

N° d'ordre :...../2010

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER - BISKRA



FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **Magister** en

AUTOMATIQUE

Option : Identification et Commande des Systèmes Dynamiques

Par

Fayssal OUAGUENI

THÈME

Stabilisation des Systèmes Non Linéaires via des Modèles Flous Incertains de Type Takagi-Sugeno

À soutenir le devant la commission d'examen

Mr. A.	Titaouine	M. C.	Univ. de Biskra	Président
Mr. M.	Boumehraz	M. C.	Univ. de Biskra	Rapporteur
Mr. M. T.	Benchouia	M. C.	Univ. de Biskra	Examineur
Mr. A.	Betka	M. C.	Univ. de Biskra	Examineur

Introduction

Introduction générale

L'objectif de la théorie de commande est l'analyse et la résolution des problèmes de commande qui émanent de l'environnement industriel. Des raisons économiques et de sécurité, conduisent à la recherche d'une loi de commande de plus en plus performante afin de garantir l'efficacité et le rendement de production. Les méthodes de commande avancées développées par d'éminents théoriciens (régulateur adaptatif, commande prédictive, commande robuste...) permettent de répondre aux exigences d'un certain nombre de ces systèmes fortement non linéaires. C'est dans ce même créneau que les méthodes de modélisation et de commande floues se positionnent.

La méthode la plus utilisée pour étudier un système ayant un comportement non linéaire est de l'approximer par un seul modèle linéaire (linéarisation autour d'un point d'équilibre). L'inconvénient d'une telle approche est son aspect uniquement local, le modèle linéaire n'est qu'une description locale du comportement du système. Une approche globale basée sur l'utilisation de plusieurs modèles autour de différents points de fonctionnement a été élaborée ces dernières années. L'interpolation de ces modèles locaux à travers des fonctions d'activation normalisées permet de modéliser le système global non linéaire. Cette approche s'appuie sur l'utilisation de modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS) [1], connus pour leur propriété d'approximation universelle.

Le concept de stabilité des systèmes non linéaires a fait l'objet d'une riche littérature depuis le siècle dernier (Kraokovski, Lasalle, Poincaré). Par rapport à des méthodes comme les méthodes géométriques ou celles basées sur les normes vectorielles et les systèmes de comparaison, la stabilité au sens de Lyapunov est une approche largement utilisée pour l'étude des problèmes de stabilité. Ces dernières années, de nombreux travaux concernant la

stabilité/stabilisation de modèle flou de type Takagi-Sugeno ont été publiés. La plupart de ces travaux se sont inspirés des techniques de commande rencontrées dans la littérature. C'est dans ce sens que des études utilisant l'approche de Lyapunov, l'approche géométrique, le critère de Popov, le critère du cercle..., ont été développées.

Les lois de commande couramment utilisées pour ce type de modèles sont de type retour d'état non linéaire statique appelé commande PDC (Parallel Distributed Compensation) [2]. Ce type de loi de commande utilise les mêmes fonctions non linéaires permettant d'interpoler les modèles linéaires des modèles TS. L'étude de la stabilité et de la stabilisation de ces types de modèles fait appel, dans la grande majorité des cas, à la deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe). De façon quasiment généralisée, c'est une fonction de Lyapunov de type quadratique qui est utilisée. Cela est dû principalement au fait de pouvoir résoudre les conditions de stabilité/stabilisation. Effectivement, l'une des principales difficultés est de pouvoir écrire ces conditions sous la forme de contraintes LMI (Linear Matrix Inequalities) [3]. Les LMIs, s'il s'avère qu'elles admettent une solution, peuvent être résolues à l'aide d'outils issus du domaine de l'optimisation convexe [4].

Cependant, si théoriquement il est toujours possible de représenter la dynamique d'un système non linéaire affine en la commande par un système flou, en pratique cette représentation peut aboutir à l'obtention d'un très grand nombre de règles floues. Une manière de réduire le nombre de règles floues est de considérer certaines non linéarités comme des incertitudes dans les paramètres du modèle flou. L'objectif étant d'obtenir un modèle flou comportant un nombre fini et raisonnable de règles fixé a priori. En revanche, la synthèse de lois de commande pour de tels modèles s'avère plus difficile. Dans ce contexte, plusieurs approches de relaxation des LMIs ont été proposées dans la littérature [5]-[8].

L'objectif du travail réalisé dans ce mémoire est l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires via des modèles flous de type Takagi-Sugeno incertains, le mémoire est organisé comme suit :

Le **chapitre 1**, commence avec une présentation générale des systèmes flous et plus particulièrement le type de Takagi-Sugeno. On y trouve une présentation des différentes méthodes d'obtention d'un modèle flou TS. Ensuite, nous présentons également l'outil LMI et les différentes techniques d'analyse de stabilité et les transformations matricielles. Aussi, nous donnons des rappels sur les définitions de la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans le **chapitre 2**, nous présentons certains résultats d'analyse de la stabilité du modèle flou de type TS. Quelques théorèmes donnant des conditions garantissant la stabilité et la stabilisation par retour d'état via la commande PDC d'un modèle flou TS obtenues en utilisant la seconde méthode de Lyapunov sont rappelés, L'estimation d'état est étudiée ensuite.

Le **chapitre 3** présente un certain nombre de théorèmes concernant la stabilisation des modèles flous de type TS incertains, sans et avec prise en compte de certaines performances de la boucle fermée via un taux de décroissance prédéfini ou le placement de pôles dans des régions LMI. Ensuite, les conditions de stabilisation avec un observateur d'état sont données.

Dans le **chapitre 4**, la loi de commande utilisée pour l'étude de la stabilisation du modèle flou TS incertain sans et avec un observateur, est obtenue par commutation entre des lois de commande locales.

Enfin, la conclusion générale présente le bilan de ce travail et les perspectives envisagées.

Concepts de base et outils mathématiques

1.1. Introduction	4
1.2. Systèmes flous	4
1.2.1. Modèle flou de Mamdani	4
1.2.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno	5
1.3. Construction d'un modèle flou de Takagi-Sugeno	7
1.4. Inégalités matricielles linéaires	9
1.4.1. Principe des LMIs	10
1.4.2. Techniques d'analyse et transformations matricielles	10
1.5. Placement de pôles dans des régions LMI.....	13
1.6. Stabilité au sens de Lyapunov	15
1.6.1. Seconde méthode de Lyapunov	15
1.6.2. Fonctions de Lyapunov usuelles	17
1.7. Conclusion	19

1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et outils utilisés dans ce travail. Ce chapitre sera structuré comme suit : Nous présentons d'abord les deux types de modèles flous et les différentes techniques d'obtention d'un modèle flou TS et nous donnons un exemple d'illustration sur la méthode la plus employée pour y aboutir. Ensuite, la seconde partie est consacrée à la présentation des inégalités matricielles linéaires, les techniques d'analyse, les transformations matricielles utilisées dans ce travail. Enfin, nous donnons des rappels sur quelques concepts fondamentaux concernant la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques, et les fonctions de Lyapunov les plus utilisées dans la littérature.

1.2. Systèmes flous

Si d'un point de vue mathématique les systèmes sont classés selon la nature des équations qui les caractérisent (linéaires, non linéaires, ...etc.), les systèmes flous sont quant à eux répertoriés selon leur nature structurelle [9].

On distingue classiquement deux grandes familles de modèles flous :

- Modèles flous à conclusions symboliques (modèles flous de Mamdani).
- Modèles flous à conclusion fonctionnelle (modèles flous de Takagi-Sugeno) [1].

Ces deux types de modèles flous sont basés sur une collection de règles « *Si ... Alors* ». Dans les deux cas, les prémisses de règles sont exprimées symboliquement. Seule l'expression des conclusions de règles permet alors de dissocier les deux familles de modèles. Les modèles de Mamdani utilisent des conclusions symboliques de même nature que les prémisses alors que, dans les modèles de Takagi-Sugeno, les conclusions sont des fonctions ordinaires des variables des prémisses. Il est à noter que les modèles flous relationnels peuvent être considérés comme une généralisation du modèle flou de Mamdani, où un seul terme prémisses peut être associé à plusieurs termes de la conclusion par une relation floue.

1.2.1. Modèle flou de Mamdani

La forme générale d'une règle dans le modèle flou de Mamdani est de la forme :

$$R^i : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^i \text{ et } \dots x_p \text{ est } A_p^i \text{ Alors } y \text{ est } B^i$$

où $x_j (j = 1, \dots, p)$ sont les variables des prémisses représentant les entrées du système flou, y est la variable conséquence représentant la sortie du système flou, $A_j^i (i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, p)$ et $B^i (i = 1, \dots, r)$ sont respectivement les ensembles flous des prémisses et les ensembles flous des sorties.

La relation entrée-sortie du système flou est réalisée par le mécanisme d'inférence flou. Étant donné une base de règles et une valeur de l'entrée, il délivre la valeur de sortie correspondante. Puisque les valeurs traitées à l'entrée et à la sortie sont des valeurs non floues, alors le système flou doit être équipé par des mécanismes de conversion appelés fuzzificateur et défuzzificateur.

1.2.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno (TS)

Le modèle flou TS a été introduit en 1985 par Takagi et Sugeno [1]. Il peut être représenté par une collection de règles de la forme suivante :

$$R^i : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^i \text{ et } \dots x_p \text{ est } A_p^i \text{ Alors } y = B_i(x_1, \dots, x_p)$$

où la conséquence fonctionnelle prend, généralement, la forme suivante:

$$B_i(x_1, \dots, x_p) = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_p^i x_p$$

Dans ce cas, le modèle flou est dit à conséquences affines, si par contre la conséquence est de la forme:

$$B_i(x_1, \dots, x_p) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_p^i x_p$$

le système est dit linéaire non affine.

Ce type de modèles flous est très intéressant pour la représentation des systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, mécaniques ou chaotiques. Dans ce cas les modèles flous proposés par Takagi et Sugeno [1] sont décrits par des règles floues représentant des relations entrées-sorties locales linéaires en différents points de fonctionnement d'un système. Ces représentations locales, appelées « sous-modèles », permettent d'exprimer la dynamique d'un système autour des points de fonctionnement particuliers de l'espace d'état. Le formalisme flou intervient donc dans la détermination de la contribution de chacun de ces sous-modèles dans la représentation du système global [10].

Les modèles flous TS représentés dans l'espace d'état sont décrits par des règles de type :

Cas des modèles TS continus (MFC) :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.1)$$

Cas des modèles TS discrets (MFD) :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.2)$$

où r est le nombre de règles, $x(t) \in R^n$ représente le vecteur d'état du modèle, $u(t) \in R^m$ le vecteur des entrées et $y(t) \in R^q$ le vecteur des sorties. $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{q \times n}$ sont respectivement la matrice d'état, la matrice des entrées et la matrice de sortie de la $i^{\text{ème}}$ règle, $z_1(t), \dots, z_p(t)$ sont les variables des prémisses, $F_j^i (j = 1, \dots, p)$ sont les sous-ensembles flous des prémisses.

Les systèmes (1.1) et (1.2) peuvent être réécrits sous une forme unique :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \delta x(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.3)$$

où dans le cas des modèles continus δ représente l'opérateur de dérivation et dans le cas des modèles discrets l'opérateur d'avance.

A chaque règle i est attribué un poids $w_i(z(t))$ qui dépend du degré d'appartenance des $z_j(t)$ aux sous-ensembles flous F_j^i , notée $F_j^i(z(t))$.

La sortie du modèle global est obtenue par agrégation des r modèles locaux.

$$\begin{cases} \delta x(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{cases} \quad (1.4)$$

avec :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z(t)), \quad i = 1, \dots, r \quad (1.5)$$

On pose :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.6)$$

où $h_i(z(t))$ est la fonction d'activation du $i^{\text{ème}}$ modèle local, et vérifie les conditions (propriété de somme convexe) suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (1.7)$$

Le modèle TS (1.4) s'écrit :

$$\begin{cases} \delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

Remarque 1.1 : Un ensemble C est dit convexe si une ligne joignant deux points C_1 et C_2 de cet ensemble C reste dans cet ensemble. Ainsi quels que soient C_1 et $C_2 \in C$ et $0 < \lambda < 1$, on a alors :

$$\lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2 \in C \quad (1.9)$$

1.3. Construction d'un modèle flou de Takagi-Sugeno

Pour obtenir un modèle flou TS, trois méthodes distinctes peuvent être employées :

- La première dite par identification, permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement. Cette méthode, est utilisée dans le cas où aucun modèle de connaissance du système n'est disponible.
- La deuxième approche est basée sur la linéarisation d'un modèle non linéaire autour d'un ensemble de points de fonctionnement judicieusement choisis. Dans ce cas il s'agit de modèles locaux affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interpolation des modèles locaux avec des fonctions d'activation conçues de manière judicieuse en fonctions des spécifications souhaitées (triangulaire, gaussienne,...etc.). Cette façon est plus proche des approches dites multimodèles et présente l'inconvénient de ne pas représenter exactement le modèle non linéaire.
- La troisième méthode est l'approche par secteur non linéaire, elle permet, à partir d'un modèle non linéaire, d'obtenir un modèle TS représentant de manière exacte le

modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état [11]. C'est cette troisième approche qui est utilisée dans la suite de ce mémoire.

Il faut noter que dans les deux dernières approches, on suppose la disponibilité d'un modèle mathématique non linéaire. Notons aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle TS n'est pas unique.

Pour obtenir des modèles flous TS à partir d'une non linéarité, on utilise le lemme suivant [11].

Lemme 1.1 : Si $\forall x \in [-b, a]$, $a, b \in R^+$, $f(x) : R \rightarrow R$ bornée sur $[-b, a]$, alors il existe deux fonction $w_1(x)$ et $w_2(x)$ ainsi que deux réels α et β tel que :

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x) \quad (1.10)$$

$$w_1(x) + w_2(x) = 1, \quad w_1(x) \geq 0, \quad w_2(x) \geq 0 \quad (1.11)$$

Preuve :

En considérant une fonction $f(x)$ bornée telle que $\underline{f} \leq f(x) \leq \overline{f}$, on peut toujours écrire :

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x)$$

avec :

$$\alpha = \overline{f}, \quad \beta = \underline{f}, \quad w_1(x) = \frac{f(x) - \underline{f}}{\overline{f} - \underline{f}} \quad \text{et} \quad w_2(x) = \frac{\overline{f} - f(x)}{\overline{f} - \underline{f}} \quad (1.12)$$

Remarque 1.2 : le nombre de modèles linéaires augmente exponentiellement avec le nombre k de fonctions non linéaires [12]. Il est de 2^k .

Exemple 1.1 : Soit le modèle non linéaire sous forme de représentation d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)} - 8 & 1 \\ -\frac{2}{1+x_1^2(t)} + 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \cdot \left(\frac{2}{1+x_1^2(t)} + 1 \right) \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.13)$$

Les non linéarités du modèle (1.13) sont :

$$N_1(x_1(t)) = \frac{1}{1+x_1^2(t)} \in]0,1] \text{ et } N_2(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)} \in]0,1] \quad (1.14)$$

Ces non linéarités étant bornées pour tout $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$, on peut appliquer le lemme 1.1 et le modèle TS obtenu sera valable dans tout l'espace des variables d'état :

$$N_1(x_1(t)) = 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x_1^2(t)}}_{F_1^1(x_1(t))} + 0 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)}\right)}_{F_1^2(x_1(t))} \quad (1.15)$$

$$N_2(x_1(t), x_2(t)) = 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)}}_{F_2^1(x_1(t), x_2(t))} + 0 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)}\right)}_{F_2^2(x_1(t), x_2(t))} \quad (1.16)$$

Un modèle flou TS représentant exactement le modèle non linéaire (1.13) est ainsi composé de 4 règles :

- R^1 : Si $x_1(t)$ est 0 et $x_2(t)$ est 0 alors $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$
- R^2 : Si $x_1(t)$ est 0 et $x_2(t)$ est ∞ alors $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$
- R^3 : Si $x_1(t)$ est ∞ et $x_2(t)$ est 0 alors $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$
- R^4 : Si $x_1(t)$ est ∞ et $x_2(t)$ est ∞ alors $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)$

avec :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T \quad (1.17)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1.4. Les inégalités matricielles linéaires (LMI)

Depuis quelques années, de nombreux problèmes, concernant l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques, ont été résolus par l'intermédiaire de problèmes convexes, notamment, la programmation semi définie (SDP) [4]. Parmi ces méthodes, on distingue la méthode du point intérieur développée initialement par Karmakar (1984) [13] pour la résolution de problèmes de programmation linéaire qui a été étendue ensuite par Nesterov et Nemirovski (1994) [14] pour le cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives. En automatique, cette approche est connue sous le nom de LMI (Linear

Matrix Inequalities) [3], cette méthode est l'une des méthodes les plus appliquées dans le domaine de la commande grâce à l'existence de méthodes de résolution numérique efficaces [15].

Dans les paragraphes suivants nous allons présenter le principe de base de cette approche, puis les différents lemmes permettant de manipuler les inégalités matricielles de les rendre linéaires par rapport aux inconnues quand cela est possible.

1.4.1. Principe des LMI

Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une inégalité de la forme [3]:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1.19)$$

où $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices $F_i, i=1, \dots, m$ sont des matrices symétriques connues de dimension $n \times n$. La satisfaction de l'inégalité (1.19) signifie que la matrice $F(x)$ est symétrique et définie positive, c'est-à-dire :

$$z^T F(x) z > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (z \text{ non nul}) \quad (1.20)$$

Notons que puisque le cône des matrices définies positives est convexe et que la matrice $F(x)$ est une fonction affine de x , la contrainte $F(x)$ est une contrainte convexe en x que l'on appelle aussi contrainte LMI.

L'équation (1.19) est une LMI stricte. Si $F(x)$ est seulement semi définie positive (non négative) la LMI est dite non stricte. La LMI stricte est faisable si l'ensemble $\{x : F(x) > 0\}$ n'est pas vide (une définition similaire s'applique aux LMIs non strictes). N'importe quelle LMI non stricte faisable peut être réduite à une LMI stricte équivalente qui est faisable en éliminant les contraintes d'égalité et puis en réduisant la LMI résultante en enlevant n'importe quel espace nul constant [16]. Notons que l'on peut regrouper plusieurs contraintes LMIs en une seule contrainte LMI bloc diagonale :

$$F(x) = \text{diag}(F^{(1)}(x), F^{(2)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0, \text{ avec } F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0 \quad (1.21)$$

1.4.2. Techniques d'analyse et de transformations matricielles

En général, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles pour permettre une mise en forme de LMI.

Certaines inégalités matricielles non linéaires peuvent être reformulées en terme de LMI à l'aide du complément de Schur [3] d'écrit dans le lemme suivant.

Lemme 1.2 (Complément de Schur) : Soient trois matrices $R(x) = R^T(x)$, $Q(x) = Q^T(x)$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x . Alors la condition LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.22)$$

est équivalente à :

$$Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0, \quad R(x) > 0 \quad (1.23)$$

ou encore

$$R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0, \quad Q(x) > 0 \quad (1.24)$$

Preuve :

La démonstration se fait facilement en multipliant (1.22) à droite par :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}(x)S^T(x) & I \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

et à gauche par la transposée de cette dernière matrice. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.26)$$

Remarque 1.3 : Le lemme et encore valide en changement le sens des inégalités [17].

Enfin, les différents lemmes suivants seront également utilisés dans ce mémoire.

Lemme 1.3 (congruence) : Soient deux matrices $P(x)$ et $Q(x)$, si $P(x)$ est définie positive et si $Q(x)$ est de rang plein en colonne alors la quantité $Q(x)P(x)Q^T(x)$ est définie positive.

Lemme 1.4 : Soient A, P, X, Y et Q des matrices de dimensions appropriées. Les propriétés suivantes sont équivalentes [12] :

$$1. A^T P A - Q < 0, \quad P > 0 \quad (1.27)$$

$$2. \begin{bmatrix} -Q & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.28)$$

$$3. \exists X \begin{bmatrix} -Q & A^T X \\ X^T A & -X - X^T + P \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (1.29)$$

$$4. \exists X, Y \begin{bmatrix} -Q + A^T Y^T + Y A & -Y + A^T X \\ -Y^T + X^T A & -X - X^T + P \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (1.30)$$

Preuve :(1.27) \Leftrightarrow (1.28) : Complément de Schur (lemme 1.2)(1.28) \Rightarrow (1.29) et (1.30) : Il suffit de choisir $X=P$ et $Y=0$ (1.29) et (1.30) \Rightarrow (1.27) : Par congruence avec $[I \ A^T]$

Lemme 1.5 : Soient A, P, X, Y et Q des matrices de dimensions appropriées. Les propriétés suivantes sont équivalentes [18] :

$$1. PA^T + AP + Q < 0, \quad P > 0 \quad (1.31)$$

$$2. \exists X, Y \begin{bmatrix} XA^T + AX^T + Q & P - X + AY \\ P - X^T + Y^T A^T & -Y - Y^T \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (1.32)$$

Preuve :(1.32) \Rightarrow (1.31) : Par congruence avec $[I \ A^T]$ (1.31) \Rightarrow (1.32) : Si $PA^T + AP + Q < 0$ est vérifiée, $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

$$PA^T + AP + Q + \frac{\varepsilon}{2} A^T A < 0 \quad (1.33)$$

En utilisant le complément de Schur, (1.33) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} PA^T + AP + Q & \varepsilon A \\ \varepsilon A & -2\varepsilon I \end{bmatrix} < 0$. Le résultat

s'obtient en choisissant $X = P$ et $Y = \varepsilon I$.

Lemme 1.6 : Soient X et Y deux matrices de dimensions appropriées, un scalaire $\varepsilon > 0$, et une matrice $S = S^T > 0$ alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y \quad (1.34)$$

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S^{-1} X + Y^T S Y \quad (1.35)$$

Preuve :

$$(1.34) : \left(\sqrt{\varepsilon} X - (\sqrt{\varepsilon})^{-1} Y \right)^T \left(\sqrt{\varepsilon} X - (\sqrt{\varepsilon})^{-1} Y \right) = \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y - Y^T X - X^T Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y$$

$$(1.35) : S > 0 \Rightarrow (SX - Y)^T S^{-1} (SX - Y) = X^T S^{-1} X + Y^T S Y - X^T Y - Y^T X \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X^T Y + Y^T X \leq X^T S^{-1} X + Y^T S Y$$

1.5. Placement de pôles dans des régions LMI

L'idée est de pouvoir construire de façon systématique n'importe quelle région convexe du plan complexe à partir de l'intersection de régions convexes élémentaires (demi-plan, bandes, cercles, cônes ...) appelées régions LMI.

Définition [19] : Un sous ensemble D du plan complexe est dit une région LMI s'il existe une matrice symétrique $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) < 0\} \quad (1.36)$$

avec $f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T$. La notation \bar{z} désigne le conjugué de z et $f_D(z)$ est appelée la fonction caractéristique de la région LMI D .

Les valeurs propres d'une matrice A sont placées dans une région LMI D du plan complexe [20], si et seulement si, il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que :

$$M_D(A, P) = \alpha \otimes P + \beta \otimes (AP) + \beta^T \otimes (AP)^T < 0 \quad (1.37)$$

avec \otimes représente le produit matriciel de Kronecker.

Considérons N sous-régions LMI D_1, D_2, \dots, D_N du plan complexe. Les valeurs propres de la matrice A appartiennent à la région LMI $D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_N$ avec des fonctions caractéristiques $f_{D_1}(z), f_{D_2}(z), \dots$ et $f_{D_N}(z)$ respectivement, si et seulement si il existe une matrice symétrique $P > 0$ solution des inégalités suivantes :

$$M_{D_i}(A, P) = \alpha_i \otimes P + \beta_i \otimes (AP) + \beta_i^T \otimes (AP)^T < 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.38)$$

Une région LMI a la propriété d'être convexe et symétrique par rapport à l'axe des abscisses. De plus, l'intersection de régions LMI est une région LMI. Dans le cadre des modèles TS, l'idée est de caractériser des régions dans le demi plan complexe gauche [19] avec une fonction de Lyapunov en terme de problèmes LMI. Pour ce faire, on définit un domaine \mathfrak{R} par l'intersection de trois régions LMI intéressantes pour la commande de systèmes [31] :

- Le demi-plan $\Re(z) < \frac{\lambda}{2}$:

$$f_D(z) = \lambda + z + \bar{z} < 0 \quad (1.39)$$

- Le cercle de rayon ρ centré en $(0,0)$:

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -\rho & z \\ \bar{z} & -\rho \end{bmatrix} < 0 \quad (1.40)$$

- Le cône issu de l'origine et d'angle 2ϑ :

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} (z + \bar{z}) \sin(\vartheta) & (\bar{z} - z) \cos(\vartheta) \\ (\bar{z} - z) \cos(\vartheta) & (z + \bar{z}) \sin(\vartheta) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.41)$$

L'intersection de ces trois régions définit la région \mathfrak{R} représentée sur la figure 1.1.

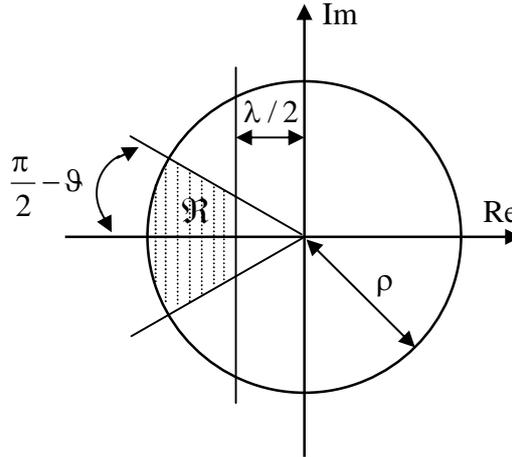


Figure 1.1 : Définition d'une région \mathfrak{R}

Dans le cas du modèle linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.42)$$

Les valeurs propres de la matrice d'état A sont situées dans la région \mathfrak{R} s'il existe une matrice $P > 0$ telle que [20] :

$$A^T P + PA + \lambda P < 0 \quad (1.43)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho P & A^T P \\ PA & -\rho P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta)(A^T P + PA) & \sin(\vartheta)(-A^T P + PA) \\ \sin(\vartheta)(A^T P - PA) & \cos(\vartheta)(A^T P + PA) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.45)$$

1.6. Stabilité au sens de Lyapunov

Le principe de stabilité selon Lyapunov repose sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Si cette énergie, représentée généralement par une fonction scalaire, est continûment dissipée, on parle alors de système dissipatif. Dans ce cas, on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. En l'occurrence, en étudiant la variation de cette fonction scalaire, nous pouvons éventuellement conclure sur la stabilité du système étudié.

Dans ce mémoire nous étudions la stabilité plus particulièrement grâce à la méthode de Lyapunov, proposé en 1892 [21] dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques. Il s'agit de construire une fonction $V(x)$ de l'état x du système telle que les signes de cette fonction et de sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donnent une information sur la stabilité du système.

1.6.1. Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Considérons tout d'abord le système non linéaire en régime libre (non commandé) suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.46)$$

avec $x(t)$ représente l'état du système et la fonction $f(x(t)) \in C^1, x(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la dynamique du système. La fonction f décrit les dynamiques du système et peut être modélisée par des équations algébriques classiques et/ou un modèle flou.

Le système (1.46) est dit en équilibre autour x_0 si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps, x_0 est alors appelé point d'équilibre.

Définition 1.1 : Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système (1.46) si :

$$f(x_0) = 0, \forall t > 0 \quad (1.47)$$

Dans ce travail, on considère que le point d'équilibre du système (1.46) est l'origine ($x_0 = 0$) de l'espace d'état. Cette supposition est assez générale et ne change rien à l'étude de la convergence de l'état du système, car si $x_0 \neq 0$ est un point d'équilibre du système (1.46) alors $x_0 = 0$ est un point d'équilibre du système [22]:

$$\dot{z}(t) = f(z(t) + x_0) \quad (1.48)$$

La stabilité au sens de Lyapunov est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov dont la définition est comme suit :

Définition 1.2 : La fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov, si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. $V(x)$ est continue et ses dérivées partielles $\dot{V}_i(x)$ ($\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}$) existent et sont continues pour tout $i = 1, \dots, n$.
2. $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et $V(0) = 0$.
3. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \neq 0$.

Il existe de nombreuses définitions de la stabilité de Lyapunov dans la littérature et nous ne présentons que les plus utilisées dans l'étude de stabilité des modèles flous TS. Pour cela, la définition d'une certaine classe de fonctions est nécessaire.

Définition 1.3 : Une fonction continue $\alpha(r) : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ appartient à la classe k si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Si $a = \infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$, la fonction est dite de classe k_∞ .

Théorème 1.1 : Soit une fonction scalaire $V(x(t)) \in C^1$ telle que :

$$\alpha_1(x(t)) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(x(t)) \quad (1.49)$$

$\forall \|x\| < d$ où $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont des fonctions de classe k définies sur $[0, d)$, $d \in \mathbb{R}^{+*}$

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$, $\forall \|x\| < d$ alors le point d'équilibre ($x_0 = 0$) de (1.48) est localement stable. Il est globalement stable si de plus $d = \infty$ et les fonctions $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe k_∞ .
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\forall \|x\| < d$ avec $\alpha_0(\cdot)$ fonction de classe k définie sur $[0, d)$, alors le point d'équilibre de (1.48) est localement asymptotiquement stable.
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\forall x (d = \infty)$ avec $\alpha_0(\cdot)$ et les fonctions $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ de classe k_∞ , alors le point d'équilibre de (1.48) est globalement asymptotiquement stable.
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\forall x (d = \infty)$ avec les fonctions $\alpha_0(\cdot)$, $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont des fonctions de classe k_∞ de la forme :

$$\alpha_1(\|x\|) = a\|x\|^p, \alpha_2(\|x\|) = b\|x\|^p, \alpha_0(\|x\|) = c\|x\|^p, \quad (1.50)$$

telles que $a, b, c \geq 0, p \geq 1$, alors le point d'équilibre de (1.48) est globalement exponentiellement stable.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera à la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre du système dynamique (1.48).

1.6.2. Fonctions de Lyapunov usuelles

En général, il n'existe pas de méthodes systématiques pour trouver les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction $V(x(t))$ et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains...). Parmi ces fonctions on distingue les formes suivantes :

a)- Fonction de Lyapunov quadratique : Une classe de fonctions candidates de Lyapunov quadratiques que l'on utilisera tout au long de ce travail peut être décrite sous la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P = P^T > 0 \quad (1.51)$$

Cette fonction est définie positive si la matrice P est une matrice symétrique définie positive, $P = P^T > 0$. Ce type de fonctions s'avère être une fonction de Lyapunov du système car elle satisfait tout les conditions de la définition 1.2. Dans ce cas, le système (1.46) est dit stable quadratiquement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique soit négative.

