

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Hydraulique
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم : الري
المرجع :.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du diplôme de

Magister en : Hydraulique

Option : Hydraulique urbaine

**Coefficients de Chézy et de Manning en écoulement
uniforme dans des canaux artificiels**

Présenté par :

Yacine BEBOUKHA

Soutenu publiquement le

Devant le jury composé de :

Mr OUAMANE Ahmed	Professeur	Président	Université de Biskra
Mr ACHOUR Bachir	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Mr BOUZIANE Mohamed Toufik	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Mr DEBABECHE Mahmoud	Professeur	Examineur	Université de Biskra

REMERCIEMENTS

Merci à notre bon Dieu, notre guide, notre force, notre bonheur, et la raison de notre existence. C'est lui qui nous a fait comprendre le but de cette vie, et qui nous a donné le pouvoir d'aimer les gens et d'apprécier les choses.

Je tiens tout d'abord à examiner mes remerciements les plus sincères à notre professeur et notre encadreur M^R ACHOUR BACHIR, pour ses efforts fournis afin de mener à bien ce projet.

J'adresse ma profonde gratitude à M^R KHALDI NOUREDDINE qui a tout mis à ma disposition pour que mon travail se déroule dans les meilleures conditions possibles.

A tous les enseignants de l'université de Biskra en particulier ceux du département hydraulique pour la formation qu'ils m'ont offert et leurs orientations.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, j'aimerais leur dire.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance en témoignage de ma profonde affection à :

- *Ma chère mère qui ma protège pendant toute ma vie, et qui a fait tout pour que je devienne ce que je suis.*
- *Mon père qui m'a tant aidé et encourager.*
- *Tous mes frères et sœurs.*
- *Ma chère LILA et ma petite fille ROUDAINA.*
- *Toute la famille.*
- *Tous mes amis.*
- *Toute personne qui a contribué de près ou de loin à ma réussite.*

YACINE BEBOUKHA

RESUME

Les objectifs de notre mémoire consistent à examiner d'une part la variation des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* pour une conduite de forme rectangulaire et autre ovoïdale normale sous l'hypothèse d'un écoulement uniforme a surface libre, et à déterminer d'autre part les expressions qui les régissent. Ces relations devront être mentionnées sous forme adimensionnelle afin de leur donner un caractère de validité générale.

En outre, on doit rechercher les expressions de *Chézy* et de *Manning* en tenant compte de caractéristiques géométriques du canal et hydraulique de l'écoulement.

On propose une méthode de calcul de ces coefficients en ayant recours à la méthode du modèle rugueux de référence.

ABSTRACT

The objective of this study is from one hand a test of flow resistance coefficients change of *Chézy* and *Manning* , in two forms the pipes wich are: The rectangular and the oval, under the hypothesis of the open uniformed flow, also identify in the other hand the relations that registers these coefficients. Those relations should be without a unity until it gets a general tendency.

In addition to that, the declaration about the coefficients of *Chézy* and *Manning* taking into consideration the characteristics of the pipes dimensions, and the hydraulic characteristics of flow.

In this research we suggest a method to calculate those coefficients by au assistance from the Rough Model Method "RMM"

ملخص:

الهدف من هذه الدراسة هو من جهة اختبار تغيير معاملات مقاومة جريان الماء لـ: *Chézy* و *Manning*. في شكلين من أشكال القنوات وهي (المستطيلة و البيضاوية) تحت فرضية الجريان المنتظم المفتوح، وتحديد العلاقات التي تحسب هذه المعاملات من جهة أخرى. هذه العلاقات تكون بدون وحدة حتى يكون لها قابلية عامة. كذلك التعبير عن معاملات *Chézy* و *Manning* مع الأخذ بعين الاعتبار خصائص أبعاد القناة و الخصائص الهيدروليكية لجريان الماء.

نقترح في هذه الدراسة طريقة لحساب هذه المعاملات بالاستعانة بطريقة النموذج الخشن المرجعي.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE. I : ECOULEMENT UNIFORME

I.1. Introduction	01
I.2. Formule de <i>Chézy</i>	05
I.2.1. Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Ganguillet – Kutter</i>	07
I.2.2. Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Bazin</i>	07
I.2.3. Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Powell</i>	08
I.3. Formule de <i>Manning-Strickler</i>	08
I.4. Formule de <i>Darcy – Weisbach</i> et évaluation du coefficient de frottement	11
I.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme	13
I.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme	13
I.5.2. Équation de <i>Keulegan</i>	15
I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de <i>Manning</i>	18
I.7. Méthode de détermination du coefficient de <i>Manning</i>	19
I.8. Calcul de l'écoulement uniforme	20
I.8.1. Conductivité	20
I.8.2. Facteur de section	21
I.8.3. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire	25
I.9. Conclusion	27

CHAPITRE. II : COEFFICIENT DE CHEZY ET DE MANNING EN ECOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

II.1. Introduction	30
II.2. Expression du coefficient de <i>Chézy</i> dans un canal rectangulaire	31
II.3. Variation du coefficient de <i>Chézy</i>	33

II.4. Calcul du paramètre de forme η	39
II.5. Etapes de calcul du coefficient C de <i>Chézy</i>	44
II.6. Exemple de calcul du coefficient C de <i>Chézy</i>	45
II.7. Expression du coefficient adimensionnel de <i>Manning</i> dans un canal rectangulaire	48
II.8. Variation du nombre adimensionnel N de <i>Manning</i>	49
II.9. Calcul du coefficient n de <i>Manning</i> par la MMR	56
II.10. Exemple de calcul du coefficient n de <i>Manning</i>	61
II.11. Conclusion	63
 CHAPITRE. III : ECOULEMENT UNIFORME DANS UNE CONDUITE DE FORME OVOIDALE	
III.1. Introduction	65
III.2. Caractéristiques géométriques	65
III.3. Caractéristiques de l'écoulement	67
III.4. Variation des caractéristiques de l'écoulement	82
III.5. ETUDE DE L'ECOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE CONSTANT	84
III.5.1. Formule de <i>Chézy</i>	84
III.5.1.1. Conductivité relative	84
III.5.1.2. Variation de la conductivité relative	86
III.5.1.3. Exemple d'application 3.1	89
III.5.1.4. Exemple d'application 3.2	90
III.5.1.5. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$	92
III.5.1.6. Exemple d'application 3.3	95
III.5.1.7. Exemple d'application 3.4	96
III.5.1.8. Courbe de remplissage de la conduite pour $C = \text{constante}$	98
III.5.1.9. Exemple d'application 3.5	100

III.5.1.10. Relation $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour $C = \text{constante}$	101
III.5.1.11. Exemple d'application 3.6	103
III.5.2. Formule de <i>Manning-Strickler</i>	104
III.5.2.1. Conductivité relative	104
III.5.2.2. Variation de la conductivité relative	105
III.5.2.3. Relation approchée $\eta(Q^*)$	107
III.5.2.4. Exemple d'application 3.7	108
III.5.2.5. Exemple d'application 3.8	109
III.5.2.6. Exemple d'application 3.9	110
III.5.2.7. Conductivité relative rapportée à la profondeur normale	112
III.5.2.8. Exemple d'application 3.10	115
III.5.2.9. Exemple d'application 3.11	115
III.5.2.10. Courbe de remplissage de la conduite pour $n = \text{constante}$	117
III.5.2.11. Exemple d'application 3.12	121
III.5.2.12. Relation $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour $n = \text{constante}$	122
III.5.2.13. Exemple d'application 3.13	124
III.6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE	126
III.6.1. Coefficient de résistance à l'écoulement de <i>Chézy</i>	126
III.6.1.1. Relation générale et variation du coefficient de résistance C de <i>Chézy</i>	126
III.6.1.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de <i>Chézy</i> par la MMR	133
III.6.1.3. Exemple d'application 3.14	138
III.6.1.4. Exemple d'application 3.15	141
III.6.1.5. Exemple d'application 3.16	145
III.6.2. Expression du débit volume maximal $Q_{\max.}$	148

III.6.2.1. Exemple d'application 3.17	153
III.6.3. Relation approchée de la profondeur normale	154
III.6.3.1. Exemple d'application 3.18	154
III.6.3.2. Exemple d'application 3.19	157
III.6.3.3. Exemple d'application 3.20	160
III.6.3.4. Exemple d'application 3.21	163
III.6.4. Expression de la vitesse moyenne maximale V_{\max} .	166
III.6.4.1. Exemple d'application 3.22	169
III.6.4.2. Exemple d'application 3.23	173
III.6.4.3. Exemple d'application 3.24	177
III.6.5. Coefficient n de <i>Manning</i>	180
III.6.5.1. Relation générale du coefficient n de <i>Manning</i>	180
III.6.5.2. Calcul du coefficient n de <i>Manning</i> par la MMR	185
III.6.5.3. Exemple d'application 3.25	188
III.6.5.4. Exemple d'application 3.26	191
III.6.5.5. Exemple d'application 3.27	195
III.6.5.6. Exemple d'application 3.28	198
III.7. ECOULEMENT CRITIQUE	200
III.7.1. Exemple d'application 3.29	206
III.7.2. Exemple d'application 3.30	211
III.8. Conclusion	216

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

PRINCIPALES NOTIONS

INTRODUCTION GENERALE

Dans le domaine hydraulique, les coefficients de résistance dans les canaux artificiels sont souvent choisis de manière arbitraire. De plus, contrairement à la réalité physique de l'écoulement, les coefficients sont considérés comme des constantes.

Or, ces coefficients, particulièrement ceux de *Chézy* et de *Manning*, sont généralement influencés par un certain nombre de paramètres que l'on doit alors définir et prendre en considération.

Le coefficient de résistance doit en principe dépendre de la géométrie du canal considéré ainsi que du rayon hydraulique.

Puis comme l'expriment très clairement et avec beaucoup de perspicacité, *Festinger* et *Katz* "*Quelque soit l'objet d'une recherche, la valeur du résultat dépend de celle des méthodes mises en œuvre*". Dans cette étude en se basant sur la méthode du modèle rugueux de référence, méthode de calcul fiable pour la quantification de ces coefficients.

Pour mener à bien notre étude, le mémoire a été subdivisé en trois grands chapitres.

Le premier chapitre est entièrement consacré à une étude bibliographique sur l'écoulement uniforme, englobant ses propriétés, ses définitions ainsi que la théorie qui la gouverne et qui mène à l'établissement de la relation de *Chézy*.

Le deuxième chapitre du mémoire concerne l'étude des coefficients "*C*" de *Chézy* et "*n*" de *Manning* dans un canal rectangulaire. Dans ce chapitre nous établissons des relations générales destinées à l'évaluation de ces coefficients de résistance et leurs variations, ainsi que des applications pratiques sur leur calcul explicite, en ayant recours à la méthode du modèle rugueux.

Le troisième chapitre consiste en l'étude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* dans une conduite de forme ovoïdale normale et leur calcul par la méthode du modèle rugueux de référence.

Dans ce chapitre, nous allons inclure l'examen de l'écoulement uniforme et critique dans la conduite de forme ovoïdale normale.

Des relations approchées sont proposées dans cette partie de l'étude qui permettent des solutions explicites au problème de l'écoulement uniforme.

Notre travail se base essentiellement sur la méthode du modèle rugueux de référence qui est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie et dont l'écoulement est considéré comme étant en régime turbulent rugueux.

Des exemples d'applications sont proposés pour mieux apprécier la facilité d'exécution de la méthode ainsi que sa fiabilité.

CHAPITRE I
ÉCOULEMENT UNIFORME

I.1. INTRODUCTION

Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur h ou y_n de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée A , la vitesse V de l'écoulement et le débit Q . La ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse V est généralement associée à la constance de la vitesse moyenne de l'écoulement; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens stricte du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières. Cette approche, bien que simplifiée, donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques.

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistances sont proportionnelles à V^2 .

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

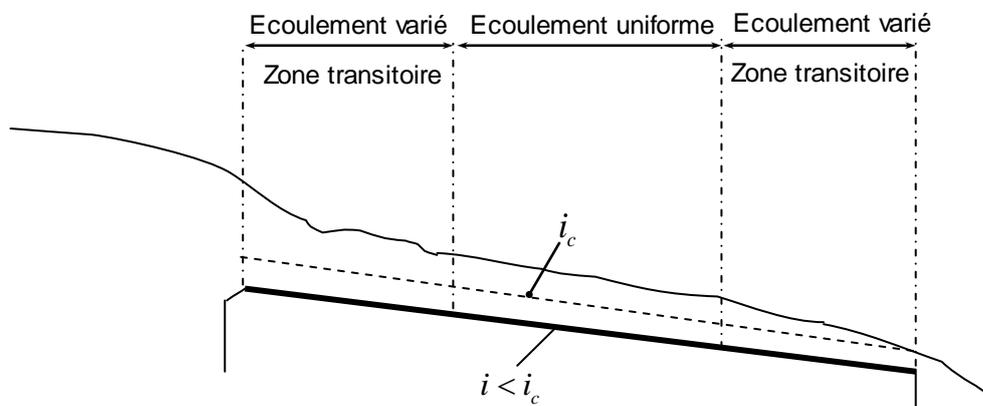
Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place à un écoulement varié. La figure 1.1 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'un canal rectangulaire de grande longueur et de différentes pentes géométriques i . La pente i est comparée à la pente critique i_c .

Lorsque la pente i est suave (figure 1.1.a), la zone transitoire se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement est uniforme au milieu du canal mais varie aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% de la valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente i correspond à la pente critique i_c (figure 1.1.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente i est supercritique ou prononcée (figure 1.1.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone transitoire, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume Q entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci, telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone transitoire ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.



(a)

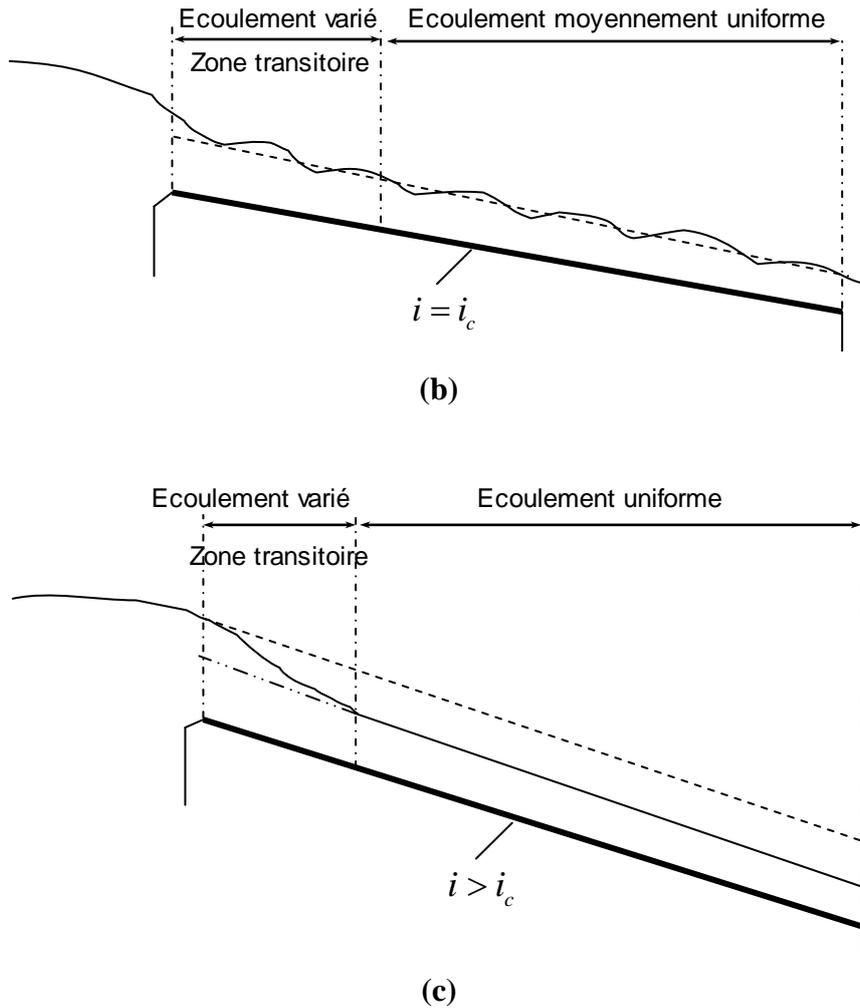


Figure 1.1 : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur.

(- -): profondeur critique. (—): Profondeur normale de l'écoulement uniforme.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée profondeur normale de l'écoulement est très important. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure 1.1.c, la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère prononcé ou supercritique de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites " relations de l'écoulement normal ". Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne V de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme $V = C R_h^\beta J^\gamma$ où R_h est le rayon hydraulique et J est la pente de la ligne de charge. Comme nous l'avons déjà indiqué, J correspond également à la pente i . Le paramètre C traduit la résistance de l'écoulement et

dépend de V , de R_h , de la rugosité absolue ε caractérisant les parois du canal, de la viscosité du liquide et de beaucoup d'autres facteurs.

La distinction doit être faite entre l'écoulement uniforme se produisant d'une part dans les canaux artificiels et dans les canaux naturels d'autre part. Dans la pratique, l'écoulement dans les canaux naturels est considéré comme étant uniforme à condition que la profondeur de l'écoulement ne subisse pas de variation brusque pouvant être causée par les irrégularités des parois du canal. L'application des relations de l'écoulement uniforme aux canaux naturels mène à des résultats plutôt approximatifs en raison du fait que l'écoulement dépend en réalité d'un plus grand nombre de facteurs que ceux qui influencent l'écoulement dans les canaux artificiels. Selon *Schnackenberg* (1951), une bonne relation de l'écoulement uniforme dans un canal naturel sans transport de sédiments est celle qui devrait tenir compte d'au moins 10 paramètres qui sont A , V , V_{ms} qui correspond à la vitesse maximale à la surface, le périmètre mouillé P , R_h , la profondeur maximale y de l'écoulement, la pente S_w de la surface libre, le coefficient n qui caractérise la rugosité du canal, la viscosité dynamique μ du liquide et la température T .

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk*, 1918; *Forchheimer*, 1930 ; *Lindquist*, 1933; *Vladislavljévitch*, 1951), on peut s'apercevoir que de très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de " bonne relation " selon la conception de *Schnackenberg*.

Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels, telle que celle de *Toebes* (1955). Dans cette approche, une analyse par corrélation multiple est appliquée aux différents facteurs influençant la vitesse de l'écoulement dans un canal naturel. Ces facteurs, selon *Toebes* (1955) sont A , V_{ms} , S_w , n et T . Par cette approche, il est possible d'estimer l'influence de chacun des dits facteurs sur la vitesse V et la valeur de celle-ci est égale à la somme algébrique des diverses contributions de chacun des paramètres en question. Cependant, la méthode de *Toebes* (1955) ne peut être appliquée que dans la région géographique pour laquelle a été faite l'analyse de l'influence des facteurs ci-dessus cités, ce qui malheureusement exclut toute généralisation de cette méthode.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou de *Manning – Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué $V = C R_h^\beta J^\gamma$ où les exposants β et γ ont des valeurs bien déterminées. En raison de

leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tentant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy – Weisbach* dont l'application est universelle. Cette relation joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît un grand succès.

Notre travail se présente en deux grandes parties. La première partie est consacrée à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme. Elle se propose de passer en revue les principales formules de l'écoulement uniforme, en mettant l'accent sur les relations de *Chézy*, *Manning – Strickler* et de *Darcy – Weisbach*.

Dans la deuxième partie de notre étude, nous avons tenté d'exposer notre contribution au calcul de l'écoulement uniforme. Notre recherche a pour principal objectif de proposer des relations approchées fiables au calcul de la profondeur normale ainsi que celles destinées au dimensionnement de la conduite considérée. Ces relations sont applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, comprenant l'écoulement lisse, de transition et turbulent rugueux.

I.2. Formule de *Chézy*

La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne V s'exprime par :

$$V = C \sqrt{R_h J} \quad (1.1)$$

Rappelons que R_h est le rayon hydraulique, J est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge (J étant également la pente i du canal) et C est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement. Le facteur C est habituellement appelé coefficient de *Chézy*.

Chézy stipule que la force de résistance s'opposant à l'écoulement et par unité de surface de canal est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne V . Cette force peut donc s'écrire : F_r (1m^2) = $K V^2$, où K est le facteur de proportionnalité. Comme le montre la figure 1.2, la surface du canal en contact avec le liquide est égale au produit du périmètre mouillé P par la longueur L du canal. La force totale F_r mise en jeu s'écrit ainsi :

$$F_r = K V^2 P L \quad (1.2)$$

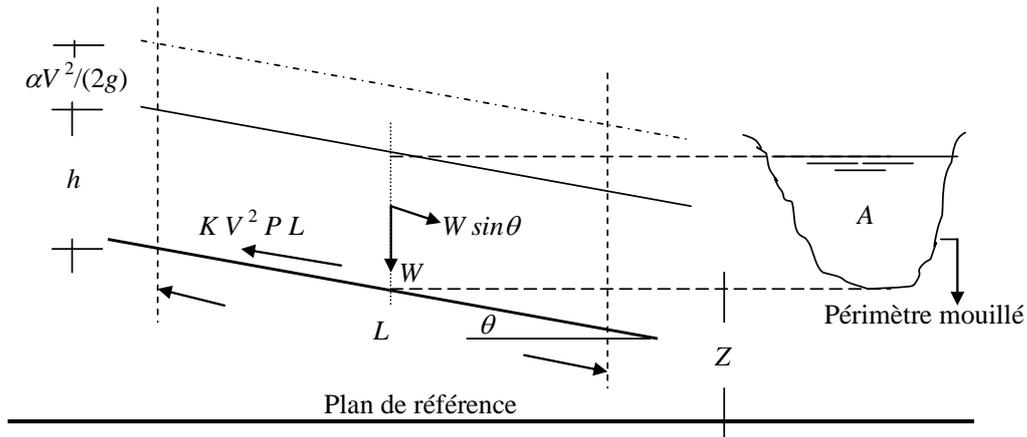


Figure 1.2: Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de Chézy.

Nous avons déjà indiqué que l'écoulement uniforme s'établit lorsque les forces de gravité sont équilibrées par les forces de résistance F_r . La quantité $(W \sin \theta)$, représentée sur la figure 1.2, correspond à la composante tangentielle du poids propre W du liquide. C'est cette composante qui intervient dans l'écoulement et qui doit être équilibrée par la force F_r . Le poids propre W peut s'écrire $W = \rho g A L$ où ρ est la masse volumique du liquide, g est l'accélération de la pesanteur. Le produit $(A L)$ désigne le volume de liquide sur toute la longueur L considérée. Ainsi, nous pouvons écrire $\rho g A L \sin \theta = K V^2 P L$, soit : $V^2 = (\rho g / K) (A / P) \sin \theta$. La quantité A / P représente par définition le rayon hydraulique R_h .

En désignant par $C^2 = (\rho g / K)$ et par $J = \sin \theta$, il vient que :

$$V = C R_h^{1/2} J^{1/2} \quad (1.3)$$

Comme l'exige la relation (1.3), le coefficient C de Chézy doit avoir pour unité $[L^{1/2} T^{-1}]$. Plusieurs relations ont été proposées au calcul du coefficient C et nous verrons dans ce qui suit les plus importantes d'entre elles.

I.2.1. Détermination du coefficient C de Chézy par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

La formule de *Ganguillet – Kutter* (1869) exprime le coefficient C de Chézy en fonction de la pente J ou i du canal, du rayon hydraulique R_h et du coefficient de rugosité n . Elle a été élaborée à partir de mesures expérimentales effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.4)$$

Le coefficient n de la relation (1.4) est connu sous le nom de " coefficient n de *Kutter* ". Bien que la relation (1.4) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente J , afin de simplifier la forme de l'équation. On peut en effet s'apercevoir que le terme $0,00155/J$ n'a pas d'effet significatif sur la valeur du coefficient C , pour une même valeur du coefficient de rugosité n et du rayon hydraulique R_h . A titre indicatif, pour $n = 0,01$ et $R_h = 1,20$ m, C ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de J : $102 \leq C \leq 103$ lorsque $0,00005 \leq J \leq 0,01$.

I.2.2. Détermination du coefficient C de Chézy par la formule de *Bazin*

Bazin (1897) considère que la valeur du coefficient C de Chézy dépend du rayon hydraulique R_h mais ne dépend pas de la pente J du canal. Le coefficient C peut alors être déterminé par la relation :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.5)$$

m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. Les valeurs de m sont sans commune mesure avec celles qui correspondent au coefficient de rugosité n figurant dans la relation (1.4) de *Ganguillet – Kutter* et ceci pour le même matériau. A titre indicatif, pour le cas d'un canal fabriqué en ciment lisse, les tables de valeurs indiquent que $n = 0,01$ et $m = 0,11$.

La formule de *Bazin* a été développée à l'origine pour de petits canaux, si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

I.2.3. Détermination du coefficient C de *Chézy* par la formule de *Powell*

Powell (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient C de *Chézy*, mais elle se présente sous une forme implicite :

$$C = -23,2 \log \left(\frac{1,811 C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.6)$$

" log " désigne le logarithme décimal, R est le nombre de *Reynolds*, ε est la rugosité absolue des parois du canal. A l'origine, la formule de *Powell* a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (1.6) sont alors différentes et beaucoup plus simples :

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.7)$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds*. Le terme $C/(4R) \rightarrow 0$ et la relation (1.7) devient :

$$C = -42 \log \left(\frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.8)$$

Par contre, pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est tellement faible que la relation (1.7) peut s'écrire :

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} \right) \quad (1.9)$$

I.3. Formule de *Manning-Strickler*

La vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de *Manning* (1891). La vitesse V est liée au coefficient C de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique R_h et à la pente J du canal. A l'origine, la formule de *Manning – Strickler* se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour

s'écrire, avec $C = k$:

$$V = k R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.10)$$

La relation (1.10) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.11)$$

(n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler*).

La conversion en unité anglaise de la relation (1.10) donne :

$$V = \frac{1,486}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.12)$$

Dans cette conversion, la valeur numérique du coefficient de rugosité n reste inchangée et la même valeur est utilisée dans les deux systèmes d'unité. Comme l'exige la forme de la relation (1.10), le coefficient n doit avoir pour dimension $[TL^{-1/3}]$. Cependant, il paraît physiquement injustifié que la dimension de temps T puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisqu'elle ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs énoncent que le numérateur de la relation (1.10) devrait contenir le terme \sqrt{g} , où g est l'accélération de la pesanteur, ce qui conduirait à donner à n la dimension $[L^{1/6}]$. En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité n pouvait s'écrire :

$$n = [\phi(R_h / \varepsilon)] \varepsilon^{1/6} \quad (1.13)$$

où ε est la rugosité absolue. Si la fonction $\phi(R_h / \varepsilon)$ doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité n doit alors avoir la même dimension que $\varepsilon^{1/6}$, c'est à dire $[L^{1/6}]$. *Hager* (1989) a pu montrer que la rugosité absolue ε et le coefficient k de *Strickler* sont liés par la relation :

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{g}} = 1 \quad (1.14)$$

D'autre part, il est également possible d'admettre que le terme $1,486/n$ figurant dans la

relation (1.12) puisse contenir de manière implicite la dimension $[L^{1/3} T^{-1}]$, ou que $\phi(R_h/\varepsilon)$ contienne un facteur ayant une dimension. Ceci rendrait alors le coefficient n adimensionnel. Sous cette dernière condition, la conversion en unité anglaise conduit à la constante $(3,2808)^{1/3} = 1,486$, puisque $1\text{m} = 3,2808\text{ ft}$.

Si l'on considère que la dimension de n est $[L^{1/6}]$, sa valeur numérique en unité anglaise doit être différente de sa valeur en unité métrique, à moins de tenir compte d'un facteur de correction ou de compensation.

Si n est la valeur du coefficient de rugosité en unité métrique et n' en unité anglaise, on peut écrire alors $n' = (3,2808)^{1/6} n = 1,219 n$. Lorsque la formule de *Manning* subit la conversion de l'unité métrique vers l'unité anglaise, la constante figurant dans l'expression qui en résulte est égale à $(3,2808)^{1/3 + 1/6} = \sqrt{3,2808} = 1,811$ et la dimension de n est alors $[L^{1/6}]$.

En raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, la formule de *Manning – Strickler* est celle qui est largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de n de *Manning* et n de *Kutter* sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant la formule de *Manning – Strickler*, exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy*, on peut écrire $C = (1/n)R_h^{1/6}$. Ainsi, la formule de *Manning – Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

De nombreuses études dont celle de *Bazin*, et qui concernent les canaux artificiels, ont montré que l'exposant de R_h ne serait pas égal à $2/3$ comme le suggère *Manning*, mais sa valeur moyenne varie entre 0,6499 et 0,8395 suivant la forme du canal et la rugosité de celui-ci. Des études suggèrent de prendre la valeur $3/4$ pour l'exposant de R_h , tandis que *Blench* (1939) considère le coefficient C comme une variable qui dépend non seulement de n mais aussi de R_h et dont l'exposant dépend à son tour de n et de R_h ; c'est la formule dite de *Pavlovski* (1940) qui s'exprime, en unité métrique, par :

$$C = (1/n)R_h^y \tag{1.15}$$

où $y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 0,10)$.

La relation (1.15) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour n compris entre 0,011 et 0,04. Des relations approchées au calcul de l'exposant y ont été également proposées : $y = 1,5 \sqrt{n}$ pour $R_h < 1$ m et $y = 1,3 \sqrt{n}$ pour $R_h > 1$ m.

L'application de la formule de *Manning – Strickler*, comme celle d'ailleurs de *Ganguillet – Kutter* est tributaire de la valeur du coefficient n . Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer n . Évaluer n revient à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. En se référant à la bibliographie, plusieurs auteurs concluent que pour estimer n les étapes suivantes sont nécessaires :

1. Recenser puis apprécier l'influence des paramètres pouvant affecter le coefficient n , tels que la présence de végétation dans le canal, la dimension moyenne des grains du matériau constituant les parois du canal, l'irrégularité du canal due à la présence de courbures ou de variation même réduite de la section transversale de l'écoulement, etc...
2. Consulter les tables de valeurs de n déjà évalué pour des canaux de différents types.
3. Examiner et s'informer de l'état physique caractérisant des canaux existants et dont la valeur de n a déjà été déterminée.
4. Déterminer la valeur de n par une approche analytique basée sur la répartition théorique de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement.

1.4. Formule de *Darcy – Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement

La formule de *Darcy – Weisbach* exprime la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge J , la vitesse moyenne V de l'écoulement et le diamètre hydraulique $D_h = 4A/P = 4R_h$. Le facteur de proportionnalité étant le coefficient de frottement f . Le gradient J est inversement proportionnel à D_h et proportionnel au carré de la vitesse V :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.16)$$

La formule (1.16) est aussi bien valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées.

Le coefficient de frottement f peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

La formule de *Colebrook – White* permet d'évaluer le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régimes de transition, turbulent rugueux et lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) , R > 2300 \quad (1.17)$$

Dans le cas où le régime d'écoulement est de transition, le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R . La représentation graphique de la relation (1.17) dans un système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques montre que, pour la même valeur de ε/D_h , le coefficient de frottement f diminue lorsque R augmente. Pour des valeurs données de ε/D_h et de R , l'évaluation du coefficient de frottement f , par application de la relation (1.17), nécessite un procédé itératif. Une excellente relation approchée de (1.17) a été proposée par *Achour* (*Achour, 2007*):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.18)$$

A partir d'une valeur $R = R_{lim}$ dépendant de la valeur de ε/D_h , le coefficient de frottement demeure pratiquement inchangé avec l'augmentation de R . Cette particularité caractérise la nature de l'écoulement dans la zone de pleine turbulence ou domaine rugueux. Dans ce domaine, le coefficient de frottement f peut être évalué par la relation explicite de *Nikuradse* :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \quad (1.19)$$

La relation (1.19) peut être obtenue à partir des relations (1.17) ou (1.18), en écrivant que $R \rightarrow \infty$.

Dans le domaine pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$, la relation (1.17) mène à écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.20)$$

et l'évaluation de f nécessite également un procédé itératif. Dans le même domaine

d'écoulement, ce procédé itératif peut être évité par l'application de la relation (1.18) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.21)$$

Dans la large gamme $2,35 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^9$, l'application de la relation (1.21) occasionne un écart relatif inférieur à 0,7% par rapport à (1.20).

La formule de *Swamee* et *Jain* (1976) permet également d'évaluer de manière explicite le coefficient f dans le domaine pratiquement lisse :

$$f = \left[2 \log \left(\frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.22)$$

Mais, dans la même gamme de valeurs ci-dessus indiquée de R , l'application de (1.22) occasionne un écart relatif atteignant 2,8% par rapport à (1.20). Dans une gamme plus restreinte de R telle que $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$, cet écart se réduit mais atteint tout de même 1,5%.

En comparant les relations (1.1) et (1.16), on peut montrer que le coefficient C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement f :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.23)$$

1.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme

1.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme

La distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent demeure quasi uniforme lorsque la couche limite est pleinement développée, et suit approximativement une loi logarithmique. La contrainte de cisaillement ou tangentielle en n'importe quel point de l'écoulement turbulent se produisant au-dessus d'une paroi solide est donnée par la relation de *Prandtl* (1926) :

$$\tau = \rho l^2 (dv/dy)^2 \quad (1.24)$$

ρ est la masse volumique du liquide en écoulement, l est une longueur caractéristique dite

longueur de mélange, dv/dy est le gradient de vitesse à la hauteur y de la paroi solide et normale à celle-ci. La longueur de mélange peut être interprétée comme étant la longueur au-delà de laquelle la particule liquide voit sa quantité de mouvement diminuer.

Dans la région proche de la paroi solide, *Prandtl* utilise deux approches:

1. La longueur de mélange est proportionnelle à y , soit $l = Ky$ où K est le facteur de proportionnalité entre l et y et dont la valeur a été estimée à 0,40 environ.
2. La contrainte tangentielle est constante.

