

INTRODUCTION GENERALE

Les structures tridimensionnelles à parois minces sont employées généralement en construction aéronautique, navale, mécanique et en génie nucléaire. Elles ont toutefois la particularité commune d'être parmi les structures les plus délicates à étudier.

Qu'il s'agisse d'une couverture en voile mince ou d'un réservoir sous pression, d'une coque de navire ou d'un château d'eau, l'ingénieur reste confronté aux deux impératifs classiques suivants ; Savoir analyser la structure pour la dimensionner avec sécurité, Savoir concevoir, planifier et construire la structure de manière rationnelle et économique.

Mais pour l'ingénieur civil, dans le domaine des coques et structures plissées, survient une troisième exigence essentielle : Savoir choisir des formes esthétiques.

Ce troisième impératif est trop souvent négligé, ou abandonné à l'architecte, alors que, dans ce type de structures, analyse, construction et esthétique sont intimement liées.

L'analyse et la construction s'appuyant sur des notions mathématiques et pratiques éprouvées, l'esthétique par contre reste beaucoup plus, floue, intuitive, subjective et difficile à cerner avec précision. Dans les structures tridimensionnelles de l'ingénieur civil, elle est un pivot essentiel du projet ; les grands projeteurs de coques l'ont bien compris ; ils sont de bons scientifiques, mais ils sont aussi artistes.

Aujourd'hui, la finesse, l'audace et la complexité des structures tridimensionnelles deviennent monnaie courante, car l'ingénieur bénéficie, grâce au calcul numérique par ordinateur. Les méthodes analytiques lourdes et souvent fort imprécises sont abandonnées ; les méthodes simples sont conservées tant pour comprendre quel est le mode de fonctionnement structural essentiel que pour pré dimensionner. L'analyse fine et alors effectuée par un bon programme de calcul par ordinateur (méthode des éléments finis). Rappelons néanmoins que l'informatique ne reste jamais qu'un auxiliaire pour le constructeur : une bonne conception découle d'abord d'un mariage harmonieux des connaissances théoriques et pratiques. [FRE 92]

De nos jours, le calcul par éléments finis des structures formées de plaques et de coques est devenu un véritable outil à vocation industrielle. Il est très répandu dans de nombreux

secteurs à haute technologie, civils ou militaires (tabliers de ponts, carrosseries automobiles, fuselages et ailes d'avions, caissons, réservoirs).

Pour effectuer l'analyse statique d'un ouvrage tel qu'on en rencontre dans la réalité, nous nous rendons compte immédiatement que le nombre d'éléments nécessaires pour le modéliser devient rapidement élevé.

Ceci est dû d'une part à la nature des éléments utilisés et d'autre part à la complexité géométrique de la structure (intersection de coques, raidisseurs,etc.). La quasi-majorité des programmes destinés à résoudre ce genre de problèmes dispose essentiellement de deux types d'éléments : Les éléments de coque plans et les éléments de coque courbe (Iso paramétriques).

On peut approcher la géométrie de la coque par polygonisation et utiliser des éléments plans. Cette approche garantit la représentation des modes rigides. Il s'agit de superposer un élément de membrane et un élément de flexion. Ceci suppose évidemment que les phénomènes de membrane et de flexion soient découplés. [BEL 2000]

Dans cette recherche, nous essayons de contribuer en termes de formulation des éléments récemment développés à des coques de formes diverses.

Les tests de validation et les applications dans le domaine de génie civil sont nécessaires.

La modélisation par l'emploi de logiciels disponibles est très importante.

Ce présent mémoire contient en plus de cette introduction générale cinq chapitres.

- Le premier chapitre comprend une classification des structures en coque selon la forme géométrique et le comportement, en présentant les différentes théories de classifications, ainsi que la nécessité des méthodes numériques.

- Dans le deuxième chapitre, on présente une approche numérique exposant le développement historique de la méthode des éléments finis, et aussi un rappel sur cette méthode : modélisation, discrétisation,..... etc.

- Pour le troisième chapitre c'est la modélisation des structures en coques, qui contient les différents types d'éléments finis pour les structures tridimensionnelles à parois minces, les approches géométriques pour la modélisation des coques et une analyse bibliographique exposant le développement de l'élément de coque.

- Dans le quatrième chapitre nous avons exposé la formulation des éléments de coques à facettes planes ; l'élément quadrilatère ACM-Q4 et l'élément quadrilatère mixte ACM-Q4SBE1, ainsi que l'avantage de l'intégration analytique et une présentation de l'organigramme général.

- Le cinquième chapitre a pour objet de présenter des tests de validation pour les deux éléments « ACM-Q4, ACM-Q4SBE1 » et des applications dans le domaine de génie civil en utilisant le code de calcul SAP2000 qui nous a permis de déterminer les déplacements, avec des commentaires sur les résultats obtenus.

- Enfin le travail se termine par une conclusion générale et des recommandations suivies d'une bibliographie.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : **de génie civil et
hydraulique**



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية و الري
المرجع:.....

Ref :.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention
Du diplôme de
Magister

Option : Modélisation des matériaux et structures

**MODELISATION DES COQUES DE FORMES
QUELCONQUES PAR LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS**

Présenté par :

SEKKOUR HAMIDA

Soutenu publiquement le : 26 /06 /2011

Devant le jury composé de :

Pr .CHEBILI. Rachid.

**Professeur
Université de BISKRA.**

Président.

Dr. HAMADI. Djamal.

**Maître de conférences.
Université de BISKRA.**

Directeur de mémoire.

Dr. OUNIS Abdelhafid.

**Maître de conférences.
Université de BISKRA.**

Examineur.

Dr. TATI Abdelouahab.

**Maître de conférences.
Université de BISKRA.**

Examineur.

CHAPITRE I

CLASSIFICATION DES STRUCTURES EN COQUES

1-1. Description géométrique des différents types des structures en coque

Une coque est un solide caractérisé par une surface courbe dans l'espace et par l'épaisseur h (figure 1.1).

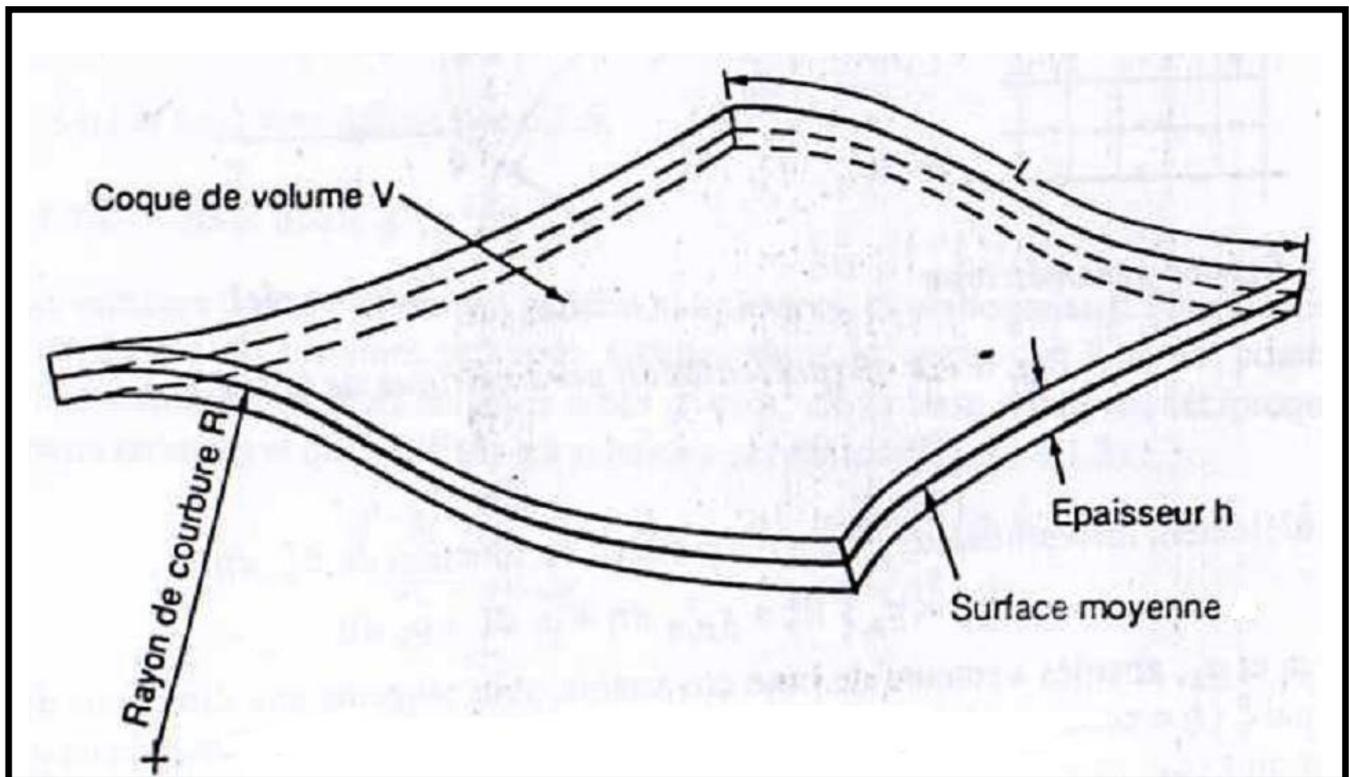


Fig.1.1. Géométrie d'une coque quelconque de volume [BAT 92]

Cette épaisseur h peut varier d'un point à un autre. Elle est considérée petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques de la coque (longueur L , largeur b et rayon de courbure minimum).

Les structures de types coques sont fréquemment rencontrées dans les constructions civiles (toiture, barrages, réservoirs), les constructions mécaniques (carrosseries, automobiles), les constructions aéronautiques et spatiales (fuselages, caissons). [BAT 92]

La géométrie de la surface courbe peut être constante (Coque de révolution, forme simple) ou variable en chaque position (coque de forme complexe).

Autrement dit :

Une coque est définie par la géométrie de sa surface moyenne, et par son épaisseur en tout point de cette surface.

Soit Σ une surface et n une normale au point A de Σ . Un plan P contenant n , réalise une section normale de la surface; cette section se traduit par une courbe plane ν tracée sur Σ . Au point A de cette courbe, on désigne par r_n le rayon de courbure ; son inverse $1/r_n$ est la courbure normale (Figure .1.2). Lorsque le plan p tourne au tour de n , r_n et $1/r_n$ varient entre deux valeurs extrêmes que l'on appelle rayons de courbure principaux et courbures principales (r_1 et r_2 ; $1/r_1$ et $1/r_2$; tenseur de courbure).

Les plans P correspondants sont perpendiculaires. [FRE 92]

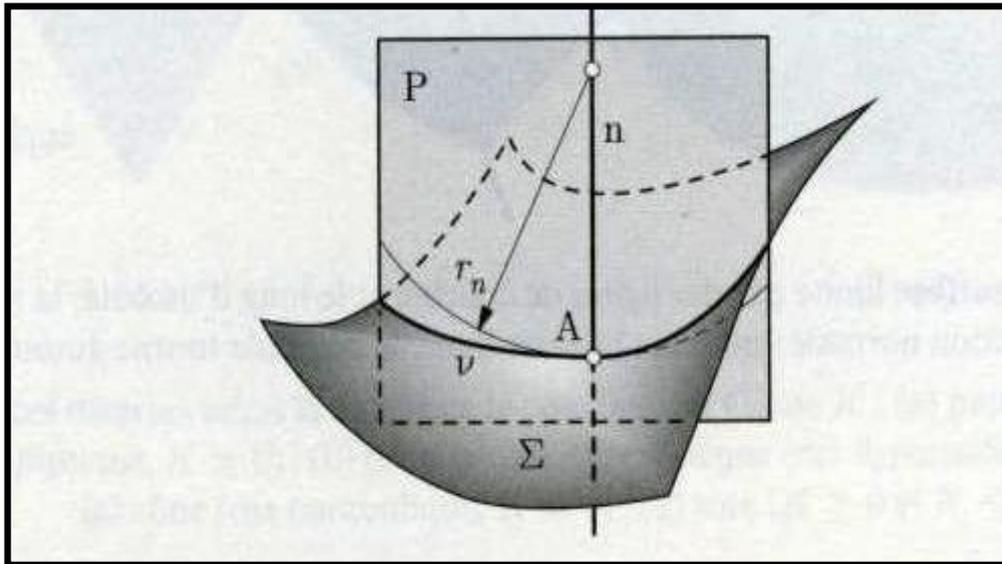


Fig.1.2. Courbe ν , de courbure normale $1/r_n$ au point A , Section normale de la surface Σ par le plan P . [FRE 92]

On appelle courbure " gaussienne " ou totale le produit des courbures principales

$k = (1/r_1) (1/r_2)$. Selon que l'une des courbures principales est nulle, de même signe ou de signe contraire à l'autre, on distingue les surfaces à courbure gaussienne:

- nulle, ou surface à simple courbure (cylindre...).
- positive (sphère.....), surface à double courbure.
- négative (paraboloïde hyperbolique.....), surface à double courbure.

1-2 Choix de la surface moyenne pour une coque

On peut puiser dans le grand choix offert par la géométrie des surfaces.

Parmi les surfaces à simple courbure, le cône et surtout le cylindre sont très utilisés (fusées ; réservoirs à hydrocarbures; récipients sous pression; silos; conduite forcées.....) .

❖ **Voûte autoportante** : une coque cylindrique " ouverte " appuyée à ses seules extrémités (figure.1.3.b); On peut accoler de telles voûtes, par exemple pour réaliser des sheds (figure.1.3.a).

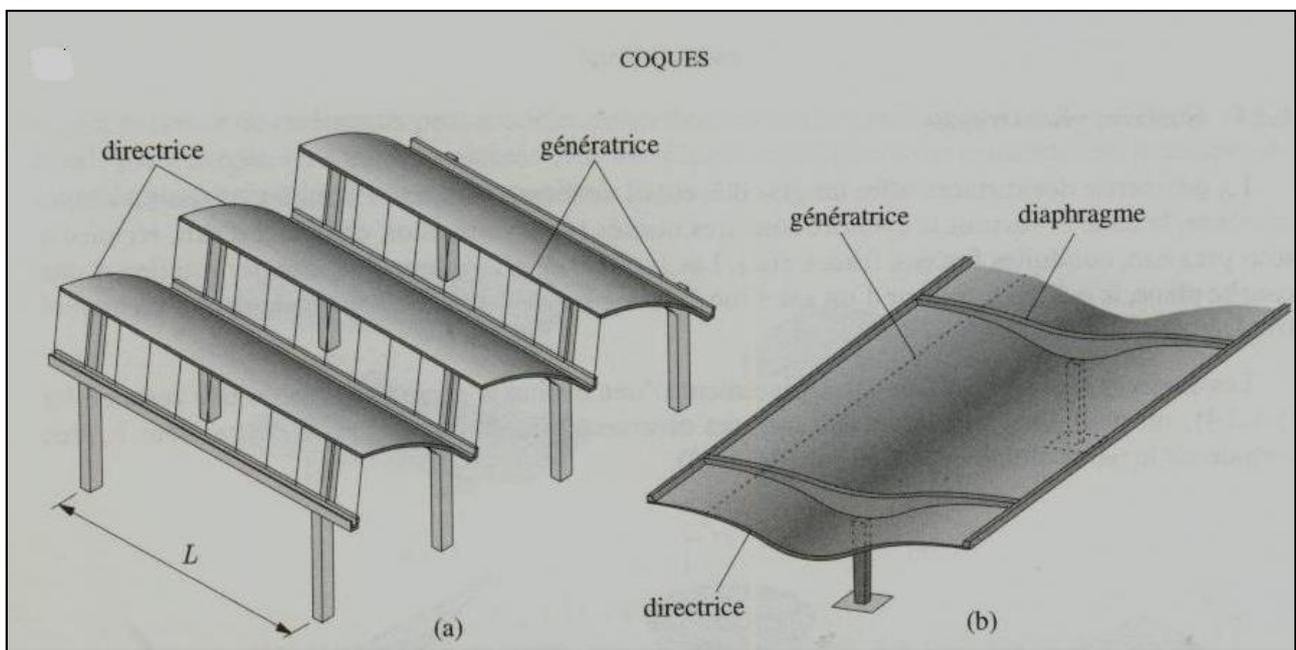


Fig.1.3. surfaces cylindriques ouvertes ($K=0$) dites voûtes autoportantes : (a) sheds (voûtes à simple portée L) ; (b) abri (voûte continue). [FRE 03]

❖ **Les surfaces de révolution** : obtenues par rotation d'une courbe plane autour d'un axe situé dans le plan de la courbe, sont d'un emploi très fréquent également (figure.1.4).

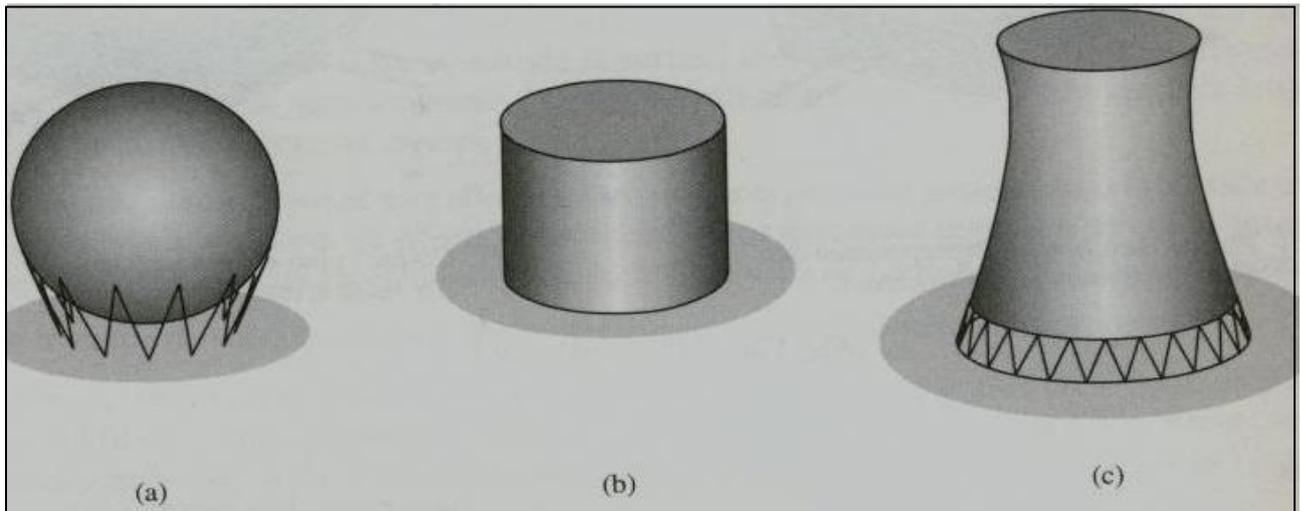


Fig.1.4. Surface de révolution (K : courbe gaussienne) :
(a) réservoir sphérique (double courbure $K > 0$); (b) réservoir cylindrique (simple courbure $K = 0$);
(c) tour de refroidissement (hyperboloïde, double courbure ($K < 0$)). [FRE 03]

- ❖ **Les surfaces de translation** : résultent du déplacement d'une courbe plane, dite génératrice, sur une autre, dite directrice (figure.1.5).

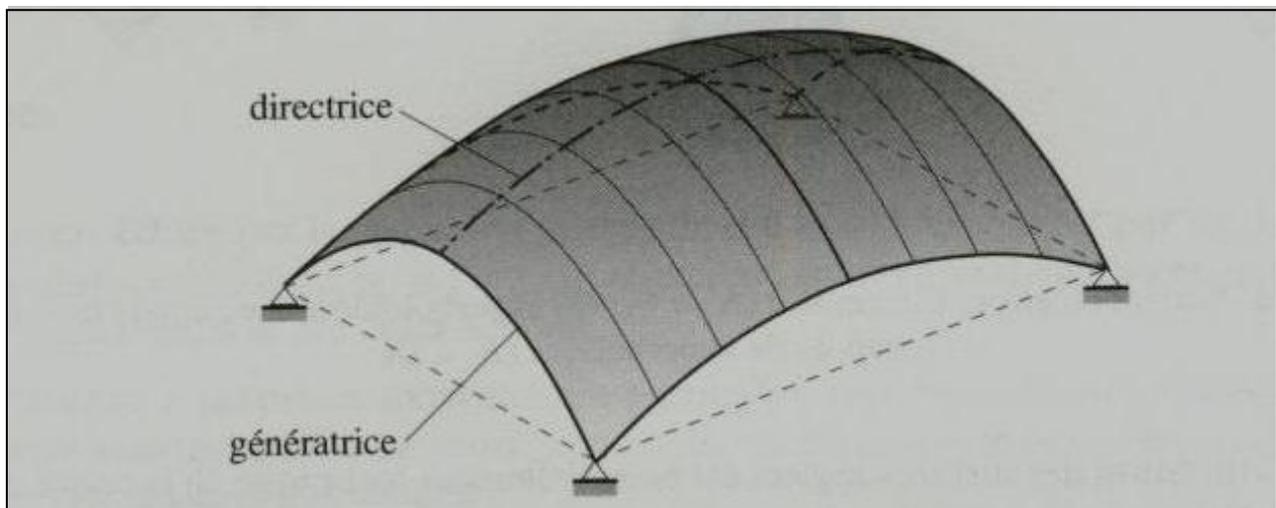


Fig.1.5. surfaces de translation ($K > 0$). [FRE 03]

❖ **Les surfaces réglées** : résultent du déplacement d'une droite (génératrice) le long de deux directrices ; on peut engendrer ainsi des surfaces à double courbure (figure.1.6).

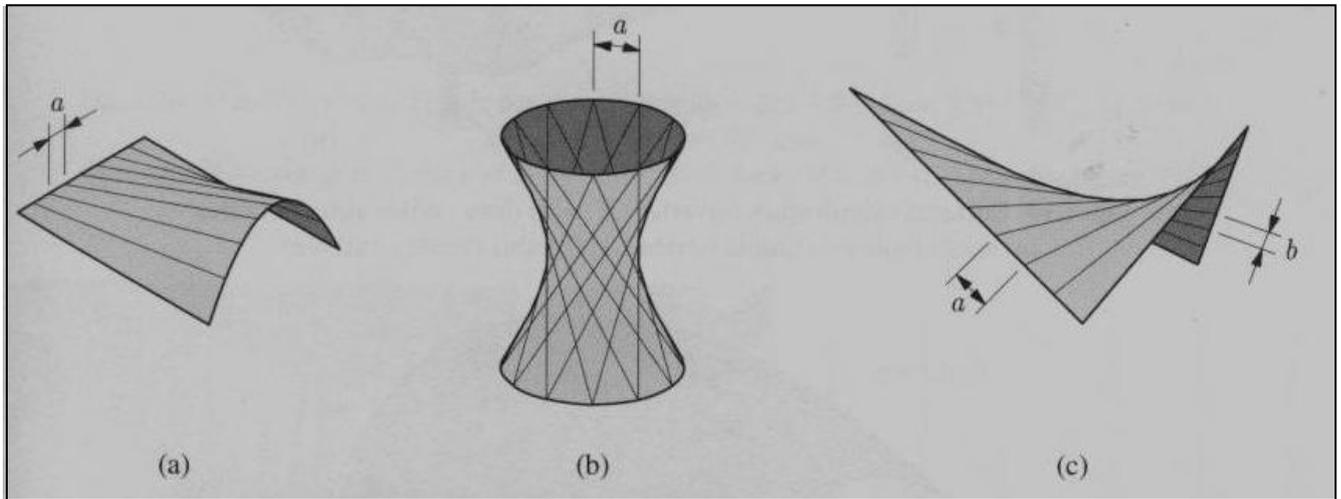


Fig.1.6. surfaces réglées diverses :

(a) Les conoïdes ($K=0$) ; (b) L'hyperboloïde à une nappe ($K < 0$) ;

(c) Le paraboloïde hyperbolique ($K < 0$). [FRE 03]

L'intérêt technique essentiel des surfaces réglées est de pouvoir réaliser le coffrage du béton au moyen de planches étroites rectilignes disposées suivant les génératrices, ou même de réaliser la coque en bois par un réseau de planches croisées clouées.

Ces surfaces géométriques ne sont toutefois ni l'unique ni nécessairement le meilleur choix pour une coque.

Le choix doit en fait être gouverné en premier lieu par la fonction à remplir. [FRE 92]

1-3 Classification des Théories selon le comportement

1-3-1 Hypothèses de linéarisation

On se place dans le cadre usuel de l'analyse linéaire des structures, acceptant :

- L'hypothèse de linéarisation géométrique : Petits déplacements, petites déformations.
- L'hypothèse de linéarisation matérielle (Loi de Hooke+ matériau homogène isotrope).

La première admet que le déplacement et déformations restent petits, en sorte que les équations cinématiques soient linéaires.

Pratiquement, les dilatations et les rotations doivent rester petites.

La seconde admet que le matériau obéit à la loi de Hooke.

Par simplicité, l'hypothèse complémentaire est la suivante :

-La coque est constituée d'un seul matériau isotrope homogène.

1-3-2. Hypothèses de La théorie des coques minces [Hypothèse love -Kirchhoff]

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff. Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- Les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur ;

- La contrainte normale transversale est négligeable.

La première hypothèse est purement cinématique et s'appelle parfois loi de conservation des normales. Il en résulte d'abord que :

- Les glissements sont nuls dans tous les plans normaux à la surface moyenne.

$$\gamma_{\alpha z} = 0 \quad \gamma_{\beta z} = 0 \quad (1.1)$$

- la dilatation perpendiculaire à la surface moyenne est nulle ;

(Etat plan de contrainte, mais avec une incohérence)

$$\varepsilon_z = 0 \quad (1.2)$$

La seconde hypothèse : c'est une hypothèse statique, permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur et s'écrit

$$\sigma_z \cong 0 \quad (1.3)$$

1-3-3 -Hypothèse de faible épaisseur

C'est l'hypothèse-clé, dont l'épaisseur h de la coque est petite vis-à-vis du rayon de courbure minimal r_{\min} de la surface moyenne, soit :

$$\text{En pratique } \frac{h}{r_{\min}} < \frac{1}{10} \quad (1.4)$$

❖ Conséquences

- Les faces de l'élément de coques sont rectangulaires.
- Vu que $\varepsilon_z = 0$, on peut supposer que les charges agissent au niveau de la surface moyenne.
- L'ordre de grandeur des termes négligeables.

1-3-4 Hypothèse de La théorie des Coques épaisses

Dans une théorie du premier ordre, les contraintes de cisaillements ne peuvent pas s'annuler sur les faces intérieures et extérieures de la coque ;

La fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen.

Si θ_x, θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe Z, il ne correspondant plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc : $\theta_x \neq -\frac{\partial w}{\partial y}$; $\theta_y \neq -\frac{\partial w}{\partial x}$

L'hypothèse de Mindlin-Reissne [Mic95] conduit naturellement à la formulation d'élément de coque épaisse si :

$$4 < L/h < 20 \quad \text{et} \quad 4 < r_{\min}/h < 20 \quad (1.5)$$

1-4 Coques surbaissées

1-4-1 Géométrie

Lorsqu'une coque a, en tout point, une surface moyenne de très faible courbure, elle est qualifiée de coque surbaissée; la surface moyenne est aussi dite surbaissée.[FRE 03] On peut tracer un plan, à peu près parallèle à la surface moyenne Σ de la coque, dans lequel on dessine les axes X et Y d'un système d'axes cartésiens (X,Y,Z) (figure.1.7) ,et définir Σ par rapport à ce plan explicitement, par (1.6)

$$Z = Z(X, Y) \quad (1.6)$$

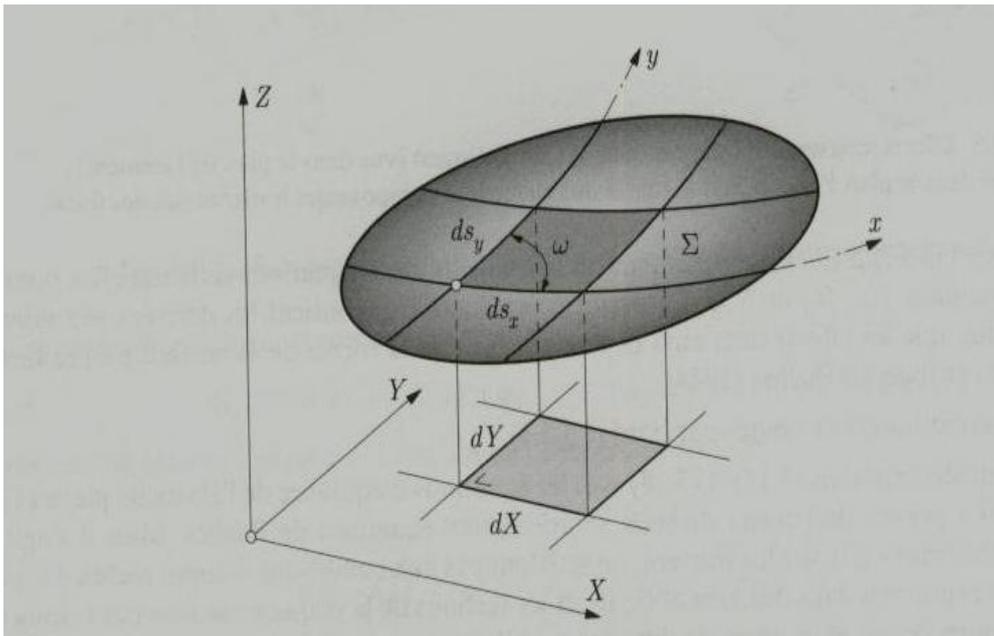


Fig. 1.7 Surface moyenne d'une coque surbaissée. [FRE 03]

La surface moyenne de la coque est surbaissée si, par rapport au plan de référence (X, Y), les pentes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Sont petites, c'est-à-dire si les carrés et produits des dérivées premières de Z(X,Y) sont négligeable devant l'unité .