De très nombreux travaux utilisent ce type de fonctions pour l'étude de la stabilité. Notamment dans le cas des systèmes incertains, des systèmes linéaires ainsi que dans celui des modèles TS [23]. L'atout majeur de cette fonction dans le cas des modèles TS est que la formulation convexe du problème permet aisément l'extraction d'une telle fonction lorsqu'elle existe. L'inconvénient de cette fonction réside dans l'obtention des conditions de stabilités très conservatives comme on le verra dans les chapitres 2, 3 et 4, d'où l'intérêt de chercher des conditions qui sont beaucoup moins conservatives (conditions relaxées ou

relâchées). Une autre variante de ces fonctions candidates peut être exprimée de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (1.52)$$

avec $P_i > 0$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}^{+}$. Ces fonctions quadratiques sont utilisées dans le cas des systèmes interconnectés et dans les modèles TS.

b)- Fonction polyquadratique : Cette fonction est de la forme :

$$V(x(t), z(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (1.53)$$

où les h_i sont les fonctions d'activation définies précédemment. Ce type de fonction, est plus général dans le sens où il inclut le cas quadratique, car il suffit de choisir $P_i = P$, pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Il est aussi intéressant de noter que, par apposition à la méthode quadratique, ce type de fonction tient compte de la vitesse de variation des variables de décision du modèle TS continu ce qui explique la réduction du conservatisme de la méthode. Plusieurs travaux ont utilisé ce type de fonctions que ce soit dans le cas continu [11] [24], ou bien dans le cas discret [11] [22] [25].

c)- Fonction affine paramétrique : Cette fonction est de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P(\theta) x(t) \quad (1.54)$$

avec $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$ est souvent utilisée pour étudier les systèmes linéaires à paramètres incertains variants dans le temps.

d)- Fonctions continues par morceaux : Ce type de fonctions est donné par la forme :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_r(x(t))) \quad (1.55)$$

avec

$$V_i(x(t)) = x^T(t) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (1.56)$$

Ce type de fonctions présente l'avantage d'être moins conservatif que les fonctions quadratiques. Il a été l'objet d'étude dans le cas des systèmes linéaires variant dans le temps (LTV) [3], puis adopté pour l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques hybrides notamment les systèmes à commutations [26]. Récemment, ce type de fonctions a été utilisé pour l'étude de la stabilité des systèmes flous [22].

1.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils fondamentaux utilisés dans ce mémoire, à savoir, le modèle flou de type Takagi-Sugeno, les différentes méthodes pour l'obtention des modèles flous et les inégalités linéaires matricielles (LMI). Nous avons présenté également la notion de stabilité au sens de Lyapunov et les types des fonctions candidates de Lyapunov les plus utilisés.

Stabilité et stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno

2.1. Introduction.....	20
2.2. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno.....	20
2.2.1. Stabilité quadratique.....	20
2.2.2. Stabilité non quadratique.....	22
2.3. Stabilisation des modèles Takagi-Tugeno.....	25
2.3.1. Stabilisation des modèles TS continus.....	25
2.3.2. Stabilisation des modèles TS discrets.....	30
2.3.3. Conditions de stabilité relâchées.....	31
2.4. Observateurs flous de Takagi-Sugeno.....	34
2.4.1. Cas des variables de prémisse mesurables.....	35
2.4.2. Cas des variables de prémisse non mesurables.....	36
2.5. Conclusion.....	42

2.1. Introduction

Depuis plusieurs années de nombreux travaux se sont intéressés à la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de Takagi-Sugeno. L'analyse de stabilité des modèles flous est souvent étudiée par la technique de Lyapunov quadratique qui impose des exigences restrictives et donne des conditions de stabilité suffisantes. La stabilité dépend de l'existence d'une matrice commune, symétrique et définie positive, qui garantit la stabilité de tous les modèles locaux. Ces conditions de stabilité peuvent être exprimées en utilisant des inégalités linéaires matricielles (LMI).

Dans ce chapitre, nous présentons quelques théorèmes donnant les conditions suffisantes de stabilité et stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno. L'approche proposée tout au long de ce chapitre repose sur les fonctions de Lyapunov. Il s'agit de chercher une matrice symétrique et définie positive et sa fonction de Lyapunov associée telles que certaines conditions simples garantissent les propriétés de stabilité.

2.2. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno

L'étude de la stabilité des modèles Takagi-Sugeno s'effectue principalement en utilisant la méthode directe de Lyapunov. Cette méthode implique le choix d'une fonction candidate de Lyapunov qui est le premier élément dans l'étude de la stabilité.

2.2.1. Stabilité quadratique

Les modèles flous de Takagi-Sugeno sont composés d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe. Ils peuvent s'écrire en boucle ouverte sous la forme suivante :

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.1)$$

Dans cette section, nous présentons les conditions suffisantes de stabilité quadratique utilisant l'approche de Lyapunov.

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est définie par :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P = P^T > 0 \quad (2.2)$$

a) Cas des modèles TS continu

Le modèle de Takagi-Sugeno en régime libre dans le cas continu est :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \quad (2.3)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (2.2) :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{d}{dt}(x^T(t)Px(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \quad (2.4)$$

De (2.3) et (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \right)^T Px(t) + x^T(t)P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \right) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i^T P + PA_i\} \right) x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Puisque les fonctions h_i sont toujours positives, l'étude de la stabilité quadratique revient donc à résoudre le problème résumé dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 : *Le modèle flou continu (2.3) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait la condition suivante :*

$$A_i^T P + PA_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.6)$$

b) Cas modèles TS discret

Le modèle de Takagi-Sugeno en régime libre dans le cas discret est :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \quad (2.7)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la variation de la fonction (2.2)

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)Px(t) \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \right)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) \right) - x^T(t)Px(t) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i^T PA_i - P \right) x(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'étude de la stabilité quadratique revient à résoudre le problème résumé dans le théorème suivant :

Théorème 2.2 : *Le modèle flou discret (2.7) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait la condition suivante :*

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.10)$$

2.2.2. Stabilité non quadratique

Les conditions nécessaires (2.6) sur l'existence d'une matrice symétrique définie positive P commune aux r modèles locaux montre clairement le conservatisme de la méthode. C'est la raison pour laquelle certains systèmes sont stables alors qu'il n'existe pas de matrice symétrique définie positive commune.

Dans cette section nous étudions la stabilité d'un système TS par l'approche non quadratique où la fonction de Lyapunov du modèle global, construite par agrégation de fonctions de Lyapunov quadratiques relatives à chaque modèle local, est dépendante de l'état.

Un certain nombre de travaux [25] [27] proposent également des fonction de Lyapunov non quadratique (dite aussi polyquadratique) de la forme :

$$V(x(t)) = x^T(t) P(x(t)) x(t) \quad (2.11)$$

avec la matrice symétrique définie positive.

$$P(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i, \quad P_i = P_i^T > 0 \quad (2.12)$$

et $h_i(z(t))$ a les mêmes propriétés des fonctions d'activation (1.7), et aussi continûment dérivable.

On peut vérifier que la fonction (2.11) est une fonction candidate de Lyapunov :

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2 \quad (2.13)$$

avec

$$c_1 = \max_{i=1,r} (\lambda_{\min}(P_i)) > 0, \quad c_2 = \min_{i=1,r} (\lambda_{\max}(P_i)) > 0 \quad (2.14)$$

On note que l'utilisation de ce type de fonctions suppose que les fonctions d'appartenance du modèle TS sont dérivables et que leurs dérivées sont bornées.

Considérons la dérivée, par rapport au temps, de la fonction candidate de Lyapunov (2.11) :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P(x(t)) x(t) + x^T(t) P(x(t)) \dot{x}(t) + x^T(t) \dot{P}(x(t)) x(t) \quad (2.15)$$

On a :

$$\dot{P}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))P_{\rho}, \quad P_{\rho} = P_{\rho}^T > 0 \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.15) dans (2.16).

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{\dot{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t)\} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)\{A_j^T P_i + P_i A_j\}x(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

On peut écrire (2.18) comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)\{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\}x(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Supposons que les dérivées des fonctions d'appartenance sont bornées par :

$$\|\dot{h}_{\rho}(z(t))\| \leq \phi_{\rho}, \quad \rho = 1, 2, \dots, r \quad (2.20)$$

L'inégalité (2.20) implique que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t) \\ &\times \left\{ \sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} P_{\rho} + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \right\} x(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le théorème 2.3 donne les conditions assurant la stabilité du système TS (2.3).

Théorème 2.3 : *Supposons que les dérivées des fonctions d'appartenance sont bornées par (2.20). Le modèle flou (2.3) est stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_i = P_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, r$ telles que :*

$$\sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} P_{\rho} + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) < 0, \quad i \leq j \quad (2.22)$$

On note qu'il est difficile de déterminer les bornes des dérivées des fonctions d'appartenance ϕ_{ρ} . Dans ce cas les conditions précédentes peuvent être relâchées en

présentant une approche étendue de stabilité en considérant la propriété des dérivées des fonctions d'appartenance suivante [27].

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t)) = 0 \quad \forall z(t) \quad (2.23)$$

Selon la propriété, nous avons :

$$\dot{h}_r(z(t)) = -\sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_{\rho}(z(t)) \quad (2.24)$$

Alors (2.19) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_{\rho}(z(t)) x^T(t) P_{\rho} x(t) + \dot{h}_r(z(t)) x^T(t) P_r x(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\} x(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

En remplaçant (2.24) dans (2.25) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_{\rho}(z(t)) x^T(t) (P_{\rho} - P_r) x(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\} x(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'inégalité (2.20) implique que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \\ &\times \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_{\rho} (P_{\rho} - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \right\} x(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le théorème 2.4 [27] donne les nouvelles conditions qui assurent la stabilité du système TS (2.3).

Théorème 2.4 : Supposons que les dérivées des fonctions d'appartenance sont bornées par (2.20). Le modèle flou (2.3) est stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_i = P_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, r$ telles que :

$$P_{\rho} \geq P_r, \quad \rho = 1, 2, \dots, r-1 \quad (2.28)$$

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_{\rho} (P_{\rho} - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) < 0, \quad i \leq j \quad (2.29)$$

2.3. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno

L'une des premières idées de stabilisation de modèles flous de Takagi-Sugeno consiste à utiliser des retours d'état linéaires. Ces derniers ont vite été supplantés par une loi de commande, qui permet de prendre en compte les non linéarités des modèles flous, connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation).

Le principe de cette méthode illustrée par la Figure 2.1, est de construire un régulateur par retour d'état pour chaque modèle local. La loi de commande globale est obtenue par l'interpolation des lois de commande linéaires locales.

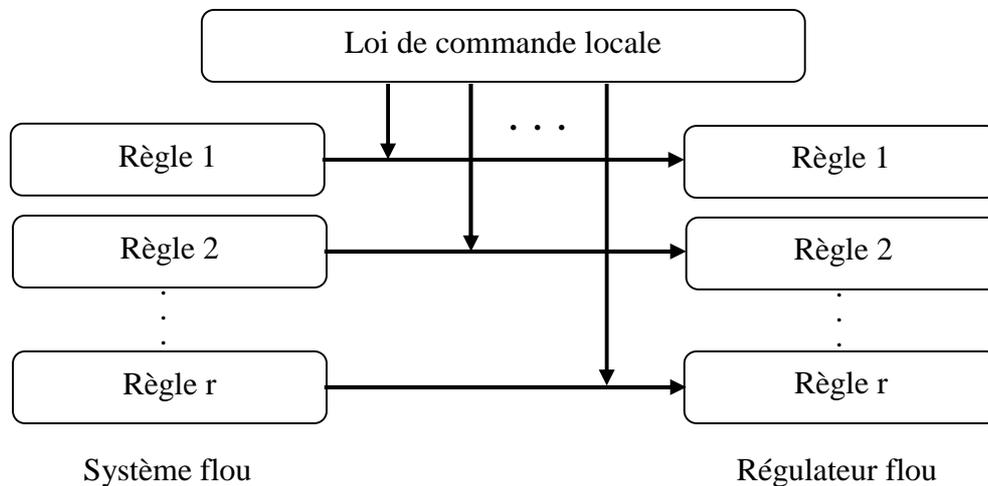


Figure 2.1 : Principe de la commande PDC

L'avantage majeur de cette loi de commande est de respecter la même structure de découpage des non linéarités que celle utilisée pour l'obtention du modèle TS. Dans le cas où le modèle TS est obtenu par découpage exact, cette loi de commande est donc valable quelque soit le point du sous espace compact de l'espace d'état [15].

2.3.1. Stabilisation des modèles TS continus

Soit le modèle TS continu suivant en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.30)$$

Les règles du contrôleur PDC peuvent être écrites sous la forme :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et...et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } u(t) = -K_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.31)$$

La loi de commande PDC globale obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales est de la forme :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (2.32)$$

où $K_i : i = 1, \dots, r$ est le gain de retour local relatif au $i^{\text{ème}}$ modèle, avec les mêmes $h_i(z(t))$ que ceux du modèle flou.

En combinant (2.30) et (2.32). La représentation du modèle global en boucle fermée avec une loi de commande PDC est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (2.33)$$

Théorème 2.5 : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait les inégalités matricielles suivantes :*

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r \quad (2.34)$$

On peut écrire (2.33) comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \quad (2.35)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad i < j \leq r \quad (2.36)$$

Théorème 2.6 : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait les conditions suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.37)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P + P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.38)$$

On remarque que l'inégalité du théorème 2.6 n'est pas linéaire en les variables P et K_i , en multipliant l'inégalité (2.37) et (2.38) à gauche et à droite par P^{-1} , et en définissant une nouvelle variable $X = P^{-1}$, puis en utilisant le changement de variable $M_i = K_i X$, $i = 1, \dots, r$, on obtient les LMIs suivantes par rapport aux variables X et M_i :

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0 & \forall i = 1, \dots, r \\ X(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)X - (B_i M_j + B_j M_i) - (B_i M_j + B_j M_i)^T < 0 & i < j \leq r \end{cases} \quad (2.39)$$

Théorème 2.7 : Soient le modèle flou continu (2.30), la loi de commande PDC (2.32). La boucle fermée est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = X^T > 0$ et des matrices M_i , $i = 1, \dots, r$ telles que les LMIs définis en (2.39) soient vérifiées. Les gains de retour d'état sont donnés par :

$$K_i = M_i X^{-1}, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.40)$$

Exemple 2.1 :

On considère le système mécanique non linéaire masse-ressort-amortisseur (figure 2.2) qui peut être représenté par le système d'équations différentielles suivantes [28] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.1125x_1(t) - 0.02x_2(t) - 0.67x_2^3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

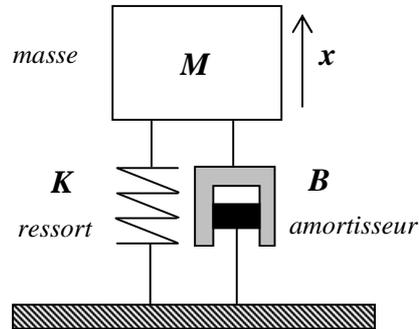


Figure 2.2 : Système masse-ressort-amortisseur

où $x_2(t)$ est le déplacement du ressort et $x_1(t) = \dot{x}_2(t)$. Le terme $-0.67x_2^3(t)$ représente la non linéarité du ressort, dans cet exemple, nous supposons que $x_2(t) \in [-1, 1.5]$, la limite inférieure est la longueur minimum que le ressort peut prendre, cette limite non linéaire peut être exprimée selon le lemme 1.1 comme suit :

$$-0.67x_2^3(t) = -w_1(x_2(t))(0 \cdot x_2(t)) - w_2(x_2(t))(1.5075 \cdot x_2(t)) \quad (2.42)$$

avec:

$$w_1(x_2(t)) = 1 - \frac{x_2^2(t)}{2.25}, \text{ et } w_2(x_2(t)) = \frac{x_2^2(t)}{2.25} \quad (2.43)$$

Le système masse-ressort-amortisseur peut être modélisé par le modèle flou de Takagi-Sugeno suivant :

Les règles du modèle :

Règle1: Si $x_1(t)$ est F_1^1 Alors $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est F_1^2 Alors $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1125 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1125 & -1.5275 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Pour stabiliser le système, on utilise un contrôleur PDC avec les règles suivantes :

Règle1: Si $x_1(t)$ est F_1^1 Alors $u(t) = -K_1x(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est F_1^2 Alors $u(t) = -K_2x(t)$

La résolution des LMIs (2.39) pour ce système a donné les résultats suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 7.2697 & 5.5713 \\ 5.5713 & 7.2697 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$K_1 = [3.7565 \quad 3.9451] \quad K_2 = [3.7565 \quad 2.4376] \quad (2.46)$$

Les figures 2.3, 2.4 et 2.5 présentent les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ et la commande $u(t)$ du système commandé par une commande PDC pour l'état initial $x(0) = [0.8, 0]^T$.

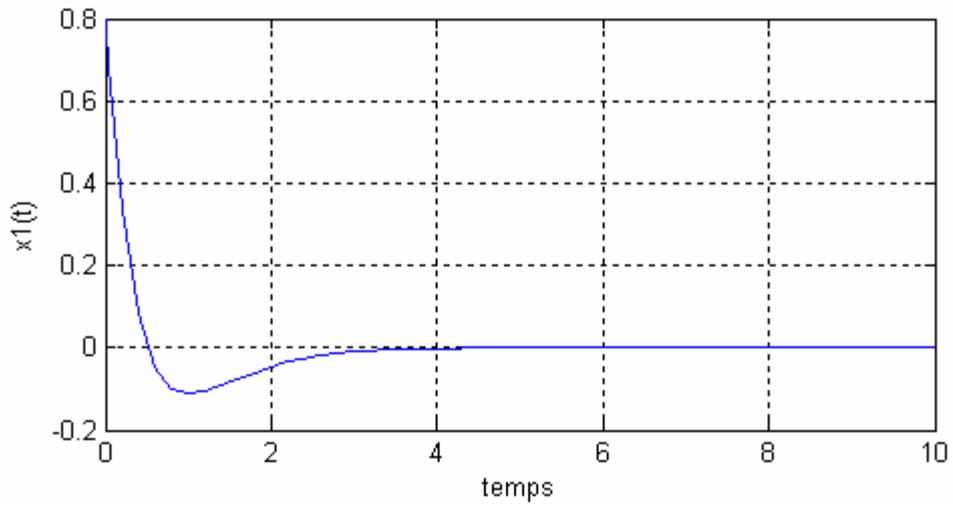


Figure 2.3 : Evolution de l'état $x_1(t)$

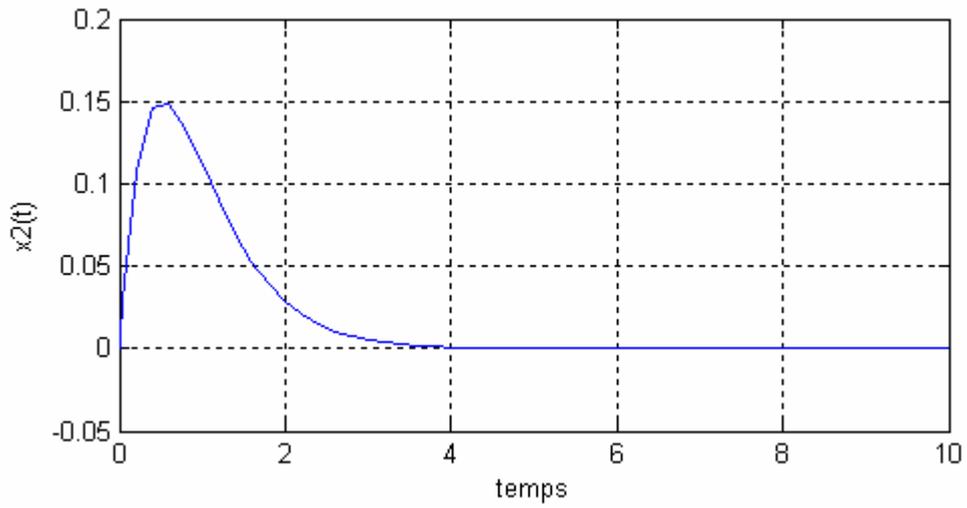


Figure 2.4 : Evolution de l'état $x_2(t)$

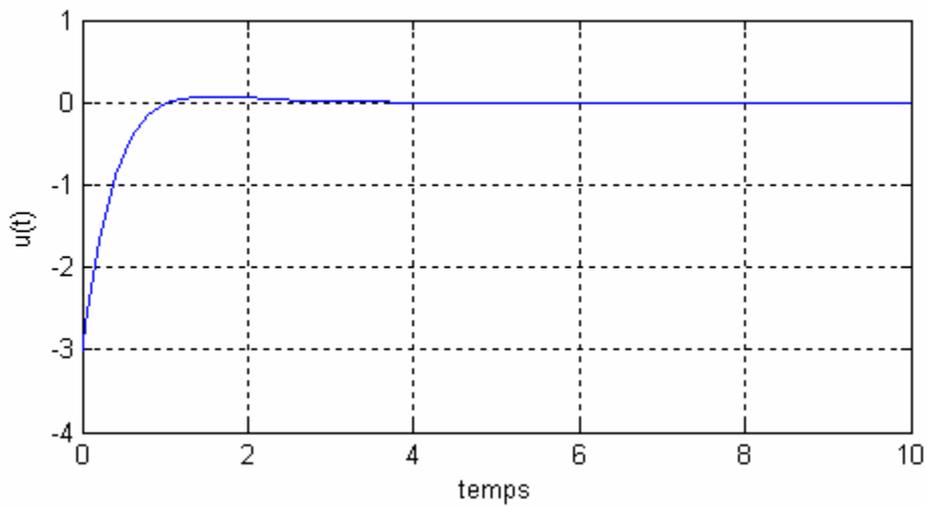


Figure 2.5 : Evolution de la commande $u(t)$

2.3.2. Stabilisation des modèles TS discrets

Soit le modèle TS discret en boucle fermée suivant :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.47)$$

La loi de commande PDC globale est :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) \quad (2.48)$$

On remplace l'équation (2.48) dans l'équation (2.47), la représentation du modèle global en boucle fermée avec une loi de commande PDC est donnée par :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \quad (2.49)$$

Théorème 2.8 : *Le modèle flou discret (2.47) et globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.48), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait les inégalités matricielles suivants :*

$$(A_i - B_i K_j)^T P (A_i - B_i K_j) - P < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r \quad (2.50)$$

On peut écrire (2.49) comme suit :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t))G_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x(t) \quad (2.51)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad i < j \leq r \quad (2.52)$$

Théorème 2.9 : *Le modèle flou discret (2.47) et globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.48), s'il existe une matrice commune définie positive P qui satisfait les conditions suivantes :*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.53)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right)^T P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right) - P \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.54)$$

On utilise le même changement de variable que dans le cas des modèles continus. Les conditions de stabilité des modèles TS discrets dans le théorème 2.9 peuvent être réécrites sous forme de LMIs en utilisant le complément de Schur [29]:

$$\begin{aligned}
 & X > 0 \\
 & \begin{bmatrix} X & (A_i X - B M_i)^T \\ (A_i X - B M_i) & X \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \\
 & \begin{bmatrix} X & ((A_i + A_j)X - N_{ij})^T \\ ((A_i + A_j)X - N_{ij}) & X \end{bmatrix} < 0 \quad i < j \leq r
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Telle que N_{ij} est donnée par :

$$N_{ij} = B_i M_j + B_j M_i \tag{2.56}$$

Les gains de retour d'état peuvent être déterminés par :

$$K_i = M_i X^{-1} \quad i = 1, \dots, r \tag{2.57}$$

Le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type PDC est celui du conservatisme des conditions sur les gains de retour. Dans la section suivante, on présente des nouvelles conditions de stabilité, qui améliorent le conservatisme des résultats précédents.

2.3.3. Conditions de stabilité relâchées

Les conditions de stabilité obtenues dans les théorèmes précédents sont très conservatives puisqu'elles ne prennent pas en compte certaines caractéristiques des fonctions d'interpolation non linéaires, elles ne peuvent être que suffisantes. Aussi, pour obtenir ces conditions on cherche une solution à un problème d'optimisation en considérant que, pour qu'une somme soit négative, chacun des termes de cette somme doivent être négatifs alors que pour la somme entière cette condition n'est pas nécessaire. En effet, il est évidemment possible de chercher des solutions aux conditions $\delta V(x(t)) < 0$ qui autoriseraient certains termes de la somme à être positifs alors que l'ensemble restera négatif. Dans ce cas, on obtient des conditions de stabilité dites « relâchées », c'est-à-dire moins conservatives [30].

Par conséquent, dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des conditions de relaxation ont fait l'objet de plusieurs travaux notamment ceux développés dans

[23] où les auteurs se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant pour réduire le conservatisme de conditions de stabilisation. Les auteurs dans [6] s'inspirent de ces travaux, en introduisant des conditions supplémentaires. Dans [31], les auteurs proposent d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples pour rechercher plusieurs matrices définies positives au lieu de chercher une seule matrice commune, comme dans le cas de stabilisation par la fonction de Lyapunov quadratique. Parmi les résultats de relaxation utilisant une fonction de Lyapunov quadratique, nous pouvons citer des conditions de relaxations très pertinentes proposées dans [6] [23] et données dans le théorème suivant :

a) Cas des modèles TS continu

Théorème 2.10 [23] : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et une matrice semi définie positive $Q = Q^T > 0$, vérifiant les inégalités suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.58)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P + P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) - Q \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.59)$$

où s est le nombre de règles qui peuvent être actives simultanément.

Les conditions de théorème 2.10 se réduisent à celles de théorème 2.6 lorsque $Q = 0$.

Théorème 2.11 [6] : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et des matrices symétriques $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ et des matrices $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, qui vérifient les inégalités suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.60)$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q_{ij} \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.61)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.62)$$

b) Cas des modèles TS discrets

Théorème 2.12 [23] : Le modèle flou discret (2.44) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.45), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et une matrice semi définie positive $Q = Q^T > 0$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P G_{ii} + (s-1)Q < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.63)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) - P - Q \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.64)$$

Avec s est le nombre de règles qui peuvent être actives simultanément.

Les conditions de théorème 2.12 se réduisent à celles de théorème 2.9 lorsque $Q = 0$.

Théorème 2.13 [6] : Le modèle discret (2.44) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.40), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et des matrices symétriques $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ et des matrices $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + Q_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.65)$$

$$G_{ij}^T P G_{ij} - P + Q_{ij} \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.66)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.67)$$

Remarque :

1- Pour prouver les théorèmes (2.10) et (2.12) on utilise la propriété suivante:

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i < j}^r 2h_i(z(t))h_j(z(t)) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0$$

En effet, on a :

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i < j}^r 2h_i(z(t))h_j(z(t)) = \frac{1}{r-1} \sum_{i < j}^r \{h_i(z(t)) - h_j(z(t))\}^2 \geq 0.$$

2- La preuve des théorèmes (2.11) et (2.13) est détaillée dans l'annexe A.

2.4. Observateurs flous de Takagi-Sugeno

Dans toutes les sections précédentes nous avons considéré que les états sont disponibles pour la mesure. Cependant, on sait que la mesure de toutes les composantes du vecteur d'état n'est pas possible dans plusieurs cas pratiques. Dans ce cas on utilise des observateurs pour estimer les valeurs des états non mesurables. Les règles de l'observateur flou sont basées sur les règles du modèle flou utilisé.

Les modèles flous utilisés sont ceux décrits par (2.30) dans le cas continu, et par (2.47) dans le cas discret, les observateurs flous continus et discrets sont définis par les règles suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Si } \hat{z}_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et...et } \hat{z}_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \delta \hat{x}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.68)$$

La sortie de l'observateur peut être réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))\} \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.69)$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{z}(t)$ représentent respectivement l'état estimé de l'observateur flou et le vecteur de prémisse reconstruit, et L_i les gains de l'observateur. L'erreur d'estimation d'état est définie par l'équation suivante :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.70)$$

On distingue deux cas, le premier est le cas particulier où toutes les variables utilisées dans les prémisses sont supposées mesurables, le deuxième cas concerne le cas général, où les variables utilisées dans les prémisses ne sont pas mesurables.

2.4.1. Cas des variables de prémisses mesurables

L'expression de la loi de commande PDC peut s'écrire dans ce cas :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) \quad (2.71)$$

A partir du régulateur flou (2.71) et de l'observateur flou (2.69), nous obtenons les équations suivantes:

Cas des modèles TS continus :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i - B_i K_j)x(t) + B_i K_j e(t)\} \quad (2.72)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t) \quad (2.73)$$

Le système complet dont le vecteur d'état se compose de l'état du système et de l'erreur d'estimation, peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))G_{ij}x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x_a(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x_a(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

avec :

$$x_a(x) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Cas des modèles TS discrets :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i - B_i K_j)x(t) + B_i K_j e(t)\} \quad (2.76)$$

$$e(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t) \quad (2.77)$$

Le système complet dont le vecteur d'état se compose de l'état du système et de l'erreur d'estimation, peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))G_{ij}x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x_a(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x_a(t) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Ainsi, la synthèse d'un tel observateur consiste en la détermination des gains locaux L_i afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation. Les conditions de synthèse d'un observateur flou sont duales de celles d'un contrôleur flou.

Pour tirer les conditions de stabilité, on applique les théorèmes 2.6 et 2.9 respectivement à (2.74) et (2.78).

Etant donnée que toutes les variables de prémisse sont mesurables, on peut appliquer le principe de séparation [32] (voire l'annexe B). On peut donc déterminer les gains K_i à partir des conditions du théorème 2.6 et les gains L_i à partir des mêmes conditions appliquées au problème dual, i.e ; avec $G_{ij} = A_i^T - C_j^T L_i^T$. En effet, la propriété de séparation utilisée pour les systèmes linéaires est également valide dans le cas des modèles TS dont les variables de décision sont mesurables mais n'est pas toujours trivial à déterminer [32].

2.4.2. Cas des variables de prémisse non mesurables

Dans ce cas $z_1(t), \dots, z_p(t)$ ne sont pas mesurables. L'expression de la loi de commande PDC peut s'écrire comme suite :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (2.79)$$

Le système augmenté peut être mis sous la forme :

Cas des modèles TS continus :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \left(\frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right) x_a(t) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Cas des modèles TS discrets :

$$\begin{aligned} x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \left(\frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right) x_a(t) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Avec :

$$x_a(x) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad G_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_s & B_i K_s \\ S_{ijs}^1 & S_{ijs}^2 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$S_{ijs}^1 = (A_i - A_j) - (B_i - B_j)K_s + L_j(C_s - C_i) \quad (2.83)$$

$$S_{ijs}^2 = A_j - L_j C_s + (B_i - B_j)K_s \quad (2.84)$$

Pour tirer des conditions de stabilité, on applique les théorèmes 2.6 et 2.10 respectivement à (2.80) et (2.81).

Dans ce cas, le principe de séparation ainsi que les conditions relâchées ne sont plus utilisables, il est donc nécessaire de calculer les matrices de gains de commande et d'observation par itérations successives.

Exemple 2.2 :

Pour illustrer les résultats obtenus dans les paragraphes précédents on présente l'exemple du pendule inversé sur un chariot mobile (figure 2.6). Le modèle dynamique de l'ensemble chariot-pendule peut être décrit par les équations suivantes [32]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1(t)]} [-f_1(M+m)x_2(t) \\ \quad - m^2l^2 x_2^2(t) \sin x_1(t) \cos x_1(t) + f_0 m l x_4(t) \cos x_1(t) \\ \quad + (M+m)mgl \sin x_1(t) - ml \cos x_1(t) u(t)] \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1(t)]} [f_1 m l x_2(t) \cos x_1(t) \\ \quad + (J+ml^2)m l x_2^2(t) \sin x_1(t) - f_0 (J+ml^2) x_4(t) \\ \quad - m^2 g l^2 \sin x_1(t) \cos x_1(t) + (J+ml^2) u(t)] \end{array} \right. \quad (2.85)$$

où $x_1(t)$ est l'angle (rad) du pendule, $x_2(t)$ est la vitesse angulaire (rad/s), $x_3(t)$ est le déplacement (m) du chariot, $x_4(t)$ est la vitesse (m/s) du chariot, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ est la constante de gravité, m est la masse (kg) du pendule, M est la masse (kg) du chariot, f_0 est le

coefficient de frottement (N/m/s) du chariot, f_1 est le coefficient de frottement (N/rad/s) du pendule, l est la distance (m) entre le centre de rotation et le centre de gravité de la tige, J est le moment d'inerté (kgm^2) du pendule autour de son centre de masse, et $u(t)$ la force (N) appliquée au chariot. Nous avons utilisé $M = 1.3282$ kg, $m = 0.22$ kg, $f_0 = 22.915$ N/m/s, $f_1 = 0.007056$ N/rad/s, $l = 0.304$ m, $J = 0.004963$ kgm^2 .