Puisque la contrainte tangentielle à la surface est égale à la force tractrice unitaire τ_0 , la constance de la contrainte tangentielle implique que $\tau = \tau_0$. La relation (1.24) devient :

$$dv = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{dy}{y} \quad (1.25)$$

L'intégration de la relation (1.25) mène à :

$$v = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (1.26)$$

" Ln " désigne le logarithme népérien et y_0 représente la constante d'intégration. La force tractrice τ_0 s'exprime par la relation $\tau_0 = (\varpi R_h J)$ où $\varpi = \rho g$ est le poids spécifique du liquide et J est la pente du canal. On peut alors écrire que $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_h J} = v_f$, où v_f a la dimension d'une vitesse et elle est connue sous le nom de vitesse de frottement. La relation (1.26) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (1.27)$$

La relation (1.27) indique que la vitesse dans un écoulement turbulent est une fonction logarithmique de la distance y . Elle est connue sous le nom de loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses. Cette loi a été vérifiée par plusieurs expériences et les résultats ont montré une remarquable similitude entre la distribution des vitesses observée expérimentalement et celle issue de la théorie. Lorsque la surface solide est lisse, la

constante y_o ne dépend que de la vitesse de frottement v_f et de la viscosité cinématique ν du liquide:

$$y_o = m_o \frac{\nu}{v_f} \quad (1.28)$$

m_o est une constante égale à 1/9 lorsque la surface solide est lisse. Cette constante a été déduite des essais de *Nikuradse* concernant les conduites lisses. La combinaison des relations (1.27) et (1.28) donne ainsi, pour les surfaces lisses, la répartition de la vitesse dans un écoulement turbulent :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{9y v_f}{\nu} \quad (1.29)$$

Lorsque la surface est rugueuse, la constante y_o dépend de la rugosité absolue ε :

$$y_o \approx m_o \varepsilon \quad (1.30)$$

La constante m_o est approximativement égale à 1/30.

La relation (1.27) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{30y}{\varepsilon} \quad (1.31)$$

1.5.2. Équation de *Keulegan*

En utilisant la loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses, *Keulegan* (1938) aboutit à des équations donnant la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent dans les canaux ouverts par une approche théorique simple. En se basant sur l'équation de continuité, le débit volume Q passant par une section quelconque de l'écoulement peut s'écrire :

$$Q = VA = \int_{\delta_o=0}^{y=h} v B dy \quad (1.32)$$

V est la vitesse moyenne de l'écoulement, h est la profondeur, A est l'aire de la section mouillée, B est la longueur de la courbe d'égale vitesse (figure 1.3) et y est la profondeur

verticale comptée à partir de la surface jusqu'à la courbe d'égale vitesse. la sous – couche laminaire d'épaisseur δ_0 est considérée comme étant très mince ($\delta_0 = 0$).

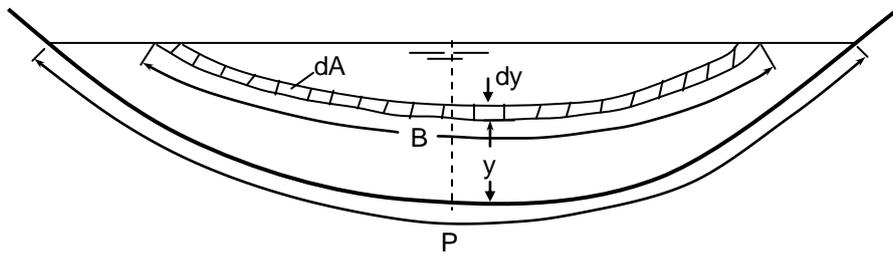


Figure 1.3 : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de *Keulegan*.

Le maximum de vitesse est supposé être à la surface et que la longueur B est proportionnelle à la distance y ; ceci permet d'écrire :

$$B = P - \gamma y \quad (1.33)$$

P est le périmètre mouillé de la surface considérée et γ est une fonction dépendant de la forme de la section. Ainsi, l'aire de la section mouillée A est :

$$A = \int_0^h B dy = Ph - \frac{1}{2} \gamma h^2 \quad (1.34)$$

La combinaison des relations (1.27), (1.32), (1.33) et (1.34) permet d'écrire, après intégration :

$$V = v_f \left[5,75 \log \left[\frac{h}{m_o R_h} \exp \left(-1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right] + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.35)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (1.35) est une fonction de la forme de la section du canal considéré. Cependant, la variation que subit ce terme pour différentes formes de canaux est relativement faible et il a été remplacé par une constante désignée par A_o . La relation (1.35) prend alors une forme plus simplifiée et s'écrit :

$$V = v_f \left[A_o + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.36)$$

La relation (1.36) représente l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts.

Pour les canaux à parois lisses, l'étude de *Keulegan*, basée sur les valeurs expérimentales de *Nikuradse*, montre que $A_o \approx 3,25$. Ainsi, l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois lisses est, en tenant compte de (1.28):

$$V = v_f \left[3,25 + 5,75 \log \left(\frac{R_h v_f}{\nu} \right) \right] \quad (1.37)$$

En ce qui concerne les canaux ouverts à parois rugueuses, *Keulegan* montre, après avoir analysé les mesures de *Bazin*, que la constante A_o varie dans une large gamme, en fonction de la forme de la section du canal ($3,23 \leq A_o \leq 16,92$), et la valeur moyenne $A_o = 6,25$ est alors adoptée. Ainsi, l'expression théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois rugueuses est, en tenant compte de (1.30):

$$V = v_f \left[6,25 + 5,75 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \right] \quad (1.38)$$

En combinant les expressions $V = C \sqrt{R_h J}$ de *Chézy* (relation 1.1) et $\sqrt{g R_h J} = v_f$ de la vitesse de frottement, on peut écrire :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (1.39)$$

ou bien, en faisant appel à (1.23):

$$\frac{V}{v_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{f}} \quad (1.40)$$

En tenant compte de (1.39) et de la définition du nombre de *Reynolds* modifié tel que $R = VR_h/\nu$, les relations (1.37) et (1.38) permettent d'exprimer les coefficients C et f , respectivement pour un canal à parois lisses et rugueuses :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 3,25 + 5,75 \log \left(\frac{R \sqrt{g}}{C} \right) \quad (1.41)$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 6,25 + 5,75 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.42)$$

ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,231 + 2,033 \log (R \sqrt{f}) \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,210 + 2,033 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.44)$$

I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de *Manning*

En éliminant le coefficient C de *Chézy* entre les relations $C = (1/n)R_h^{1/6}$ et (1.42), le coefficient n de *Manning* s'écrit :

$$n = \varepsilon^{1/6} \phi(R_h / \varepsilon) \quad (1.45)$$

avec :

$$\phi(R_h / \varepsilon) = \frac{\left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right)^{1/6}}{\sqrt{g} \left[6,25 + 5,75 \log \frac{R_h}{\varepsilon} \right]} \quad (1.46)$$

La représentation graphique de (1.46), pour une large gamme de valeurs de la rugosité relative (R_h / ε) , se traduit par une courbe plate presque horizontale. La fonction $\phi(R_h / \varepsilon)$ peut alors être remplacée par une constante dont la valeur est approximativement égale à 0,0342.

Si l'on admet que la fonction $\phi(R_h / \varepsilon)$ est constante, la relation (1.45) indique alors que le coefficient n de *Manning* varie en fonction de la puissance 1/6 de la rugosité absolue ε . En d'autres termes, lorsque ε subit une variation de 1/1000 ème, le coefficient n ne varie que de 1/3 environ. Ainsi, ε est donc plus sensible que le coefficient n . En conséquence,

l'application de la relation (1.45) n'entraîne qu'une erreur relativement faible sur le

calcul du coefficient n .

L'étude comparative de *Bakhmeteff* et *Feodoroff* (1943) entre les formules de *Manning*, de Ganguillet – Kutter et de *Prandtl – Von – Karman* mise sous une forme identique à celle de la relation (1.45), montre que la formule de *Manning* est la plus adaptée.

I.7. Méthode de détermination du coefficient de *Manning*

Deux méthodes de détermination du coefficient n de *Manning*, basées sur la répartition théorique des vitesses dans un canal à parois rugueuses, ont été développées. La première méthode, dite méthode liée à la mesure de la rugosité, admet la validité de la relation (1.46). Ainsi, la valeur de n peut être calculée en application de (1.45) pour la valeur connue de la rugosité absolue ε

La seconde méthode est dite méthode liée à la mesure de la vitesse. En se référant à la loi logarithmique de la répartition de la vitesse exprimée par (1.31), on peut s'apercevoir que cette répartition dépend de la rugosité absolue ε liée au coefficient n de *Manning* par la relation (1.45). En d'autres termes, la rugosité dans le sens du coefficient n de *Manning* peut être considérée comme le facteur prédominant affectant la répartition de la vitesse. Si celle-ci était connue, le coefficient n de *Manning* peut alors être évalué.

On définit $V_{0,2}$ la vitesse aux deux dixièmes de la profondeur ou à la distance $0,8y$ comptée à partir du fond du canal de grande largeur et à parois rugueuses; y représente la profondeur de l'écoulement. En vertu de la relation (1.31), on peut écrire:

$$V_{0,2} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left(\frac{24y}{\varepsilon} \right) \quad (1.47)$$

$$V_{0,8} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left(\frac{6y}{\varepsilon} \right) \quad (1.48)$$

En éliminant la vitesse v_f entre les relations (1.47) et (1.48), on peut écrire en posant $X = V_{0,2}/V_{0,8}$:

$$(1 - X) \operatorname{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = X \operatorname{Ln} 6 - \operatorname{Ln} 24$$

ou bien :

$$\text{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = \frac{1,792 X - 3,178}{1 - X} \quad (1.49)$$

L'équation (1.38), qui exprime la vitesse moyenne de l'écoulement dans un canal à parois rugueuses, devient alors pour un canal de grande largeur ($R_h = y$):

$$\frac{V}{v_f} = \frac{1,775 X + 1,686}{X - 1} \quad (1.50)$$

En outre, la combinaison des relations $C = (1/n)R_h^{1/6}$ et (1.38), pour $R_h = y$, donne :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{y^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (1.51)$$

Ainsi, le coefficient n de *Manning* peut être évalué à partir de l'égalité des relations (1.50) et (1.51), soit :

$$n = \frac{y^{1/6}(X - 1)}{1,775\sqrt{g}(X + 0,95)} \quad (1.52)$$

La relation (1.52) permet ainsi d'évaluer le coefficient n de *Manning* pour le cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique.

I.8. Calcul de l'écoulement uniforme

I.8.1. Conductivité

Le débit volume Q de l'écoulement uniforme dans une conduite ou un canal s'exprime par le produit de la vitesse moyenne V et l'aire de la section mouillée A :

$$Q = VA = CAR_h^\beta J^\gamma \quad (1.53)$$

La relation (1.53) peut aussi s'écrire :

$$Q = KJ^\gamma \quad (1.54)$$

où :

$$K = CAR_h^\beta \quad (1.55)$$

Le facteur K est connu sous le terme de conductivité de la conduite ou du canal. Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que K est directement lié au débit volume Q .

Lorsque l'une des relations de *Chézy* ou de *Manning* est utilisée, correspondant à $\gamma = 1/2$, la relation (1.54) permet alors de déduire que la conductivité est :

$$K = Q / \sqrt{J} \quad (1.56)$$

La relation (1.56) peut être utilisée pour calculer la conductivité K lorsque le débit volume Q et la pente J sont donnés.

Lorsque la formule de *Chézy* est utilisée, correspondant à $\gamma = 1/2$, l'équation (1.55) devient :

$$K = CAR_h^{1/2} \quad (1.57)$$

C est le coefficient de résistance de *Chézy*.

Lorsque la relation de *Manning* est utilisée, la conductivité K s'écrit :

$$K = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \quad (1.58)$$

Les relations (1.57) et (1.58) peuvent être utilisées pour calculer la conductivité K , lorsque la géométrie de la section ainsi que le coefficient de résistance sont connus.

I.8.2. Facteur de section

L'expression $AR_h^{2/3}$ est appelée facteur de section au calcul de l'écoulement uniforme. Selon la relation (1.58), nous pouvons écrire :

$$AR_h^{2/3} = nK \quad (1.59)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.56) :

$$AR_h^{2/3} = \frac{nQ}{\sqrt{J}} \quad (1.60)$$

Le second terme de la relation (1.60) contient les paramètres n , Q et J , alors que le premier terme dépend de la géométrie de la section mouillée de la conduite ou du canal considéré. Pour les valeurs données de n , Q et J , il n'existe qu'une profondeur possible pour maintenir l'écoulement uniforme, à condition toutefois que $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur. Cette profondeur est la profondeur normale.

Lorsque n et J sont connus, la relation (1.60) donne un seul débit pour maintenir l'écoulement uniforme dans la section considérée de la conduite ou du canal, à condition toutefois que $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur. Ce débit est appelé débit normal.

Notons que dans le cas le plus général, la quantité $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Dans ce cas, $AR_h^{2/3}$ augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. La valeur maximale de $AR_h^{2/3}$ est atteinte à une profondeur légèrement inférieure à la profondeur de pleine section. En conséquence, il est possible d'avoir deux profondeurs pour la même valeur de $AR_h^{2/3}$; une profondeur inférieure et l'autre supérieure à la profondeur correspondant au maximum de $AR_h^{2/3}$.

La relation (1.60) peut être très utile pour l'analyse et le calcul de l'écoulement uniforme. Lorsque le débit volume Q , la pente J et n sont connus, cette relation donne la valeur du facteur de section $A_n R_{h,n}^{2/3}$, où l'indice n désigne l'écoulement normal, et par suite la profondeur normale y_n . D'autre part, lorsque n , J et y_n sont donnés, la relation (1.60) permet de calculer le débit volume normal Q_n .

Dans le but de simplifier le calcul, des courbes adimensionnelles ont été tracées pour le cas de la conduite de forme circulaire en particulier, montrant la relation entre la

profondeur et le facteur de section $AR_h^{2/3}$. Ces courbes sont un moyen de détermination de la profondeur pour un facteur de section $AR_h^{2/3}$ donné et vice-versa.

Pour le cas de la conduite de forme circulaire de diamètre D , le tableau de valeurs suivant a été dressé (Chow, 1973) et a permis le tracé de la courbe de la figure 1.4.

Tableau 1.1 : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)

y_n / D	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,01	0,0000
0,02	0,0002
0,03	0,0005
0,04	0,0009
0,05	0,0015
0,06	0,0022
0,07	0,0031
0,08	0,0040
0,09	0,0052
0,10	0,0065
0,11	0,0079
0,12	0,0095
0,13	0,0113
0,14	0,0131
0,15	0,0152
0,16	0,0173
0,17	0,0196
0,18	0,0220
0,19	0,0247
0,20	0,0273
0,21	0,0301
0,22	0,0333
0,23	0,0359
0,24	0,0394
0,25	0,0427

Tableau 1.1 (Suite) : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)

y_n / D	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,26	0,0464
0,27	0,0497
0,28	0,0536
0,29	0,0571
0,30	0,0610
0,31	0,0650
0,32	0,0690
0,33	0,0736
0,34	0,0776
0,35	0,0820
0,36	0,0864
0,37	0,0909
0,38	0,0955
0,39	0,1020
0,40	0,1050
0,41	0,1100
0,42	0,1147
0,43	0,1196
0,44	0,1245
0,45	0,1298
0,46	0,1348
0,47	0,1401
0,48	0,1452
0,49	0,1505
0,50	0,1558
0,55	0,1825
0,60	0,2092
0,65	0,2358
0,70	0,2608
0,75	0,2840
0,80	0,3045
0,85	0,3212
0,90	0,3324
0,95	0,3349
1,00	0,3117

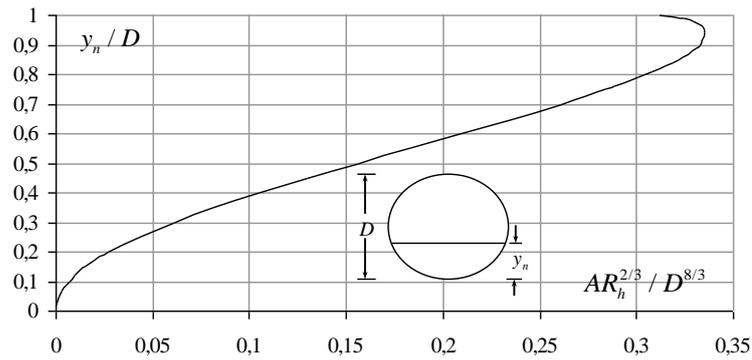


Figure 1.4 : Facteur de section relatif en fonction de la profondeur normale relative pour le cas de la conduite de forme circulaire. Courbe tracée selon les valeurs du tableau 1.1.

I.8.3. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire

En prenant pour exemple la conduite circulaire, les courbes adimensionnelles pour les quantités $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$ et $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$, où l'indice « o » est relatif à l'état plein de la conduite, sont représentées sur la figure 1.5 (Camp, 1946).

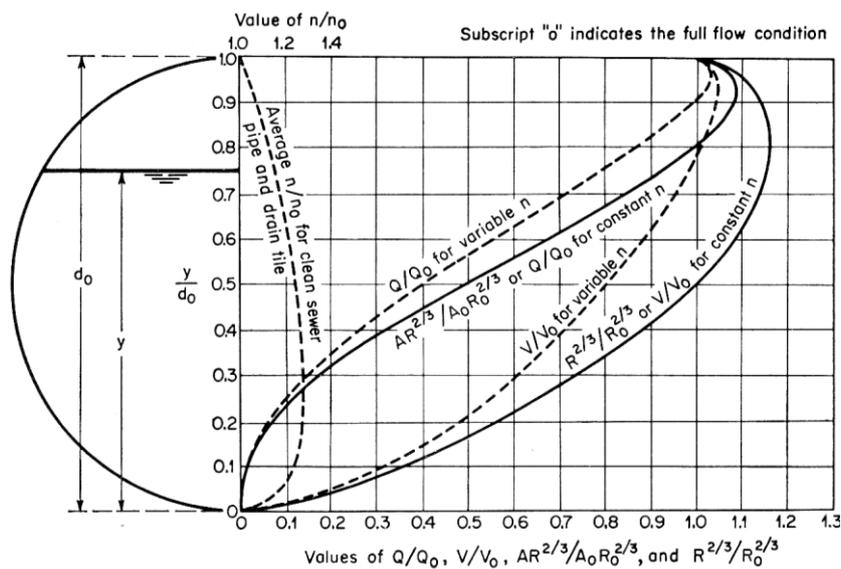


Figure 1.5 : Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire selon Camp (1946).

Si la valeur du coefficient n de Manning est considéré comme une constante ou indépendant de la variation de la profondeur, les deux courbes $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$ et $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$

représentent respectivement la variation du rapport Q/Q_o et V/V_o . Les deux courbes, en trait plein, montre des valeurs maximales qui s'obtiennent à environ $0,938d_o$ et $0,81d_o$ respectivement. D'un point de vue mathématique, la profondeur correspondant au débit maximum, soit $0,938d_o$, peut être simplement obtenue en égalant à zéro la dérivée première de $AR_h^{2/3}$ par rapport à la profondeur y , puisque le débit volume Q , calculé par la formule de *Manning*, est proportionnel à $AR_h^{2/3}$ pour n et J constants. Parallèlement, puisque la vitesse moyenne V , selon la formule de *Manning*, est proportionnelle à $R_h^{2/3}$, la profondeur correspondant au maximum de la vitesse, soit $0,81d_o$, peut être obtenue en égalant à zéro la dérivée première de $R_h^{2/3}$ par rapport à la profondeur y .

En outre, la courbe adimensionnelle Q/Q_o de la figure 1.5 montre que, lorsque la profondeur est environ plus grande que $0,82d_o$, il est possible d'avoir deux profondeurs différentes pour le même débit volume ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur $0,938d_o$.

En outre, la courbe V/V_o montre que, lorsque la profondeur est plus grande que $y/d_o = 1/2$, il est possible d'avoir deux profondeurs différentes pour la même vitesse ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur $0,81d_o$.

Toutes ces remarques restent valables tant que le coefficient de résistance est supposé être constant, même si la profondeur varie. Il a été cependant constaté (figure 1.5) que le coefficient de résistance augmente de plus de 28% de $1,00 d_o$ à $0,25d_o$ où il apparaît clairement admettre un maximum. Cette variation du coefficient de résistance fait que le maximum de débit et de vitesse apparaît à environ $0,97d_o$ et $0,94d_o$ respectivement. Les courbes correspondantes de Q/Q_o et de V/V_o ont été représentées en trait discontinu sur la figure 1.5.

En considérant comme étant constant le coefficient de résistance n , la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même que celle de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine que celle de l'écoulement à pleine section. Par contre, si l'on considère que n varie en fonction de la profondeur, comme il est indiqué sur la figure 1.5, alors la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

I.9. Conclusion

Le chapitre précédent a eu pour objectif de passer en revue les principaux résultats connus sur l'écoulement uniforme. Nous avons précisé les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme dont les caractéristiques ont été représentées sur la figure 1.1, en comparant la pente du canal à la pente critique.

A partir d'un schéma de définition, nous avons montré les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, ce qui a conduit à la démonstration de la formule universellement connue de *Chézy*. Nous avons montré que le coefficient de résistance C de *Chézy* est tel que $C = \sqrt{\rho g / K}$, où ρ est la masse volumique du liquide en écoulement, g est l'accélération de la pesanteur et K est un facteur de proportionnalité intervenant dans l'expression de la force de résistance à l'écoulement (Relation 1.2). Nous avons présenté trois relations permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. La première relation est celle de *Ganguillet – Kutter* dans laquelle le coefficient C est tel que $C(J, R_h, n)$, où J est la pente de la ligne de charge totale égale à la pente géométrique du canal, R_h est le rayon hydraulique et n est le coefficient de rugosité. La seconde relation est celle de *Bazin* dans laquelle le coefficient C est tel que $C(R_h, m)$, où m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré. La troisième relation est celle de *Powell*. Elle exprime de manière implicite le coefficient C en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal.

Nous avons présenté la formule de *Manning* ou de *Manning-Strickler* qui exprime la vitesse moyenne du liquide en écoulement. Le coefficient n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler*) a été discuté et son unité a été précisée. Le coefficient k est lié à la rugosité absolue ε par la relation de *Hager*. Nous avons surtout précisé qu'il n'existe aucune méthode analytique d'évaluation du coefficient n de *Manning*, à l'exception du cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique. Le coefficient n est alors donné par la relation (1.52), après avoir déterminé les vitesses $V_{0,2}$ et $V_{0,8}$. Pour l'évaluation pratique du coefficient n , nous avons présenté les étapes à suivre, préconisées par certains auteurs.

La relation de *Darcy-Weisbach* a été présentée (Relation 1.16). Elle exprime la pente de la ligne de charge totale comme étant un paramètre inversement proportionnel au diamètre hydraulique et directement proportionnel à la hauteur capable de la vitesse de l'écoulement. Le facteur de proportionnalité est représenté par le coefficient f , appelé coefficient de frottement. Celui-ci peut être évalué par la relation de *Colebrook-White* en s'appuyant sur un procédé itératif. Des relations explicites au calcul de f ont été proposées par certains auteurs, tels que *Achour* et *Swamee*.

Le chapitre a été achevé par le calcul de l'écoulement uniforme qui intéresse notre étude. Nous avons rappelé la notion de conductivité qui est représentée par le facteur K . Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que K est directement lié au débit volume Q (Relation 1.56). Nous avons également rappelé la notion de facteur de section dont l'importance est capitale dans le calcul de l'écoulement uniforme. Le facteur de section est représenté par la quantité $AR_h^{2/3}$ et dépend, par conséquent, de la géométrie de la section de la conduite ou du canal considéré. Nous avons indiqué que dans le cas le plus général, la quantité $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Pour ce type de conduits fermés, le facteur de section $AR_h^{2/3}$ augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. Cette particularité a été illustrée sur la courbe adimensionnelle de la figure 1.4.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* (Figure 1.5) ont permis l'analyse des caractéristiques de l'écoulement dans une conduite de forme circulaire. Le facteur de section, rapporté à celui de la conduite pleine, a été représenté en fonction du paramètre de forme de la section pour les cas d'un coefficient de *Manning* supposé constant et dépendant de la variation de la profondeur. Dans le premier cas, la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même que celle de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine que celle de l'écoulement à pleine section. Par contre, dans le second cas, la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

Les courbes adimensionnelles de Camp ont pu mettre en évidence la nature variable du coefficient de n de *Manning* et son incidence sur les valeurs maximales du débit volume Q et de la vitesse moyenne V .

CHAPITRE II

COEFFICIENT DE CHEZY ET DE MANNING EN ECOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

II.1. Introduction

Les écoulements uniformes dans les canaux et conduites sont régis par les relations de *Chézy* et de *Manning*, dites « relations de l'écoulement uniforme ». Ces relations expriment le débit volume écoulé par le canal en fonction des paramètres géométriques de l'ouvrage et hydrauliques de l'écoulement. Dans ces relations, nous pouvons relever la présence des coefficients de résistance à l'écoulement, dits de *Chézy* et de *Manning* que l'on note souvent par les lettres C et n respectivement.

Dans la pratique, il existe des tableaux qui donnent les valeurs des coefficients C et n en fonction de la nature du matériau constituant le canal. Ces valeurs de C et de n sont tabulées de manière indépendante de la profondeur de l'écoulement ou du rayon hydraulique et encore moins du nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement.

Donner des valeurs constantes aux coefficients C et n , suppose que l'écoulement est en régime turbulent rugueux où le nombre de *Reynolds* n'a aucune influence. Cependant, cette démarche peut paraître peu fiable eu égard au fait que le coefficient de résistance à l'écoulement doit en principe dépendre des caractéristiques hydrauliques de l'écoulement, en particulier du rayon hydraulique, de la pente géométrique et de la viscosité cinématique du liquide. Cette vision est beaucoup plus moderne et nécessite une étude particulière en observant l'évolution de ces coefficients de résistance lorsque l'écoulement est supposé être uniforme.

C'est dans ce contexte que nous proposons le présent chapitre dans lequel nous établissons des relations générales destinées non seulement à l'évaluation des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning*, mais à examiner aussi leur variation en fonction de la profondeur de l'écoulement et de d'autres paramètres hydrauliques qui influencent l'écoulement.

II.2. Expression du coefficient de Chézy dans un canal rectangulaire

Le débit volume Q écoulé par un canal de forme quelconque s'exprime par la relation suivante (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.1)$$

Où :

A est l'aire de la section mouillée, R_h est le rayon hydraulique, i est la pente du canal et R est un nombre de *Reynolds* défini par la relation suivante :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.2)$$

ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour un canal de forme rectangulaire, l'aire de la section mouillée A et le périmètre mouillé P s'écrivent respectivement :

$$A = b y_n \quad (2.3)$$

Où b est la largeur du canal et y_n est la profondeur normale de l'écoulement.

$$P = b + 2y_n \quad (2.4)$$

A partir des relations (2.3) et (2.4), nous pouvons écrire que le rayon hydraulique $R_h = A / P$ est :

$$R_h = \frac{b y_n}{b + 2y_n} \quad (2.5)$$

La relation (2.5) peut également s'écrire :

$$R_h = \frac{y_n}{y_n} \frac{b}{\left(\frac{b}{y_n} + 2 \right)}$$

Soit :

$$R_h = \frac{b}{(\eta + 2)} \quad (2.6)$$

Où $\eta = b / y_n$ exprime le paramètre de forme de la section mouillée, ou le rapport d'aspect.

Compte tenu de la relation (2.6), la relation (2.2) peut s'écrire :

$$R = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta+2)^{3/2}} \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \quad (2.7)$$

Désignons par :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta+2)^{3/2}} \quad (2.8)$$

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \quad (2.9)$$

Ainsi, la relation (2.7) s'écrit :

$$R = R^* \varphi(\eta) \quad (2.10)$$

D'autre part, la relation de Chézy s'écrit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (2.11)$$

Où C est le coefficient de Chézy.

En comparant les relations (2.1) et (2.11), nous pouvons déduire que le coefficient C de Chézy est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.12)$$

La relation (2.12) peut s'écrire en termes adimensionnels sous la forme suivante :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.13)$$

En introduisant les relations (2.6) et (2.10) dans la relation (2.13), il vient que :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left[\frac{\varepsilon/b}{14,8/(\eta+2)} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)}\right] \quad (2.14)$$

En tenant compte de la relation (2.8), la quantité $14,8/(\eta+2)$ peut s'écrire :

$$14,8/(\eta+2) = \frac{14,8[\varphi(\eta)]^{2/3}}{(32\sqrt{2})^{2/3}}$$

Après calcul, il vient que :

$$14,8/(\eta + 2) = 1,165[\varphi(\eta)]^{2/3} \quad (2.15)$$

En substituant la relation (2.15) dans la relation (2.14), il vient que :

$$C/\sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log \left[\frac{\varepsilon/b}{1,165[\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right] \quad (2.16)$$

Dans la relation (2.16), ε/b représente la rugosité relative du canal rectangulaire étudié. Au regard de la relation (2.16), il apparaît que C/\sqrt{g} dépend de trois paramètres qui sont la rugosité relative ε/b , le paramètre de forme η et le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Nous pouvons alors écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C/\sqrt{g} = f(\varepsilon/b; \eta; R^*) \quad (2.17)$$

II.3. Variation du coefficient de Chézy

Pour représenter la variation du coefficient sans dimension C/\sqrt{g} en fonction du paramètre de forme η , nous pouvons faire appel à la relation (2.16). On fixe une valeur de la rugosité relative ε/b et l'on fait varier le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Les tableaux suivants ont été établis selon cette procédure.

La valeur nulle du paramètre de forme η correspond, pour un canal rectangulaire donné, à une profondeur d'écoulement très élevée.

Sous chacun des tableaux, nous avons représenté et commenté la variation de C/\sqrt{g} en fonction du paramètre de forme η .

Tableau 2.1 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b=0$

$\varepsilon/b=0$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η	$\varphi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0	16	23,7722866	29,4291409	35,0859951	40,7428494	46,3997036
0,1	14,8708583	23,5924895	29,2493437	34,906198	40,5630522	46,2199065
0,2	13,8685468	23,421058	29,0779123	34,7347665	40,3916208	46,048475
0,3	12,9739799	23,2572484	28,9141026	34,5709569	40,2278111	45,8846654
0,4	12,1716124	23,1004115	28,7572657	34,41412	40,0709742	45,7278285
0,5	11,448668	22,9499779	28,6068321	34,2636864	39,9205406	45,5773949
0,6	10,7945602	22,8054452	28,4622995	34,1191537	39,776008	45,4328622
0,7	10,20045	22,6663679	28,3232222	33,9800764	39,6369307	45,2937849
0,8	9,65890577	22,5323491	28,1892034	33,8460576	39,5029119	45,1597661
0,9	9,16363916	22,4030337	28,059888	33,7167422	39,3735965	45,0304507
1	8,70929686	22,2781027	27,934957	33,5918112	39,2486655	44,9055197
1,1	8,2912963	22,1572686	27,8141229	33,4709771	39,1278314	44,7846856
1,2	7,90569415	22,0402711	27,6971254	33,3539796	39,0108339	44,6676881
1,3	7,54908067	21,9268742	27,5837284	33,2405827	38,8974369	44,5542912
1,4	7,21849401	21,8168627	27,4737169	33,1305712	38,7874254	44,4442797
1,5	6,91135036	21,7100404	27,3668947	33,0237489	38,6806031	44,3374574
1,6	6,6253866	21,6062276	27,2630818	32,9199361	38,5767903	44,2336446
1,7	6,35861295	21,5052593	27,1621136	32,8189678	38,4758221	44,1326763
1,8	6,10927369	21,4069839	27,0638381	32,7206924	38,3775466	44,0344009
1,9	5,87581435	21,3112613	26,9681156	32,6249698	38,2818241	43,9386783
2	5,65685425	21,2179624	26,8748167	32,5316709	38,1885252	43,8453794
2,1	5,45116328	21,1269674	26,7838216	32,4406759	38,0975301	43,7543844
2,2	5,25764236	21,0381652	26,6950195	32,3518737	38,008728	43,6655822
2,3	5,07530671	20,9514528	26,608307	32,2651613	37,9220155	43,5788698
2,4	4,90327173	20,8667338	26,5235881	32,1804423	37,8372966	43,4941508
2,5	4,74074074	20,7839189	26,4407731	32,0976274	37,7544816	43,4113359
2,6	4,5869946	20,7029242	26,3597784	32,0166327	37,6734869	43,3303412
2,7	4,44138263	20,6236714	26,2805257	31,9373799	37,5942342	43,2510884
2,8	4,30331483	20,5460873	26,2029415	31,8597958	37,51665	43,1735043
2,9	4,17225512	20,4701029	26,1269572	31,7838114	37,4406656	43,0975199
3	4,04771541	20,3956537	26,0525079	31,7093622	37,3662164	43,0230707

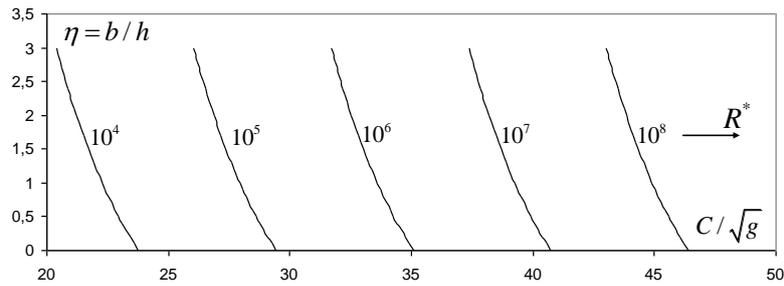


Figure 2.1 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/b=0$.

(Écoulement lisse)

La figure 2.1 montre clairement que pour un nombre de *Reynolds* modifié R^* fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le paramètre de forme η diminue. Cela signifie que pour un canal donné dont la largeur b est connue, le coefficient C/\sqrt{g} augmente lorsque la profondeur de l'écoulement y_n augmente. Nous pouvons également constater que pour un paramètre de forme η fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié R^* .