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \ll 1 \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \ll 1 \quad \left|\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right| \ll 1 \quad (1.7)$$

Pratiquement en tout point (figure.1.8), des que $\varphi_0 < 10^\circ$ environ, on entre dans cette catégorie de coque.

Généralement, une coque est considérée surbaissée comme postulé par E .Reissner [KRA 67]

$$\text{Si :} \quad H < \frac{1}{8} 2a \quad (1.8)$$

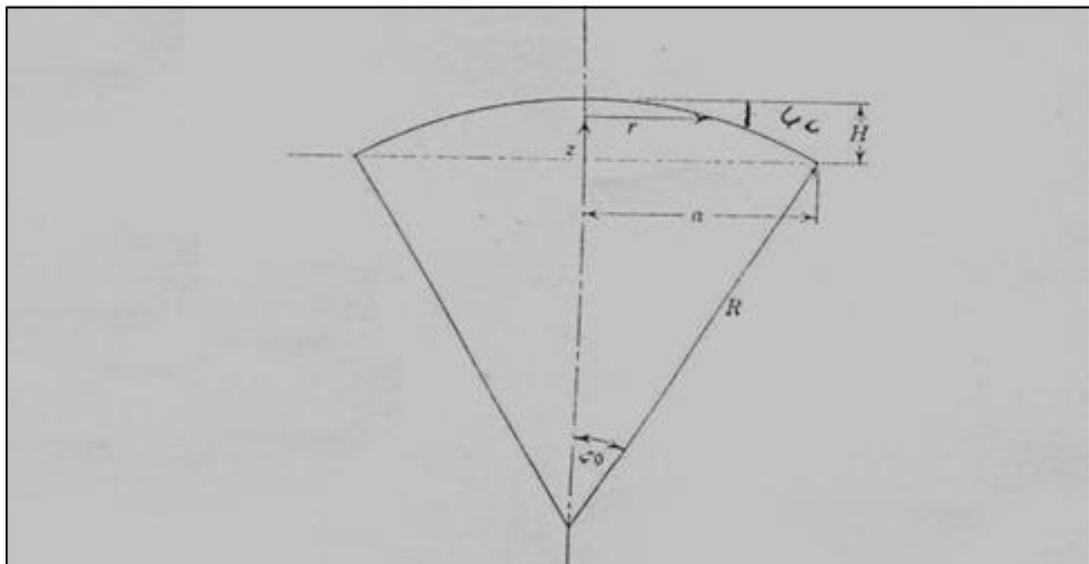


Fig.1.8 Coque surbaissée (shallow shell). [KRA 67]

1-4-2 Théories de coques surbaissées

Deux théories de coques surbaissée sont couramment utilisée: l'une, dite de donnell, s'exprime en coordonnées curviligne (x, y), l'autre, de Marguerre, en coordonnée cartésiennes (X, Y).

Selon la théorie, une hypothèse complémentaire de type cinématique est nécessaire ou non, c'est à se stade que s'exprime la différence.

1-4-3 Coque surbaissée en coordonnée curviligne (théorie de Donnell (1993))

Toutes les grandeurs et équations s'exprime dans les coordonnées curviligne (x, y) de la surface moyenne la normale est désigne par z.

Dans cette théorie, une hypothèse complémentaire de caractère cinématique, est nécessaire; elle postule que les composantes membranaires u et v du déplacement sont négligeable devant la composante transversale w: elles peuvent être ignorée dans l'expression des rotations, et disparaissent donc aussi de celle des courbures

1-4-4 Coques surbaissées en coordonnées cartésiennes (Théorie de Marguerre) (1938)

On travaille dans les axes cartésiens (X, Y, Z) et toute les grandeurs s'y réfèrent.

La correspondance entre la coque surbaisse et son plan (X, Y) de référence a lieu par projection sur (X, Y) aucune hypothèse complémentaire n'est nécessaire.

1-5 l'analyse Analytique des coques

L'Ioi de HOOKE tridimensionnelle s'écrit

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
 \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Où E est le module d'élasticité, ν le coefficient de poisson et G le module de glissement.

Suite à La première et la seconde hypothèse de La théorie des coques minces (§ 1.3.2) elle devient:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Ces hypothèses ramènent donc l'état tridimensionnel à un état de contrainte localement plan, parallèlement à la surface moyenne de la coque.

De plus, suite à ces mêmes hypothèses ; les déplacements de tout point de la coque sont définis par la connaissance des déplacements de la seule surface moyenne. On réduit ainsi l'étude à la surface moyenne.

Suite à La première hypothèse (§ 1.3.2), les déplacements varient linéairement à travers l'épaisseur de la coque ; puis, suite à l'hypothèse-clé (§ 1.3.3), et l'hypothèse de linéarisation géométrique, les déformations aussi; enfin, suite à l'hypothèse de linéarisation matérielle, les contraintes elles aussi sont distribuées linéairement à travers l'épaisseur.

Enfin, par simplicité, vu que la coque est formée d'un seul matériau isotrope homogène,

La "surface neutre" se trouve à mi-épaisseur de la coque, et coïncide donc avec la surface moyenne.

❖ Contraintes et efforts intérieurs

Afin d'obtenir une théorie bidimensionnelle, il faut encore intégrer les distributions des contraintes à travers l'épaisseur afin de les remplacer par leurs résultantes équivalentes que sont les efforts intérieurs.

Alors la variable z aura complètement disparu.

La figure 1.9 montre les conventions de signe pour les contraintes : sur une face positive, les contraintes sont positives lorsqu'elles agissent dans le sens des axes.

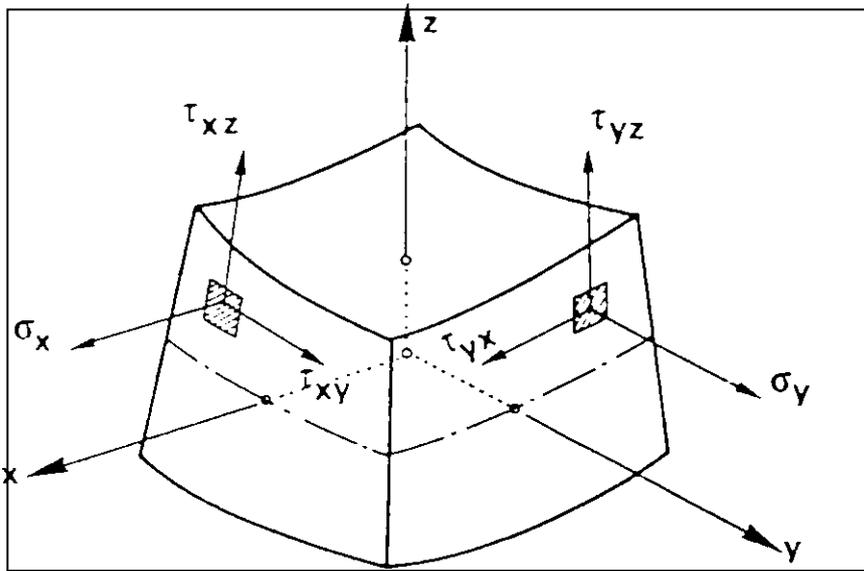
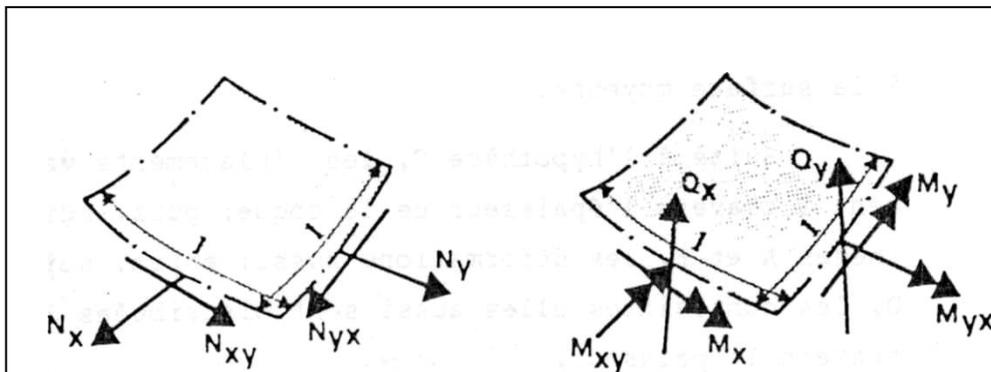


Fig.1.9 Contrainte. [FRE 92]



a) efforts membranaires

b) efforts flexionnels

Fig.1.10 Efforts intérieurs. [FRE 92]

Le sens d'action des efforts intérieurs est déduit de celui des contraintes: un effort intérieur positif produit des contraintes positives sur les faces positives dans la zone $z > 0$ (figure.1.10). Les efforts intérieurs sont définis par unité de longueur d'arc sur la surface moyenne.

Le domaine d'intégration est rectangulaire, de hauteur t (épaisseur de la coque), et de largeur constante L (en vertu de l'hypothèse-clé (1.4)). On a :

$$\begin{array}{ll}
\text{Efforts normaux} & N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x d_z \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y d_z \\
\text{Efforts tangentiels} & N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} d_z \quad N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} d_z \\
\text{Moment de flexion} & M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z d_z \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z d_z \\
\text{Moment de torsion} & M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z d_z \quad M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z d_z \\
\text{Effort tranchants} & T_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} d_z \quad T_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} d_z
\end{array} \quad (1.11)$$

En vertu de la réciprocité des contraintes tangentiels, on a

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (1.12)$$

$$M_{xy} = M_{yx} \quad (1.13)$$

De sorte qu'il y a huit efforts intérieurs inconnus

Il n'y a pas contradiction entre la présence des efforts tranchants T_x et T_y , et l'hypothèse (1.1)

(qui conduit à $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) Comme pour les poutres et les plaques, ces efforts tranchants sont nécessaires pour satisfaire aux conditions d'équilibre, et peuvent se déduire ces autres efforts intérieurs (M_x et M_y) par les équations d'équilibre (sans qu'il soit nécessaire de définir la distribution des τ qu'ils produisent).

Lorsque les efforts intérieurs sont connus, on en déduit la distribution des contraintes par les formules classiques (section rectangulaire de largeur L et de hauteur t)

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N_x}{t} + \frac{12 M_x}{t^3} z & \sigma_y &= \frac{N_y}{t} + \frac{12 M_y}{t^3} z \\
 \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{t} + \frac{12 M_{xy}}{t^3} z & & \\
 \tau_{xz} &= \frac{3 T_x}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) & \tau_{yz} &= \frac{3 T_y}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} varient linéairement et sont extrêmes en $z = \pm t/2$ tandis que τ_{xz} et τ_{yz} varient paraboliquement, sont maximums sur la surface moyenne ($z = 0$) et nulles en $z = \pm t/2$

❖ Equations générales

Soit P_x, P_y, P_z les composantes des forces de surface agissant sur la surface moyenne et provenant des diverses charges sollicitant la coque. L'expression de l'équilibre d'un fragment de coque fournit six équations liant les efforts intérieurs et ces forces (figure.1.10).

Cependant, à cause de (1.12) et (1.13), il ne subsiste que cinq équations d'équilibre, car l'équilibre de rotation autour de l'axe normal z est automatiquement satisfait.

Appelons $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et γ les déformations normales et tangentielles de la surface moyenne, X_1, X_2 et X les variations des courbures principales et de la torsion de cette même surface.

La figure 1.11 montre comment les variations des courbures interviennent dans le calcul de la dilatation d'une fibre. La torsion se définit comme pour les plaques (limite du rapport de l'angle entre deux côtés opposés d'un élément de la surface moyenne à la distance les séparant, lorsque l'élément tend vers zéro).

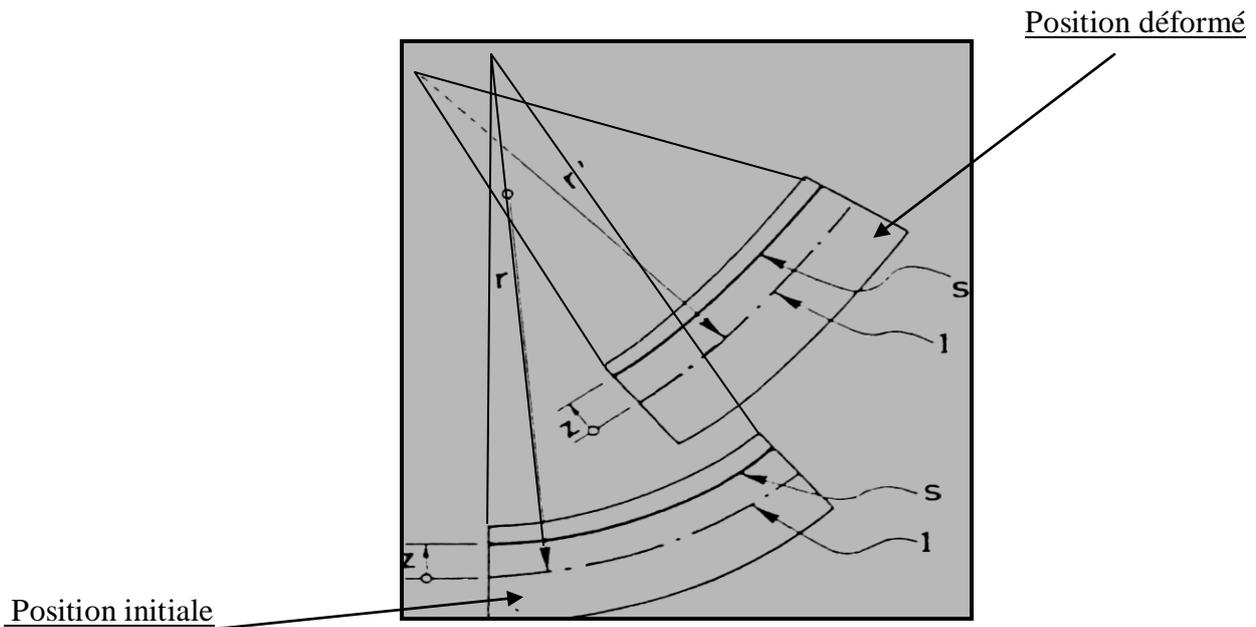


Fig.1.11 Dilatation suite à la variation de courbure cinématique x . [FRE 92]

Triangles semblables :

$$s = \frac{r - z}{r} = 1 - \frac{z}{r}$$

$$s' = \frac{r' - z}{r'} = 1 - \frac{z}{r'}$$

Dilatation : $\epsilon = (s' - s)/s$

$$\epsilon = \frac{1 - z/r' - (1 - z/r)}{1 - z/r} = \frac{-z/r' + z/r}{1 - z/r}$$

L'hypothèse de faible épaisseur $\Rightarrow \epsilon \cong -z \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = -zx$

On a, en tout point de la coque

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_1 - z X_1 \\ \epsilon_y = \epsilon_2 - z X_2 \\ \gamma_{xy} = \gamma - z X \end{cases} \quad (1.15)$$

Ces équations montrent que les déformations varient linéairement à travers l'épaisseur de la coque. x_1 , x_2 et x les variations de courbure cinématique.

❖ **Loi constitutive**

On introduit ces valeurs dans (1.10); on résout par rapport aux contraintes, que l'on introduit alors dans (1.11). On obtient ainsi l'expression de la loi constitutive "intégrée à travers l'épaisseur", où les efforts intérieurs ("contraintes généralisées") sont fonctions des six déformations ("généralisées") de la surface moyenne.

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= C(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\
 N_y &= C(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\
 N_{xy} = N_{yx} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma = GtY \\
 M_x &= -D(X_1 + \nu X_2) \\
 M_y &= -D(X_2 + \nu X_1) \\
 M_{xy} = M_{yx} &= -D \frac{1-\nu}{2} \gamma = -G \frac{t^3}{12} X
 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Avec

- rigidité extensionnelle $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$ (1.17)

- rigidité flexionnelle $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (1.18)

- module de glissement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (1.19)

Enfin, si l'on appelle u, v, w les trois composantes du déplacement d'un point de la surface moyenne, il est possible d'établir six relations cinématiques liant les six déformations généralisées ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, x_1, x_2, x$) à ces trois déplacements (u, v, w); ce sont les relations déformations-déplacements.

Bilan

Il y a 17 inconnues

- 8 efforts internes,
 - 6 déformations,
 - 3 déplacements
- } *définis sur la surface moyenne*

Pour 17 équations

- 5 équations d'équilibre,
- 6 relations constitutives,
- 6 relations cinématiques.

Il est donc en principe possible de résoudre.

Nous avons vu que le but des hypothèses était essentiellement de ramener l'étude de la coque à celle de sa surface moyenne. Aussi, si l'on désire établir rigoureusement les 17 équations, est-il nécessaire de travailler avec ces coordonnées tracées sur cette surface. L'appareil mathématique est alors très complexe (calcul tensoriel en coordonnées curvilignes quelconques), et les équations ne présentent presque plus aucun intérêt pratique pour l'ingénieur. Cette démarche est toutefois la seule valable pour établir convenablement la théorie.

Il existe heureusement les méthodes numériques qui permettent de simplifier cette théorie générale, tout en conservant un degré de précision tout à fait satisfaisant. Ces méthodes numériques permettent aujourd'hui de traiter les cas les plus complexes. [FRE 92]

1.6. Conclusion

L'évolution de la modélisation des coques est très liée à celle des méthodes numériques, et principalement à la méthode des éléments finis, par contre les développements analytiques sont très rares et d'une grande complexité. Cela a donné naissance à des formulations intéressantes et largement utilisées actuellement dans les codes de calcul.

CHAPITRE II

APPROCHE NUMERIQUE

2.1. Introduction

La résolution analytique d'un problème de mécanique des milieux continus appliquée au génie civil est une tâche rarement possible. Les équations aux dérivées partielles permettent d'obtenir une solution mathématique exacte du problème, néanmoins elle reste limitée à des cas particuliers qui n'ont souvent qu'un rapport très lointain avec la réalité des ouvrages ; c'est pour quoi des méthodes de calcul approché ont été développées.

La méthode des éléments finis, qui est une méthode approchée de calcul numérique des structures donnant une solution à un problème de minimum, elle s'est avérée au cours du temps plus efficace, elle n'a jamais cessé d'élargir son champ d'application.

2.2. La Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution, approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie.

D'une façon générale, la résolution par la MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation du problème
- Réalisation d'un maillage, correspondant à la discrétisation du domaine d'étude en éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres . . .) sur lesquels les Champs sont écrits en termes d'un nombre fini de degrés de liberté et de fonctions de base à repère local.
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du problème. [Ida 97]

2.2.1. Historique

La méthode des éléments finis connaît, depuis 1970 environ, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voir familier, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaire, linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur. La modélisation d'un phénomène physique conduit habituellement à l'établissement, dans un domaine (volume, surface, ligne), d'équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles, accompagnée, à la frontière du domaine (surface, ligne, point), des conditions aux limites. Cet ensemble s'appelle, en abrégé ; un problème aux limites et en constitue la forme différentielle. Il n'est pas fréquent de pouvoir en obtenir la solution analytique.

Les ingénieurs se sont donc tournés vers des méthodes de résolution approximative telle que la MEF qui consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équation algébrique.

La MEF a été mise au point chez Boeing (Seattle, USA), l'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960. Turner, Clough, Martin et Topp introduisent en 1956 le concept d'élément fini : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur les quels les déplacements sont supposés varier linéairement. Le comportement de chaque panneau est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire. A partir de ces matrices, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c'est-à-dire aux déplacements en tout point du milieu continu.

Par ailleurs, il est à signaler également le travail d'Argyris et Kesley en 1960 qui systématise l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures. En fait les idées de base de la méthode apparurent bien avant, Courant (1943) et Hrennikoff (1941), pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangle ; mais elles restèrent sans suite.

Dès 1960 la méthode est reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles, sous forme générale des résidus pondérés (Zienkiewicz, Avantes, Greene, Finalyson..).

De nombreux auteurs créent des éléments à haute précision (Fellippa); enfin la méthode est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles, et une base mathématique construite à partir de l'analyse fonctionnelle.

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis signalons en particulier ceux de Zienkiewicz, Gallagher, Rokey, etc. Maintenant la MEF est très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatial, navale et nucléaire, de nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la MEF, principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures, citons par exemple : ABACUS, ANSYS, CEZAR, PLAXIS,..... etc.

Aujourd'hui, l'ingénieur de génie civil, confronté à la complexité croissante des structures comme aux exigences grandissantes des Maîtres d'œuvre en matière de justification, est donc amené, sinon incité, à mettre en œuvre cette puissante méthode de calcul, on peut d'ailleurs penser que son emploi se généralisera aux structures courantes, tant il est vrai qu'aucun ingénieur ne sait résister à l'attrait du progrès, particulièrement lorsqu'il est supposé permettre de « tout calculer » ; encore faut-il savoir manier correctement ces méthodes pour bénéficier de leurs potentialités effectives et, pour ce faire, disposer des guides et des conseils nécessaires à leur bonne pratique. [FRE 01], [DHA 84]

2.3. Modélisation et discrétisation

Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, la modélisation dans un premier temps et la discrétisation dans un deuxième temps (figure 2.1). Ces opérations portent sur deux aspects principaux du problème pratique :

- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites et du milieu ;
- Choix des éléments finis et du maillage.

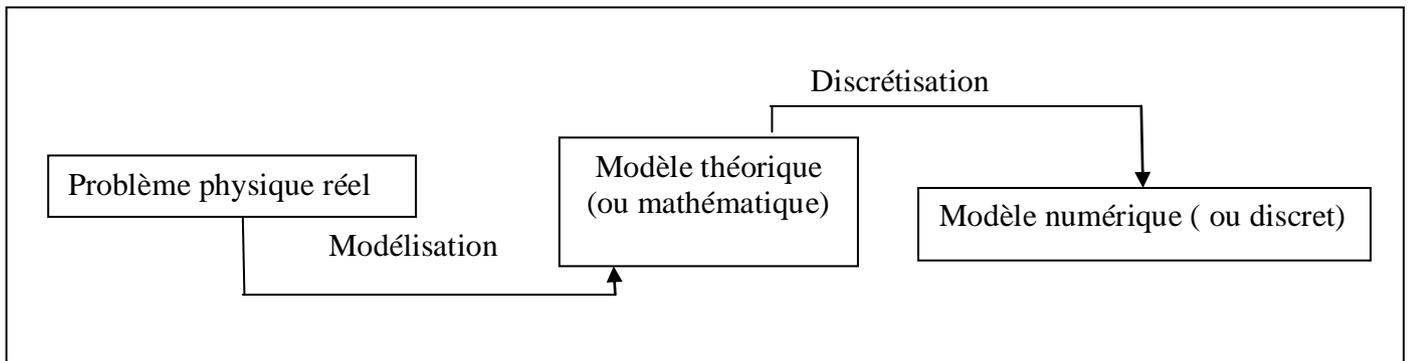


Fig.2.1. Etape de l'analyse d'un problème aux limites [FRE 01]

2.3.1. Modélisation du comportement de la structure

La modélisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle de la mécanique des solides, structures et matériaux, capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. C'est à ce stade que s'opèrent deux options fondamentales :

- Choix cohérent du schéma et de la théorie décrivant la structure, c'est-à-dire à ramener la structure à une géométrie simple en choisissant des axes (barres, poutres, câble), des plans (parois, plaque), des surfaces (coques), des volumes (solides), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie, à définir les conditions d'appui et les charges, à tenir compte d'éventuelle symétries;
- Choix pertinent des lois constitutives décrivant chaque matériau, c'est-à-dire à choisir les lois décrivant tant les réponses mécaniques classiques (linéarité, anisotropie, plasticité...) que les phénomènes physique particuliers (teneur en eau, discontinuité, perméabilité...), et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales).

2.3.2. Discrétisation de la structure modélisée

L'opération de discrétisation est aussi importante que celle de modélisation. Elle implique essentiellement deux choix:

- L'un porte sur le type d'élément fini à utiliser, les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristique de la modélisation ;
- L'autre sur la finesse de cette discrétisation, en liaison avec le maillage qui est guide essentiellement par la géométrie, à savoir par les discontinuités (trous; variation d'épaisseurs, d'inertie ou de matériau...), les conditions d'appui et chargement, les étapes de construction,

les zones à forte variation des contraintes ou déplacement (découpage plus fin), certains aspect de la rhéologie (orthotropie, ...), etc.

La discrétisation fournit un modèle numérique du modèle mathématique de la structure.

Cette étape importante, précédant le calcul proprement dit, fait appel aux connaissances et à l'expérience de l'ingénieur dans le domaine très vaste du calcul par éléments finis et de l'informatique. [FRE 01]

Les éléments les plus utilisés en pratique sont illustrés sur la figure 2.2

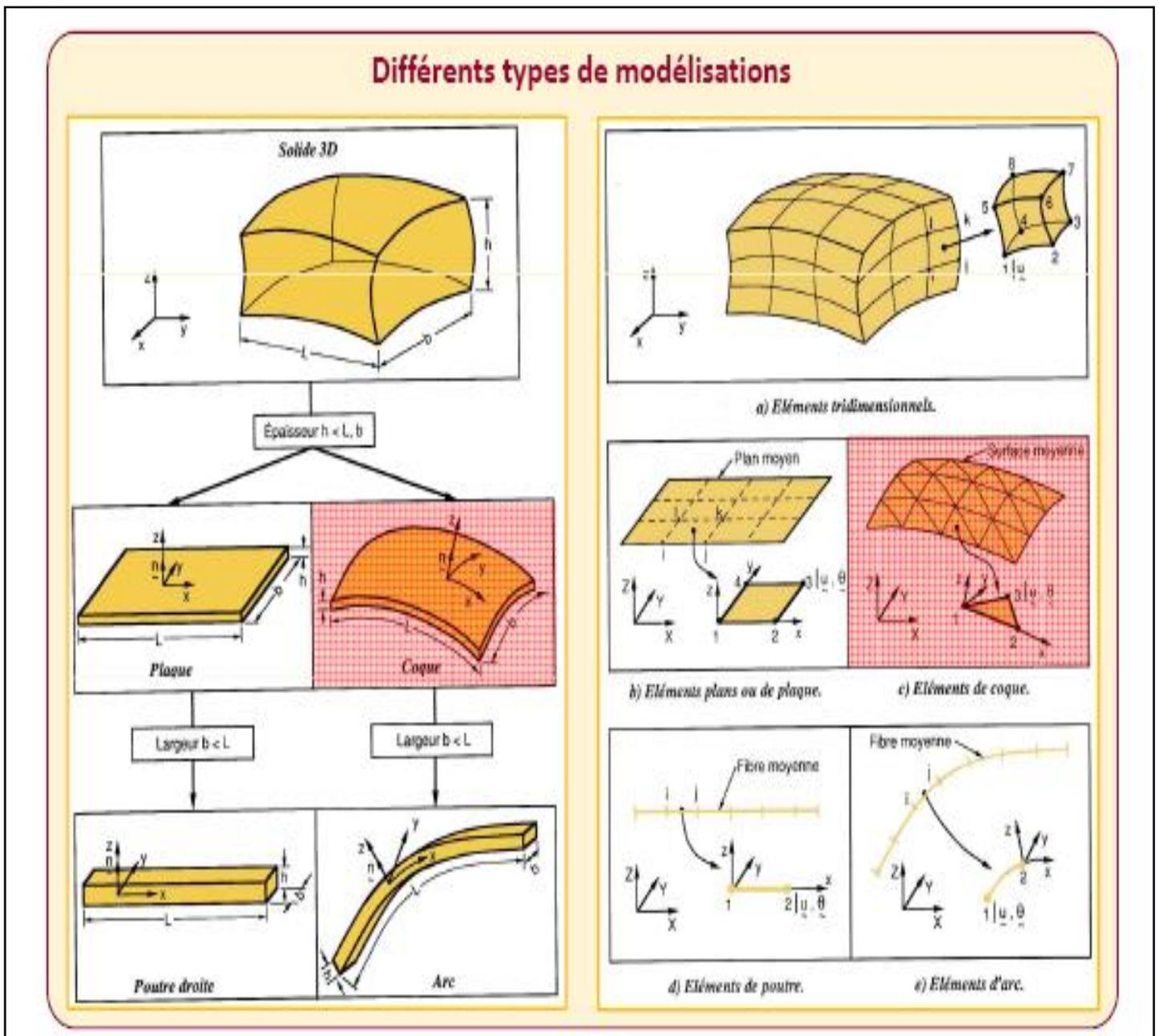


Fig.2.2. différents types de modélisations [NAC 2010]

2.4. Quelques problèmes de discrétisation

L'opération de discrétisation des structures tridimensionnelles à parois minces ou d'épaisseur modérée reste une étape délicate d'une analyse par éléments finis. La complexité des formes géométriques pousse l'ingénieur aux simplifications, nécessaires, mais parfois excessives. De plus, les éléments, de par leurs propriétés, peuvent produire des comportements inattendus. On examine dans cette section quelques-uns des problèmes de discrétisation les plus classiques. Certains concernent surtout les éléments plaques-membranes, d'autres tous les éléments, d'autres enfin ne touchent que quelques types d'éléments.

2.4.1. Approximation de la géométrie

Le plus souvent, la représentation de la géométrie d'une coque par un maillage d'éléments finis introduit nécessairement des approximations géométriques. Entre les nœuds, l'approximation poly-nominale de la géométrie ne suit généralement pas la forme réelle de la surface moyenne de la coque ; le cas extrême est celui des éléments plaques-membranes, créant une coque à facettes inscrite dans la surface moyenne exacte.

Mais même avec des éléments courbes, la continuité de la pente, transversalement aux frontières, n'est ordinairement pas assurée (figure 2.3). Il en résulte la formation d'arêtes artificielles, qui peuvent provoquer de légères modifications de la rigidité de la coque discrétisée.