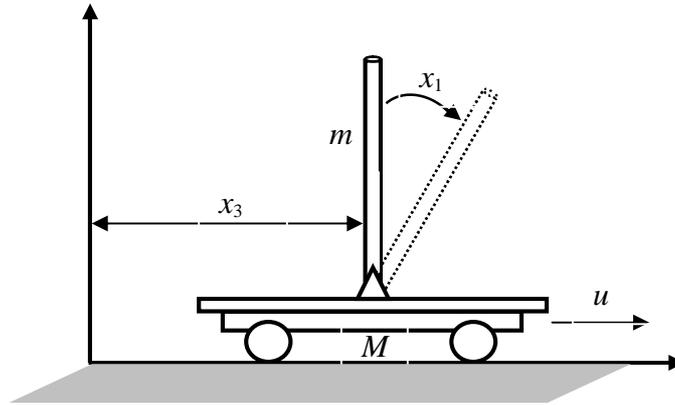


Figure 2.6 : Pendule inversé

L'objectif de la commande est d'équilibrer le pendule inversé autour de $x_1 = 0$. Pour utiliser l'approche de PDC, on doit avoir un modèle flou qui représente la dynamique du processus non linéaire. Par conséquent, nous représentons d'abord le système (2.87) par un modèle flou de Takagi-Sugeno. Pour réduire au minimum la complexité de conception, on utilise le moins de règles possibles. Nous approximons le système par les règles suivantes.

Les règles du modèle :

$$\text{R\`egle 1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

$$\text{R\`egle 2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y_2(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{43} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a'_{41} & a'_{42} & 0 & a'_{43} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b'_2 \\ 0 \\ b'_4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= (M+m)mgl/a, & a_{22} &= -f_1(M+m)/a, & a_{24} &= f_0ml/a \\ a_{41} &= -m^2gl^2/a, & a_{42} &= f_1ml/a, & a_{44} &= -f_0(J+ml^2)/a \\ b_2 &= -ml/a, & b_4 &= (J+ml^2)/a \\ a &= (M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(M+m)mgl/a', & a'_{22} &= -f_1(M+m)/a', & a'_{24} &= f_0ml \cos(60^\circ)/a' \\ a'_{41} &= -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}m^2gl^2 \cos(60^\circ)/a', & a'_{42} &= f_1ml \cos(60^\circ)/a', & a'_{44} &= -f_0(J+ml^2)/a' \\ b'_2 &= -ml \cos(60^\circ)/a', & b'_4 &= (J+ml^2)/a' \\ a' &= (M+m)(J+ml^2) - m^2l^2(\cos(60^\circ))^2 \end{aligned}$$

Les règles du contrôleur PDC :

Règle1: Si $x_1(t)$ est Autour de 0 Alors $u(t) = -K_1x(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est Autour de $\pm\pi/3$ Alors $u(t) = -K_2x(t)$

Les règles de l'observateur :

Règle1: Si $x_1(t)$ est Autour de 0 Alors $\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_1\hat{x}(t) + B_1u(t) + L_1(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_1(t) = C_1\hat{x}(t) \end{cases}$

Règle2: Si $x_1(t)$ est Autour de $\pm\pi/3$ Alors $\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_2\hat{x}(t) + B_2u(t) + L_2(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_2(t) = C_2\hat{x}(t) \end{cases}$

Les fonctions d'appartenances représentées sur la figure 2.7 des règles sont :

$$w_1(x_1(t)) = \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{-7(x_1(t) - \pi/6)}} \right\} \frac{1}{1 + e^{-7(x_1(t) + \pi/6)}}$$

$$w_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$$

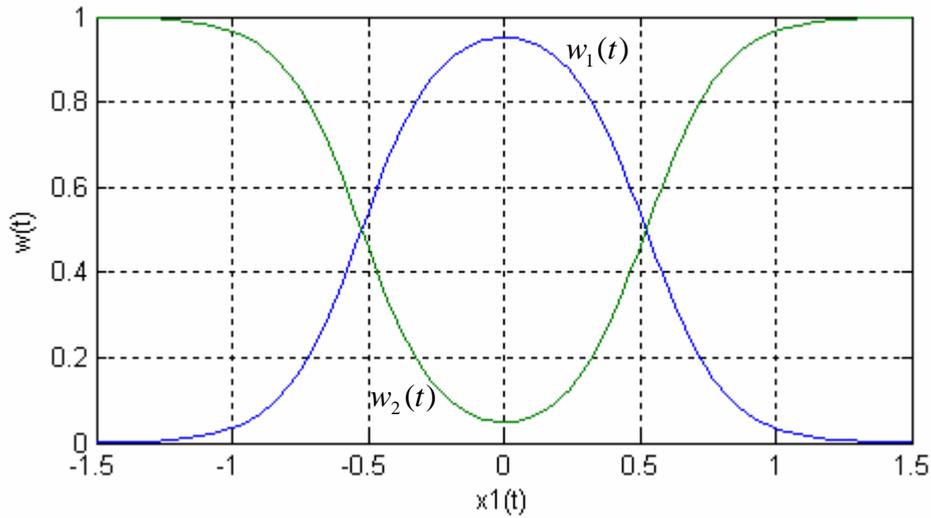


Figure 2.7 : fonction d'appartenance

La résolution des LMIs a donné les résultats suivants :

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.3546 & 0.0697 & 0.0211 & 0.0468 \\ 0.0697 & 0.0186 & 0.0045 & 0.0124 \\ 0.0211 & 0.0045 & 0.0034 & 0.0036 \\ 0.0468 & 0.0124 & 0.0036 & 0.0110 \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 0.3251 & -0.0948 & 0.0087 & -0.1304 \\ -0.0948 & 0.0494 & -0.0050 & 0.0727 \\ 0.0087 & -0.0050 & 0.1334 & -0.0096 \\ -0.1304 & 0.0727 & -0.0096 & 0.3590 \end{bmatrix}$$

Les gains du contrôleur et de l'observateur sont :

$$K_1 = [-72.3182 \quad -10.6766 \quad -2.9444 \quad -29.5252]$$

$$K_2 = [-111.8125 \quad -16.7902 \quad -4.6353 \quad -33.1695]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 44.9759 & 0.8388 \\ 139.7733 & 5.2982 \\ -0.1026 & 42.5937 \\ -12.8838 & 0.5685 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 44.4168 & 2.6327 \\ 119.0838 & 8.2127 \\ -1.9283 & 42.6123 \\ -3.8024 & 0.9267 \end{bmatrix}$$

Les figures 2.8 à 2.12 représentent les états et les états estimés $(x_1(t), \hat{x}_1(t))$, $(x_2(t), \hat{x}_2(t))$, $(x_3(t), \hat{x}_3(t))$, $(x_4(t), \hat{x}_4(t))$, et la commande $u(t)$ respectivement, avec les conditions initiales $x(0) = [-60, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

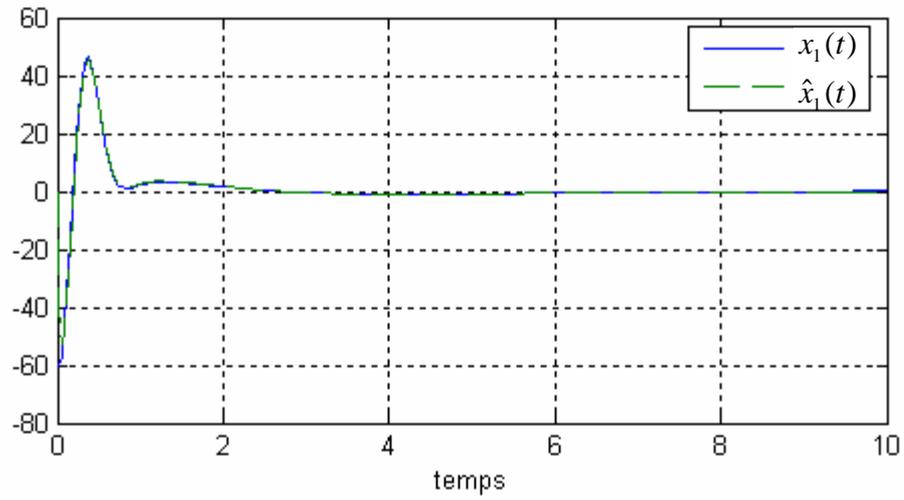


Figure 2.8 : L'état $x_1(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_1(t)$

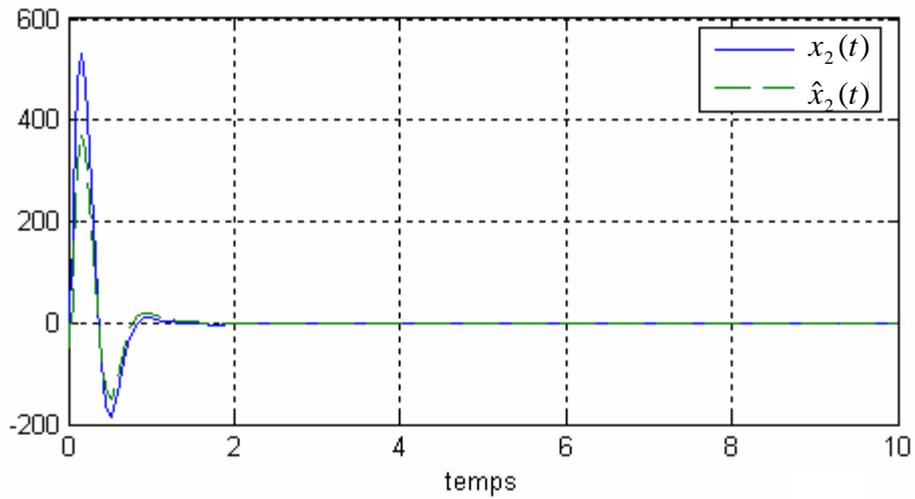


Figure 2.9 : L'état $x_2(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_2(t)$

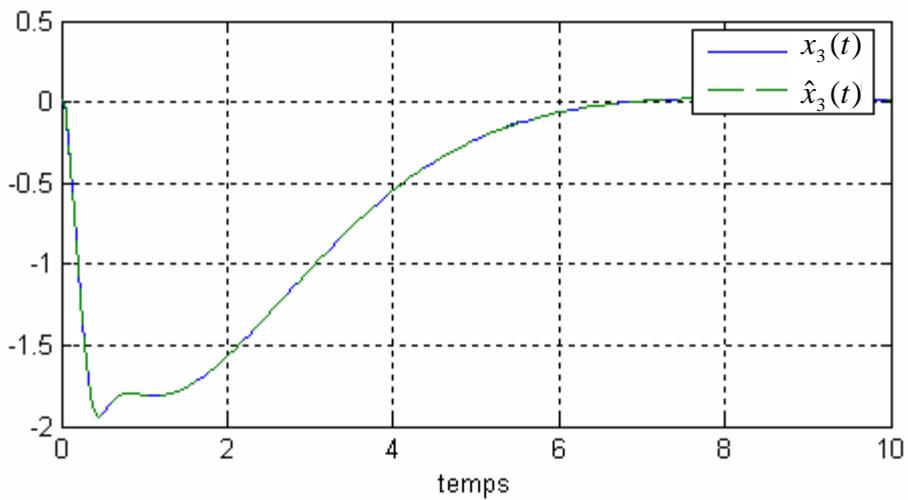
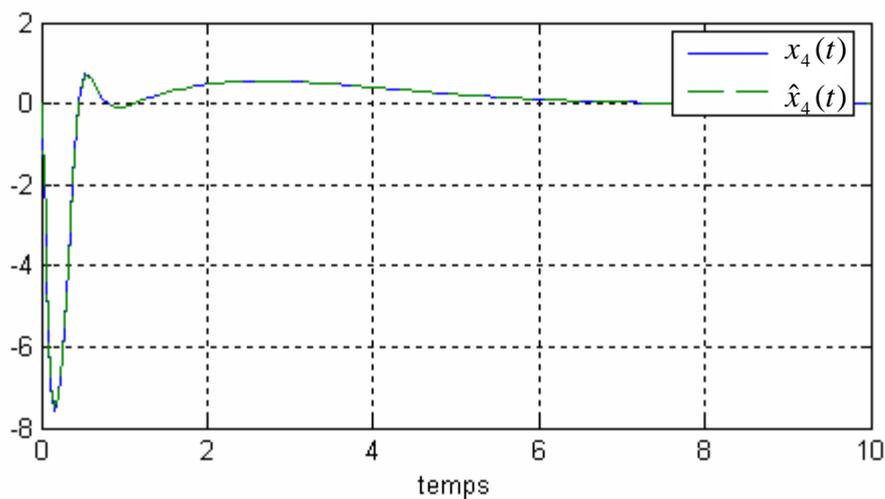
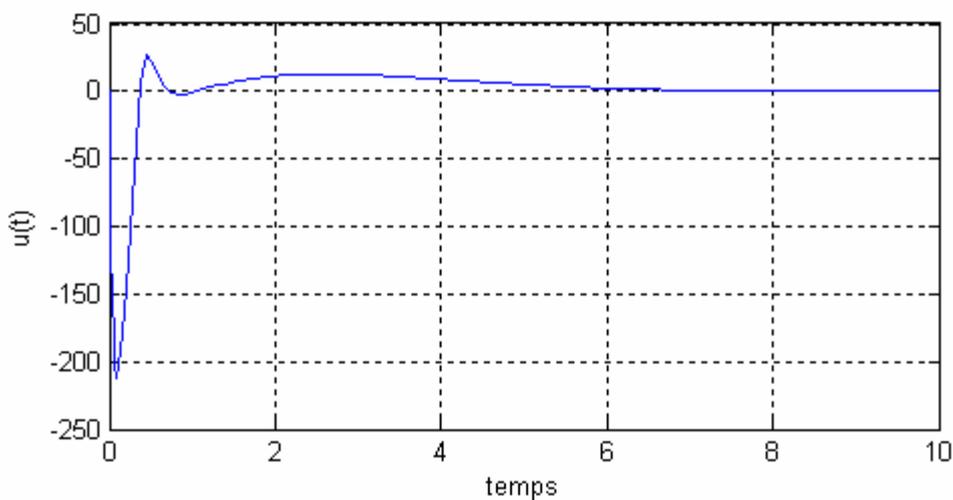


Figure 2.10 : L'état $x_3(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_3(t)$

Figure 2.11 : L'état $x_4(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_4(t)$ Figure 2.12 : La commande $u(t)$

2.5. Conclusion

La stabilité des modèles Takagi-Sugeno est souvent étudiée en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique en recherchant une matrice unique stabilisant simultanément chacun des modèles locaux, ce qui est souvent très conservatif.

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité des modèles TS en régime libre, puis nous avons présenté les conditions de stabilisation par retour d'état via la loi de commande PDC, et dans la dernière section nous avons introduit l'observateur flou de TS pour les deux cas des variables de prémisse, mesurables et non mesurables.

3

Stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno incertains

3.1. Introduction.....	43
3.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno incertain.....	43
3.3. Stabilisation des modèles TS incertains.....	44
3.4. Autres conditions de stabilité.....	48
3.5. Stabilisation avec taux de décroissance prédéfini	52
3.6. Placement de pôles dans des régions LMI pour des modèles TS Incertains.....	55
3.7. Commande avec observateur.....	64
3.8. Conclusion.....	72

3.1. Introduction

Théoriquement il est toujours possible de représenter la dynamique d'un système non linéaire par un système flou. En pratique cette représentation peut aboutir à l'obtention d'un très grand nombre de règles floues. Une extension possible du modèle flou permettant de réduire le nombre de règles floues est de prendre en compte certaines non linéarités du modèle au sein d'incertitudes inhérentes à la modélisation, on se place alors dans le cas de la modélisation par des systèmes flous TS incertains. L'objectif est d'obtenir un modèle flou comportant un nombre fini et raisonnable de règles fixé a priori.

Dans ce chapitre nous présentons les modèles flous TS incertains et leur stabilisation en utilisant la loi de commande PDC. Ensuite nous présentons les performances de stabilisation à travers le taux de décroissance et le placement des pôles des sous modèles linéaires bouclés. Finalement on s'intéresse au problème de la commande en utilisant un observateur flou.

3.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno incertain

Le modèle flou de Takagi-Sugeno incertain est obtenu par l'agrégation d'un ensemble de systèmes linéaires incertains. Dans [18] les modèles TS incertains ont été utilisés avec deux buts différents. Le premier but est évidemment la prise en compte des incertitudes de modélisation elles-mêmes et d'améliorer les résultats existants dans la littérature. Le deuxième, et peut-être le plus important, est d'utiliser les incertitudes pour réduire le nombre de règles du modèle.

Le modèle TS avec incertitudes paramétriques s'écrit d'une manière générale comme suit [33]:

$$R^i : \text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \delta x(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \\ y(t) = (C_i + \Delta C_i)x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.1)$$

On peut écrire (3.1) sous la forme:

$$\begin{cases} \delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (C_i + \Delta C_i)x(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

On peut réduire (3.2) comme suite :

$$\begin{cases} \delta x(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + (B_h + \Delta B_h)u(t) \\ y(t) = (C_h + \Delta C_h)x(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i, & B_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i, & C_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i \\ \Delta A_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta A_i, & \Delta B_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i, & \Delta C_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta C_i \end{aligned}$$

3.3. Stabilisation des modèles TS incertains

On suppose que les matrices des incertitudes ΔA_i et ΔB_i sont bornées avec la structure :

$$\Delta A_i = H a_i \Delta a_i(t) E a_i, \quad \Delta B_i = H b_i \Delta b_i(t) E b_i, \quad \Delta C_i = H c_i \Delta c_i(t) E c_i \quad (3.4)$$

où les matrices constantes $H a_i, H b_i, H c_i, E a_i, E b_i, E c_i$ de dimensions appropriées sont prédéterminées, et les incertitudes $\Delta a_i(t), \Delta b_i(t)$, et $\Delta c_i(t)$ sont bornées dans le temps de la façon suivante :

$$\Delta a_i^T(t) \Delta a_i(t)_i \leq I, \quad \Delta b_i^T(t) \Delta b_i(t)_i \leq I, \quad \Delta c_i^T(t) \Delta c_i(t)_i \leq I, \quad (3.5)$$

En utilisant une loi de commande floue de type PDC (2.32), la boucle fermée du système devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j\} x(t) \quad (3.6)$$

Dans la suite de ce travail, on utilise les notations suivantes :

$$\Sigma^+(A) = A + A^T, \quad \Sigma^-(A) = A^T - A \quad (3.7)$$

Théorème 3.1 [15] : *Le modèle flou TS incertain (3.2) est globalement asymptotiquement stabilisable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ et des scalaires $\varepsilon a_{ij} > 0$ et $\varepsilon b_{ij} > 0$ tels que :*

$$\gamma_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (3.8)$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.9)$$

avec :

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Sigma^+ (A_i X - B_i M_j) + \varepsilon a_{ij} H a_i H a_i^T + \varepsilon b_{ij} H b_i H b_i^T & * & * \\ E a_i X & -\varepsilon a_{ij} I & 0 \\ E b_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij} I \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$X = P^{-1}$ et $M_i = K_i P^{-1}$, où le symbole * indique la quantité transposée dans une matrice symétrique.

Preuve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (3.11)$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si sa dérivée le long des trajectoires du modèle TS incertain (3.2) est strictement négative. Ce qui revient à vérifier que :

$$(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i)^T P + P (A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.12)$$

avec la loi de commande PDC :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) = -K_h x(t) \quad (3.13)$$

Après la congruence avec P^{-1} , on fait le changement de variable $X = P^{-1}$ puis $M_i = K_i X$ (3.12) s'écrit :

$$X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - M_i B_i + X \Delta A_i^T + \Delta A_i X - M_i^T \Delta B_i^T - \Delta B_i M_i < 0 \quad (3.14)$$

En remplaçant (3.4) dans (3.14) on obtient :

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - M_i B_i + X E a_i^T \Delta a_i^T(t) H a_i^T + H a_i \Delta a_i(t) E a_i X \\ - M_i^T E b_i^T \Delta b_i^T(t) H b_i^T - H b_i \Delta b_i(t) E b_i M_i < 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

En appliquant la propriété (1.34) et en considérant les bornes des incertitudes (3.5) une condition suffisante pour que (3.15) soit vérifiée est :

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - M_i B_i + \varepsilon a_{ii} H a H a^T + \varepsilon a_{ii}^{-1} X E a_i^T E a_i X \\ + \varepsilon b_{ii} H b H b^T + \varepsilon b_{ii}^{-1} M_i^T E b_i^T E b_i M_i < 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes : $\varepsilon a_{ii}^{-1} X E a_i^T E a_i X$, $\varepsilon b_{ii}^{-1} M_i^T E b_i^T E b_i M_i$ on obtient l'expression $\gamma_{ii} < 0$, avec :

$$\gamma_{ii} = \begin{bmatrix} X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + \varepsilon a_{ii} H a H a^T + \varepsilon b_{ii} H b H b^T & * & * \\ E a_i X & -\varepsilon a_{ii} I & 0 \\ E b_i M_i & 0 & -\varepsilon b_{ii} I \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Exemple 3.1 : Soit l'exemple 1.1 présenté précédemment dans le chapitre 1. On ajoute des incertitudes bornées $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$ et $\Delta_3(t) \in [-1, 1]$ dans la matrice d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 + 2 \cdot \Delta_3(t) & -12 & 2 \cdot \Delta_1(t) \\ 0 & -\frac{2}{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)} - 8 & 1 \\ -\frac{2}{1 + x_1^2(t)} + 1 + 2 \cdot \Delta_3(t) & 0 & -5 + 2 \cdot \Delta_1(t) + \Delta_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \cdot \left(\frac{2}{1 + x_1^2(t)} + 1 \right) \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.18)$$

On suppose que ces incertitudes sont identiques pour tous les 4 sous modèles TS :

$$Ha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta a(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3(t) \end{bmatrix}, \quad Ea = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Pour illustrer l'intérêt de la prise en compte de ces incertitudes dans la synthèse de la loi de commande, on utilise la loi de commande obtenue à l'aide du théorème 2.6 (synthétisée sans incertitude). Il en résulte que certaines incertitudes provoquent la divergence du modèle en boucle fermée (figure 3-1).

Les conditions du théorème 3.1 sont donc utilisées afin de prendre en compte les incertitudes du modèle dans la synthèse de la loi de commande. La matrice définie positive et les gains obtenus en utilisant ces conditions sont :

$$P = \begin{bmatrix} 1.9587 & 1.2346 & -0.4810 \\ 1.2346 & 5.5034 & -0.8156 \\ -0.4810 & -0.8156 & 1.7000 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [0.1218 \quad -1.5846 \quad 1.6103], \quad K_2 = [0.1023 \quad -1.7086 \quad 1.6136]$$

$$K_3 = [0.5962 \quad 0.3020 \quad 1.3702], \quad K_4 = [0.5962 \quad 0.3020 \quad 1.3702]$$

Les résultats de simulation sont représentés dans les figures de 3.1 à 3.4, avec les conditions initiales $x(0) = [8, 8, 8]^T$ et les incertitudes sont constantes pendant toute la simulation : $\Delta_1(t) = 1$, $\Delta_2(t) = 0.1$ et $\Delta_3(t) = 0.9$

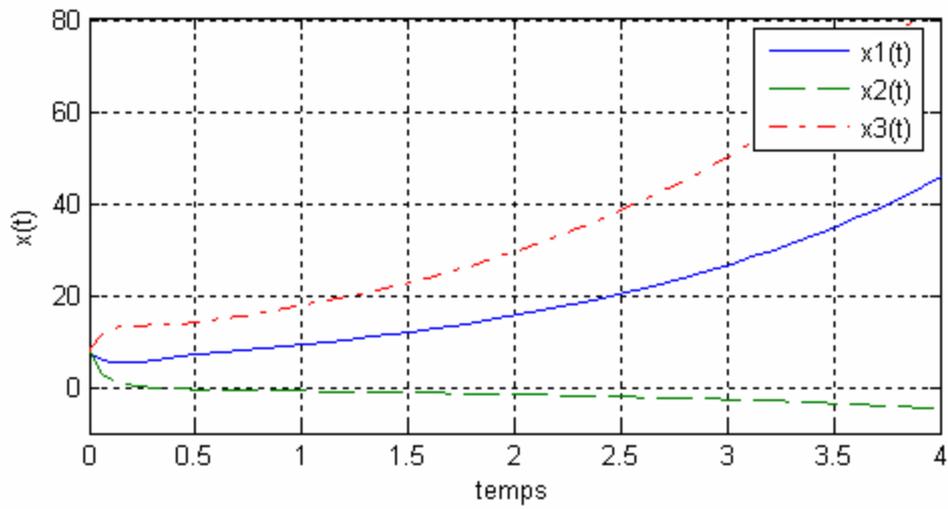


Figure 3.1 : Les états du modèle incertain sans prise en compte de l'incertitude dans la synthèse de loi de commande

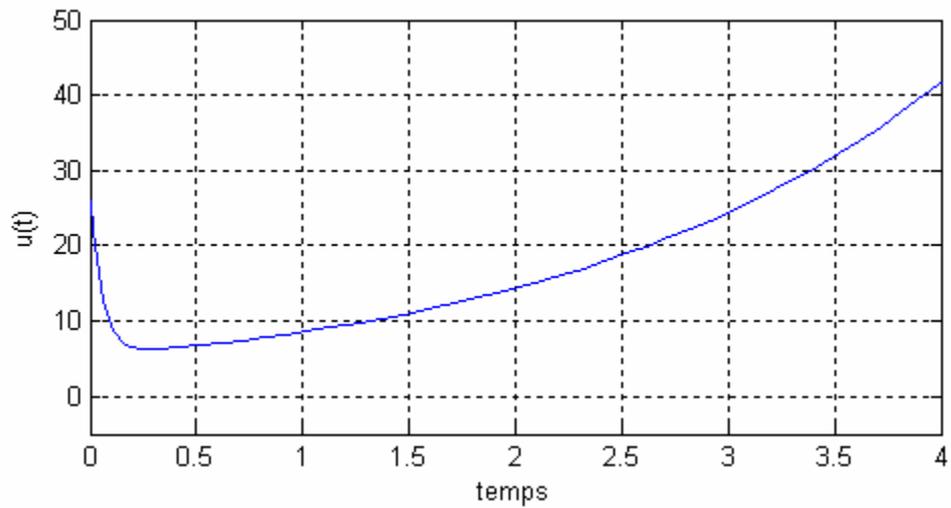


Figure 3.2 : Loi de commande sans prise en compte de l'incertitude

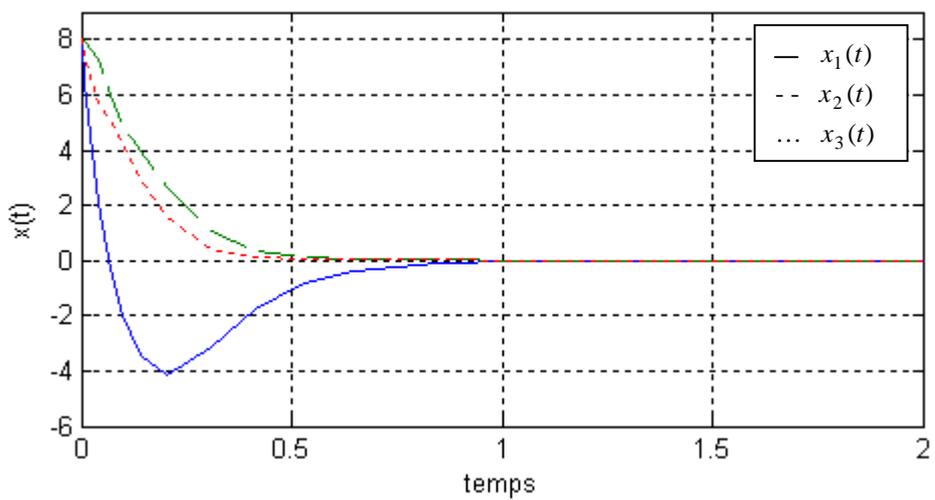


Figure 3.3 : Les états du modèle incertain

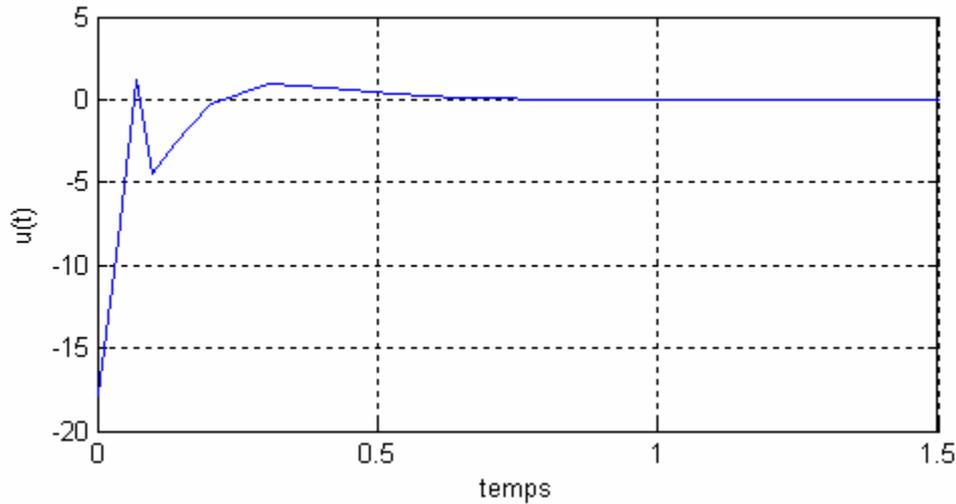


Figure 3.4 : La commande du modèle incertain

Remarque 3.1 :

Comme indiqué dans le chapitre 2, pour obtenir les conditions de la stabilité relâchées, on peut utiliser un des deux théorème 2.10 ou 2.11.