Tableau 2.2 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b = 10^{-4}$

$\varepsilon/b = 10^{-4}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η	$\varphi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0	16	23,2929741	26,6068903	27,4321645	27,5322566	27,5424938
0,1	14,8708583	23,1236938	26,4678668	27,30961	27,4121115	27,4226009
0,2	13,8685468	22,9620944	26,3350145	27,1926987	27,2975503	27,3082858
0,3	12,9739799	22,8075041	26,2077953	27,0809304	27,1880763	27,1990525
0,4	12,1716124	22,6593356	26,0857391	26,9738682	27,0832567	27,0944683
0,5	11,4486668	22,517073	25,9684326	26,8711291	26,9827113	26,9941535
0,6	10,7945602	22,3802601	25,8555107	26,7723748	26,8861051	26,8977731
0,7	10,20045	22,248492	25,7466492	26,6773054	26,7931405	26,8050302
0,8	9,65890577	22,1214073	25,6415589	26,5856536	26,7035528	26,71566
0,9	9,16363916	21,9986823	25,5399804	26,4971804	26,617105	26,6294258
1	8,70929686	21,8800258	25,4416809	26,4116709	26,5335843	26,5461151
1,1	8,2912963	21,765175	25,3464496	26,3289312	26,4527986	26,4655359
1,2	7,90569415	21,6538917	25,2540961	26,2487862	26,3745744	26,3875149
1,3	7,54908067	21,5459595	25,1644469	26,1710767	26,2987541	26,3118945
1,4	7,21849401	21,4411814	25,0773442	26,0956576	26,2251942	26,2385315
1,5	6,91135036	21,3393769	24,9926436	26,0223968	26,1537636	26,167295
1,6	6,6253866	21,2403811	24,9102126	25,951173	26,0843423	26,0980651
1,7	6,35861295	21,144042	24,8299298	25,8818749	26,0168204	26,0307318
1,8	6,10927369	21,05022	24,7516831	25,8144003	25,9510966	25,965194
1,9	5,87581435	20,9587861	24,675369	25,7486548	25,8870774	25,9013585
2	5,65685425	20,8696211	24,600892	25,684551	25,8246766	25,8391389
2,1	5,45116328	20,7826144	24,5281634	25,6220084	25,7638142	25,7784555
2,2	5,25764236	20,6976635	24,4571009	25,5609518	25,7044161	25,7192343
2,3	5,07530671	20,6146727	24,3876278	25,5013117	25,6464136	25,6614065
2,4	4,90327173	20,5335533	24,3196729	25,4430231	25,5897423	25,6049079
2,5	4,74074074	20,4542222	24,2531693	25,3860256	25,5343425	25,5496788
2,6	4,5869946	20,3766018	24,188055	25,3302626	25,4801583	25,4956634
2,7	4,44138263	20,3006196	24,1242714	25,2756813	25,4271375	25,4428096
2,8	4,30331483	20,2262073	24,0617638	25,2222321	25,375231	25,3910683
2,9	4,17225512	20,1533012	24,000481	25,1698685	25,324393	25,3403938
3	4,04771541	20,0818411	23,9403746	25,1185468	25,2745803	25,2907429

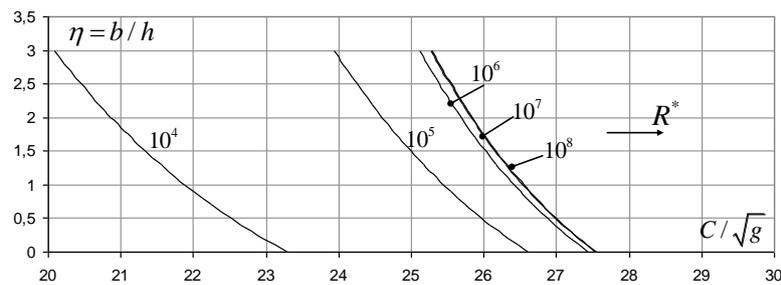


Figure 2.2 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/b = 10^{-4}$.

Les courbes se confondent pour $R^* \geq 10^7$.

Il ressort de la figure 2.2 que pour une valeur fixée du nombre de *Reynolds* modifié R^* , le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec la diminution du paramètre de forme η , comme dans le cas de la figure 2.1. Nous pouvons également observer que pour un paramètre de forme η donné, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Ce qui ressort de particulier de la figure 2.2, c'est le fait qu'au-delà de $R^* = 10^7$ les courbes de variation du coefficient C/\sqrt{g} se confondent. Cela signifie qu'à partir de la valeur $R^* = 10^7$, le nombre de *Reynolds* modifié R^* n'a aucune influence sur la variation du coefficient C/\sqrt{g} et le régime d'écoulement turbulent rugueux est alors atteint. En d'autres termes, il n'y a plus aucune influence de la viscosité cinématique ν au-delà de $R^* = 10^7$.

Tableau 2.3 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b = 10^{-3}$

$\varepsilon/b = 10^{-3}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η	$\varphi(\eta)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0	16	20,9500361	21,7753102	21,8754024	21,8856396	21,8866656
0,1	14,8708583	20,8110126	21,6527557	21,7552573	21,7657466	21,766798
0,2	13,8685468	20,6781603	21,5358445	21,640696	21,6514315	21,6525077
0,3	12,9739799	20,5509411	21,4240761	21,5312221	21,5421982	21,5432985
0,4	12,1716124	20,4288848	21,317014	21,4264024	21,437614	21,438738
0,5	11,448668	20,3115783	21,2142748	21,3258571	21,3372992	21,3384464
0,6	10,7945602	20,1986564	21,1155205	21,2292508	21,2409189	21,2420887
0,7	10,20045	20,089795	21,0204511	21,1362862	21,1481759	21,149368
0,8	9,65890577	19,9847046	20,9287994	21,0466986	21,0588057	21,0600197
0,9	9,16363916	19,8831262	20,8403261	20,9602508	20,9725716	20,9738071
1	8,70929686	19,7848266	20,7548166	20,87673	20,8892608	20,8905174
1,1	8,2912963	19,6895954	20,672077	20,7959444	20,8086817	20,809959
1,2	7,90569415	19,5972418	20,591932	20,7177202	20,7306606	20,7319584
1,3	7,54908067	19,5075927	20,5142224	20,6418999	20,6550403	20,6563582
1,4	7,21849401	19,42049	20,4388034	20,5683399	20,5816773	20,583015
1,5	6,91135036	19,3357893	20,3655426	20,4969093	20,5104407	20,511798
1,6	6,6253866	19,2533584	20,2943187	20,4274881	20,4412108	20,4425873
1,7	6,35861295	19,1730756	20,2250207	20,3599662	20,3738776	20,375273
1,8	6,10927369	19,0948288	20,1575461	20,2942423	20,3083398	20,309754
1,9	5,87581435	19,0185148	20,0918005	20,2302231	20,2445042	20,2459369
2	5,65685425	18,9440378	20,0276968	20,1678223	20,1822847	20,1837356
2,1	5,45116328	18,8713092	19,9651541	20,1069599	20,1216013	20,1230702
2,2	5,25764236	18,8002466	19,9040976	20,0475619	20,0623801	20,0638668
2,3	5,07530671	18,7307736	19,8444574	19,9895593	20,0045522	20,0060565
2,4	4,90327173	18,6628186	19,7861689	19,932888	19,9480536	19,9495753
2,5	4,74074074	18,5963151	19,7291714	19,8774882	19,8928245	19,8943634
2,6	4,5869946	18,5312007	19,6734084	19,8233041	19,8388092	19,8403651
2,7	4,44138263	18,4674171	19,6188271	19,7702832	19,7859553	19,787528
2,8	4,30331483	18,4049096	19,5653779	19,7183768	19,7342141	19,7358034
2,9	4,17225512	18,3436268	19,5130142	19,6675388	19,6835395	19,6851454
3	4,04771541	18,2835203	19,4616926	19,6177261	19,6338886	19,6355107

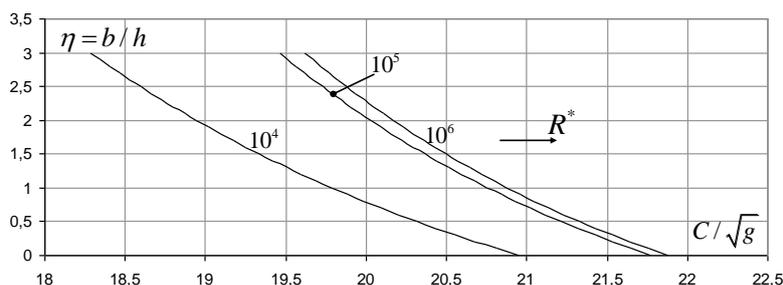


Figure 2.3 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/b = 10^{-3}$.

Les courbes se confondent pour $R^* \geq 10^6$.

Comme dans le cas des figures 2.1 et 2.2, il ressort de la figure 2.3 que pour une même valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* , le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le paramètre de forme η diminue. Ceci signifie que le coefficient C/\sqrt{g} augmente lorsque la profondeur y_n de l'écoulement augmente. Nous pouvons également observer que pour un paramètre de forme η fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Pour la valeur de la rugosité relative $\varepsilon/b = 10^{-3}$, les courbes de variation du coefficient C/\sqrt{g} se confondent à partir de la valeur $R^* = 10^6$. L'écoulement turbulent est atteint plus tôt que dans le cas des courbes des figures 2.1 et 2.2. Cela peut se justifier par le fait que plus la rugosité relative ε/b augmente et plus le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement.

Une conclusion peut être tirée au regard des tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 et même des figure 2.1, 2.2 et 2.3, c'est que plus la rugosité relative ε/b augmente et plus le coefficient C/\sqrt{g} diminue, quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* .

II.4. Calcul du paramètre de forme η

Selon la relation fonctionnelle (2.17), pour évaluer le coefficient de *Chézy* C , il est nécessaire de connaître le paramètre de forme η . Rappelons que les données du problème sont le débit volume Q , le diamètre D du canal, la pente i du canal, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Pour calculer le paramètre de forme η , nous pouvons faire appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

Les caractéristiques du modèle rugueux sont affectés du symbole « $\bar{\quad}$ ». Le modèle rugueux est un canal de forme rectangulaire caractérisée par une rugosité relative $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$ arbitrairement choisie, où \bar{D}_h désigne le diamètre hydraulique. La rugosité relative ainsi choisie est tellement élevée que l'écoulement dans le modèle rugueux se situe dans le domaine turbulent rugueux. Pour ce domaine, la formule de Nikuradsé demeure en vigueur et nous pouvons alors écrire que :

$$\bar{f}^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h}{3,7} \right) \quad (2.18)$$

\bar{f} est le coefficient de frottement dans le modèle rugueux. Compte du fait que la rugosité relative $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h$ est $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$, la relation (2.18) mène à :

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \quad (2.19)$$

Ainsi, le coefficient de frottement dans le modèle rugueux est une constante. Ceci était prévisible puisque l'écoulement dans le modèle rugueux est turbulent rugueux.

Considérons un modèle rugueux dont le débit volume \bar{Q} est égal au débit volume Q écoulé par le canal rectangulaire étudié. Admettons également que la pente \bar{i} du modèle rugueux est égale à la pente i du canal rectangulaire étudié. Admettons enfin que le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est égal au diamètre D du canal considéré. Nous pouvons alors écrire les égalités suivantes :

$$\bar{Q} = Q, \bar{i} = i, \bar{D} = D \quad (2.20)$$

Rappelons que la relation de Darcy-Weisbach exprime la pente i du canal sous la forme suivante :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.21)$$

Où f est le coefficient de frottement dans le canal rectangulaire étudié.

Appliquons la relation (2.21) au modèle rugueux, en tenant compte des égalités (2.20). Il vient que :

$$i = \frac{\bar{f}}{\bar{D}_h} \frac{Q^2}{2g\bar{A}^2} \quad (2.22)$$

Dans cette dernière relation, le diamètre hydraulique \bar{D}_h est par définition $\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P}$, où \bar{P} est le périmètre mouillé dans le modèle rugueux. En introduisant la définition du diamètre

hydraulique \bar{D}_h dans la relation (2.22) et en tenant compte de la relation (2.19), nous pouvons écrire que :

$$i = \frac{1}{128g} \bar{P} \frac{Q^2}{\bar{A}^3} \quad (2.23)$$

L'aire de la section mouillée \bar{A} et le périmètre mouillé \bar{P} s'écrivent respectivement :

$$\bar{A} = b \bar{y}_n \quad (2.24)$$

$$\bar{P} = b + 2 \bar{y}_n \quad (2.25)$$

Dans les relations (2.24) et (2.25), \bar{y}_n désigne la profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux. En substituant les relations (2.24) et (2.25) dans la relation (2.23), il vient que :

$$i = \frac{1}{128g} (b + 2 \bar{y}_n) \frac{Q^2}{b^3 \bar{y}_n^3} \quad (2.26)$$

Cette dernière relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$i = \frac{1}{128g} b \left(1 + 2 \frac{\bar{y}_n}{b} \right) \frac{Q^2}{b^6 \left(\frac{\bar{y}_n}{b} \right)^3} \quad (2.27)$$

Définissons le paramètre de forme $\bar{\eta}_0 = \bar{y}_n / b$ pour le modèle rugueux. La relation (2.27) s'écrit alors :

$$i = \frac{1}{128g} (1 + 2 \bar{\eta}_0) \frac{Q^2}{b^5 \bar{\eta}_0^3} \quad (2.28)$$

La relation (2.28) peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$1 = \frac{1}{128} \frac{(1 + 2 \bar{\eta}_0)}{\bar{\eta}_0^3} \left(\frac{Q^2}{g i b^5} \right) \quad (2.29)$$

Désignons par la quantité $Q_b^* = Q / \sqrt{g i b^5}$, la conductivité relative du modèle rugueux rapportée à la largeur b . Elle est égale à la conductivité relative du canal rectangulaire étudié. Ainsi, et après réarrangements, la relation (2.29) devient :

$$\bar{\eta}_0^{-3} - \frac{Q_b^{*2}}{64} \bar{\eta}_0 - \frac{Q_b^{*2}}{128} = 0 \quad (2.30)$$

On obtient ainsi que équation du troisième degré en $\overline{\eta_0}$, sans terme de second ordre. Dans la relation (2.30), la conductivité relative Q_b^* est connue, puisque Q , i , g et b sont des paramètres donnés. Pour résoudre l'équation de troisième degré (2.30), nous pouvons faire appel aux fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

La relation (2.30) est de la forme :

$$x^3 - px - q = 0 \quad (2.31)$$

$$\text{Avec : } p = \frac{Q_b^{*2}}{64} \text{ et } q = \frac{Q_b^{*2}}{128}$$

Le discriminant Δ de la relation (2.31) est donné par la relation :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (2.32)$$

Après calculs, le discriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = \left(\frac{Q_b^*}{16}\right)^4 \left(1 - \frac{Q_b^*}{6\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{Q_b^*}{6\sqrt{3}}\right) \quad (2.33)$$

Nous pouvons ainsi constater que le discriminant Δ peut être négatif, nul ou positif selon la valeur de la conductivité relative Q_b^* . Ainsi :

i. Lorsque $Q_b^* \geq 6\sqrt{3}$, il vient que $\Delta \leq 0$ et la racine réelle de l'équation est :

$$\overline{\eta_0} = \frac{Q_b^*}{4\sqrt{3}} \cos(\beta/3) \quad (2.34)$$

où l'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{Q_b^*} \quad (2.35)$$

ii. Lorsque $Q_b^* \leq 6\sqrt{3}$, il vient que $\Delta \geq 0$ et la racine réelle de l'équation est :

$$\overline{\eta_0} = \left(\frac{Q_b^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] \quad (2.36)$$

Une fois calculé le paramètre de forme $\overline{\eta_0}$ par l'une des relations (2.34) ou (2.36), selon le

signe du discriminant Δ dépendant de la valeur de la conductivité relative Q_b^* , les étapes suivantes indiquent la procédure de calcul du paramètre de forme η , selon la MMR. Nous rappelons que les paramètres connus du problème sont Q , b , i , ε et ν .

- i. Avec la valeur calculée de $\bar{\eta}_0$, on détermine la valeur de l'aire de la section mouillée \bar{A} , du périmètre mouillé \bar{P} de l'écoulement dans le modèle rugueux, du diamètre hydraulique \bar{D}_h et celle du nombre de *Reynolds* \bar{R} , selon les relations suivantes :

$$\bar{A} = b\bar{y}_n = b^2\bar{\eta}_0 \quad (2.37)$$

$$\bar{P} = b + 2\bar{y}_n = b(1 + 2\bar{\eta}_0) \quad (2.38)$$

$$\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P} \quad (2.39)$$

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} \quad (2.40)$$

- ii. Avec la valeur donnée de la rugosité absolue ε et la valeur calculée du diamètre hydraulique \bar{D}_h et celle du nombre de *Reynolds* \bar{R} , on détermine la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires ψ en application de la relation suivante :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.41)$$

- iii. On affecte au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire suivante, issue de la relation fondamentale de la MMR :

$$\bar{b} = b / \psi$$

- iv. Avec la nouvelle dimension linéaire calculée à l'étape *iii*, on détermine la nouvelle valeur de la conductivité relative selon la relation suivante :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gi(b/\psi)^5}} \quad (2.42)$$

- v. Avec cette nouvelle valeur de la conductivité relative, on calcule le paramètre de forme $\bar{\eta}_0$ par application de l'une des relations (2.34) ou (2.36), selon le signe du

discriminant Δ . Cette valeur calculée de $\overline{\eta_0}$ correspond à la valeur du paramètre de forme $\eta_0 = y_n / b$ de l'écoulement dans le canal rectangulaire étudié. Soit :

$$\overline{\eta_0} = \eta_0 \quad (2.43)$$

vi. Finalement le paramètre de forme $\eta = b / y_n$ recherché est tel que :

$$\eta = \frac{1}{\eta_0} \quad (2.44)$$

II.5. Etapes de calcul du coefficient C de Chézy

Pour calculer le coefficient C de Chézy, il est nécessaire que les paramètres suivants soient connus : le débit volume Q , la pente i du canal, la rugosité absolue ε , la largeur b du canal, la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et l'accélération de la pesanteur g . Avec ces paramètres connus, le paramètre de forme η est déduit, selon les étapes de calcul précédemment présentées. C'est la relation (2.16) qui régit le coefficient C de Chézy et selon cette relation, les étapes suivantes sont recommandées pour le calcul de C :

- i. On calcule le paramètre de forme η en suivant les étapes indiquées lors du paragraphe précédent.
- ii. Avec la valeur ainsi calculée de η , on calcule la valeur de la fonction $\varphi(\eta)$ en application de la relation (2.8). Soit :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta + 2)^{3/2}}$$

- iii. On détermine la valeur de la rugosité relative ε / b .
- iv. On calcule la valeur du nombre de Reynolds modifié R^* selon la relation (2.9). Soit :

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu}$$

- v. Finalement, le coefficient C de Chézy est déduit de la relation (2.16). Soit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left[\frac{\varepsilon / b}{1,165 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right]$$

II.6. Exemple de calcul du coefficient C de Chézy

On souhaite calculer la valeur du coefficient C de Chézy pour le cas d'un canal rectangulaire, connaissant les données suivantes :

$$Q = 3,861 m^3 / s, \quad b = 2m, \quad \varepsilon = 0,001m, \quad i = 0,001, \quad \nu = 10^{-6} m^2 / s.$$

1. On calcule la conductivité relative Q_b^* telle que :

$$Q_b^* = Q / \sqrt{gib^5} = 3,861 / \sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2^5} = 6,89112787$$

On peut constater que $Q_b^* < 6\sqrt{3} = 10,3923048$.

2. Conformément à la relation (2.33), le discriminant Δ de l'équation de troisième degré (2.30) est positif. Le paramètre de forme $\bar{\eta}_0$ est donc régi par la relation (2.36). Soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0 &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{6,89112787^2}{256} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{6,89112787^2}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6,89112787^2}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= 1,047052833 \end{aligned}$$

3. Avec la valeur ainsi calculée du paramètre de forme $\bar{\eta}_0$, les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux sont :

L'Aire de la section mouillée \bar{A} , donnée par la relation (2.37). Soit :

$$\bar{A} = b^2 \bar{\eta}_0 = 2^2 \times 1,047052833 = 4,18821133 m^2$$

Le périmètre mouillé \bar{P} , donné par la relation (2.38). Soit :

$$\bar{P} = b(1 + 2\bar{\eta}_0) = 2 \times (1 + 2 \times 1,047052833) = 6,18821133 m$$

Le diamètre hydraulique \bar{D}_h , donné par la relation (2.39). Soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P} = 4 \times 4,18821133 / 6,18821133 = 2,70721933 m$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} , donné par la relation (2.40). Soit :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3,861}{6,19011332 \times 10^{-6}} = 2495713,09$$

4. Les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux ainsi calculées permettent de déterminer le facteur de correction des dimensions linéaires ψ , selon la relation (2.41). Soit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,001 / 2,7063875}{4,75} + \frac{8,5}{2494946,25} \right) \right]^{-2/5} = 0,76845584 \end{aligned}$$

5. Affectons au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire suivante :

$$\bar{b} = b / \psi = 2 / 0,76845584 = 2,60262191m$$

6. Avec cette nouvelle dimension linéaire, calculons la conductivité relative selon la relation (2.42). Soit :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gi(b/\psi)^5}} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2,60262191^5}} = 3,56728326$$

7. Nous pouvons constater que la valeur de la conductivité relative ainsi calculée est inférieure à $6\sqrt{3} = 10,3923048$. Ceci permet de conclure que le paramètre de forme $\bar{\eta}_0$ est régi par la relation (2.36). Soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0 &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{3,56728326^2}{256} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3,56728326^2}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3,56728326^2}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= 0,603067235 \end{aligned}$$

Cette valeur calculée du paramètre de forme $\overline{\eta_0}$ correspond exactement au paramètre de forme η_0 de l'écoulement dans le canal rectangulaire étudié. Soit :

$$\eta_0 = y_n / b = 0,603067235$$

8. Le paramètre de forme $\eta = b / y_n$ est donc :

$$\eta = \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{0,603067235} = 1,6581899$$

9. Selon la relation (2.8), la fonction $\varphi(\eta)$ est telle que :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta+2)^{3/2}} = \frac{32 \times \sqrt{2}}{(1,6581899+2)^{3/2}} = 6,46793439$$

10. La valeur de la rugosité relative ε / b est :

$$\varepsilon / b = 0,001 / 2 = 0,0005$$

11. La valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* est, selon la relation (2.9) :

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2^3}}{10^{-6}} = 280142,821$$

12. Finalement, la valeur recherchée du coefficient C de *Chézy* est, selon la relation (2.16) :

$$\begin{aligned} C &= -4\sqrt{2g} \log \left[\frac{\varepsilon / b}{1,165[\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right] \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left[\frac{0,0005}{1,165 \times 6,46793439^{2/3}} + \frac{10,04}{280142,821 \times 6,46793439} \right] \\ &= 68,9013858 \approx 69 m^{0,5} / s \end{aligned}$$

13. Vérifions la valeur ainsi calculée de C par celle issue de la MMR. Selon la MMR, le coefficient C de *Chézy* est donné par la relation suivante :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{2.45}$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ a été calculé à l'étape 4 et vaut :

$$\psi = 0,76845584$$

Le coefficient C de *Chézy* est par suite, selon la relation (2.45) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,76845584^{5/2}} = 68,4529552 m^{0,5} / s \approx 68,5 m^{0,5} / s$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de C calculées selon la méthode que nous avons présentée et la MMR est de :

$$\frac{\Delta C}{C} = 100 \times \frac{(68,9013858 - 68,4529552)}{68,9013858} = 0,65\%$$

Nous pouvons alors conclure, tenant compte du faible écart relatif obtenu, que les deux méthodes aboutissent pratiquement au même résultat.

II.7. Expression du coefficient adimensionnel de *Manning* dans un canal rectangulaire

La relation de *Manning* exprime le débit volume Q écoulé par le canal par la relation suivante :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i}$$

(2.46)

Où n désigne le coefficient de *Manning*.

En comparant la relation (2.46) à la relation générale du débit volume exprimée par (2.1), nous pouvons déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

(2.47)

Le nombre de *Reynolds* Re est, pour rappel, donné par la relation (2.10), tandis que le Rayon hydraulique R_h est donné par la relation (2.6). La relation (2.47) montre bien que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* Re et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du paramètre de forme η de la section mouillée du canal.

En introduisant la fonction $\varphi(\eta)$, donnée par la relation (2.8), dans l'expression du rayon hydraulique R_h exprimée par (2.6), nous pouvons écrire :

$$R_h = b \frac{[\varphi(\eta)]^{2/3}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} \quad (2.48)$$

En remplaçant les relations (2.10) et (2.48), qui expriment le nombre de *Reynolds* R et le rayon hydraulique R_h respectivement, dans la relation (2.47), il vient que :

$$\frac{1}{n} = -\frac{4}{(32\sqrt{2})^{-1/9}} \sqrt{2g} b^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/9} \log \left(\frac{\varepsilon/b}{\frac{14,8}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right) \quad (2.49)$$

Après calculs, la relation (2.49) s'écrit en définitive :

$$\frac{1}{n} = -8,64 \sqrt{g} b^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/9} \log \left(\frac{\varepsilon/b}{1,165 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right) \quad (2.50)$$

Introduisons le paramètre adimensionnel suivant :

$$N = \frac{b^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (2.51)$$

La relation (2.50) s'écrit alors, en termes adimensionnels, de la manière suivante :

$$N = -8,64 [\varphi(\eta)]^{-1/9} \log \left(\frac{\varepsilon/b}{1,165 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right) \quad (2.52)$$

La relation (2.52) constitue l'expression finale du coefficient adimensionnel N de *Manning*.

Lorsque les paramètres η , ε , b , i et ν sont connus, la relation (2.50) ou (2.52) permet d'évaluer le coefficient n de *Manning*. Au regard de la relation (2.52), nous pouvons écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$N = f(\varepsilon/b; \eta; R^*) \quad (2.53)$$

II.8. Variation du nombre adimensionnel N de *Manning*

Les tableaux suivants donnent la valeur du paramètre adimensionnel N , pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε/b et en faisant varier le nombre de *Reynolds* modifié R^* . En-dessous de chaque tableau, nous avons présenté la variation de N en fonction du

paramètre de forme η et chacune des courbes obtenues est discutée.

Tableau 2.4 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.52)

$\varepsilon/b=0$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η	$\varphi(\eta)$	N	N	N	N	N
0	16	26,7128956	33,0694973	39,426099	45,7827007	52,1393023
0,1	14,8708583	26,7273148	33,1358171	39,5443195	45,9528218	52,3613242
0,2	13,8685468	26,7396243	33,198007	39,6563898	46,1147725	52,5731552
0,3	12,9739799	26,750053	33,2564612	39,7628693	46,2692775	52,7756857
0,4	12,1716124	26,7587979	33,3115218	39,8642458	46,4169697	52,9696937
0,5	11,448668	26,7660293	33,3634878	39,9609463	46,5584048	53,1558633
0,6	10,7945602	26,7718956	33,4126216	40,0533475	46,6940734	53,3347994
0,7	10,20045	26,7765264	33,4591546	40,1417827	46,8244108	53,5070389
0,8	9,65890577	26,7800358	33,5032922	40,2265485	46,9498049	53,6730612
0,9	9,16363916	26,7825244	33,5452173	40,3079101	47,070603	53,8332959
1	8,70929686	26,7840813	33,5850933	40,3861053	47,1871173	53,9881293
1,1	8,2912963	26,784786	33,6230671	40,4613482	47,2996293	54,1379104
1,2	7,90569415	26,7847094	33,6592708	40,5338322	47,4083936	54,282955
1,3	7,54908067	26,783915	33,6938239	40,6037328	47,5136417	54,4235506
1,4	7,21849401	26,7824598	33,7268345	40,6712093	47,6155841	54,5599589
1,5	6,91135036	26,7803952	33,7584013	40,7364073	47,7144133	54,6924193
1,6	6,6253866	26,7777679	33,7886137	40,7994595	47,8103053	54,8211512
1,7	6,35861295	26,7746199	33,817554	40,860488	47,903422	54,946356
1,8	6,10927369	26,7709896	33,845297	40,9196045	47,993912	55,0682195
1,9	5,87581435	26,7669117	33,871912	40,9769123	48,0819126	55,1869129
2	5,65685425	26,7624181	33,8974622	41,0325064	48,1675505	55,3025946
2,1	5,45116328	26,7575378	33,9220063	41,0864747	48,2509432	55,4154117
2,2	5,25764236	26,7522976	33,9455983	41,138899	48,3321996	55,5255003
2,3	5,07530671	26,7467218	33,9682882	41,1898546	48,411421	55,6329874
2,4	4,90327173	26,740833	33,9901226	41,2394121	48,4887016	55,7379911
2,5	4,74074074	26,7346519	34,0111444	41,2876369	48,5641293	55,8406218
2,6	4,5869946	26,7281976	34,0313938	41,3345901	48,6377863	55,9409826
2,7	4,44138263	26,7214877	34,0509083	41,3803288	48,7097494	56,0391699
2,8	4,30331483	26,7145386	34,0697225	41,4249065	48,7800904	56,1352744
2,9	4,17225512	26,7073654	34,0878693	41,4683732	48,8488771	56,2293809
3	4,04771541	26,6999823	34,1053791	41,5107758	48,9161726	56,3215694
3,1	3,92925045	26,6924021	34,1222804	41,5521586	48,9820368	56,411915
3,2	3,81645337	26,6846372	34,1386	41,5925629	49,0465257	56,5004885

3,3	3,70895165	26,6766987	34,1543633	41,6320278	49,1096923	56,5873568
3,4	3,60640367	26,6685973	34,1695938	41,6705902	49,1715866	56,6725831
3,5	3,50849565	26,6603428	34,1843138	41,7082848	49,2322559	56,7562269
3,6	3,41493888	26,6519444	34,1985445	41,7451446	49,2917447	56,8383448
3,7	3,32546738	26,6434106	34,2123055	41,7812004	49,3500953	56,9189902
3,8	3,23983569	26,6347496	34,2256157	41,8164818	49,4073479	56,998214
3,9	3,157817	26,6259688	34,2384927	41,8510166	49,4635405	57,0760643
4	3,07920144	26,6170755	34,2509533	41,8848312	49,518709	57,1525869
4,1	3,00379454	26,6080761	34,2630134	41,9179507	49,572888	57,2278253
4,2	2,93141592	26,5989769	34,2746879	41,9503989	49,6261099	57,3018209
4,3	2,86189801	26,5897839	34,2859912	41,9821985	49,6784058	57,3746131
4,4	2,79508497	26,5805025	34,2969368	42,0133711	49,7298054	57,4462396
4,5	2,73083174	26,5711138	34,3075376	42,0439371	49,7803367	57,5167362
4,6	2,66900307	26,5616952	34,3178057	42,0739162	49,8300267	57,5861372
4,7	2,60947279	26,5521787	34,3277529	42,103327	49,8789011	57,6544753
4,8	2,55212303	26,542593	34,3373902	42,1321873	49,9269845	57,7217816
4,9	2,4968436	26,5329421	34,3467281	42,1605142	49,9743002	57,7880862
5	2,44353135	26,5232299	34,3557769	42,1883238	50,0208707	57,8534177

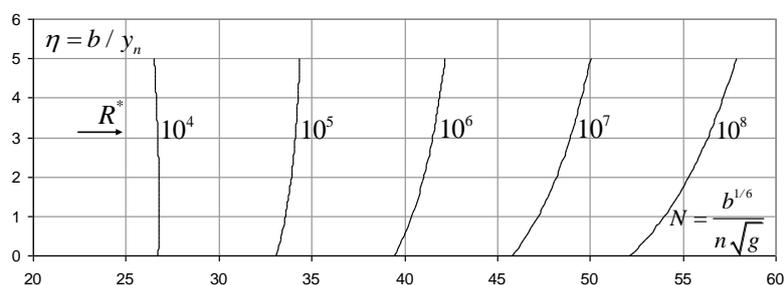


Figure 2.4 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / b = 0$
(Écoulement lisse)

La figure 2.4 montre clairement que pour un nombre de Reynolds modifié R^* fixé, le paramètre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du paramètre de forme η . Cependant, nous pouvons constater que la courbe correspondant à $R^* = 10^4$ fait exception. En effet, pour cette valeur de R^* , la courbe subit une légère augmentation dans un premier temps, puis diminue très lentement. Mais, cette variation de N n'est pas significative et l'on peut considérer que N demeure pratiquement constant. Au fur et à mesure que R^* augmente, l'accroissement de N est plus rapide. Pour un canal rectangulaire donné, c'est-à-dire pour une largeur b connue, l'augmentation du paramètre adimensionnel N signifie que $1/n$ augmente ou

que n diminue, lorsque le paramètre de forme $\eta = b / y_n$ augmente ou que la profondeur y_n diminue. Cette constatation est tout à fait physiquement justifiée. Nous pouvons enfin constater que pour une valeur donnée du paramètre de forme η , le paramètre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Cela signifie que le coefficient n diminue au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds* modifié R^* .