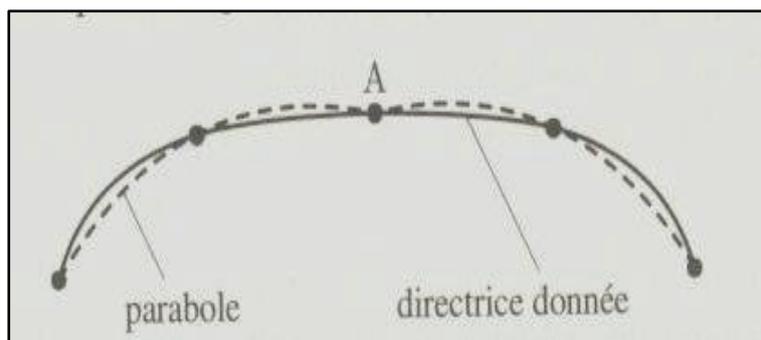


Fig.2.3. La discrétisation de la directrice d'une voûte autoportante par deux paraboles fait apparaître une arête artificielle le long de la génératrice A (vue en coupe) [FRE 03]

La situation peut être pire avec des éléments surbaissés formulés en coordonnées cartésiennes, car ces éléments sont rapportés à un plan de référence par projection orthogonale.

Il en résulte une dislocation le long des frontières, entre les nœuds sommets (Figure 2.4). Ces dislocations rendent hasardeuse la disposition de nœuds ailleurs qu'aux sommets

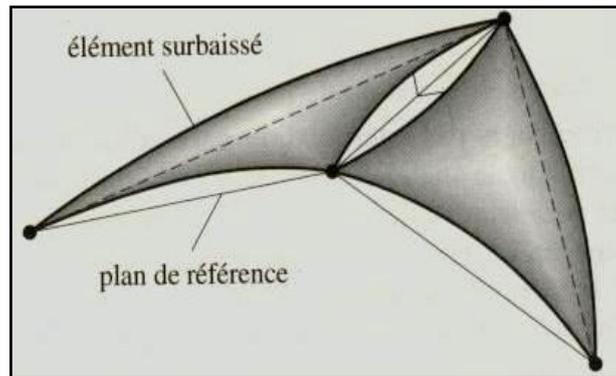


Fig. 2.4. Dislocation inévitable à la jonction de deux éléments Triangulaires de type Marguerre [FRE 03]

Très peu d'études ont été consacrées à ces problèmes. Il semble que les erreurs géométriques aient peu d'influence sur les résultats, sauf pour les maillages visiblement trop grossiers. Quand la taille des éléments finis tend vers zéro ($h \rightarrow 0$), ces erreurs ne compromettent pas les propriétés de convergence.

Il convient toutefois de rester attentif. Considérons par exemple un panneau cylindrique muni d'un raidisseur annulaire interne (Figure 2.5a). La discrétisation de cette structure par des éléments quadrilatéraux à quatre nœuds, de type coque surbaissée, fait apparaître des dislocations le long de chaque élément de raidisseur (Figure 2.5b). Tout se passe alors comme si la hauteur moyenne du raidisseur devenait supérieure à b , ce qui accroît artificiellement l'effet de raidissage par rapport à la réalité. Dans un problème d'instabilité, cet effet peut être très sensible.

Raccord coque-raideur : Risque de surestimer la résistance dans le cas d'une étude de stabilité.

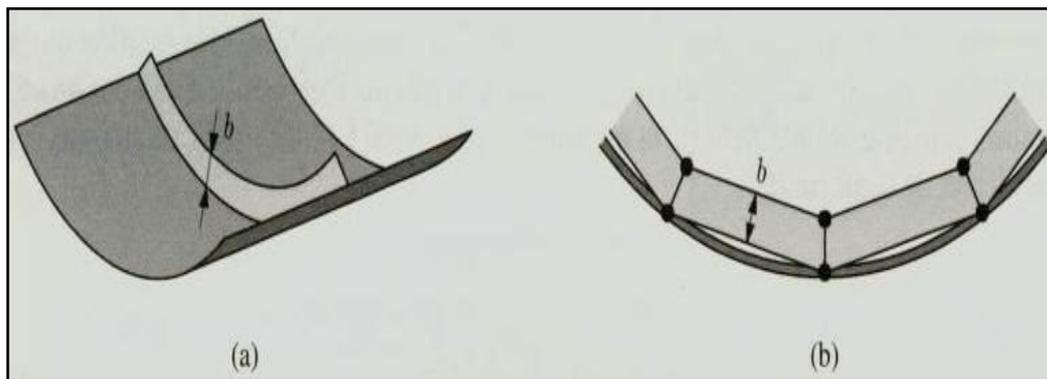


Fig. 2.5 Dislocation modifiant la raideur d'une structure :

(a) vue ; (b) discrétisation (coupe) [FRE 03]

2.4.2. Arêtes artificielles et moments parasites

Envisageons la discrétisation, par des éléments plans de coque, d'un cylindre soumis à une pression uniforme (Figure 2.6a). La modification de géométrie produite par le maillage en facettes introduit inévitablement des perturbations dans le champ des efforts intérieurs. Pour le cylindre, on a $N_\varphi = \text{cste}$ et $M_\varphi = 0$, tandis que dans le modèle à facettes (qui est ici une structure plissée), chaque élément fini est évidemment soumis à des moments parasites (Figure 2.6b).

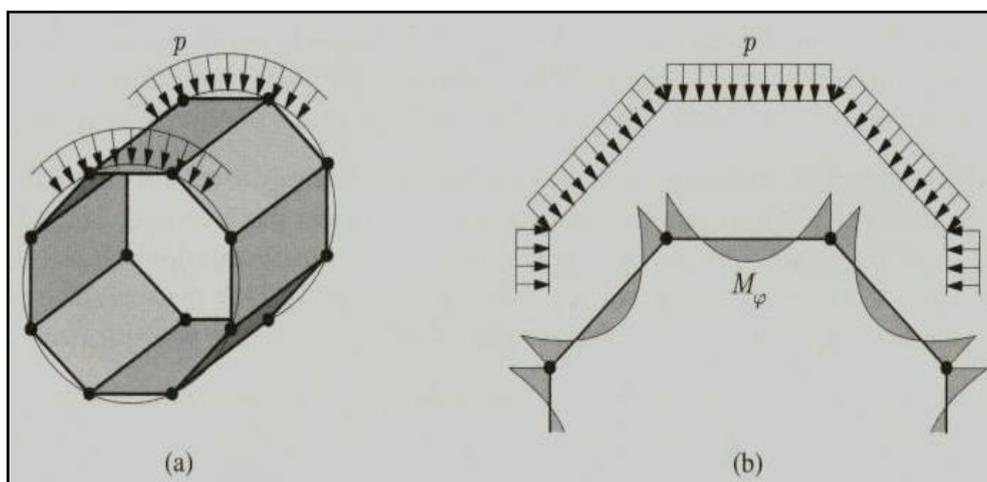


Fig. 2.6 Les arêtes artificielles créent des moments parasites [FRE 03]

Les moments parasites apparaissent lorsqu'ils existent des arêtes artificielles et se superposent aux moments réellement existants. L'importance de ces moments parasites est difficile à évaluer ; elle reste en principe faible si la discrétisation est raisonnablement fine, et s'atténue asymptotiquement ($h \rightarrow 0$).

2.4.3. Difficultés de conformité

Dans les structures plissées, lors des jonctions de coque et le long des arêtes artificielles, la non- conformité devient quasiment inévitable.

Considérons deux éléments finis de type plaque-membrane connectés à angle droit

(Figure 2.7). On observe immédiatement que chaque élément possède un degré de liberté de rotation qui ne peut être connecté à l'autre élément, vu qu'il n'y a que deux degrés de liberté de rotation par nœud. Cette circonstance, conséquence naturelle de la modélisation, peut néanmoins conduire à des problèmes de conformité.

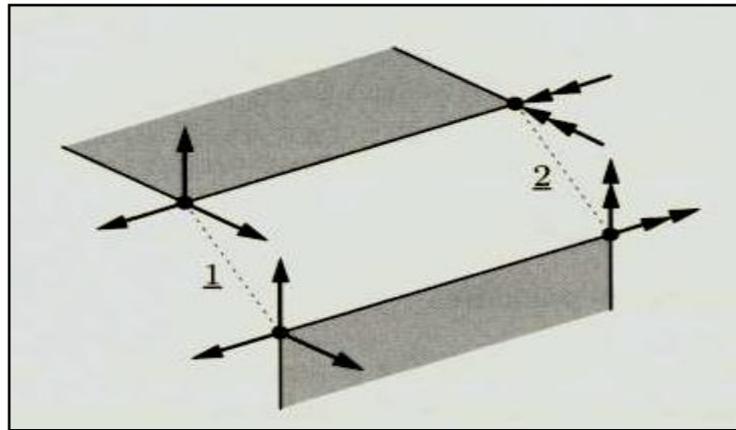


Fig. 2.7 raccordement, à angle droit, de deux éléments plaques-membranes. [FRE 03]

Pour examiner plus en détail la conformité le long de la frontière 1-2, prenons le cas courant, de type Kirchhoff-Love, où l'on combine un champ membranaire (u, v) linéaire à un champ flexionnel (w) cubique pour créer un élément plaque-membrane (la situation est la même pour un élément surbaissé utilisé plan). La Figure 2.8(a) montre la situation examinée : il est clair que la cubique de plaque ne peut se connecter à la droite de membrane ; on ne peut réaliser que $v_1 = w_1$ et $v_2 = w_2$

Il faut donc choisir un champ membranaire cubique. Mais le choix usuel des degrés de liberté v_1, v_2, v_3 et v_4 ne convient toujours pas, car ces degrés ne s'associent pas à ceux de la plaque w_1, w_2, w'_1 et w'_2 (incompatibilité des continuités C^0 et C^1 ; figure 2.8 (b).

C^0 (rotation et déplacement discrétisés indépendamment les uns des autres, en coque épaisse).

C^1 (rotation en fonction des déplacements, en coque mince).

On devrait donc choisir des dérivées des déplacements membranaires pour assurer la conformité (Figure 2.8c), mais ces degrés de liberté introduisent une surcompatibilité indésirable et sont pas facile à manipuler pratiquement.

De façon plus générale, on constate qu'il est difficile de réaliser la conformité le long d'un raccord à angle de deux éléments finis de coque (surtout en théorie de Kirchhoff-Love) ; en pratique, on y renonce.

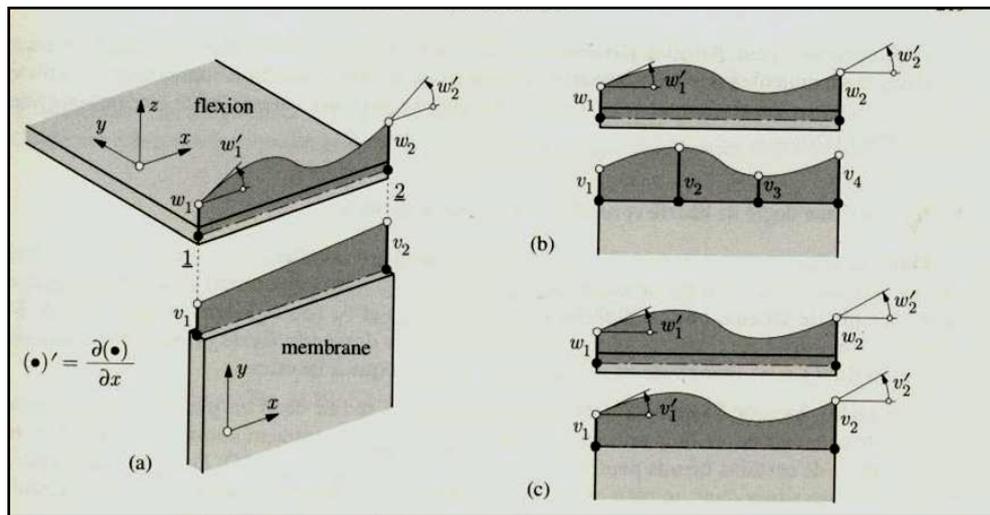


Fig. 2.8. Non-conformité aux frontières des coques à facettes [FRE 03]

Terminons par le raccord de trois éléments (Figure 2.9). Les éléments (1) et (2) sont admis parfaitement connectés, comme à la figure 2.8(c).

Le raccord flexionnel des éléments (1) et (3) exige alors l'égalité des rotations autour de l'arête a-a ($\alpha = w_1'$). Par suite, le raccord des éléments (3) et (2) entraîne la conservation de l'angle droit au nœud 1 de l'élément (2) ($\beta = \alpha$). Ainsi, on a, au niveau du comportement membranaire de l'élément (2) et au voisinage du nœud 1.

$$\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0$$

Si cette situation est acceptable ici (figure 2.9), elle ne l'est plus lorsque les raccordements à angle proviennent des arêtes artificielles issues de la discrétisation. Dans une coque à facettes par exemple, l'annulation des déformations tangentielles en chaque point anguleux tend à faire disparaître la déformabilité au cisaillement membranaire, ce qui produit une sur rigidité inadmissible.

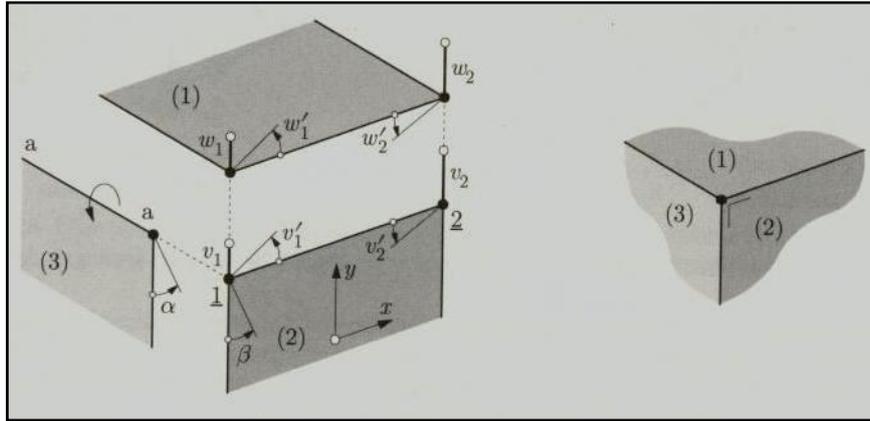


Fig. 2.9. Raccord de trois éléments [FRE 03]

La conclusion peut paraître paradoxale : il faut accepter la non-conformité aux frontières. Il ne s'agit évidemment pas d'exagérer dans ce sens, car l'expérimentation numérique montre que, de deux discrétisations incompatibles, celle qui présente la meilleure compatibilité cinématique fournit les meilleurs résultats. [FRE 03]

2.5. Différentes formulations

Il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures. [DHA 84]

2.5.1. Formulation en déplacement

C'est une formulation selon laquelle l'approximation est faite sur le champ de déplacements de façon que l'intégrabilité du champ de déformations soit assuré à l'intérieur de l'élément.

Si la continuité du champ de déplacement est vérifiée aux surfaces de séparation des éléments, le modèle est dit compatible. [FRA 74]

2.5.2. Formulation "équilibre" (contraintes ou forces)

C'est une formulation dans laquelle les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément.

2.5.3. Formulation hybride

Dans cette formulation, le plus souvent, on définit la solution en termes d'approximation, d'une part du champ de contraintes internes en équilibre, d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément.

2.5.4. Formulation mixte

Dans celle-ci, on définit la solution en termes d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants ; généralement, le champ des déplacements et celui des contraintes.

2.5.5. Formulation en déformation

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de déformation de façon telle que les équations de compatibilité et d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacements est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable.

2.5.6. Avantage du modèle en déformation

L'interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes et les déplacements (obtenus par intégration) ; contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ choisi des déplacements.

Les avantages des éléments à modèle en déformation sont :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées). [BEL 98]

2.6. Caractéristique d'un élément fini

2.6.1. Attributs d'un élément fini

Un découpage, artificiel d'un milieu continu, en éléments finis permet, d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être segment de droit ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre.

Les frontières entre éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droit ou de courbes, des faces planes ou courbes.

- **Matériau**: le matériau d'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ces propriétés mécaniques E et ν , etc).

- **Nœuds**: les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces, etc. on y choisit et définit les degrés de liberté du problème.

- **Degrés de liberté**: la fonction d'approximation choisie (en général le champ des déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

- **Forces nodales**: à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température..).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force. [FRE 01]

2.6.2. Choix des éléments finis

Les éléments d'ordre supérieur sont plus précis mais plus coûteux et on peut toujours atteindre la même précision avec un plus grand nombre d'éléments simples et c'est cette tendance qui devenue privilégiée ces dernières années.

Les éléments simples (triangle à trois nœuds quadrilatère à quatre nœuds et hexaèdre à huit nœuds) offrent l'avantage supplémentaire d'être faciles à générer par des logiciels automatiques et adaptatifs.

Pour l'analyse du comportement membranaire, les éléments finis basés sur la formulation mixte et hybride sont plus précis et sont généralement privilégiés dans les logiciels professionnels. Les éléments d'ordre supérieur ont connu un grand succès dans l'analyse du comportement flexionnel (poutre, plaque et coque). [FRE 01]

2.7. Choix des fonctions de déplacement et conditions de convergence

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les

constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

On dit qu'il y a convergence si, en augmentant la densité du maillage, les calculs en éléments finis tendent vers la solution exacte. Malheureusement, le plus souvent, c'est précisément parce que la solution exacte n'est pas connue que les éléments finis sont utilisés. Il est donc délicat de parler d'une convergence vers une solution inconnue. Malgré cette difficulté, certains résultats ont été acquis par les mathématiciens.

Il est assez facile de donner des conditions nécessaires de convergence. En effet la méthode des éléments finis peut être considérée comme une méthode d'approximation continue par morceaux d'un champ continu. A ce titre, c'est donc une méthode de Rayleigh-Ritz généralisée et les règles (critères) suivants s'appliquent :

➤ **Critères des déformations constantes ou de complétude :**

- 1) Les états de déplacement constant ou de modes rigides.
- 2) Les états de déformation constante.

Les fonctions de déplacement doivent permettre à l'élément de subir un mouvement de corps rigide sans déformations internes. Ce critère est fondamental dans la mesure où il représente une propriété réelle du comportement des structures et résulte en une convergence plus lente s'il n'est pas observé.

➤ **Critère de compatibilité :**

Ces mêmes fonctions aussi doivent assurer la continuité des déplacements le long des limites entre éléments (inter-éléments). Cela signifie que les éléments doivent se déformer sans causer des discontinuités entre eux.

Les règles 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. La règle 3 par le terme élément compatible et l'ensemble 1+2+3 par élément conforme. [FRE 01], [BEL 2000]

Tous les éléments ne sont pas conformes et cela n'interdit pas de les employer avec succès. L'expérience et la pratique courante ont montré que les deux premiers critères sont nécessaires et suffisants pour assurer la convergence et que les éléments non conformes (incompatibles) convergent mieux que les éléments conformes, même si la convergence n'est pas monotone. [DES 72]

2.8. Analyse bibliographique

➤ La première application de la méthode des éléments finis aux coques a été faite en 1961 avec un élément plaque-membrane; mais la discrétisation était trop grossière et les résultats décevants.

➤ Le premier élément fini de «coque» fut un tronc de cône pour coque de révolution à chargement de révolution (1963).

➤ En 1965, des programmes très généraux pour coque de révolution à chargement quelconque étaient couramment utilisés. [FRE 03]

➤ Les recherches entreprises à l'université de Cardiff (UK) concernant la convenance des éléments finis disponibles pour les structures courbes, ont montré que pour avoir des résultats convergents avec les éléments basés sur le modèle en déplacement, il était nécessaire de diviser la structure à bord courbe en un très grand nombre d'éléments [ASH 71a].

➤ Dans un premier temps, une étude détaillée a été entreprise sur des arcs circulaires simples avec différents rapports et il a été prouvé que de meilleurs résultats peuvent être obtenus sans l'utilisation d'un très grand nombre d'éléments lorsqu'on en adopte le modèle en déformation à la place du modèle en déplacement [ASH 71b].

➤ Un élément fini de coque cylindrique a été ensuite développé par Ashwell (1972). L'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant pour l'analyse d'un cylindre pincé court à bords libres. Les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes. [ASH 72]

➤ Un élément courbe a été également développé par Sabir et Lock (1973) pour l'analyse de non linéarité géométrique des arcs circulaires. [SAB 73]

➤ Pour étudier la performance de l'élément coque à modèle de déformation pour la prédiction des contraintes très élevées au voisinage de l'application des charges concentrées, Sabir et Ashwell (1978) ont entrepris des essais sur des coques minces et le chargement appliqué était soit des forces radiales ou des moments concentrés et les résultats obtenus correspondaient bien aux solutions théoriques. [SAB 78]

➤ Sabir (1983) a appliquée L'approche en déformation pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes. [SAB 83]

➤ A. B. Sabir & M. S. Djoudi (1995) ont utilisés un élément de coque surbaissée pour l'analyse non linéaire des coques et plaques [SAB 95]

- M.S. Djoudi, H. Bahai (2002) ont développés un élément finie de coque surbaissée pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques cylindriques [DJO 02].
- M.S. Djoudi, H. Bahai (2003) ont développés un élément de coque basé sur l'approche en déformation pour l'étude des effets des ouvertures sur le comportement dynamique des panneaux cylindriques [DJO 03a]. Comme ils ont aussi développés un autre élément de coque cylindrique pour l'analyse de la vibration des structures en coques [DJO 03b].
- A.I. Mousa et M.H. El Naggat (2007) ont développés un nouveau élément fini rectangulaire sphérique basé sur la formulation des coques surbaissées. [MOU 07]

2.9. CONCLUSION

Malgré ces recherches et progrès considérable, en utilisons la méthode des éléments finis pour développer des éléments de coques, il n'existe toujours pas d'élément qui ne présent l'une ou l'autre faiblesse: la recherche, dans ce domaine; reste toujours ouverte.

CHAPITRE III

MODELISATION DES STRUCTURES EN COQUES

3.1. Introduction

Le premier élément fini courbe pour coque de géométrie arbitraire fut proposé en 1966. Jusqu'en 1970 environ, de nombreux essais eurent lieu avec des éléments plaque-membrane et des éléments courbes. Mais on se heurta à des difficultés théorique et numérique: théorie des coques, conformité aux frontières, mode rigides, etc. En 1970, différence finis et élément finis étaient encore en compétition.

Il faut attendre 1975 environ pour bien comprendre, au niveau de la méthode des éléments finis, les différences entre coques à forte courbure surbaissée, ainsi qu'entre coordonnées curviligne et coordonnées cartésiennes.

3.2. Types d'éléments finis

Pour l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, on peut utiliser des éléments finis de coque d'épaisseur mince ou modérée des types suivants:

- éléments de coque à surface moyenne courbe (à forte courbure en général, surbaissée parfois), basés sur l'une des théories générales (Love-Koiter ou Reissner-Naghdi);
- éléments de coque surbaissée, basés sur une théorie de coque surbaissée (Donnell, Marguerre, etc.);
- éléments plans, dits plaques-membranes, dont l'état flexionnel est basé sur la théorie des plaques minces (Kirchhoff) ou d'épaisseur modérée (Mindlin);
- éléments dits du type tridimensionnel dégénéré, ordinairement courbes, se rattachant à une formulation théorique de type Reissner-Mindlin. [FRE 03]

3.2.1. Elément basé sur la théorie des coques à forte courbure

La formulation d'élément basé sur une théorie de coque à forte courbure est à la fois la plus élégante, la plus délicate et la plus difficile. Partant de la théorie de Love-Koiter, on peut exprimer le champ des déplacements de deux façons différentes, en fonction (figure 3.1)

- Des composantes curvilignes u , v et w des déplacements de la surface moyenne, elle-même définie par le rayon vecteur $x(\alpha, \beta)$;

- des composantes cartésiennes u_x , v_y , et w_z des déplacements de la surface moyenne, définie semblablement par une fonction $Z = Z(X,Y)$ par rapport à un plan (X,Y) de référence.

La première solution permet de réaliser la conformité aux frontières, mais ne permet pas une représentation exacte des modes rigide.

➤ La seconde conduit à une sur compatibilité aux frontière (dans les dérivées des déplacements), limitative et peu pratique d'emploi, mais permet de représenté exactement les modes rigides. [FRE 03]

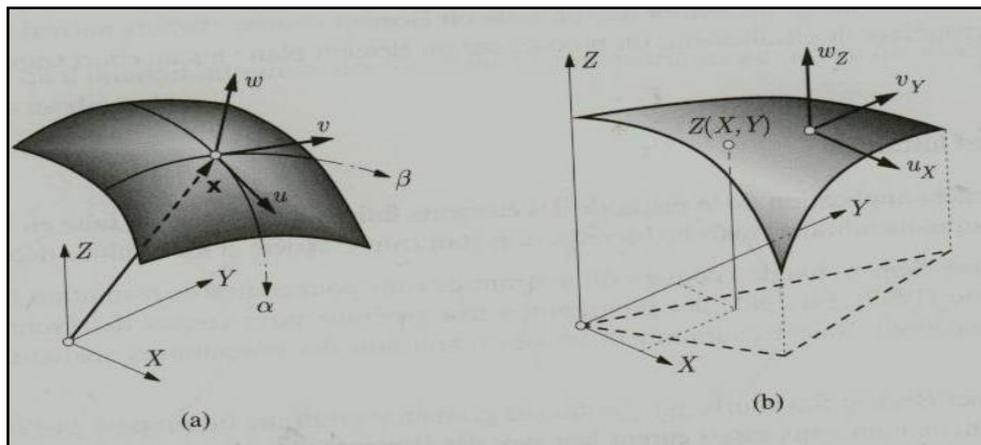


Fig. 3.1 composantes du champ des déplacements :

(a) Coordonnées curvilignes ; (b) Coordonnées cartésiennes. [FRE 03]

3.2.2. Élément base sur une théorie de coque surbaissée

Considéré isolément, un élément fini, de par sa taille, est davantage à l'image d'une coque surbaissée même si l'ensemble de la coque ne l'est pas (figure 3.2) que d'une coque à forte courbure. Or les théorie des coques surbaissée sont nettement plus simple que la théorie de Love ; en particulier, les rotations sont assimilable aux pentes de la composante transversal w de la déformée, ce que simplifie fortement les problèmes de conformité. On peut alors construire des éléments finis de coque surbaissée selon les deux théories décrites au chapitre 1 (Donnell en composantes curvilignes et Marguerre en composantes cartésiennes).

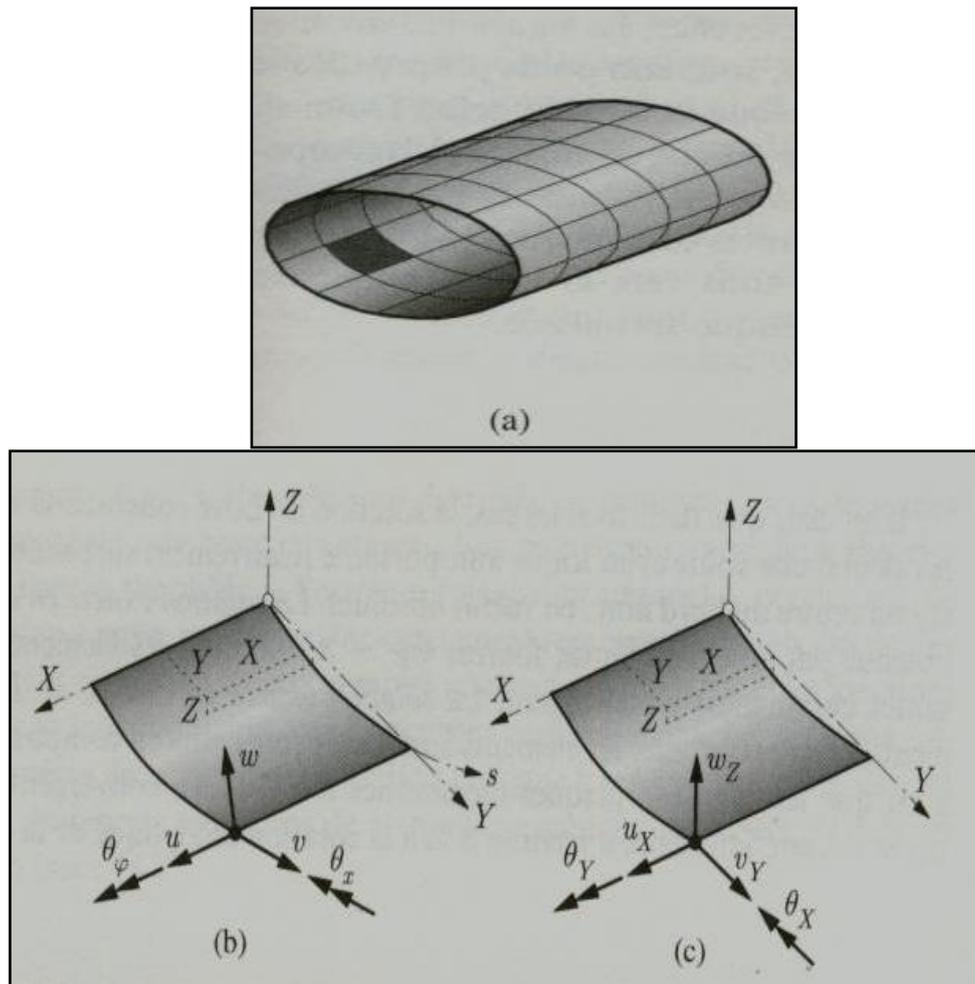


Fig. 3.2 Elément fini de coque surbaissée : (a) maillage d'une coque cylindrique ;
(b) composantes curvilignes ; (c) composantes cartésiennes. [FRE 03]

La solution théorique d'un problème de coque surbaissée est évidemment différente de celle du même problème exprimé en coque à forte courbure ; plus la coque est surbaissée, plus cette différence s'atténue.