3.4. Autres conditions de stabilité

Plusieurs travaux [33]-[40], proposent des nouvelles conditions de stabilité, avec l'utilisation des différentes propriétés et transformations matricielles, en supposant que les matrices des incertitudes ΔA_i et ΔB_i sont bornées avec la structure suivante :

$$[\Delta A_i, \Delta B_i] = H_i \Delta_i(t) [E a_i, E b_i], \quad \text{avec } \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq I \quad (3.20)$$

Alors les conceptions principales pour la stabilité asymptotique globale du modèle flou TS, avec des incertitudes paramétriques, sont récapitulées dans les théorèmes suivants :

a) Cas des modèles TS continu

Théorème 3.2 [33] : Le modèle flou TS incertain (3.2) est globalement asymptotiquement stabilisable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T = X^{-1} > 0$ et des scalaires $\varepsilon_{ij}, (i, j = 1, \dots, r)$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$1) \begin{bmatrix} \Theta_{ii} & * & * \\ E a_i X - E b_i M_i & -\varepsilon_{ii} I & * \\ H_i^T & 0 & -\varepsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.21)$$

$$2) \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & * & * & * & * \\ Ea_i X - Eb_i M_i & -\frac{\varepsilon_{ij}}{2} I & * & * & * \\ Ea_j X - Eb_j M_i & 0 & -\frac{\varepsilon_{ij}}{2} I & * & * \\ H_i^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I & * \\ H_j^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (3.22)$$

avec :

$$\Theta_{ii} = \Sigma^+(A_i X) - \Sigma^+(B_i M_i) \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{ij} = \Sigma^+((A_i + A_j)X) - \Sigma^+(B_i M_j + B_j M_i) \quad (3.24)$$

Preuve :

En remplaçant (3.20) dans (3.12) on obtient :

$$A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + PH_i \Delta_i(t)(Ea_i - Eb_i K_i) + (Ea_i - Eb_i K_i)^T \Delta_i^T(t) H_i^T P < 0 \quad (3.25)$$

En appliquant le lemme 1.6 (la propriété (1.34)) a (3.25) :

$$\begin{aligned} & A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + \varepsilon_i PH_i H_i^T P + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) (Ea_i - Eb_i K_i) \\ & \leq A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + \varepsilon_i PH_i H_i^T P + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T (Ea_i - Eb_i K_i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Alors :

$$A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + \varepsilon_i PH_i H_i^T P + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T (Ea_i - Eb_i K_i) < 0 \quad (3.27)$$

Après la congruence avec P^{-1} , on fait le changement de variable $X = P^{-1}$ puis $M_i = K_i X$

(3.27) s'écrit :

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T + \varepsilon_i H_i H_i^T + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T (Ea_i - Eb_i K_i) < 0 \quad (3.28)$$

En appliquant la propriété de complément de Shur sur (3.28), on obtient la LMI (3.21) définie dans le théorème 3.2.

La deuxième LMI peut être obtenue par le même procédé avec :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right)^T P \\ & + P \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right) < 0 \quad i < j \leq r \end{aligned} \quad (3.29)$$

Puis en utilisant les borne des incertitudes des matrices ΔA_i et ΔB_i définies dans (3.20) et la propriété (3.5) :

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix}^T [PH_i \ PH_j]^T < 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec :

$$\varphi_{ij} = A_i^T P + PA_i + A_j^T P + PA_j - K_j^T B_i^T P - PB_i K_j - K_i^T B_j^T P - PB_j K_i. \quad (3.31)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix} \leq I \quad (3.32)$$

En appliquant le lemme 1.6 :

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix}^T [PH_i \ PH_j]^T \\ \leq \varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] [PH_i \ PH_j]^T \varepsilon_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Alors :

$$\varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] [PH_i \ PH_j]^T \varepsilon_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

On fait la congruence avec P^{-1} , puis on applique le complément de Shur pour trouver la deuxième LMI.

b) Cas des modèles TS discret

Dans cette section on va traiter le problème de stabilisation des modèles flous TS à temps discret avec des incertitudes paramétriques.

La représentation dans l'espace d'état du système flou TS incertain et de son contrôleur en boucle fermée peut être décrite comme suit:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j\} x(t) \quad (3.35)$$

Les conditions de stabilité sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.3 [35] : Le modèle flou TS incertain (3.35) est globalement asymptotiquement stabilisable, s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T = X^{-1} > 0$ et des scalaires $\varepsilon_{ij}, (i, j = 1, \dots, r)$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$1) \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ A_i X - B_i M_i & -X & * & * \\ E a_i X - E b_i M_i & 0 & -\varepsilon_{ii} I & * \\ 0 & H_i & 0 & -\varepsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.36)$$

$$2) \begin{bmatrix} -4X & * & * & * & * & * \\ \begin{pmatrix} A_i X - B_i M_j \\ + A_j X - B_j M_i \end{pmatrix} & -X & * & * & * & * \\ E a_i X - E b_i M_j & 0 & -\varepsilon_{ij} I & * & * & * \\ E a_j X - E b_j M_i & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I & * & * \\ 0 & H_i^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I & * \\ 0 & H_j^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (3.37)$$

avec : $M_i = K_i P^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

Prouve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

La variation de la fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= x(t+1)^T P x(t+1) - x(t)^T P x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) h_k(z(t)) h_l(z(t)) x(t)^T \\ &\quad \times \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j \right)^T P \left(A_k + \Delta A_k - (B_k + \Delta B_k) K_l \right) - P \right\} x(t) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) h_k(z(t)) h_l(z(t)) x(t)^T \\ &\quad \times \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i \right)^T P \right. \\ &\quad \left. \times \left(A_k + \Delta A_k - (B_k + \Delta B_k) K_l + A_l + \Delta A_l - (B_l + \Delta B_l) K_k \right) - 4P \right\} x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \\
&\quad \times \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i \right)^T P \right. \\
&\quad \left. \times \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i \right) - 4P \right\} x(t) \\
&= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right)^T P \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right) - P \right\} x(t) \\
&\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right)^T P \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right) - P \right\} x(t)
\end{aligned}$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si la variation de la fonction candidate de Lyapunov est négative. Ce qui revient à vérifier que :

$$\left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right)^T P \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right) - P < 0 \quad i \leq r \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right)^T P \\
&\quad \times \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right) - P < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème 3.3, on procède de la même façon que la démonstration précédente, en utilisant l'inégalité (3.38) pour démontrer la première LMI et l'inégalité (3.39) pour la deuxième LMI.

3.5. Stabilisation avec taux de décroissance prédéfini

Les conditions de stabilisation des théorèmes précédents permettent de prendre en compte certains types d'incertitudes intervenant sur les modèles. Cependant aucune performance de la boucle fermée n'est prise en compte dans la synthèse de la loi de commande. L'une des solutions possibles est l'utilisation d'un taux de décroissance [18] [41], qui permet d'agir sur les dynamiques (pôles) des sous-modèles en boucle fermée et consiste à imposer un taux de décroissance 2α à la décroissance de la fonction de Lyapunov. La condition de stabilité devient alors :

$$\dot{V}(x(t)) < -2\alpha V(x(t)) \quad (3.40)$$

Dans le plan complexe, cette condition revient à faire un placement arbitraire des pôles des sous-modèles dans le demi plan gauche avec les parties réelles de ces derniers qui soient inférieures ou égales à $(-\alpha)$.

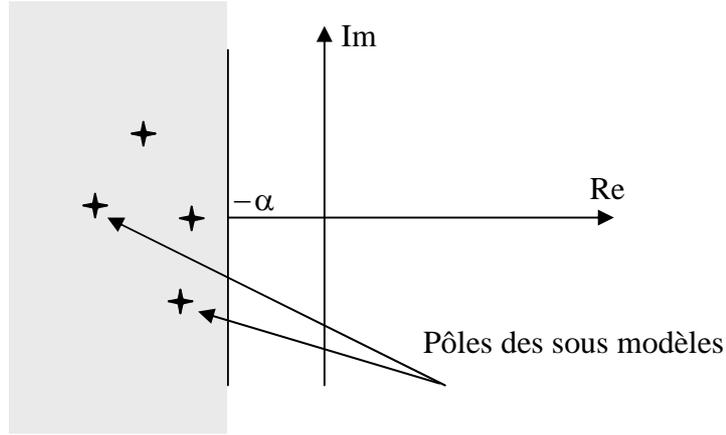


Figure 3.5 : Effet du taux de décroissance sur les pôles des sous modèles en boucle fermée

Le théorème suivant donne les conditions de stabilité du système flou TS incertain avec un taux de décroissance spécifié [18].

Théorème 3.4 : *Le modèle flou TS incertain (3.2) est globalement asymptotiquement stabilisable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T = X^{-1}$ et des matrices $\Phi_i, \Phi a_i, \Phi b_i, \Psi_i, \Psi a_i, \Psi b_i, Q_{ii} > 0, Q_{ij} = Q_{ij}^T$, et des scalaires $\varepsilon a_i > 0, \varepsilon b_i > 0$ tels que les LMI du théorème 2.11 soient vérifiées avec :*

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{ij} & * & * & * & * & * \\ -\Phi a_i^T + \Psi a_i^T H a_i^T & \varepsilon a_i I - \Psi a_i - \Psi a_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E a_i X & 0 & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi b_i^T + \Psi b_i^T H b_i^T & 0 & 0 & \varepsilon b_i I - \Psi b_i - \Psi b_i^T & 0 & 0 \\ E b_i M_j & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon b_i I & 0 \\ X - \Phi_j^T + \Psi_j^T A_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Psi_j - \Psi_j^T \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$Y_{ij} = \Sigma^+ (H a_i \Phi a_i^T + H b_i \Phi b_i^T - B_i M_j) + \Phi_j A_i^T + A_i \Phi_j^T + 2\alpha X \quad (3.42)$$

où $\alpha \geq 0$ est le taux de décroissance.

Preuve :

On considère la fonction de Lyapunov (3.11) avec un taux de décroissance $\alpha \geq 0$. Pour aboutir à la stabilité asymptotique formulée dans le théorème 3.4, la dérivée, par rapport au temps, de la fonction de Lyapunov doit satisfaire la condition suivante :

$$\dot{V}(x(t)) < -2\alpha V(x(t)) \quad (3.43)$$

En utilisant une loi de commande floue de type PDC (3.13), la boucle fermée du système devient :

$$\dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h - B_i K_h - \Delta B_h K_h)x(t) \quad (3.44)$$

De (3.11), (3.43) et (3.44) on obtient :

$$x^T(t) \left\{ (A_h + \Delta A_h - B_h K_h - \Delta B_h K_h)^T P + 2\alpha P \right\} x(t) < 0 \quad (3.45)$$

Après la congruence avec P^{-1} , les changements de variable $X = P^{-1}$ et $M_i = K_i X$, (3.45) devient :

$$XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h + X\Delta A_h^T + \Delta A_h X - M_h^T \Delta B_h^T - \Delta B_h M_h + 2\alpha X < 0 \quad (3.46)$$

En remplaçant (3.4) dans (3.46) :

$$\begin{aligned} & XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h \\ & + XEa_h^T \Delta a_h^T Ha_h^T + Ha_h \Delta a_h Ea_h X - M_h^T Eb_h^T \Delta b_h^T Hb_h^T - Hb_h \Delta b_h Eb_h M_h + 2\alpha X < 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\varepsilon a_h > 0$, $\varepsilon b_h > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h + \varepsilon a_h^{-1} XEa_h^T \Delta a_h^T Ea_h X \\ & + \varepsilon a_h Ha_h Ha_h^T + \varepsilon b_h^{-1} M_h^T Eb_h^T \Delta b_h^T \Delta b_h Eb_h M_h + \varepsilon b_h Hb_h Hb_h^T + 2\alpha X < 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Avec $\Delta a_h^T(t) \Delta a_h(t) \leq I$ et $\Delta b_h^T(t) \Delta b_h(t) \leq I$, l'inégalité (3.48) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h + \varepsilon a_h^{-1} XEa_h^T Ea_h X \\ & + \varepsilon a_h Ha_h Ha_h^T + \varepsilon b_h^{-1} M_h^T Eb_h^T Eb_h M_h + \varepsilon b_h Hb_h Hb_h^T + 2\alpha X < 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes $\varepsilon a_h^{-1} XEa_h^T Ea_h X$, $\varepsilon b_h^{-1} M_h^T Eb_h^T Eb_h M_h$, le lemme 1.4 (propriété (1.30)) pour les termes $\varepsilon a_h Ha_h Ha_h^T$ et $\varepsilon b_h Hb_h Hb_h^T$ et lemme 1.5, on obtient l'expression de $G_{hh} < 0$:

$$G_{hh} = \begin{bmatrix} Y_{hh} & * & * & * & * & * \\ -\Phi a_h^T + \Psi a_h^T H a_h^T & \varepsilon a_h I - \Psi a_h - \Psi a_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E a_h X & 0 & -\varepsilon a_h I & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi b_h^T + \Psi b_h^T H b_h^T & 0 & 0 & \varepsilon b_h I - \Psi b_h - \Psi b_h^T & 0 & 0 \\ E b_h M_h & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon b_h I & 0 \\ X - \Phi_h^T + \Psi_h^T A_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Psi_h - \Psi_h^T \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.6. Placement de pôles dans des régions LMI pour des modèles TS Incertains.

Une extension de l'approche précédente est le placement de pôles des sous modèles linéaires, appelée D -stabilité [19], qui permet de placer les pôles des sous-modèles dans la région LMI \mathfrak{R} définie dans le chapitre 1.

Nous considérons les trois régions LMI définies dans le chapitre 1, l'obtention de régions LMI pour les modèles TS incertains ce fait de façon directe, en remplaçant le modèle linéaire (1.42) par celui de (3.6). Le but est alors de pouvoir obtenir des LMIs qui garantissent la D -stabilité pour le modèle TS incertain (3.6) ; nous donnons des conditions suffisantes afin de satisfaire le placement de pôle pour le demi-plan gauche, le disque et finalement le cône issu de l'origine.

En appliquant directement les inégalités (1.43), (1.44) et (1.45) sur le modèle TS en boucle fermée (3.6), on obtient :

$$\Sigma^+(P A_h - P B_h K_h) + \Sigma^+(P \Delta A_h - P \Delta B_h K_h) + \lambda P < 0 \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho P & * \\ P(A_h - B_h K_h) & -\rho P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * \\ P(\Delta A_h - \Delta B_h K_h) & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \Sigma^+(P A_h - P B_h K_h) & * \\ \sin(\vartheta) \Sigma^-(P A_h - P B_h K_h) & \cos(\vartheta) \Sigma^+(P A_h - P B_h K_h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \Sigma^+(P \Delta A_h - P \Delta B_h K_h) & * \\ \sin(\vartheta) \Sigma^-(P \Delta A_h - P \Delta B_h K_h) & \cos(\vartheta) \Sigma^+(P \Delta A_h - P \Delta B_h K_h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.53)$$

Pour que les inégalités (3.51) (3.52) (3.53) soient des LMI, on suit les étapes suivantes :

- Faire la congruence par $X = P^{-1}$ pour (3.51) et par $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$ pour (3.52) et (3.53).

- Puis effectuer le changement de variable $M_h = K_h X$ qui rend la partie sans incertitude des expressions précédentes linéaire :

$$\Sigma^+(A_h X - B_h M_h) + \Sigma^+(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) + \lambda X < 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho X & * \\ A_h X - B_h M_h & -\rho X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * \\ \Delta A_h X - \Delta B_h M_h & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(A_h X - B_h M_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(A_h X - B_h M_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(A_h X - B_h M_h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.56)$$

On remarque que les premières parties sans incertitude sont des LMIs en X et M_i $i = 1, 2, \dots, r$ et sont notées dans la suite par (\cdot) . Il reste donc à traiter les parties incertaines. En utilisant l'expression des incertitudes (3.4), les inégalités précédentes s'écrivent :

$$(\cdot) + \Sigma^+(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X - Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) < 0 \quad (3.57)$$

$$(\cdot) + \begin{bmatrix} 0 & * \\ Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X - Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.58)$$

$$(\cdot) + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(-Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(-Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(-Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.59)$$

- **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.57)**

En appliquant la propriété (1.34) et en considérant les bornes des incertitudes (3.5), l'inégalité (3.57) devient :

$$(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(1)}} X E a_h^T E a_h X + \varepsilon a_{hh}^{(1)} H a_h H a_h^T + \frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(1)}} M_h E b_h^T E b_h M_h + \varepsilon b_{hh}^{(1)} H b_h H b_h^T < 0 \quad (3.60)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes $\frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(1)}} X E a_h^T E a_h X$ et $\frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(1)}} M_h E b_h^T E b_h M_h$ on obtient l'expression $\gamma_{hh}^{(1)} < 0$ définie dans le théorème suivant :

Théorème 3.5 : s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(1)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(1)} > 0$ tels que :

$$\gamma_{ii}^{(1)} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.61)$$

$$\gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ji}^{(1)} < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.62)$$

avec :

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Sigma^+(A_i X - B_i M_j) + \varepsilon a_{ij}^{(1)} H a_i H a_i^T + \varepsilon b_{ij}^{(1)} H b_i H b_i^T - \lambda X & * & * \\ E a_i X & -\varepsilon a_{ij}^{(1)} I & 0 \\ E b_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(1)} I \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

alors, les pôles du système en boucle fermée (3.6) appartiennent à la région LMI définie par (1.43) et les gains de la loi de commande PDC sont donnés par: $K_i = M_i X^{-1}$

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.58)**

En utilisant l'inégalité (1.34) les bornes des incertitudes (3.5), l'inégalité (3.58) devient :

$$\begin{bmatrix} (\cdot) + \frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(2)}} X E a_h^T E a_h X + \frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(2)}} M_h E b_h^T E b_h M_h & 0 \\ 0 & \varepsilon a_{hh}^{(2)} H a H a^T + \varepsilon b_{hh}^{(2)} H b H b^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

L'utilisation du complément de Schur pour les termes $\frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(1)}} X E a_h^T E a_h X$, $\frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(1)}} M_h E b_h^T E b_h M_h$ permet d'obtenir l'expression linéaire $\gamma_{ii}^{(2)} < 0$ définie dans le théorème suivant :

Théorème 3.6 : s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(2)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(2)} > 0$ tels que :

$$\gamma_{ii}^{(2)} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.65)$$

$$\gamma_{ij}^{(2)} + \gamma_{ji}^{(2)} < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.66)$$

avec :

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\rho X & * & * & * \\ A_i X - B_i M_j & -\rho X + \varepsilon a_{ij}^{(2)} H a_i H a_i^T + \varepsilon b_{ij}^{(2)} H b_i H b_i^T & 0 & 0 \\ E a_i X & 0 & -\varepsilon a_{ij}^{(2)} I & 0 \\ E b_i M_j & 0 & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(2)} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

alors, les pôles du système en boucle fermé (3.6) appartiennent à la région LMI définie par (1.44) et les gains de la loi de commande PDC sont donnés par : $K_i = M_i X^{-1}$.

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.59)**

L'inégalité (3.61) peut être écrite de la forme [15]:

$$\begin{aligned}
(\cdot)_+ & \begin{bmatrix} Ha_h \Delta a_h(t) & 0 \\ 0 & Ha_h \Delta a_h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) Ea_h X & \sin(\vartheta) Ea_h X \\ -\sin(\vartheta) Ea_h X & \cos(\vartheta) Ea_h X \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) X Ea_h^T & \sin(\vartheta) X Ea_h^T \\ \sin(\vartheta) X Ea_h^T & \cos(\vartheta) X Ea_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h^T(t) Ha_h^T & 0 \\ 0 & \Delta a_h^T(t) Ha_h^T \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} Hb_h \Delta b_h(t) & 0 \\ 0 & Hb_h \Delta b_h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(\vartheta) Eb_h M_h & -\sin(\vartheta) Eb_h M_h \\ \sin(\vartheta) Eb_h M_h & -\cos(\vartheta) Eb_h M_h \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -\cos(\vartheta) M_h^T Eb_h^T & \sin(\vartheta) M_h^T Eb_h^T \\ -\sin(\vartheta) M_h^T Eb_h^T & -\cos(\vartheta) M_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h^T(t) Hb_h^T & 0 \\ 0 & \Delta b_h^T(t) Hb_h^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.68)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (1.34) et en considérant les bornes des incertitudes (3.5), l'inégalité (3.68) devient :

$$\begin{aligned}
(\cdot)_+ & \varepsilon a_{hh}^{(3)} \begin{bmatrix} Ha_h Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h Ha_h^T \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(3)}} \begin{bmatrix} X Ea_h^T Ea_h X & 0 \\ 0 & X Ea_h^T Ea_h X \end{bmatrix} \\
& + \varepsilon b_{hh}^{(3)} \begin{bmatrix} Hb_h Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h Hb_h^T \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(3)}} \begin{bmatrix} M_h^T Ea_h^T Ea_h M_h & 0 \\ 0 & M_h^T Ea_h^T Ea_h M_h \end{bmatrix} < 0 \quad (3.69)
\end{aligned}$$

L'utilisation du complément de Schur permet d'obtenir l'expression linéaire $\gamma_{ii}^{(3)} < 0$ définie dans le théorème 3.7:

Théorème 3.7 : s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i

et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(3)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(3)} > 0$ tels que :

$$\begin{aligned}
\gamma_{ii}^{(3)} & < 0 & i = 1, 2, \dots, r \\
\gamma_{ij}^{(3)} + \gamma_{ji}^{(3)} & < 0 & i < j \leq r
\end{aligned}$$

avec :

$$\gamma_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} S_{ij} & XEa_i^T & M_j^T Eb_i^T & \Pi_{ij} & 0 & 0 \\ Ea_i X & -\varepsilon a_{ij}^{(3)} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Eb_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(3)} I & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{ij} & 0 & 0 & S_{ij} & XEa_i^T & M_j^T Eb_i^T \\ 0 & 0 & 0 & Ea_i X & -\varepsilon a_{ij}^{(3)} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Eb_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(3)} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.70)$$

avec

$$S_{ij} = \cos(\vartheta) \Sigma^+ (A_i X - B_i M_j) + \varepsilon a_{ij}^{(3)} Ha_i Ha_i^T + \varepsilon b_{ij}^{(3)} Hb_i Hb_i^T$$

$$\Pi_{ij} = \sin(\vartheta) \Sigma^- (A_i X - B_i M_j)$$

alors, les pôles du système en boucle fermé (3.6) appartiennent à la région LMI définie par (1.45) et les gains de la loi de commande PDC sont donnés par: $K_i = M_i X^{-1}$

Le théorème 3.8 donne les conditions de stabilité du système TS (3.6) pour que tous les pôles des sous-modèles TS soient situés dans la région LMI \mathfrak{R} définie dans le chapitre 1.

Théorème 3.8 [41] : Le modèle TS (3.6) est quadratiquement stable et a tous les pôles des sous-modèles TS situés dans la région LMI \mathfrak{R} , s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(k)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(k)} > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}^{(k)} &< 0 & i = 1, 2, \dots, r \\ \gamma_{ij}^{(k)} + \gamma_{ji}^{(k)} &< 0 & i < j \leq r \\ k &\in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Les gains de la loi de commande PDC sont donnés par: $K_i = M_i X^{-1}$

Exemple 3.2 :

Le système chaotique de Lorenz peut être décrit par les équations suivantes [17].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t) \\ r x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) - b x_3(t) \end{bmatrix}$$

Les valeurs nominales (σ, r, b) sont $(10, 28, 8/3)$, le système chaotique de Lorenz peut être écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x_1(t) \\ 0 & x_1(t) & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Si on suppose que $x_1(t) \in [-d, d]$, Alors $x_1(t)$ peut être écrit sous la forme :

$$x_1(t) = d \left(\frac{x_1(t) + d}{2d} \right) - d \left(\frac{d - x_1(t)}{2d} \right)$$

Le système (3.71) peut être écrit comme :

$$\dot{x}(t) = w_1(x_1(t))A_1x(t) + w_2(x_1(t))A_2x(t)$$

avec :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$$

et

$$M_1(x_1(t)) = \frac{x_1(t)}{2d} + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2} - \frac{x_1(t)}{2d}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix}$$

Prenant $M_1(x_1(t))$ et $M_2(x_1(t))$ comme des fonctions d'appartenance (figure3.6), le système chaotique de Lorenz peut être représenté exactement par le modèle flou de Takagi-Sugeno suivant :

Règle1 : Si $x_1(t)$ est autour de M_1 Alors $\dot{x}(t) = A_1x(t)$

Règle2 : Si $x_1(t)$ est autour de M_2 Alors $\dot{x}(t) = A_2x(t)$

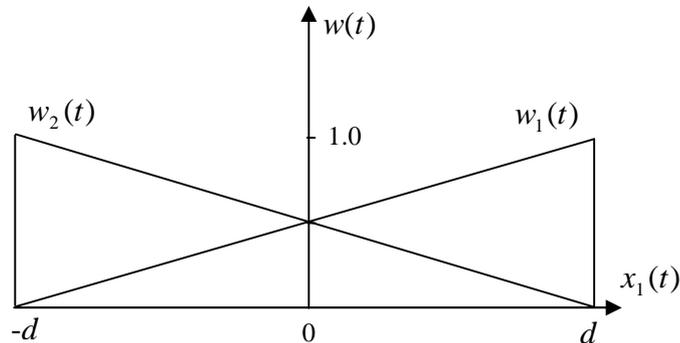


Figure 3.6 : Fonctions d'appartenance

On suppose que les paramètres (σ, r, b) sont incertains, varient autour de leurs valeurs nominales (σ_0, r_0, b_0) avec :

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma, \quad r = r_0 + \Delta r, \quad b = b_0 + \Delta b$$

où :

$$\Delta\sigma = \mu(t)\sigma_0, \quad \Delta r = \mu(t)r_0, \quad \Delta b = \mu(t)b_0$$

et :

$$|\mu(t)| \leq 0.5$$

On utilise la matrice d'entrée incertaine B avec :

$$B = B_0 + \Delta B$$

avec :

$$B_0 = [1, 0, 0]^T, \quad \Delta B = \mu(t)B_0$$

Le système chaotique de Lorenz incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

Règle 1: Si $x_1(t)$ est autour de M_1 Alors $\dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t)$

Règle 2: Si $x_1(t)$ est autour de M_2 Alors $\dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t)$

avec :

$$\Delta A_1 = \Delta A_2 = \begin{bmatrix} -\Delta\sigma & \Delta\sigma & 0 \\ \Delta r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta b \end{bmatrix}$$

$\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta B_1$ et ΔB_2 peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= Ha_1 \Delta a_1(t) Ea_1, & \Delta A_2 &= Ha_2 \Delta a_2(t) Ea_2 \\ \Delta B_1 &= Hb_1 \Delta b_1(t) Eb_1, & \Delta B_2 &= Hb_2 \Delta b_2(t) Eb_2 \end{aligned}$$

avec :

$$Ha_1 = Ha_2 = Hb_1 = Hb_2 = 0.3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta a_1(t) = \Delta a_2(t) = \Delta b_1(t) = \Delta b_2(t) = 0.2 \begin{bmatrix} \mu(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(t) \end{bmatrix}$$

$$Ea_1 = Ea_2 = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 \end{bmatrix}, \quad Eb_1 = Eb_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le but de la synthèse de la commande de cet exemple est de placer les pôles en boucle fermée dans la région LMI définie par : $\lambda = 1.5$, $\rho = 45$, $\vartheta = 1.3 \text{ rad}$. La matrice définie positive et les gains obtenus en utilisant le théorème 3.8 sont :

$$P = \begin{bmatrix} 4.4992 & 0.8695 & 0.0000 \\ 0.8695 & 0.9938 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9036 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [11.7566 \quad 15.9562 \quad -3.6030]$$

$$K_2 = [11.7566 \quad 15.9562 \quad 3.6030]$$

Les figures de 3.7 à 3.9 représentent la trajectoire de phase, les repenses et la commande PDC du système chaotique de Lorenz avec placement de pôles dans des régions LMI. Pour les conditions initiales $x(0) = [10, -10, -10]^T$. La commande est appliquée à $t = 10 \text{ s}$, pour $t \in [0, 10]$ le système est en régime libre. On remarque que le comportement est chaotique avant l'application de la commande et dès l'application de la commande les états du système stabilisent et convergent vers zéro.

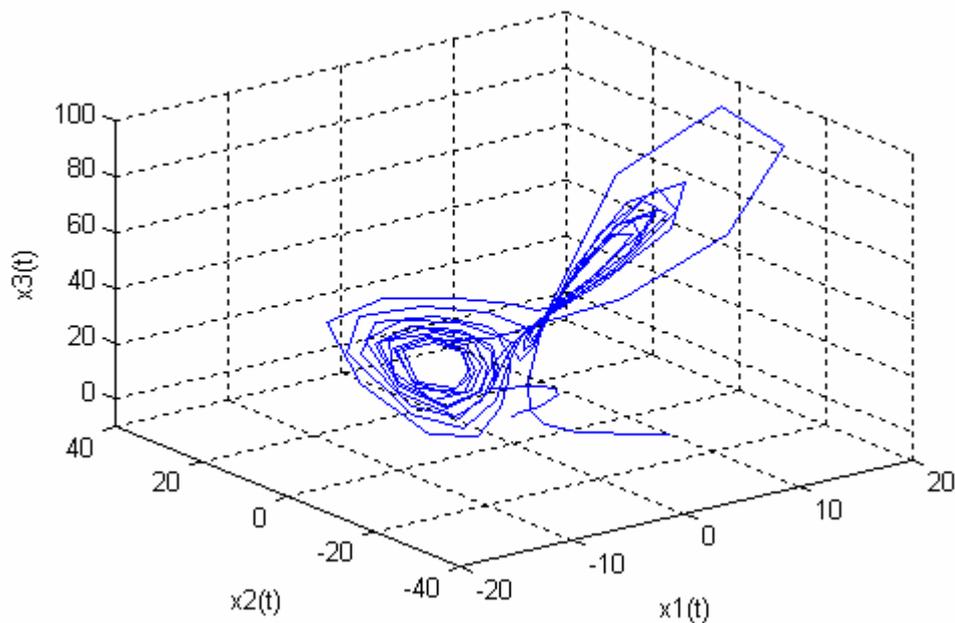


Figure 3.7 : Trajectoire de phase du système chaotique

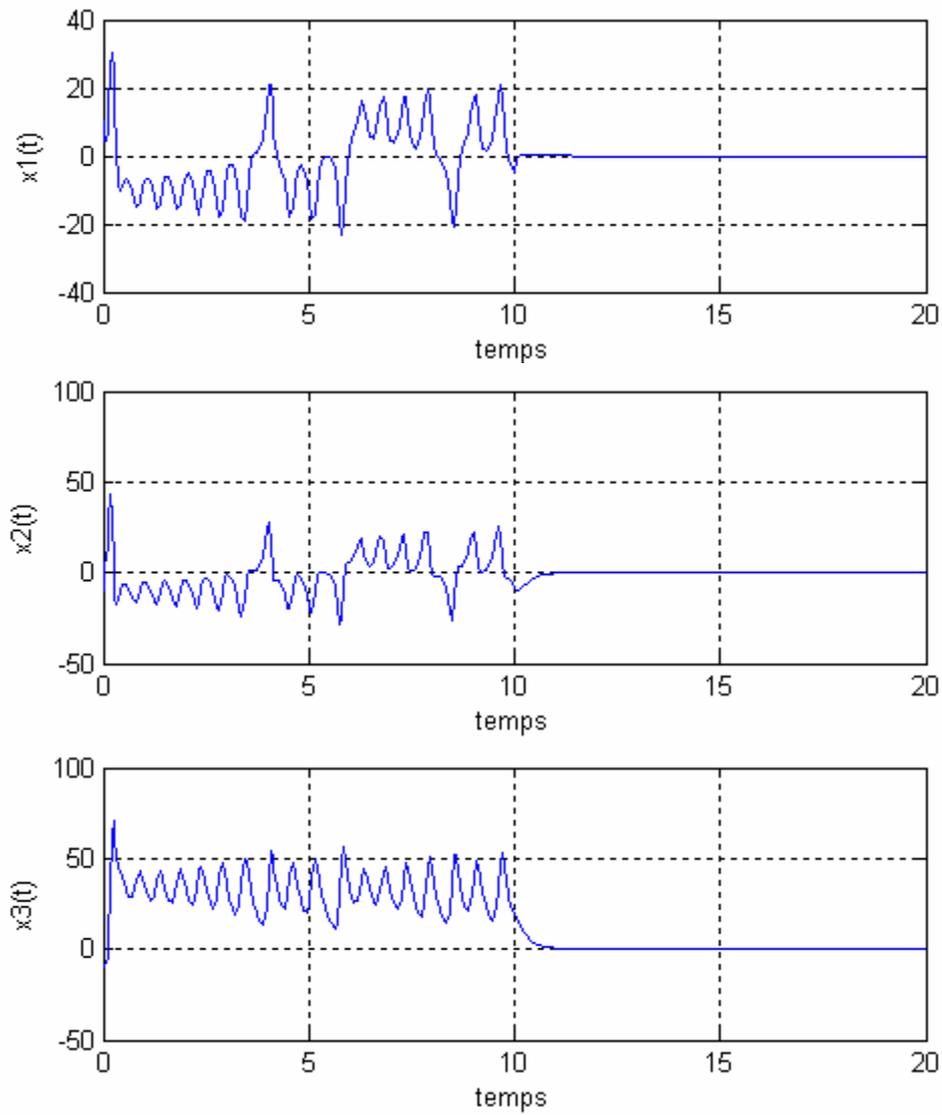


Figure 3.8 : Evolution des états $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$

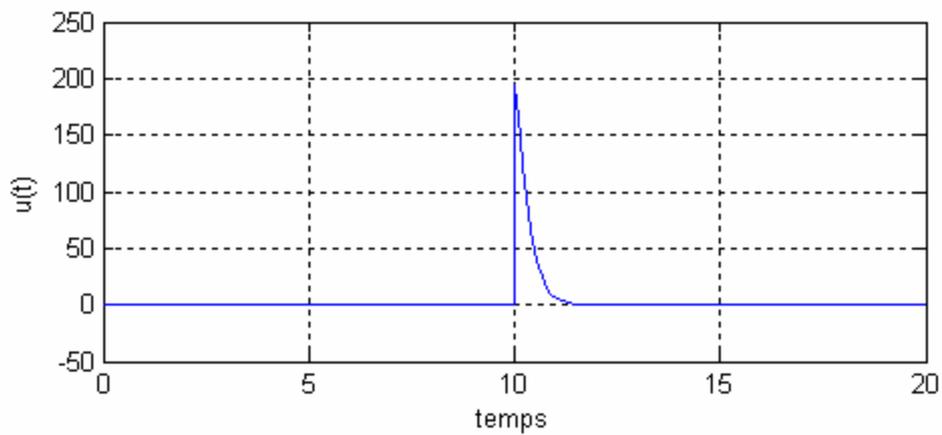


Figure 3.9 : Evolution de la commande $u(t)$

3.7. Commande avec observateur

Le principe de synthèse de commande dans le cas des modèles flous TS incertains est basé sur l'application de la loi de commande (2.32) au système (3.2) avec l'observateur flou (2.69), les variables de prémisses sont supposées mesurables. En considérant la dynamique de l'erreur d'estimation (2.70), le problème revient alors à stabiliser le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i)K_j & (B_i + \Delta B_i)K_j \\ \Delta A_i + L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j & A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Les incertitudes sont décrites de la même façon que précédemment (3.5).