Tableau 2.5 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.52)

$\varepsilon / b = 10^{-4}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η	$\varphi(\eta)$	N	N	N	N	N
0	16	26,1742926	29,8981371	30,8254969	30,9379703	30,9494738
0,1	14,8708583	26,1962285	29,9847547	30,9383435	31,0544648	31,0663479
0,2	13,8685468	26,2156294	30,0664638	31,0456746	31,1653827	31,1776394
0,3	12,9739799	26,2327655	30,143717	31,1479807	31,2712179	31,2838425
0,4	12,1716124	26,2478694	30,2169085	31,2456897	31,3724018	31,385389
0,5	11,448668	26,2611423	30,2863833	31,3391774	31,4693132	31,4826579
0,6	10,7945602	26,27276	30,3524455	31,4287757	31,5622866	31,575984
0,7	10,20045	26,2828759	30,4153641	31,5147788	31,6516187	31,6656643
0,8	9,65890577	26,2916253	30,4753783	31,5974492	31,7375741	31,7519637
0,9	9,16363916	26,2991277	30,5327018	31,6770214	31,8203897	31,8351191
1	8,70929686	26,3054892	30,5875261	31,7537067	31,9002783	31,9153436
1,1	8,2912963	26,3108041	30,6400235	31,8276951	31,977432	31,9928295
1,2	7,90569415	26,315157	30,6903495	31,8991589	32,0520246	32,0677506
1,3	7,54908067	26,3186236	30,7386453	31,9682544	32,1242138	32,140265
1,4	7,21849401	26,321272	30,7850387	32,035124	32,1941435	32,2105165
1,5	6,91135036	26,3231637	30,8296466	32,0998975	32,2619448	32,2786365
1,6	6,6253866	26,3243545	30,8725755	32,162694	32,327738	32,3447454
1,7	6,35861295	26,3248947	30,9139231	32,2236228	32,3916335	32,4089535
1,8	6,10927369	26,3248304	30,953779	32,2827842	32,4537328	32,4713627
1,9	5,87581435	26,3242034	30,9922258	32,340271	32,5141296	32,5320667
2	5,65685425	26,3230519	31,0293394	32,3961689	32,5729105	32,591152
2,1	5,45116328	26,321411	31,0651902	32,4505569	32,6301555	32,648699
2,2	5,25764236	26,3193128	31,0998432	32,5035088	32,6859392	32,7047821
2,3	5,07530671	26,3167869	31,1333589	32,5550928	32,7403306	32,7594706
2,4	4,90327173	26,3138604	31,1657932	32,6053727	32,7933941	32,8128289

2,5	4,74074074	26,3105584	31,1971984	32,6544076	32,8451897	32,864917
2,6	4,5869946	26,3069041	31,2276231	32,702253	32,8957736	32,9157912
2,7	4,44138263	26,3029189	31,2571126	32,7489608	32,9451981	32,965504
2,8	4,30331483	26,2986227	31,2857096	32,7945795	32,9935126	33,0141046
2,9	4,17225512	26,2940339	31,3134536	32,8391547	33,040763	33,0616392
3	4,04771541	26,2891697	31,340382	32,8827291	33,0869928	33,1081512
3,1	3,92925045	26,2840459	31,3665297	32,9253429	33,1322426	33,1536813
3,2	3,81645337	26,2786775	31,3919295	32,9670341	33,1765509	33,1982681
3,3	3,70895165	26,2730783	31,4166125	33,0078383	33,2199537	33,2419477
3,4	3,60640367	26,2672612	31,4406078	33,0477893	33,2624854	33,2847543
3,5	3,50849565	26,2612383	31,4639427	33,0869188	33,3041782	33,3267202
3,6	3,41493888	26,2550209	31,4866433	33,1252569	33,3450625	33,3678761
3,7	3,32546738	26,2486196	31,508734	33,1628323	33,3851673	33,4082508
3,8	3,23983569	26,2420444	31,530238	33,1996718	33,42452	33,4478719
3,9	3,157817	26,2353046	31,5511773	33,2358012	33,4631466	33,4867652
4	3,07920144	26,2284089	31,5715726	33,2712446	33,5010717	33,5249556
4,1	3,00379454	26,2213655	31,5914437	33,3060253	33,5383189	33,5624665
4,2	2,93141592	26,2141824	31,6108092	33,3401652	33,5749103	33,5993203
4,3	2,86189801	26,2068666	31,6296871	33,3736853	33,6108673	33,6355382
4,4	2,79508497	26,1994252	31,6480941	33,4066054	33,6462101	33,6711404
4,5	2,73083174	26,1918646	31,6660464	33,4389445	33,6809579	33,7061464
4,6	2,66900307	26,1841909	31,6835592	33,4707207	33,7151292	33,7405744
4,7	2,60947279	26,17641	31,7006473	33,5019514	33,7487415	33,7744422
4,8	2,55212303	26,1685273	31,7173245	33,5326531	33,7818116	33,8077665
4,9	2,4968436	26,160548	31,733604	33,5628415	33,8143556	33,8405634
5	2,44353135	26,152477	31,7494987	33,5925318	33,8463887	33,8728483

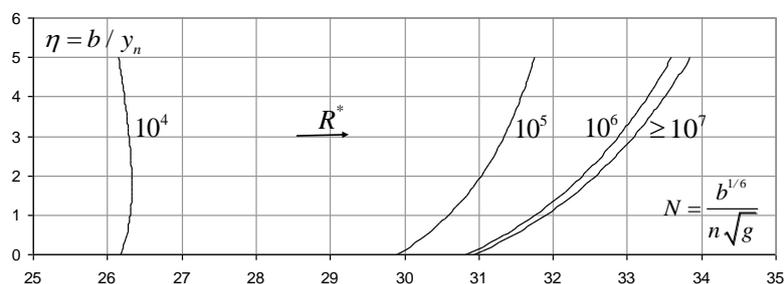


Figure 2.5 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / b = 10^{-4}$

La figure 2.5 montre, à l'exception de la courbe correspondant à $R^* = 10^4$, que le nombre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du paramètre de forme $\eta = b / y_n$, pour un

nombre de *Reynolds* modifié R^* fixé. Cela signifie que le coefficient n diminue au fur et à mesure que la profondeur y_n de l'écoulement décroît. La courbe de $R^* = 10^4$ fait l'exception, car N augmente dans un premier temps puis diminue dans un second temps. Cependant, cette variation n'est pas très significative. La figure 2.5 montre également que les courbes se confondent lorsque le nombre de *Reynolds* modifié atteint la valeur $R^* = 10^7$. Au-delà de cette valeur, le nombre de *Reynolds* modifié R^* n'a aucune influence sur la variation du nombre N , cela signifie que la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement ne joue aucun rôle. L'état turbulent rugueux de l'écoulement est donc atteint pour $R^* = 10^7$. Seul le paramètre de forme $\eta = b / y_n$ influence la variation de N .

Tableau 2.6 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.52)

$\varepsilon / b = 10^{-3}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η	$\varphi(\eta)$	N	N	N	N	N
0	16	23,5415354	24,4688952	24,5813686	24,5928721	24,5940251
0,1	14,8708583	23,5762523	24,5298411	24,6459625	24,6578456	24,6590367
0,2	13,8685468	23,608081	24,5872919	24,7069999	24,7192566	24,7204852
0,3	12,9739799	23,6373089	24,6415725	24,7648098	24,7774343	24,7786999
0,4	12,1716124	23,6641845	24,6929657	24,8196779	24,832665	24,833967
0,5	11,448668	23,6889248	24,7417189	24,8718547	24,8851994	24,8865373
0,6	10,7945602	23,7117196	24,7880498	24,9215607	24,9352581	24,9366314
0,7	10,20045	23,732736	24,8321507	24,9689906	24,9830362	24,9844446
0,8	9,65890577	23,752122	24,8741928	25,0143178	25,0287073	25,0301502
0,9	9,16363916	23,7700089	24,9143286	25,0576968	25,0724262	25,0739032
1	8,70929686	23,7865141	24,9526947	25,0992663	25,1143316	25,1158424
1,1	8,2912963	23,8017424	24,989414	25,139151	25,1545484	25,1560925
1,2	7,90569415	23,8157881	25,0245975	25,1774632	25,1931892	25,1947664
1,3	7,54908067	23,8287363	25,0583455	25,2143049	25,2303561	25,2319659
1,4	7,21849401	23,8406639	25,0907492	25,2497687	25,2661417	25,2677839
1,5	6,91135036	23,8516406	25,1218915	25,2839388	25,3006305	25,3023047
1,6	6,6253866	23,8617297	25,1518482	25,3168922	25,3338995	25,3356055
1,7	6,35861295	23,8709891	25,1806887	25,3486995	25,3660195	25,3677569
1,8	6,10927369	23,8794715	25,2084767	25,3794254	25,3970553	25,3988238
1,9	5,87581435	23,8872255	25,2352708	25,4091293	25,4270664	25,4288658
2	5,65685425	23,8942952	25,2611247	25,4378663	25,4561079	25,4579379

2,1	5,45116328	23,9007217	25,2860885	25,4656871	25,4842305	25,486091
2,2	5,25764236	23,9065426	25,3102081	25,4926385	25,5114815	25,513372
2,3	5,07530671	23,9117925	25,3335265	25,5187642	25,5379042	25,5398246
2,4	4,90327173	23,9165037	25,3560831	25,5441045	25,5635393	25,5654894
2,5	4,74074074	23,9207059	25,3779151	25,5686972	25,5884245	25,5904041
2,6	4,5869946	23,9244268	25,3990568	25,5925773	25,612595	25,6146037
2,7	4,44138263	23,9276921	25,4195403	25,6157776	25,6360835	25,6381212
2,8	4,30331483	23,9305256	25,4393956	25,6383286	25,6589207	25,6609872
2,9	4,17225512	23,9329497	25,4586508	25,6602592	25,6811354	25,6832305
3	4,04771541	23,9349852	25,4773323	25,681596	25,7027544	25,7048779
3,1	3,92925045	23,9366514	25,4954647	25,7023644	25,7238031	25,7259549
3,2	3,81645337	23,9379667	25,5130713	25,722588	25,7443053	25,746485
3,3	3,70895165	23,938948	25,5301738	25,7422892	25,7642831	25,7664907
3,4	3,60640367	23,9396113	25,5467928	25,761489	25,7837578	25,7859931
3,5	3,50849565	23,9399717	25,5629477	25,7802071	25,8027492	25,805012
3,6	3,41493888	23,9400432	25,5786568	25,7984624	25,821276	25,8235661
3,7	3,32546738	23,9398391	25,5939374	25,8162724	25,8393559	25,8416732
3,8	3,23983569	23,9393719	25,6088057	25,8336539	25,8570057	25,8593501
3,9	3,157817	23,9386534	25,6232773	25,8506227	25,8742413	25,8766125
4	3,07920144	23,9376947	25,6373668	25,8671939	25,8910777	25,8934756
4,1	3,00379454	23,9365064	25,651088	25,8833816	25,9075292	25,9099536
4,2	2,93141592	23,9350983	25,6644543	25,8991993	25,9236093	25,9260601
4,3	2,86189801	23,9334798	25,677478	25,91466	25,9393308	25,941808
4,4	2,79508497	23,9316598	25,6901711	25,9297758	25,9547061	25,9572094
4,5	2,73083174	23,9296468	25,7025449	25,9445584	25,9697468	25,9722761
4,6	2,66900307	23,9274487	25,7146102	25,9590187	25,9844639	25,9870191
4,7	2,60947279	23,9250732	25,7263773	25,9731674	25,9988681	26,001449
4,8	2,55212303	23,9225273	25,737856	25,9870144	26,0129694	26,0155758
4,9	2,4968436	23,919818	25,7490555	26,0005695	26,0267774	26,0294094
5	2,44353135	23,9169518	25,7599849	26,0138418	26,0403014	26,0429587

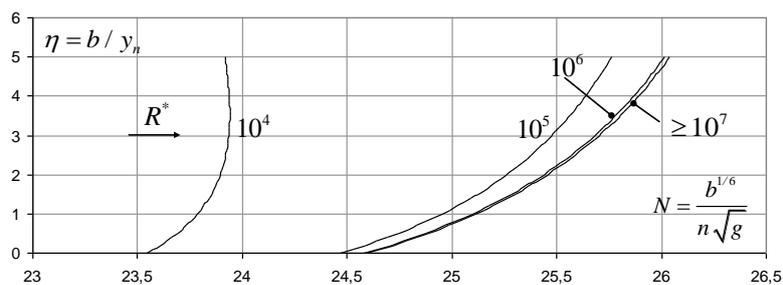


Figure 2.6 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / b = 10^{-3}$

Comme pour les figures 2.4 et 2.5, la figure 2.6 montre que le nombre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du paramètre de forme $\eta = b / y_n$, à l'exception de la courbe correspondant à $R^* = 10^4$. Pour cette courbe, le nombre adimensionnel subit une augmentation dans un premier puis une légère diminution au-delà d'une certaine valeur du paramètre de forme η . Pour un paramètre de forme η donné, nous pouvons constater que N augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Comme nous l'avons constaté sur la figure 2.5, la figure 2.6 montre également que les courbes se confondent lorsque le nombre de *Reynolds* modifié atteint la valeur $R^* = 10^7$. A partir de cette valeur, le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint, et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement n'a aucune influence sur la variation du nombre adimensionnel N . La figure 2.6 montre en particulier que le nombre adimensionnel N ne subit qu'une augmentation toute relative dans l'ensemble de la gamme tracée du paramètre de forme η .

Au regard des valeurs des tableaux 2.4, 2.5 et 2.6, et également des figures 2.4, 2.5 et 2.6, nous pouvons observer que plus la rugosité relative ε / b augmente et plus le nombre adimensionnel N diminue, quelque soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Cela revient à dire que $1/n$ diminue ou que le coefficient n augmente, pour canal rectangulaire donné pour lequel la largeur b est fixée.

II.9. Calcul du coefficient n de *Manning* par la MMR

La relation (2.50) ou (2.52) ne permet d'évaluer le coefficient n de *Manning* que si la largeur b du canal rectangulaire est une donnée du problème. Dans le cas où b n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer la valeur de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). C'est l'un des avantages de cette méthode.

En comparant les relations (2.11) et (2.46) de *Chézy* et de *Manning* respectivement, il est aisé de montrer que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.54)$$

Par suite, nous pouvons écrire que le coefficient \bar{n} de *Manning* dans le modèle rugueux est tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{-1/6}}{C} \quad (2.55)$$

Il est utile de rappeler que selon la MMR, le coefficient \bar{C} de *Chézy* dans le modèle rugueux est :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.56)$$

Le modèle rugueux est un canal rectangulaire de largeur \bar{b} ; il écoule un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, pour une pente longitudinale \bar{i} . Pour déterminer le coefficient n de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{b} \neq b$: cette condition énonce que la largeur du canal et celle du modèle rugueux sont différents.
- ii. $\bar{Q} = Q$: le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux écoulent le même débit volume Q .
- iii. $\bar{i} = i$: le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux sont caractérisés par la même pente longitudinale i .
- iv. $\bar{\eta} = \eta$: le paramètre de forme du canal considéré est égal à celui du modèle rugueux de référence.

$\bar{\nu} = \nu$: le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux écoulent le même liquide.

Le débit volume \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux s'écrit, en vertu de la relation (2.46) de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.57)$$

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h de l'écoulement dans le canal rectangulaire considéré sont liés à leurs homologues du modèle rugueux \bar{A} et \bar{R}_h par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.58)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.59)$$

En tenant compte des relations (2.58) et (2.59), la relation (2.46) de *Manning* devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3} \bar{n}^{-2/3}}{n} \sqrt{i} \quad (2.60)$$

En comparant les relations (2.57) et (2.60), il ressort que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (2.61)$$

Tenant compte de la relation (2.56), la combinaison des relations (2.55) et (2.61) mène à écrire que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.62)$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est donné par la relation (2.41), dont on rappelle l'expression :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.41)$$

Tenant compte de la relation (2.6), nous pouvons aisément écrire que :

$$\bar{D}_h = 4\bar{R}_h = 4 \frac{\bar{b}}{(\eta + 2)} \quad (2.63)$$

En combinant les relations (2.8) et (2.63), nous pouvons écrire que :

$$\bar{D}_h = \frac{4\bar{b}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3} \quad (2.64)$$

Rappelons d'autre part que le nombre de *Reynolds* \bar{R} figurant dans la relation (2.41) est donné par la relation (2.10) sous la forme suivante :

$$\bar{R} = \bar{R}^* \varphi(\eta) \quad (2.65)$$

Où \bar{R}^* est donné par la relation (2.9) sous la forme suivante :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{g\bar{b}^3}}{\nu} \quad (2.66)$$

En tenant compte des relations (2.64) et (2.65), la relation (2.41) devient :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.67)$$

Prenant en compte les relations (2.64) et (2.67), la relation (2.62) permet alors d'écrire que le coefficient n de Manning s'écrit finalement :

$$n = \frac{0,129}{\sqrt{g}} \bar{b}^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{1/9} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.68)$$

Selon la relation (2.68), le coefficient n de Manning s'exprime en fonction du paramètre de forme η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{b} et \bar{R}^* du modèle rugueux. Le nombre de Reynolds \bar{R}^* est régi par la relation (2.66) qui dépend notamment de la largeur \bar{b} du modèle rugueux.

Pour exprimer la largeur \bar{b} du modèle rugueux, il faut faire appel à la relation (2.11) de Chézy. Appliquée au modèle rugueux, celle-ci s'écrit :

$$Q = \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h i} \quad (2.69)$$

Le coefficient \bar{C} est le coefficient de Chézy dans le modèle rugueux donné par la relation (2.56) et vaut $8\sqrt{2g}$. L'aire de la section mouillée \bar{A} de l'écoulement dans le modèle rugueux s'exprime par la relation suivante :

$$\bar{A} = \frac{\bar{b}^2}{\eta} \quad (2.70)$$

Où η est, pour rappel, le paramètre de forme tel que $\eta = b / y_n$. Nous rappelons également que le rayon hydraulique \bar{R}_h peut être déduit de la relation (2.64).

Tenant compte de toutes ces considérations, la relation (2.69) s'écrit sous la forme suivante :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\bar{b}^{-2}}{\eta} \sqrt{\frac{\bar{b}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3}} i \quad (2.71)$$

Après réarrangements, la largeur \bar{b} du modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{b} = \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{(32\sqrt{2})^{2/15}}{(8\sqrt{2})^{2/5}} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}} \quad (2.72)$$

Après calculs, la relation (2.72) s'écrit finalement :

$$\bar{b} = 0,63 \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}} \quad (2.73)$$

La relation (2.73) permet de calculer la largeur \bar{b} du modèle rugueux, pour les valeurs connues du débit volume Q , de la pente i et du paramètre de forme η .

Les étapes suivantes montrent la procédure de calcul du coefficient n de *Manning*, pour les données suivantes : Q , ε , i , η , ν . Notons que la largeur b du canal rectangulaire considéré n'est pas requise pour le calcul de n .

- i. Avec la valeur connue du paramètre de forme $\eta = b / y_n$, on calcule la valeur de la fonction $\varphi(\eta)$ en application de la relation (2.8). Soit :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta + 2)^{3/2}}$$

- ii. Avec la valeur connue des paramètres Q , i et $\eta = b / y_n$, on calcule la largeur \bar{b} du modèle rugueux selon la relation (2.73). Soit :

$$\bar{b} = 0,63 \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}}$$

- iii. Avec la valeur connue des paramètres i , \bar{b} et ν , on calcule le nombre de *Reynolds* modifié \bar{R}^* dans le modèle rugueux, en application de la relation (2.66). Soit :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{g\bar{b}^3}}{\nu}$$

- iv. Pour la valeur connue des paramètres \bar{b} , $\varphi(\eta)$, ε et \bar{R}^* , l'application de la relation (2.68) permet de calculer la valeur recherchée du coefficient n de *Manning*. Soit :

$$n = \frac{0,129}{\sqrt{g}} \bar{b}^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{1/9} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta)]^{2/3} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)}} \right) \right]^{-16/15}$$

II.10. Exemple de calcul du coefficient n de *Manning*

Reprenons les données de l'exemple d'application II.6 et calculons la valeur du coefficient n de *Manning*. Ces données sont :

$$Q = 3,861 m^3 / s, \quad \eta = 1,6581899, \quad \varepsilon = 0,001 m, \quad i = 0,001, \quad \nu = 10^{-6} m^2 / s.$$

- i. La valeur de la fonction $\varphi(\eta)$ est, selon la relation (2.8) :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta+2)^{3/2}} = \frac{32 \times \sqrt{2}}{(1,6581899+2)^{3/2}} = 6,46793439$$

- ii. La largeur \bar{b} du modèle rugueux est, en vertu de la relation (2.73) :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= 0,63 \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}} \\ &= 0,63 \times \left(\frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 0,001}} \right)^{2/5} \times \frac{1,6581899^{2/5}}{6,46793439^{2/15}} = 2,60278499 m \end{aligned}$$

- iii. En vertu de la relation (2.66), la valeur du nombre de *Reynolds* modifié \bar{R}^* est :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{g\bar{b}^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2,60278499^3}}{10^{-6}} = 415902,896$$

iv. Le coefficient n de *Manning* est finalement, selon la relation (2.68) :

$$n = \frac{0,129}{\sqrt{g}} \bar{b}^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{1/9} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{R^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,129}{\sqrt{9,81}} \times 2,60278499^{1/6} \times 6,46793439^{1/9} \times$$

$$\left[-\log \left(\frac{0,001 / 2,60278499}{1,496 \times 6,46793439^{2/3}} + \frac{8,5}{415902,896 \times 6,46793439} \right) \right]^{-16/15} = 0,01315253 m^{-1/3} s$$

v. Vérifions les calculs en déterminant la largeur b du canal rectangulaire considéré, en ayant recours à la relation (2.46) de *Manning* :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i}$$

Rappelons que :

$$A = b^2 / \eta, R_h = \frac{b}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3}$$

En tenant compte de ces considérations, la relation de *Manning* s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\varphi(\eta)]^{4/9}}{(32\sqrt{2})^{4/9} \eta} b^{8/3} \sqrt{i}$$

Après réarrangements, la largeur b s'écrit sous la forme suivante :

$$b = (32\sqrt{2})^{1/6} \frac{\eta^{3/8}}{[\varphi(\eta)]^{1/6}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

L'application numérique donne :

$$b = (32 \times \sqrt{2})^{1/6} \times \frac{1,6581899^{3/8}}{6,46793439^{1/6}} \times \left(\frac{0,01315253 \times 3,861}{\sqrt{0,001}} \right)^{3/8} = 1,99673456 m \approx 2m$$

Il s'agit bien de la valeur de la largeur b du canal rectangulaire considéré, imposée dans l'exemple d'application II.6. Ceci vérifie bien les calculs effectués sur le coefficient n de *Manning*.

II.11. Conclusion

Le chapitre précédent s'est intéressé à l'étude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire.

En comparant les relations d'*Achour* et de *Bedjaoui* (2006) et celle de *Chézy*, nous avons pu exprimer la relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Celle-ci a été transformée en une relation adimensionnelle qui montre que C/\sqrt{g} dépend à la fois de la rugosité relative ε/b , du paramètre de forme $\eta = b/y_n$ et du nombre de *Reynolds* modifié R^* . La relation obtenue est de type $C/\sqrt{g} = f(\varepsilon/b; \eta; R^*)$. Dans ces paramètres ε est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne du canal, b est la largeur du canal et y_n est la profondeur normale de l'écoulement. Nous avons montré que le nombre de *Reynolds* modifié R^* dépend de la largeur b , de la pente i du canal et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. La relation adimensionnelle obtenue montre que tous les paramètres influençant l'écoulement sont pris en considération, notamment la viscosité cinématique ν .

Après avoir établi la relation adimensionnelle de C/\sqrt{g} , nous avons procédé au tracé graphique de sa variation. Les graphiques obtenus ont montré que le nombre de *Reynolds* R^* joue un rôle important. Plus la rugosité relative ε/b augmente et plus l'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement, se traduisant par la non influence du nombre de *Reynolds* modifié R^* ou de la viscosité cinématique ν . Les courbes obtenues se resserrent d'autant plus que la rugosité relative ε/b augmente. Elles finissent par se confondre à partir d'une certaine valeur de R^* .

L'étude s'est poursuivie par le calcul explicite du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Pour cela, il a fallu d'abord calculer le paramètre de forme $\eta = b/y_n$, paramètre dont dépend le coefficient C . La méthode choisie pour le calcul de $\eta = b/y_n$ a été la méthode du modèle rugueux. Elle se base sur les trois relations bien connues de l'écoulement turbulent, appliquées à un modèle rugueux dont la rugosité relative a été arbitrairement choisie dans le domaine turbulent rugueux. Une équation du troisième degré a alors été obtenue et dont la résolution a été effectuée en ayant recours aux fonctions trigonométriques et hyperboliques. Par l'intermédiaire du facteur de correction de la dimension linéaire ψ , il a été alors possible de déduire l'expression du paramètre de forme recherché $\eta = b/y_n$. Une fois la méthode de calcul du paramètre de forme exposée, nous

avons précisé les étapes de calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* et nous avons donné un exemple de calcul numérique.

Le chapitre s'est poursuivi par l'étude du coefficient n de *Manning*. En comparant la relation générale du débit volume d'*Achour* et de *Bedjaoui* (2006) et celle de *Manning*, nous avons pu établir la relation générale du coefficient n de *Manning* que nous avons transformée en une relation adimensionnelle à travers laquelle est exprimé le coefficient adimensionnel N de *Manning*. La relation obtenue montre que N dépend à la fois de la rugosité relative ε/b , du paramètre de forme $\eta = b/y_n$ et du nombre de *Reynolds* modifié R^* . La relation obtenue est de type $N = f(\varepsilon/b; \eta; R^*)$. Nous avons ensuite procédé au tracé de la variation de N , en faisant varier à la fois la rugosité relative et le nombre de *Reynolds* modifié. Nous avons ainsi mis en évidence l'influence de R^* , c'est-à-dire celle de la viscosité cinématique ν . Il ressort des graphes obtenus que plus la rugosité relative augmente et plus les courbes se resserrent, indiquant que le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint. Les courbes se confondent pour les grandes valeurs de la rugosité relative et pour une certaine valeur de R^* . Nous avons ensuite procédé au calcul du coefficient n de *Manning*, en ayant recours à la méthode du modèle rugueux. L'application de cette méthode ne nécessite pas la connaissance de la largeur b du canal. Un exemple de calcul numérique a été proposé pour expliquer les différentes étapes de calcul du coefficient n de *Manning*.

CHAPITRE III

ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UNE CONDUITE DE FORME OVOIDALE

III.1. Introduction

L'étude de l'écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale est présentée. Après avoir donné les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement, leur variation est représentée graphiquement et comparée à celle de la conduite circulaire.

Dans un premier temps, l'écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale est étudié à coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* constants, puis à coefficients de résistance variables dans un second temps. A coefficients de résistances constants, la conductivité relative est déduite des relations de *Chézy* et de *Manning* et sa représentation graphique montre une courbe unique passant par un maximum. A coefficients de résistance variables, la conductivité relative est déduite de la formule *d'Achour* et de *Bedjaoui* (2006) et dont la représentation graphique se traduit par une série de courbes passant chacune par un maximum.

Les courbes de remplissage de la conduite à coefficients de résistance constants et variables font l'objet d'une étude particulière et des relations approchées sont proposées pour le calcul de la profondeur normale.

Les coefficients de *Chézy* et de *Manning* sont déterminés en ayant recours à la méthode du modèle rugueux de référence (*Achour*, 2007). Leur représentation graphique est analysée et des conclusions intéressantes sont tirées. Des exemples d'application pratiques sont proposés pour mieux illustrer la méthode préconisée.

III.2. Caractéristiques géométriques

L'une des formes de la conduite ovoïdale considérées dans la présente étude est celle représentée par la figure 3.1. La conduite est caractérisée par une hauteur D correspondant au diamètre du cercle (C_0) et de centre C_0 .

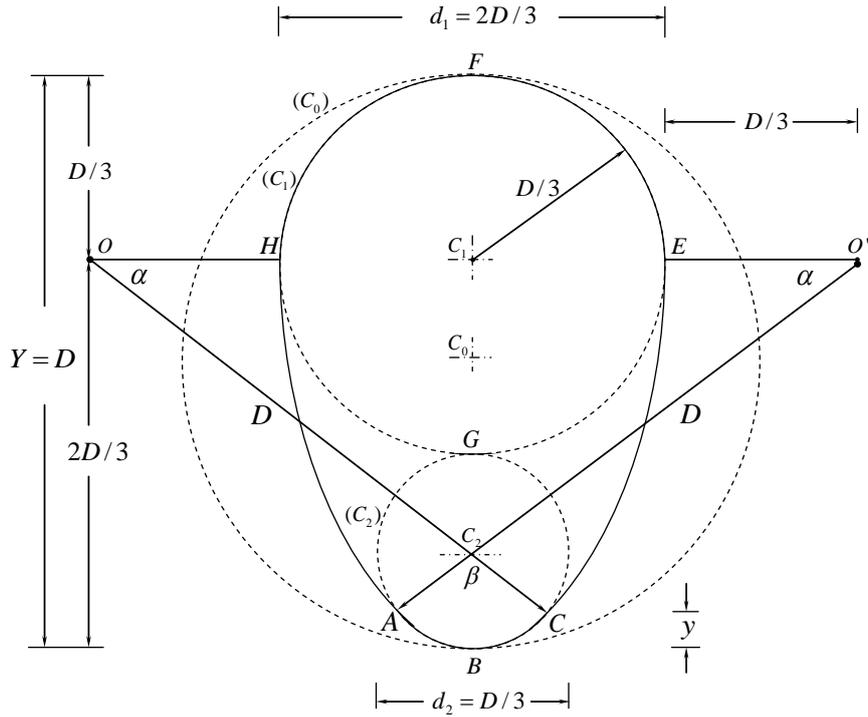


Figure 3.1 : Schéma de définition de la conduite ovoïdale

i. En considérant le triangle $\Delta O' C_2 C_1$, nous pouvons écrire que :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overline{C_1 C_2}}{\overline{C_1 O'}} = \frac{\overline{C_1 G} + \overline{G C_2}}{\overline{C_1 E} + \overline{E O'}} = \frac{D/3 + D/6}{D/3 + D/3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

soit :

$$\alpha = 36,8698976^\circ, \text{ ou bien } \alpha = 0,64350111 \text{ radian}$$

Par suite, le triangle $\Delta O C_2 O'$ permet d'écrire que :

$$\beta = 180 - 2\alpha = 180 - 2 \times 36,8698976 = 106,260205^\circ, \text{ ou bien } \beta = 1,85459044 \text{ radian}$$

ii. $\overline{C_2 A} = \overline{C_2 C} = D/6$

iii. Le triangle ($\Delta A C_2 C$) permet d'écrire que :

$$\cos(\beta/2) = \frac{\overline{C_2 B} - y}{\overline{C_2 C}} = \frac{D/6 - y}{D/6} = 1 - 6y/D$$

soit :

$$\frac{y}{D} = \frac{1 - \cos(\beta/2)}{6} = \frac{1 - \cos(1,85459044/2)}{6} = \frac{1 - 0,6}{6} = \frac{1}{15}$$

En outre, il est possible d'écrire que :

$$\sin(\beta/2) = \frac{\overline{AC}/2}{\overline{C_2C}} = \frac{\overline{AC}/2}{D/6}$$

soit :

$$\overline{AC} = \frac{D}{3} \sin(\beta/2) = \frac{D}{3} \times \sin(1,85459044/2) = \frac{D}{3} \times 0,8 = \frac{4}{15} D$$

iv. La longueur de l'arc \widehat{ABC} est :

$$A\widehat{B}C = \frac{D}{3} \times \frac{\beta}{2} = \frac{D}{6} \beta = \frac{D}{6} \times 1,85459044 = 0,30909841 D$$

v. La longueur de l'arc \widehat{HA} , égale à celle de l'arc \widehat{EC} , est :

$$\widehat{HA} = 2D \times \frac{\alpha}{2} = \alpha D = 0,64350111 D$$

vi. La longueur de l'arc \widehat{EFH} , moitié du périmètre du cercle (C_1) est :

$$E\widehat{F}H = \pi \frac{2D/3}{2} = \frac{\pi D}{3} = 1,04719755 D$$

III.3. Caractéristiques de l'écoulement

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , la largeur du plan d'eau e ou le rayon hydraulique R_h dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n / D$ où y_n est la profondeur normale de l'écoulement. En outre, ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement. Il n'existe de nos jours aucune relation unique permettant d'évaluer l'aire de la section mouillée A pour un taux de remplissage $0 \leq \eta \leq 1$ (Figure 3.2). C'est le cas également de toutes les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement. La figure 3.2 montre les trois espaces géométriques que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux de remplissage

$\eta = y_n / D$. C'est ainsi que si :

- $\eta \leq 1/15$, l'écoulement, de plan d'eau \overline{ac} , se situe dans la partie circulaire la plus basse de la conduite.
- $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, l'écoulement, de plan d'eau \overline{bd} , se situe dans l'espace délimité par les arcs de cercle \widehat{HA} et \widehat{EC} .
- $2/3 \leq \eta \leq 1$, l'écoulement, de plan d'eau \overline{kh} , se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite.

Les caractéristiques de l'écoulement doivent donc être déterminées pour chacun des trois cas ci-dessus indiqués.