Si l'entier d'une coque surbaissée ainsi que les éléments finis la discrétisant sont rapportés au même plan de référence, la solution numérique converge vers la solution théorique.

Par contre, si chaque élément fini est rapporté à son propre plan de référence, le résultat peut être totalement différent.

En effet la solution d'une coque à forte courbure modélisée et discrétisée par un maillage d'éléments finis formulés en coque surbaissée, est la suivante :

- Les éléments finis construits sur la base d'une théorie exprimée en composantes curvilignes des déplacements (Donnell) convergent vers la solution des coques surbaissée ; ils ne s'appliquent donc qu'aux seules coques surbaissée ;

- Les éléments finis développés sur la base d'une théorie formulée en composantes cartésiennes des déplacements (Marguerre) convergent vers la solution exacte de Love, que la coque soit surbaissée ou non ; on peut donc les appliquer au calcul de toutes les coques.

La figure 3.3 résume Ces résultats. [FRE 03]

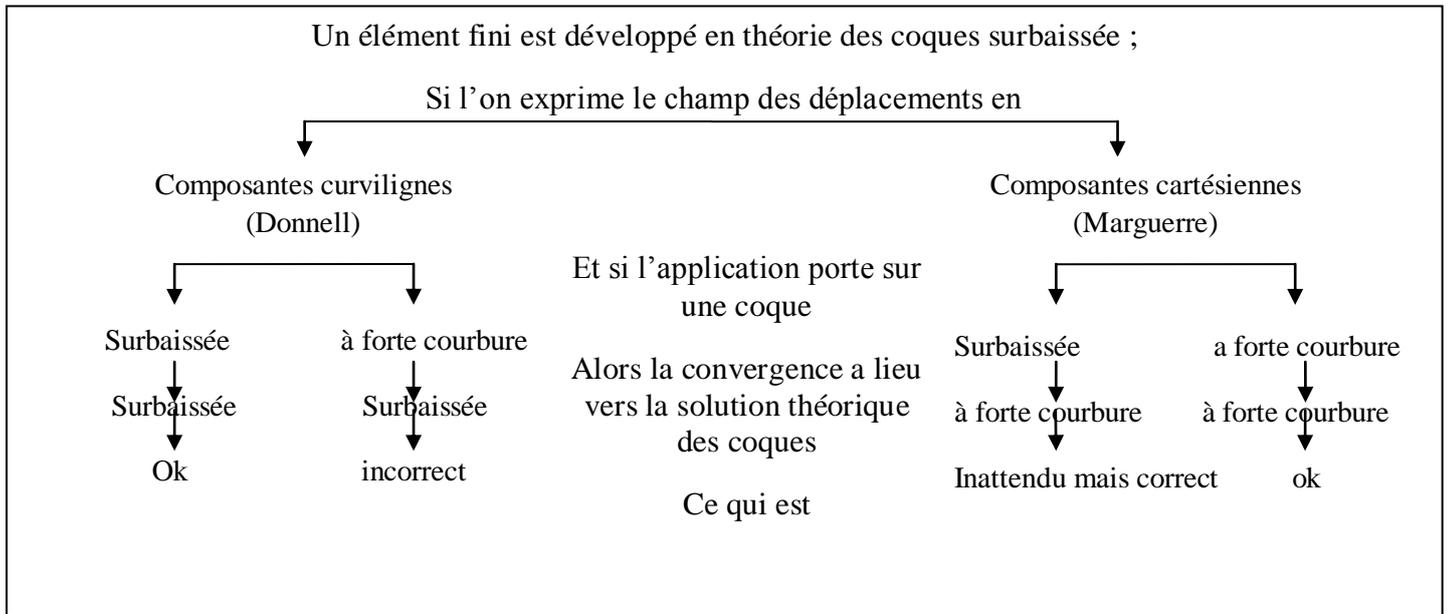


Fig. 3.3 convergence des éléments de coque surbaissée (shallow shell éléments). [FRE 03]

3.3. Approches géométrique

Pour effectuer l'analyse statique d'un ouvrage tel qu'on en rencontre dans la réalité, nous nous rendons compte immédiatement que le nombre d'éléments nécessaires pour le modéliser devient rapidement élevé. Ceci est dû d'une part à la nature des éléments utilisés et d'autre part à la complexité géométrique de la structure (intersection de coques, raidisseurs, etc....).

Nous rappelons brièvement que la modélisation des coques par éléments finis repose sur trois approches distinctes :

3.3.1. Approche curviligne

La formulation des éléments correspondants repose sur une théorie de coque courbe et utilise un repère curviligne pour la définition des grandeurs cinématiques et statiques. La qualité des résultats obtenus à partir de cette approche dépend aussi bien du modèle numérique que de la théorie de coque utilisée. Différentes théories de coques, utilisant les mêmes hypothèses cinématiques, se distinguent par le degré d'approximation des grandeurs

géométriques retenues dans la définition des relations déformations-déplacements. Les principaux problèmes rencontrés dans cette approche sont liés à la mauvaise représentation des modes de déformations constantes ou nulles, et aux blocages en membrane et/ou cisaillement. [BAT 92]

3.3.2. Approche cartésienne

Cette approche, initiée et appliquée au début des années 70 par Ahmad, Irons et Zienkiewicz [AHM 70], elle utilise des éléments isoparamétriques courbes ou tridimensionnelles dégénérées ; pour les structures homogènes isotropes, demeure aujourd'hui largement utilisée. Elle trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures : coques composites multicouches, analyse des non linéarités géométriques et matérielles.

L'approche isoparamétriques courbe, appelée également approche du solide 3D-dégénéré, permet de discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique des solides. L'introduction d'hypothèses cinématiques et mécaniques conduit à une formulation dégénérée avec une représentation isoparamétriques de la géométrie et des déplacements d'un point de la surface moyenne. Le vecteur de déplacement est défini par ses composantes cartésiennes (U, V, W). Les composantes de rotation sont au nombre de deux ou trois suivant que les normales aux nœuds sont continues ou discontinues d'un élément à un autre. [COF 91]

3.3.3. Approche par facettes planes

Très utilisée en pratique, cette approche consiste à approximer la coque de forme quelconque par un ensemble de surfaces (ou facettes) planes (Figure 3.4), de préférence triangulaires pour tenir compte des surfaces gauches si elles existent.

Les éléments plats sont obtenus par combinaison des éléments de membrane et de plaque en flexion avec ou sans effet de CT. Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables nodales locales dans le repère global. La convergence de ce type d'éléments a été analysée dans [BER 89].

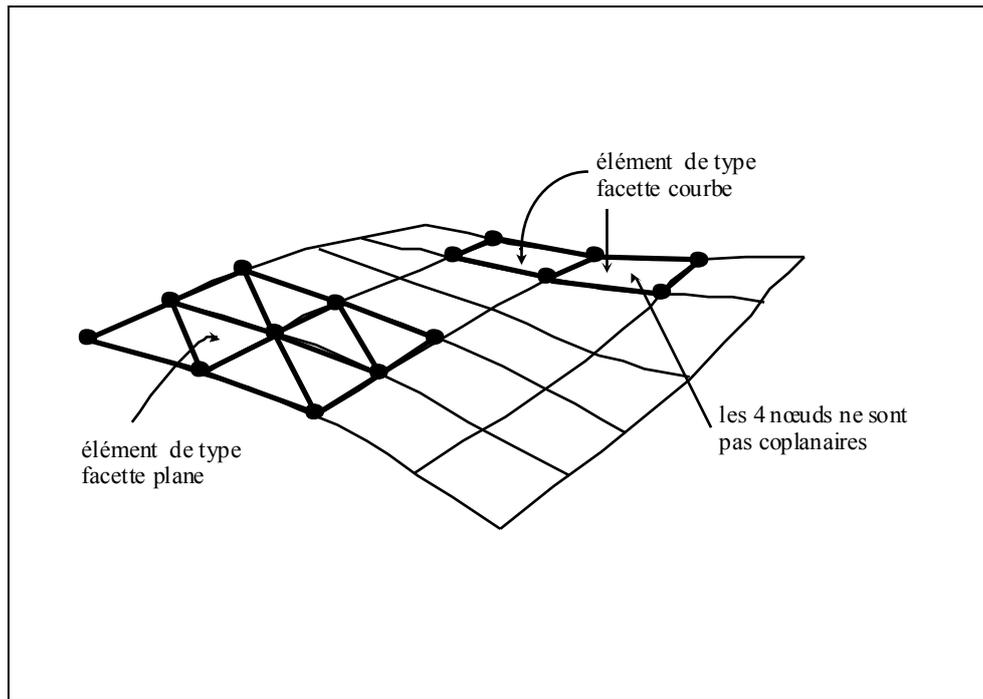


Fig. 3.4 : Coque quelconque. Facettes planes et courbes. [AYA 93]

Les éléments de coque à facettes planes sont simples à formuler, capables de représenter les mouvements de corps rigides, mixables avec d'autres éléments, etc...

Quelques inconvénients [YAN 90] :

- limitation aux seuls éléments triangulaires si la coque discrétisée présente un gauchissement.
- lenteur de la convergence dans le cas des problèmes sensibles aux défauts de géométrie, tels que le flambement, etc...

L'approche par facettes planes a été introduite pour la première fois en 1961 par Green et al [GRE 61]. Une liste d'éléments plats assez connus est présentée par Yang et al (1990)

[YAN 90]. Batoz et al ont utilisé cette approche en combinant les éléments de plaque de Kirchhoff discret DKT et DKQ aux éléments de membrane classiques CST (Constant Strain Triangle) et Q4 bilinéaire standard. Ils ont obtenu de bons résultats pour des problèmes non linéaires statiques et dynamiques...

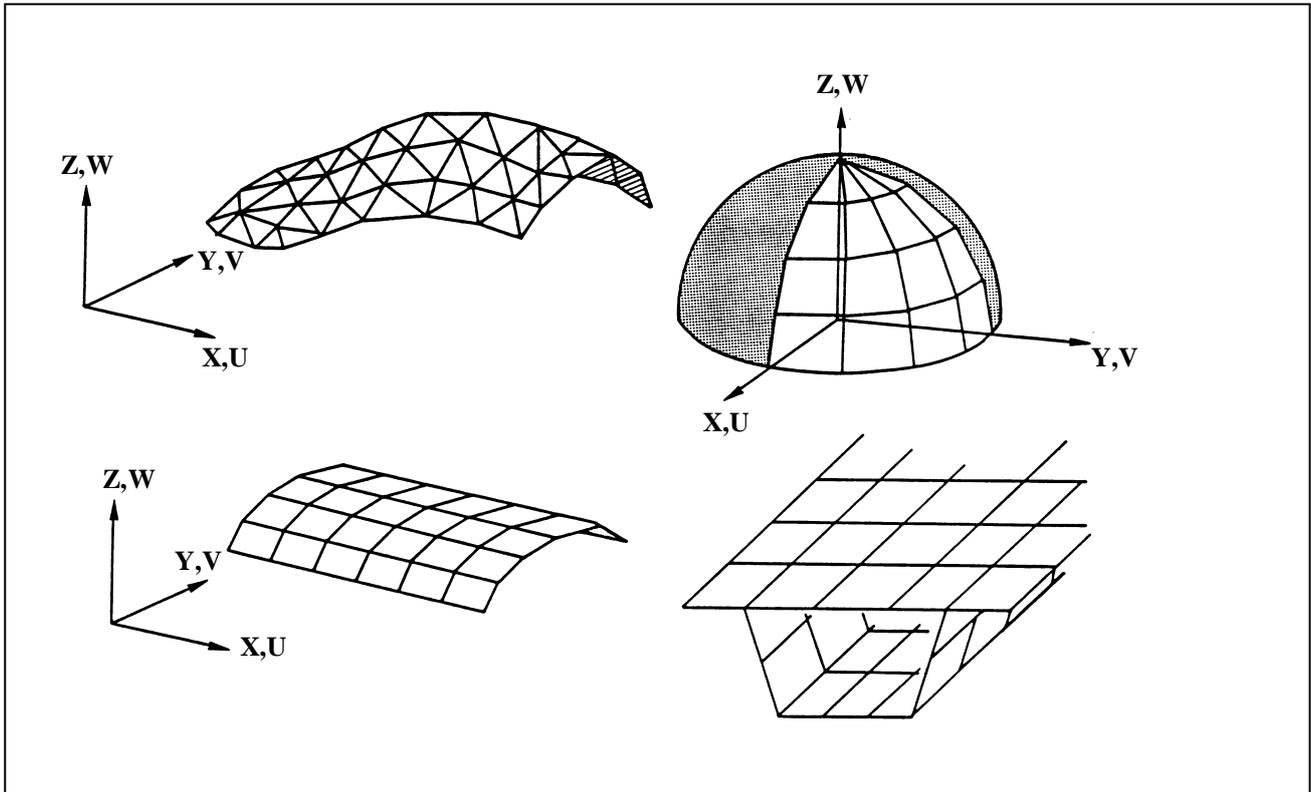


Fig. 3.5 : Exemple de coques et de structures plissées idéalisées par des éléments de coque plans. [MIC95]

Les éléments les plus usuels utilisés, pour ce type de représentation, sont les éléments triangulaires et quadrangulaires (figure 3.5).

3.4. Eléments de coques à facettes planes

Les éléments d'une coque plane sont soumis à des charges agissant dans son plan et normales à celui-ci donnant à la fois une action dans le plan (comportement membranaire) et une action normale au plan (comportement flexionnel).

Pour des petits mouvements, ces deux actions sont complètement indépendantes donc le comportement de l'élément pris sur une plaque peut être considéré de deux façons indépendantes, une action élastique dans le plan et une action de flexion normale au plan.

On suppose donc que les mouvements de flexion et les rotations de l'élément sont rapportés uniquement aux forces normales au plan et que les déplacements plans sont seulement rapportés aux forces planes. En respectant ces hypothèses, on peut alors faire l'étude des plaques pliées en superposant les deux comportements. [ZIN 2000]

3.4.1. La matrice de rigidité élémentaire dans le repère local

D'abord, on considère l'effet membranaire «en contraintes planes». Nous savons que l'état de déformations est défini par le champ de déplacements uniforme dont les composantes sont les deux translations (U et V)

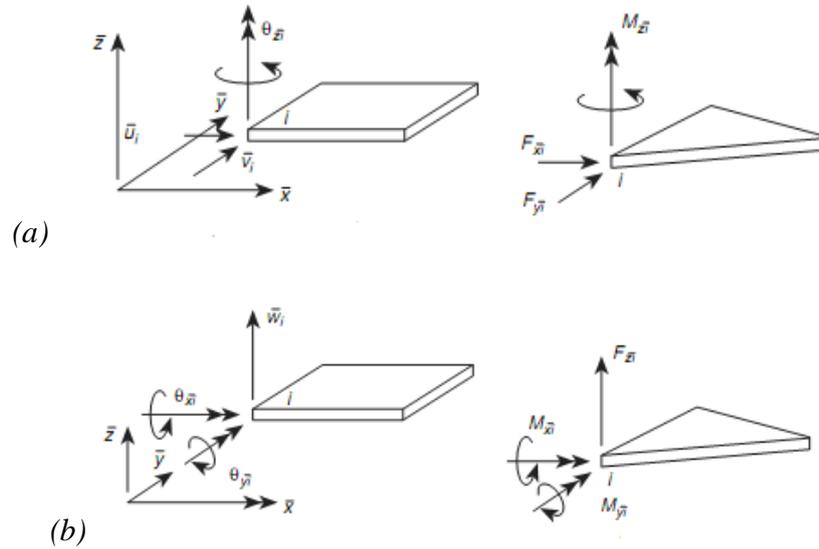


Fig. 3.6 élément plane soumis à des actions membranaires et flexionnelles :
 (a) Déplacements et forces «plane»; (b) Déplacements et force «flexion». [ZIN 2000]

En considérant la matrice de rigidité reliant les forces et les déplacements plans aux nœuds, on a:

$$\{F_e^p\} = \{K_e^p\} \{\delta_e^p\} \quad (3.1)$$

$$\{F_e^p\} = \begin{Bmatrix} \{F_1^p\} \\ \{F_2^p\} \\ \{F_3^p\} \\ \{F_4^p\} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\text{Avec : } \{F_i\}^p = \begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Et le vecteur déplacement est donné par :

$$\{\delta_e^p\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\}^p \\ \{\delta_2\}^p \\ \{\delta_3\}^p \\ \{\delta_4\}^p \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\text{Avec : } \{\delta_i\}^p = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i) :

$$\{F_i^p\} = \{K_{ii}^p\}\{\delta_i^p\} \quad (3.6)$$

$[K_{ii}^p]$ est la sous matrice qui relie les forces du nœud (i) aux déplacements de se même nœud :

Pour tout l'élément, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

Da la même manière, quand on considère le comportement flexionnel, on aboutie à la relation suivante :

$$\{K_e^f\}\{\delta_e^f\} = \{F_e^f\} \quad (3.7)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i) les vecteurs force et déplacement :

$$\{F_i\}^f = \begin{pmatrix} F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\{\delta_i\}^f = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

(f) indique le comportement flexionnel.

(p) indique le comportement membranaire.

Avant d'effectuer la superposition des deux comportements, on doit faire les remarques suivantes :

- On suppose que l'action membranaire et l'action flexionnelle soient parfaitement découplées pour avoir un élément de coque plane par superposition
- Les deux déplacements dans le plan (u et v) et les trois degrés de liberté dus à la flexion (w , θ_x , et θ_y), l'élément peut être aussi sujet à des rotations dans son plan (θ_z) autour de l'axe z.

Bien que la plaque soit très rigide dans son plan de telle sorte que ces rotations soient très petites et donc négligeable devant les autres degrés de liberté, il est commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin (au niveau de l'assemblage). De prendre en compte cette rotation en l'associant à un couple fictif (M_z)

Pour inclure le terme θ_z , que l'on sait négligeable et qui n'affecte pas les autres termes dans la matrice de rigidité de l'élément, la relation entre les quantités θ_z et M_z peuvent être exprimées par la pseudo-équation :

$$(M_z)_i = 0. (\theta_z)_i \tag{3.10}$$

Donc, on obtient finalement en chaque nœud les déplacements et les forces suivants : (figure3.7).

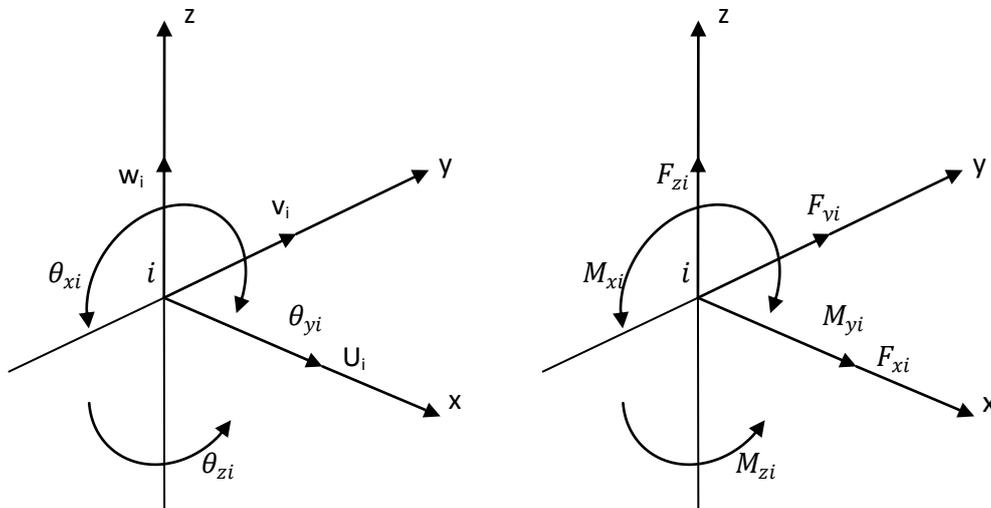


Fig.3.7 déplacements et forces nodales après superposition. [ZIN 2000]

Pour le nœud(i) on a :

$$\{F_i\} = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_i^p\} \\ \{\delta_i^f\} \\ \{\theta_{zi}\} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

On peut généraliser ces équations afin d'obtenir la matrice de rigidité $[K_e]$ de l'élément de plaque pliée.

3.4.2. Passage aux coordonnées globales et assemblage des éléments

Dans les problèmes d'élasticité plane et de flexion des plaques, tous les éléments étaient coplanaires, cependant pour les plaques pliées types et les coques, les éléments adjacents sont inclinés les uns aux autres.

Par conséquent, avant d'effectuer l'assemblage des éléments et de former ainsi la matrice de rigidité globale, on doit exprimer les matrices et vecteurs élémentaires dans le système de coordonnées globales (X, Y et Z).

Ce changement de repère a un intérêt important, car les déplacements qu'on calculera par la suite seront rapportés au système global, c'est à dire qu'ils n'auront une signification que dans ce système de coordonnées (Figure.3.8).

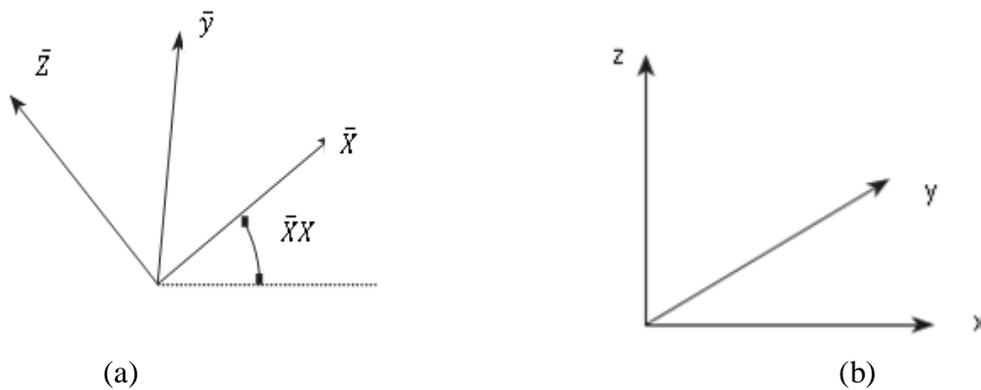


Fig.3.8 le système de coordonnées :
(a) repère local ; (b) repère global. [ZIN 2000]

Les raisons d'inclure le sixième degré de liberté (θ_z) dans les équations d'équilibre (dans le repère local), sont maintenant apparentes car ceci permet d'avoir une matrice $[T]$ symétrique carrée, ce qui va rendre les opérations d'assemblage plus faciles.

Sachant que les inclinaisons entre le repère local et le repère global sont exactement les mêmes au nœud (i) qu'aux autres nœuds de l'élément, on peut écrire :

$$\{\bar{\delta}^e\} = [R]\{\delta^e\} \quad (3.12)$$

$$\{\bar{F}^e\} = [R]\{F^e\} \quad (3.13)$$

$$\{F^e\} = [R]^{-1}\{\bar{F}^e\} \quad (3.14)$$

Et vu que $[R]$ est une matrice orthogonale, on; peut écrie $[R]^{-1} = [R]^T$ où $[R]$ est la matrice symétrique carrée d'ordre 24 et qui s'écrit comme suit :

$$[R] = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix}$$

On exprime maintenant la matrice de rigidité d'un élément dans le repère global on a :

$$\{\overline{F}^e\} = [K^e]\{\overline{\delta}^e\} \quad (3.15)$$

Soit

$$[R]\{F^e\} = [\overline{K}^e][R]\{\delta^e\} \quad (3.16)$$

On effectue le changement de repère par une matrice de rotation $[T]$, telle que pour le nœud (i), on a :

$$\{\overline{\delta}_i\} = [T]\{\delta_i\} \quad (3.17)$$

$$\{\overline{F}_i\} = [T]\{F_i\} \quad (3.18)$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\text{Ou } [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x} & \lambda_{\bar{x}y} & \lambda_{\bar{x}z} \\ \lambda_{\bar{y}x} & \lambda_{\bar{y}y} & \lambda_{\bar{y}z} \\ \lambda_{\bar{z}x} & \lambda_{\bar{z}y} & \lambda_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$\lambda_{\bar{ii}}$ est le cosinus de l'angle que forment les axes \bar{x} et x (fig.3.8.a)

$$\text{Dou : } [K_e] = [R]^T \cdot [\overline{K}_e][R] \quad (3.21)$$

Une fois les matrices de rigidité de tous éléments sont exprimées dans le repère global, l'assemblage et la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution du système d'équation final suivront les mêmes démarches standards.

On obtient alors les déplacements exprimés dans le repère global ce que fait qu'on doit repasser au repère local afin de calculer les contraintes.

3.4.3. Détermination des cosinus directeur dans le cas d'un élément quadrilatère

L'utilisation de ces éléments est limitée pour représenter des surfaces de type cylindrique ou en caisson. [ZIN 2000]

De ce fait, il est commode de prendre l'un des cotés de l'élément et l'axe \bar{y} correspondant parallèle à l'axe global x .

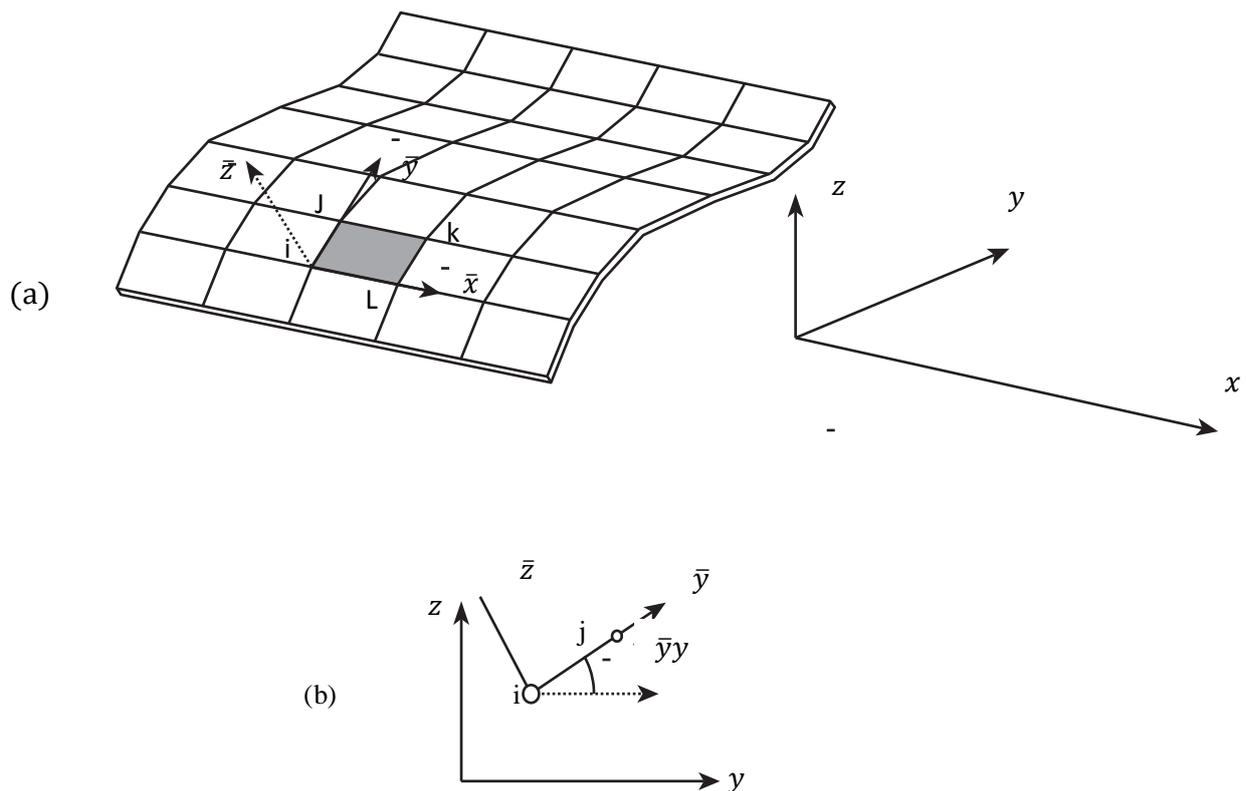


Fig.3.9 Coque cylindrique par l'assemblage d'éléments rectangulaires :

(a) Les coordonnées global et local; (b) la section verticale $i j$. [ZIN 2000]

Pour l'élément i j k l, on a :

Les cosinus directeurs de l'axe \bar{y}

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{y}y} &= \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ \lambda_{\bar{y}x} &= 0 \\ \lambda_{\bar{y}z} &= \frac{(z_j - z_i)}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Pour les cosinus directeurs de l'axe \bar{x} , on a :

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}y} &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}x} &= 1 \\ \lambda_{\bar{x}z} &= 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

Pour les cosinus directeurs de l'axe \bar{z} , on les exprime en fonction des coordonnées des nœuds.

