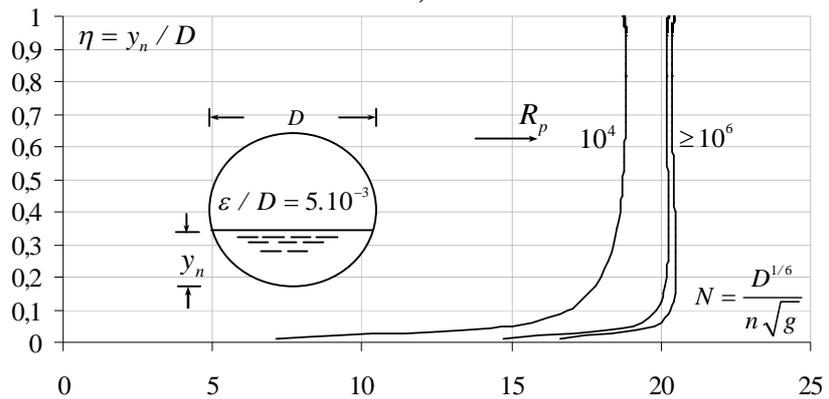
d)



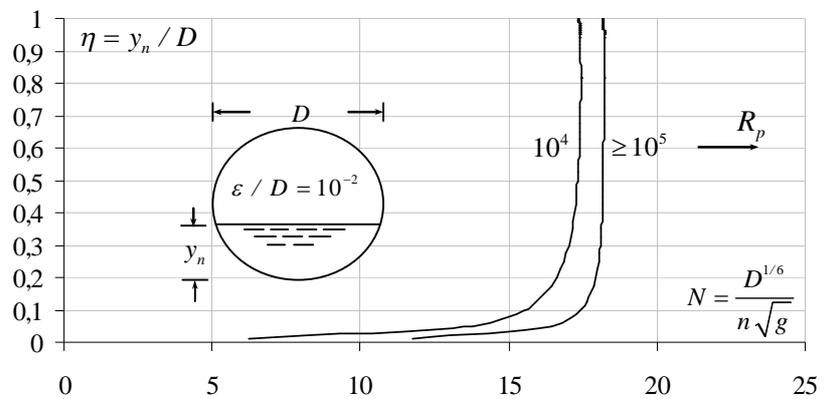
e)



f)



g)



h)

**Figure 2.11 :** Variation de  $N = D^{1/6} / (n\sqrt{g})$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\epsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ .  
Courbes tracées selon la relation (2.78).

(●) Taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$  correspondant à la valeur minimale de  $N$ .

Pour la valeur de  $\eta = 0,8128$ , la fonction  $\varphi(\eta)$  prend la valeur :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-0,8128) \times \sqrt{0,8128 \times (1-0,8128)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,8128)} = 1,217233628$$

Par suite, la relation (2.78) devient :

$$N_{min} = -6,897 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.79)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.77) :

$$n_{max} = -\frac{0,145D^{1/6}}{\sqrt{g}} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \right]^{-1} \quad (2.80)$$

#### II.4.6.1. Calcul du coefficient $n$ de Manning par la MMR

La relation (2.76) ou (2.78) ne permet d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning* que si le diamètre  $D$  de la conduite est une donnée du problème. Dans le cas où  $D$  n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer la valeur de  $n$ , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En comparant les relations (2.1) et (2.2), nous pouvons déduire que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.81)$$

Par conséquent, le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{\bar{C}} \quad (2.82)$$

Rappelons que  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ .

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre  $\bar{D}$  ; il écoule un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , pour une pente longitudinale  $\bar{i}$ .

Pour déterminer le coefficient  $n$  de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{D} \neq D$  : cette condition énonce que le diamètre de la conduite et celui du modèle rugueux de référence sont différents.
- ii.  $\bar{Q} = Q$  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume  $Q$ .
- iii.  $\bar{i} = i$  : la conduite et le modèle rugueux de référence sont caractérisés par la même pente longitudinale  $i$ .
- iv.  $\bar{\eta} = \eta$  : le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v.  $\bar{\nu} = \nu$  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même liquide.