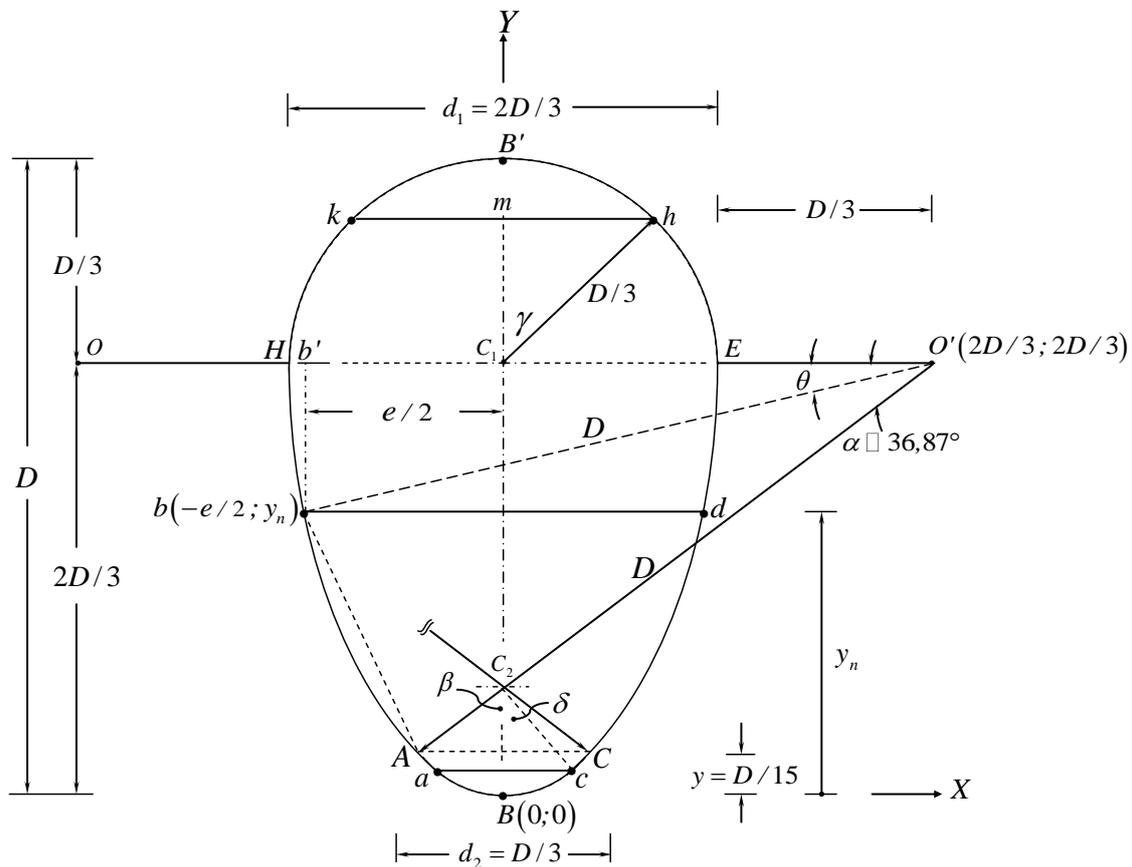


Figure 3.2 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale.

i. $\eta \leq 1/15$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque $\eta \leq 1/15$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ac} . Les points a et b appartiennent au cercle (C_2) , de centre C_2 et de diamètre $d_2 = D/3$. Ainsi :

$$e = \frac{D}{3} \sin(\delta)$$

ou bien :

$$e = \frac{D}{3} \sqrt{1 - \cos^2(\delta)}$$

où l'angle δ est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\delta) = 1 - 2 \frac{y_n}{D/3} = 1 - 6\eta$$

ou tel que :

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} = 2\sqrt{3\eta(1-3\eta)}$$

Finalement, la largeur du plan d'eau e est :

$$e = \frac{2D}{3} \sqrt{3\eta(1-3\eta)}$$

(3.1)

b) Périmètre mouillé

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc $a\widehat{B}c$, appartenant au cercle (C_2) , de centre C_2 et de diamètre $d_2 = D/3$. Ainsi :

$$P = \frac{D}{3} \delta$$

Soit :

$$P = \frac{D}{3} \cos^{-1}(1-6\eta) \quad (3.2)$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-6\eta) \quad (3.3)$$

La relation (3.2) devient alors :

$$P = \frac{D}{3} \sigma(\eta) \quad (2.4)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aBca$, appartenant au cercle (C_2) , de centre C_2 et de diamètre $d_2 = D/3$. Ainsi :

$$A = \frac{(D/3)^2}{4} [\delta - \sin(\delta) \cos(\delta)]$$

Soit :

$$A = \frac{D^2}{36} \left[\cos^{-1}(1-6\eta) - 2(1-6\eta) \sqrt{3\eta(1-3\eta)} \right] \quad (3.5)$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-6\eta) \sqrt{3\eta(1-3\eta)}}{\cos^{-1}(1-6\eta)} \quad (3.6)$$

La relation (3.5) permet alors d'écrire que :

$$A = \frac{D^2}{36} \sigma(\eta) \varphi(\eta) \quad (3.7)$$

d) Rayon hydraulique

Les relations (3.4) et (3.7) permettent de déduire que le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est :

$$R_h = \frac{D}{12} \varphi(\eta) \quad (3.8)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

a) Largeur du plan d'eau

Lorsque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{bd} (Figure 3.2). Le point b appartient au cercle de centre O' et de rayon D . L'équation de ce cercle est :

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = D^2 \quad (3.9)$$

où x_o et y_o sont les coordonnées du point O' . Dans le système d'axes XBY de la figure 3.2, le point O' a pour coordonnées $x_o = 2D/3$ et $y_o = 2D/3$. Dans le même système d'axes, le point b a pour coordonnées $x = -e/2$ et $y = y_n$. La relation (3.9) s'écrit alors :

$$\left(\frac{e}{2} + \frac{2D}{3}\right)^2 + \left(y_n - \frac{2D}{3}\right)^2 = D^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par D^2 , il vient que :

$$\left(\frac{e}{2D} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{y_n}{D}\right)^2 = 1$$

ou bien :

$$\left(\frac{e}{2D} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2 = 1$$

La largeur du plan d'eau e est donc :

$$e = 2D \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{2}{3} \right] \quad (3.10)$$

b) Périmètre mouillé

Lorsque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc bA , à laquelle il faut ajouter la longueur de l'arc de cercle \widehat{ABC} . La longueur de l'arc bA est égale à la différence des longueurs des arcs HA et Hb . La longueur de l'arc \widehat{ABC} a été évaluée à l'étape iv du paragraphe précédent, soit $\widehat{ABC} = 0.30909841D$. La longueur de l'arc HA a été quant à elle évaluée à l'étape v , soit $\widehat{HA} = 0.64350111D$. Pour évaluer la longueur de l'arc bA , écrivons d'abord que dans le triangle droit $\Delta O'bb'$:

$$\sin(\theta) = \frac{2D/3 - y_n}{D}$$

Soit :

$$\sin(\theta) = \frac{2}{3} - \eta \tag{3.11}$$

Ou bien :

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \tag{3.12}$$

L'angle θ ainsi défini varie entre 0° et $36,8698976^\circ$, valeur correspondant à celle de l'angle α .

Notons également que dans le triangle droit $\Delta O'bb'$:

$$\cos(\theta) = \frac{e/2 + 2D/3}{D} = \frac{e}{2D} + \frac{2}{3}$$

Soit, en tenant compte de la relation (3.10) :

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} \tag{3.13}$$

La longueur de l'arc \widehat{Hb} est par suite :

$$\widehat{Hb} = 2D \frac{\theta}{2} = D\theta$$

ou bien :

$$\widehat{Hb} = D \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right)$$

La longueur de l'arc \widehat{bA} est par suite :

$$\widehat{bA} = \widehat{HA} - \widehat{Hb} = 0,64350111D - D \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = D \left[0,64350111 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \right]$$

Le périmètre mouillé P est donc tel que :

$$P = 2\widehat{bA} + A\widehat{BC}$$

Soit :

$$P = 2D \left[0,64350111 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \right] + 0,30909841D$$

Ou bien :

$$P = D \left[1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \right] \quad (3.14)$$

Définissons la fonction :

$$\mathcal{G}(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \quad (3.15)$$

La relation (3.14) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D \mathcal{G}(\eta) \quad (3.16)$$

c) *Aire de la section mouillée*

L'aire de la section mouillée A correspondant à $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ est définie par l'espace $bdBb$ de la figure 3.2. L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en trois aires qui sont :

- $2A_o$, où A_o est l'aire de la section du segment circulaire bAb .
- A_1 , l'aire du trapèze $bdCA$ dont les caractéristiques sont :
 - Grande base = largeur du plan d'eau = e , définie par la relation (3.10)
 - Petite base = $\overline{AC} = \frac{4}{15}D$, déterminée à l'étape *iii* du paragraphe précédent.
 - Hauteur = $y_n - \frac{D}{15}$.
- A_2 , l'aire du segment circulaire $ACBA$ qui s'exprime par la relation (3.5) pour $\eta = 1/15$.

L'aire de la section A recherchée est donc :

$$A = 2A_o + A_1 + A_2$$

L'aire du segment circulaire bAb appartient au cercle de centre O' , de rayon D et d'angle au centre $(\alpha - \theta)$. Nous pouvons ainsi écrire que, pour α et θ exprimés en radian :

$$A_o = \frac{D^2}{2} [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)]$$

ou bien :

$$2A_o = D^2 [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)] \quad (3.17)$$

La quantité $\sin(\alpha - \theta)$ peut s'écrire :

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin(\alpha) \cos(\theta) - \cos(\alpha) \sin(\theta) \quad (3.18)$$

L'angle α a été évalué au cours de l'étape i du paragraphe précédent, soit $\alpha = 0,64350111$ radian. Ceci permet d'écrire que :

$$\sin(\alpha) = \sin(0,64350111) = 3/5$$

$$\cos(\alpha) = \cos(0,64350111) = 4/5$$

En tenant compte des relations (3.11) et (3.13), la relation (3.18) s'écrit alors :

$$\sin(\alpha - \theta) = \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \quad (3.19)$$

Avec la valeur de $\alpha = 0,64350111$ radian et en ayant recours aux relations (3.12) et (3.19), la relation (3.17) devient :

$$2A_o = D^2 \left[0,64350111 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \right]$$

Ou bien :

$$2A_o = D^2 \left[1,17683444 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{5} \eta \right] \quad (3.20)$$

L'aire de la section mouillée A_1 du trapèze $bdCA$ s'écrit :

$$A_1 = \frac{(e + 4D/15)}{2} (y_n - D/15) \quad (3.21)$$

ou bien :

$$A_1 = \left(\frac{e}{2D} + \frac{2}{15} \right) \left(\eta - \frac{1}{15} \right) D^2 \quad (3.22)$$

En tenant compte de la relation (3.10), la relation (3.22) devient :

$$A_1 = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{8}{15} \right) \left(\eta - \frac{1}{15} \right) D^2 \quad (3.23)$$

Après réarrangements, la relation (3.23) mène à :

$$A_1 = \left[0,0355556 + \eta \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{1}{15} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{8}{15} \eta \right] D^2 \quad (3.24)$$

L'aire A_2 du segment circulaire $ACBA$ est donnée par la relation (3.5) pour $\eta = 1/15$, soit :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{D^2}{36} \left[\cos^{-1}(1 - 6\eta) - 2(1 - 6\eta) \sqrt{3\eta(1 - 3\eta)} \right] \\ &= \frac{D^2}{36} \times \left[\cos^{-1}(1 - 2/5) - 2 \times (1 - 2/5) \times \sqrt{1 \times (1 - 1/5)/5} \right] \end{aligned}$$

Le calcul mène à :

$$A_2 = 0,0124248867 D^2 \quad (3.25)$$

Finalement, l'aire recherchée $A = 2A_o + A_1 + A_2$ est, compte tenu des relations (3.20), (3.24) et (3.25) :

$$A = \left[1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta \right] D^2 \quad (3.26)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta \quad (3.27)$$

La relation (3.26) s'écrit alors :

$$A = D^2 \zeta(\eta) \quad (3.28)$$

d) Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (3.16) et (3.28) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.29)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

a) *Largeur du plan d'eau*

Lorsque $2/3 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du segment \overline{kh} . Dans le triangle droit ΔC_1mh , nous pouvons écrire que :

$$\overline{mh} = e/2 \quad (3.30)$$

$$\overline{mC_1} = y_n - 2D/3 \quad (3.31)$$

$$\overline{mh}^2 + \overline{mC_1}^2 = (D/3)^2 \quad (3.32)$$

Les relations (3.30), (3.31) et (3.32) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 + (y_n - 2D/3)^2 = (D/3)^2 \quad (3.33)$$

ou bien :

$$(e/2)^2 = (D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 \quad (3.34)$$

Or :

$$(D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 = (D - y_n)(y_n - D/3) \quad (3.35)$$

soit :

$$(D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 = D^2(1-\eta)(\eta-1/3) \quad (3.36)$$

Par suite, la relation (3.34) s'écrit :

$$(e/2)^2 = D^2(1-\eta)(\eta-1/3)$$

Ainsi, la largeur du plan d'eau est :

$$e = 2D\sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} \quad (3.37)$$

b) Périimètre mouillé

Pour $2/3 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé correspond à deux fois la longueur de l'arc Hk à laquelle il faut ajouter la longueur HBE . Celle-ci s'obtient par la relation (3.14) pour $\eta = 2/3$. La longueur $2Hk$ est quant à elle égale à la différence des longueurs des arcs HE et hk .

Désignons par P_o la longueur HBE . Pour $\eta = 2/3$, la relation (3.14) donne :

$$P_o = D \left[1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \right] = D \times \left[1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \right]$$

Soit :

$$P_o = 1,59610062 D \quad (3.38)$$

Désignons par P_1 la longueur de l'arc HE . Celle-ci correspond au demi-périmètre du cercle (C_1) de centre C_1 et de rayon $D/3$. Ainsi :

$$P_1 = \pi D / 3 \quad (3.39)$$

Désignons également par P_2 la longueur de l'arc hk . Nous pouvons alors écrire que :

$$P_2 = \frac{2D}{3} \gamma \quad (3.40)$$

Or, dans le triangle ΔC_1mh , nous pouvons écrire que :

$$\cos(\gamma) = \frac{y_n - 2D/3}{D/3}$$

Soit :

$$\cos(\gamma) = 3\eta - 2 \quad (3.41)$$

Notons également que le triangle ΔC_1mh permet d'écrire :

$$\sin(\gamma) = \frac{\overrightarrow{mh}}{D/3} = \frac{e/2}{D/3} = \frac{3e}{2D} \quad (3.42)$$

Tenant compte de la relation (3.37), la relation (3.42) devient :

$$\sin(\gamma) = 3\sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} \quad (3.43)$$

Soit :

$$\gamma = \sin^{-1} \left[3\sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} \right] \quad (3.44)$$

Tenant compte de (3.41), la relation (3.40) s'écrit :

$$P_2 = \frac{2D}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (3.45)$$

Le périmètre $P = P_o + (P_1 - P_2)$ recherché est, en ayant recours aux relations (3.38), (3.39) et (3.45) :

$$P = 1,59610062D + \frac{\pi D}{3} - \frac{2D}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

ou bien, plus simplement :

$$P = D \left[2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \right] \quad (3.46)$$

Définissons la fonction :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (3.47)$$

La relation (3.46) s'écrit alors :

$$P = D \tau(\eta) \quad (3.48)$$

c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A , dans le cas où $2/3 \leq \eta \leq 1$, correspond à l'espace

$HkhEBH$ de la figure 3.2. L'aire de la section mouillée A est la somme des aires $HEBH$ et $khEH$.

Désignons par A_o l'aire de la section $HEBH$. Cette aire est donnée par la relation (3.26) pour $\eta = 2/3$, soit :

$$\begin{aligned} A_o &= \left[1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \right] D^2 \\ &= \left[1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \right] D^2 \end{aligned}$$

Le calcul mène à :

$$A_o = 0,33592598 D^2 \quad (3.49)$$

Désignons également par A_1 l'aire de la section mouillée du segment circulaire $kB'h$. Ce segment circulaire appartient au cercle (C_1) de centre C_1 et de rayon $D/3$. Nous pouvons alors écrire que, pour l'angle γ exprimé en radian :

$$A_1 = \frac{(2D/3)^2}{4} [\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)] \quad (3.50)$$

Soit :

$$A_1 = \frac{D^2}{9} [\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)] \quad (3.51)$$

Tenant compte des relations (3.41) et (3.43), la relation (3.51) s'écrit :

$$A_1 = \left[\frac{1}{9} \cos^{-1}(3\eta - 2) - (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} \right] D^2 \quad (3.52)$$

Désignons aussi par A_2 l'aire du demi-cercle $HB'EH$, de rayon $D/3$. Il vient que :

$$A_2 = \frac{\pi}{18} D^2 \quad (3.53)$$

L'aire $A = A_o + (A_2 - A_1)$ recherchée est, en ayant recours aux relations (3.49), (3.52) et (3.53) :

$$A = \left[0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \right] D^2 \quad (3.54)$$

Définissons la fonction :

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \quad (3.55)$$

La relation (3.54) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 \lambda(\eta) \quad (3.56)$$

Pour l'état plein de la conduite ovoïdale considérée, correspondant au taux de remplissage $\eta = 1$, la relation (3.54) mène à écrire que :

$$A_p = 0,5104589 D^2 \quad (3.57)$$

L'aire de la conduite circulaire pleine de même diamètre (Figure 3.1) est :

$$A_{\text{(circulaire)}} = \frac{\pi D^2}{4} \quad (3.58)$$

Par suite, nous pouvons déduire des relations (3.57) et (3.58) que la conduite ovoïdale occupe $100 \times 0,5104589 / (\pi/4) = 64,9936459 \% \cong 65\%$ de la surface de la conduite circulaire.

d) *Rayon hydraulique*

Lorsque $2/3 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'exprime, compte tenu des relations (3.48) et (3.56), par :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (3.59)$$

III.4. Variation des caractéristiques de l'écoulement

Les caractéristiques adimensionnelles de l'écoulement, en particulier le périmètre mouillé relatif P/D , l'aire de la section mouillée relative A/D^2 et le rayon hydraulique relatif R_h/D sont représentées graphiquement sur les figures 3.3, 3.4 et 3.5 respectivement, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$. Ces caractéristiques sont comparées à leurs homologues dans la conduite

circulaire.

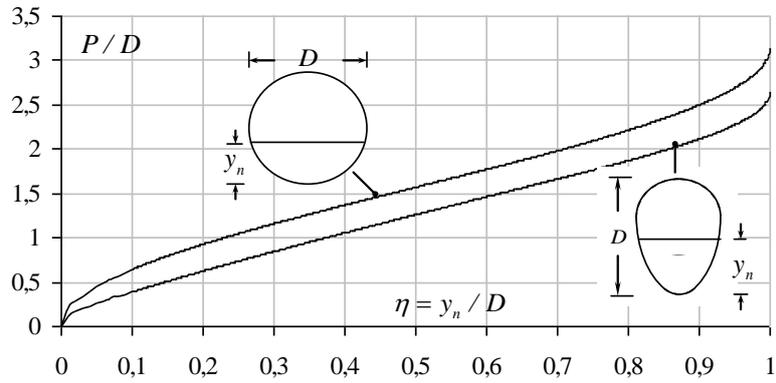


Figure 3.3 : Variation du périmètre mouillé relatif P/D en fonction du taux de remplissage η

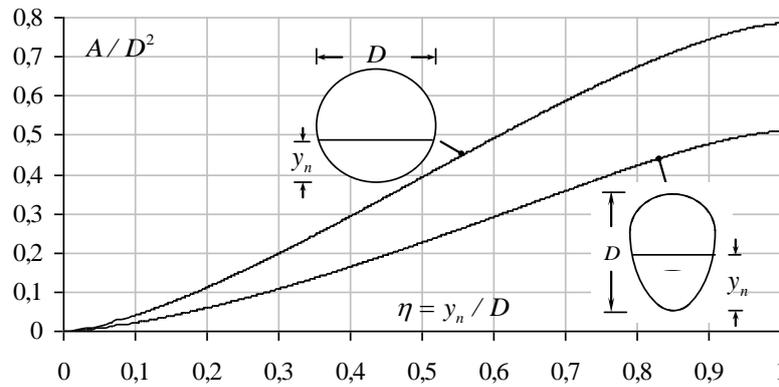


Figure 3.4 : Variation de la section relative A/D^2 en fonction du taux de remplissage η .

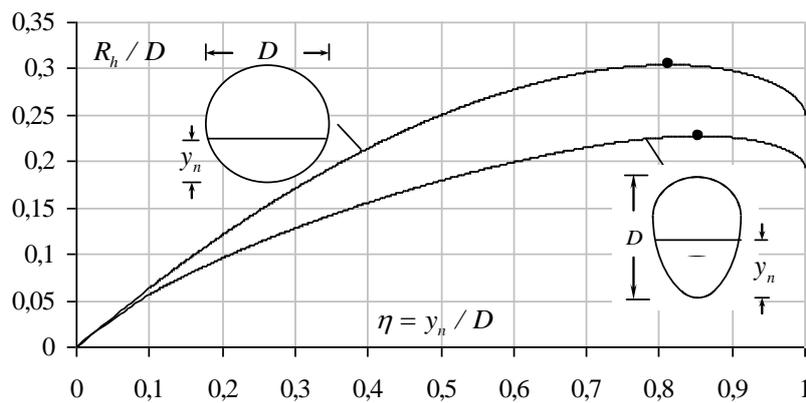


Figure 3.5 : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux de remplissage

η .

(●) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,max}$.

La figure 3.5 montre que le rayon hydraulique relatif R_h/D passe par un maximum,

aussi bien pour le cas de la conduite circulaire que pour celui de conduite de forme ovoïdale considérée. Le calcul a révélé que le taux de remplissage, correspondant au maximum de R_h / D , est $\eta = 0,813$ pour la conduite de forme circulaire et $\eta = 0,85438$ pour la conduite de forme ovoïdale.

Pour celle-ci, le taux de remplissage η correspondant au maximum de R_h / D appartient à la gamme $2/3 \leq \eta \leq 1$. Ainsi, $R_{h,\max}$ doit être calculé par application de la relation (3.59). La valeur de chacune des fonctions $\tau(\eta = 0,85438)$ et $\lambda(\eta = 0,85438)$ sont respectivement, selon les relations (3.47) et (3.55):

- $\tau(\eta = 0,85438) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2) = 1,99488775 \cong 1,995$
- $\lambda(\eta = 0,85438) =$
 $0,5104589 + (0,85438 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,85438)(0,85438 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2)$
 $= 0,45409685 \cong 0,4541$

Ainsi :

$$R_{h,\max} = D \times \frac{0,45409685}{1,99488775}$$

Soit :

$$R_{h,\max} = 0,22763028 D \tag{3.60}$$

III.5. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE CONSTANT

III.5.1. Formule de Chézy

III.5.1.1. Conductivité relative

On entend par coefficient de résistance constant, un coefficient de résistance à l'écoulement qui reste inchangé même si le taux de remplissage de la conduite varie. Autrement dit, pour une conduite de diamètre donné, le coefficient de résistance à l'écoulement reste invariable avec la variation de la profondeur de l'écoulement.

Selon *Chézy*, le débit volume Q s'exprime par la relation :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (3.61)$$

où C et i désignent respectivement le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et la pente longitudinale de la conduite.

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h s'exprime par les relations que nous avons établies précédemment, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . C'est ainsi que pour :

$$i. \quad \eta \leq 1/15$$

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation par la relation (3.7), tandis que le rayon hydraulique R_h s'exprime par la relation (3.8). Les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ sont définies par les relations (3.3) et (3.6) respectivement.

En tenant compte de toutes ces relations, la relation (3.61) devient :

$$Q = \frac{C}{72\sqrt{3}} D^{5/2} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{i} \quad (3.62)$$

Définissons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (3.63)$$

La relation (3.62) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{\sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2}}{72\sqrt{3}} \quad (3.64)$$

$$ii. \quad 1/15 \leq \eta \leq 2/3$$

Dans cet intervalle du taux de remplissage η , l'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont respectivement donnés par les relations (3.28) et (3.29). Dans ces relations, les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont définies par les relations (3.15) et (3.27)

respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (3.61) devient :

$$Q = C D^{5/2} \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (3.65)$$

En faisant appel à la relation (3.63), la relation (3.65) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (3.66)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

Dans cet intervalle de η , l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés par les relations (3.56) et (3.59) respectivement. Dans ces relations, la fonction $\tau(\eta)$ est définie par la relation (3.47), tandis que la fonction $\lambda(\eta)$ est donnée par la relation (3.55). Ainsi, en tenant compte de ces relations, la relation (3.61) devient :

$$Q = C D^{5/2} \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (3.67)$$

En ayant recours à la relation (3.63), la relation (3.67) s'écrit, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (3.68)$$

Pour le cas particulier correspondant à l'état plein de la conduite ovoïdale, le taux de remplissage est $\eta = 1$. Les fonctions $\lambda(\eta)$ et $\tau(\eta)$ sont respectivement égales à :

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2)$
 $= 0,5104589 + (1-2/3) \times \sqrt{(1-1) \times (1-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 0,5104589$
- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 2,64329817$

Ainsi, selon la relation (3.68), la conductivité relative Q_p^* à l'état plein est :

$$Q_p^* = \frac{0,5104589^{3/2}}{2,64329817^{1/2}}$$

Soit :

$$Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante} \quad (3.69)$$

III.5.1.2. Variation de la conductivité relative

En considérant les relations (3.64), (3.66) et (3.68) la conductivité relative Q^* a été représentée graphiquement sur la figure 3.6, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

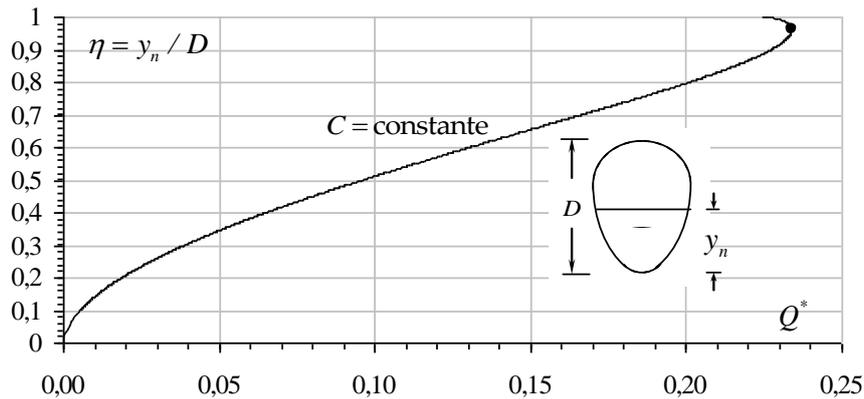


Figure 3.6 : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η .

Courbe tracée selon les relations (3.64), (3.66) et (3.68). (●) Q_{\max}^* correspondant à $\eta = 0,9617$.

Nous pouvons ainsi observer que la conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η , jusqu'à un maximum correspondant à $\eta = 0,9617 \cong 0,962$, puis diminue au-delà de ce maximum. La valeur $\eta = 0,962$, correspondant à Q_{\max}^* , appartient à la gamme $2/3 \leq \eta \leq 1$. La valeur de la conductivité relative Q_{\max}^* doit donc être déterminée par application de la relation (3.68). Pour cela, évaluons d'abord la valeur des fonctions $\tau(\eta = 0,9617)$ et $\lambda(\eta = 0,9617)$ par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,9617 - 2) = 2,32064366$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,9617 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,9617) \times (0,9617 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,9617 - 2)$
 $= 0,502446981$

Selon la relation (3.68), la conductivité relative Q^*_{\max} est :

$$Q^*_{\max} = \frac{0,502446981^{3/2}}{2,32064366^{1/2}} \cong 0,233792$$

En pratique, les paramètres connus sont le débit volume Q , le diamètre D de la conduite, la pente longitudinale i et le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Le problème est alors de déterminer le taux de remplissage $\eta = y_n / D$ et donc la profondeur normale y_n . Les paramètres connus du problème permettent, en ayant recours à la relation (3.63), d'évaluer la conductivité relative Q^* . Le taux de remplissage η peut alors être déterminé par lecture graphique sur la figure 3.6. Il peut être également évalué par un procédé itératif à partir de l'une des relations implicites (3.64), (3.66) ou (3.68), selon la valeur calculée de la conductivité relative Q^* . En effet, η sera déterminé par :

i. la relation (3.64) si :

$$0 < Q^* \leq 0,002491, \text{ correspondant à } \eta \leq 1/15.$$

ii. la relation (3.66) si :

$$0,002491 \leq Q^* \leq 0,1541, \text{ correspondant à } 1/15 \leq \eta \leq 2/3.$$

iii. la relation (3.68) si :

$$0,1541 \leq Q^* \leq 0,2243, \text{ correspondant à } 2/3 \leq \eta \leq 1.$$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux de remplissage $\eta(Q^*)$, nos calculs ont montré que les relations (3.64), (3.66) et (3.68) pouvaient être remplacées par la relation

approchée suivante, applicable dans la large gamme pratique $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ et correspondant à $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,744 Q^{*0,533}$$

(3.70)

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.70) est inférieur à 0,4% comme le montre clairement la figure 3.7. Notons que le plus grand écart est obtenu pour la valeur extrême de la gamme considérée de Q^* .

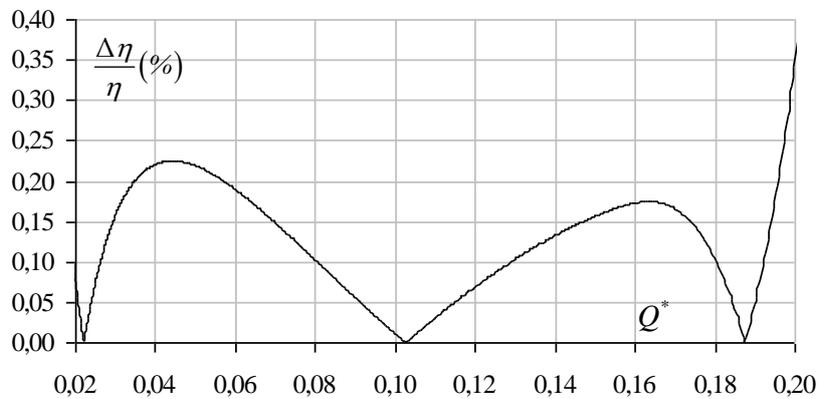


Figure 3.7 : Ecarts relatifs $\Delta\eta / \eta$ (%) occasionnés par la relation approchée (3.70) sur le calcul du taux de remplissage η , dans la gamme $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$.

III.5.1.3. Exemple d'application 3.1

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 écoule le débit volume $Q = 2,78 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous la pente longitudinale $i = 4 \cdot 10^{-4}$. Le diamètre de la conduite est $D = 2,5 \text{ m}$ et le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy, supposé constant, est $C = 85 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$. Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Solution

- i. Vérifions d'abord que la conductivité relative de la conduite est inférieure à la valeur maximale $Q_{\text{max}}^* = 0,233792$, pour les données du problème.

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{2,78}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 4,10^{-4}}} = 0,16548013 < Q_{\max}^*$$

En outre, Q^* se situe dans la gamme $0,1541 \leq Q^* \leq 0,2243$. Le taux de remplissage η appartient de ce fait à la gamme $2/3 \leq \eta \leq 1$.

ii. Utilisons la relation approchée (3.70) pour évaluer le taux de remplissage η :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left(1,744 Q^{*0,533} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,744 \times 0,16548013^{0,533} \right) = 0,69926235 \cong 0,7$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,69926235 \times 2,5 = 1,74815587 \text{ m} \cong 1,75 \text{ m}$$

iv. Vérifions les calculs en déterminant la valeur de la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.68), pour le taux de remplissage η calculé. Pour cela, évaluons les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1} (3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1} (3 \times 0,69926235 - 2) = 1,66139633$

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1} (3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,69926235 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,69926235) \times (0,69926235 - 1/3)}$
 $- (1/9) \times \cos^{-1} (3 \times 0,69926235 - 2) = 0,35762175$

Selon la relation (3.68), la conductivité relative est :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} = \frac{0,35762175^{3/2}}{1,66139633^{1/2}} = 0,1659202$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif entre les conductivités relatives calculées aux étapes *i* et *iv* n'est que de 0,265%. La valeur calculée du taux de remplissage η , par application de la relation approchée (3.70), est donc acceptable.

III.5.1.4. Exemple d'application 3.2

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 écoule le débit volume $Q = 2,18 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous la pente longitudinale $i = 4.10^{-4}$. Le diamètre de la conduite est $D = 2,5 \text{ m}$ et le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, supposé constant, est $C = 85 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$. Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Solution

i. Vérifions dans un premier temps que la conductivité relative de la conduite est inférieure à la valeur maximale $Q^*_{\max} = 0,233792$, pour les données du problème. Soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{2,18}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 4.10^{-4}}} = 0,12976499 < Q^*_{\max}.$$

De plus, nous pouvons constater que Q^* se trouve dans la gamme $0,002491 \leq Q^* \leq 0,1541$. Le taux de remplissage η appartient de ce fait à l'intervalle $1/15 \leq \eta \leq 2/3$.

ii. Utilisons la relation approchée (3.70) pour évaluer le taux de remplissage η , soit :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left(1,744 Q^{*0,533} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,744 \times 0,12976499^{0,533} \right) = 0,59942648 \cong 0,6$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,59942648 \times 2,5 = 1,49856621 \text{ m} \cong 1,5 \text{ m}$$

iv. Vérifions les calculs en déterminant la valeur de la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.66), pour le taux de remplissage η calculé. Pour cela, évaluons les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ par les relations (3.15) et (3.27) respectivement. Ainsi :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,59942648 \right) = 1,46151871$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}(2/3 - 0,59942648) - (2/3 - 0,59942648) \times \\ &\quad \sqrt{1 - (2/3 - 0,59942648)^2} - (4/3) \times 0,59942648 = 0,29120059 \end{aligned}$$

Selon la relation (3.66), la conductivité relative est :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} = \frac{0,29120059^{3/2}}{1,46151871^{1/2}} = 0,12998289 \cong 0,13$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif entre les conductivités relatives calculées aux étapes i et iv n'est que de 0,167%. La valeur calculée du taux de remplissage η , par application de la relation approchée (3.70), est donc acceptable.

III.5.1.5. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$

La relation (3.63), exprimant la conductivité relative Q^* peut être transformée pour s'écrire :

$$Q^* = \frac{Q\eta^{5/2}}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} \quad (3.71)$$

En introduisant la conductivité relative Q_y^* telle que :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} \quad (3.72)$$

la relation (3.71) permet alors d'écrire que :

$$Q^* = \eta^{5/2} Q_y^* \quad (3.73)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , la conductivité relative Q^* s'exprime selon la relation (3.64), (3.66) ou (3.68). Nous pouvons alors déduire, tenant compte de la relation (3.73), que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$Q_y^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{72\sqrt{3}} \quad (3.74)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (3.75)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$Q_y^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (3.76)$$

Pour l'ensemble de la gamme du taux de remplissage $0 \leq \eta \leq 1$, impliquant les relations (3.74), (3.75) et (3.76), la variation de la conductivité relative Q_y^* a été représentée sur la figure 3.8 en fonction de η . Sur la même figure a été également représentée la courbe $\eta(Q_y^*)$ pour le cas de la conduite circulaire.

Nous pouvons ainsi observer que Q_y^* augmente avec la diminution du taux de remplissage η . En outre, pour la même valeur de la conductivité relative Q_y^* , le taux de remplissage de la conduite circulaire est plus élevé que celui de la conduite de forme ovoïdale. Le calcul a montré que pour $\eta \leq 1$, la conductivité relative de la conduite ovoïdale est telle que $Q_y^* \geq 0,2243$, tandis que pour la conduite de forme circulaire $Q_y^* \geq 0,3927$.

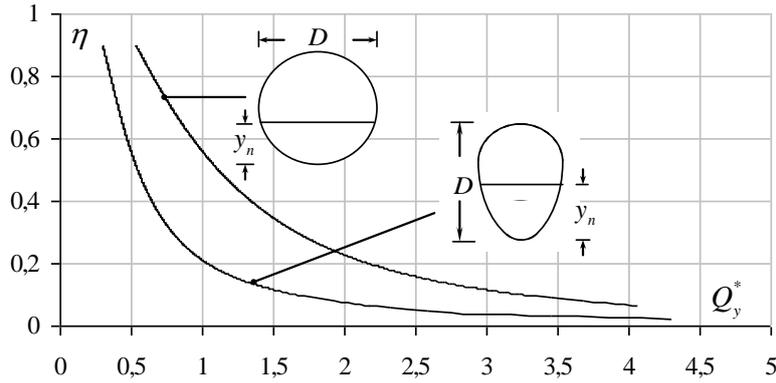


Figure 3.8 : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η pour les cas des conduites de forme ovoïdale et circulaire.

L'un des problèmes que l'on peut rencontrer en pratique est celui qui consiste à déterminer la valeur du taux de remplissage η de la conduite de forme ovoïdale, et par conséquent celle du diamètre D , à partir des valeurs imposées du débit volume Q , du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, de la profondeur normale y_n et de la pente longitudinale i de la conduite. Un tel problème trouve sa solution en résolvant l'une des équations (3.74), (3.75) ou (3.76), selon la valeur de la conductivité relative Q_y^* .