Ainsi, en ce qui concerne la commande avec observateur flou pour les modèles TS incertains et en se plaçant dans le cas où le théorème de séparation [32] est applicable, dans le cas contraire dans [18] on introduit les non linéarités qui dépendent des variables de prémisses non mesurables dans les matrices contenant les incertitudes. Dans [18] une méthode basée sur le couplage des parties commande et observateur est proposée, puis le problème est résolu d'une façon séquentielle grâce à deux problèmes LMI.

Théorème 3.9 [18] : Soient le modèle flou TS incertain (3.2), la loi de commande PDC (2.32) et l'observateur flou (2.69), le système augmenté (3.72) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe des matrices définies positives P_c et P_o , des matrices K_i et L_i , et des scalaires positives $\varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i, \mu_i, \tau$, $i = 1, \dots, r$ tels que :

$$\begin{aligned} \Sigma^+ (P_c A_h - P_c B_h K_h) + 2\varepsilon a_h E a_h^T E a_h + \varepsilon b_h (1 + \tau^{-1}) K_h^T E b_h^T E b_h K_h \\ + \varepsilon c_h E c_h^T E c_h + P_c (\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I) P_c < 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^+ (P_o A_h - P_o L_h C_h) + K_h^T (\varepsilon b_h (1 + \tau) E b_h^T E b_h + \mu_h B_h^T B_h) K_h \\ + P_o (\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \varepsilon c_h^{-1} L_h H c_h H c_h^T L_h^T) P_o < 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Preuve :

Le système augmenté (3.72) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = (\tilde{A}_{hh} + \tilde{\Delta}_{hh}) \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

avec :

$$\tilde{A}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h - B_h K_h & B_h K_h \\ 0 & A_h - L_h C_h \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\Delta}_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta A_h - \Delta B_h K_h & \Delta B_h K_h \\ \Delta A_h + L_h \Delta C_h - \Delta B_h K_h & \Delta B_h K_h \end{bmatrix}$$

Notons que $\tilde{\Delta}_{hh}$ peuvent être écrites sous la forme :

$$\tilde{\Delta}_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_h \\ \Delta B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_h & K_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_h & 0 \end{bmatrix}$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(X(t)) = X^T(t) \tilde{P} X(t) \quad (3.76)$$

avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{P} = \tilde{P}^T = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} > 0 \quad (3.77)$$

La stabilité du système augmenté (3.72) est assurée si la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov est négative. Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \dot{X}^T \tilde{P} X + X^T \tilde{P} \dot{X} \\ &= X^T \left\{ (\tilde{A}_{hh} + \tilde{\Delta}_{hh})^T \tilde{P} + \tilde{P} (\tilde{A}_{hh} + \tilde{\Delta}_{hh}) \right\} X \\ &= X^T \left\{ \tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \begin{bmatrix} \Delta A_h^T & \Delta A_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_h^T \\ K_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_h^T & \Delta B_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta B_h \\ \Delta B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_h & K_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_h^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -L_h \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_h & 0 \end{bmatrix} \right\} X \end{aligned} \quad (3.78)$$

En considérant les bornes d'incertitude (3.4), alors (3.78) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= X^T \left\{ \begin{aligned} &\tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} \\ &+ \begin{bmatrix} Ea_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h^T & \Delta a_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta a_h & 0 \\ \Delta a_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_h^T Eb_h^T \\ K_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h^T & \Delta b_h^T \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h & 0 \\ 0 & Hb_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h \\ \Delta b_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Eb_h K_h & Eb_h K_h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} Ec_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Hc_h^T L_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h Hc_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h & 0 \\ \Delta c_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} X \\ &= X^T \left\{ \tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \mathcal{L}(\Delta A) + \mathcal{L}(\Delta B) + \mathcal{L}(\Delta C) \right\} X \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta A) &= \begin{bmatrix} Ea_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h^T & \Delta a_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta a_h & 0 \\ \Delta a_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}(\Delta B) &= \begin{bmatrix} -K_h^T Eb_h^T \\ K_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h^T & \Delta b_h^T \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h & 0 \\ 0 & Hb_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h \\ \Delta b_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Eb_h K_h & Eb_h K_h \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}(\Delta C) &= \begin{bmatrix} Ec_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Hc_h^T L_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h Hc_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h & 0 \\ \Delta c_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\varepsilon a_h > 0$, $\varepsilon b_h > 0$, $\varepsilon c_h > 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta A) &\leq \varepsilon a_h \begin{bmatrix} 2Ea_h^T \Delta a_h^T \Delta a_h Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Ha_h Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ \mathcal{L}(\Delta B) &\leq \varepsilon b_h \begin{bmatrix} -K_h^T Eb_h^T \\ K_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \Delta b_h^T \Delta b_h \begin{bmatrix} -Eb_h K_h & Eb_h K_h \end{bmatrix} + \varepsilon b_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ \mathcal{L}(\Delta C) &\leq \varepsilon c_h \begin{bmatrix} Ec_h^T \Delta c_h^T \Delta c_h Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -L_h Hc_h Hc_h^T L_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \end{aligned}$$

Alors $\dot{V}(X) < 0$ si :

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \mathcal{L}(\Delta A) + \mathcal{L}(\Delta B) + \mathcal{L}(\Delta C) < 0 \\ \Rightarrow &\tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \varepsilon a_h \begin{bmatrix} 2Ea_h^T Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Ha_h Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ &+ \varepsilon b_h \begin{bmatrix} K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h & -K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h \\ -K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h & K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h \end{bmatrix} + \varepsilon b_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ &+ \varepsilon c_h \begin{bmatrix} Ec_h^T Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -L_h Hc_h Hc_h^T L_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} < 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant la supposition (3.77), la condition (3.79) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} x^T(t)\Omega_c x(t) + e^T(t)\Omega_o e(t) + e^T(t)K_h^T B_h^T P x(t) + x^T(t)P_c B_h K_h e(t) \\ - \varepsilon b_h \left(e^T(t)K_h^T E b_h^T E b_h K_h x(t) + x^T(t)K_h^T E b_h^T E b_h K_h e(t) \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_c = \Sigma^+ (P_c A_h - P_c B_h K_h) + 2\varepsilon a_h E a_h^T E a_h + \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h + \varepsilon c_h E c_h^T E c_h \\ + P_c \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T \right) P_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_o = \Sigma^+ (P_o A_h - P_o L_h C_h) + \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h \\ + P_o \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \varepsilon c_h^{-1} L_h H c_h H c_h^T L_h^T \right) P_o \\ x^T(t)\Omega_c x(t) + e^T(t)\Omega_o e(t) + (P_c B_h K_h e(t))^T x(t) + x^T(t)(P_c B_h K_h e(t)) \\ - \varepsilon b_h \left(\left(K_h^T E b_h^T E b_h K_h e(t) \right)^T x(t) + x^T(t) \left(K_h^T E b_h^T E b_h K_h e(t) \right) \right) < 0 \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\mu_h > 0$, $\tau > 0$, alors (3.80) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} x^T(t) \left(\Omega_c + \mu_h^{-1} P_c^2 + \tau^{-1} \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h \right) x(t) < 0 \\ e^T(t) \left(\Omega_o + \mu_h K_h^T B_h^T B_h K_h + \tau \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h \right) e(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

On peut réécrire (3.81) sous la forme :

$$x^T(t) \left(\begin{aligned} & \left(A_h^T - K_h^T B_h^T \right) P_c + P_c \left(A_h - B_h K_h \right) + 2\varepsilon a_h E a_h^T E a_h + \varepsilon b_h \left(1 + \tau^{-1} \right) K_h^T E b_h^T E b_h K_h \\ & + \varepsilon c_h E c_h^T E c_h + P_c \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I \right) P_c \end{aligned} \right) x(t) < 0 \quad (3.82)$$

$$e^T(t) \left(\begin{aligned} & \left(A_h^T - C_h^T L_h^T \right) P_o + P_o \left(A_h - L_h C_h \right) + K_h^T \left(\varepsilon b_h \left(1 + \tau \right) E b_h^T E b_h + \mu_h B_h^T B_h \right) K_h \\ & + P_o \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \varepsilon c_h^{-1} L_h H c_h H c_h^T L_h^T \right) P_o \end{aligned} \right) e(t) < 0 \quad (3.83)$$

En utilisant la notation (3.7), on obtient les conditions (3.82) et (3.83) correspondants aux conditions du théorème 3.9

Remarquons que les conditions de stabilité dans le théorème 3.9 ne sont pas des LMIs, dans la suite les inégalités (3.73) et (3.74) seront mises sous forme des LMIs.

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.73)**

Après la congruence avec P_c^{-1} , on fait les changements de variables $X_c = P_c^{-1}$ et $M_i = K_i X_c$, $i = 1, \dots, r$, l'inégalité (3.73) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma^+(A_h X_c - B_h M_h) + \varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I + 2\varepsilon a_h X_c E a_h^T E a_h X_c \\ + \varepsilon c_h X_c E c_h^T E c_h X_c + \varepsilon b_h (1 + \tau^{-1}) M_h^T E b_h^T E b_h M_h < 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes : $2\varepsilon a_h X_c E a_h^T E a_h X_c$, $\varepsilon c_h X_c E c_h^T E c_h X_c$ et $\varepsilon b_h (1 + \tau^{-1}) M_h^T E b_h^T E b_h M_h$, l'inégalité (3.84) peut être réécrite sous la forme :

$$\left[\begin{array}{cccc} \Sigma^+(A_h X_c - B_h M_h) + \varepsilon a_h H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I & * & * & * \\ E a_h X_c & -\frac{\varepsilon a_h}{2} I & 0 & 0 \\ E b_h M_h & 0 & -\varepsilon b_h \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right) I & 0 \\ E c_h X_c & 0 & 0 & -2\varepsilon c_h I \end{array} \right] \quad (3.85)$$

Remarque 3.2 : On remarque que l'inégalité (3.85) est une LMI si on fixe les valeurs de τ et μ_i .

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.74)**

L'inégalité (3.74) s'écrit avec le changement de variables $N_i = P_o L_i$, $i = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} \Sigma^+(P_o A_h - N_h C_h) + \varepsilon a_h^{-1} P_o H a_h H a_h^T P_o + \varepsilon b_h^{-1} P_o H b_h H b_h^T P_o + \varepsilon c_h^{-1} N_h H c_h H c_h^T N_h^T \\ + \varepsilon b_h (1 + \tau) K_h^T E b_h^T E b_h K_h + \mu_h K_h^T B_h^T B_h K_h < 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

On applique alors sur l'inégalité (3.86) le complément de Schur pour les termes : $\varepsilon a_h^{-1} P_o H a_h H a_h^T P_o$, $\varepsilon b_h^{-1} P_o H b_h H b_h^T P_o$, $\varepsilon c_h^{-1} N_h H c_h H c_h^T N_h^T$, $\varepsilon b_h (1 + \tau) K_h^T E b_h^T E b_h K_h$ et $\mu_h K_h^T B_h^T B_h K_h$:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \Sigma^+(P_o A_h - N_h C_h) & * & * & * & * & * \\ H a_h^T P_o & -\varepsilon a_h I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H b_h^T P_o & 0 & -\varepsilon b_h I & 0 & 0 & 0 \\ H c_h^T N_h^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_h I & 0 & 0 \\ E b_h K_h & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_h^{-1}}{1 + \tau} I & 0 \\ B_h K_h & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_h^{-1} I \end{array} \right] < 0 \quad (3.87)$$

Remarque 3.3 : On remarque que l'inégalité (3.87) est une LMI si on fixe les valeurs de τ , εb_i et μ_i .

Exemple 3.3 : Pour illustrer les résultats obtenus dans le théorème 3.9 on présente l'exemple du pendule inversé sur un chariot mobile présenté dans l'exemple 2.2 (figure 2.6), avec incertitude ΔA dans la matrice d'état. Alors le système incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

Les règles du modèle :

$$\text{Règle1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + B_1u(t) \\ y_1(t) = C_1x(t) \end{cases}$$

$$\text{Règle2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + B_2u(t) \\ y_2(t) = C_2x(t) \end{cases}$$

Les règles du contrôleur PDC :

$$\text{Règle1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } u(t) = -K_1\hat{x}(t)$$

$$\text{Règle2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } u(t) = -K_2\hat{x}(t)$$

Les règles de l'observateur :

$$\text{Règle1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_1 + \Delta A_1)\hat{x}(t) + B_1u(t) + L_1(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_1(t) = C_1\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{Règle2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_2 + \Delta A_2)\hat{x}(t) + B_2u(t) + L_2(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_2(t) = C_2\hat{x}(t) \end{cases}$$

ΔA_1 et ΔA_2 représentent les incertitudes paramétriques bornées, les éléments de ΔA_1 et ΔA_2 représentent à 30% des valeurs nominales de A_1 et A_2 :

$$Ha_1 = Ha_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$Ea_1 = Ea_2 = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad Eb_1 = Eb_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution des LMIs (3.85) et (3.87) nous a donné :

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.3126 & 0.0598 & 0.0447 & 0.0707 \\ 0.0598 & 0.0116 & 0.0086 & 0.0136 \\ 0.0447 & 0.0086 & 0.0085 & 0.0105 \\ 0.0707 & 0.0136 & 0.0105 & 0.0164 \end{bmatrix}$$

$$P_o = 10^7 \begin{bmatrix} 7.7403 & -0.6015 & -0.2872 & -1.5449 \\ -0.6015 & 0.0873 & 0.0181 & 0.1912 \\ -0.2872 & 0.0181 & 3.3811 & 0.1587 \\ -1.5449 & 0.1912 & 0.1587 & 0.5838 \end{bmatrix}$$

Les gains du contrôleur et de l'observateur sont :

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -1.0610 & -0.2050 & -0.1441 & -0.2524 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} -1.0381 & -0.2007 & -0.1394 & -0.2459 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 14.8985 & 6.1804 \\ 519.3583 & 83.2311 \\ 4.6396 & 0.7001 \\ -119.5064 & -2.7686 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 8.6078 & -5.5449 \\ 136.0979 & -142.5010 \\ -0.3687 & -1.0630 \\ -1.6042 & 28.8714 \end{bmatrix}$$

Les figures de 3.9 à 3.13 représentent les états et les états estimés ($x_1(t), \hat{x}_1(t)$), ($x_2(t), \hat{x}_2(t)$), ($x_3(t), \hat{x}_3(t)$), ($x_4(t), \hat{x}_4(t)$), et la commande $u(t)$ respectivement, avec les conditions initiales $x(0) = [-60, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

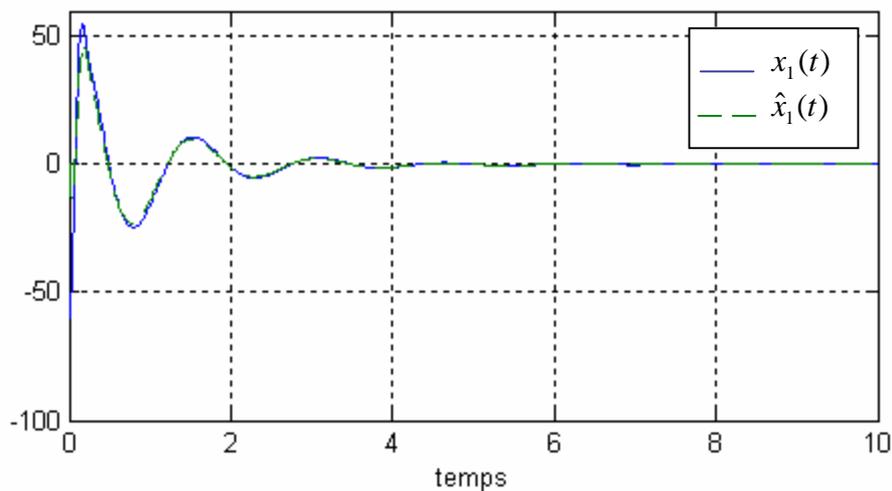


Figure 3.10 : Evolution de l'état $x_1(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_1(t)$

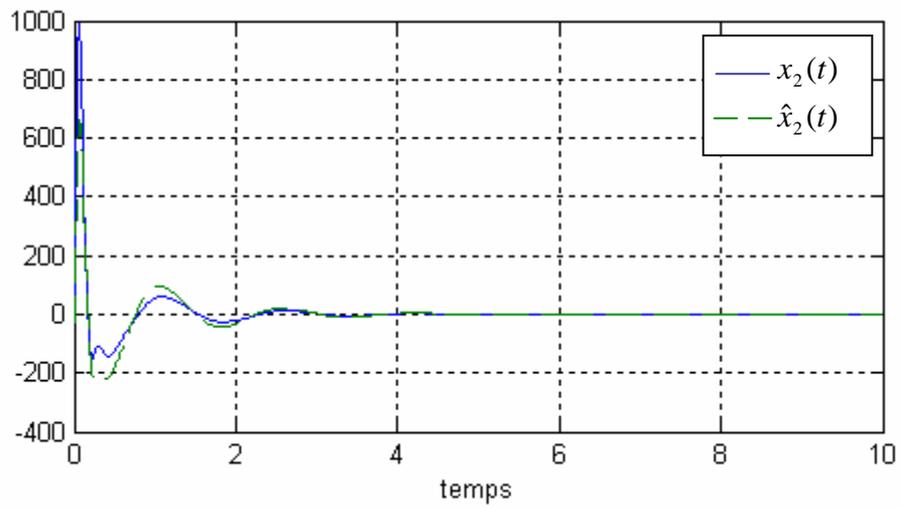


Figure 3.11 : Evolution de l'état $x_2(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_2(t)$

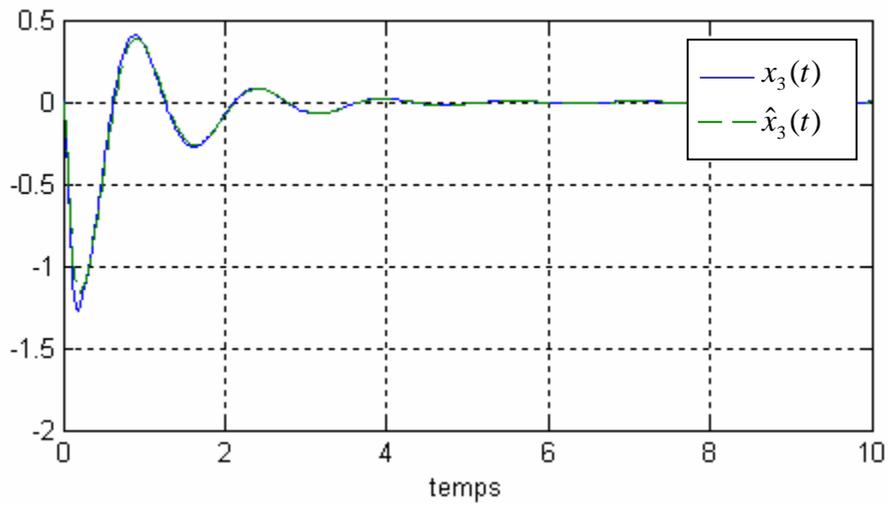


Figure 3.12 : Evolution de l'état $x_3(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_3(t)$

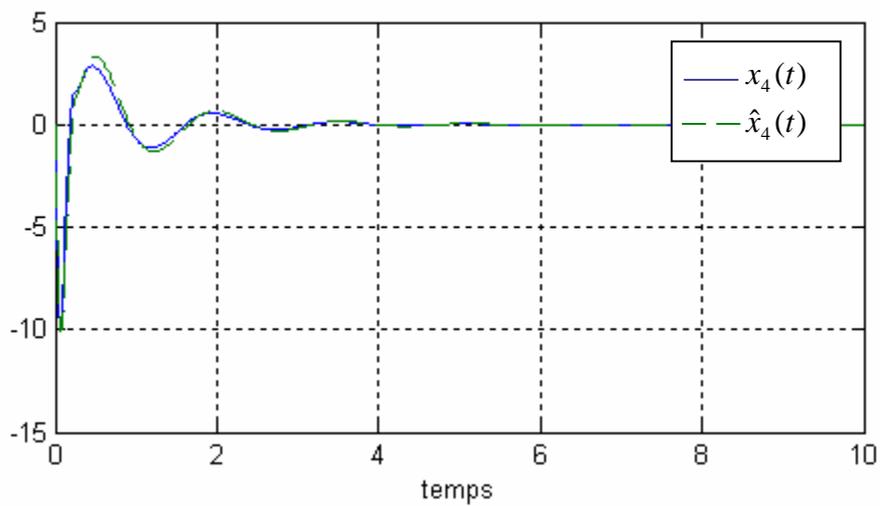
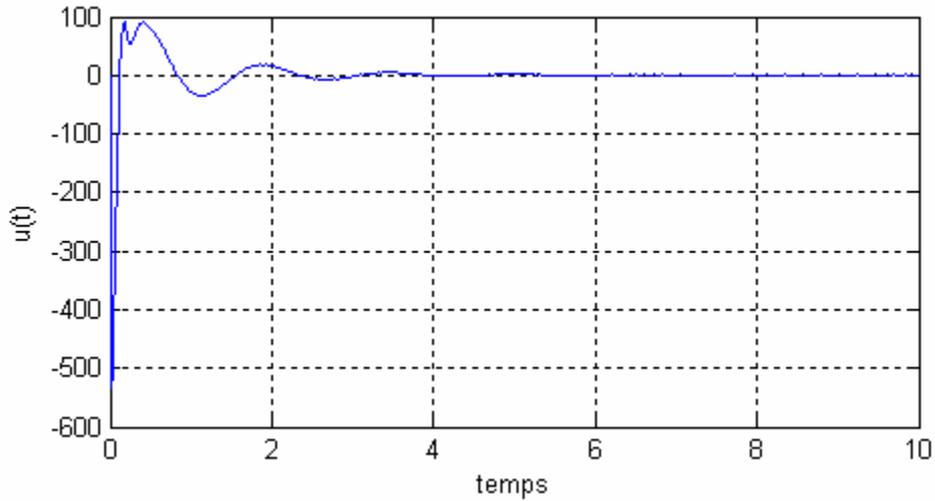


Figure 3.13 : Evolution de l'état $x_4(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_4(t)$

Figure 3.14 : Evolution de la commande $u(t)$

2.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilisation par retour d'état des modèles TS incertains via la loi de commande PDC, puis nous avons présenté les performances de stabilisation à travers le taux de décroissance et le placement des pôles des sous modèles linéaires bouclés, et dans la dernière section nous avons introduit l'observateur flous pour l'estimation des états non mesurables dans le cas des variables de prémisse mesurable.

4

Commande Multi-Contrôleurs Linéaires

4.1. Introduction.....	73
4.2. Représentation d'un modèle flou de Takagi-Sugeno incertain par un ensemble de systèmes incertain.....	73
4.3. Structure de la commande multi-contrôleurs.....	74
4.3.1. Condition de recouvrement de stabilité	76
4.3.2. Nombre de contrôleurs	76
4.4. Stabilisation par retour d'état.....	77
4.4.1. Stabilité globale	80
4.5. Maximisation de la marge de stabilité quadratique.....	85
4.5.1. Marge de stabilité quadratique d'un sous système flou incertain.....	86
4.5.2. Synthèse de loi de commande.....	87
4.6. Stabilisation par retour de sortie	93
4.7. Commande avec observateur	96
4.8. Conclusion	107

4.1. Introduction

Dans les parties précédentes, la loi de commande a été obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales dont le nombre de ces lois de commande locales est égal au nombre de règles. Dans ce chapitre, nous introduisons une autre méthode de la synthèse de commande dite multi-contrôleur pour les modèles flous TS incertain, où la loi de commande globale est obtenue par commutation entre des lois de commande locales.

4.2. Représentation d'un modèle flou de Takagi-Sugeno incertain par un ensemble de systèmes incertains

Pour surmonter les difficultés d'analyse et de commande résultants des interactions non linéaires entre les règles de modèle flou TS (3.2), on peut représenté le modèle flou de TS incertain par un ensemble de systèmes linéaires incertains. L'espace d'état global $S \in R^n$ est peut être décomposé en r sous espaces, chaque sous espace est défini comme :

$$S_l = \{S \mid h_l(z(t)) > 0, \quad l = 1, \dots, r\} \quad (4.1)$$

Ces sous espaces ont les propriétés suivantes :

$$\bigcup_{i=1}^r S_i = S \quad (4.2)$$

Si les règles i et j peuvent être actives en même temps, alors :

$$S_i \cap S_j \neq \emptyset \quad (4.3)$$

Si les règles i et j ne peuvent pas être actives en même temps, alors :

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad (4.4)$$

Dans chaque sous espace, le modèle de TS incertain (3.2) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ A_l + \Delta A_l + \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h_i(z(t))(A_i - A_l + \Delta A_i - \Delta A_l) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ B_l + \Delta B_l + \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h_i(z(t))(B_i - B_l + \Delta B_i - \Delta B_l) \right\} u(t) \\ y(t) = \left\{ C_l + \Delta C_l + \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h_i(z(t))(C_i - C_l + \Delta C_i - \Delta C_l) \right\} x(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

avec :

$$\sum_{R_l \in \mathfrak{R}_l} h_l(z(t)) = 1 - h_l(z(t)) \quad (4.6)$$

et $\mathfrak{R}_l, l = 1, 2, \dots, r$, est un sous ensemble de $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_r\}$ contenant les règles qui peuvent être actives en même temps avec la règle R_l .

$$\mathfrak{R}_l = \{R_l, \exists t, h_l(z(t))h_l(z(t)) \neq 0\} \quad (4.7)$$

On peut réécrire (4.5) sous la forme [17] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ A_l + \Delta A_l + (1 - h_l(z(t))) (\Delta \bar{A}_l + \Delta \tilde{A}_l) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ B_l + \Delta B_l + (1 - h_l(z(t))) (\Delta \bar{B}_l + \Delta \tilde{B}_l) \right\} u(t) \\ y(t) = \left\{ C_l + \Delta C_l + (1 - h_l(z(t))) (\Delta \bar{C}_l + \Delta \tilde{C}_l) \right\} x(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (A_i - A_l), & \Delta \tilde{A}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (\Delta A_i - \Delta A_l) \\ \Delta \bar{B}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (B_i - B_l), & \Delta \tilde{B}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (\Delta B_i - \Delta B_l) \\ \Delta \bar{C}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (C_i - C_l), & \Delta \tilde{C}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (\Delta C_i - \Delta C_l) \end{aligned}$$

et

$$h'_i(z(t)) = \frac{h_i(z(t))}{1 - h_l(z(t))} \quad \text{avec} \quad \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) = 1$$

4.3. Structure de la commande multi-contrôleurs

Dans les deux chapitres précédents, nous avons utilisé un contrôleur flou dont la sortie est obtenue par l'agrégation des lois de commande locales. Dans ce chapitre, on suppose que le système flou TS (3.2) est localement contrôlable, et l'approche utilisé est basée sur l'utilisation d'un contrôleur à chaque région de l'espace d'état, le signal de commande est obtenu par commutation entre les différents contrôleurs comme illustré dans la figure 4.1.

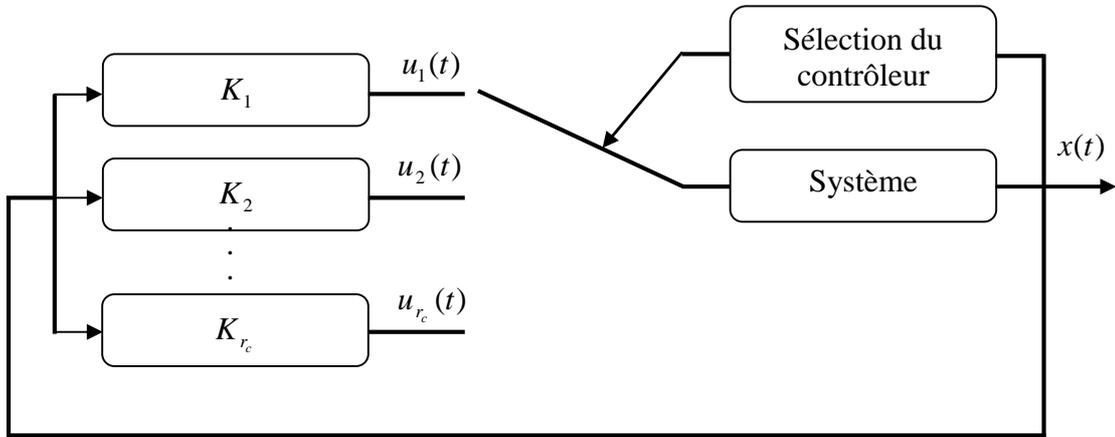


Figure 4.1 : Structure de la commande multi-contrôleurs

La loi de commande multi-contrôleurs peut être décrite par [8]:

$$u(t) = -\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) K_l x(t) \quad (4.9)$$

avec:

$$\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) = 1, \quad \alpha_l(z(t)) = \begin{cases} 1 & x(t) \in S_l^c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.10)$$

avec $S_l^c \in S_l$ est la sous région dans laquelle la commande est générée en utilisant le retour d'état local K_l à concevoir.