Le débit volume  $\bar{Q}$  écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit, en vertu de la relation de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.83)$$

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  de l'écoulement dans la conduite considérée sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence  $\bar{A}$  et  $\bar{R}_h$  par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.84)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.85)$$

En tenant compte des relations (2.84) et (2.85), la relation (2.2) devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.86)$$

Il ressort ainsi des relations (2.83) et (2.86) que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (2.87)$$

Tenant compte du fait que  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ , la combinaison des relations (2.82) et (2.87) mène à écrire que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.88)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est donné par la relation (2.56), tandis que  $\bar{R}_h$  s'exprime par la relation :

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{4} \varphi(\eta) \quad (2.89)$$

Ainsi, la relation (2.88) permet d'écrire que :

$$n = \frac{0,156}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \varphi(\eta) \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.90)$$

Selon la relation (2.90), le coefficient  $n$  de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et des caractéristiques  $\bar{D}$  et  $\bar{R}_p$  du modèle rugueux de référence. Le diamètre  $\bar{D}$  est donné par la relation (2.51), tandis que le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  est régi par la relation (2.54).

L'exemple d'application suivant montre les étapes d'évaluation du coefficient  $n$  de *Manning*, par application de la méthode du modèle rugueux.

#### II.4.6.2. Exemple d'application 11

Reprenons les données de l'exemple d'application 4 et déterminons la valeur du :

- i. coefficient  $n$  de *Manning*.
- ii. diamètre  $D$  de la conduite.

#### **Solution**

Les données du problème sont :

$$Q = 0,987 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3 \cdot 10^{-4} ; \varepsilon = 10^{-4} \text{ m} ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} ; \eta = 0,6 .$$

- i. Au cours de l'exemple d'application 4, les paramètres suivants ont été déterminés, soient :

- $\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1,110576819$

- $\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = 1,77215425$
- $\bar{D} = [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = 2,075071373 m$
- $\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 917317,5$

Ainsi, selon la relation (2.90), le coefficient  $n$  de *Manning* serait égal à :

$$n = \frac{0,156}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,156}{\sqrt{9,81}} \times 2,075071373^{1/6} \times 1,110576819^{1/6} \times$$

$$\left[ -\log \left( \frac{10^{-4} / 2,075071373}{4,75 \times 1,110576819} + \frac{8,5}{917317,5 \times 1,110576819^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \cong 0,01082 m^{-1/3} s$$

ii. La relation (2.23) permet de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \frac{(nQ / \sqrt{i})^{3/8}}{[\sigma(\eta)]^{3/8} [\varphi(\eta)/4]^{5/8}} = \frac{(0,01082 \times 0,987 / \sqrt{3 \cdot 10^{-4}})^{3/8}}{1,77215425^{3/8} \times (1,110576819 / 4)^{5/8}} = 1,4991 m \cong 1,5 m$$

Nous retrouvons ainsi, avec un écart relatif extrêmement faible, la même valeur du diamètre  $D$  calculée par la relation de *Chézy* lors de l'exemple d'application 4, soit  $D = 1,5 m$ .

Selon la relation (2.38), le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 563776,551$$

La valeur maximale de  $n$  est, selon la relation (2.80) :

$$n_{\max} = -\frac{0,145 D^{1/6}}{\sqrt{g}} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \right]^{-1} = -\frac{0,145 \times 1,5^{1/6}}{\sqrt{9,81}} \left[ \log \left( \frac{0,0001 / 1,5}{4,504} + \frac{7,476}{563776,551} \right) \right]^{-1}$$

$$= 0,01088157 m^{-1/3} s \cong 0,0109 m^{-1/3} s$$

## II.5. ECOULEMENT CRITIQUE

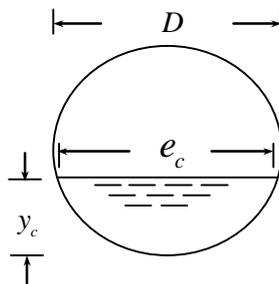
### II.5.1. Débit relatif

La profondeur critique est un paramètre important qui permet de se prononcer sur le caractère fluvial ou torrentiel de l'écoulement. Lorsque la profondeur critique  $y_c$  est supérieure à la profondeur normale  $y_n$ , l'écoulement est de nature torrentielle. Dans le cas contraire, l'écoulement est fluvial.