La détermination du taux de remplissage η nécessite alors soit un procédé itératif, ou bien la voie graphique en ayant recours à la figure 3.8. Afin de faciliter le calcul du taux de remplissage η , les relations (3.74), (3.75) et (3.76) ont fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer des relations explicites qui leurs sont approchées. Le calcul a montré que pour :

a) $\eta \leq 0,11$, correspondant à $Q_y^* \geq 1,569$, le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ peut être exprimé par la relation :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{0,487(1 + 0,543Q_y^{*2})} - 0,262Q_y^*}{1 + 0,402Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (3.77)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.77) est inférieur à 0,4% seulement.

b) $0,11 \leq \eta \leq 0,58$, correspondant à $0,48 \leq Q_y^* \leq 1,569$, le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ est tel que :

$$[\sinh(1,34\eta)]^{-1} = 3,478 Q_y^{*3/2} \quad (3.78)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.78) est inférieur à 0,5% seulement.

c) $0,58 \leq \eta \leq 1$, correspondant à $0,224 \leq Q_y^* \leq 0,48$, le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ est donné par :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{0,537(1 + 26,4Q_y^{*2})} + 2,593Q_y^*}{1 + 13,87Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (3.79)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.79) est inférieur à 0,23% seulement.

Les exemples d'application suivants montrent les étapes à suivre pour la détermination du taux de remplissage η de la conduite de forme ovoïdale, et par suite de son diamètre D , par application des relations approchées (3.78) et (3.79) qui régissent les cas pratiques.

III.5.1.6. Exemple d'application 3.3

Reprenons les données de l'exemple d'application 3.2 et évaluons cette fois-ci le diamètre D de la conduite. Les données sont donc :

$$Q = 2,18 m^3 / s ; C = 85 m^{0.5} / s ; i = 4.10^{-4} ; y_n = 1,49856621 m .$$

Solution

Pour les données du problème, la conductivité relative Q_y^* est, selon la relation (3.72) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} = \frac{2,18}{\sqrt{85^2 \times 4.10^{-4} \times 1,49856621^5}} = 0,46646357$$

La conductivité relative Q_y^* appartient à l'intervalle $0,224 \leq Q_y^* \leq 0,48$ et le taux de remplissage η serait alors tel que $0,58 \leq \eta \leq 1$. Il est donc régi par la relation (3.79), soit :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{0,537(1+26,4Q_y^{*2})} + 2,593Q_y^*}{1+13,87Q_y^{*2}} \right]^2 = \left[\frac{\sqrt{0,537 \times (1+26,4 \times 0,46646357^2)} + 2,593 \times 0,46646357}{1+13,87 \times 0,46646357^2} \right]^2$$

$$= 0,6001264 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur de η , calculé au cours de l'étape *ii* de l'exemple d'application 3.2. Par suite, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / \eta = 1,49856621 / 0,6001264 = 2,49708431 \text{ m} \cong 2,5 \text{ m}$$

III.5.1.7. Exemple d'application 3.4

Déterminer le diamètre D de la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, pour les données suivantes :

$$Q = 1,986 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 2,1 \cdot 10^{-3} ; y_n = 1 \text{ m} .$$

Solution

i. Pour les données du problème, la conductivité relative Q_y^* est, selon la relation (3.72) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2,1 \cdot 10^{-3} \times 1^5}} = 0,54172591$$

ii. La conductivité relative Q_y^* appartient à l'intervalle $0,48 \leq Q_y^* \leq 1,569$ et le taux de remplissage η serait alors tel que $0,11 \leq \eta \leq 0,58$. Il est donc régi par la relation (3.78), soit :

$$[\sinh(1,34\eta)]^{-1} = 3,478 Q_y^{*3/2}$$

Ainsi :

$$\eta = \left[\operatorname{asinh} \left(3,478 \times 0,54172591^{3/2} \right)^{-1} \right] / 1,34 = 0,49990605 \cong 0,5$$

iii. Vérifions nos calculs en ayant recours à la relation exacte (3.75), soit :

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}}$$

où les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,66669628\right) = 1,26101389$
- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta$
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,66669628\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,66669628\right) \times$
 $\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,66669628\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,66669628 = 0,22630456$

Ainsi :

$$Q_y^* = \frac{0,22630456^{3/2} \times 0,66669628^{-5/2}}{1,26101389^{1/2}} = 0,5425741$$

Nous pouvons ainsi constater que l'écart relatif entre les valeurs de la conductivité Q_y^* calculées aux étapes *i* et *iii* n'est que de 0,156% seulement. La valeur du taux de remplissage η déterminée au cours de l'étape *ii*, par application de la relation approchée (3.78), est donc acceptable.

iv. Les calculs auraient pu être également vérifiés en ayant recours à la relation approchée (3.70) dans laquelle la conductivité relative Q^* est donnée par la relation (3.63), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2^5 \times 2,1.10^{-3}}} = 0,09571954$$

Selon la relation (3.70), le taux de remplissage η de la conduite considérée serait approximativement égal à :

$$\eta = \frac{\pi}{3} \sin^{-1}\left(1,744 Q^{*0,533}\right) = \frac{\pi}{3} \times \sin^{-1}\left(1,744 \times 0,09571954^{0,533}\right) = 0,4994 \cong 0,5$$

Il s'agit bien de la même valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape *ii*.

v. Le diamètre D recherché est, par suite :

$$D = y_n / \eta = 1 / 0,5 = 2m$$

III.5.1.8. Courbe de remplissage de la conduite pour $C = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$. Pour le même diamètre D et pour la même pente longitudinale i , nous pouvons écrire que :

$$\frac{Q^*}{Q_p^*} = \frac{Q}{Q_p} \quad (3.80)$$

Selon l'intervalle du taux de remplissage η , la conductivité relative Q^* est donnée par l'une des relations (3.64), (3.66) ou (3.68). Rappelons également que $Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante}$ (Relation 3.69). Tenant compte de ces considérations, nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_p} = 0,03574 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.81)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{Q}{Q_p} = 4,458 \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (3.82)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_p} = 4,458 \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (3.83)$$

On peut donc noter que dans l'ensemble de la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, le rapport Q/Q_p ne dépend

que du taux de remplissage η . Les relations (3.81), (3.82) et (3.83) ont été traduites graphiquement sur la figure 3.9 sur laquelle a été également représentée la courbe de variation $\eta(Q/Q_p)$ pour le cas de la conduite circulaire.

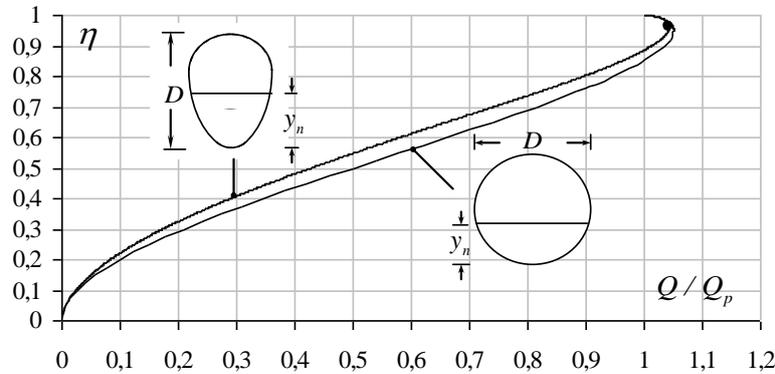


Figure 3.9 : Variation de $\eta(Q/Q_p)$ pour les cas des conduites de forme ovoïdale et circulaire à coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy constant.

La figure 3.9 montre clairement que :

- a)** le rapport Q/Q_p augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à un maximum, représenté par un symbole plein sur la figure. Ce maximum correspond à $Q_{\max.}/Q_p = 1,04225$ ou à $\eta = 0,962$. La capacité d'évacuation de la conduite correspond donc au débit maximal égal à environ 1,042 fois le débit de remplissage Q_p , lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est constant, soit :

$$Q_{\max.} = 1,04225 Q_p \quad (3.84)$$

Pour le cas de la conduite de forme circulaire, il a été démontré que $Q_{\max.}/Q_p = 1,05041386$, valeur légèrement supérieure à celle donnée par la relation (3.84).

- b)** pour la même valeur du rapport Q/Q_p , le taux de remplissage η de la conduite de forme ovoïdale est légèrement supérieur à celui de la conduite de forme circulaire.

Les relations (3.81), (3.82) et (3.83) sont implicites vis-à-vis du taux de remplissage η . Ces relations ont été soumises à une étude particulière et nos calculs ont montré que dans la large gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, ces relations pouvaient être remplacées par la relation unique

suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,788\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,535} \quad (3.85)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation (3.85) est inférieur à 0,38%, ce qui est largement acceptable pour les applications pratiques.

Les écarts relatifs $(\Delta\eta)/\eta$ en fonction de Q/Q_p ont été représentés graphiquement sur la figure 3.10 et concernent la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,049 \leq Q/Q_p \leq 0,895$.

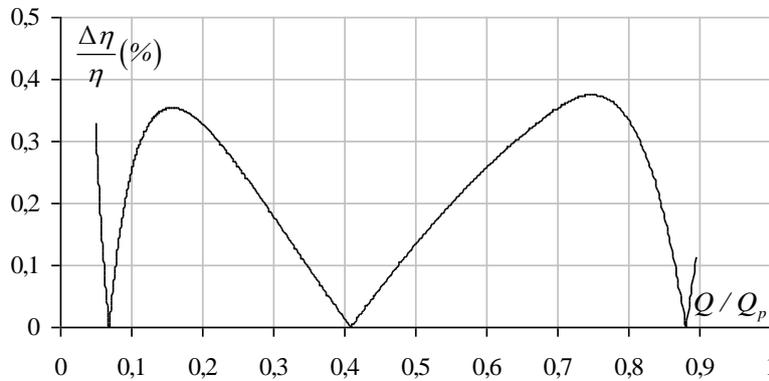


Figure 3.10 : Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (3.85) dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$.

III.5.1.9. Exemple d'application 3.5

Reprenons l'exemple d'application 3.4 et déterminons la profondeur normale y_n , en ayant recours à la relation (3.85). Les données sont alors les suivantes :

$$Q = 1,986 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 2,1 \cdot 10^{-3} ; D = 2 \text{ m} .$$

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.63), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2^5 \times 2,1 \cdot 10^{-3}}} = 0,09576452$$

ii. Sachant que $Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante}$ (Relation 3.69), le rapport Q/Q_p est alors :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,09576452 / 0,22432005 = 0,4269102$$

iii. Par suite, le taux de remplissage η est, en vertu de la relation approchée (3.85) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,788 (Q/Q_p)^{0,535} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,788 \times 0,4269102^{0,535} \right] = 0,49972874 \cong 0,5$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de η calculée au cours de l'exemple d'application 3.4.

iv. La profondeur normale y_n recherchée est alors : $y_n = D\eta = 2 \times 0,5 = 1m$

III.5.1.10. Relation $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour $C = \text{constante}$

Le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max.})$ est déterminé par les relations (3.64), (3.66) et (3.68) après avoir noté que :

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = \frac{Q^*}{Q_{\max.}^*} \quad (3.86)$$

Nous avons montré, dans l'un des paragraphes précédents, que la conductivité relative maximale $Q_{\max.}^*$ est une constante lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy demeure invariable. Nous avons établi que $Q_{\max.}^* \cong 0,233792$ et s'obtient pour le taux de remplissage $\eta = 0,962$. En tenant compte des relations (3.64), (3.66), (3.68) et (3.86), nous pouvons alors écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 0,0343 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.87)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 4,277 \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (3.88)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 4,277 \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (3.89)$$

Nous pouvons donc observer que le rapport $Q / Q_{\max.}$ ne dépend que du taux de remplissage η , dans tout l'intervalle $0 \leq \eta \leq 1$.

Les relations (3.87), (3.88) et (3.89) ont été représentées graphiquement sur la figure 3.11. La courbe $\eta(Q / Q_{\max.})$ obtenue montre que lorsque le taux de remplissage η augmente, le rapport $Q / Q_{\max.}$ augmente jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum pour atteindre la valeur $Q / Q_{\max.} \cong 0,9595$ pour $\eta = 1$. Ce résultat peut être obtenu en insérant la valeur $\eta = 1$ dans la relation (3.89).

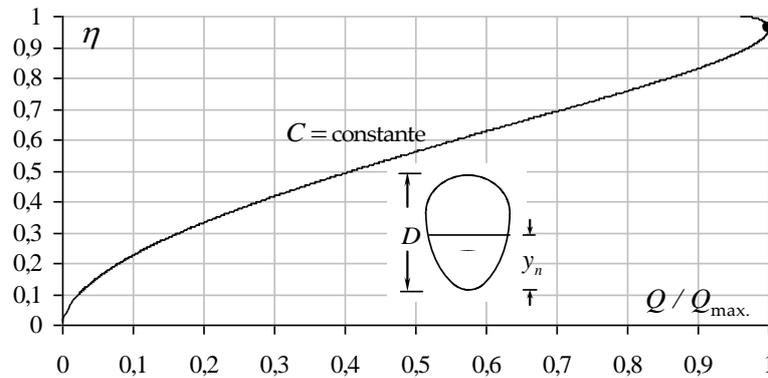


Figure 3.11 : Variation de $\eta(Q / Q_{\max.})$ pour $C = \text{constante}$, selon les relations (3.87), (3.88) et (3.89). (•) : $Q / Q_{\max.} = 1$ correspondant à $\eta = 0,962$.

Dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,047 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,858$, nos calculs ont montré que $\eta(Q / Q_{\max.})$ pouvait s'exprimer par la relation unique suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} \eta\right) = 0,805 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,535} \quad (3.90)$$

L'erreur relative occasionnée par la relation (3.90) est inférieure à 0,44% dans la gamme ci-dessus indiquée du taux de remplissage η , comme le montre clairement la figure 3.12.

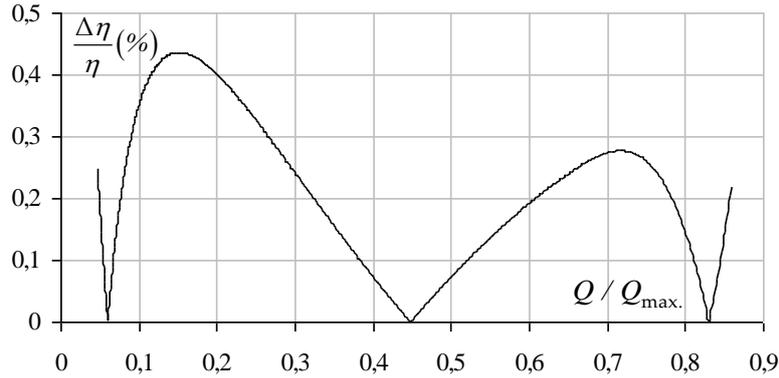


Figure 3.12 : Ecarts relatifs en % occasionnés par la relation approchée (3.90) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$.

III.5.1.11. Exemple d'application 3.6

Pour les données de l'exemple d'application 3.5, déterminer la profondeur normale de l'écoulement en ayant recours à la relation (3.90). Les données du problème sont :

$$Q = 1,986 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 2,1 \cdot 10^{-3} ; D = 2 \text{ m}.$$

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.63), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2^5 \times 2,1 \cdot 10^{-3}}} = 0,09576452 < Q_{\max}^* = 0,233792$$

ii. Sachant que $Q_{\max}^* \cong 0,233792$, le rapport Q^* / Q_{\max}^* est alors selon la relation (3.86) :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = 0,09576452 / 0,233792 = 0,40961417$$

iii. Par suite, le taux de remplissage η est, en vertu de la relation approchée (3.90) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,805 (Q / Q_{\max})^{0,535} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,805 \times 0,40961417^{0,535} \right] = 0,4993 \cong 0,5$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de η calculée au cours de l'exemple d'application 3.5.

iv. La profondeur normale y_n recherchée est alors :

$$y_n = D \eta = 2 \times 0,5 = 1 \text{ m}$$

III.5.2. Formule de *Manning-Strickler*

III.5.2.1. Conductivité relative

Selon *Manning-Strickler*, le débit volume Q s'exprime par la relation :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (3.91)$$

Pour la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, l'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h ont déjà été exprimés au cours du paragraphe consacré aux caractéristiques de l'écoulement. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , ce sont les relations (3.7), (3.28) et (3.56) qui gouvernent l'aire de la section mouillée A , tandis que les relations (3.8), (3.29) et (3.59) expriment le rayon hydraulique R_h . Nous pouvons alors écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$Q = \frac{0,0053}{n} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} D^{8/3} \sqrt{i} \quad (3.92)$$

Rappelons que les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ sont données par les relations (3.3) et (3.6) respectivement.

Introduisons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} \quad (3.93)$$

La relation (3.92) peut alors s'écrire en termes adimensionnels :

$$Q^* = 0,0053 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (3.94)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} \quad (3.95)$$

Où $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont donnés par les relations (3.15) et (3.27) respectivement. En tenant compte de la relation (3.93), la relation (3.95) s'écrit en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (3.96)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} \quad (3.97)$$

Dans la relation (3.97), les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. La relation (3.97) s'écrit en termes adimensionnels, compte tenu de la relation (3.93) :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (3.98)$$

III.5.2.2. Variation de la conductivité relative

Au regard des relations (3.94), (3.96) et (3.98), il apparaît clairement que la conductivité relative Q^* ne dépend que du taux de remplissage η de la conduite. Ces relations ont été représentées graphiquement sur la figure 3.13 et la courbe obtenue de la conductivité relative Q^* a été comparée à celle de la conduite circulaire, à titre indicatif.

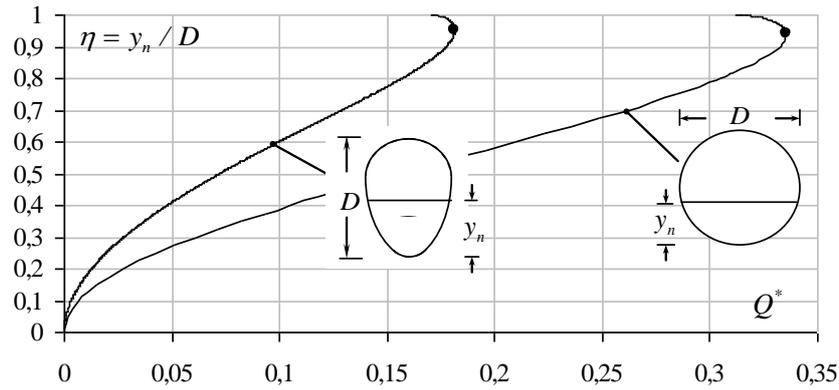


Figure 3.13 : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η selon la formule de *Manning-Strickler*, pour le cas des conduites de formes ovoïdale et circulaire. (●) Maximum de la conductivité relative : $Q_{\max}^* \cong 0,181324$; $\eta = 0,953$ pour la conduite de forme ovoïdale.

La figure 3.13 montre que la conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum. Pour la conduite de forme ovoïdale étudiée, la conductivité relative atteint son maximum $Q_{\max}^* \cong 0,181324$ pour le taux de remplissage $\eta = 0,953$, tandis que pour la conduite de forme circulaire les calculs ont montré que le maximum de la conductivité relative est $Q_{\max}^* \cong 0,3353$, obtenu pour le taux de remplissage $\eta = 0,94$.

Pour la même valeur de la conductivité relative Q^* , la figure 3.13 montre que le taux de remplissage η de la conduite de forme ovoïdale est supérieur à celui de la conduite de forme circulaire. Il faut noter aussi que la gamme de conductivité relative Q^* de la conduite circulaire est plus étendue que celle de la conduite de forme ovoïdale. Les calculs ont montré que dans toute la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, la conductivité relative de la conduite de forme circulaire varie dans l'intervalle $[0; 0,31168]$, tandis que pour la conduite de forme ovoïdale, la conductivité relative varie dans l'intervalle $[0; 0,17054]$. Les calculs ont également montré que pour :

- $\eta \leq 1/15$
 $0 \leq Q^* \leq 0,0014581$
- $1/15 \leq \eta \leq 2/3$
 $0,0014581 \leq Q^* \leq 0,118859$

- $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$0,118859 \leq Q^* \leq 0,17054$$

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale, le taux de remplissage η , correspondant à Q_{\max}^* , appartient à l'intervalle $2/3 \leq \eta \leq 1$. La valeur maximale Q_{\max}^* est donc donnée par la relation (3.98), après avoir calculé les valeurs des fonctions $\tau(\eta = 0,953)$ et $\lambda(\eta = 0,953)$.

III.5.2.3. Relation approchée $\eta(Q^*)$

Il est bien évident, au regard des relations (3.96), (3.97) et (3.98), que le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis de la conductivité relative Q^* .

Pour évaluer le taux de remplissage η à partir de la valeur connue de la conductivité relative Q^* , nos calculs ont montré que dans la large gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$, la relation approchée suivante peut être utilisée avec une erreur relative maximale inférieure à 0,44% seulement :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,882 Q^{*0,503} \quad (3.99)$$

Les écarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (3.99) sont représentés graphiquement sur la figure 3.14.

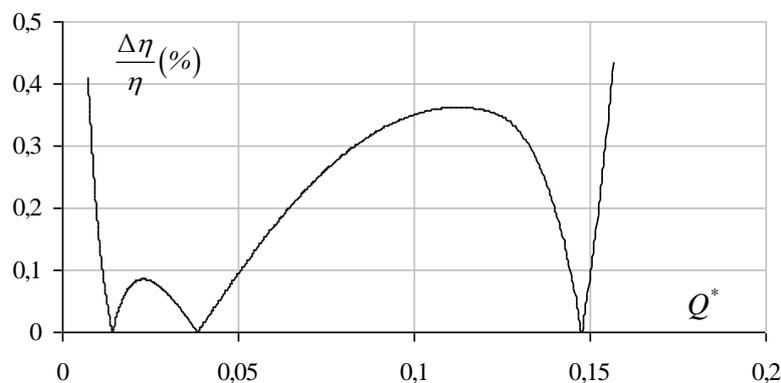


Figure 3.14 : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (3.99) sur le calcul du taux de remplissage de la conduite de forme ovoïdale dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$.

III.5.2.4. Exemple d'application 3.7

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite ovoïdale de diamètre $D = 2m$, écoulant un débit volume $Q = 1,2m^3/s$ sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est $n = 0,0148m^{-1/3}s$.

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,0148 \times 1,2}{2^{8/3} \times \sqrt{5.10^{-4}}} = 0,12508675$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient bien à l'intervalle $[0;0,17054]$. Elle appartient même à l'intervalle $[0,007175;0,156630]$, ce qui permet d'utiliser la relation approchée (3.99).

ii. Ainsi, le taux de remplissage η de la conduite est, en vertu de la relation approchée (3.99) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,882 Q^{*0,503} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,882 \times 0,12508675^{0,503} \right) = 0,69021443 \cong 0,69$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,69 = 1,38m$$

iv. Vérifions nos calculs, en déterminant la valeur du débit volume Q pour le taux de remplissage η ainsi calculé. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (3.97), puisque $2/3 \leq \eta \leq 1$. Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, soit :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1} (3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1} (3 \times 0,69021443 - 2) = 1,6432354$$

$$\begin{aligned}\lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,69021443 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,69021443) \times (0,69021443 - 1/3)} \\ &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69021443 - 2) = 0,35161142\end{aligned}$$

Ainsi, selon la relation (3.97), le débit volume Q serait égal à :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,0148} \times \frac{0,35161142^{5/3}}{1,6432354^{2/3}} \times 2^{8/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}} = 1,20672515 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'écart relatif entre le débit volume donné à l'énoncé et celui que nous venons de calculer est inférieur à 0,56% seulement. La valeur calculée du taux de remplissage η par la relation approchée (3.99) est donc acceptable.

III.5.2.5. Exemple d'application 3.8

Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite ovoïdale de diamètre $D = 2 \text{ m}$, écoulant un débit volume $Q = 0,96 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous une pente longitudinale $i = 4 \cdot 10^{-4}$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de *Manning* est $n = 0,015 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$.

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,015 \times 0,96}{2^{8/3} \times \sqrt{4 \cdot 10^{-4}}} = 0,11339289$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient bien à l'intervalle $[0; 0,17054]$. Elle appartient même à l'intervalle $[0,007175; 0,156630]$, ce qui permet d'utiliser la relation approchée (3.99).

ii. Ainsi, le taux de remplissage η de la conduite est, en vertu de la relation approchée (3.99) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,882 Q^{*0,503} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,882 \times 0,11339289^{0,503} \right) = 0,65036425 \cong 0,65$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,65 = 1,3m$$

iv. Vérifions nos calculs, en déterminant la valeur du débit volume Q pour le taux de remplissage η ainsi calculé. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (3.95), puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$. Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement, soit :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,65036425 \right) = 1,56349435$$

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,65036425 \right) - \left(\frac{2}{3} - 0,65036425 \right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,65036425 \right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,65036425 = 0,32505915 \end{aligned}$$

Ainsi, selon la relation (3.95), le débit volume Q serait égal à :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,015} \times \frac{0,32505915^{5/3}}{1,56349435^{2/3}} \times 2^{8/3} \times \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} = 0,96581029 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif entre le débit volume donné à l'énoncé et celui que nous venons de calculer est de 0,6% seulement. La valeur calculée du taux de remplissage η par la relation approchée (3.99) est donc acceptable.

III.5.2.6. Exemple d'application 3.9

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite ovoïdale de diamètre $D = 3m$, écoulant un débit volume $Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous une pente

longitudinale $i = 3,5 \cdot 10^{-4}$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de *Manning* est $n = 0,012 m^{-1/3} s$.

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,14287621$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient bien à l'intervalle $[0; 0,17054]$. Elle appartient même à l'intervalle $[0,007175; 0,156630]$, ce qui permet d'utiliser la relation approchée (3.99).

ii. Ainsi, le taux de remplissage η de la conduite est, en vertu de la relation approchée (3.99) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,882 Q^{*0,503} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left(1,882 \times 0,14287621^{0,503} \right) = 0,75017476 \cong 0,75$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 3 \times 0,75 = 2,25 m$$

iv. Vérifions nos calculs, en déterminant la valeur du débit volume Q pour le taux de remplissage η ainsi calculé. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (3.97), puisque $2/3 \leq \eta \leq 1$. Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, soit :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1} (3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1} (3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$$

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1} (3\eta - 2)$$

$$= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1} (3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$$

Ainsi, selon la relation (3.97), le débit volume Q serait égal à :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,012} \times \frac{0,39089728^{5/3}}{1,76455412^{2/3}} \times 3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}} = 4,1769301 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'écart relatif entre le débit volume donné à l'énoncé et celui que nous venons de calculer est inférieur à 0,17% seulement. La valeur calculée du taux de remplissage η par la relation approchée (3.99) est donc acceptable.

III.5.2.7. Conductivité relative rapportée à la profondeur normale

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale peut être définie par la relation :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} \quad (3.100)$$

Compte tenu de la relation (3.93), nous pouvons alors écrire que :

$$Q_y^* = \frac{Q^*}{\eta^{8/3}} \quad (3.101)$$

La conductivité relative Q^* s'exprime par les relations (3.94), (3.96) ou (3.98), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ainsi, pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$Q_y^* = \frac{0,0053 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3}} \quad (3.102)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3} [\varrho(\eta)]^{2/3}} \quad (3.103)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$Q_y^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3} [\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (3.104)$$

Ainsi, dans toute la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, la conductivité relative Q_y^* ne dépend que du taux de remplissage η . Les relations (3.102), (3.103) et (3.104) ont été représentées graphiquement sur la figure 3.15. La courbe obtenue a été comparée, à titre indicatif, à celle de l'écoulement dans la conduite circulaire.

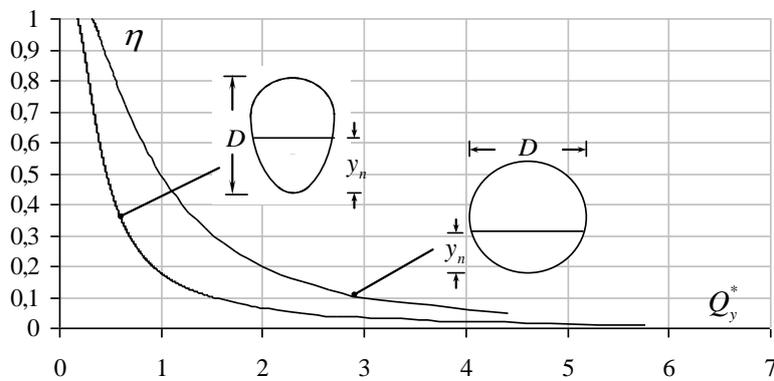


Figure 3.15 : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ de l'écoulement dans les conduites de formes ovoïdale et circulaire.

Le caractère implicite du taux de remplissage η , vis-à-vis de la conductivité relative Q_y^* , est évident au regard de la forme des relations (3.102), (3.103) et (3.104). L'étude de ces relations a montré que le taux de remplissage η peut s'exprimer de manière explicite en fonction de Q_y^* par des relations approchées, selon la gamme de valeurs de η . C'est ainsi que pour :

a) $\eta \leq 0,11$, correspondant à $Q_y^* \geq 1,413$:

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{0,486(1 + 0,468Q_y^{*2})} - 0,352Q_y^*}{1 + 0,213Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (3.105)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.105) reste inférieur à 0,3% seulement.

b) $0,11 \leq \eta \leq 0,58$, correspondant à $0,401 \leq Q_y^* \leq 1,413$:

$$[\sinh(1,4\eta)]^{-1} = 3,974 Q_y^{*1,407} \quad (3.106)$$

L'application de la relation approchée (3.106) entraîne un écart relatif maximal de l'ordre de 0,6%.

c) $0,58 \leq \eta \leq 0,999$, correspondant à $0,173 \leq Q_y^* \leq 0,4$:

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{0,825(1+17,5Q_y^{*2})} + 1,717Q_y^*}{1+13,92Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (3.107)$$

L'écart relatif maximal occasionné par l'application de la relation approchée (3.107) est inférieur à 0,32% seulement, comme l'indique la figure 3.16.

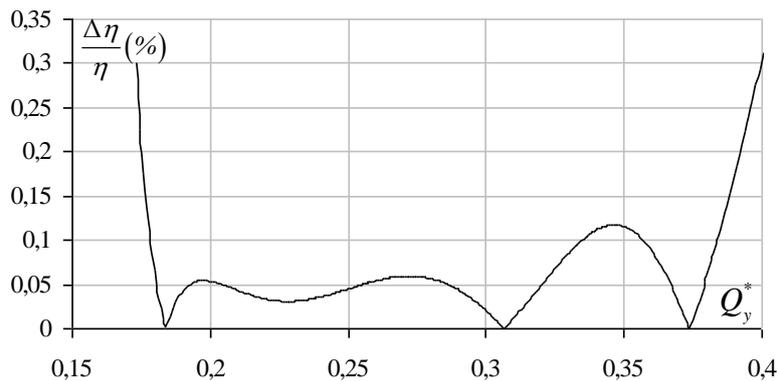


Figure 3.16 : Ecarts relatifs en (%) occasionnées par la relation approchée (3.107).

Les relations approchées (3.105), (3.106) et (3.107) sont intéressantes dans la mesure où elles permettent de déterminer de manière explicite le taux de remplissage η de la conduite de forme ovoïdale étudiée, et par conséquent le diamètre D de la conduite, à partir des valeurs imposées du débit volume Q , de la pente longitudinale i , de la profondeur normale y_n et du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning. Les exemples suivants indiquent les étapes à suivre pour la détermination du diamètre D de la conduite, en ayant recours aux relations approchées (3.105), (3.106) et (3.107).

III.5.2.8. Exemple d'application 3.10

Reprenons les données de l'exemple d'application 3.9 et déterminons le diamètre D de la conduite. Les données sont alors :

$$Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3,5 \cdot 10^{-4} ; y_n = 2,25 \text{ m} ; n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q_y^* , rapportée à la profondeur normale y_n , par application de la relation (3.100), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{2,25^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,3077017$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient à l'intervalle $[0,173; 0,4]$, ce qui permet de conclure que le taux de remplissage η est tel que $0,58 \leq \eta \leq 1$. Il est donc régi par la relation approchée (3.107), soit :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{0,825(1+17,5Q_y^{*2})} + 1,717Q_y^*}{1+13,92Q_y^{*2}} \right]^2 = \left[\frac{\sqrt{0,825 \times (1+17,5 \times 0,3077017^2)} + 1,717 \times 0,3077017}{1+13,92 \times 0,3077017^2} \right]^2$$

$$= 0,75107839$$

ii. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / \eta = 2,25 / 0,75107839 = 2,99569265 \text{ m} \cong 3 \text{ m}$$

L'écart relatif entre la valeur du diamètre ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application 3.9 n'est que de 0,14% seulement.

III.5.2.9. Exemple d'application 3.11

Déterminer le diamètre D de la conduite de forme ovoidale, représentée par la figure 3.1, pour les données suivantes :

$$Q = 2,656 m^3 / s ; i = 5.10^{-4} ; y_n = 1,8 m ; n = 0,018 m^{-1/3} s .$$

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q_y^* , rapportée à la profondeur normale y_n , par application de la relation (3.100), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,018 \times 2,656}{1,8^{8/3} \times \sqrt{5.10^{-4}}} = 0,4459528$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient à l'intervalle $[0,401;1,413]$, ce qui permet de conclure que le taux de remplissage η est tel que $0,11 \leq \eta \leq 0,58$. Il est donc régi par la relation approchée (3.106), soit :

$$\eta = \frac{1}{1,4} \operatorname{asinh} \left[3,974 Q_y^{*1,407} \right]^{-1} = \frac{1}{1,4} \times \operatorname{asinh} \left(3,974 \times 0,4459528^{1,407} \right)^{-1} = 0,51428062$$

ii. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / \eta = 1,8 / 0,51428062 = 3,5 m$$

iii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le taux de remplissage ainsi calculé, la conductivité relative Q_y^* en ayant recours à la relation (3.103), puis comparons-la à celle obtenue à l'étape i. Pour cela, évaluons d'abord les fonctions $\mathcal{G}(\eta)$ et $\zeta(\eta)$. Celles-ci sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement, soit :

$$\bullet \quad \mathcal{G}(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,51428062 \right) = 1,29013648$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,51428062\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,51428062\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,51428062\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,51428062 = 0,23551897$$

Ainsi, selon la relation (3.103), la conductivité relative Q_y^* est :

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3} [\vartheta(\eta)]^{2/3}} = \frac{0,23551897^{5/3}}{0,51428062^{8/3} \times 1,29013648^{2/3}} = 0,44642888$$

Nous pouvons alors observer que l'écart relatif entre la conductivité relative Q_y^* que nous venons de calculer et celle déterminée à l'étape (i) est inférieur à 0,11% seulement. Ce résultat permet de conclure que la valeur du taux de remplissage η , évaluée par la relation approchée (3.106), est acceptable.