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{z}y} &= \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ \lambda_{\bar{z}x} &= 0 \\ \lambda_{\bar{z}z} &= \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}\end{aligned}\quad (3.24)$$

On remarque que les règles des transformations orthogonales sont toujours satisfaites

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}x}^2 + \lambda_{\bar{x}y}^2 + \lambda_{\bar{x}z}^2 &= 1 \\ \lambda_{\bar{y}x}^2 + \lambda_{\bar{y}y}^2 + \lambda_{\bar{y}z}^2 &= 1 \\ \lambda_{\bar{z}x}^2 + \lambda_{\bar{z}y}^2 + \lambda_{\bar{z}z}^2 &= 1 \\ \lambda_{\bar{x}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{x}y}^2 + \lambda_{\bar{y}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{y}y}^2 + \lambda_{\bar{z}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{z}y}^2 &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{x}z}^2 + \lambda_{\bar{y}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{y}z}^2 + \lambda_{\bar{z}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{z}z}^2 &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}y}^2 \cdot \lambda_{\bar{x}z}^2 + \lambda_{\bar{y}y}^2 \cdot \lambda_{\bar{y}z}^2 + \lambda_{\bar{z}y}^2 \cdot \lambda_{\bar{z}z}^2 &= 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

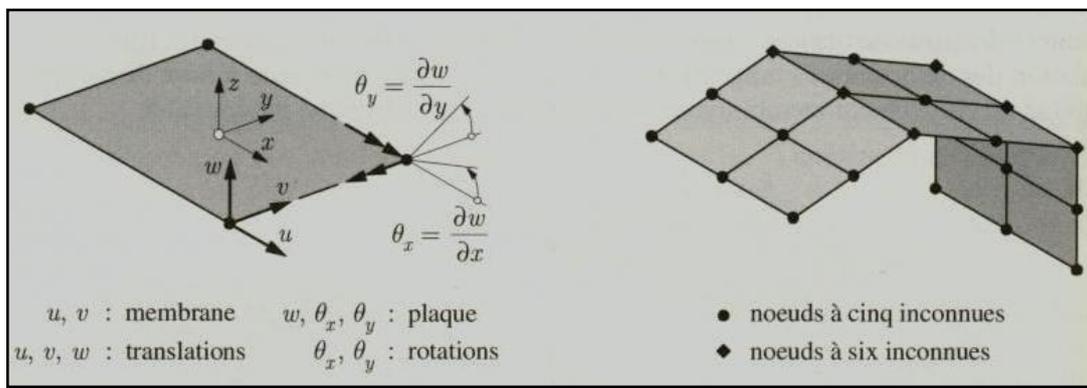
3.4.4. Problèmes pratiques de modélisations

Jusqu'ici, on a supposé que tous les éléments, pris à travers une section, d'une structure en plaques pliées, étaient inclinés entre eux, cela est valable que si on se contente d'étudier une coque courbe comme une plaque pliée (figure 3.10) équivalente. Cependant, la formulation que nous venons de décrire, conduit à des difficultés dans la modélisation si tous les éléments

qui concourent en un même nœud sont coplanaires, ceci est en effet causé par l'absence de rigidité correspondant à la rotation (θ_z), qui nous donnera une singularité du type

$$(0 = 0) \tag{3.26}$$

Cette équation ($0 = 0$) ne présente pas de difficultés particulières avant l'assemblage (bien que pour certains ordinateurs elle entraîne un message d'erreur). Néanmoins dans le cas où les directions des axes globaux diffèrent de celles des axes locaux, on aboutit après le changement de repère à six équations qui sont linéairement dépendantes et donc à un système où la matrice est singulière.



(a)

(b)

Fig.3.10 plaque pliée :

(a) Degrés de liberté ; (b) cinq ou six degrés de liberté. [FRE 03]

Ce type de singularité disparaît quand les éléments adjacents ne sont pas coplanaires ou quand les éléments de plaques sont bordés par des poutres-raidisateurs.

Les solutions envisageables pour surmonter cette difficulté sont les suivantes :

1. Supprimer les degrés de liberté (θ_z), correspondant à ces singularités et eux seuls.
2. Introduire des rigidités fictives faibles correspondant à ces degrés de liberté, remplacer la relation (3.26) par la relation :

$$K_{\theta_z} \cdot \theta_{zi} = 0 \tag{3.27}$$

Qui, après transformation, mène a un système d'équations sans problèmes dont en tire tous les déplacements y compris un(θ_{zi}), de la manière habituelle.

Comme ce (θ_{zi}) n'a pas d'influence sur les contraintes et n'est pas couplés aux équations de l'équilibre, la valeur de $K_{\theta z}$ correspond a une rigidité extérieur et n'a donc pas d'importance.

Des travaux ont été consacrés à la détermination du coefficient de rigidité réel pour les rotations du type envisagé en les considérant comme un degré de liberté supplémentaire en analyse plane. [ZIN 2000]

Dans notre programme on a simplement introduit des coefficients de rigidité en rotation fictifs pour tous les éléments qu'ils soient coplanaires ou non. Pour un élément quadrilatère, Ils ont été définis par une matrice telle que l'équilibre soit préservé en coordonnées locales.

Pour un quadrilatère on a :

$$\begin{Bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \\ M_{zl} \end{Bmatrix} = \alpha . E . t . A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{zl} \end{Bmatrix}$$

Ou α est coefficient qui reste à fixer.

Pour notre cas on a prit $\alpha = 10^{-6}$

3.5. Conclusion

Les éléments de coque à facettes planes sont les plus simples à formuler.

Il suffit de formuler deux éléments qui représentent les deux comportements ; membranaire et flexionnel.

Les types de formulations sont divers, dans notre travail la formulation utilisée est représenté dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE IV

FORMULATION DES ELEMENTS DE COQUE A FACETTES PLANES

4.1. Introduction

Il ya Plusieurs types de formulations d'éléments finis en mécanique des structures, citer au chapitre II. (Formulation en déplacement, Formulation en déformation,.....etc.)

Nous allons représenter la formulation des éléments utilisés dans ce présent travail :

- Formulation de l'élément finis Q4 (Quadrilatéral with4 nouds) membranaire à champ de déplacement. [ROC 79]
- Formulation de l'élément Q4SBE1 (Quadrilatéral Strain based élément with4 nouds) membranaire à champ de déformation. [HAM 2007]
- Formulation de l'élément finis ACM (Ashwell, Clough, Melosh) pour l'étude de la flexion des plaques à champ de déplacement. [ADI 61],

A partir de la formulation de ces éléments on obtient par superposition deux types d'éléments de coque à facette plane : "ACM-Q4" à champ de déplacement et "ACM- Q4SBE1" mixte.

4.2. Formulation de l'élément membranaire Quadrilatère " Q4 " à champ de déplacement

Pour l'étude de l'élasticité plane, on utilise l'élément Quadrilatère " Q4 " à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud U et V.

L'élément rectangulaire utilisé à des côtés de longueur "a" et de largeur "b" avec une épaisseur "t". Le système de coordonnées convenables et la numérotation des nœuds de l'élément sont mentionnées sur la figure (4.1).

La figure (4.2) montre les huit déplacements inconnus et la figure (4.3) les forces nodales correspondantes.

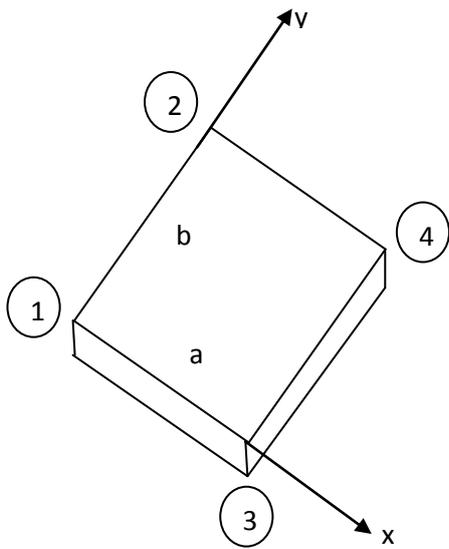


Fig.4.1. Numérotation des nœuds.

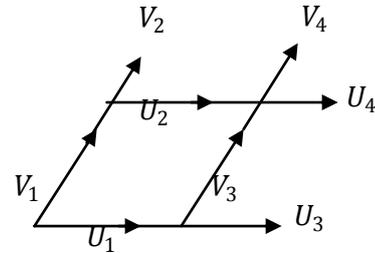


Fig.4.2. Les huit déplacements inconnus

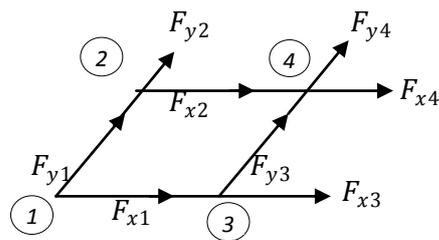


Fig.4.3. les forces nodales correspondantes.

Les équations 4.1 et 4.2 donnent les vecteurs des déplacements et des forces complets pour l'élément.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \hline u_3 \\ v_3 \\ \hline u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ \hline F_{x3} \\ F_{y3} \\ \hline F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

La matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$ est carrée d'ordre 8.

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (4.3)$$

4.2.1. Le choix du champ de déplacement

L'élément a huit degrés de liberté, on doit avoir huit coefficients inconnus dans le polynôme représentant le modèle de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases} \quad (4.4)$$

Quand x est constant, u et v varient linéairement en fonction de y et de même quand y est constant, les deux déplacements varient linéairement en fonction de x .

Exemple :

Le long du bord 1-3 $y = 0$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x$$

Le déplacement v varie linéairement le long de ce bord à partir du nœud (1) $x = 0, v_1 = \alpha_5$ jusqu' au nœud (3) $x = a, v_3 = \alpha_5 + \alpha_6 a$ (figure 4.4)

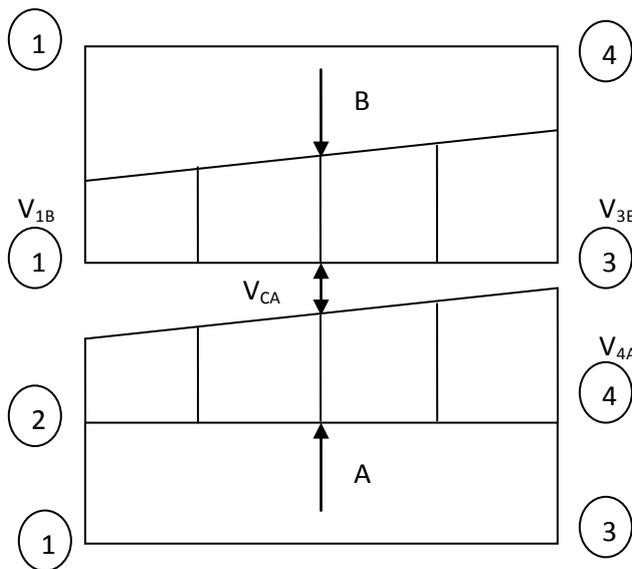


Fig.4.4 .Compatibilité des déplacements

On remarque que les déplacements imposés aux nœuds sont identiques, c'est-à-dire que la compatibilité des déplacements nodaux est assurée. Les mêmes déplacements existent dans des éléments adjacents pour tous les points le long de l'interface, donc le choix de cette fonction assure la continuité des déplacements.

On peut écrire l'équation 4.4 sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{ \alpha \} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$\{ \alpha \}$: Vecteur des coefficients de la fonction de déplacement.

4.2.2. Expression des déplacements dans l'élément en fonction des déplacements nodaux

On doit exprimer l'état de déplacement en un point en fonction des déplacements nodaux sous la forme :

$$\{\delta^e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (4.6)$$

Où $[A]$ est la matrice obtenue après avoir remplacé dans $[f(x, y)]$ les valeurs de x et y par les coordonnées des nœuds de l'élément.

au nœud (1) $x_1 = 0, y_1 = 0$

$$[f(x_1, y_1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Au nœud (2) $x_2 = 0, y_2 = b$

$$[f(x_2, y_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Au nœud (3) $x_3 = a, y_3 = 0$

$$[f(x_3, y_3)] = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Au nœud (4) $x_4 = a, y_4 = b$

$$[f(x_4, y_4)] = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix}$$

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{\alpha\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (4.7)$$

$$\text{Donc} \quad \{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.8)$$

En remplaçant l'équation (4.8) dans l'équation (4.5) on obtient :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.9)$$

4.2.3. Relation déformation-déplacements

L'état de déformation dans l'élément peut être représenté par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_u/\partial_x \\ \partial_v/\partial_y \\ \partial_u/\partial_y + \partial_v/\partial_x \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

En remplaçant U et V par leurs valeurs. A partir de l'équation (4.4), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) = \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) \\ \quad = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y. \end{array} \right.$$

En utilisant les expressions des déformations dans l'équation (4.10) on obtient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Donc: } \{\varepsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (4.11)$$

Et avec la valeur de $\{\alpha\}$ donnée par l'équation (4.8)

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B]\{\delta^e\} \quad (4.12)$$

$$\text{Avec : } [B] = [C][A]^{-1}$$

4.2.4.: Relation contraintes - déplacements

Après avoir déterminé les déformations, on peut déduire les contraintes. D'après la loi de Hooke :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad (4.13)$$

En remplaçant $\{\varepsilon(x, y)\}$ par sa valeur dans l'équation (4.12) on obtient :

$$\begin{aligned} \{\sigma(x, y)\} &= [D][B]\{\delta^e\} \\ &= [D][C][A]^{-1} \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Où $[D]$ la matrice d'élasticité, elle est donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

➤ pour des contraintes planes :

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ d_{21} &= d_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

➤ pour des déformations planes :

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ d_{21} &= d_{12} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

Avec E : module de Young
 ν : Coefficient de poisson

4.2.5: Obtention de la matrice de rigidité élémentaire

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements. En appliquant le théorème des travaux virtuels :

$$W_{int} = W_{ext} \quad (4.16)$$

Le travail interne par unité de volume est donnée par :

$$W_{int} = \{\varepsilon(x, y)^*\}^T \{\sigma(x, y)\} \quad (4.17)$$

Avec $\varepsilon(x, y)^*$: les déformations produites par les déplacements virtuels $\{\delta^{*e}\}$

$$W_{ext} = \{\delta^{*e}\} \{f^e\} = \{\delta^{*e}\} [K^e] \{\delta^e\} \quad (4.18)$$

En intégrant, on obtient le travail interne total et en faisant égaliser le travail interne et le travail externe, on obtient :

$$[K^e] = \int [B]^T [D][B] d(vol) \quad (4.19)$$

Pour le cas d'un élément rectangulaire pour l'élasticité plane, on a :

$$dvol = t \cdot dx \cdot dy$$

Avec t l'épaisseur constante.

Alors :

$$[K^e] = t \int_0^b \int_0^a [B]^T [D][B] dx dy \quad (4.20)$$

4.3. Formulation l'élément de plaque en flexion " ACM " à champ de déplacement

Pour l'étude de la flexion des plaques minces, on utilise l'élément quadrilatère à quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud : Le déplacement vertical $\ll w \gg$, la rotation autour de l'axe $x \ll \theta_x \gg$ et celle autour de l'axe $y \ll \theta_y \gg$.

Le système de coordonnées ainsi que la numérotation des nœuds de l'élément sont montrés dans la figure (figure 4.5).

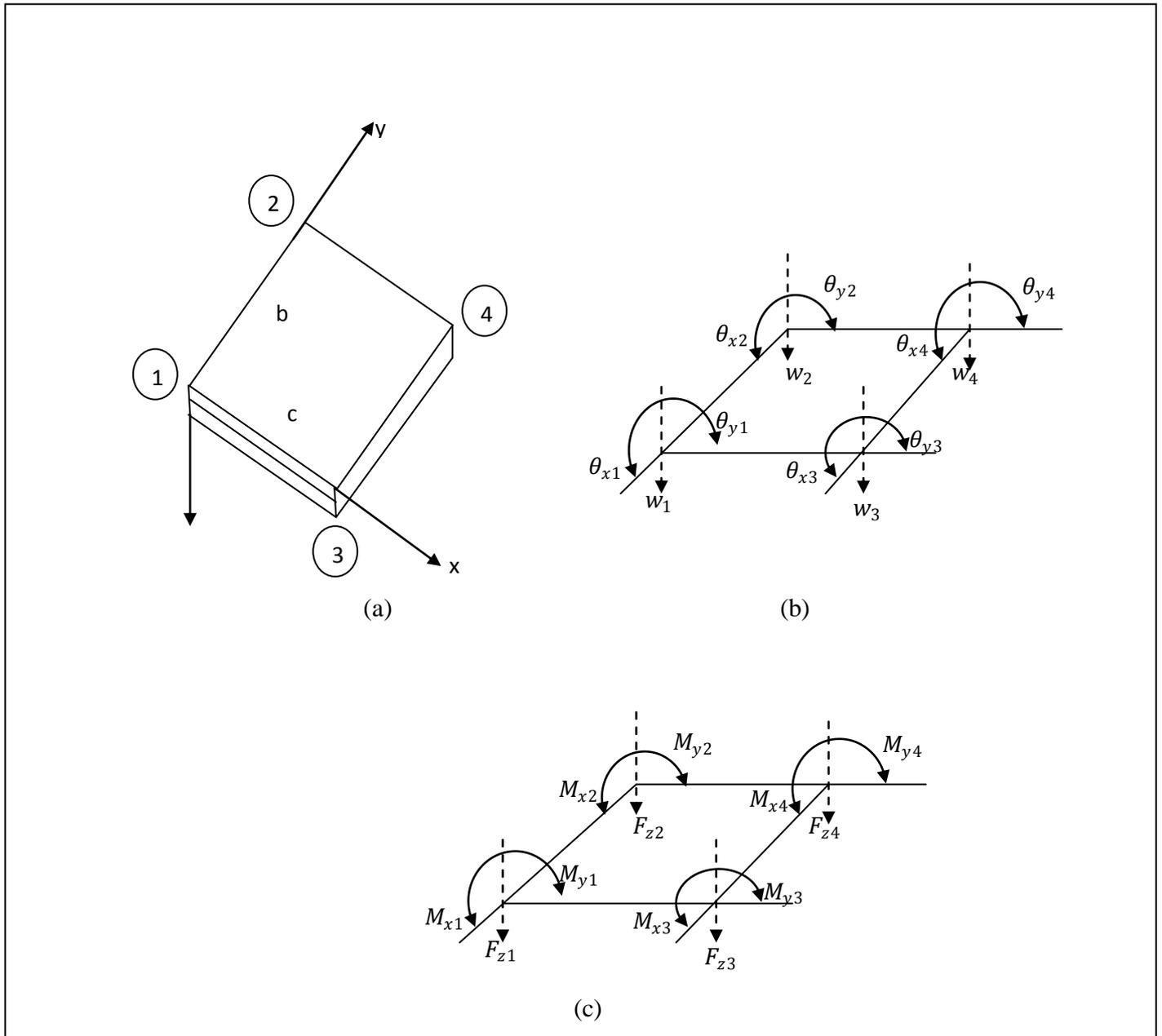


Fig.4.5. l'élément de plaque en flexion

. -a Système de coordonnées. b Déplacements nodaux. c Forces nodales

Cet élément est alors à un total de douze degrés de liberté (figure 4.5b). Les moments et les forces correspondantes consistent en deux moments M_x et M_y et une force de cisaillement F_z en chaque nœud (figure 4.5c). Les déplacements au nœud (i) peuvent être écrits de la façon suivante :

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

et de même pour les forces et les moments correspondant au nœud (i) :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{Zi} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

De telle sorte que les vecteurs des forces et des déplacements pour tout l'élément s'écrivent :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité de l'élément est carrée d'ordre 12.

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \quad (4.25)$$

4.3.1. Le choix du champ de déplacement

Puisque l'élément a douze degrés de liberté, on doit avoir douze coefficients indéterminés dans le polynôme qui représente « w ». L'équation (4.26) donne une fonction convenable.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y \\ + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (4.26)$$

Ce qui donne les rotations suivantes :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -(\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 \\ + \alpha_{11} ax^3 + 3\alpha_{12} xy^2) \quad (4.27)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 \\ + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (4.28)$$

Pour vérifier la continuité des flèches et des pentes ; on Considère un bord de l'élément.

Par exemple le bord (1 -2) où x est égal à zéro :

Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord sont donnés par l'équation suivante :

$$\begin{cases} w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ \theta_x = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2) \\ \theta_y = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3 \end{cases} \quad (4.29)$$

Aux nœuds de ce bord on a :

Nœud 1 :

$$w = w_1 = \alpha_1$$

$$\theta_x = \theta_{x1} = -\alpha_3$$

$$\theta_y = \theta_{y1} = \alpha_2$$

Nœud 2 :

$$w = w_2 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3$$

$$\theta_x = \theta_{x2} = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2)$$

$$\theta_y = \theta_{y2} = \alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3$$

On a ainsi six équations pour obtenir les huit coefficients, ce qui est impossible. Le déplacement w et la rotation θ_x sont complètement définis par les mouvements des extrémités, la rotation normale au bord θ_y n'est pas définie de façon unique. Puisque les mouvements des extrémités sont compatibles, cela signifie que la continuité de w et θ_x est assurée le long des bords où x est constant mais θ_y , d'autre part, est discontinu le long de ces bords. Cependant la discontinuité de la pente normale peut exister et la fonction choisie n'est pas idéale et appelée une «fonction non conforme».

4.3.2. Expression de l'état de déplacement en fonction des déplacements nodaux

Après avoir choisi la fonction de forme, on peut donner le vecteur de déplacements en un point (x, y) de la manière suivante :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (4.30)$$

On doit exprimer l'état de déplacement en un point en fonction des déplacements nodaux.

Sous la forme suivante:

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\}$$

$[A]$: est la matrice obtenue après avoir remplacé dans $[f(x, y)]$ x et y par les coordonnées des nœuds.

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.31)$$

En remplaçant l'équation (4.31) dans l'équation (4.30) on aura :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.32)$$

4.3.3.: Relation déformations - déplacements

L'état de déformation dans l'élément peut être représenté par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

En remplaçant w par sa valeur on obtient l'équation (4.33) qui peut être écrite :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x, y)\} &= [C]\{\alpha\} \\ &= [C] [A]^{-1} \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

La relation cherchée entre déformations et déplacements nodaux est obtenue par :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x, y)\} &= [B]\{\delta^e\} \\ [B] &= [C][A]^{-1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.3.4. Relations contraintes-déplacements

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont réellement les moments de flexion et de torsion ;

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} \quad (4.35)$$

En remplaçant (4.33) dans (4.34) on aura :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

$$\text{Avec : } [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 1 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$[D]$: Matrice de rigidité de flexion

$$D_{11} = D_{22} = Et^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = \nu Et^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_{33} = Et^3(1-\nu)/24(1-\nu^2)$$

4.3.5. Obtention de la matrice de rigidité élémentaire

On procède de la même façon que pour l'élément Q4. Ainsi la relation entre les charges nodales $\{F^e\}$ et les déplacements est donnée dans le cas général par l'équation suivante :

$$\{F^e\} = [\int [B]^T [D] [B] d(vol)] \{\delta^e\} \quad (4.36)$$

Pour le cas particulier d'un élément pour la flexion des plaques, l'équation (4.36) peut s'écrire de la façon suivante :

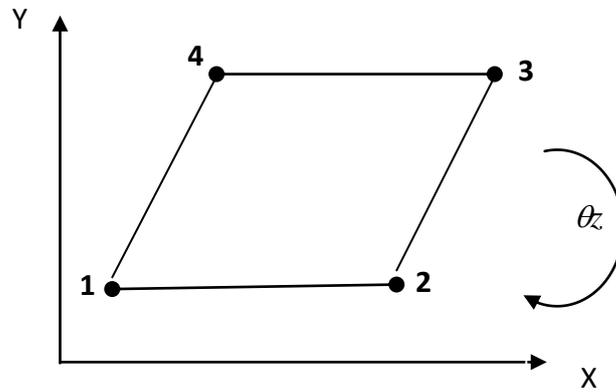
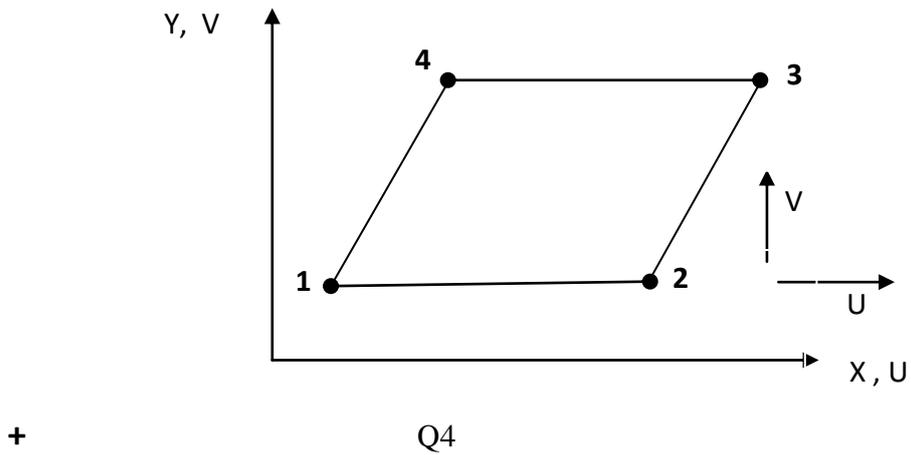
$$\{F^e\} = \left[\int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] d_x d_y \right] \{\delta^e\}$$

La matrice de rigidité est définie par :

$$[K^e] = t \int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] d_x d_y$$

4.4. Construction de l'élément plane ACM-Q4

Le principe d'obtention d'un élément de coque plane par superposition d'un élément de membrane et d'un élément de flexion est illustré en (figure 4.6).



Rotation fictive θ_z

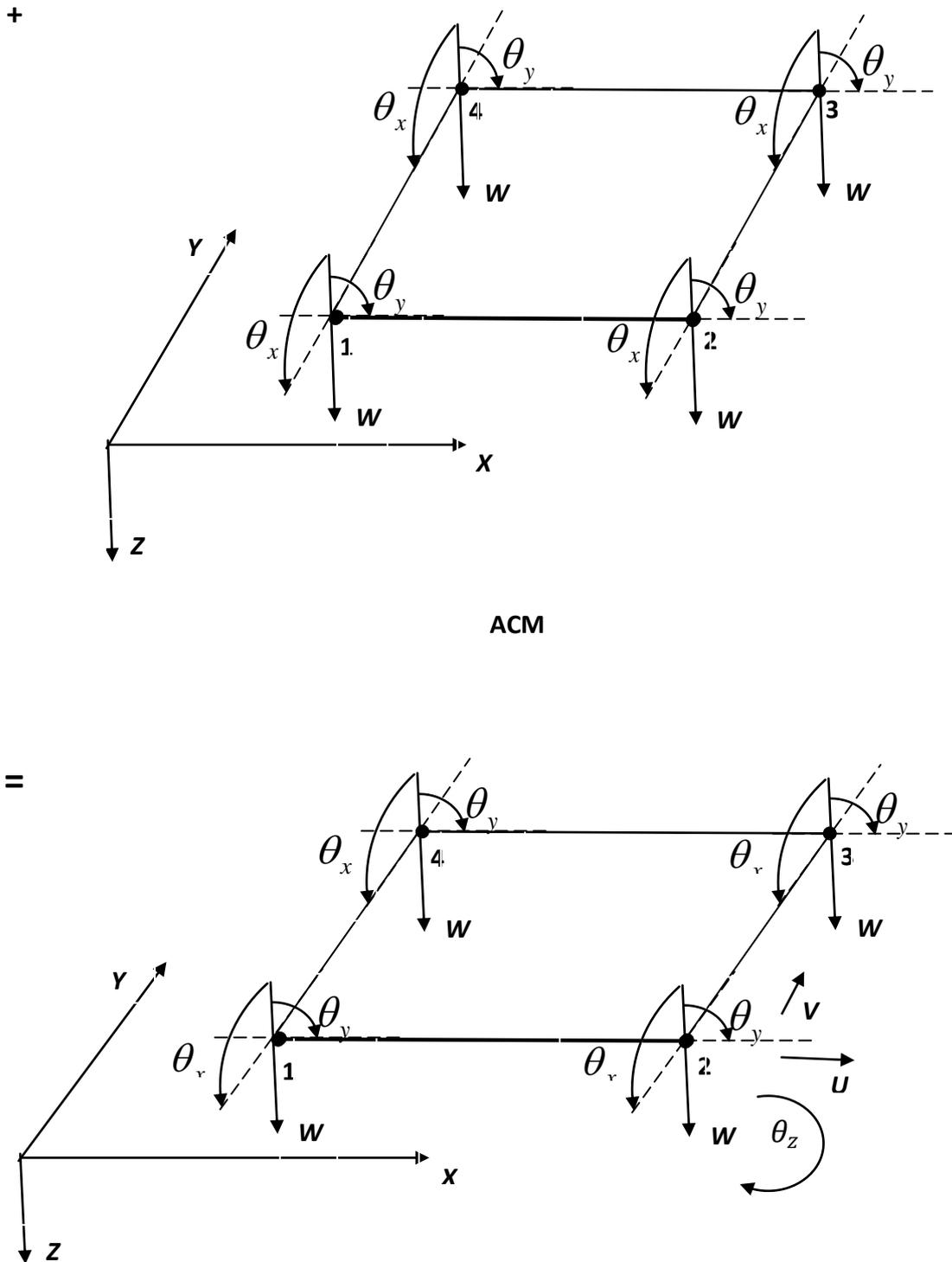


Fig.4.6. l'élément de coque plane ACM-Q4

4.5. Formulation de l'élément de coque plane « ACM- Q4SBE1 » mixte

A. construction de l'élément ACM- Q4SBE1

Pour la modélisation par éléments finis des structures complexe, divers éléments peuvent être utilisés : poutres, membrane, éléments de solide, plaques et coques ces éléments construits selon la formulation classique ne partagent pas, en général, les mêmes degrés de liberté nodaux, ce qui complique l'élaboration d'un modèle compatible. Pour résoudre ce problème, nous utilisons un nouveau élément fini **ACM- Q4SBE1** (élément de coque plane, Quadrilatère) qui a été développé par M^r Dr : D.HAMADI (2009) [HAM 2009].

Ce type d'élément est simple, stable, fiable, peu coûteux en temps de calcul et adapté à l'analyse des problèmes généraux d'élasticité plane.

B. Description de l'élément Q4SBE1

Le présent élément est un quadrilatère avec quatre nœuds au coin et un nœud central, chaque nœud à deux degrés de liberté. Ainsi, le champ de déplacement doit contenir dix constantes indépendantes.

La figure (Fig.4.7) montre les propriétés géométriques de l'élément Q4SBE1 et les déplacements nodaux correspondants.