L'écoulement critique est régi par la relation bien connue sous le nom de condition de criticité. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q^2 e_c}{g A_c^3} = 1 \quad (2.91)$$

où  $e_c$  désigne la largeur du plan d'eau (Figure 2.12) et l'indice «  $c$  » se réfère l'état critique de l'écoulement.



**Figure 2.12** : Schéma de définition de l'écoulement critique dans une conduite circulaire de diamètre  $D$

Si  $\eta_c = y_c / D$  est le taux de remplissage de la conduite à l'état critique, la largeur du plan d'eau  $e_c$  s'écrit alors :

$$e_c = 2D\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \quad (2.92)$$

Selon la relation (2.3), l'aire de la section mouillée critique  $A_c$  s'exprime par :

$$A_c = \frac{D^2}{4} \left[ \cos^{-1}(1-2\eta_c) - 2(1-2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \right] \quad (2.93)$$

En insérant les relations (2.92) et (2.93) dans la relation (2.91), celle-ci devient :

$$\frac{128\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)}}{\left[ \cos^{-1}(1-2\eta_c) - 2(1-2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \right]^3} \left( \frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (2.94)$$

En introduisant le débit relatif :

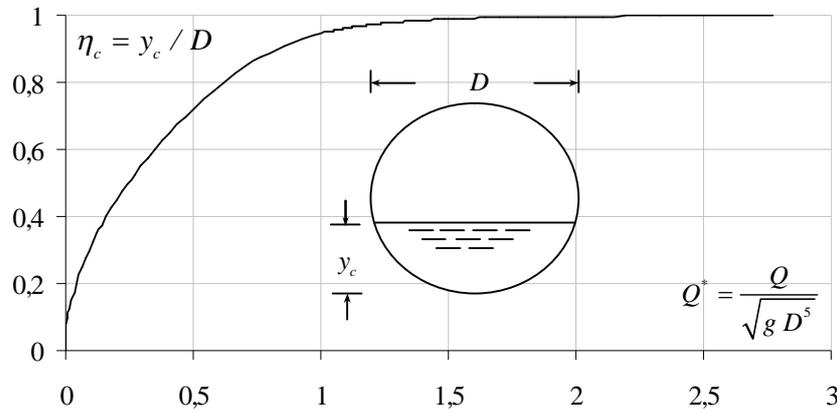
$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \quad (2.95)$$

la relation (2.94) permet alors de déduire que :

$$Q^* = \frac{\left[ \cos^{-1}(1-2\eta_c) - 2(1-2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \right]^{3/2}}{8\sqrt{2}[\eta_c(1-\eta_c)]^{1/4}} \quad (2.96)$$

La relation (2.96) est celle qui régit l'écoulement critique dans une conduite circulaire. En pratique, les paramètres  $Q$  et  $D$ , par conséquent  $Q^*$ , sont connus et l'on recherche alors à déterminer la profondeur critique  $y_c$ . La détermination de  $y_c$  passe par celle de  $\eta_c$ , puisque  $y_c = \eta_c D$ . La relation (2.96) montre clairement que  $\eta_c$  est implicite vis-à-vis de  $Q^*$  et l'évaluation de  $\eta_c$  nécessiterait un procédé itératif ou graphique. L'un des objectifs principaux de notre étude est de proposer une relation approchée, fiable, au calcul du taux de remplissage critique  $\eta_c$  et donc de la profondeur critique  $y_c$ .

La relation (2.96) a été représentée graphiquement sur la figure 2.13. Celle-ci montre que le taux de remplissage  $\eta_c$  à l'état critique augmente avec l'accroissement du débit relatif  $Q^*$ . En outre, nous pouvons constater que lorsque  $Q^* \rightarrow \infty$ , le taux de remplissage à l'état critique  $\eta_c \rightarrow 1$ .



**Figure 2.13 :** Variation du taux de remplissage critique  $\eta_c$  en fonction du débit relatif  $Q^*$ .

Courbe tracée selon la relation (2.96).