III.5.2.10. Courbe de remplissage de la conduite pour $n = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite est donnée par la variation du taux de remplissage η en fonction du rapport Q/Q_p , où Q_p est le débit volume à l'état plein, correspondant à $\eta = 1$. Pour une conduite donnée et pour un coefficient de résistance à l'écoulement n constant, indépendant de la variation du taux de remplissage η , la relation (3.80) demeure en vigueur.

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale, représentée par la figure 3.1, la conductivité relative Q_p^* est régie par la relation (3.98) pour $\eta = 1$. Pour cette valeur du taux de remplissage, les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$, exprimées par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta = 1) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 2,64329817 \cong 2,6433$
- $\lambda(\eta = 1) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (1 - 2/3) \times \sqrt{(1-1) \times (1-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 0,5104589$

Ainsi, selon la relation (3.98), la conductivité relative à l'état plein est :

$$Q_p^* = \frac{[\lambda(\eta=1)]^{5/3}}{[\tau(\eta=1)]^{2/3}} = \frac{0,5104589^{5/3}}{2,64329817^{2/3}} = 0,170544295$$

Ainsi, compte tenu des relations (3.80), (3.94), (3.96) et (3.98), nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_p} = 0,031077 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (3.108)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{Q}{Q_p} = 5,86368 \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (3.109)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_p} = 5,86368 \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (3.110)$$

Nous pouvons ainsi constater, au regard des relations (3.108), (3.109) et (3.110), que le rapport Q/Q_p est exclusivement dépendant du taux de remplissage η .

Les relations (3.108), (3.109) et (3.110) ont été représentées graphiquement sur la figure 3.17 et la courbe obtenue a été comparée, à titre indicatif, à celle de la conduite de forme circulaire. La courbe de variation $\eta(Q/Q_p)$, notamment celle de la conduite de forme ovoïdale considérée, montre que le rapport Q/Q_p augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint un maximum. Au-delà de ce maximum, le rapport Q/Q_p diminue en dépit de l'accroissement du taux de remplissage η , jusqu'à la valeur $Q/Q_p = 1$ correspondant à $\eta = 1$, ou à l'état plein de la conduite. La valeur maximale de Q/Q_p correspond à un taux de remplissage $\eta = 0,953$. Cette valeur du taux de remplissage appartient à gamme $2/3 \leq \eta \leq 1$ et la valeur maximale de Q/Q_p peut donc être évaluée en vertu de la relation (3.110).

Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$, exprimées par les relations (3.47) et (3.55) respectivement,

prennent les valeurs :

- $\tau(\eta = 0,953) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,953 - 2) = 2,28497611$

- $\lambda(\eta = 0,953) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$

$$= 0,5104589 + (0,953 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,953) \times (0,953 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,953 - 2) = 0,49960378$$

Ainsi, selon la relation (3.110), la valeur maximale de Q/Q_p , correspondant également à

$Q_{\max.}/Q_p$, est :

$$\frac{Q_{\max.}}{Q_p} = 5,86368 \frac{[\lambda(\eta = 0,953)]^{5/3}}{[\tau(\eta = 0,953)]^{2/3}} = 5,86368 \times \frac{0,49960378^{5/3}}{2,28497611^{2/3}} = 1,0632$$

ou bien :

$$Q_{\max.} = 1,0632 Q_p \tag{3.111}$$

La capacité d'évacuation de la conduite de forme ovoïdale considérée correspond donc au débit maximal égal à 1,0632 fois le débit à l'état plein, à condition que le coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning demeure constant.

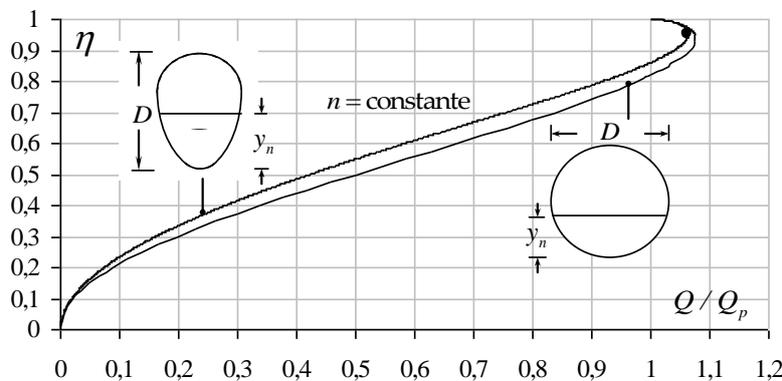


Figure 3.17 : Variation du rapport Q/Q_p pour les conduites de forme ovoïdale et circulaire en fonction du taux de remplissage η .

(●) Valeur maximale de Q/Q_p pour la conduite ovoïdale, correspondant à $\eta = 0,953$.

Au regard des relations (3.108), (3.109) et (3.110), il apparaît bien évident que le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis de Q/Q_p . Les calculs ont montré que dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,042 \leq Q/Q_p \leq 0,918$, les relations (3.108), (3.109) et (3.110) peuvent être remplacées par la relation unique suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,773\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,504} \quad (3.112)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.112) est inférieur à 0,5%. Les écarts relatifs issus de l'application de la relation (3.112), dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, sont représentés graphiquement sur la figure 3.18.

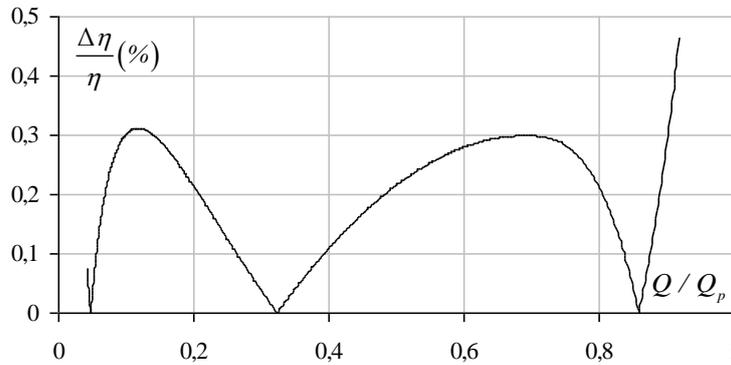


Figure 3.18 : Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (3.112) dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,042 \leq Q/Q_p \leq 0,918$.

III.5.2.11. Exemple d'application 3.12

Reprenons l'exemple d'application 3.9 et déterminons la profondeur normale y_n en ayant recours à la relation approchée (3.112). Les données du problème sont alors :

$$Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s} ; D = 3 \text{ m} ; i = 3,5 \cdot 10^{-4} ; n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}.$$

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,14287621$$

ii. Compte tenu du fait que $Q_p^* = 0,170544295$ et que $Q / Q_p = Q^* / Q_p^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,14287621}{0,170544295} = 0,83776599 < \frac{Q_{\max.}}{Q_p} = 1,0632$$

iii. Le rapport Q / Q_p ainsi calculé appartient à la gamme $0,042 \leq Q / Q_p \leq 0,918$. De ce fait, le taux de remplissage η de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (3.112), soit :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,773 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,504} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,773 \times 0,83776599^{0,504} \right] = 0,74988643 \cong 0,75$$

iv. La profondeur normale y_n recherchée est par suite :

$$y_n = D\eta = 3 \times 0,75 = 2,25 \text{ m}$$

Il s'agit bien de la valeur de la profondeur normale y_n calculée à l'étape (iii) de l'exemple d'application 3.9.

III.5.2.12. Relation $\eta(Q / Q_{\max.})$ pour $n = \text{constante}$

Nous avons montré, au cours de l'étude de la variation de la conductivité relative Q^* , que lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning* demeure constant, la valeur maximale de Q^* est $Q_{\max.}^* \cong 0,181324$ et s'obtient pour le taux de remplissage $\eta = 0,953$. D'autre part, il est bien évident que nous pouvons montrer que la relation (3.86) reste en vigueur lorsque le coefficient n est une constante. Ainsi, compte tenu des relations (3.86), (3.94), (3.96) et (3.98), nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 0,02923 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (3.113)$$

Rappelons que les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ sont données par les relations (3.3) et (3.6) respectivement.

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 5,515 \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (3.114)$$

où $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont donnés par les relations (3.15) et (3.27) respectivement.

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 5,515 \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (3.115)$$

Dans la relation (3.115), les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Nous pouvons alors constater, au regard des relations (3.113), (3.114) et (3.115), que le rapport $Q/Q_{\max.}$ est exclusivement dépendant du taux de remplissage η . Les relations (3.113), (3.114) et (3.115) sont graphiquement représentées sur la figure 3.19. La courbe obtenue a été comparée, à titre indicatif, à celle de la conduite de forme circulaire.

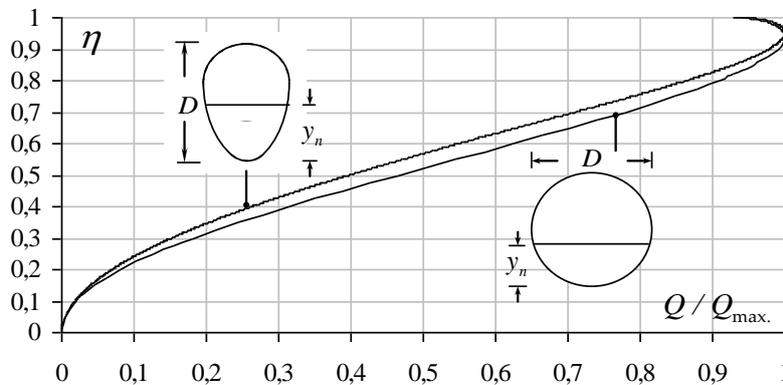


Figure 3.19 : Variation de $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire ($n = \text{constante}$).

Il ressort de la figure 3.19 que $Q/Q_{\max.}$ augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η , jusqu'à la valeur $Q/Q_{\max.} = 1$ correspondant à $\eta = 0,953$. Dans un second temps, $Q/Q_{\max.}$ diminue en dépit de l'accroissement du taux de remplissage η dans l'intervalle $[0,953;1]$. La valeur de $Q/Q_{\max.}$ correspondant à $\eta = 1$ s'obtient par la relation (3.115), soit :

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)_{\eta=1} = 5,515 \frac{[\lambda(\eta=1)]^{5/3}}{[\tau(\eta=1)]^{2/3}} = 5,515 \times \frac{0,5104589^{5/3}}{2,64329817^{2/3}} \cong 0,94$$

Le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis du rapport $Q / Q_{\max.}$, comme le montre les relations (3.113), (3.114) et (3.115). Dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,0395 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,864$, nos calculs ont montré que les relations (3.113), (3.114) et (3.115) pouvaient être remplacées par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,504} \tag{3.116}$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.116) est inférieur à 0,42%, ce qui est largement admissible lors des applications pratiques. Les écarts relatifs, issus de l'application de la relation approchée (3.116), sont représentés graphiquement sur la figure 3.20.

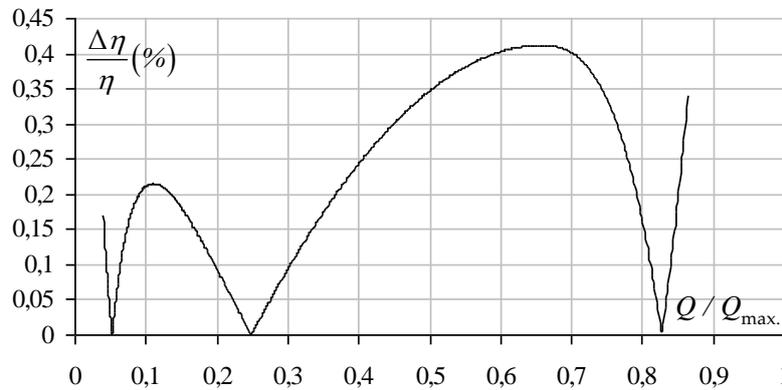


Figure 3.20 : Ecarts relatif (%) occasionnés par la relation approchée (3.116) dans la Gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,0395 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,864$.

III.5.2.13. Exemple d'application 3.13

Reprenons l'exemple d'application 3.12 et déterminons la profondeur normale y_n en ayant recours à la relation approchée (3.116). Les données du problème sont alors :

$$Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s} ; D = 3 \text{ m} ; i = 3,5 \cdot 10^{-4} ; n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}.$$

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (3.93), soit :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,14287621$$

ii. Compte tenu du fait que $Q_{\max}^* \cong 0,181324$ et que $Q / Q_{\max} = Q^* / Q_{\max}^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{0,14287621}{0,181324} \cong 0,788$$

iii. Le rapport Q / Q_{\max} ainsi calculé appartient à la gamme $0,0395 \leq Q / Q_{\max} \leq 0,864$. De ce fait, le taux de remplissage η de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (3.116), soit :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,504} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times 0,788^{0,504} \right] \cong 0,7508$$

iv. La profondeur normale y_n recherchée est par suite :

$$y_n = D\eta = 3 \times 0,7508 = 2,2524 \text{ m}$$

La profondeur normale y_n que nous venons de calculer correspond, avec un écart relatif inférieur à 0,11% seulement, à celle calculée à l'étape (iv) de l'exemple d'application 3.12.

III.6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE

Le coefficient de résistance à l'écoulement, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*, devrait en principe dépendre, parmi d'autres paramètres, du taux de remplissage η de la conduite. Lorsqu'il s'agit de déterminer le diamètre de la conduite, le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*, ou n de *Manning*, ne constitue pas une donnée du problème et les relations que nous avons considérées dans le paragraphe précédent ne peuvent plus être utilisées. Ces coefficients doivent donc être calculés par des relations différentes de celles que nous avons considérées jusqu'à présent. L'un des objectifs de cette partie de l'étude est de présenter ces relations, puis de les appliquer à quelques exemples pratiques.

III.6.1. Coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*

III.6.1.1. Relation générale et variation du coefficient de résistance C de *Chézy*

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* par une relation de validité générale, il est utile d'avoir recours à la formule du débit volume d'*Achour* et *Bedjaoui* (2006), soit :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (3.117)$$

Dans cette relation, ε désigne la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et R est un nombre de *Reynolds* défini par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (3.118)$$

où ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, l'aire de la section mouillée A figurant dans la relation (3.117) s'exprime par les relations (3.7), (3.28), et (3.56) selon la gamme du taux de remplissage η . Quant au rayon hydraulique R_h figurant dans la relation (3.118), il s'exprime par les relations (3.8), (3.29) et (3.59). Il n'existe de nos jours aucune relation générale susceptible d'évaluer à elle seule l'aire de la section mouillée A ou le

rayon hydraulique R_h .

Pour une conduite de forme ovoïdale à l'état plein, correspondant au taux de remplissage $\eta = 1$, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ est régi par la relation (3.59), où l'indice « p » désigne l'état plein. Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ figurant dans cette relation sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, et l'on peut aisément montrer que $\tau(\eta = 1) \cong 2,6433$ et $\lambda(\eta = 1) \cong 0,51046$. Par suite, le rayon hydraulique $R_{h,p}$ à l'état plein est, en vertu de la relation (3.59) :

$$R_{h,p} \cong 0,193 D \quad (3.119)$$

Par suite, le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein de la conduite est, selon la relation (3.118) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (3.120)$$

En comparant les relations (3.61) et (3.117), nous pouvons déduire que le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (3.121)$$

La relation (3.121) peut aussi s'écrire, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (3.122)$$

Tenant compte des relations (3.8), (3.29) et (3.59), la relation (3.121) montre que le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative ε/D , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds* R , lui-même fonction de la pente longitudinale i , du diamètre D , de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle :

$$C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (3.123)$$

En ayant recours aux relations (3.8), (3.29) et (3.59), nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

- La relation (3.118) mène à :

$$R = 1,0886 [\varphi(\eta)]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (3.124)$$

ou bien :

$$R = 0,28347 [\varphi(\eta)]^{3/2} R_p \quad (3.125)$$

- La relation (3.122) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.126)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

- La relation (3.118) mène à écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (3.127)$$

ou bien :

$$R = 11,783 \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (3.128)$$

- La relation (3.122) permet d'écrire que :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.129)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

- La relation (3.118) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (3.130)$$

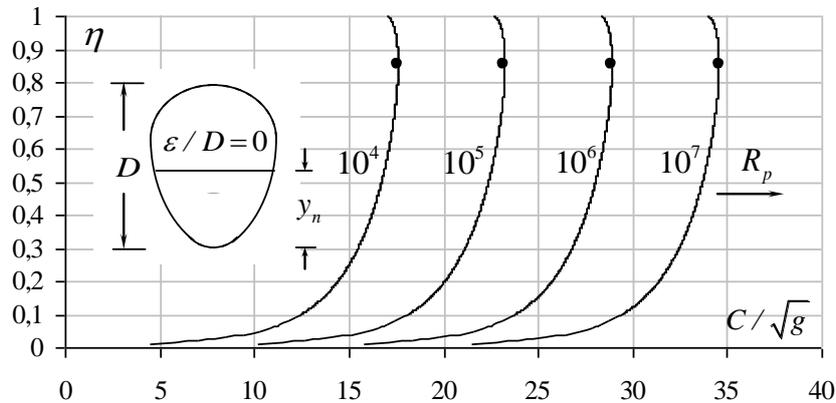
ou bien :

$$R = 11,783 \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (3.131)$$

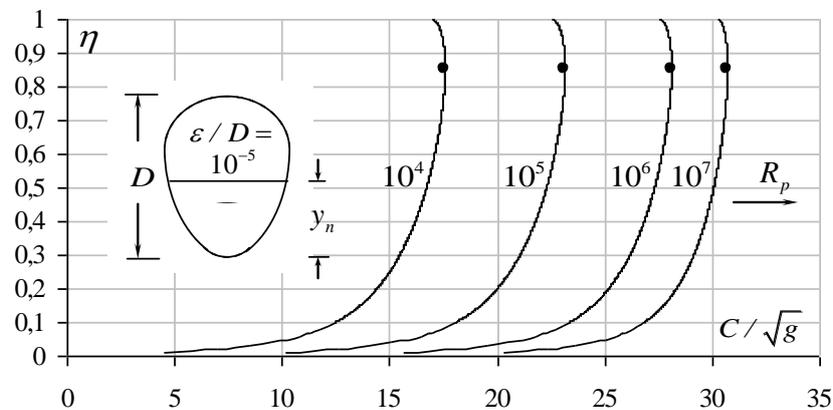
- La relation (3.122) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8 \left[\lambda(\eta) / \tau(\eta) \right]} + \frac{0,852}{R_p \left[\lambda(\eta) / \tau(\eta) \right]^{3/2}} \right) \quad (3.132)$$

Les relations (3.126), (3.129) et (3.132) traduisent ainsi la relation fonctionnelle (3.123), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ces relations ont été graphiquement représentées sur la figure 3.21 (a à e).



a)



b)

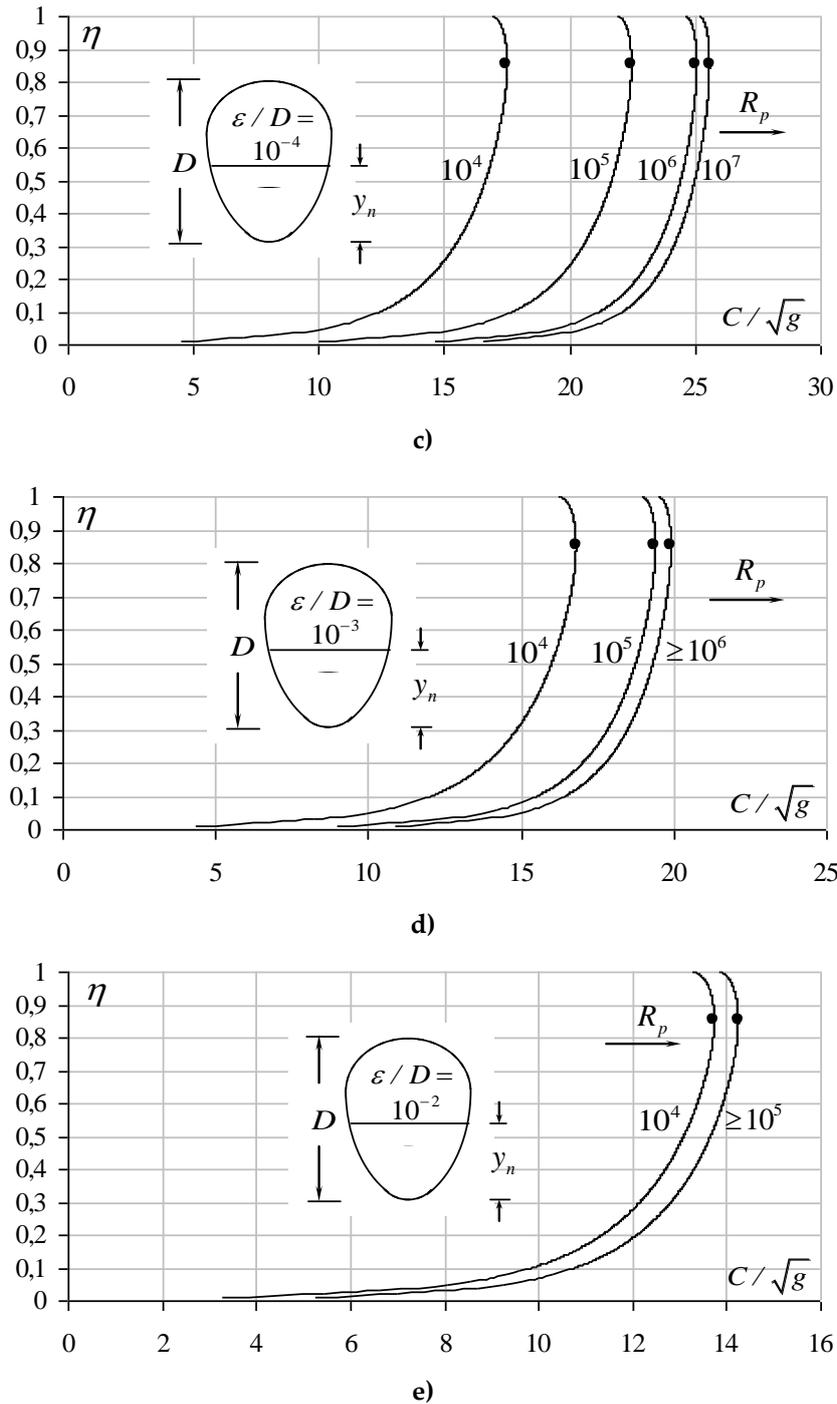


Figure 3.21 : Variation du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy en fonction du taux de remplissage $\eta = y_n / D$, selon les relations (3.126), (3.129) et (3.132).

(●) Valeurs maximales $C_{\max.} / \sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,8544$.

Il ressort de la figure 3.21 (a à e) que, pour la même valeur du nombre de Reynolds R_p à l'état plein et quelle que soit la rugosité relative ε/D , C/\sqrt{g} augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η . Notons que cette augmentation est très rapide dans la gamme

approximative $0 \leq \eta \leq 0,2$, alors qu'elle est plus lente au-delà de $\eta = 0,2$. Pour toutes les rugosités relatives considérées, les courbes de la figure 3.21 (a à e) montrent que C / \sqrt{g} atteint un maximum et les calculs ont montré que le taux de remplissage correspondant à $C_{\max.} / \sqrt{g}$ est $\eta = 0,85438$. Cette valeur de η appartient à l'intervalle $2/3 \leq \eta \leq 1$ et, de ce fait, $C_{\max.} / \sqrt{g}$ est régi par la relation (3.132). Nous pouvons donc énoncer que la valeur maximale $C_{\max.}$ du coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy s'obtient à la profondeur $y = 0,85438D$, alors que les calculs ont montré que, pour la conduite de forme circulaire, $C_{\max.}$ s'obtient à la profondeur $y = 0,815D$.

La figure 3.21 (a à e) montre enfin que les courbes de variation de C / \sqrt{g} se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε / D . Nous pouvons constater sur la figure 3.21e, correspondant à la plus forte rugosité relative considérée, que les courbes de variation de C / \sqrt{g} sont extrêmement proches les unes des autres et se confondent au-delà du nombre de Reynolds $R_p = 10^5$. Ceci correspond au régime turbulent rugueux pour lequel C / \sqrt{g} est indépendant du nombre de Reynolds R_p et donc de la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement $C_{\max.}$ de Chézy, introduisons la valeur $\eta = 0,85438$ dans la relation (3.132). Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont régies par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Pour $\eta = 0,85438$, elles prennent les valeurs suivantes :

- $\tau(\eta = 0,85438) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2) = 1,99488775$
- $\lambda(\eta = 0,85438) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,85438 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,85438) \times (0,85438 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2)$
 $= 0,45409685$

Ainsi, selon la relation (3.132), le coefficient de résistance à l'écoulement maximal $C_{\max.}$ de Chézy est :

$$C_{\max.} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[0,45409685 / 1,99488775]} + \frac{0,852}{R_p [0,45409685 / 1,99488775]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_{\max.} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (3.133)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* R_p , figurant dans la relation (3.133), est donné par la relation (3.120). La relation (3.133) permet donc d'évaluer la valeur maximale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, à partir des valeurs connues du diamètre D de la conduite, de la rugosité absolue ε , de la pente longitudinale i et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Pour l'état plein de la conduite, correspondant à $\eta = 1$, la relation (3.132) permet d'exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de *Chézy*. Pour $\eta = 1$, les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ prennent respectivement les valeurs suivantes :

- $\tau(\eta = 1) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 2,64329817$
- $\lambda(\eta = 1) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (1 - 2/3) \times \sqrt{(1-1) \times (1-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 0,5104589$

Ainsi, selon la relation (3.132), le coefficient de résistance à l'écoulement C_p de *Chézy* à l'état plein est donné par la relation :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[0,5104589 / 2,64329817]} + \frac{0,852}{R_p [0,5104589 / 2,64329817]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{2,858} + \frac{10,04}{R_p}\right) \quad (3.134)$$

Le nombre de *Reynolds* R_p , figurant dans la relation (3.134), est donné par la relation (3.120).

La relation (3.134) permet donc l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement C_p de *Chézy* à l'état plein, à partir des valeurs connues du diamètre D de la conduite, de la rugosité absolue ε , de la pente longitudinale i et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

III.6.1.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* par la MMR

Lorsque le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée du problème, les relations (3.126), (3.129) et (3.132) ne peuvent être utilisées pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Les paramètres connus du problème sont le débit volume Q , le taux de remplissage η de la conduite, la pente longitudinale i , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Pour ces seuls paramètres, la MMR (*Achour, 2007*) permet la détermination du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*.

Selon la MMR, l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de frottement $\bar{f} = 1/16$, ce qui se traduit par un coefficient de résistance de *Chézy* :

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (3.135)$$

En outre, le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre \bar{D} , écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, sous une pente longitudinale \bar{i} . Pour déterminer le coefficient de résistance C de *Chézy*, caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée, admettons les conditions suivantes :

i. $\bar{D} \neq D$

ii. $\bar{Q} = Q$

iii. $\bar{i} = i$

iv. $\bar{\eta} = \eta$

v. $\bar{\nu} = \nu$

Selon la relation (3.63) et tenant compte des conditions (ii) et (iii), la conductivité relative \bar{Q}^* du modèle rugueux de référence serait telle que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 \bar{D}^5 i}} \quad (3.136)$$

ou bien, en tenant compte de la relation (3.135) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (3.137)$$

La conductivité relative \bar{Q}^* est régie par les relations (3.64), (3.66) et (3.68) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Ainsi, pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\bar{Q}^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2}}{72\sqrt{3}} \quad (3.138)$$

Les relations (3.137) et (3.138) permettent de déduire que le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \frac{2,61165}{[\sigma(\eta)]^{0,4} [\varphi(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \quad (3.139)$$

Pour $\eta \leq 1/15$, le nombre de *Reynolds* \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (3.125), soit :

$$\bar{R} = 0,28347 [\varphi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p \quad (3.140)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (3.141)$$

Les relations (3.137) et (3.141) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (3.142)$$

Dans la gamme $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, le nombre de *Reynolds* \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (3.128), soit :

$$\bar{R} = 11,783 \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (3.143)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (3.144)$$

Nous pouvons déduire des relations (3.137) et (3.144) que :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (3.145)$$

Dans la gamme $2/3 \leq \eta \leq 1$, le nombre de *Reynolds* \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (3.131), soit :

$$\bar{R} = 11,783 \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (3.146)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres Q , η et i , le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence peut être explicitement évalué par l'une des relations (3.139), (3.142) ou (3.145). Ces paramètres permettent également d'évaluer le nombre de *Reynolds* \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, par application de l'une des relations (3.140), (3.143) et

(3.146). Dans ces relations, le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p à l'état plein s'exprime par une relation similaire à la relation (3.120), soit :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} \quad (3.147)$$

Selon la MMR, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* est défini par la relation :

$$C = \frac{\bar{C}}{\psi^{5/2}}$$

Soit, en tenant compte de la relation (3.135) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (3.148)$$

Dans la relation (3.148), ψ est un paramètre sans dimension tel que $0 \leq \psi \leq 1$ et il est défini par la relation :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{19 R_h} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.149)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , le rayon hydraulique \bar{R}_h , figurant dans la relation (3.149), est défini par des relations similaires aux relations (3.8), (3.29) et (3.59). De même que le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donné par l'une des relations (3.140), (3.143) et (3.146). Ainsi :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{12} \varphi(\eta) \quad (3.150)$$

La relation (3.149) s'écrit, en tenant compte des relations (3.140) et (3.150) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{1,583 \varphi(\eta)} + \frac{29,985}{[\varphi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.151)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.152)$$

Tenant compte des relations (3.29) et (3.143), la relation (3.151) s'écrit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.153)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (3.154)$$

La relation (3.149) devient alors, tenant compte des relations (3.146) et (3.154) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.155)$$

Pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, pour les valeurs connues des paramètres Q, η, ε, i et ν , les étapes suivantes sont recommandées :

- a) Connaissant la valeur du taux de remplissage η , l'une des relations (3.139), (3.142) ou (3.145) permet d'évaluer le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence.
- b) Les paramètres connus \bar{D}, i et ν sont introduits dans la relation (3.147) pour le calcul du nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein.
- c) Le coefficient ψ peut alors être évalué par l'une des relations (3.151), (3.153) ou (3.155).
- d) Enfin, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est déduit de la relation (3.148).

III.6.1.3. Exemple d'application 3.14

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume $Q = 1,087 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est considérée comme étant à l'état géométriquement lisse ($\varepsilon = 0$) et le taux de remplissage est $\eta = 0,6$.

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre D de la conduite.

Solution

i. Puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.142). Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement et prennent pour valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) = 1,46266832$
- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6 = 0,29158036$

Selon la relation (3.142), le diamètre \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q^2}{g i}\right)^{0,2} = \frac{1,46266832^{0,2}}{2,639 \times 0,29158036^{0,6}} \times \left(\frac{1,087}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}}\right)^{0,4} = 2,56506771 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 2,56506771^3}}{10^{-6}} = 1104838,96$$

Le facteur ψ est par suite, selon la relation (3.153) :

$$\begin{aligned}\psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,721}{[0,29158036 / 1,46266832]^{3/2} \times 1104838,96} \right) \right]^{-2/5} = 0,70165715\end{aligned}$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (3.148) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,70165715^{5/2}} = 85,9264968 m^{0,5} / s \cong 86 m^{0,5} / s$$

ii. La relation (3.65) permet de déduire que le diamètre D de la conduite est régi par la relation :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

soit :

$$D = \frac{1,46266832^{0,2}}{0,29158036^{0,6}} \times \left(\frac{1,087}{85,9264968 \times \sqrt{0,0005}} \right)^{0,4} = 1,7997873 m \cong 1,8 m$$

Le diamètre D aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D}$$

soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,70165715 \times 2,56506771 = 1,79979809 m \cong 1,8 m$$

iii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par application de la relation (3.129). Pour cela,

évaluons d'abord le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein, en ayant recours à la relation (3.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,7997873^3}}{10^{-6}} = 649355,47$$

Ainsi, selon la relation (3.129), le coefficient C est :

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left(\frac{0,852}{649355,47 \times [0,29158036 / 1,46266832]^{3/2}} \right) = 85,6028096 m^{0,5} / s$$

$$\cong 85,6 m^{0,5} / s$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*, calculées selon les relations (3.148) et (3.129) est inférieur à 0,38% seulement.

Vérifions enfin que C ainsi calculé est inférieur à la valeur C_{\max} donnée par la relation (3.133) :

$$C_{\max} = -4 \sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left(\frac{7,845}{649355,47} \right) = 87,1341229 m^{0,5} / s$$

$$\cong 87,15 m^{0,5} / s$$

iv. Nos calculs auraient pu être également vérifiés en déterminant le débit volume Q par application de la formule générale (3.117). Pour cela, évaluons d'abord l'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R , pour le diamètre D que nous avons calculé à l'étape (ii).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28), soit :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 1,7997873^2 \times 0,29158036 = 0,94449712 m^2$$

Le rayon hydraulique est donné par la relation (3.29), soit :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,7997873 \times \frac{0,29158036}{1,46266832} = 0,35878444 m$$

Le nombre de *Reynolds* R est régi par la relation (3.118), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,35878444^3}}{10^{-6}} = 681137,639$$

Ainsi, selon la relation (3.117), le débit volume Q est égal à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,94449712 \times \sqrt{0,35878444} \times 0,0005 \times \log\left(\frac{10,04}{681137,639}\right) = 1,08291413 \text{ m}^3 / \text{s} \\ &\cong 1,083 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit volume Q que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,38% seulement.

III.6.1.4. Exemple d'application 3.15

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 est le siège d'un écoulement uniforme Elle écoule un débit volume $Q = 1,337 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,0005 \text{ m}$ et le taux de remplissage est $\eta = 0,65$.

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre D de la conduite.