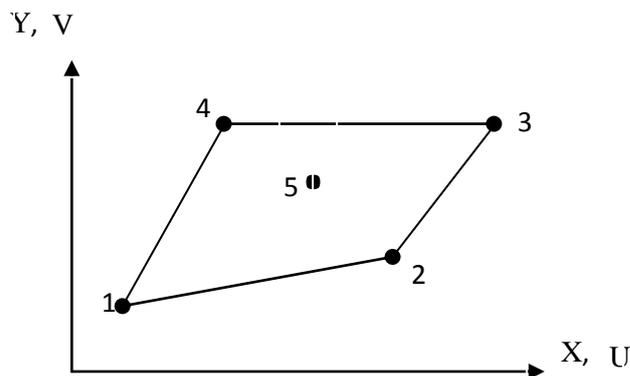


Fig.4.7. les coordonnées nodaux de l'élément Q4SBE1

Les trois composants du champ de déformation à un point quelconque sont donnés par l'équation (4.37).

$$\begin{cases} \varepsilon_x = U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = V_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = U_y + V_x \end{cases} \quad (4.37)$$

U, V : Les composants des déplacements respectivement dans les directions X et Y.

Les équations (4.37) doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps, rigide.

Donc, on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

L'intégration de (4.38) permet d'obtenir une solution particulière :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 y \\ V = a_2 + a_3 x \end{cases} \quad (4.39)$$

Les déformations dans l'équation (4.37) doivent satisfaire une équation additionnelle appelée l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.40)$$

L'équation (4.38) donne les trois composantes qui représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide et exige trois constantes indépendantes

(a1, a2, a3).

Ainsi il reste sept constantes (a4, a5... a10) pour représenter approximativement la déformation dans l'élément.

Ces sept constantes indépendantes sont réparties comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_4 + a_5 y + a_9 x \\ \varepsilon_y = a_6 + a_7 x + a_{10} y \\ \gamma_{xy} = -a_5 x R - a_7 y R + a_8 - a_9 H y - a_{10} H x \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\text{Avec : } H = \frac{2}{(1-\nu)} \quad ; \quad R = \frac{2\nu}{(1-\nu)}$$

Ces déformations données par les équations (4.41) satisfont l'équation de compatibilité

(4.40) et les équations bidimensionnelles d'équilibre (4.42a) et (4.42b)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.42a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4.42b)$$

En intégrant les équations (4.41) nous obtenons :

$$U = a_4 x + a_5 x y - a_7 y^2 (R+1)/2 + a_8 y/2 + a_9 (x^2 - H y^2)/2 \quad (4.43a)$$

$$V = -a_5 x^2 (R+1)/2 + a_6 y + a_7 x y + a_8 x/2 + a_{10} (y^2 - H x^2)/2 \quad (4.43b)$$

Le champ de déplacement final pour l'élément Q4SBE1 est obtenu par combinaison de l'équation (4.39) et (4.43) pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 x y - a_7 \frac{y^2 (R+1)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{1}{2} (x^2 - H y^2) \\ V = a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2 (R+1)}{2} + a_6 y + a_7 x y + a_8 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{1}{2} (y^2 - H x^2) \end{cases} \quad (4.44)$$

La matrice de rigidité peut être calculée à partir de l'expression suivante :

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (4.45a)$$

$$[K_0] = \iint_S [Q]^T [D][Q] dx.dy \quad (4.45b)$$

Avec:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -xR & 0 & -yR & 1 & -Hy & -Hx \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = D_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ D_{12} = \frac{\nu.E}{(1-\nu^2)} \\ D_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right.$$

Pour $[A]$ et $[K_0]$ voir l'annexe

L'élément de coque à facette plane "ACM- Q4SBE1" mixte (Figure 4.8) ; est obtenu par le même principe précédent de superposition de l'élément de membrane Q4SBE1 et de l'élément ACM (L'élément standard de plaque en flexion).

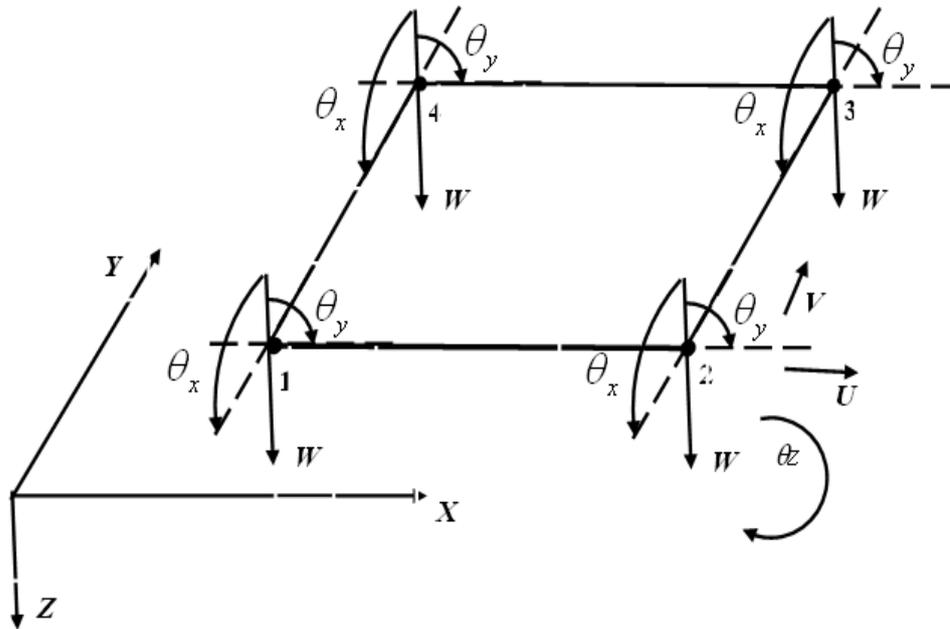


Fig.4.8. élément de coque plane "ACM- Q4SBE1"

4.6. L'intégration analytique de la matrice $[K_0]$

Généralement l'intégration numérique est très couteuse, quoi qu'elle donne de bons résultats, il existe des situations où deux problèmes peuvent se présenter :

Problème de distorsion géométrique, sachant que, pour certains éléments, une trop grande distorsion (distorsion sévère) peut conduire à des résultats numériques erronés (perte de précision) et problème de blocage ou verrouillage de membrane [HAM 2007], [VID 96].

Pour éviter ces problèmes on a utilisé l'intégration analytique pour les deux éléments de coque plane « ACM- Q4SBE1 » et « ACM-Q4 ».

L'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire est donnée par l'expression suivante :

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (4.46 \text{ b})$$

$$\text{Avec : } [K_0] = \iint_S [Q]^T [D] [Q] dx dy \quad (4.46 \text{ c})$$

Etant donné que la matrice $[A]$ et son inverse peuvent être évalués numériquement,

L'évaluation de l'intégral (4.46c) devient la clé du problème.

Une expression général facile à mettre en œuvre numériquement est formulée, permette l'évaluation de façon automatique de la matrice $[K_0]$ quelque soit le degré du polynôme et la distorsion de l'élément (Figure 4.9)

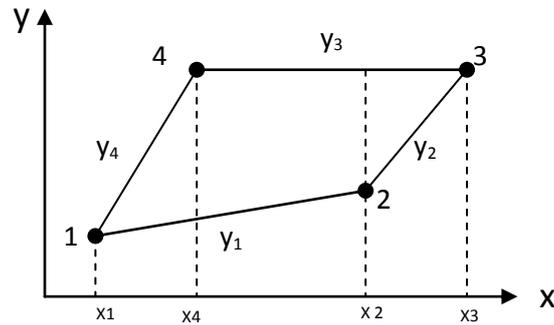


Fig.4.9. Élément quadrilatère

$$I = [K_0] = \iint_S C \cdot x^\alpha y^\beta dx dy \quad (4.47)$$

L'expression générale de l'équation (4.47) pour l'élément quadrilatère est donnée par :

$$I = \sum_{P=1}^3 I_P \quad (4.48)$$

Avec :

$$I_P = \frac{C}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} \cdot C(k) \left(a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k} \right) \left(x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha} \right)$$

4.7. Présentation de l'Organigramme générale

La figure (figure 4.10) résume les parties de base du programme pour la résolution du problème par la méthode des éléments finis.

4.8. Conclusion

La performance de ces éléments de coque à facette plane ACM- Q4SBE1 et ACM-Q4 est évaluée on utilise des tests de validations standards.

La comparaison avec les résultats analytiques basés sur la théorie des coques minces est très importante.

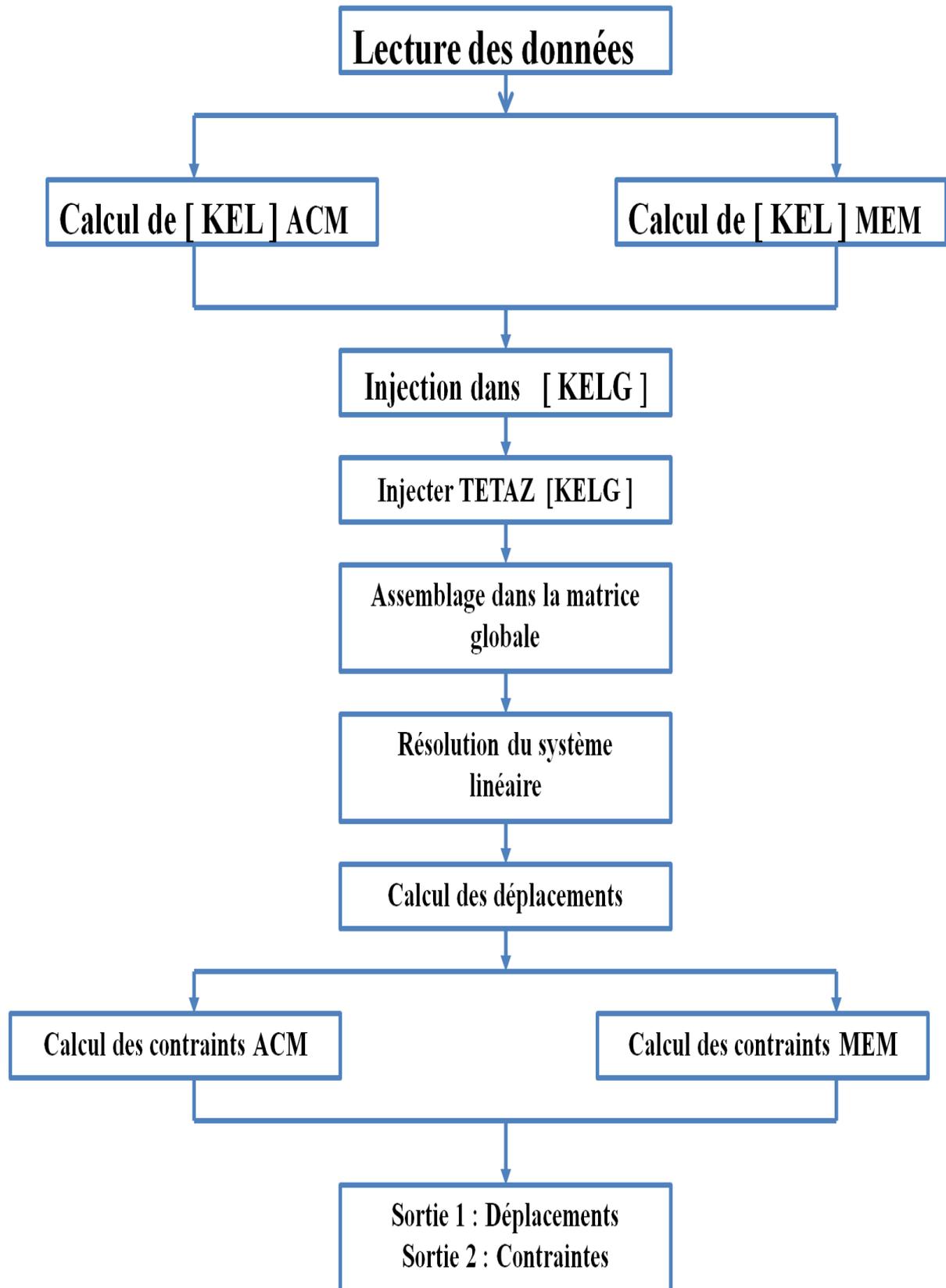


Fig.4.10. l'Organigramme générale

CHAPITRE V

VALIDATION ET APPLICATIONS

5.1. Tests de validation des éléments – représentation et résultats

Les tests de validation d'un modèle impliquent, d'une part, la vérification de la convergence et d'autre part, une évaluation de la vitesse de convergence et de l'influence de la distorsion géométrique sur la précision.

5.1.1. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Soit un cylindre court ($L/R= 2$) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités et soumis à deux charges unitaires concentrées et diamétralement opposées (figure 5.1). Ce test de coques minces ($R/h = 100$) est jugé sévère par certains chercheurs. Il permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C). [BAT 92]

Par raison de symétrie, seul le huitième du cylindre est étudié (portion ABCD). Une solution de référence basée sur une théorie de coques minces est donnée par Flugge [FLU 60] et Lindberg et al [LIN 69] :

- déplacement W_C sous la charge : $WC = -\overline{w}_c Eh/P = 164,24$

- déplacement V_D suivant Y : $VD = -\overline{v}_d Eh/P = 4,11$

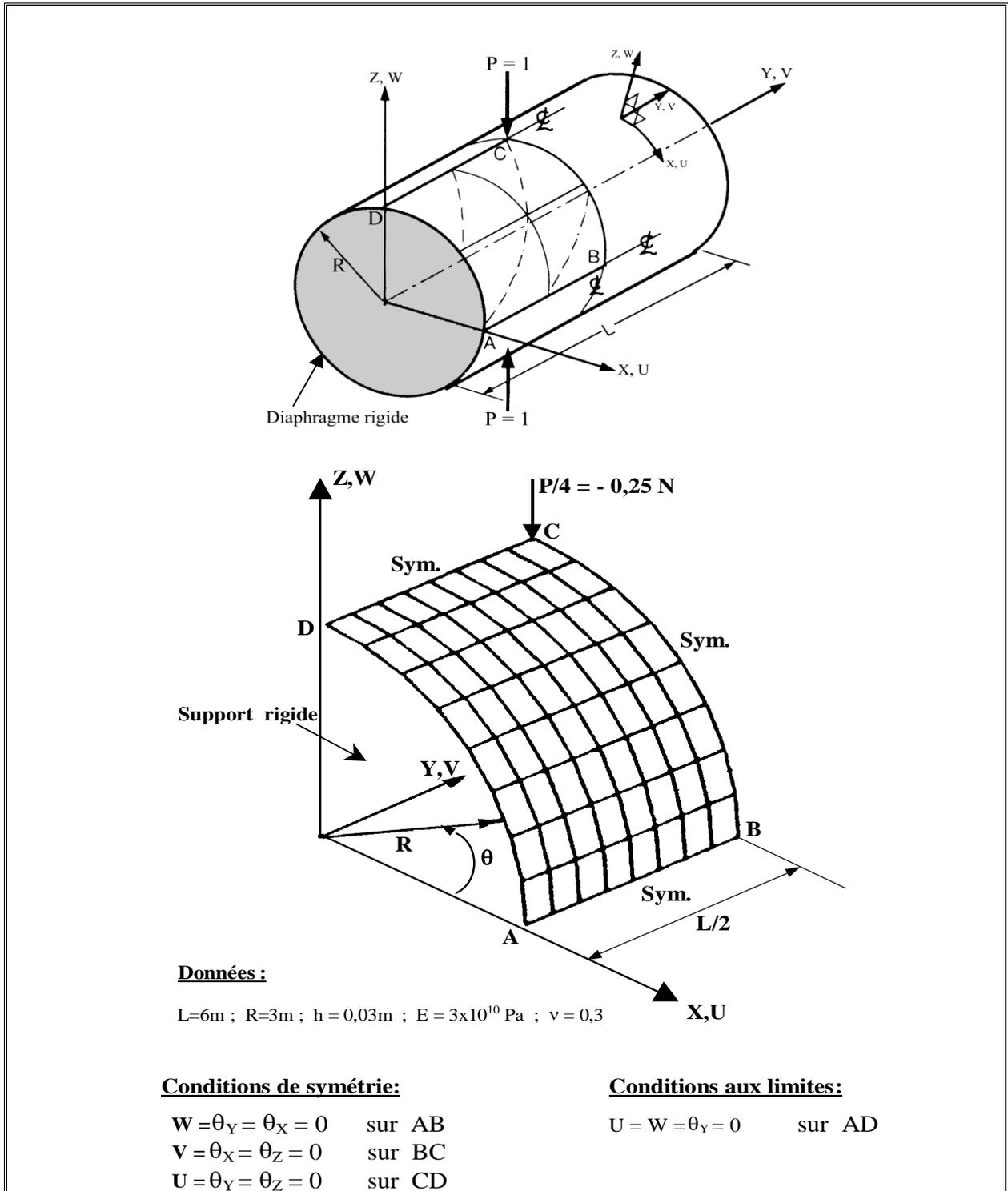


Fig.5.1. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides. Données. [BAT 92]

Nombre d'éléments	Déplacement WC au Point C	
	ACM- Q4	ACM- Q4SBE1
2x 2	14.04	16.128
4 x 4	100.62	106.29
6 x 6	135.63	139.95
8 x 8	153.18	156.06
20 x 4	160.47	162.9
Exacte	164.24	

Tableau 5.1 : Déplacement W_C au Point C
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».

Nombre d'éléments	Déplacement Vd au Point D	
	ACM- Q4	ACM- Q4SBE1
2x 2	1.940	2.338
4 x 4	5.922	6.210
6 x 6	4.794	4.848
8 x 8	4.4415	4.4748
20 x 4	4.113	4.185
Exacte	4.114	

Tableau 5.2 : déplacement Vd au Point D
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».

Commentaires :

- Les deux tableaux 5.1 et 5.2 Présentent les résultats de convergence des déplacements normaux W_C au point C et V_D au point D des deux éléments ACM-Q4 et ACM-Q4SBE1.
- Les deux éléments convergent de façon monotone vers la solution de référence dans le cas du déplacement W_C (Figure 5.2). en effet, la flexion est dominante au voisinage du point C, or les deux éléments de coque à facette plane en le même élément à déformation de flexion, ce qui explique que les résultats obtenus sont identique.
- Dans le cas du déplacement V_D , les deux éléments ACM-Q4 et ACM-Q4SBE1 convergent rapidement vers la solution de référence (Figure 5.3) à partir de $N=4$.
- Les résultats sont bons pour les deux éléments avec une légère différence de précision. L'élément ACM-Q4SBE1 est riche en membrane, ce la peut expliquer la légère différence de précision entre les résultats obtenue des deux éléments.

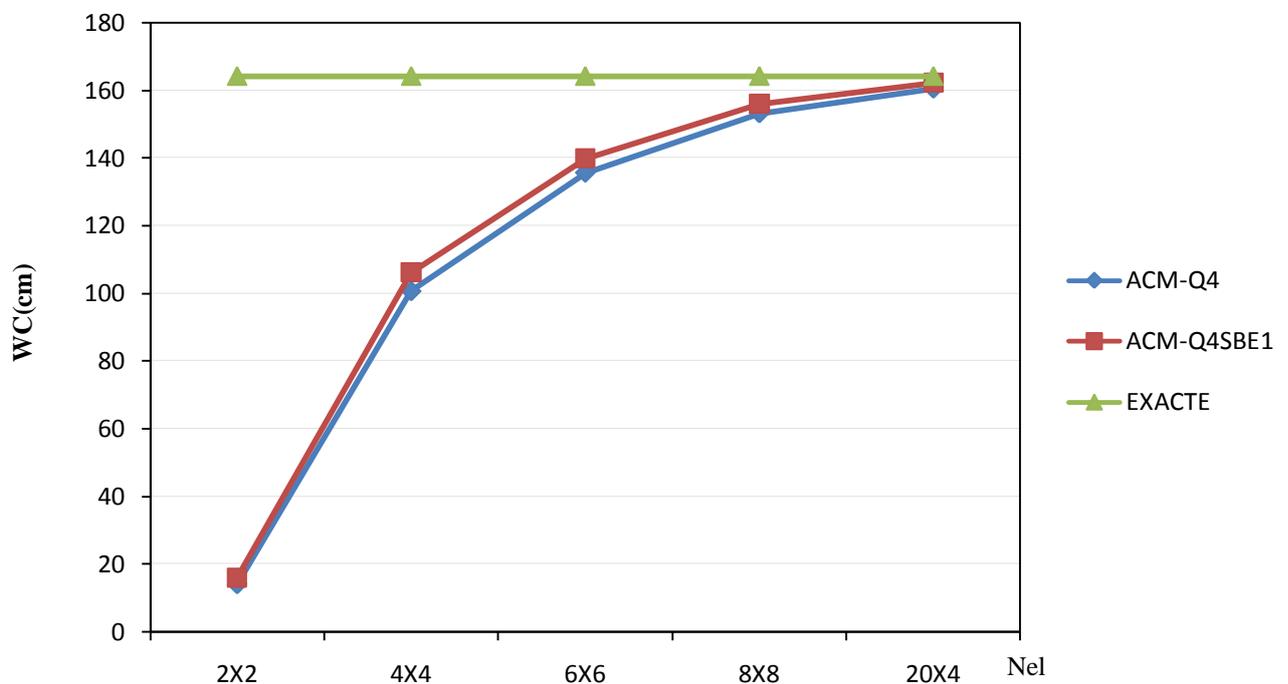
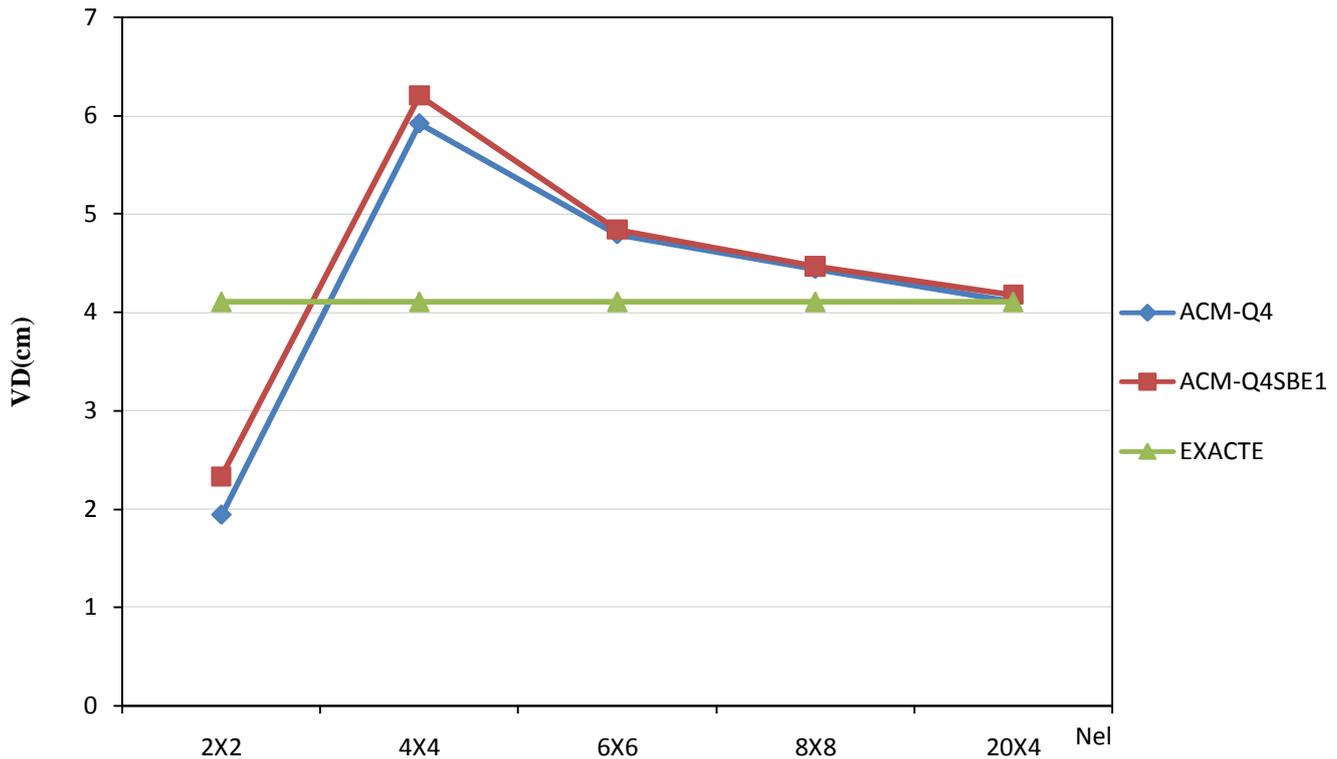


Fig.5.2. Convergence de W_C au Point C
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».



*Fig.5.3 Convergence de Vd au Point D
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».*

5.1.2. Panneau cylindrique soumis à son poids propre

Un des problèmes fréquemment traités pour évaluer les performances d'un élément de coque est celui du toit cylindrique soumis à son poids propre. Les bords droits sont libres et les bords courbes reposent sur des diaphragmes rigides dans leurs plans. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées sur la figure (5.4) ($R/h = 100$, $L/h = 200$).

Les déformations de cisaillement transversal sont négligeables et les déformations de membrane sont importantes par rapport à celles de flexion. Ce problème, fréquemment traité par les chercheurs, sert de test d'aptitude d'un élément à simuler des états de contraintes ou de déformations de membrane. [BAT 92]

La solution analytique de référence basée sur la théorie des coques surbaissées (Shallow Shell Theory) est obtenue par Scordelis et Lo [SCO 69], celle basée sur la théorie des coques profondes (Deep Shell Theory) est sensiblement différente.

Le quart du toit est discrétisé en considérant des maillages réguliers avec $N=2, 4$ et 8 éléments sur les bords AB et AD .

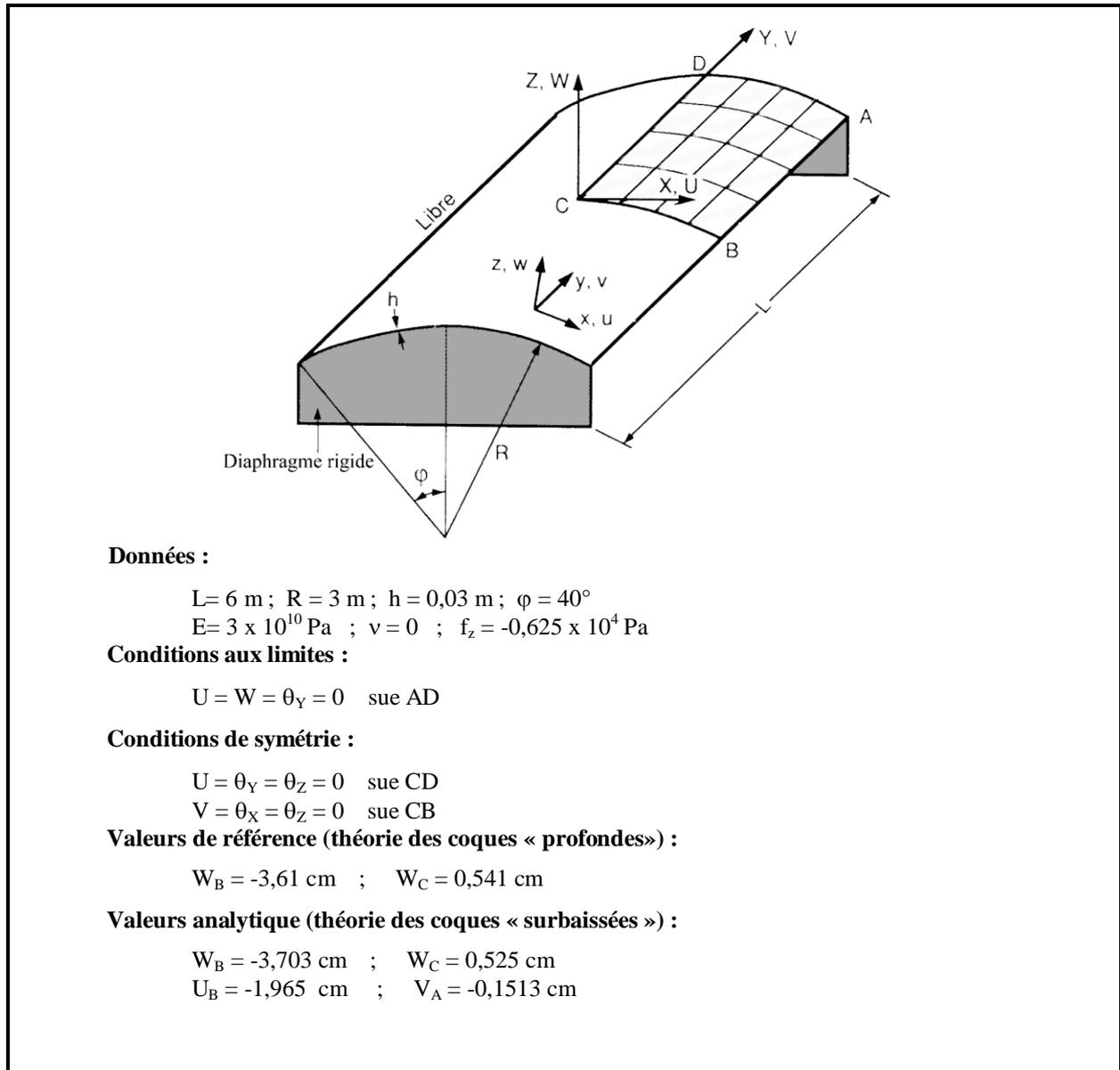


Fig.5.4 : Toit cylindrique soumis à son poids propre. [BAT 92]

Nombre d'éléments	Déplacement normal W_C au point C	
	ACM- Q4	ACM- Q4SBE1
2 x 2	0,577	0.7116
4 x 4	0,509	0.5726
8 x 8	0,5282	0.547
Exacte coques « profondes»	0,541	0,541

Tableau 5.3. Déplacement W_C au point C

« Toit cylindrique soumis à son poids propre ».