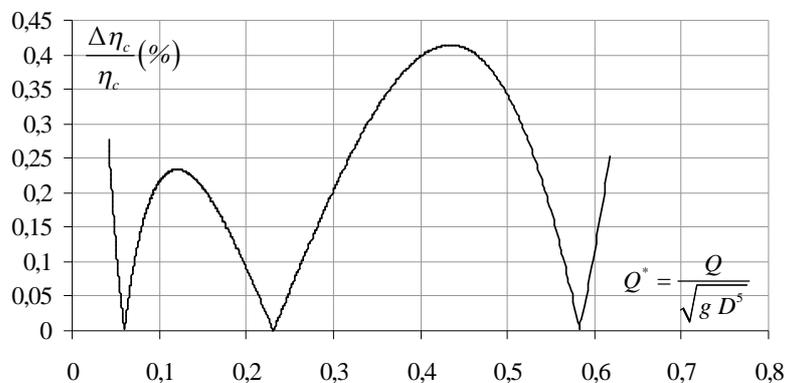
### II.5.2. Relation approchée de la profondeur critique

La relation implicite (2.96) a fait l'objet d'un programme de calcul intense, plus particulièrement dans la gamme  $0,05 \leq \eta_c \leq 0,75$ . La valeur limite supérieure  $\eta_c = 0,75$  de la gamme choisie de  $\eta_c$  a été dictée par des considérations pratiques, puisque la conduite est dimensionnée en règle générale pour des taux de remplissage dépassant rarement les 75%. Un taux de remplissage de la conduite allant au-delà de 75% n'est que très rarement observé.

Nos calculs ont montré que l'une des relations fiables qui approche le mieux la relation implicite (2.96) est :

$$\sinh(0,3\eta_c) = 0,312 Q^{*0,52} \quad (2.97)$$

Cette relation a été établie dans la gamme  $0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$  correspondant à  $0,042 \leq Q^* \leq 0,618$ . L'écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à 0,42%, comme l'indique la figure 2.14.



**Figure 2.14 :** Ecart relatif en % occasionnés par la relation (2.97) sur le calcul du taux de remplissage critique  $\eta_c$ .

La relation (2.97) permet alors d'écrire que :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312 Q^{*0,52}) \quad (2.98)$$

A partir des valeurs connues du débit volume  $Q$  et du diamètre  $D$  de la conduite, le débit relatif  $Q^*$  est alors déduit de la relation (2.95). Par suite, la relation (2.98) donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique  $y_c$ .

### II.5.3. Exemple d'application 12

Une conduite circulaire, siège d'un écoulement uniforme, écoule le débit volume  $Q = 1,8 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous la pente longitudinale  $i = 3 \cdot 10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ . Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,65$ , déterminer :

- i. le diamètre  $D$  de la conduite.
- ii. la nature de l'écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

#### Solution

- i. Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,65) = 1,87548898$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,65) \times \sqrt{0,65 \times (1 - 0,65)}}{1,87548898} = 1,152590478$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \left[ \sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[ \sqrt{2} \times 1,87548898 \right]^{-0,4} \times 1,152590478^{-0,6} \times \left( \frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,52286567 \text{ m}\end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2,52286567^3}}{10^{-6}} = 1229734,369$$

En application de la relation (2.68), le diamètre de la conduite est égal à :

$$\begin{aligned}D &= 1,35 \bar{D} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 2,52286567 \times \left[ -\log \left( \frac{5.10^{-4} / 2,52286567}{4,75 \times 1,152590478} + \frac{8,5}{1229734,369 \times 1,152590478^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,8866 \text{ m}\end{aligned}$$

Adoptons alors le diamètre :

$$D = 1,9 \text{ m}$$

Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 1,9^3}}{10^{-6}} = 803712,127$$

Le débit volume maximal  $Q_{\max}$  est, selon la relation (2.65) :

$$\begin{aligned}Q_{\max} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 1,9^5} \times \log \left( \frac{5.10^{-4} / 1,9}{4,28} + \frac{8,07}{803712,127} \right) \\ &= 2,60968521 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,61 \text{ m}^3 / \text{s}\end{aligned}$$