Remarque 4.1 : On peut remarquer que (4.9) est une combinaison linéaire de r_c retours d'états linéaires, le nombre de contrôleurs r_c peut être différent du nombre de règles r . A chaque instant, seulement un des retours d'états linéaires est sélectionné pour générer le signal de commande.

4.3.1. Condition de recouvrement de stabilité

Définition 4.1 : soient $S \subseteq R^n$ l'espace d'état et la valeur minimale $\underline{h}_l : \{ \forall t \ h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$,

on définit la sous région S_l comme :

$$S_l = \{ S \mid h_l(z(t)) > 0, \quad l = 1, \dots, r \}$$

et $S_l^s \subseteq S_l$ est :

$$S_l^s = \{ S \mid h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l, \quad l = 1, \dots, r \}$$

On dit que la condition de recouvrement de stabilité [5] est satisfaite si :

$$\bigcup_{l=1}^r S_l^s = S \quad (4.11)$$

4.3.2. Nombre de contrôleurs

On peut distinguer trois cas possibles comme le montre la figure 4.2

- Le premier cas où plusieurs ou toutes les valeurs minimales $\underline{h}_l : l = 1, 2, \dots, r$ sont nulles, le nombre de sous régions qui vérifient la condition de recouvrement de stabilité (4.11) peut être plus petit que celui des règles, dans ce cas le nombre de contrôleurs est inférieur au nombre de règles.
- Le nombre de sous régions nécessaires pour vérifier la condition de recouvrement de stabilité (4.11) est le même que celui des règles ($r_c = r$), dans ce cas le nombre de contrôleurs est égal au nombre de règles.
- la condition de recouvrement de stabilité (4.11) n'est pas satisfaite, ($r_c > r$), le système globale peut être instable, dans ce cas deux solutions sont possibles, soit on utilise un autre modèle flou de Takagi-Sugeno avec un nombre plus élevé de règles, soit on ajoute de nouveaux contrôleurs sans changer de modèle, dans ce cas le nombre de contrôleurs est supérieur au nombre de règles.

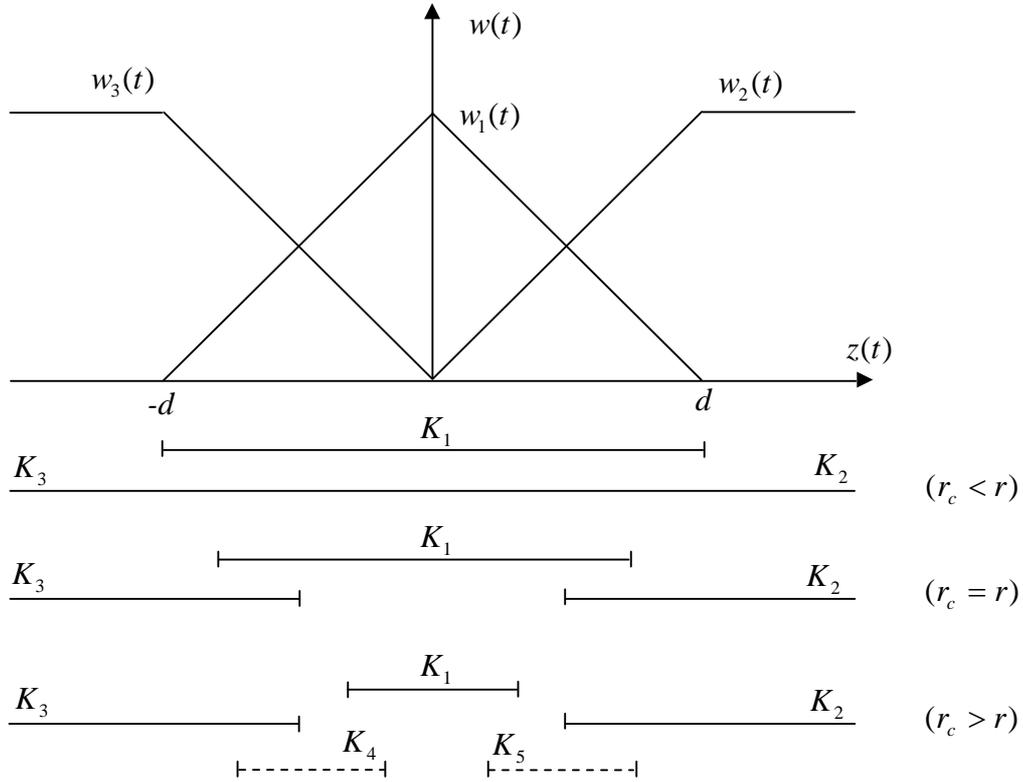


Figure 4.2 : Cas possibles du nombre de contrôleurs

4.4. Stabilisation par retour d'état

On peut réécrire (4.8) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_l + H_l \Delta_l(t) E a_l + (1 - h_l(z(t))) (\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) \bar{E} a_l + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) \tilde{E} a_l) \right\} x(t) + \left\{ B_l + H_l \Delta_l(t) E b_l + (1 - h_l(z(t))) (\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) \bar{E} b_l + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) \tilde{E} b_l) \right\} u(t) \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\Delta A_l(z(t)) \quad \Delta B_l(z(t))] &= H_l \Delta_l(t) [E a_l \quad E b_l] \\ [\bar{\Delta} A_l(z(t)) \quad \bar{\Delta} B_l(z(t))] &= \bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) [\bar{E} a_l \quad \bar{E} b_l] \\ [\tilde{\Delta} A_l(z(t)) \quad \tilde{\Delta} B_l(z(t))] &= \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) [\tilde{E} a_l \quad \tilde{E} b_l] \end{aligned} \quad (4.13)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{H}_l &= [\bar{H}_{l_1} \quad \dots \quad \bar{H}_{l_r}], \quad \bar{\Delta}_l(t) = \text{diag}[h_{l_1} \bar{\Delta}_{l_1}(t) \quad \dots \quad h_{l_r} \bar{\Delta}_{l_r}(t)], \quad \bar{E} a_l = [\bar{E} a_{l_1} \quad \dots \quad \bar{E} a_{l_r}] \\ \tilde{H}_l &= [\tilde{H}_{l_1} \quad \dots \quad \tilde{H}_{l_r}], \quad \tilde{\Delta}_l(t) = \text{diag}[h_{l_1} \tilde{\Delta}_{l_1}(t) \quad \dots \quad h_{l_r} \tilde{\Delta}_{l_r}(t)], \quad \tilde{E} a_l = [\tilde{E} a_{l_1} \quad \dots \quad \tilde{E} a_{l_r}] \\ \bar{E} b_l &= [\bar{E} b_{l_1} \quad \dots \quad \bar{E} b_{l_r}], \quad \tilde{E} b_l = [\tilde{E} b_{l_1} \quad \dots \quad \tilde{E} b_{l_r}] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Avec $\bar{\Delta}_l(t)$ et $\tilde{\Delta}_l(t)$ ayants les mêmes propriétés que (3.5).

En utilisant une loi de commande floue multi-contrôleurs (4.9), pour $x(t) \in S_l$ la boucle fermée du système devient :

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_l - B_l K_l + H_l \Delta_l(t) (E a_l - E b_l K_l) + (1 - h_l(z(t))) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E} a_l - \bar{E} b_l K_l) + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E} a_l - \tilde{E} b_l K_l) \right] \right\} x(t) \quad (4.15)$$

Théorème 4.1 [17] : Le modèle flou TS incertain (4.15) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique définie positive $X_l = P_l^{-1} > 0$, et des scalaires positives $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$, et $0 \leq \underline{h}_l < 1$ tels que l'inégalité matricielle suivante est satisfait :

$$\begin{bmatrix} \phi_l & * & * & * \\ E a_l X_l - E b_l M_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E} a_l X_l - \bar{E} b_l M_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I & 0 \\ \tilde{E} a_l X_l - \tilde{E} b_l M_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

avec :

$$\phi_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1 - \underline{h}_l) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right]$$

et

La valeur minimale $\underline{h}_l : \{ \forall t \ h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$ peut être déterminée par le programme de minimisation suivant :

Minimiser \underline{h}_l
 $X_l, M_l, \varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$

Pour $P_l = P_l^T > 0, \ \varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l > 0, \ l = 1, 2, \dots, r$

LMI (4.16)

Preuve :

Pour prouver ce théorème, on utilise la fonction candidate de Lyapunov :

$$V_l(x(t)) = x^T(t) P_l x(t) \quad (4.17)$$

avec $P_l, \ l = 1, 2, \dots, r$ est une matrice symétrique définie positive.

Pour assurer la stabilité asymptotique formulée dans le théorème 4.1, la dérivée, par rapport au temps de la fonction de Lyapunov (4.17) est strictement négative. Ce qui revient à vérifier que :

$$\dot{x}^T(t)P_l x(t) + x^T(t)P_l \dot{x}(t) < 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x^T(t) \left\{ A_l - B_l K_l + H_l \Delta_l(t) (Ea_l - Eb_l K_l) + (1-h_l) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\}^T P_l x(t) + x^T(t) P_l \left\{ A_l - B_l K_l + H_l \Delta_l(t) (Ea_l - Eb_l K_l) \right. \\ &\quad \left. + (1-h_l) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\} x(t) \\ &= x^T(t) \left\{ (A_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (A_l - B_l K_l) + (Ea_l - Eb_l K_l)^T \Delta_l^T(t) H_l^T P_l \right. \\ &\quad \left. + P_l H_l \Delta_l(t) (Ea_l - Eb_l K_l) + (1-h_l) \left[(\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l)^T \bar{\Delta}_l^T(t) \bar{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_l \bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l)^T \tilde{\Delta}_l^T(t) \tilde{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_l \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\} x(t) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (la propriété (1.34)) et en considérant les bornes (3.5) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq x^T(t) \left\{ (A_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (A_l - B_l K_l) + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_l^{-1} (Ea_l - Eb_l K_l)^T (Ea_l - Eb_l K_l) + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l P_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\varepsilon}_l^{-1} (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l)^T (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + \tilde{\varepsilon}_l P_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{\varepsilon}_l^{-1} (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l)^T (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\} x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) < 0 \Rightarrow (A_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (A_l - B_l K_l) + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l + \varepsilon_l^{-1} (Ea_l - Eb_l K_l)^T (Ea_l - Eb_l K_l) \\ + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l P_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T P_l + \bar{\varepsilon}_l^{-1} (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l)^T (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + \tilde{\varepsilon}_l P_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T P_l \right. \\ \left. + \tilde{\varepsilon}_l^{-1} (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l)^T (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] < 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Après la congruence avec P_l^{-1} , on fait le changement de variable $X_l = P_l^{-1} x$ puis $M_l = K_l X_l$

(4.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right] \\ + \varepsilon_l^{-1} (Ea_l X_l - Eb_l M_l)^T (Ea_l X_l - Eb_l M_l) + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l^{-1} (\bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l)^T (\bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l) \right. \\ \left. + \tilde{\varepsilon}_l^{-1} (\tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l)^T (\tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l) \right] < 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

En appliquant la propriété de complément de Shur sur (4.19), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \phi_l & * & * & * \\ Ea_l X_l - Eb_l M_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1-h_l} I & 0 \\ \tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l I}{1-h_l} I \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\phi_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1-h_l) [\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T]$$

Alors si le système local incertain $(A_l + \Delta A_l, B_l + \Delta B_l)$ est contrôlable, il existe une valeur minimale \underline{h}_l tel que pour $\underline{h}_l \leq h_l(z(t)) \leq 1$ et la LMI (4.16) est toujours faisable.

4.4.1. Stabilité globale

On définit une nouvelle partition de l'espace d'état comme :

$$S_l^c = \{S_l \mid h_l(z(t)) \leq h_l^c\}, \quad h_l^c \geq \underline{h}_l, \quad l \in \iota_c$$

et

$$\bigcup_{l \in \iota_c} S_l^c = S$$

avec $l \in \iota_c = \{1, 2, \dots, r\}$ est un ensemble contenant les indices des sous régions sélectionnées pour former la nouvelle partition de l'espace d'état, $S_l^c \subseteq S_l^s$ est la sous région dans laquelle la commande est générée en utilisant le retour d'état local K_l à concevoir et $h_l^c \geq \underline{h}_l$ définit les frontières de chaque sous région S_l^c associée au retour d'état linéaire K_l :

$$\partial S_l^c = \{S_l^c \mid h_l(z(t)) = h_l^c\}, \quad l \in \iota_c$$

Remarque 4.2 [17] : les valeurs de h_l^c et $l \in \iota_c$ sont choisies tel que la condition de recouvrement de stabilité (4.11) soit vérifiée et n'importe quelles sous régions adjacentes S_i^c et S_j^c vérifient la condition suivante :

$$S_i^c \cap S_j^c = \partial S_i^c \cap \partial S_j^c$$

Soient $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$ les instants pendant lesquels l'état du système atteint la frontière d'une sous région $S_l^c, l \in \iota_c$.

Théorème 4.2 [17] : On suppose que l'état du système est continu pendant les instants de transition $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$:

$$x(\tau_i^-) = x(\tau_i) = x(\tau_i^+)$$

Alors, le système flou TS incertain (4.5) est globalement asymptotiquement stable si le nombre de transition est finie et la condition de recouvrement de stabilité est vérifiée.

A partir le théorème 4.2, le théorème suivant permet de tester la stabilité globale du système flou (4.15).

Théorème 4.3: s'il existe une matrice symétrique définie positive $X_l = P_l^{-1} > 0$, et des scalaires positives $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l, l \in \mathcal{L}_c$, et $\underline{h}_l \leq h_l^c < 1$ tels que :

1- La condition de recouvrement de stabilité est vérifiée:

$$\bigcup_{l \in \mathcal{L}_c} S_l^c = S$$

$$2- \begin{bmatrix} \phi_l & * & * & * \\ Ea_l X_l - Eb_l M_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1-h_l^c} I & 0 \\ \tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l}{1-h_l^c} I \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\phi_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1-h_l^c) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right]$$

3- $P_i \leq P_j$, pour toutes les transitions d'états $x(\tau^-) \in S_j, x(\tau^+) \in S_i$

Alors le modèle flou TS incertain (4.15) est globalement asymptotiquement stable

Exemple 4.1 :

Cette méthode a été appliquée pour la stabilisation du système chaotique de Lorenz de l'exemple 3.2, prenant $w_1(x_1(t))$ et $w_2(x_1(t))$ comme des fonctions d'appartenance figure 4.3.

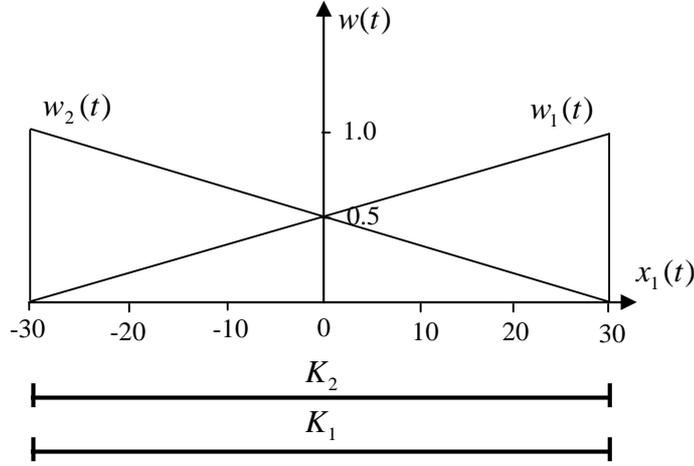


Figure 4.3 : Fonctions d'appartenance

Le système chaotique de Lorenz incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

Règle1: Si $x_1(t)$ est autour de M_1 Alors $\dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est autour de M_2 Alors $\dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t)$

Le modèle flou peut être décomposé en deux sous systèmes :

➤ Sous système 1 :

$$\dot{x}(t) = \{A_1 + \Delta A_1 + (1 - h_1(t))(\Delta \bar{A}_1 + \Delta \tilde{A}_1)\}x(t) + \{B_1 + \Delta B_1 + (1 - h_1(t))(\Delta \bar{B}_1 + \Delta \tilde{B}_1)\}u(t)$$

$$\Delta \bar{A}_1 = h'_2(t)(A_2 - A_1), \quad \Delta \bar{B}_1 = h'_2(t)(B_2 - B_1)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -2.67 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 30 \\ 0 & -30 & -2.67 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \bar{A}_1 = h'_2(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & -60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_1 = \bar{H}_1 \bar{E} a_1 \\ \Delta \bar{B}_1 = \bar{H}_1 \bar{E} b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & -60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} b_1 = 0$$

$$\Delta \tilde{A}_1 = h'_2(t)(\Delta A_2 - \Delta A_1), \quad \Delta \tilde{B}_1 = h'_2(t)(\Delta B_2 - \Delta B_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \tilde{A}_1 = \tilde{H}_1 \tilde{\Delta}_1(t) \tilde{E} a_1 \\ \Delta \tilde{B}_1 = \tilde{H}_1 \tilde{\Delta}_1(t) \tilde{E} b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{H}_1 = 0, \quad \tilde{E} a_1 = 0, \quad \tilde{E} b_1 = 0$$

➤ *Sous système 2 :*

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_2 + \Delta A_2 + (1-h_1(t))(\Delta \bar{A}_2 + \Delta \tilde{A}_2) \right\} x(t) + \left\{ B_2 + \Delta B_2 + (1-h_1(t))(\Delta \bar{B}_2 + \Delta \tilde{B}_2) \right\} u(t)$$

$$\Delta \bar{A}_2 = h_1'(t)(A_1 - A_2), \quad \Delta \bar{B}_2 = h_1'(t)(B_1 - B_2)$$

$$\Delta \bar{A}_2 = h_1'(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \\ 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_2 = \bar{H}_2 \bar{E} a_2 \\ \Delta \bar{B}_2 = \bar{H}_2 \bar{E} b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \\ 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} b_2 = 0$$

$$\Delta \tilde{A}_2 = h_1'(t)(\Delta A_1 - \Delta A_2), \quad \Delta \tilde{B}_2 = h_1'(t)(\Delta B_1 - \Delta B_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \tilde{A}_2 = \tilde{H}_2 \tilde{\Delta}_2(t) \tilde{E} a_2 \\ \Delta \tilde{B}_2 = \tilde{H}_2 \tilde{\Delta}_2(t) \tilde{E} b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{H}_2 = 0, \quad \tilde{E} a_2 = 0, \quad \tilde{E} b_2 = 0$$

Les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation (4.16) :

➤ *Sous système 1 :*

$$\underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = 547.5204, \quad \bar{\varepsilon}_1 = 4.6360 \times 10^4, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = 1.6268 \times 10^4$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4028 & 0.1270 & -0.0351 \\ 0.1270 & 0.0843 & -0.0066 \\ -0.0351 & -0.0066 & 0.0436 \end{bmatrix}, \quad K_1 = [205.6344 \quad 77.9079 \quad -19.1495]$$

➤ *Sous système 2 :*

$$\underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = 547.5204, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 4.6360 \times 10^4, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = 1.6268 \times 10^4$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.4028 & 0.1270 & 0.0351 \\ 0.1270 & 0.0843 & 0.0066 \\ 0.0351 & 0.0066 & 0.0436 \end{bmatrix}, \quad K_2 = [205.6344 \quad 77.9079 \quad 19.1495]$$

Le système chaotique de Lorenz peut être commandé en utilisant un retour d'état seulement $u(t) = K_1 x(t)$ ou $u(t) = K_2 x(t)$. Les figures 4.4 à 4.6 représentent la trajectoire de phase, les états et la commande du système chaotique de Lorenz pour l'état initial $x(0) = [10, -10, -10]^T$. Le temps de simulation est 20s et la commande a été appliquée à $t = 10s$.

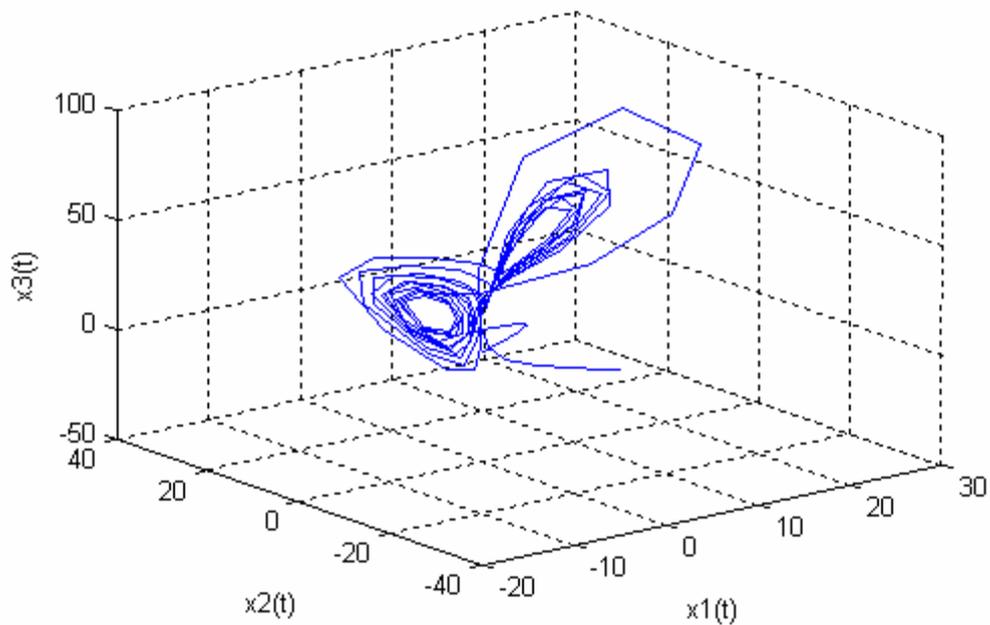


Figure 4.4 : Trajectoire de phase du système chaotique

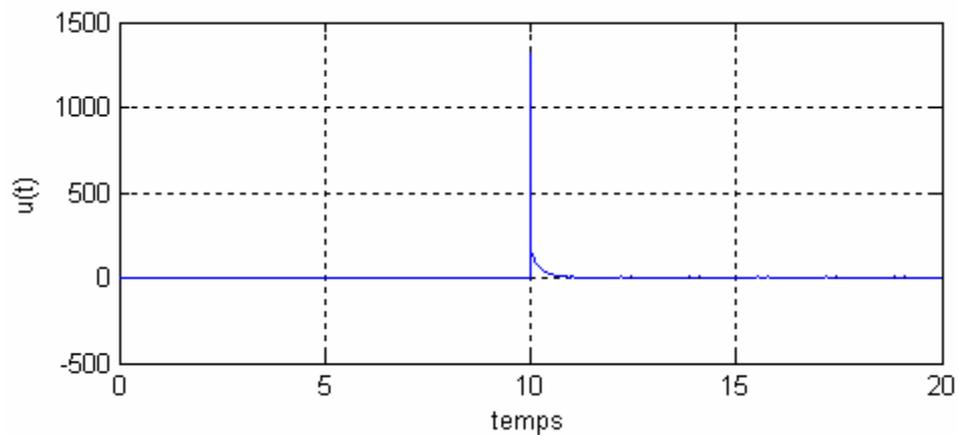


Figure 4.5 : Evolution de la commande $u(t)$

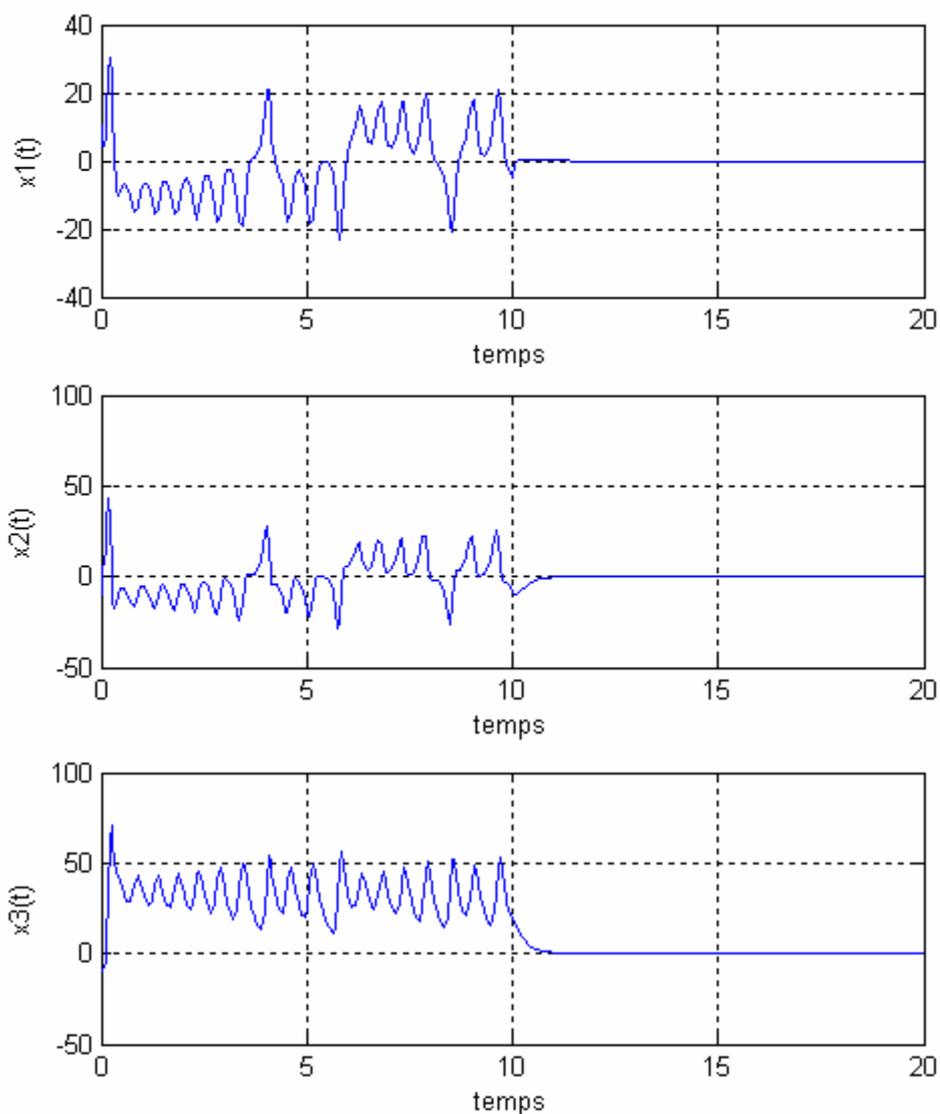


Figure 4.6 : Evolution des états

4.5. Maximisation de la marge de stabilité quadratique

L'idée essentielle proposée dans [17], est de concevoir des contrôleurs locaux assurant la maximisation de la région de stabilité quadratique de chaque modèle local en boucle fermé.

Définition 4.2 [3] : Les marges de stabilité quadratiques donnent une mesure de diffusion d'un ensemble d'incertitudes autour d'un centre dans lequel le système incertain est quadratiquement stable.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t), \quad \Delta A(t) \in h(t)Co\{A_1, A_2, \dots, A_r\} \quad (4.20)$$

Nous définissons la marge de stabilité quadratique comme la plus grande valeur non négative de $h(t)$ pour la quelle il est quadratiquement stable. Cette valeur peut être déterminée par la résolution du problème généralisé de valeur propre GEVP (Generalized Eigen Value Problem) suivant pour P et h :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } h \\ & \text{pour } P = P^T > 0, h \geq 0 \\ & A^T P + PA + h(A_i^T P + PA_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.5.1. Marge de stabilité quadratique d'un sous système flou incertain

Lorsque la règle R_l est active, le système flou incertain non forcé peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left\{ h_l(t)(A_l + \Delta A_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + \Delta A_i) \right\} x(t) \quad (4.22)$$

avec :

$$h'_i(t) = \frac{h_i(t)}{1 - h_l(t)} \quad (4.23)$$

Selon la définition 4.2, la valeur minimale \underline{h}_l pour laquelle le sous système flou (4.22) associé à la règle R_l est quadratiquement stable, peut être déterminée par la résolution du problème GEVP suivant pour P et h :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \underline{h}_l \\ & \text{pour } P_l = P_l^T > 0, \quad 0 \leq \underline{h}_l < 1 \\ & \text{tels que } \underline{h}_l \left\{ (A_l + \Delta A_l)^T P_l + P_l (A_l + \Delta A_l) \right\} + (1 - \underline{h}_l) \left\{ (A_i + \Delta A_i)^T P_l + P_l (A_i + \Delta A_i) \right\} < 0, \\ & R_i \in \mathfrak{R}_l \end{aligned} \quad (4.24)$$

Alors, la marge de stabilité quadratique est donnée par :

$$\bar{\beta}_l = 1 - \underline{h}_l \quad (4.25)$$

Le programme de minimisation (4.24) peut être mis sous la forme [17]:

$$\begin{aligned}
& \text{minimiser } \underline{h}_l \\
& \text{pour } P_l = P_l^T > 0, \quad Q_l > 0, \quad 0 \leq \underline{h}_l < 1 \\
& \text{tels que } (A_l + \Delta A_l)^T P_l + P_l (A_l + \Delta A_l) < -Q_l \\
& \quad (A_l + \Delta A_l)^T P_l + P_l (A_l + \Delta A_l) \leq \frac{\underline{h}_l}{1 - \underline{h}_l} Q_l, \quad R_l \in \mathfrak{R}_l
\end{aligned} \tag{4.26}$$

avec $Q_l \in R^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive.