Nombre d'éléments	Déplacement normal W_B au point B	
	ACM- Q4	ACM- Q4SBE1
2 x 2	-4.311	-4.947
4 x 4	-3,412	-3,789
8 x 8	-3.524	-3.642
Exacte coques « profondes»	-3,610	-3,610

Tableau 5.4: Déplacement W_B au point B

« Toit cylindrique soumis à son poids propre ».

Commentaires :

- Les tableaux 5.3 et 5.4 présentent les résultats de convergence du déplacement vertical en C et en B, des deux éléments ACM-Q4 et ACM-Q4SBE1.
- La comparaison entre la convergence des deux éléments dans le même cas de déplacement W_C ou W_B , m'entre que l'élément ACM-Q4SBE1 converge rapidement de façon monotone vers la solution de référence.

- l'élément ACM-Q4SBE1 est riche en membrane, les effets de membrane sont relativement importants une convergence assez bonne est obtenue par l'élément ACM-Q4SBE1.

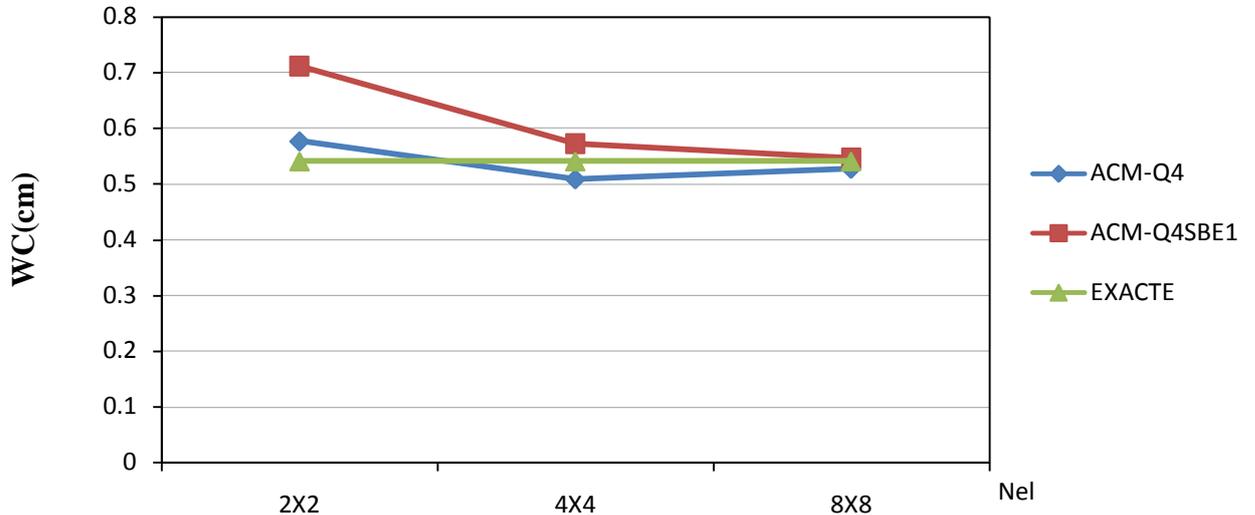


Fig.5.5. Convergence de W_C au Point C
« Toit cylindrique soumis à son poids propre ».

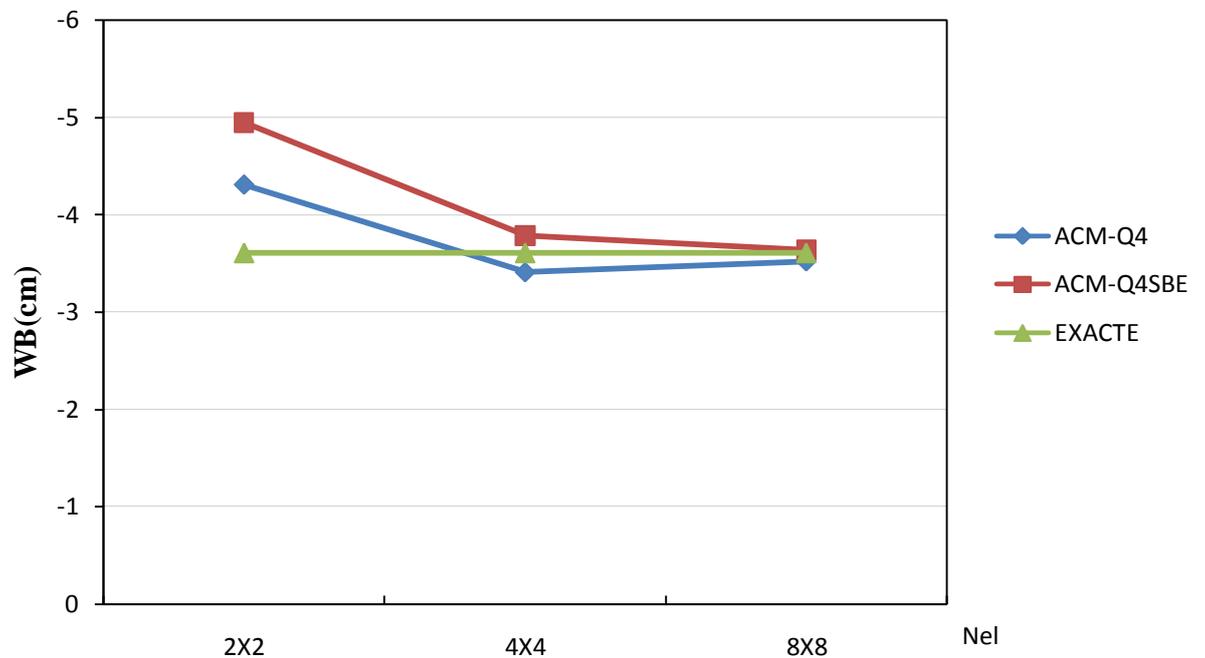


Fig.5.6. Convergence de W_B
« Toit cylindrique soumis à son poids propre ».

5.1.3. Analyse d'un problème non standard de coque - Cylindre pincé court à bords libres

C'est l'un des exemples les plus répandus dans la littérature pour comparer les éléments de coque (représentation des modes rigides et convergence). En effet depuis 1967, il a servi de problème test, afin d'évaluer les performances des nouveaux éléments axisymétriques où celles des éléments généraux de coque du point de vue vitesse de convergence et surtout représentation du mode de corps rigide. Par raison de double symétrie, seul un huitième du cylindre est modélisé.

Les conditions de symétrie sont imposées le long de AB, AD et DC (figure 5.9). Deux épaisseurs du cylindre sont considérées (h_1 et h_2). [BEL 2000]

Nous avons étudié la convergence des déplacements normaux W_C (point C). La performance de l'élément est comparée avec la solution analytique (coques profondes).

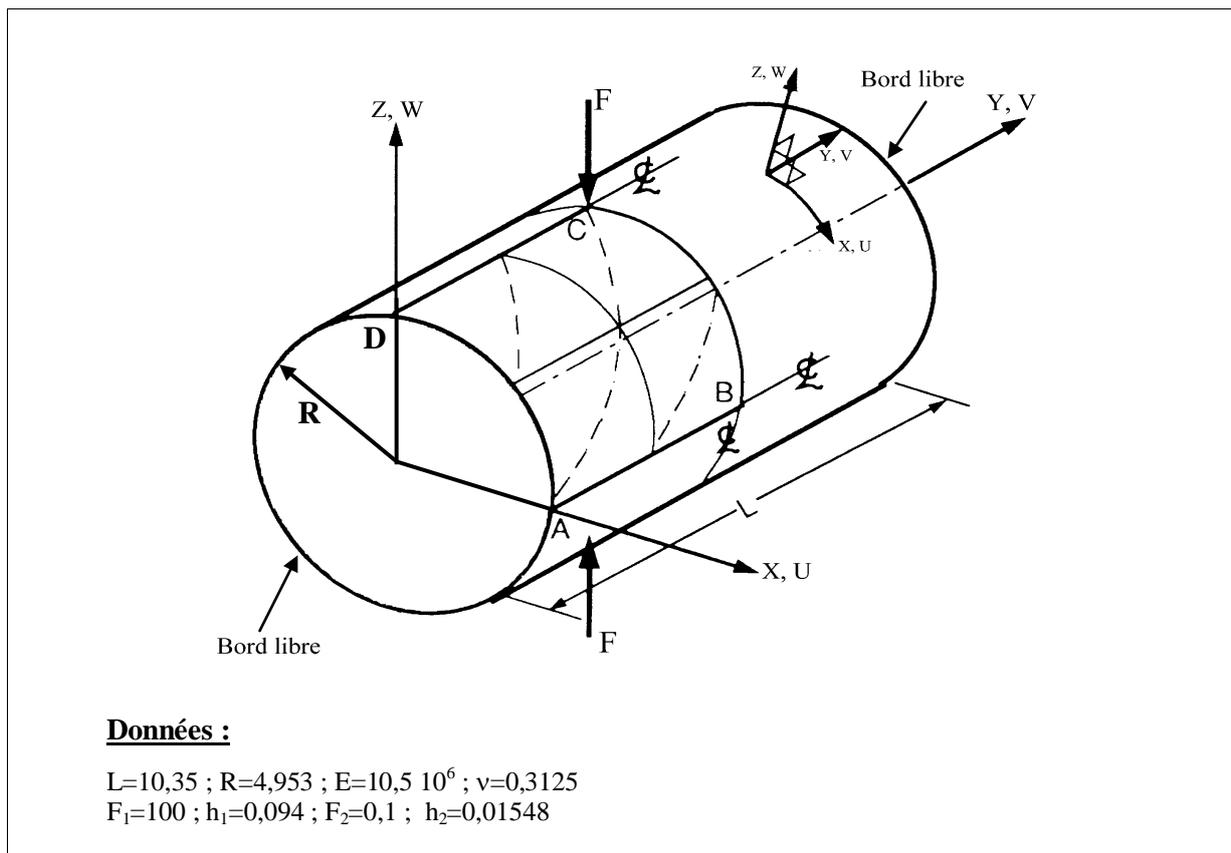


Fig. 57 : Cylindre pincé court à bords libres. [BAT 92]

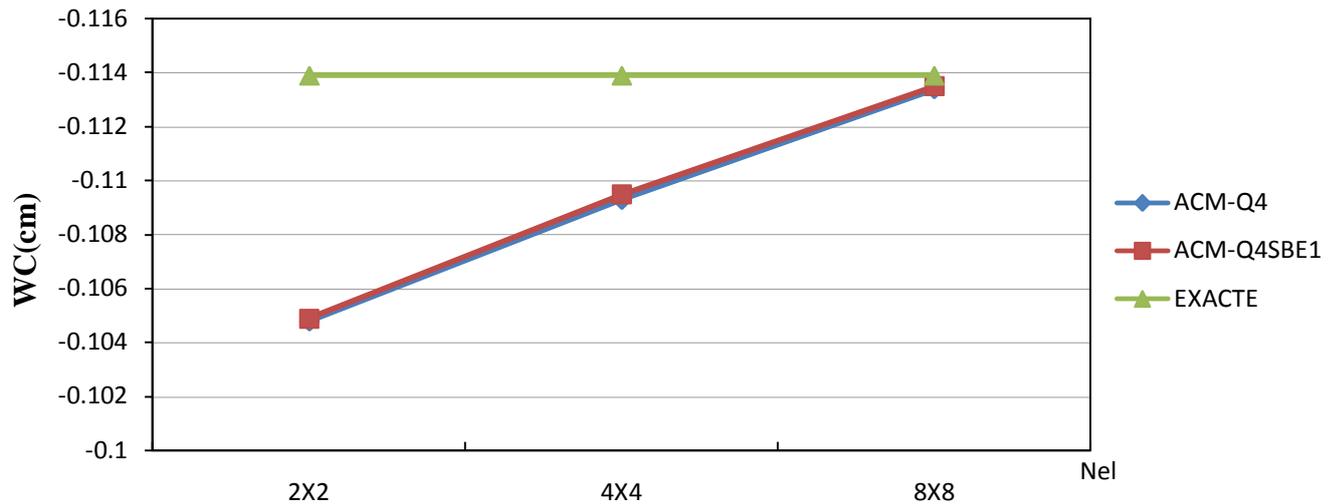
Maillage	Déplacements normés			
	ACM-Q4 $W_C (h1)$	ACM-SBQE1 $W_C (h1)$	ACM-Q4 $W_C (h2)$	ACM-SBQE1 $W_C (h2)$
2 x 2	-0.1048	-0.1049	-0.02216	-0.02216
4 x 4	-0.1093	-0.1095	-0.02391	-0.02392
8 x 8	-0.1134	-0.1135	-0.02436	-0.02437
Exacte	-0.1139		-0.02439	

Tableau 5.5 : Déplacement W_c

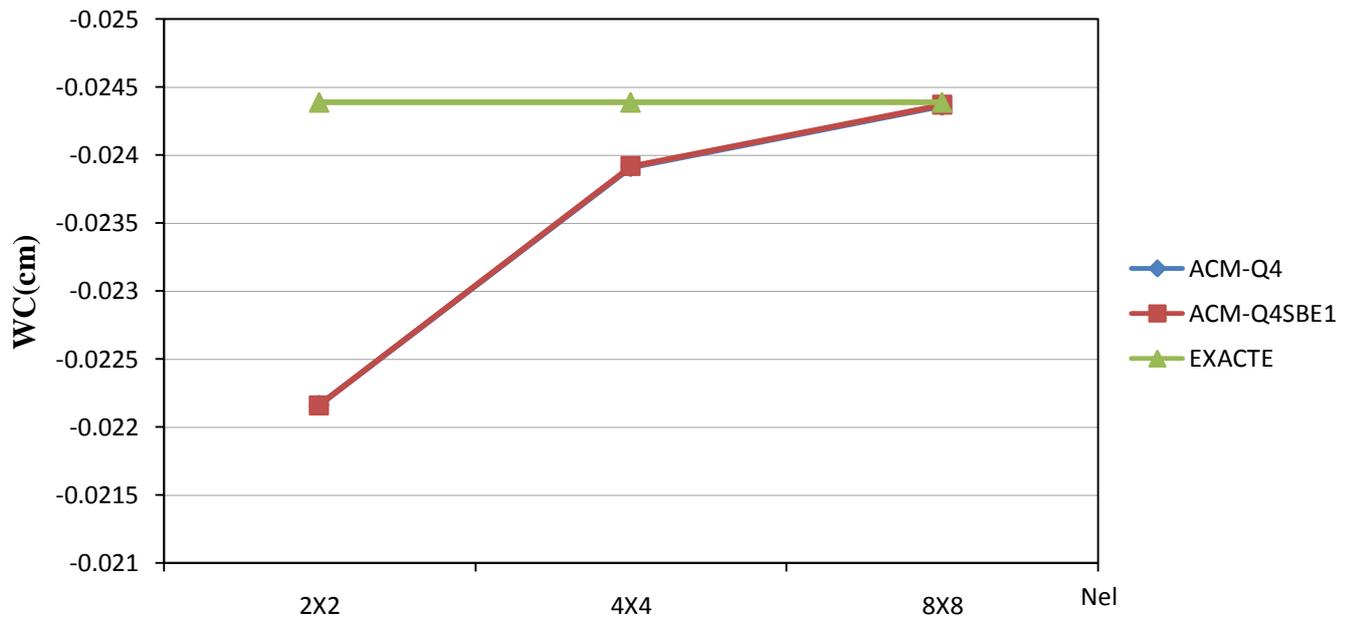
« Cylindre pincé court à bords libres ».

Commentaires :

- Le tableau 5.6 illustre les résultats de convergence du déplacement vertical W_C en C des deux éléments ACM-Q4 et ACM-Q4SBE1.
- la convergence vers la solution de référence (Figure 5.10a), (Figure 5.10b) est de façon monotone pour les deux éléments ACM-Q4 et ACM-Q4SBE1.
- Dans Ce problème traité la flexion est dominante, ce la peut expliquer l'identification des résultats pour les deux éléments.



(a)



(b)

Fig.5.10 .Convergence de Wc
 « Cylindre pincé court à bords libres » :
 (a) Wc (h1) ; (b) WC (h2)

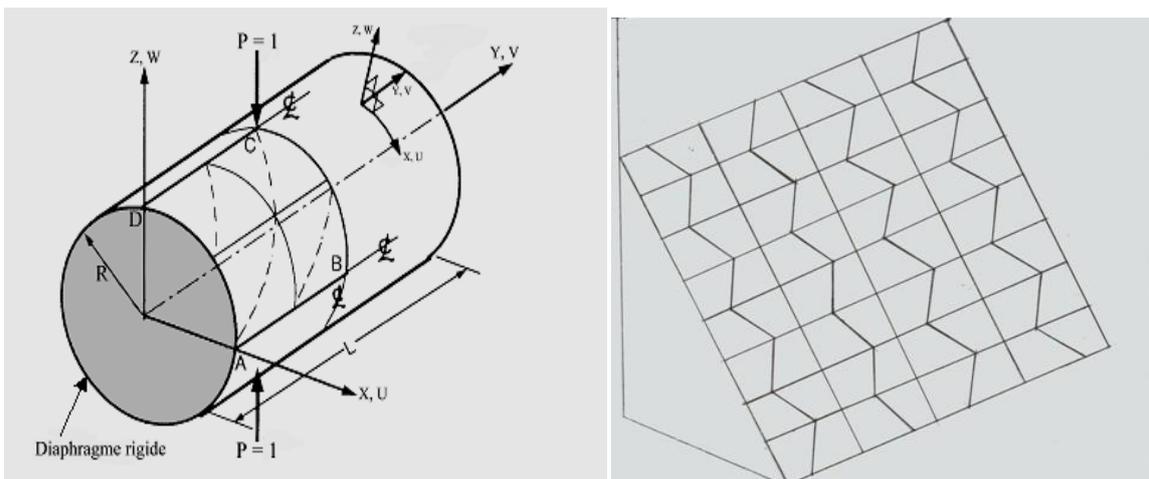
5.2. Influence des Distorsion géométriques « Cylindre pincé avec diaphragme rigide »

Les ouvrages en coques mince de formes géométriques complexes exigent l'utilisation des éléments distordus.

Une distorsion excessive des mailles implique une déformation des éléments par rapport aux formes de référence. Cette déformation peut entraîner des problèmes d'ordre numérique.

Des limites conseillées des positions des nœuds intermédiaires pour des éléments quadratiques citer par ; Michel Prat « la modélisation des ouvrage » :

Le nœud intermédiaire sur un coté ne doit pas être trop proche d'un nœud sommet : cette distance doit rester supérieure au quart de la longueur du coté ou (de préférence) égal à la moitié de la longueur du coté.



*Fig.5.11. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides.
(Maillage distordue vus en plans)*

Cette étape consiste à analyser le problème de Cylindre pincé avec diaphragme rigide en considérant des maillages avec distorsions élémentaires. Les données géométriques et mécaniques restent inchangées.

Maillage	Déplacement WC au point c	Déplacement VD au Point D
6 x 6	126.99	4.4289
8 x 8	140.58	3.507
20 x 4	154.53	3.74
Exacte	164,24	4.11

Tableau 5.6 Déplacements W_C et V_d (Maillage distordue)

« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».

Maillage	Déplacement WC au point c	Déplacement VD au Point D
6 x 6	135.63	4.794
8 x 8	153.18	4.4415
20 x 4	160.47	4.113
Exacte	164,24	4.11

Tableau 5.7 Déplacements W_C et V_d (Maillage régulier)

« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».

Commentaires :

- Le tableau 5.6, illustre les résultats de convergence du déplacement vertical WC en C et VD en D du maillage distordu.
- La courbe de convergence en rouge (figure 5.12), (figure 5.13) désigne les résultats du maillage distordu celle en bleu est relative au maillage régulier. Les résultats de ce dernier étant discutés précédemment.
- Une convergence monotone vers les solutions de référence est obtenue à partir de $N = 6$ pour W_C (figure 5.12) et de $N = 8$ pour VD (figure 5.13).
- L'influence de la distorsion élémentaire est faible pour les maillages à grand nombre d'éléments, Les résultats du déplacement VD sont plus sensibles (figure 5.13).
- L'écart entre la solution avec maillages distordus et celle avec maillages réguliers en fonction de N est représentée sur la figure (5.14) et (5.15), ces écarts sont traduits par des erreurs en pourcentage représentés par des histogrammes (figure 5.16) et (figure 5.17).
- En raffinant le maillage, les éléments sont toujours distordus mais ils permettent une représentation acceptable de la géométrie réelle de la coque, ainsi, les résultats correspondants sont très proches de ceux obtenus avec les maillages réguliers.
- Le pourcentage de l'erreur de la distorsion du maillage (20×4), le plus proche de la solution exacte égal à 4% pour WC et 9% pour VD ; ce qui prouve que la distorsion n'a pas une grande influence sur les résultats obtenus, ainsi que, dans notre cas on a utilisé l'intégration analytique pour le calcul de la matrice de rigidité. Ce qui peut expliquer l'avantage de l'utilisation de l'intégration analytique.

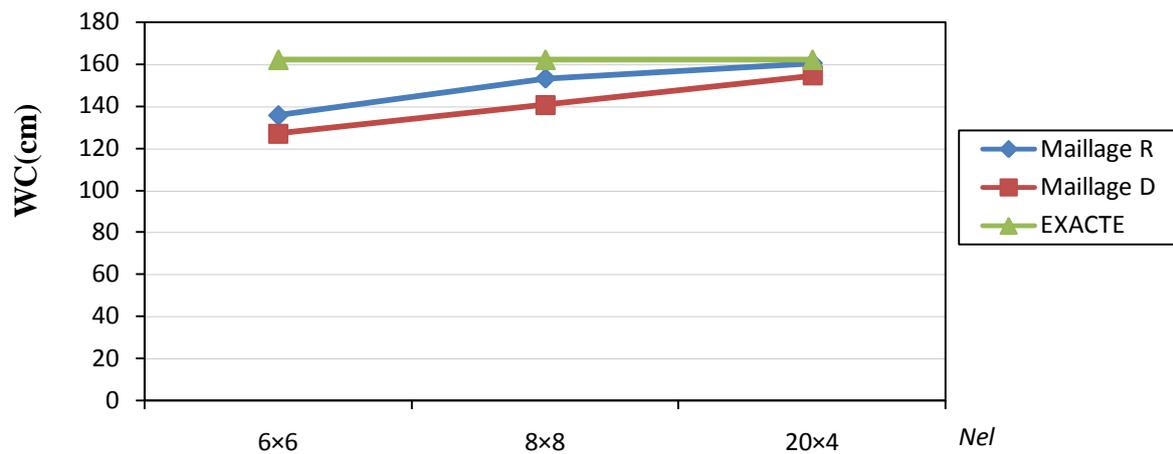


Fig.5.12. Convergence de W_C (maillage distordue)

« Cylindre pincé avec diaphragme rigide ».

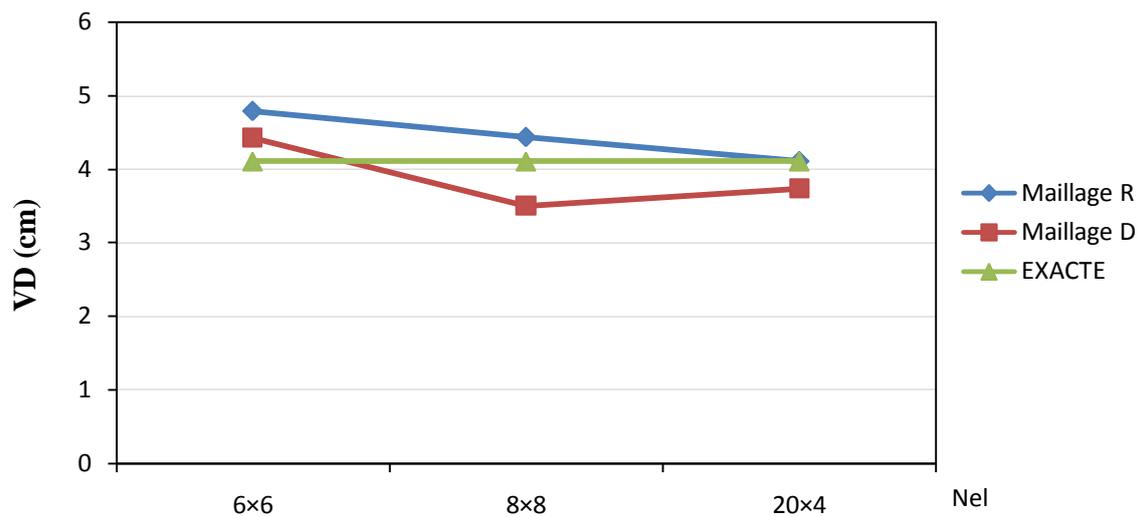
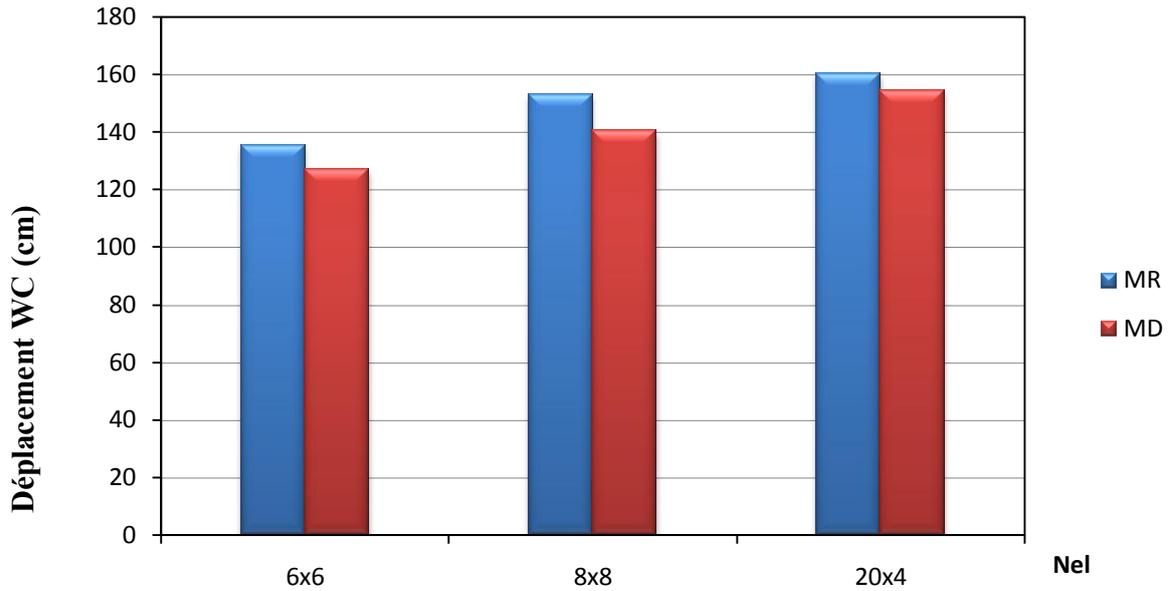
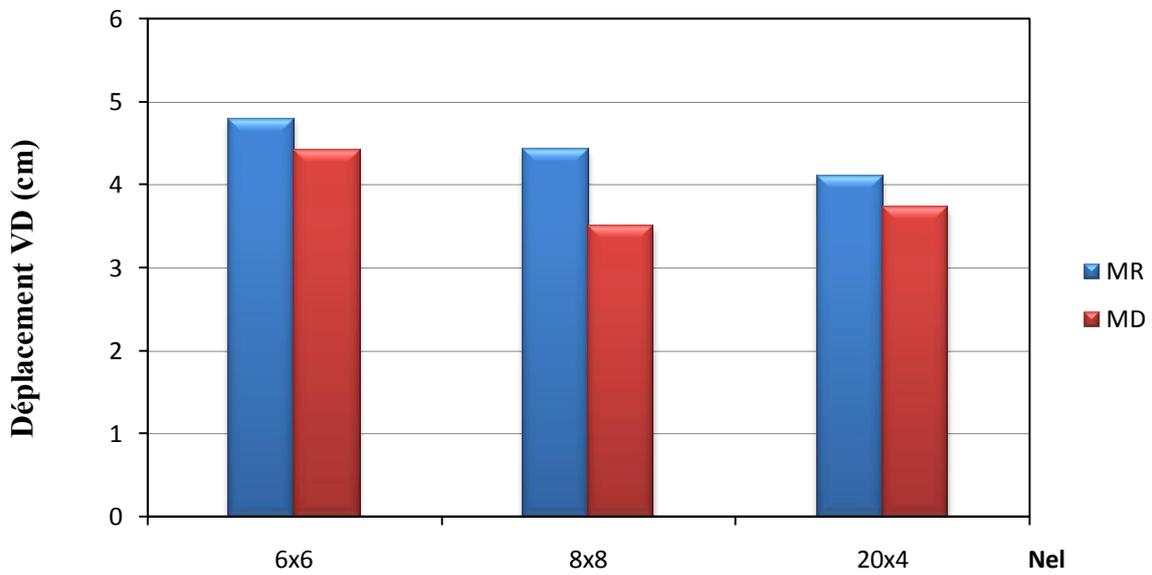


Fig.5.13. Convergence de V_d (maillage distordue)