La profondeur normale  $y_n$  recherchée est, en application de la relation (2.67) :

$$y_n = \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[ 0,953 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times 1,9 \times \sin^{-1} \left[ 0,953 \times \left( \frac{1,8}{2,60968521} \right)^{0,495} \right]$$

$$= 1,21826901 m \cong 1,22 m$$

Pour le diamètre  $D = 1,9 m$ , le taux de remplissage  $\eta$  serait égal à :

$$\eta = y_n / D = 1,21826901 / 1,9 = 0,64119422 \cong 0,641$$

ii. Selon la relation (2.95), le débit relatif  $Q^*$  est

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} = \frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 1,9^5}} = 0,1154925$$

Par suite, la profondeur critique est, en application de la relation (2.98) :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh} \left( 0,312 Q^{*0,52} \right) = \frac{1,9}{0,3} \times \operatorname{asinh} \left( 0,312 \times 0,1154925^{0,52} \right) = 0,64205357 m \cong 0,642 m$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque  $y_n > y_c$ .

## II.6. Conclusion

L'étude s'est intéressée à l'écoulement uniforme dans une conduite de forme circulaire. L'écoulement a été analysé dans le cas d'un coefficient de résistance constant, puis variable. L'étude s'est basée sur les relations de *Chézy* et de *Manning*, largement utilisées dans la pratique. En se basant sur la formule de *Chézy* et pour un coefficient de résistance constant, la conductivité  $Q^*$  rapportée au diamètre de la conduite a été exprimée et la courbe de remplissage de la conduite a été tracée, puis discutée. Une relation approchée, explicite et fiable, du taux de remplissage  $\eta$  en fonction de  $Q/Q_p$  a été déterminée. L'étude s'est poursuivie par la détermination de la relation de la profondeur normale en termes de débit volume maximal  $Q_{\max}$ . En introduisant la notion de conductivité rapportée à la profondeur normale, une relation explicite a été proposée pour le calcul du taux de remplissage de la conduite. Deux exemples d'application détaillés ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre pour le calcul de la profondeur normale et du diamètre de la conduite.

L'étude de l'écoulement à coefficient de résistance constant, basée sur la formule de *Manning*, a mené à l'expression de la conductivité rapportée au diamètre de la conduite, puis à la relation approchée de la profondeur normale. L'étude s'est poursuivie par le tracé de la courbe de remplissage de la conduite, dont les particularités ont été commentées. La transformation de la

relation de la conductivité rapportée au diamètre de la conduite a pu aboutir à une excellente relation approchée du taux de remplissage en fonction de la conductivité rapportée à la profondeur normale. Un exemple d'application a été proposé pour expliquer les étapes à suivre au calcul de la profondeur normale et du diamètre de la conduite lorsque la relation de *Manning* est utilisée.

La seconde partie du chapitre a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable, en se basant sur la formule de *Chézy* et de *Manning*. La relation générale du coefficient de *Chézy* et de *Manning* a été exprimée et sa représentation graphique a montré des particularités que nous avons discutées, en particulier les valeurs maximales de ces coefficients. En l'absence du diamètre de la conduite, la méthode du modèle rugueux (MMR) nous a permis de calculer les coefficients de *Chézy* et de *Manning* et la méthode a été illustrée à travers un exemple d'application. Les expressions du débit maximal et de la vitesse maximale ont été déterminées et des exemples d'application ont été proposés.

Le chapitre s'est achevé par l'étude de l'écoulement critique dans la conduite de forme circulaire. Le débit relatif a été exprimé, sous une forme implicite, en fonction du taux de remplissage critique et sa représentation graphique a montré une courbe ascendante, tendant vers un taux de remplissage critique égal à l'unité lorsque le débit relatif tend vers l'infini. L'étude de l'écoulement critique s'est particulièrement intéressé au calcul de la profondeur critique. Une excellente relation approchée a ainsi été proposée dont l'application a été illustrée à travers un exemple d'application.