4.5.2. Synthèse de loi de commande

Le sous système flou incertain associé à la règle l du système flou TS incertain (3.2), peut être représenté comme :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = & \left\{ h_l(t)(A_l + \Delta A_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + \Delta A_i) \right\} x(t) \\
& + \left\{ h_l(t)(B_l + \Delta B_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(B_i + \Delta B_i) \right\} u(t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Théorème 4.4 : *S'il existe des matrices symétriques définies positives $X_l = X_l^T > 0$, $Y_l = Y_l^T > 0$, des scalaires positifs $\varepsilon_{li} > 0$, $R_l \in \mathfrak{R}_l$, et un scalaire $\mu_l > 0$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix}
\underline{u} + Y_l & * & * \\
\varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\
Ea_l X_l - Eb_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I
\end{bmatrix} < 0 \tag{4.28}$$

$$\begin{bmatrix}
\underline{u}_i - \mu_l Y_l & * & * \\
\varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\
Ea_i X_l - Eb_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I
\end{bmatrix} \leq 0, \quad R_l \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \tag{4.29}$$

$$\underline{u}_i = X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l$$

alors le sous système flou est quadratiquement stable et le retour d'état local est donné par :

$$K_l = M_l X_l^{-1} \tag{4.30}$$

Preuve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x^T(t)P_l x(t) \quad (4.31)$$

La dérivée de la fonction (4.29) est alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T(t) \left\{ h_l \left([A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l] \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - h_l) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left([A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i]^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_l [A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i] \right) \right\} x(t) \\ &= x^T(t) \left\{ \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left\{ h_l \left([A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l] \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - h_l) \left([A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i]^T P_l + P_l [A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i] \right) \right\} \right\} x(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le système est stable s'il existe P_l telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &= A_l^T P_l + P_l A_l + \Delta A_l^T P_l + P_l \Delta A_l - K_l^T B_l^T P_l - P_l B_l K_l - K_l^T \Delta B_l^T P_l - P_l \Delta B_l K_l \\ &\quad + \frac{1-h_l}{h_l} \left(A_i^T P_l + P_l A_i + \Delta A_i^T P_l + P_l \Delta A_i - K_l^T B_i^T P_l - P_l B_i K_l - K_l^T \Delta B_i^T P_l - P_l \Delta B_i K_l \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &= [A_l - B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l - B_l K_l] + [E a_l - E b_l K_l]^T \Delta_l^T(t) H_l^T P_l \\ &\quad + P_l H_l \Delta_l(t) [E a_l - E b_l K_l] + \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ [A_i - B_i K_i]^T P_l + P_l [A_i - B_i K_i] \right. \\ &\quad \left. + [E a_i - E b_i K_i]^T \Delta_i^T(t) H_i^T P_l + P_l H_i \Delta_i(t) [E a_i - E b_i K_i] \right\} < 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &\leq [A_l - B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l - B_l K_l] + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l \\ &\quad + \varepsilon_l^{-1} [E a_l - E b_l K_l]^T \Delta_l^T(t) \Delta_l(t) [E a_l - E b_l K_l] + \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ [A_i - B_i K_i]^T P_l \right. \\ &\quad \left. + P_l [A_i - B_i K_i] + \varepsilon_{li} P_l H_i H_i^T P_l + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i - E b_i K_i]^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) [E a_i - E b_i K_i] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Puisque $\Delta_l^T(t) \Delta_l(t) < I$, (4.32) sera :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &\leq [A_l - B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l - B_l K_l] + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l \\ &\quad + \varepsilon_l^{-1} [E a_l - E b_l K_l]^T H_l^T [E a_l - E b_l K_l] + \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ [A_i - B_i K_i]^T P_l + P_l [A_i - B_i K_i] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{li} P_l H_i H_i^T P_l + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i - E b_i K_i]^T [E a_i - E b_i K_i] \right\} \end{aligned}$$

Après la congruence avec P_l^{-1} , et le changement de variable $X_l = P^{-1}$ et $M_l = K_l X_l$, on obtient :

$$\begin{aligned} & X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + \varepsilon_l^{-1} [E a_l X_l - E b_l M_l]^T [E a_l X_l - E b_l M_l] \\ & + \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l + \varepsilon_{li} H_i H_i^T \right. \\ & \left. + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i X_l - E b_i M_l]^T [E a_i X_l - E b_i M_l] \right\} < 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

La supposition que :

$$\begin{aligned} & X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T \\ & + \varepsilon_l^{-1} [E a_l X_l - E b_l M_l]^T [E a_l X_l - E b_l M_l] + Y_l < 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l + \varepsilon_{li} H_i H_i^T \right. \\ & \left. + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i X_l - E b_i M_l]^T [E a_i X_l - E b_i M_l] \right\} \leq Y_l \end{aligned} \quad (4.37)$$

On pose :

$$\mu_l = \frac{1-h_l}{h_l} \Rightarrow h_l = \frac{\mu_l}{1+\mu_l} \quad (4.38)$$

alors (4.37) devient :

$$\begin{aligned} & X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l + \varepsilon_{li} H_i H_i^T \\ & + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i X_l - E b_i M_l]^T [E a_i X_l - E b_i M_l] - \mu_l Y_l \leq 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

En appliquant le complément de Schur à (4.36) et (4.39), on obtient les LMIs données dans le théorème 4.2 :

$$\begin{bmatrix} X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + Y_l & * & * \\ \varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\ E a_l X_l - E b_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l - \mu_l Y_l & * & * \\ \varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\ E a_i X_l - E b_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} \leq 0, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \quad (4.41)$$

Pour déterminer le gain K_l de façon à maximiser la marge de stabilité quadratique du sous système flou incertain (4.27), on résout le programme de minimisation suivant :

Minimiser μ_l

sujet à $X_l = X_l^T > 0, Y_l > 0, \varepsilon_l > 0, \varepsilon_i > 0, \mu_l > 0$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_l + Y_l & * & * \\ \varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\ E a_l X_l - E b_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mu_l - \mu_l Y_l & * & * \\ \varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\ E a_i X_l - E b_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} \leq 0, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \\ & \mu_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l \end{aligned} \quad (4.42)$$

Le retour d'état local donné par :

$$K_l = M_l X_l^{-1}$$

Théorème 4.5: s'il existe des matrices symétriques définies positives $X_l = P_l^{-1} > 0$,

$Y_l = Y_l^T > 0$ et des scalaires positives $\varepsilon_{ii} > 0, l \in \iota_c$ et $\underline{h}_l \leq h_l^c < 1$ tels que :

1- La condition de recouvrement de stabilité est vérifiée:

$$\bigcup_{l \in \iota_c} S_l^c = S$$

2-

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_l + Y_l & * & * \\ \varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\ E a_l X_l - E b_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mu_l - \mu_l Y_l & * & * \\ \varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\ E a_i X_l - E b_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} \leq 0, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \end{aligned}$$

avec :

$$\mu_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l$$

et

$$h_l^c \geq \frac{\underline{\mu}_l}{1 + \underline{\mu}_l}$$

3- $P_i \leq P_j$, pour toutes les transitions d'états $x(\tau^-) \in S_j, x(\tau^+) \in S_i$

Alors le modèle flou TS incertain (4.15) est globalement asymptotiquement stable

Exemple 4.2 :

Soit l'exemple du système chaotique de Lorenz donné dans la section précédente, les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation (4.42) :

➤ Sous système 1 :

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_1 = 0 &\Rightarrow \underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon_{11} = 2,0058, \quad \varepsilon_{12} = 1.9030 \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 215.1648 & 3.9660 & -0.1592 \\ 3.9660 & 1.6742 & -0.0039 \\ -0.1592 & -0.0039 & 1.6063 \end{bmatrix} \\ K_1 &= [241.5945 \quad 14.7360 \quad -0.2955] \end{aligned}$$

➤ Sous système 2 :

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_2 = 0 &\Rightarrow \underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon_{21} = 2,0058, \quad \varepsilon_{22} = 1.9030 \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 215.1648 & 3.9660 & 0.1592 \\ 3.9660 & 1.6742 & 0.0039 \\ 0.1592 & 0.0039 & 1.6063 \end{bmatrix} \\ K_2 &= [241.5945 \quad 14.7360 \quad 0.2955] \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues $\underline{h}_1 = \underline{h}_2 = 0$, impliquent que le système chaotique de Lorenz peut être commandé en utilisant seulement un retour d'état $u(t) = K_1 x(t)$ ou $u(t) = K_2 x(t)$. Les figures de 4.6 et 4.7 représentent la trajectoire de phase et l'évolution des états pour l'état initial $x(0) = [10, -10, -10]^T$, le temps de simulation est 20s et l'application de la commande à $t = 10s$.

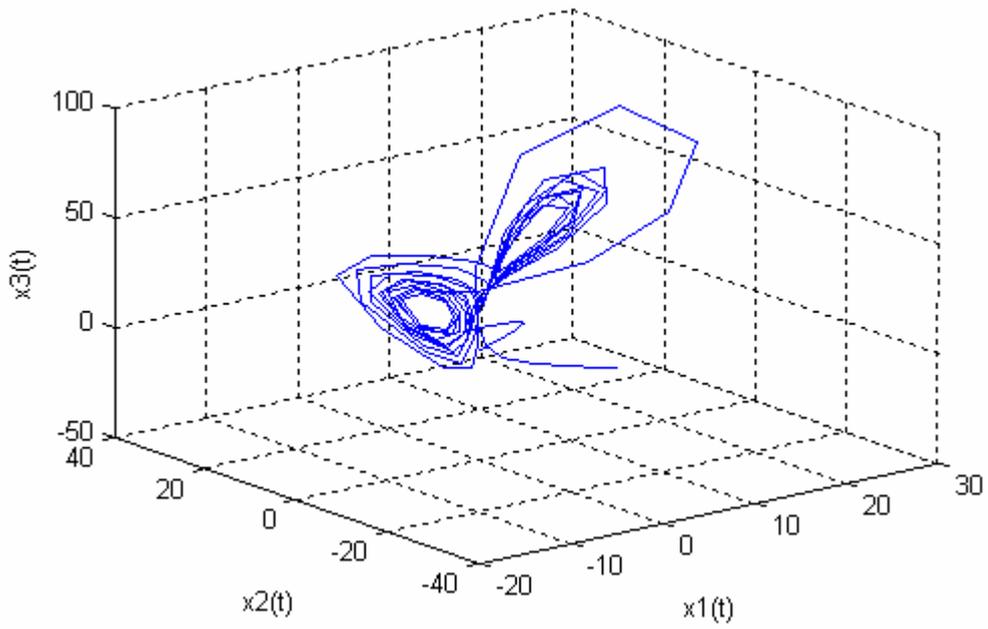


Figure 4.7 : Trajectoire de phase du système chaotique

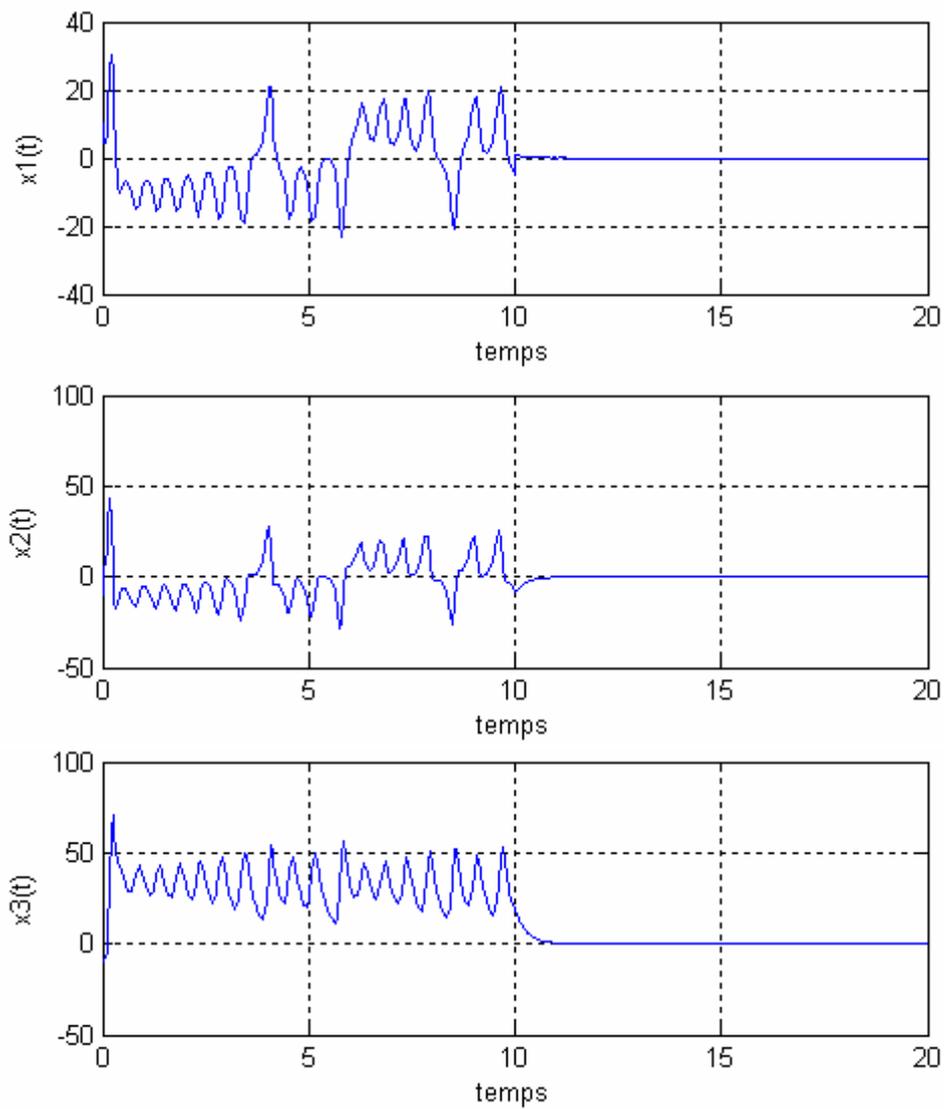


Figure 4.8 : Evolution des états

4.6. Stabilisation par retour de sortie

La commande par retour d'état suppose la disponibilité complète des variables d'état du système, ce qui n'est pas toujours possible. Nous sommes donc amenés à considérer des problèmes où la commande dépend uniquement de la sortie mesurée du système. Dans ce cas, la loi de commande multi-contrôleurs peut être donnée par :

$$u(t) = -\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) K_l y(t) = -\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) K_l C x(t) \quad (4.43)$$

avec:

$$\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) = 1, \quad \alpha_l(z(t)) = \begin{cases} 1 & x(t) \in S_l^c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(4.12) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_l - B_l K_l C + H_l \Delta_l(t) (E a_l - E b_l K_l C) + (1 - h_l(z(t))) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E} a_l - \bar{E} b_l K_l C) + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E} a_l - \tilde{E} b_l K_l C) \right] \right\} x(t) \quad (4.44)$$

Théorème 4.6 : *Le modèle flou TS incertain (4.44) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique définie positive $X_l = P_l^{-1}$, une matrice $W_l = K_l C X_l$, et des scalaires positives $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$, et $0 \leq \underline{h}_l < 1$ tels que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_l & * & * & * \\ E a_l X_l - E b_l W_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E} a_l X_l - \bar{E} b_l W_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I & 0 \\ \tilde{E} a_l X_l - \tilde{E} b_l W_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.45)$$

avec :

$$\Lambda_l = X_l A_l^T + A_l X_l - W_l^T B_l^T - B_l W_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1 - \underline{h}_l) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right]$$

et

La valeur minimale $\underline{h}_l : \{ \forall t h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$ peut être déterminée par le programme de minimisation suivant :

$$\text{Minimiser } \underline{h}_l \\ X_l, W_l, \varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$$

Pour $P_l = P_l^T > 0$, $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l > 0$, $l = 1, 2, \dots, r$

LMI (4.45)

Exemple 4.3 :

Considérons l'exemple du système chaotique de Lorenz illustré dans l'exemple 3.2, on suppose que seul l'état $x_2(t)$ est mesurable, Le système chaotique de Lorenz incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

$$\text{R\`egle 1: Si } x_1(t) \text{ est autour de } M_1 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t) \\ y(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

$$\text{R\`egle 2: Si } x_1(t) \text{ est autour de } M_2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

avec $A_1, A_2, B_1, B_2, \Delta A_1, \Delta A_2, \Delta B_1$ et ΔB_2 sont données dans l'exemple 3.2 et

$$C_1 = C_2 = [0 \ 1 \ 0]$$

Les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation (4.45):

➤ Sous système 1 :

$$\underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = 18.0519, \quad \bar{\varepsilon}_1 = 2.9803 \times 10^3, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = 641.0313$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6.2912 & 1.1184 & -0.5179 \\ 1.1184 & 0.9830 & -0.0587 \\ -0.5179 & -0.0587 & 0.7802 \end{bmatrix}, \quad K_1 = [13.5415 \ 15.3454 \ -2.0036]$$

➤ Sous système 2 :

$$\underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = 18.0519, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 2.9803 \times 10^3, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = 641.0313$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 6.2912 & 1.1184 & 0.5179 \\ 1.1184 & 0.9830 & 0.0587 \\ 0.5179 & 0.0587 & 0.7802 \end{bmatrix}, \quad K_2 = [13.5415 \ 15.3454 \ 2.0036]$$

Les figures 4.9 et 4.10 représentent la trajectoire de phase et les états du système chaotique de Lorenz pour l'état initial $x(0) = [10, -10, -10]^T$, le temps de simulation est 20s et l'application de la commande à $t = 10$ s.

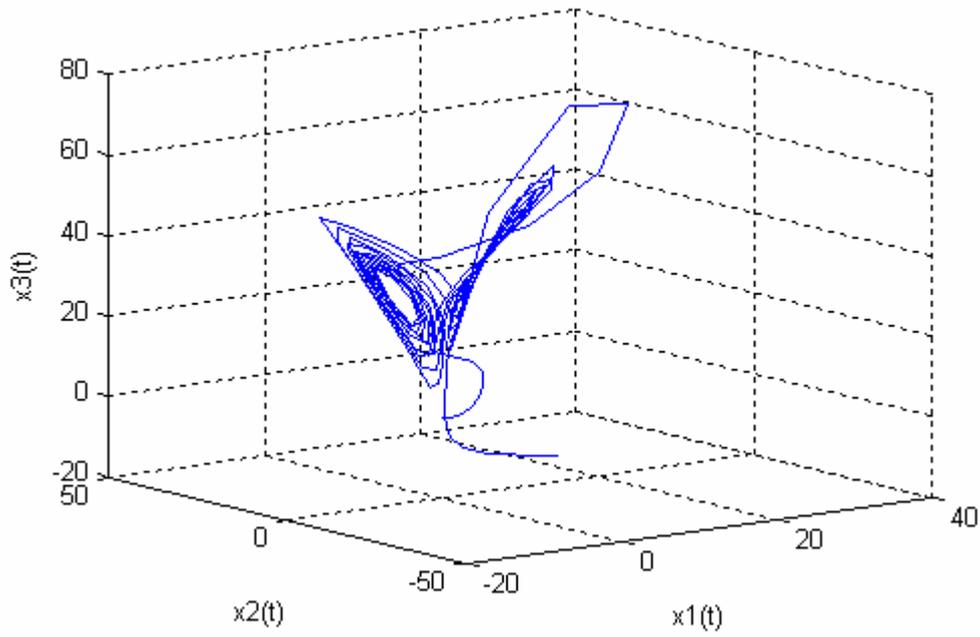


Figure 4.9: Trajectoire de phase du système chaotique de Lorenz

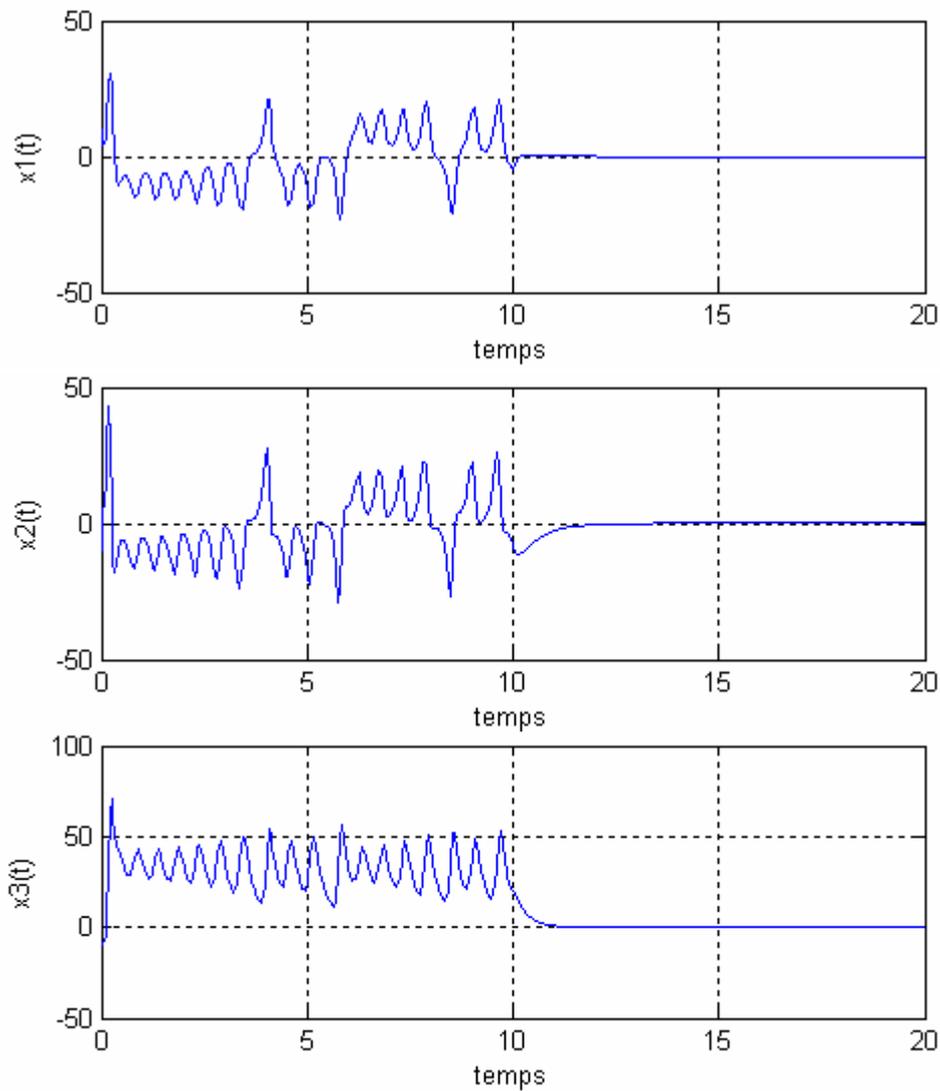


Figure 4.10 : Evolution des états

4.7. Commande avec observateur

La dynamique globale du système avec observateur peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ h_l(t)(A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + \Delta A_i - B_i K_l - \Delta B_i K_l) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ h_l(t)(B_l + \Delta B_l) K_l + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(B_i + \Delta B_i) K_l \right\} e(t) \\ \dot{e}(t) = \left\{ h_l(t)(\Delta A_l - \Delta B_l K_l + L_l \Delta C_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(\Delta A_i - \Delta B_i K_l + L_l \Delta C_i) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ h_l(t)(A_l + L_l C_l + \Delta B_l K_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + L_l C_i + \Delta B_i K_l) \right\} e(t) \end{cases} \quad (4.46)$$

avec : L_l est le gain d'observateur local.

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est l'erreur d'observation

La théorème 4.7 permet de déterminer les contrôleur K_l et les gains d'observateur locaux L_l de façon à maximiser la marge de stabilité quadratique du sous système flou incertain avec observateur (4.46) :

Théorème 4.7 : *Le modèle flou TS incertain complet (4.46) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices symétriques définies positives $X_{lc} = P_{lc}^{-1}$, $X_{lo} = P_{lo}^{-1}$, Y_{lc} et Y_{lo} , et des matrices $M_l = K_l X_{lc}$ et $N_l = P_{lo} L_l$, et des scalaires positives $\varepsilon a_l, \varepsilon b_l, \varepsilon c_l, \varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i, \xi_l, \tau, \mu_l$ tels que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \Sigma^+(A_l X_{lc} - B_l M_l) + \varepsilon a_l H a_l H a_l^T \\ + \varepsilon b_l H b_l H b_l^T + \xi_l^{-1} I + Y_{lc} \end{array} \right) & * & * & * \\ E a_l X_{lc} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 \\ E b_l M_l & 0 & -\varepsilon b_l \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right) I & 0 \\ E c_l X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.47)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_l - N_l C_l) + Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ Ha_l^T P_{lo} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Hb_l^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_l I & 0 & 0 & 0 \\ Hc_l^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I & 0 & 0 \\ Eb_l K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_l^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_l K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_l^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\Sigma^+(A_i X_{lc} - B_i M_l) + \varepsilon a_i Ha_i Ha_i^T \right) + \varepsilon b_i Hb_i Hb_i^T + \xi_i^{-1} I - \mu_l Y_{lc} & * & * & * \\ Ea_i X_{lc} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 \\ Eb_i M_l & 0 & -\varepsilon b_i \left(\frac{\tau}{\tau+1} \right) I & 0 \\ Ec_i X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_i - N_l C_i) - \mu_l Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ Ha_i^T P_{lo} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Hb_i^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_i I & 0 & 0 & 0 \\ Hc_i^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I & 0 & 0 \\ Eb_i K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_i^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_i K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_i^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l \quad (4.50)$$

et

La valeur minimale $\underline{h}_l = \frac{\underline{\mu}_l}{1 + \underline{\mu}_l} : \{ \forall t \ h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$ peut être déterminée par le

programme de minimisation suivant :

Minimiser \underline{h}_l
 $X_l, Y_l, \varepsilon a, \varepsilon b, \varepsilon c, \xi, \tau$

Pour les matrices symétriques définies positives $X_{lc}, X_{lo}, Y_{lc}, Y_{lo}$ et des scalaires positives

$\varepsilon a_l, \varepsilon b_l, \varepsilon c_l, \varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i, \xi_l, \tau,$

LMI (4.47)-(4.50)

Le retour d'état et le gain d'observateur local sont donnés par :

$$K_l = M_l X_{lc}^{-1} \quad (4.51)$$

$$L_l = X_{lo} N_l \quad (4.52)$$

Preuve :

Le système augmenté (4.46) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \left\{ h_l(t)(A_{ll} + \Delta_{ll}) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li} + \Delta_{li}) \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

avec :

$$A_{ll} = \begin{bmatrix} A_l - B_l K_l & B_l K_l \\ 0 & A_l + L_l C_l \end{bmatrix}, \quad \Delta_{ll} = \begin{bmatrix} \Delta A_l - \Delta B_l K_l & \Delta B_l K_l \\ \Delta A_l - \Delta B_l K_l + L_l \Delta C_l & \Delta B_l K_l \end{bmatrix}$$

$$A_{li} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_l & B_i K_l \\ 0 & A_i + L_l C_i \end{bmatrix}, \quad \Delta_{li} = \begin{bmatrix} \Delta A_i - \Delta B_i K_l & \Delta B_i K_l \\ \Delta A_i - \Delta B_i K_l + L_l \Delta C_i & \Delta B_i K_l \end{bmatrix}$$

On peut écrire Δ_{ll} et Δ_{li} sous la forme :

$$\Delta_{ll} = \begin{bmatrix} \Delta A_l & 0 \\ \Delta A_l & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_l \\ \Delta B_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_l & K_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_l & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{li} = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ \Delta A_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_i \\ \Delta B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_l & K_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_i & 0 \end{bmatrix}$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(X(t)) = X^T(t) \tilde{P}_l X(t)$$

avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{P}_l = \tilde{P}_l^T = \begin{bmatrix} P_{lc} & 0 \\ 0 & P_{lo} \end{bmatrix} > 0$$

La stabilité du système augmenté (4.45) est assurée si la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov est négative, alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \dot{X}^T \tilde{P}_l X + X^T \tilde{P}_l \dot{X} \\ &= X^T \left\{ h_l(t) \Sigma^+((A_{ll} + \Delta_{ll}) \tilde{P}_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \Sigma^+((A_{li} + \Delta_{li}) \tilde{P}_l) \right\} X \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Sigma^+((A_{ll} + \Delta_{ll}) \tilde{P}_l) &= (A_{ll} + \Delta_{ll})^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l (A_{ll} + \Delta_{ll}) \\ \Sigma^+((A_{li} + \Delta_{li}) \tilde{P}_l) &= (A_{li} + \Delta_{li})^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l (A_{li} + \Delta_{li}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(X) &= X^T \left\{ \begin{aligned} &h_l(t)(A_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{li}) \\ &+ h_l(t)(\Delta_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \Delta_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(\Delta_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \Delta_{li}) \end{aligned} \right\} X \\
&= X^T \left\{ \begin{aligned} &h_l(t)(A_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{li}) \\ &+ h_l(t) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta A_l^T & \Delta A_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta A_l & 0 \\ \Delta A_l & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_l^T \\ K_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_l^T & \Delta B_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta B_l \\ \Delta B_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_l & K_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_l \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_l & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\ &+ (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta A_i^T & \Delta A_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ \Delta A_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_i^T \\ K_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_i^T & \Delta B_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta B_i \\ \Delta B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_i & K_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_i \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} X \quad (4.54)
\end{aligned}$$

En considérant les bornes d'incertitude (3.4), alors (4.54) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(X) &= X^T \left\{ \begin{aligned} &h_l(t)(A_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{li}) \\ &+ h_l(t) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} E a_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l^T & \Delta a_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l^T & \Delta b_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l & 0 \\ 0 & H b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l \\ \Delta b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_l K_l & E b_l K_l \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} E c_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l H c_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\ &+ (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} E a_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i^T & \Delta a_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_i^T E b_i^T \\ K_i^T E b_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i^T & \Delta b_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_i & 0 \\ 0 & H b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i \\ \Delta b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_i K_i & E b_i K_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E c_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_i^T L_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_i H c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} X
\end{aligned}$$

$$\dot{V}(X) = X^T \left\{ \begin{array}{l} h_l(t)\mathcal{L}_l(A_l) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathcal{R}_l} h'_i(z(t))\mathcal{L}_{li}(A_{li}) \\ + h_l(t)\{\mathcal{L}_l(\Delta A) + \mathcal{L}_l(\Delta B) + \mathcal{L}_l(\Delta C)\} \\ + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathcal{R}_l} h'_i(z(t))\{\mathcal{L}_{li}(\Delta A) + \mathcal{L}_{li}(\Delta B) + \mathcal{L}_{li}(\Delta C)\} \end{array} \right\} X$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l(A_l) &= \begin{bmatrix} A_l^T - K_l^T B_l^T & 0 \\ K_l^T B_l^T & A_l^T - C_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} A_l - B_l K_l & B_l K_l \\ 0 & A_l - L_l C_l \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_{li}(A_{li}) &= \begin{bmatrix} A_i^T - K_l^T B_i^T & 0 \\ K_l^T B_i^T & A_i^T - C_i^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} A_i - B_i K_l & B_i K_l \\ 0 & A_i - L_l C_i \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_l(\Delta A) &= \begin{bmatrix} E a_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l^T & \Delta a_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_l(\Delta B) &= \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l^T & \Delta b_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l & 0 \\ 0 & H b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l \\ \Delta b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_l K_l & E b_l K_l \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_l(\Delta C) &= \begin{bmatrix} E c_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_l^T L_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l H c_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathcal{L}_{li}(\Delta A) &= \begin{bmatrix} E a_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i^T & \Delta a_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_{li}(\Delta B) &= \begin{bmatrix} -K_l^T E b_i^T \\ K_l^T E b_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i^T & \Delta b_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_i & 0 \\ 0 & H b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i \\ \Delta b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_i K_l & E b_i K_l \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_{li}(\Delta C) &= \begin{bmatrix} E c_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_i^T L_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l H c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\varepsilon a_l > 0$, $\varepsilon b_l > 0$, $\varepsilon c_l > 0$, $\varepsilon a_{li} > 0$, $\varepsilon b_{li} > 0$, $\varepsilon c_{li} > 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l(\Delta A) &\leq \varepsilon a_l \begin{bmatrix} E a_l^T \Delta a_l^T \Delta a_l E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_l^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H a_l H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &\leq \varepsilon a_l \begin{bmatrix} E a_l^T E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_l^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H a_l H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(\Delta B) &\leq \varepsilon b_u \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} \Delta b_l^T \Delta b_l [-E b_l K_l \quad E b_l K_l] + \varepsilon b_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
&\leq \varepsilon b_u \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} [-E b_l K_l \quad E b_l K_l] + \varepsilon b_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_u(\Delta C) &\leq \varepsilon c_u \begin{bmatrix} E c_l^T \Delta c_l^T \Delta c_l E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_l H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
&\leq \varepsilon c_u \begin{bmatrix} E c_l^T E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_l H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta A) &\leq \varepsilon a_i \begin{bmatrix} E a_i^T E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_i^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H a_i H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i H a_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta B) &\leq \varepsilon b_i \begin{bmatrix} -K_l^T E b_i^T \\ K_l^T E b_i^T \end{bmatrix} [-E b_i K_l \quad E b_i K_l] + \varepsilon b_i^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_i H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i H b_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta C) &\leq \varepsilon c_i \begin{bmatrix} E c_i^T E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_i^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_i H c_i^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(\Delta_u) &\leq \varepsilon a_u \begin{bmatrix} E a_u^T E a_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon b_u \begin{bmatrix} K_l^T E b_l^T E b_l K_l & -K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ -K_l^T E b_l^T E b_l K_l & K_l^T E b_l^T E b_l K_l \end{bmatrix} + \varepsilon c_u \begin{bmatrix} E c_l^T E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\tilde{P}_l \left\{ \varepsilon a_u^{-1} \begin{bmatrix} H a_l H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l H a_l^T \end{bmatrix} + \varepsilon b_u^{-1} \begin{bmatrix} H b_l H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l H b_l^T \end{bmatrix} + \varepsilon c_u^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_l H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \right\} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta_i) &\leq \varepsilon a_i \begin{bmatrix} E a_i^T E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon b_i \begin{bmatrix} K_l^T E b_i^T E b_i K_l & -K_l^T E b_i^T E b_i K_l \\ -K_l^T E b_i^T E b_i K_l & K_l^T E b_i^T E b_i K_l \end{bmatrix} + \varepsilon c_i \begin{bmatrix} E c_i^T E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\tilde{P}_l \left\{ \varepsilon a_i^{-1} \begin{bmatrix} H a_i H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i H a_i^T \end{bmatrix} + \varepsilon b_i^{-1} \begin{bmatrix} H b_i H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i H b_i^T \end{bmatrix} + \varepsilon c_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_i H c_i^T L_l^T \end{bmatrix} \right\} \tilde{P}_l
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(\Delta_u) &= \mathcal{L}_u(\Delta A) + \mathcal{L}_u(\Delta B) + \mathcal{L}_u(\Delta C) \\
\mathcal{L}_i(\Delta_i) &= \mathcal{L}_i(\Delta A) + \mathcal{L}_i(\Delta B) + \mathcal{L}_i(\Delta C)
\end{aligned}$$