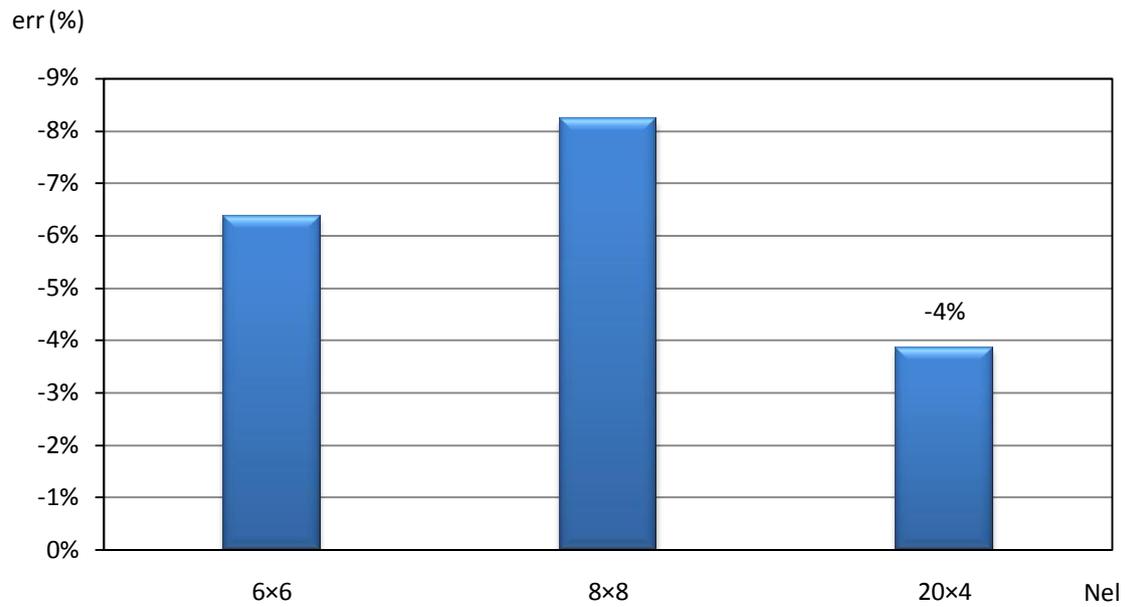
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide »



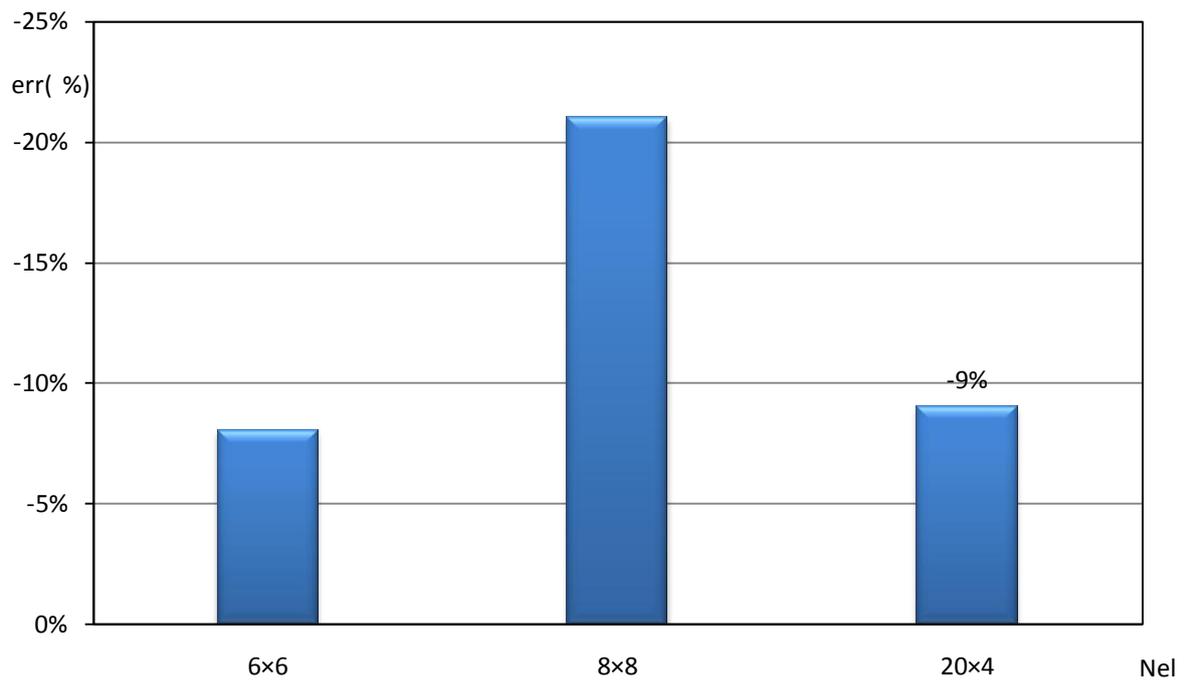
*Fig.5.14. L'écart de la solution dus aux distorsions
 Pour les déplacements WC
 « Cylindre pincé avec diaphragme rigide »*



*Fig.5.15. L'écart de la solution dus aux distorsions
 Pour Les déplacements VD
 « Cylindre pincé avec diaphragme rigide »*



*Fig.5.16. Erreur sur WC entre maillages réguliers et distordus
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide »*



*Fig.5.17. Erreur sur VD entre maillages réguliers et distordus
« Cylindre pincé avec diaphragme rigide »*

5.3. Application

5.3.1. Panneau cylindrique soumis à son poids propre (Barrel vault)

Ce type de coque est utilisé dans beaucoup d'applications de génie civil, La solution analytique de référence est obtenue par Scordelis, Lo SCO 64 et Scordelis.65. [ZIN 2000]

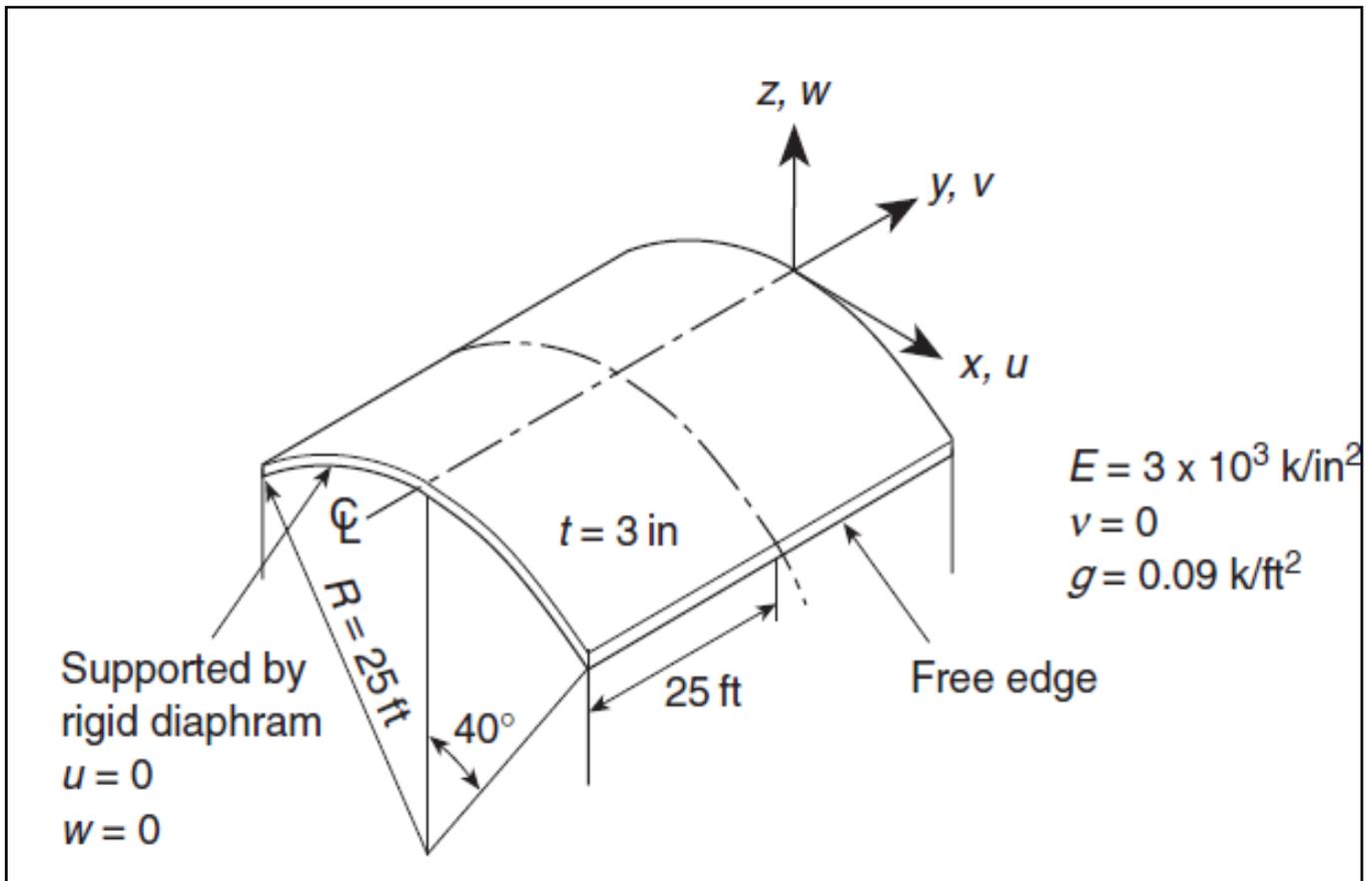
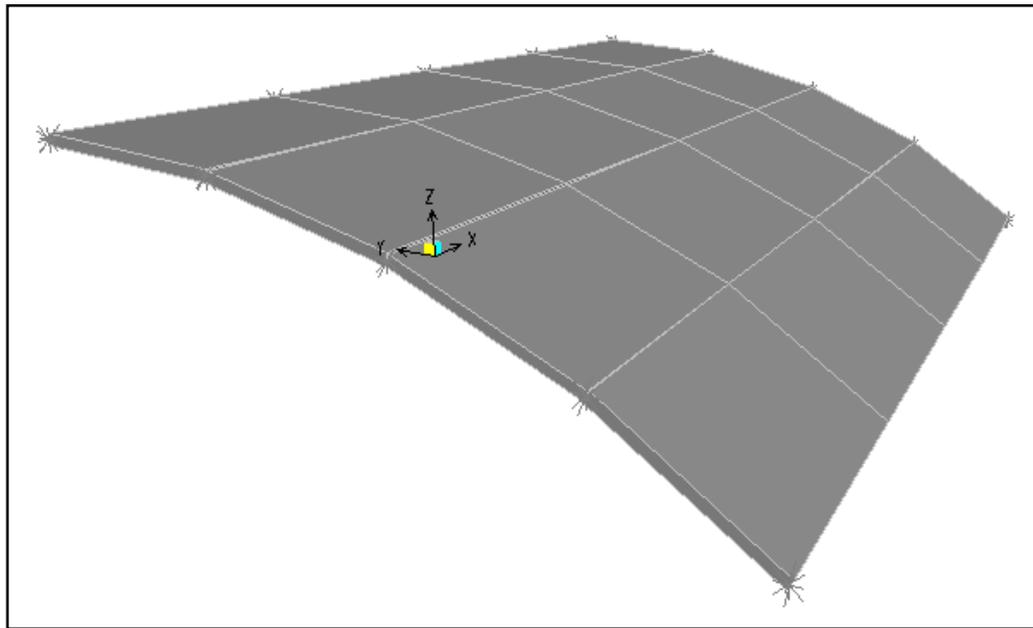
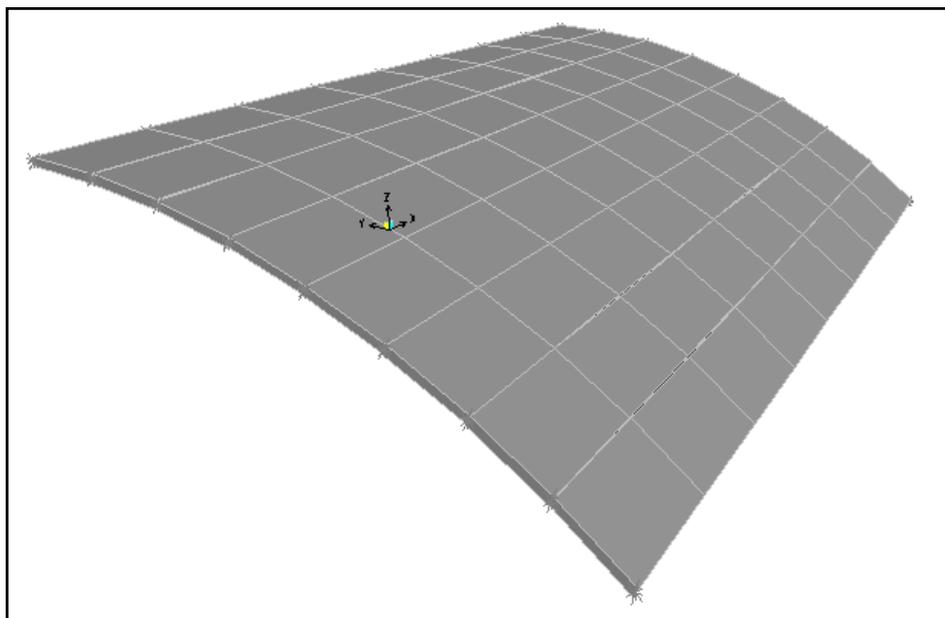


Fig.5.18. Panneau cylindrique soumis à son poids propre. [ZIN 2000]

« Propriétés géométriques et mécaniques ».



(a)



(b)

Fig.5.19. Panneau cylindrique soumis à son poids propre :

(a) Maillage 4×4 ; (b) Maillage 8×8

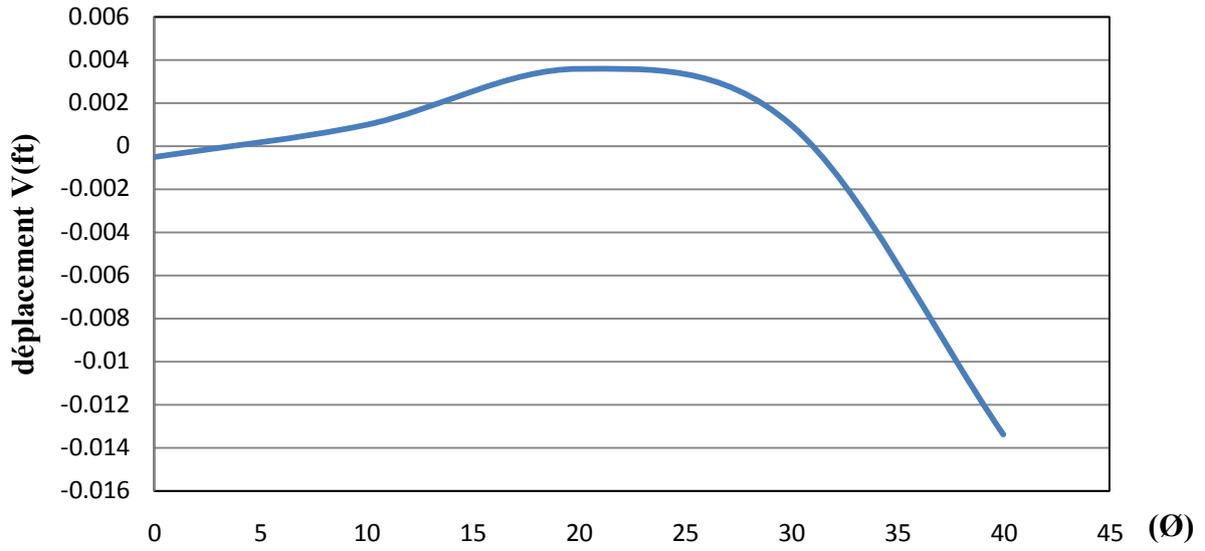


Fig.5.20. le déplacement longitudinal V du support (Maillage 4x4)

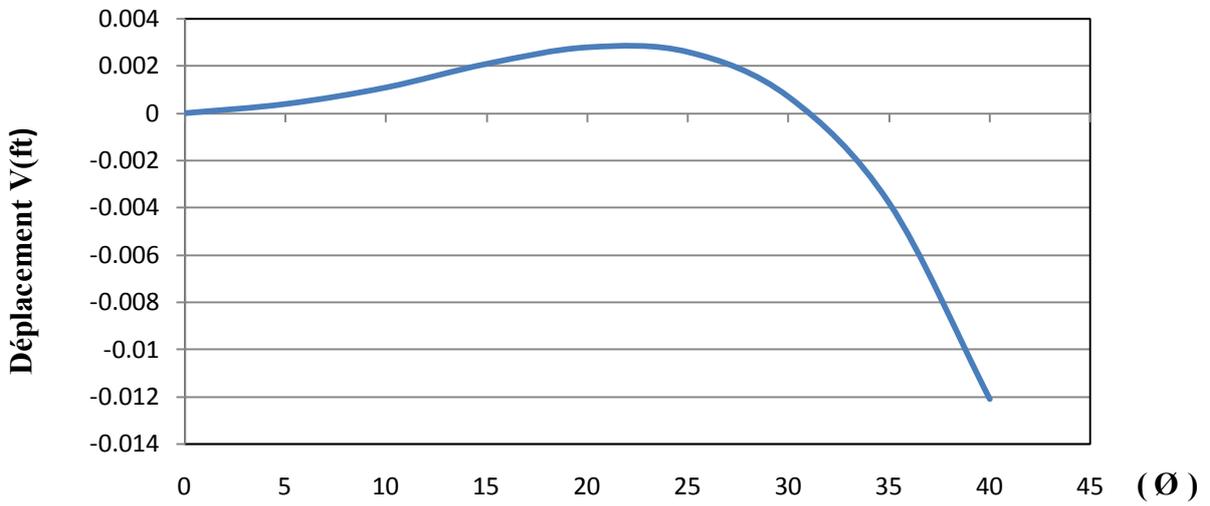


Fig.5.21. le déplacement longitudinal V du support (Maillage 8x8)

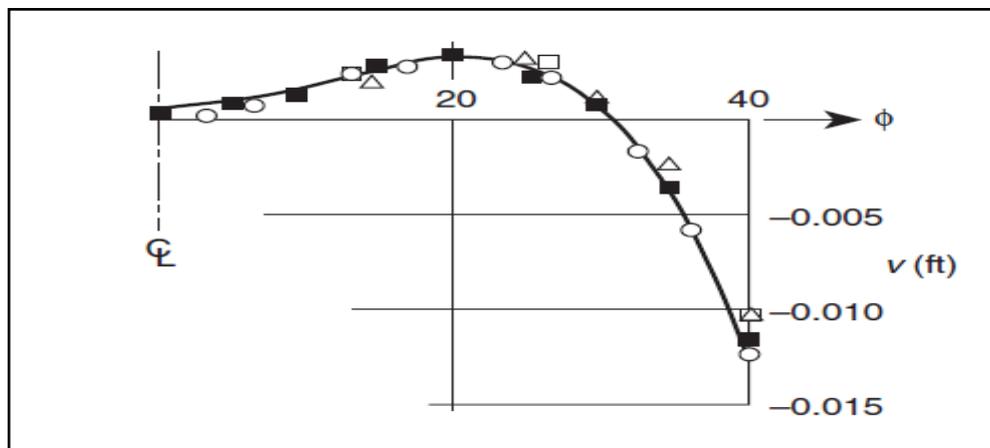


Fig.5.22. Résultats de référence du déplacement longitudinal V du support. [ZIN 2000]

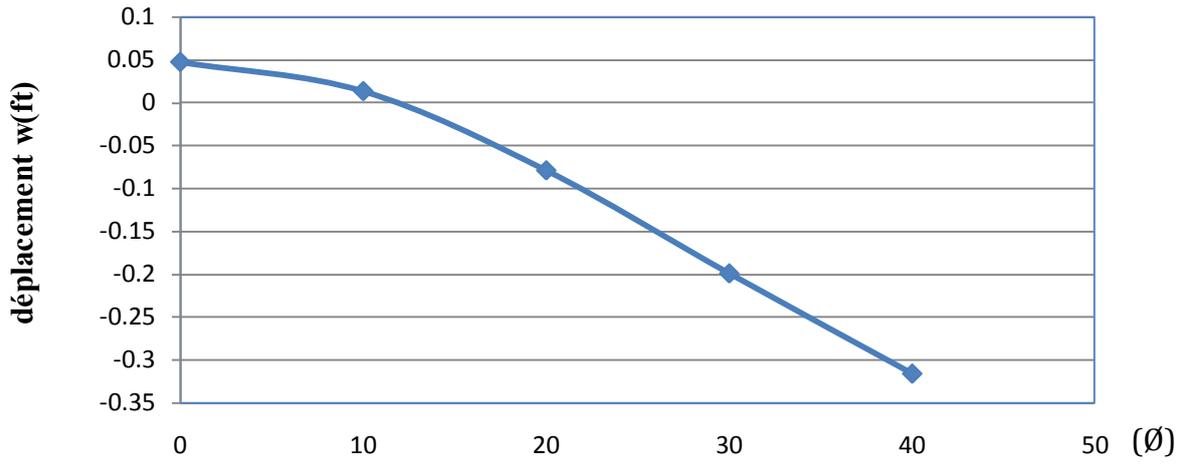


Fig.5.23. le déplacement vertical W de la section central (Maillage 4x4)

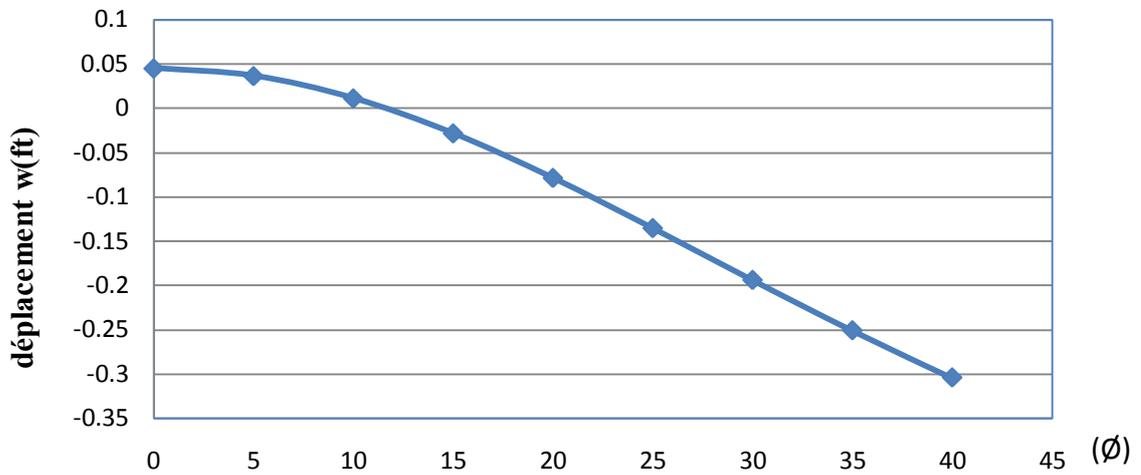


Fig.5.24. le déplacement vertical W de la section central (Maillage 8x8).

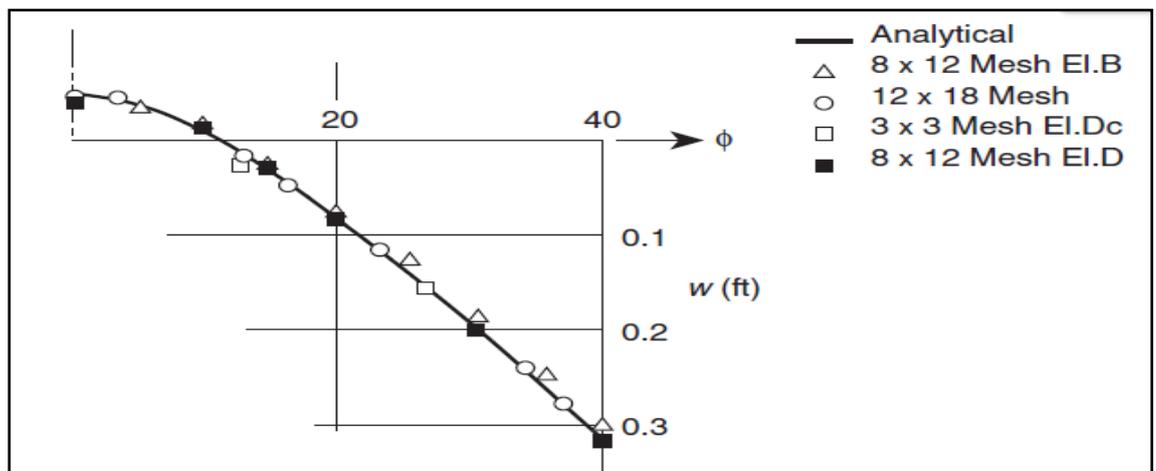


Fig.5.25. Résultats de référence du déplacement vertical W de la section central. [ZIN 2000]

Commentaires :

- La figure 5.19 représente la modélisation par des éléments à facettes planes du Panneau cylindrique soumis à son poids propre ; en utilisant le code de calcul SAP2000 avec différents maillages (figure 5.19a), (figure 5.19b).
- Les résultats de l'analyse sont illustrés par les figures 5.20, 5.21 pour le déplacement longitudinal V du support et les figures 5.23, 5.24 pour le déplacement vertical W de la section centrale.
- La comparaison entre les résultats obtenus par le code de calcul SAP2000 et celle de la solution de référence (figure 5.22), (figure 5.25) montre que :
 - La l'allure des courbes qui représente les déplacements longitudinales et verticales est identique à celle des courbes qui représente les solutions de référence.
 - Une convergence rapide est observée à partir du maillage (4×4).
 - une représentation assez bonne est illustré par la l'allure de la courbe du maillage (8×8).
 - L'analyse obtenue par le code de calcul SAP2000 montre que la modélisation des coques par des éléments à facettes planes donne de bons résultats ; on peut utiliser ces éléments pour la modélisation des coques de formes géométriques complexes.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

En conclusion, l'étude des coques modélisées par des facettes planes, permet de conclure ;

- Les résultats obtenus par l'élément « ACM-Q4SBE1 » ne sont pas assez loin de ceux obtenus par l'élément « ACM-Q4 » à cause de la formulation en déformation qui est limitée pour l'élément membranaire seul.
- La formulation en déformation pour l'élément membranaire Q4SBE1 n'influe pas sur les résultats pour le cas des problèmes à comportement de flexion dominante.
- l'élément « ACM-Q4SBE1 » riche en membrane, donne de bons résultats pour le cas des problèmes à comportement de membrane dominant.
- Les résultats obtenus par des éléments à facettes planes, en général, sont satisfaisants, donc on peut les utiliser pour la modélisation des coques de formes géométriques complexes y compris les plaques pliées.
- L'influence de la distorsion élémentaire est faible pour des maillages à grand nombre d'éléments.
- En raffinant le maillage, les éléments sont toujours distordus mais ils permettent une représentation acceptable de la géométrie réelle de la coque, ainsi, les résultats correspondants sont très proches de ceux obtenus avec les maillages réguliers.
- la distorsion n'a aucune grande influence sur les résultats obtenus, pour un maillage raffiné. Ce qui peut expliquer l'avantage de l'utilisation de l'intégration analytique.

- La modélisation par des éléments à facettes planes en utilisant le code de calcul SAP2000 a donné de bons résultats pour le type de coque de forme géométrique simple qu'on a utilisé dans l'application. Notons que des applications, sur des coques de forme géométrique complexe sont en cours.....

Dans cette recherche, plusieurs perspectives peuvent être envisagées, nous citons quelques une:

- Formulation des éléments de coque à facettes planes basés sur le champ de déformation pour les deux comportements membranaire et flexionnel. En utilisant des éléments triangulaires en vue de leur adaptation à n'importe quelle forme géométrique.
- Les structures de coque mince sont généralement utilisées pour couvrir de grandes surfaces, qui peuvent conduire à de grands déplacements ;
 - On introduit des raidisseurs (poutres courbés ou arc) et on étudie leur influence sur les déformations.
 - On prend en compte la forme géométrique réelle de la structure par l'introduction de l'analyse non linéaire géométrique.
- Développement des éléments fins de coques épaisses prennent en compte l'influence du cisaillement transversal.

ABSTRACT

Shell structures are widely used in with very complex geometric shapes. The analytical study is generally limited to cases of simple shapes, and therefore the numerical analysis has become an effective tool for the case of structures of complex geometrical shape. This research focuses on numerical modeling of such structures by the finite element method and the formulation of a flat shell finite element; these elements are obtained by the superposition of membrane and bending behaviour. Validations tests of these elements are made, as well as applications in the field of civil engineering are treated with code SAP2000.

Keywords:

Finite element, Flat element, Irregular geometric shape modeling, thin and thick shells.

ملخص

عرف استعمال المنشآت القشرية انتشارا واسعا في الوقت الراهن وبأشكال هندسية معقدة جدا. ومن المعلوم أن الطرق التحليلية تستعمل عموما لدراسة الأشكال البسيطة. وعليه يصبح استعمال الطرق العددية لهذه الإشكال حلا ضروريا.

هذا البحث ينصب على النمذجة العددية لمثل هذه الهياكل باستعمال طريقة العناصر المحدودة وتشكيل بعض العناصر القشرية المسطحة، حيث يتم الحصول عليها باستعمال مبدأ التراكب بين السلوك الغشائي والانحنائي. لقد تم إجراء اختبارات التحقق من فعالية هذه العناصر من خلال الاختبارات المرجعية، كما تم إجراء أمثلة لمنشآت في مجال الهندسة المدنية باستعمال

برنامج SAP2000

مفاتيح:

النمذجة ، قشريات رقيقة وسميكة ، العناصر المحدودة ، شكل هندسي غير منتظم.
عناصر مسطحة.

RESUME

Les ouvrages en coques minces à nos jours connaissent dans le domaine de l'utilisation pratique des formes géométriques très complexes.

L'étude analytique se limite seulement pour les cas des formes géométriques simples. Par conséquent l'analyse numérique est le seul outil pour le cas des structures de forme géométrique complexe.

Le présent sujet de recherche s'intéresse à la modélisation numérique de ce type de structure par la méthode des éléments finis et la formulation de quelque éléments finis de coque à facette plane ; qui est obtenue par superposition du comportement membranaire et flexionnel .

Des tests de validation de ces éléments sont nécessaires, ainsi que des applications dans le domaine de génie civil qui sont traités à l'aide du code SAP2000.

Mots clés : *coques mince et épaisse, éléments finis, forme géométrique irrégulière, facette plane, Modélisation.*