## CONCLUSION GENERALE

Notre étude s'est intéressée à l'écoulement uniforme dans une conduite de forme circulaire. Deux chapitres ont été proposés. Le premier chapitre a été consacré aux rappels sur l'écoulement uniforme, tandis que le second chapitre a eu pour objectif l'étude particulière de l'écoulement uniforme dans la conduite de forme circulaire.

Au cours du premier chapitre, les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme ont été schématisées et discutées, en comparant la pente longitudinale du canal et la pente critique. La zone transitoire au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît a été mise en évidence et correspondant à la zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, avant qu'il ne soit équilibré par les forces de gravité. Nous avons rappelé que les relations régissant l'écoulement uniforme s'expriment en règle générale par  $V = C R_h^\beta J^\gamma$  où  $V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge totale, égale à la pente géométrique du canal, et  $C$  est un paramètre lié à la résistance à l'écoulement, dépendant de plusieurs de facteurs. Parmi les nombreuses relations qui régissent l'écoulement uniforme, d'eux d'entre elles sont largement utilisées en pratique. Il s'agit des relations de *Chézy* et de *Manning* pour lesquelles  $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 1/2$  et  $\beta = 2/3$  respectivement. Nous avons indiqué quelques formules destinées au calcul des coefficients de résistance  $C$  de *Chézy* et  $n$  de *Manning*, en particulier les formules de *Ganguillet – Kutter*, de *Bazin*, de *Powell* et de *Hager*.

Le premier chapitre de notre mémoire s'est également intéressé aux équations théoriques de l'écoulement uniforme. Nous avons notamment rappelé la loi de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent et la relation théorique de *Keulegan* qui exprime la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts. Il a été déduit de cette relation les expressions du coefficient  $C$  de *Manning* et du coefficient de frottement  $f$  pour le cas des parois rugueuse et lisse. Dans le cas de la paroi rugueuse, la relation du coefficient  $n$  de *Manning* a alors été identifiée ; de ce fait la méthode de détermination le coefficient  $n$  de *Manning* ainsi que son interprétation théorique ont été déduites.

Le premier s'est poursuivi par le calcul de l'écoulement uniforme. En se basant sur la relation ci-dessus indique de la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement, l'expression de la conductivité  $K = Q/J^\gamma$  a été déterminée. La conductivité correspond donc à la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, puisqu'elle est directement liée au débit volume  $Q$ . La conductivité a été exprimée lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* est utilisée.

Lorsque la formule de *Manning* est utilisée, le facteur de section  $AR_h^{2/3}$  a été exprimé, où  $A$  est l'aire de la section mouillée et  $R_h$  est le rayon hydraulique. Le facteur de section est régi par la relation  $AR_h^{2/3} = nQ / \sqrt{J}$ , étroitement lié à la conductivité. Le facteur de section  $AR_h^{2/3}$  dépend exclusivement de la géométrie de la section mouillée de la conduite ou du canal considéré. Le facteur de section relatif  $AR_h^{2/3} / D^{8/3}$  a été représenté graphiquement en fonction du taux de remplissage  $\eta = y_n / D$ , pour le cas de la conduite de forme circulaire, où  $y_n$  est la profondeur normale et  $D$  est le diamètre de la conduite. La courbe obtenue montre que  $AR_h^{2/3} / D^{8/3}$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement de  $\eta$ , puis diminue dans un second temps avec l'augmentation de  $\eta$ ; la variation du facteur de section relatif passe alors par un maximum.

Le second chapitre de notre mémoire constitue notre propre contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans la conduite de forme circulaire, en ayant notamment recours aux relations de *Chézy* et de *Manning*.

Dans un premier temps, l'écoulement a été analysé à coefficient de résistance constant, puis à coefficient de résistance variable dans un second temps.