Alors $\dot{V}(X) < 0$ si :

$$h_i(t) \{ \mathcal{L}_u(A_u) + \mathcal{L}_u(\Delta_u) \} + (1 - h_i(t)) \sum_{R_i \in \mathcal{R}_i} h'_i(z(t)) \{ \mathcal{L}_i(A_i) + \mathcal{L}_i(\Delta_i) \} < 0 \quad (4.55)$$

En appliquent le programme de minimisation (4.26), l'inégalité (4.55) peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \underline{h}_l \\ & \text{pour } \quad \tilde{P}_l = \tilde{P}_l^T > 0, \quad \tilde{Y}_l > 0, \quad 0 \leq \underline{h}_l < 1 \\ & \text{tels que } \mathcal{L}_l(A_{ll}) + \mathcal{L}_l(\Delta_{ll}) < -\tilde{Y}_l \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\mathcal{L}_i(A_{ii}) + \mathcal{L}_i(\Delta_{ii}) \leq \frac{\underline{h}_l}{1 - \underline{h}_l} \tilde{Y}_l, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l \quad (4.57)$$

avec :

$$\tilde{Y}_l = \begin{bmatrix} Y_{lc} & 0 \\ 0 & Y_{lo} \end{bmatrix}$$

➤ *Mise sous forme LMI de l'inégalité (4.56)*

$$\begin{aligned} (4.55) \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \varepsilon a_{ll} E a_l^T E a_l + \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l + \varepsilon c_{ll} E c_l^T E c_l & -\varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ -\varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l & \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} P_{lc} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T) P_{lc} & 0 \\ 0 & P_{lo} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T + \varepsilon c_{ll}^{-1} L_l H c_l H c_l^T L_l^T) P_{lo} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + P_{lc} (A_l - B_l K_l) & B_l K_l \\ K_l^T B_l^T & (A_l - L_l C_l)^T P_{lo} + P_{lo} (A_l - L_l C_l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{lc} & 0 \\ 0 & Y_{lo} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

on peut écrire (4.58) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{21}^T \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{11} = & (A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + P_{lc} (A_l - B_l K_l) + P_{lc} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T) P_{lc} \\ & + \varepsilon a_{ll} E a_l^T E a_l + \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l + \varepsilon c_{ll} E c_l^T E c_l + Y_{lc} \end{aligned}$$

$$\Theta_{21} = K_l^T B_l^T - \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l$$

$$\begin{aligned} \Theta_{22} = & (A_l - L_l C_l)^T P_{lo} + P_{lo} (A_l - L_l C_l) + \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ & + P_{lo} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T + \varepsilon c_{ll}^{-1} L_l H c_l H c_l^T L_l^T) P_{lo} + Y_{lo} \end{aligned}$$

De la même manière que dans la partie de la commande avec observateur de chapitre 3, on peut réécrire l'inégalité (4.59) sous forme des LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \Sigma^+(A_l X_{lc} - B_l M_l) + \varepsilon a_l H a_l H a_l^T \\ + \varepsilon b_l H b_l H b_l^T + \xi_l^{-1} I + Y_{lc} \end{array} \right) & * & * & * \\ E a_l X_{lc} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 \\ E b_l M_l & 0 & -\varepsilon b_l \left(\frac{\tau}{\tau+1} \right) I & 0 \\ E c_l X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_l - N_l C_l) + Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ H a_l^T P_{lo} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H b_l^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_l I & 0 & 0 & 0 \\ H c_l^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I & 0 & 0 \\ E b_l K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_l^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_l K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_l^{-1} I \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\xi_l > 0, \tau > 0, X_{lc} = P_{lc}^{-1}, M_l = K_l X_{lc}, N_l = P_{lo} L_l$$

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (4.57)**

De la même façon que l'inégalité (4.56) on trouve les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \Sigma^+(A_i X_{lc} - B_i M_l) + \varepsilon a_i H a_i H a_i^T \\ + \varepsilon b_i H b_i H b_i^T + \xi_i^{-1} I - \mu_l Y_{lc} \end{array} \right) & * & * & * \\ E a_i X_{lc} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 \\ E b_i M_l & 0 & -\varepsilon b_i \left(\frac{\tau}{\tau+1} \right) I & 0 \\ E c_i X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_i - N_l C_i) - \mu_l Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ H a_i^T P_{lo} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H b_i^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_i I & 0 & 0 & 0 \\ H c_i^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I & 0 & 0 \\ E b_i K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_i^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_i K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_i^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l$$

Exemple 4.4:

Considérons l'exemple du pendule inversé sur un chariot mobile présenté dans l'exemple 3.3 (figure 2.6).

Les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation définie dans le théorème 4.7:

➤ *Sous système 1 :*

$$\underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon a_1 = 9.7310 \times 10^5, \quad \varepsilon b_1 = 4.0191 \times 10^5, \quad \varepsilon a_{12} = 8.1099 \times 10^5, \quad \varepsilon b_{12} = 4.0212 \times 10^5$$

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 0.1438 & 0.0275 & 0.0198 & 0.0324 \\ 0.0275 & 0.0053 & 0.0038 & 0.0062 \\ 0.0198 & 0.0038 & 0.0036 & 0.0046 \\ 0.0324 & 0.0062 & 0.0046 & 0.0075 \end{bmatrix}$$

$$P_{1o} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 1.3308 & -0.0922 & 0.0903 & -0.2427 \\ -0.0922 & 0.0157 & -0.0111 & 0.0278 \\ 0.0903 & -0.0111 & 0.5556 & -0.0049 \\ -0.2427 & 0.0278 & -0.0049 & 0.1092 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -1.0457 & -0.2023 & -0.1369 & -0.2484 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 11.7865 & 3.1783 \\ 195.1535 & 29.3832 \\ 2.1077 & 0.9970 \\ -3.0263 & 6.2930 \end{bmatrix}$$

➤ *Sous système 2 :*

$$\underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon a_2 = 8.8112 \times 10^5, \quad \varepsilon b_2 = 3.8325 \times 10^5, \quad \varepsilon a_{21} = 8.0152 \times 10^5, \quad \varepsilon b_{21} = 3.8457 \times 10^5$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} 0.1733 & 0.0335 & 0.0224 & 0.0375 \\ 0.0335 & 0.0065 & 0.0043 & 0.0073 \\ 0.0224 & 0.0043 & 0.0038 & 0.0050 \\ 0.0375 & 0.0073 & 0.0050 & 0.0083 \end{bmatrix}$$

$$P_{2o} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 1.6598 & -0.0977 & -0.1437 & -0.3959 \\ -0.0977 & 0.0293 & 0.0041 & 0.0691 \\ -0.1437 & 0.0041 & 0.8829 & 0.0506 \\ -0.3959 & 0.0691 & 0.0506 & 0.2263 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^3 \times [-1.1872 \quad -0.2316 \quad -0.1459 \quad -0.2692]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 3.9011 & 1.3981 \\ 186.8471 & 43.9076 \\ 1.8320 & 1.1092 \\ -26.9696 & -6.5151 \end{bmatrix}$$

Les valeurs obtenues sont $\underline{h}_1 = 0$, $\underline{h}_2 = 0$, un seul retour d'état $u(t) = K_1 x(t)$ ou $u(t) = K_2 x(t)$ et un seul gain d'observateur L_1 ou L_2 sont suffisants pour la stabilisation du pendule inversé. Les figures 4.11 à 4.15 représentent les états et les états estimés $(x_1(t), \hat{x}_1(t))$, $(x_2(t), \hat{x}_2(t))$, $(x_3(t), \hat{x}_3(t))$, $(x_4(t), \hat{x}_4(t))$, et la commande $u(t)$ respectivement, pour les conditions initiales $x(0) = [-60, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

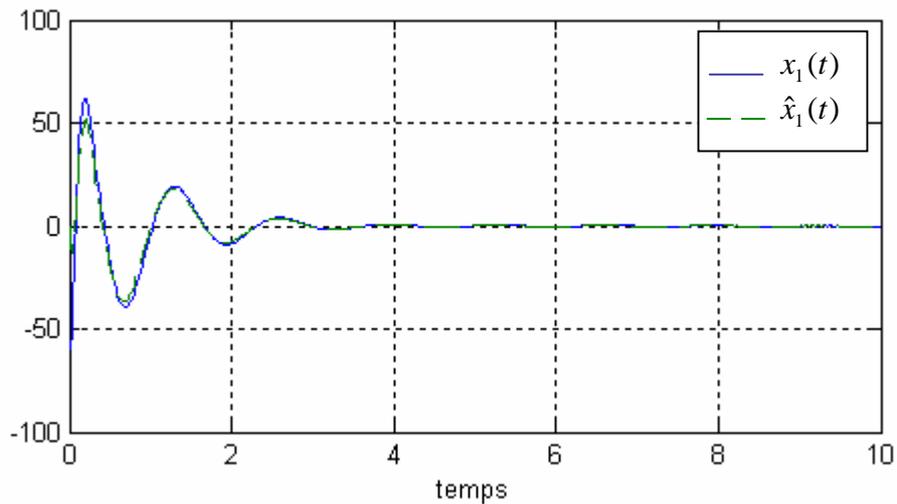


Figure 4.11 : Evolution de l'état $x_1(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_1(t)$

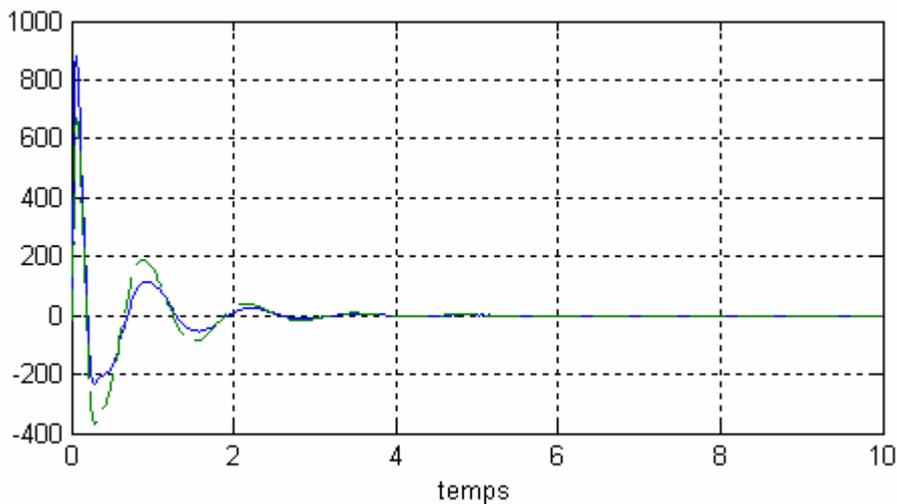


Figure 4.12 : Evolution de l'état $x_2(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_2(t)$

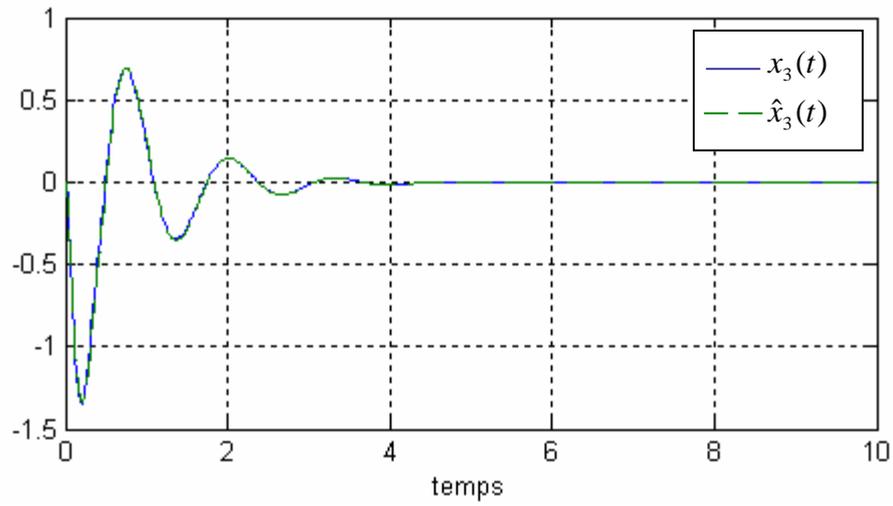


Figure 4.13 : Evolution de l'état $x_3(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_3(t)$

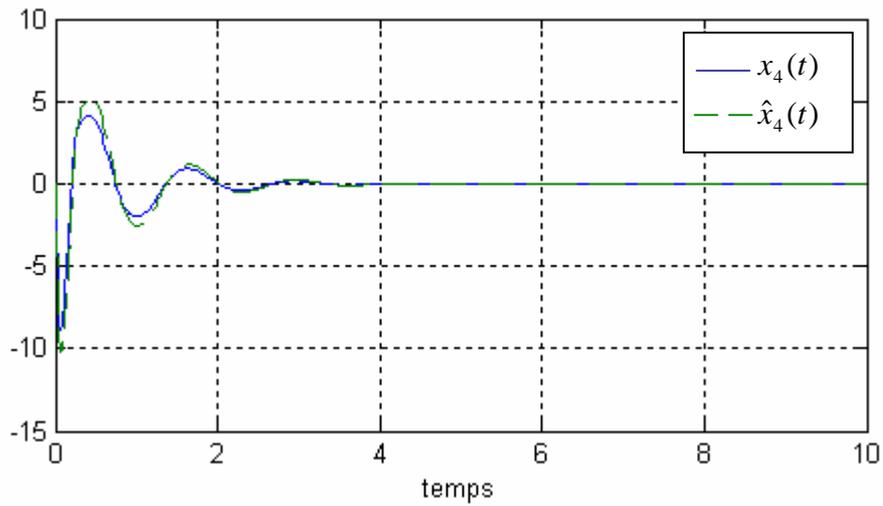


Figure 4.14 : Evolution de l'état $x_4(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_4(t)$

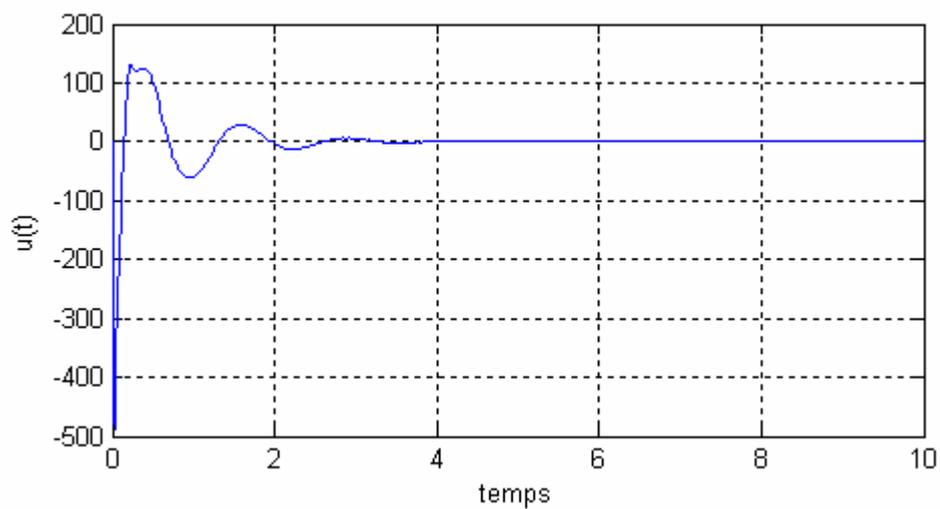


Figure 4.15 : Evolution de la commande $u(t)$

4.8. Conclusion

Le modèle flou incertain est représenté comme un ensemble de systèmes linéaires incertains et une loi de commande local est conçue telle que la région de stabilité du sous système local correspondant est maximisé. Cette approche permet l'optimisation du nombre de contrôleurs qui peut être plus petit que celui des règles.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons abordé le problème de la synthèse de lois de commande pour la stabilisation des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous incertains de type Takagi-Sugeno. Les conditions de stabilité sont formulées sous forme de LMIs pour une meilleure exploitation numérique des résultats.

Dans la première partie, après une étude de la stabilité en se basant sur des fonctions de Lyapunov, nous avons détaillé le principe de la commande PDC, les principales lois de commande qui en découlent avec la mise en oeuvre d'observateur TS dans le cas des valeurs de prémisses mesurables et dans le cas des valeurs de prémisses non mesurables, ainsi que quelques résultats concernant la relaxation des conditions de stabilité.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié les modèles flous de Takagi-Sugeno avec des incertitudes bornées et présenté des résultats sur leur stabilisation via la commande PDC. Les approches se sont principalement basées sur l'utilisation des différentes propriétés matricielles. Pour prendre en compte certaines contraintes concernant les performances du système en boucle fermée, de nouvelles conditions de stabilisation de modèles flous incertains ont été définies. Elles concernent la stabilisation avec taux de décroissance prédéfini et le placement des pôles des sous modèles TS dans une région convexe pré-spécifiée du plan complexe.

Dans la dernière partie, une approche de synthèse, de loi de commande par commutation pour les modèles flous de Takagi-Sugeno incertains a été étudiée. Le modèle flou incertain est représenté comme un ensemble de systèmes linéaires incertains et une loi de commande

locale est conçue telle que la région de stabilité du sous système local correspondant est maximisée. Cette approche permet l'optimisation du nombre de contrôleurs qui peut être plus petit que celui des règles.

L'efficacité des méthodes étudiées a été montrée en utilisant plusieurs exemples de simulation.

Dans ce travail, nous sommes limités à la stabilité, la vitesse de convergence et le placement de pôles dans une région LMI comme critères de performances, comme suite à ce travail nous proposons l'utilisation des méthodes d'optimisation multicritères pour l'intégration d'autres critères de performances, ainsi que l'utilisation d'autres fonctions non quadratiques comme fonctions candidates de Lyapunov afin de réduire le conservatisme des méthodes actuelles.

Bibliographie

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, " Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control ", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, Vol. 115, pp. 116-132, 1985.
- [2] K. Tanaka, T. Hori and H. O. Wang , " New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions : a fuzzy Lyapunov approach ", *In Proc. Of the CDC, Orlando, Florida*, Vol. 4, pp.3942-3947, 2001.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan," Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory ", *Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia*, 1994.
- [4] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Ait Rami, " Cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems ", *IEEE Transaction and Automatic Control*, Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176, 1997.
- [5] D. J. Stilwell and W. G. Rugh, " interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling ", *IEEE Transaction and Automatic Control*, Vol. 44, No. 6, pp. 1225-1229, 1999.
- [6] E. Kim and H. Lee, " New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy Control systems ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 8, No. 5, pp. 523-534. 2000.
- [7] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, " Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 324-332. 2001.
- [8] M. Boumehraz, K. Benmahammed, " Switching controller design for nonlinear systems via fuzzy models ", *International journal of modeling identification and control*, Vol.2, No. 1, pp.800-808, 2007.
- [9] R. Boukezzoula, " *Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires: application au problème de suivi de trajectoire* ", Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 2000.
- [10] K. Guelton, " *Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en œuvre d'observateurs flous sous forme descripteur* ", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2003.
- [11] Y. Morère, " *Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi Sugeno* ", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2001.

-
- [12] A. Kruszewski, " *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI* ", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2006.
- [13] K. Tanaka and M. Sugeno, " Stability analysis and design of fuzzy control systems ", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.45, No. 2, pp135-156, 1992.
- [14] Y. Nesterov and A. Nemirovski, " Interior point polynomial methods in convex programming : theory and applications ", *SIAM*, Philadelphia, PA, 1994.
- [15] B. Mansouri, " *Contribution a la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi-Sugeno incertains* ". Thèse de Doctorat Université de Reims Champagne Ardenne, 2005.
- [16] B. Gao, " *Contribution à la synthèse de commandes référencées vision 2D multi-Critères* ", Thèse de Doctorat, Université de Paul Sabatier de Toulouse, 2006.
- [17] M. Boumehraz, " *Stabilisation des systèmes non linéaires via des modèles flous de type Takagi-Sugeno* ", Thèse de Doctorat, Université Mohamed Kheider, Biskra, 2006.
- [18] J. Lauber, " *Moteur à allumage commandé avec EGR : modélisation et commande non linéaires* ", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2003.
- [19] M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian, " Robust pole placement in LMI regions ", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 12, pp. 2257-2270, 1999.
- [20] W. El Messoussi, O. Pagès, A. El Hajjaji, " Robust Pole Placement for Fuzzy Models with Parametric Uncertainties : An LMI Approach ", *EUSFLAT - LFA 2005*. pp. 810-815, 2005.
- [21] D. Henrion, " *Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte* ", Thèse de Doctorat, Institut national des sciences appliquées de Toulouse, 1999.
- [22] M. Chadli, " *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multi modèles* ", Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Lorraine, 2002.
- [23] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 1-16, 1998.
- [24] T. M. Gurra, L. Vermeiren, " conditions for non quadratic stabilization of discrete fuzzy models ", *IFAC advances in fuzzy and neural control, Spain*, pp. 15-20. 2001.
- [25] M. Chadli, D. Maquin et J. Ragot, " Stabilité et la stabilisation des modèles de Takagi-Sugeno continus ", *Journées Doctorales d'Automatique (JDA'2001)*, pages 85-88, Toulouse, France. 2001.

-
- [26] L. Hetel, " *Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation* ", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
- [27] K. Tanaka, T. Hori and H. O. Wang, " A Multiple Lyapunov Function Approach to Stabilization of Fuzzy Control Systems ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 11, No. 4, pp. 582-589. 2003.
- [28] M. Thoma, M. Morari, " *Fuzzy control and filter design for uncertain fuzzy systems* ", Springer, Berlin, Vol. 347. 2006.
- [29] A. Jadbabaie, " *Robust, non-fragile controller synthesis using model-based fuzzy systems : a linear matrix inequality approach* ", Master of science Thesis, The university of New Mexico, USA, 1997.
- [30] L. Seddiki, " *Développement et commande TS d'une machine de rééducation des membres inférieurs en chaîne musculaire fermée* ", Thèse de Doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, 2008.
- [31] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and R. G. Avellar, " On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 10, No. 5, pp. 613-623, 2003.
- [32] M. X. Jun, Z. Q. Sun and Y. Y. He, " Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 6, No 1, pp. 41-51. 1998.
- [33] S. Tonga et H. Li, " Observer-based robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties ", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 131, No. 02, pp. 165-184, 2002.
- [34] W. El Messoussi, O. Pagès, A. El Hajjaji, " Observer-Based Robust Control of Uncertain Fuzzy Dynamic Systems with Pole Placement Constraints : An LMI Approach ", *Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA*, 2006.
- [35] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, " Robust Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainties ", *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 369-379, 2001.
- [36] H. J. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo, " Robust load-frequency control for uncertain nonlinear power systems: A fuzzy logic approach ", *Information Sciences*. pp. 402-751, 2006.
- [37] Y. Wang, and Z. Q. Sun, " Guaranteed Cost Control of Discrete-Time Fuzzy Systems Based on Fuzzy Lyapunov Function Approach ", *International Journal of Computer Sciences and Engineering Systems*, Vol.1, No. 2, pp. 85-91, 2007.
- [38] Y. Mi, W. Pan, Y. W. Jing and G. M. Dimirovski, " Robust stabilization of nonlinear

discrete-time systems based on T-S model ", *Journal of electrical and electronics engineering*, 2004.

- [39] K. R. Lee , E. T. Jeung and H. B. Park, " Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: an LMI approach ", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 120 No. 1, pp. 123-134, 2002.
- [40] J. Chang Lo and M. B. L. Lin, " Robust H_∞ nonlinear modeling and control via uncertain fuzzy systems ", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 143, No. 4, pp.189-209, 2003.
- [41] P. F. Toulotte, " *Attelage virtuel pour véhicules automatisés* ", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2006.

Annexes

A

Preuve des Théorèmes (2.11) et (2.13)

La boucle fermée du système non autonome avec l'utilisation de la loi de commande floue de type PDC représenté par le modèle flou TS suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \quad (\text{A.1})$$

Théorème A.1 [6] : Le modèle flou (A.1) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et des matrices symétriques $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ et des matrices $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (\text{A.2})$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q_{ij} \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j$$

Preuve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \quad (\text{B.5})$$

La dérivée de la fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= 2x^T(t)P \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t))G_{ii}x(t) + 2 \sum_{i<j \leq r} h_i(z(t))h_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right\} x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t)) \left\{ x^T(t)(G_{ii}^T + PG_{ii})x(t) \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{i<j \leq r} h_i(z(t))h_j(z(t)) \left\{ x^T(t) \left(\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right) x(t) \right\} \\ &\leq - \sum_{i=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t))x^T(t)Q_{ii}x(t) - 2 \sum_{i<j \leq r} h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)Q_{ij}x(t) \\ &= - \begin{pmatrix} h_1x \\ h_2x \\ \vdots \\ h_r x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1x \\ h_2x \\ \vdots \\ h_r x \end{pmatrix} \\ &= x^T H^T (-Q) H x \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si dérivée de la fonction candidate de Lyapunov (A.6) est strictement négative.

De la même manière, on peut trouver les conditions de stabilité moins conservative du modèle flou TS discret.

B

Théorème de séparation

En utilisant une loi de commande floue de type PDC, La boucle fermée du système non autonome et la dynamique de l'observateur représenté par des modèles flous TS sont données par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t) \quad (\text{B.2})$$

Les conditions de stabilité de la boucle fermée du système et la dynamique de l'observateur sont donnés respectivement par les deux théorèmes suivants :

Théorème B.1 : *Le modèle flou (B.1) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive $P_c = P_c^T > 0$ qui satisfait les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P_c + P_c G_{ii} &< 0 & \forall i = 1, \dots, r \\ \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P_c + P_c \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) &\leq 0 & i < j \leq r \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j$$

Théorème B.2 : Le modèle flou (B.2) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive $P_o = P_o^T > 0$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} H_{ii}^T P_o + P_o H_{ii} &< 0 & \forall i = 1, \dots, r \\ \left(\frac{(H_{ij} + H_{ji})}{2} \right)^T P_o + P_o \left(\frac{(H_{ij} + H_{ji})}{2} \right) &\leq 0 & i < j \leq r \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

avec :

$$H_{ij} = A_i - L_i C_j$$

La boucle fermée complète composée de l'état du système et l'erreur d'estimation, permet d'écrire le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Théorème B.3 : le système augmenté décrit par l'équation (B.5) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive commune $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \Lambda_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \Lambda_{ii} &< 0 & i = 1, \dots, r \\ (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P} (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) &< 0 & i < j \leq r \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où Λ_{ij} peut être définie comme suit :

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Si on peut prolonger la propriété de séparation observateur/contrôleur d'un système simple au cas de (B.5). On montrera dans la prochaine section, que dans le cas de (B.5), on a en effet la propriété de séparation, et on a deux ensembles de LMI séparés pour l'observateur et le contrôleur.

Propriété de séparation

Pour prouver que la propriété de séparation [29] est solvable, on doit montrer que \tilde{P} la solution commune définie positive des inégalités dans (B.6), est une matrice diagonale, avec λP_c et P_o en tant qu'éléments diagonaux, où P_c est la solution définie positive des inégalités dans (B.3), λ est une constante positive, et P_o est la solution de (B.4). On peut exprimer la propriété de séparation dans le théorème suivant [29] :

Théorème B.2 (*Théorème de séparation pour les systèmes flous TS*) : *Le système (B.5) est globalement asymptotiquement stable si les inégalités dans (B.3) et (B.4) sont satisfaites indépendamment.*

Preuve

On choisit \tilde{P} comme matrice diagonale avec λP_c et P_o comme éléments diagonaux, c'est-à-dire, on a ce qui suit :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \lambda P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

On montrera qu'il existe toujours un $\lambda > 0$ tel que \tilde{P} satisfait les inégalités (B.6). En remplaçant \tilde{P} et Λ_{ij} dans (B.6) on obtient l'inégalité suivant :

$$\begin{bmatrix} \lambda [(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i)] & \lambda P_c (B_i K_i) \\ \lambda (B_i K_i)^T P_c & (A_i - L_i C_i)^T P_o + P_o (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.9})$$

En utilisant le complément de Schur, (B.9) est définie négative si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \lambda [(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i)] &< 0 \\ \lambda P_c (B_i K_i) [(A_i - L_i C_i)^T P_o + P_o (A_i - L_i C_i)]^{-1} (B_i K_i)^T P_c \\ &- [(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i)] > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Puisque (B.3) est satisfaite, la première inégalité déjà vraie. La deuxième condition est satisfaite pour tout $\lambda > 0$ tel que :

$$\lambda \min_{1 \leq i \leq r} \mu_i > \max_{1 \leq i \leq r} v_i$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \lambda_{\min} \left\{ P_c (B_i K_i) \left[(A_i - L_i C_i)^T P_o + P_o (A_i - L_i C_i) \right]^{-1} (B_i K_i)^T P_c \right\} \\ v_i &= \lambda_{\max} \left[(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i) \right] \end{aligned}$$

où λ_{\min} et λ_{\max} sont les valeurs propres minimales et maximales. Comme (B.3) et (B.4) sont déjà satisfaites, un tel $\lambda > 0$ existe toujours.

En utilisant le même argument, on peut également montrer que la seconde partie des inégalités (B.6) est satisfaite. Par conséquent, les deux ensembles d'inégalités peuvent être résolus indépendamment, et la séparation est valable.