A coefficient de résistance constant et lorsque la relation de *Chézy* est appliquée, le calcul a montré que la conductivité relative  $Q^* = Q / \sqrt{C^2 D^5 i}$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. La conductivité relative, à l'état plein, est une constante égale à  $\pi / 8$ . Le rapport  $Q / Q_p$ , où  $Q_p$  est le débit volume à l'état plein, ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. La courbe de remplissage  $Q / Q_p$  en fonction de  $\eta$  a été graphiquement représentée. Nous avons pu constater que le rapport  $Q / Q_p$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur maximale  $Q_{\max.} / Q_p = 1,05041386$ , pour un taux de remplissage  $\eta \cong 0,95$ . Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,5$ , le débit volume  $Q$  vaut la moitié du débit volume de remplissage  $Q_p$ . Compte tenu de la forme implicite de la relation  $Q / Q_p(\eta)$ , vis-à-vis du taux de remplissage  $\eta$ , une excellente relation approchée a été proposée dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,75$ . Elle permet le calcul direct de  $\eta$  et donc de la profondeur normale  $y_n$ . La conductivité relative  $Q^*$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  jusqu'à la valeur maximale  $Q_{\max.}^* \cong 0,4125$ , correspondant à  $\eta = 0,95$ . La forme implicite de  $Q^*(\eta)$  a été

levée en proposant une relation explicite qui lui est approchée, dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,85$ . Cette relation permet également le calcul explicite du taux de remplissage  $\eta$  et, par conséquent, celui de la profondeur normale.

L'application de la relation de *Manning* à coefficient de résistance constant montre que la conductivité relative  $Q^* = nQ / D^{8/3} \sqrt{i}$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$ , sous une forme implicite. La conductivité relative à l'état plein, soit  $Q_p^*$ , est constante et vaut 0,3117. Elle est donc inférieure à celle obtenue lorsque la relation de *Chézy* est utilisée. Il a été graphiquement constaté que la conductivité relative  $Q^*$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur maximale  $Q_{\max.}^* \cong 0,3353$ , pour le taux de remplissage  $\eta = 0,94$ . Elle diminue dans un second temps en dépit de l'augmentation du taux de remplissage  $\eta$ . Afin de lever la forme implicite de la conductivité relative  $Q^*$ , une relation approchée a été proposée dans la large gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,75$ . Cette relation permet d'évaluer le taux de remplissage et donc la profondeur normale. La courbe de remplissage de la conduite, montrant la variation de  $Q/Q_p$  en fonction de  $\eta$  a été graphiquement représentée. Le rapport  $Q/Q_p$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint la valeur maximale  $Q_{\max.}/Q_p = 1,07567944$ , pour un taux de remplissage  $\eta \cong 0,94$ . Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,5$ , le débit volume  $Q$  vaut la moitié du débit volume de remplissage  $Q_p$ .

Le second chapitre de notre mémoire s'est poursuivi par l'étude de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. La variation du coefficient  $C$  de *Chézy* et celle du coefficient  $n$  de *Manning* a été mise en évidence, en ayant recours à la relation générale d'Achour et de *Bedjaoui* qui exprime le débit volume  $Q$ . Il est apparu que  $C$  et  $n$  dépendent de la rugosité relative  $\varepsilon / R_h$  et d'un nombre de *Reynolds*  $R$ . En ayant recours à la méthode du modèle rugueux, il a été possible de calculer de manière explicite les coefficients  $C$  et  $n$ . La représentation graphique de  $C$  et de  $n$  a montré que ces paramètres admettent un maximum et dont l'expression a été déterminée. La valeur maximale de  $C$  et de  $n$  s'obtient à la profondeur normale  $y_n \cong 0,813 D$ .

L'expression générale de la vitesse moyenne  $V$  a été déduite de celle du débit volume  $Q$ . Sa représentation graphique a révélé qu'elle admet un maximum qui apparaît également à la profondeur normale  $y_n \cong 0,813 D$ . De ce fait, la relation exprimant la vitesse moyenne maximale a été déterminée et elle se présente en fonction du diamètre  $D$  de la conduite, de la

rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein.

Dans la large gamme de valeurs du taux de remplissage  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , la relation approchée explicite de la profondeur normale a été déterminée, en termes de débit volume maximal.

Enfin, l'écoulement critique a fait l'objet d'une étude particulière. L'objectif principal a été de proposer une relation approchée au calcul de la profondeur critique.

De nombreux exemples d'application ont été proposés pour montrer la démarche à suivre pour le calcul des caractéristiques hydrauliques de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme circulaire.