Solution

- i. Puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.142). Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement et prennent pour valeurs :

$$\bullet \quad \vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) = 1,56276574$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65 = 0,32481641$$

Selon la relation (3.142), le diamètre \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right)^{0,4} = \frac{1,56276574^{0,2}}{2,639 \times 0,32481641^{0,6}} \times \left(\frac{1,337}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}}\right)^{0,4} = 2,64655773 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 2,64655773^3}}{10^{-6}} = 1157904,62$$

Le facteur ψ est par suite, selon la relation (3.153) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,0005 / 2,64655773}{19 \times [0,32481641 / 1,56276574]} + \frac{0,721}{[0,32481641 / 1,56276574]^{3/2} \times 1157904,62} \right) \right]^{-2/5} \\ = 0,75577791$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est, selon la relation (3.148) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,75577791^{5/2}} = 71,359863 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 71,36 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

ii. La relation (3.65) permet de déduire que le diamètre D de la conduite est régi par la relation :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{C\sqrt{i}}\right)^{0,4}$$

soit :

$$D = \frac{1,56276574^{0,2}}{0,32481641^{0,6}} \times \left(\frac{1,337}{71,359863 \times \sqrt{0,0005}} \right)^{0,4} = 2,00019787 \text{ m} \cong 2 \text{ m}$$

Le diamètre D aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D}$$

soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,75577791 \times 2,64655773 = 2,00020986 \text{ m} \cong 2 \text{ m}$$

iii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par application de la relation (3.129). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds R_p à l'état plein, en ayant recours à la relation (3.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 2,00019787^3}}{10^{-6}} = 760781,897$$

Ainsi, selon la relation (3.129), le coefficient C est :

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left(\frac{0,0005 / 2,00019787}{14,8 \times [0,32481641 / 1,56276574]} + \frac{0,852}{649355,47 \times [0,32481641 / 1,56276574]^{3/2}} \right) \\ = 71,4228454 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 71,4 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, calculées selon les relations (3.148) et (3.129) est inférieur à 0,09% seulement.

Vérifions enfin que C ainsi calculé est inférieur à la valeur $C_{\max.}$ donnée par la relation (3.133) :

$$C_{\max.} = -4 \sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left(\frac{0,0005 / 2,00019787}{3,369} + \frac{7,845}{760781,897} \right) \\ = 72,1661397 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 72,2 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

Nos calculs auraient pu être également vérifiés en déterminant le débit volume Q par application de la formule générale (3.117). Pour cela, évaluons d'abord l'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R , pour le diamètre D que nous avons calculé à l'étape (ii).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28), soit :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2,00019787^2 \times 0,32481641 = 1,29952273 \text{ m}^2 \cong 1,3 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique est donné par la relation (3.29), soit :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2,00019787 \times \frac{0,32481641}{1,56276574} = 0,41573543 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* R est déterminé par la relation (3.118), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,41573543^3}}{10^{-6}} = 849591,262$$

Ainsi, selon la relation (3.117), le débit volume Q est égal à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,29952273 \times \sqrt{0,41573543} \times 0,0005 \times \log\left(\frac{0,0005}{14,8 \times 0,41573543} + \frac{10,04}{849591,262}\right) \\ &= 1,33818171 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,338 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit volume Q que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,09% seulement.

III.6.1.5. Exemple d'application 3.16

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 est le siège d'un écoulement uniforme Elle écoule un débit volume $Q = 2,89 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 4.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et le taux de remplissage est

$$\eta = 0,75.$$

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre D de la conduite.

Solution

- i. Puisque $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.145). Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont régies par les relations (3.47) et (3.55) respectivement et prennent pour valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$

Selon la relation (3.145), le diamètre \bar{D} est :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left(\frac{2,89}{\sqrt{9,81 \times 0,0004}} \right)^{0,4} = 3,45353099 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0004 \times 3,45353099^3}}{10^{-6}} = 1543799,01$$

Le facteur ψ est par suite, selon la relation (3.155) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,0002 / 3,45353099}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 1543799,01} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0,72453339$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (3.148) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,72453339^{5/2}} = 79,3037043 m^{0,5} / s \cong 79,3 m^{0,5} / s$$

La relation (3.67) permet de déduire que le diamètre D de la conduite est régi par la relation :

$$D = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

soit :

$$D = \frac{1,76455412^{0,2}}{0,39089728^{0,6}} \times \left(\frac{2,89}{79,3037043 \times \sqrt{0,0004}} \right)^{0,4} = 2,50218352 m \cong 2,5 m$$

Le diamètre D aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D}$$

soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,72453339 \times 3,45353099 = 2,50219852 m \cong 2,5 m$$

ii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy par application de la relation (3.132). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds R_p à l'état plein, en ayant recours à la relation (3.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0004 \times 2,50218352^3}}{10^{-6}} = 952082,238$$

Ainsi, selon la relation (3.132), le coefficient C est :

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left(\frac{0,0002 / 2,50218352}{14,8 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,852}{952082,238 \times [0,39089728 / 1,76455412]^{3/2}} \right)$$

$$= 79,4108825 m^{0,5} / s \cong 79,4 m^{0,5} / s$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, calculées selon les relations (3.148) et (3.132) est inférieur à 0,14% seulement.

Vérifions enfin que C ainsi calculé est inférieur à la valeur C_{\max} donnée par la relation (3.133) :

$$C_{\max} = -4 \sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left(\frac{0,0002 / 2,50218352}{3,369} + \frac{7,845}{952082,238} \right)$$

$$= 79,6472115 m^{0,5} / s \cong 79,65 m^{0,5} / s$$

iii. Nos calculs auraient pu être également vérifiés en déterminant le débit volume Q par application de la formule générale (3.117). Pour cela, évaluons d'abord l'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R , pour le diamètre D que nous avons calculé à l'étape (ii).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.56), soit :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,50218352^2 \times 0,39089728 = 2,4473775 m^2$$

Le rayon hydraulique R_h est donné par la relation (3.59), soit :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,50218352 \times \frac{0,39089728}{1,76455412} = 0,55430248 m$$

Le nombre de *Reynolds* R est déterminé par la relation (3.118), soit :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0004 \times 0,55430248^3}}{10^{-6}} = 1169902,6$$

Ainsi, selon la relation (3.117), le débit volume Q est égal à :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,4473775 \times \sqrt{0,55430248 \times 0,0004} \times \log \left(\frac{0,0002}{14,8 \times 0,55430248} + \frac{10,04}{1169902,6} \right) \\
 &= 2,89391247 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,894 \text{ m}^3 / \text{s}
 \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit volume Q que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,14% seulement.

III.6.2. Expression du débit volume maximal Q_{\max} .

L'expression du débit volume maximal Q_{\max} , correspondant à la capacité d'évacuation de la conduite, peut être déduite de la formule générale (3.117). Dans cette relation, l'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R s'expriment par les relations que nous avons déjà établies, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . Nous pouvons alors écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

L'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R s'expriment par les relations (3.7), (3.8) et (3.125) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (3.117) s'écrit :

$$Q = -0,04536092 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.156)$$

Introduisons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i D^5}} \quad (3.157)$$

La relation (3.156) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = -0,04536092 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.158)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

L'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R s'expriment par les relations (3.28), (3.29) et (3.128) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (3.117) s'écrit :

$$Q = -4\sqrt{2} \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.159)$$

soit :

$$Q^* = -4\sqrt{2} \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.160)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

L'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R s'expriment par les relations (3.56), (3.59) et (3.131) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (3.117) s'écrit :

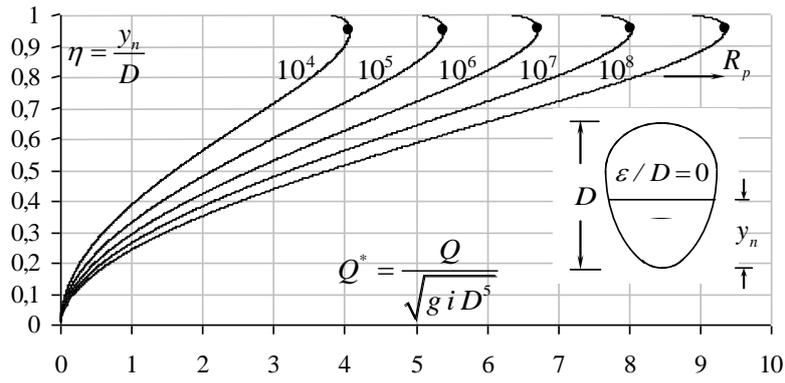
$$Q = -4\sqrt{2} \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.161)$$

Ou bien :

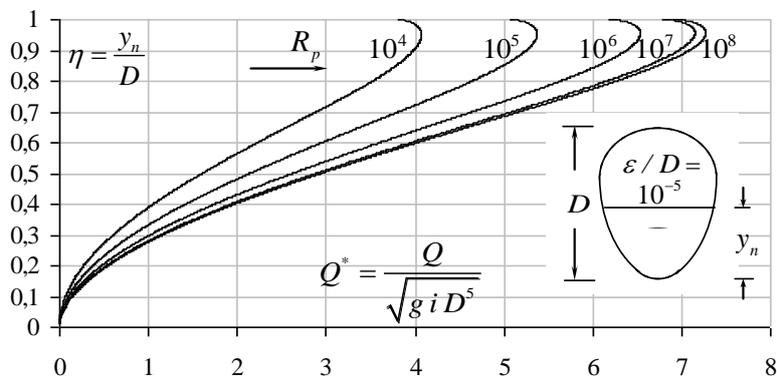
$$Q^* = -4\sqrt{2} \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.162)$$

Rappelons que dans les relations (3.158), (3.160) et (3.162), le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein est donné par la relation (3.120). Les relations (3.158), (3.160) et (3.162) montrent que la conductivité relative Q^* de la conduite est fonction à la fois du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein.

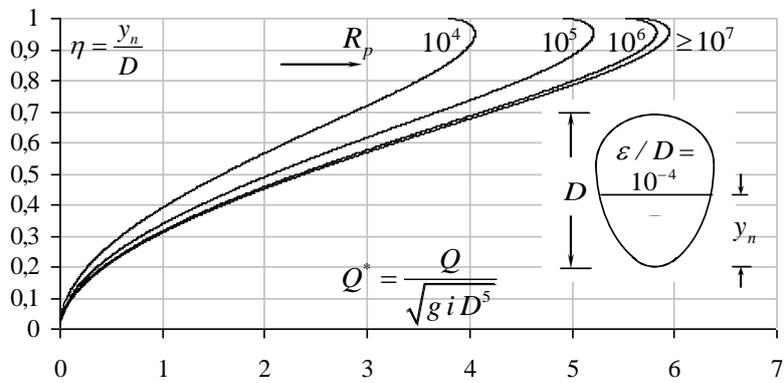
La variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q^* a été représentée sur la figure 3.22 (a à f), conformément aux relations (3.158), (3.160) et (3.162).



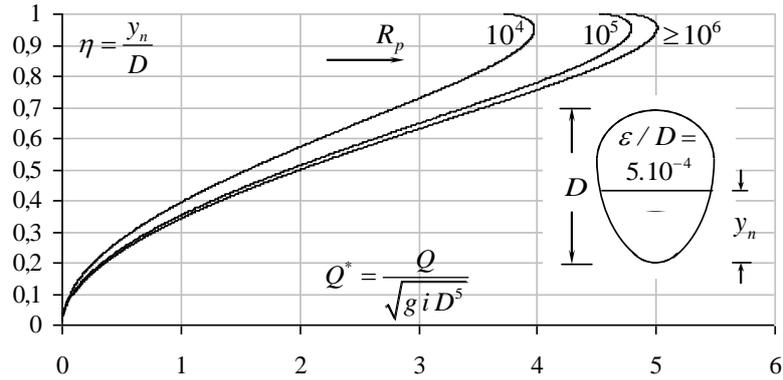
a)



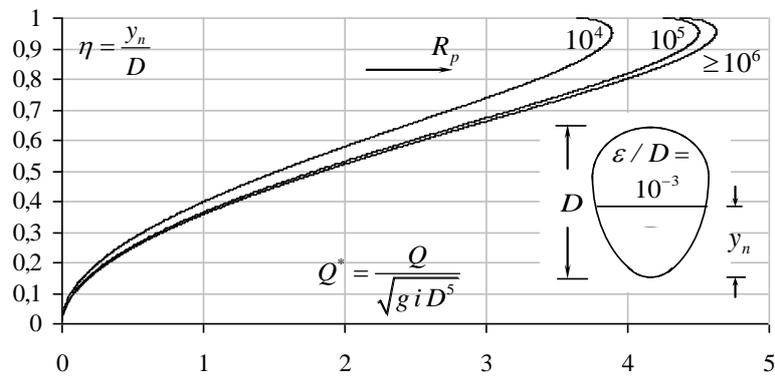
b)



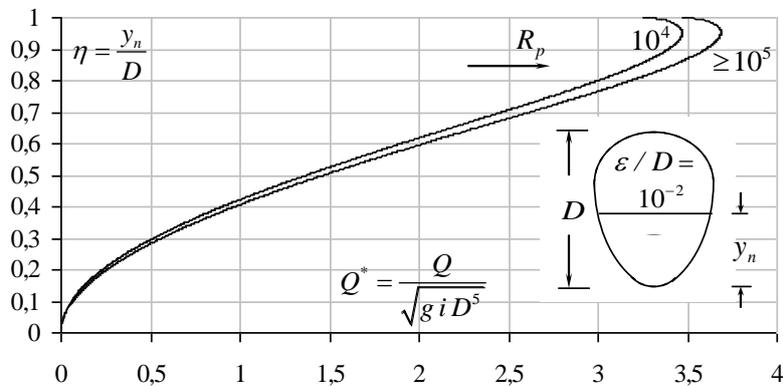
c)



d)



e)



f)

Figure 3.22 : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément aux relations (3.160), (3.161) et (3.162).

Il ressort principalement de la figure 3.22 (a à f) que la conductivité relative Q^* augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η , puis diminue dans un second temps même si η continue d'augmenter. La variation de $\eta(Q^*)$ passe ainsi par un

maximum qui dépend à la fois de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p . Le tableau 3.1 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage η correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$, calculées selon les relations (3.160), (3.161) et (3.162) pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p . L'espace grisâtre du tableau 1 correspond au domaine pratique de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

Tableau 3.1 : Valeurs du taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

$\varepsilon/D \rightarrow$	0	10^{-5}	5.10^{-5}	10^{-4}	5.10^{-4}	10^{-3}	5.10^{-3}	10^{-2}	
R_p	10^4	0,95083	0,950834	0,950862	0,950894	0,951111	0,951297	0,951621	0,951381
	5.10^4	0,95267	0,952703	0,952822	0,952946	0,953437	0,953582	0,953046	0,952352
	10^5	0,953285	0,953348	0,953558	0,953742	0,954210	0,954201	0,953283	0,952494
	5.10^5	0,954434	0,954688	0,955166	0,955351	0,955208	0,954865	0,953486	0,952611
	10^6	0,954838	0,955258	0,955743	0,955812	0,955377	0,954963	0,953512	0,952626
	5.10^6	0,955623	0,956489	0,956507	0,956315	0,955523	0,955045	0,953533	0,952638
	10^7	0,955909	0,956855	0,956639	0,956390	0,955542	0,955055	0,953536	0,952640
	5.10^7	0,956478	0,957259	0,956639	0,956453	0,955557	0,955064	0,953538	0,952641
	10^8	0,956691	0,957319	0,956767	0,956461	0,955559	0,955065	0,953538	0,952641

Nous pouvons ainsi constater que dans la large gamme pratique $10^{-5} \leq \varepsilon/D \leq 5.10^{-3}$ et $10^5 \leq R_p \leq 5.10^7$, le taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ varie dans l'intervalle $[0,953;0,957]$. La valeur moyenne $\eta_0 = 0,9547 \cong 0,955$ peut donc être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul du débit volume maximal. Elle appartient à l'intervalle $[2/3;1]$, ce qui permet de déduire que la conductivité relative maximale Q_{\max}^* est régie par la relation (3.162). Ainsi, le débit volume maximal s'obtient à la profondeur $y = 0,955D$.

Pour $\eta_0 = 0,955$, les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$, régies par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,955 - 2) = 2,29286753$

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$

$$= 0,5104589 + (0,955 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,955) \times (0,955 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,955 - 2) = 0,50027964$$

La conductivité relative maximale Q_{\max}^* est par suite, selon la relation (3.162) :

$$Q_{\max}^* = -1,322 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \quad (3.163)$$

Tenant compte de la relation (3.157), nous pouvons alors écrire que :

$$Q_{\max} = -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \quad (3.164)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du débit volume maximal en fonction de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein.

III.6.2.1. Exemple d'application 3.17

Quelle est la capacité d'évacuation de la conduite ovoïdale représentée par la figure 3.1, sachant que :

$$D = 3m ; i = 0,0001, \varepsilon = 0,0004m, \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

Solution

Le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0001 \times 3^3}}{10^{-6}} = 624953,364$$

Ainsi, en vertu de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 0,0001 \times 3^5} \times \log \left(\frac{0,0004 / 3}{3,229} + \frac{8,359}{624953,364} \right) \cong 2,751 m^3 / s \end{aligned}$$

III.6.3. Relation approchée de la profondeur normale

L'objectif de cette partie de l'étude est la détermination d'une relation approchée permettant le calcul explicite de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale considérée, dans le cas du coefficient de résistance à l'écoulement variable. Pour cela, la démarche adoptée consiste à trouver la loi de variation de $\eta(Q/Q_{\max.})$ en tenant compte des relations (3.156), (3.159), (3.161) et (3.163).

Nos calculs ont montré, après un programme de vérification intense, que dans la gamme $0,20 \leq \eta \leq 0,75$, le taux de remplissage η pouvait s'exprimer par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,798\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,51} \quad (3.165)$$

L'application de la relation approchée (3.165) à de multiples exemples numériques a montré que la valeur du taux de remplissage η est obtenue avec un écart relatif maximal inférieur à 0,5% seulement. Compte tenu de la relation (3.165), la profondeur normale y_n s'écrit alors :

$$y_n = \frac{3}{\pi} D \sin^{-1}\left[0,798\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,51}\right] \quad (3.166)$$

III.6.3.1. Exemple d'application 3.18

En ayant recours à la relation (3.166), déterminer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, sachant que :

$$Q = 1,8 m^3 / s ; i = 10^{-4} ; \varepsilon = 0,001 m ; \eta = 0,75 ; \nu = 10^{-6} m^2 / s .$$

Solution

i. Puisque le taux de remplissage η est compris entre $2/3$ et 1 , alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.145). Pour $\eta = 0,75$, les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$, régies par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left(\frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,77072813 m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3,77072813^3}}{10^{-6}} = 880650,444$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.155) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,001 / 3,77072813}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 880650,444} \right) \right]^{-2/5} = 0,76406673$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76406673 \times 3,77072813 = 2,8810879 m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 3m$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3^3}}{10^{-6}} = 624953,364$$

vi. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3^5} \times \log \left(\frac{0,001/3}{3,229} + \frac{8,359}{624953,364} \right) \\ &= 2,53877166 m^3 / s \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{1,8}{2,53877166} \right)^{0,51} \right] = 0,70063975$$

viii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,70063975 \times 3 = 2,10191924 m \cong 2,10 m$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

• Les fonctions $\lambda(\eta)$ et $\tau(\eta)$ prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2)$$

$$\begin{aligned} &= 0,5104589 + (0,70063975 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,70063975) \times (0,70063975 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,70063975 - 2) \\ &= 0,35853542 \end{aligned}$$

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,70063975 - 2) = 1,66416496$$

• L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.56) :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 3^2 \times 0,35853542 = 3,2268188 m^2$$

• Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 3 \times \frac{0,35853542}{1,66416496} = 0,64633392 \text{ m}$$

- Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 0,64633392^3}}{10^{-6}} = 736520,61$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 3,2268188 \times \sqrt{0,64633392 \times 10^{-4}} \times \log \left(\frac{0,001}{14,8 \times 0,64633392} + \frac{10,04}{736520,61} \right)$$

$$= 1,80520853 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,805 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,29% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.3.2. Exemple d'application 3.19

Déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, sachant que :

$$Q = 1,36 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 10^{-4} ; \varepsilon \rightarrow 0 ; \eta = 0,70 ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} .$$

Solution

i. Puisque le taux de remplissage η est compris entre $2/3$ et 1 , alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.145). Pour $\eta = 0,70$, les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$, régies par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 1,6628789$

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,7 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,7) \times (0,7-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 0,3581111$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{1,6628789^{0,2}}{2,639 \times 0,3581111^{0,6}} \times \left(\frac{1,36}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,51078168m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3,51078168^3}}{10^{-6}} = 791173,01$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.155) :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,721}{[0,3581111 / 1,6628789]^{3/2} \times 791173,01} \right) \right]^{-2/5} = 0,70690178 \end{aligned}$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,70690178 \times 3,51078168 = 2,48177781m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 2,5m$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 475418,132$$

vi. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{giD^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left(\frac{8,359}{475418,132} \right) \\ &= 1,94562583m^3 / s \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{1,36}{1,94562583} \right)^{0,51} \right] = 0,69444282$$

viii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,69444282 \times 2,5 = 1,73610705 \text{ m} \cong 1,736 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

• Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,69444282 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,69444282) \times (0,69444282 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69444282 - 2) \\ &= 0,35442196 \end{aligned}$$

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,69444282 - 2) = 1,65171741$$

• L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.56) :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,5^2 \times 0,35442196 = 2,21513724 \text{ m}^2$$

• Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,35442196}{1,65171741} = 0,5364446 \text{ m}$$

• Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 0,5364446^3}}{10^{-6}} = 556912,289$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,21513724 \times \sqrt{0,5364446 \times 10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{556912,289}\right) = 1,36371027 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,364 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré n'est que de 0,27% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.3.3. Exemple d'application 3.20

Déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, sachant que :

$$Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 5.10^{-4} ; \varepsilon = 5.10^{-4} \text{ m} ; \eta = 0,65 ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Solution

i. Puisque le taux de remplissage η est compris entre 1/15 et 2/3, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Pour $\eta = 0,65$, les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$, régies par les relations (3.15) et (3.27) respectivement, prennent les valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) = 1,56276574$
- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta$
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65 = 0,32481641$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,56276574^{0,2}}{2,639 \times 0,32481641^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,35629037 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\overline{R_p} = 3,84 \frac{\sqrt{g i \overline{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 2,35629037^3}}{10^{-6}} = 972733,656$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.153) :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \overline{R_p}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{5,10^{-4} / 2,35629037}{19 \times [0,32481641 / 1,56276574]} + \frac{0,721}{[0,32481641 / 1,56276574]^{3/2} \times 972733,656} \right) \right]^{-2/5} = 0,75960998 \end{aligned}$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \overline{D} = 0,75960998 \times 2,35629037 = 1,78986168 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre $D = 1,8 \text{ m}$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 649470,587$$

vi. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 1,8^5} \times \log \left(\frac{5,10^{-4} / 1,8}{3,229} + \frac{8,359}{649470,587} \right) = 1,61181487 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{1}{1,61181487} \right)^{0,51} \right] = 0,64539399$$

viii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,64539399 \times 1,8 = 1,16170917 \text{ m} \cong 1,162 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

- Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2\sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right) = 1,55355205$$

$$\begin{aligned}\zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,64539399 \\ &= 0,3217474\end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28) :

$$A = D^2\zeta(\eta) = 1,8^2 \times 0,3217474 = 1,04246157 m^2$$

- Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,8 \times \frac{0,3217474}{1,55355205} = 0,37278784 m$$

- Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,37278784^3}}{10^{-6}} = 721401,586$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$\begin{aligned}Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,04246157 \times \sqrt{0,37278784 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{5.10^{-4}}{14,8 \times 0,37278784} + \frac{10,04}{721401,586}\right) \\ &= 1,0037969 \cong 1,0038 m^3 / s\end{aligned}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,38% seulement.

Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.3.4. Exemple d'application 3.21

Déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1, sachant que :

$$Q = 0,7 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3.10^{-4} ; \varepsilon = 2.10^{-4} \text{ m} ; \eta = 0,5 ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Solution

i. Puisque le taux de remplissage η est compris entre $1/15$ et $2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Pour $\eta = 0,5$, les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$, régies par les relations (3.15) et (3.27) respectivement, prennent les valeurs :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vartheta(\eta) &= 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,5 \right) = 1,26120446 \\ \bullet \quad \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,5 \right) - \left(\frac{2}{3} - 0,5 \right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,5 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,5 = 0,22636457 \end{aligned}$$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,26120446^{0,2}}{2,639 \times 0,22636457^{0,6}} \times \left(\frac{0,7}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,69224018 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2,69224018^3}}{10^{-6}} = 920231,421$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.153) :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{2,10^{-4} / 2,69224018}{19 \times [0,22636457 / 1,26120446]} + \frac{0,721}{[0,22636457 / 1,26120446]^{3/2} \times 920231,421} \right) \right]^{-2/5} = 0,74010581 \end{aligned}$$

Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,74010581 \times 2,69224018 = 1,9925426 \text{ m}$$

iv. Adoptons le diamètre $D = 2 \text{ m}$. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3,10^{-4} \times 2^3}}{10^{-6}} = 589211,682$$

v. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 3,10^{-4} \times 2^5} \times \log \left(\frac{2,10^{-4} / 2}{3,229} + \frac{8,359}{589211,682} \right) = 1,76286764 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vi. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{0,7}{1,76286764} \right)^{0,51} \right] = 0,49805067$$

vii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,49805067 \times 2 = 0,99610133 \text{ m} \cong 1 \text{ m}$$

viii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,49805067 \right) = 1,25724983$$

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,49805067 \right) - \left(\frac{2}{3} - 0,49805067 \right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,49805067 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,49805067 \\ &= 0,22512019 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28) :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2^2 \times 0,22512019 = 0,90048075 m^2$$

- Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2 \times \frac{0,22512019}{1,25724983} = 0,35811528 m$$

- Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3,10^{-4} \times 0,35811528^3}}{10^{-6}} = 526131,602$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$\begin{aligned} Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,90048075 \times \sqrt{0,35811528 \times 3,10^{-4}} \times \log \left(\frac{2,10^{-4}}{14,8 \times 0,35811528} + \frac{10,04}{526131,602} \right) = 0,70207975 \\ &\cong 0,702 m^3 / s \end{aligned}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,3% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.4. Expression de la vitesse moyenne maximale V_{\max} .

En ayant recours à la relation générale (3.117) exprimant le débit volume Q et compte tenu du fait que la vitesse moyenne V est telle que $V = Q/A$, nous pouvons alors écrire que :

$$V = -4\sqrt{2g} \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (3.167)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , le rayon hydraulique R_h s'exprime par l'une des relations (3.8), (3.29) ou (3.59), tandis que le nombre de *Reynolds* R est donné par l'une des relations (3.125), (3.128) ou (3.131). Ainsi, pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$V = -1,633 \sqrt{g i D} [\varphi(\eta)]^{1/2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.168)$$

Introduisons la vitesse relative v^* telle que :

$$v^* = \frac{V}{\sqrt{g i D}} \quad (3.169)$$

La relation (3.168) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$v^* = -1,633 [\varphi(\eta)]^{1/2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.170)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$V = -4\sqrt{2} \sqrt{g i D} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\mathcal{G}(\eta)} \right]^{1/2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \mathcal{G}(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta) / \mathcal{G}(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.171)$$

Ou bien :

$$V^* = -4\sqrt{2} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8 \left[\zeta(\eta)/\vartheta(\eta) \right]} + \frac{0,852}{\left[\zeta(\eta)/\vartheta(\eta) \right]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.172)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

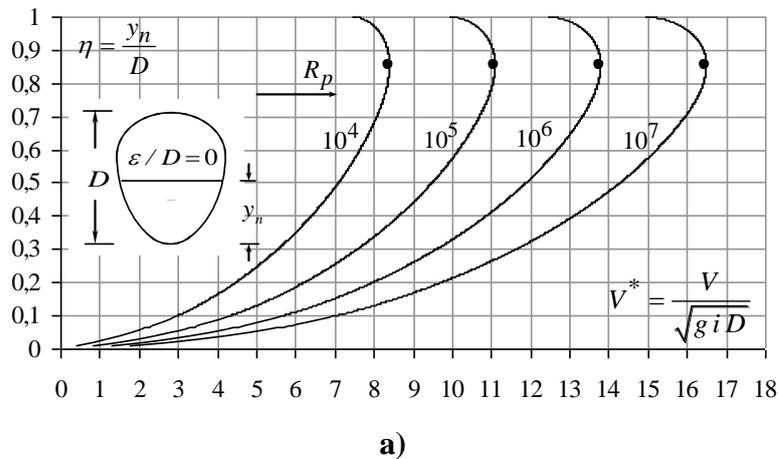
$$V = -4\sqrt{2} \sqrt{g i D} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8 \left[\lambda(\eta)/\tau(\eta) \right]} + \frac{0,852}{\left[\lambda(\eta)/\tau(\eta) \right]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.173)$$

Ou bien :

$$V^* = -4\sqrt{2} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8 \left[\lambda(\eta)/\tau(\eta) \right]} + \frac{0,852}{\left[\lambda(\eta)/\tau(\eta) \right]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.174)$$

Nous pouvons ainsi observer que dans toute la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, la vitesse relative V^* peut s'exprimer en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein.

Conformément aux relations (3.170), (3.172) et (3.174), la vitesse relative V^* a été représentée graphiquement sur la figure 3.23 (a et b) en fonction du taux de remplissage η , pour diverses valeurs du nombre de Reynolds R_p et pour les rugosités relatives extrêmes $\varepsilon/D=0$ et $\varepsilon/D=0,01$.



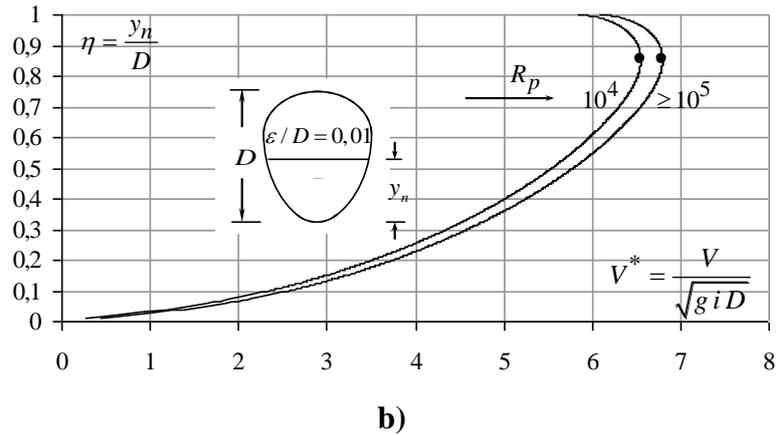


Figure 3.23 : Variation de $\eta(V^*)$ pour diverses valeurs du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein, conformément aux relations (3.170), (3.172) et (3.174). **(a)** : $\varepsilon/D=0$; **(b)** : $\varepsilon/D=0,01$.
 (●) Valeurs maximales de V^* correspondant à $\eta=0,85438$.

La figure 3.23 **(a et b)** montre que la vitesse relative v^* augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η , puis diminue dans un second temps en passant par un maximum. Le taux de remplissage η correspondant à la valeur maximale de V^* a été estimé à $\eta = 0,854375$ et demeure constant quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds* R_p et de la rugosité relative ε/D . Notons que cette valeur de η correspond à celle que nous avons obtenue pour le coefficient de *Chézy* C_{\max} . Nous pouvons affirmer que V_{\max}^* et donc V_{\max} apparaît à la profondeur $y = 0,854375D$. D'autre part, la figure 3.23 montre aussi que plus la rugosité relative augmente et plus les courbes de variation de $\eta(V^*)$ se resserrent pour ensuite se confondre quasiment à partir de la valeur $R_p = 10^5$, lorsque la rugosité relative atteint la valeur $\varepsilon/D = 0,01$. Au-delà de la valeur $R_p = 10^5$, le nombre de *Reynolds* R_p n'a aucune influence sur la vitesse relative v^* et l'écoulement est alors dans le domaine turbulent rugueux. La vitesse relative v^* ne dépend que de la rugosité relative ε/D .

Puisque la valeur $\eta = 0,854375$, correspondant à V_{\max}^* , appartient à l'intervalle $[2/3; 1]$, alors V_{\max}^* est régie par la relation (3.174). Pour $\eta = 0,85438$, les fonctions $\lambda(\eta)$ et $\tau(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

$$= 0,5104589 + (0,85438 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,854375) \times (0,854375 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,854375 - 2)$$

$$= 0,4540941$$

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,854375 - 2) = 1,9948756$$

La relation (3.174) permet alors d'écrire que :

$$V_{\max.}^* = -2,699 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (3.175)$$

Tenant compte des relations (3.169) et (3.175), nous pouvons écrire que :

$$V_{\max.} = -2,699 \sqrt{g i D} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (3.176)$$

Rappelons que dans la relation (3.176), le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein est donné par la relation (3.120).

III.6.4.1. Exemple d'application 3.22

Soit une conduite en béton de forme ovoïdale (Figure 3.1) dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 1\text{mm}$. Admettons que la vitesse d'auto-curage doit être supérieure ou égale à $0,2\text{m/s}$ et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder $2,5\text{m/s}$ à 3m/s . La conduite écoule le débit volume $Q = 2,4\text{m}^3/\text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 3.10^{-4}$. Le taux de remplissage de la conduite est $\eta = 0,6$.

Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Solution

- i.* Le taux de remplissage imposé est tel que $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Pour $\eta = 0,6$, les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$, régies par les relations (3.15) et (3.27) respectivement, prennent les valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) = 1,46266832$

- $$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6 = 0,29158036$$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right)^{0,4} = \frac{1,46266832^{0,2}}{2,639 \times 0,29158036^{0,6}} \times \left(\frac{2,4}{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4}}}\right)^{0,4} = 3,89996996m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 3,89996996^3}}{10^{-6}} = 1604420,67$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.153) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 3,89996996}{19 \times [0,29158036 / 1,46266832]} + \frac{0,721}{[0,29158036 / 1,46266832]^{3/2} \times 1604420,67} \right) \right]^{-2/5} = 0,76490882$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76490882 \times 3,89996996 = 2,98312142m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 3m$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 3^3}}{10^{-6}} = 1082450,98$$

vi. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned}
 Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\
 &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 3^5} \times \log \left(\frac{10^{-3} / 3}{3,229} + \frac{8,359}{1082450,98} \right) = 4,4214097 \text{ m}^3 / \text{s}
 \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{2,4}{4,4214097} \right)^{0,51} \right] = 0,59595391 \cong 0,596$$

Cette valeur de η appartient aussi à l'intervalle $[1/15; 2/3]$.

viii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,59595391 \times 3 = 1,78786174 \text{ m} \cong 1,788 \text{ m}$$

ix. Calculons l'aire de la section mouillée A en vertu de la relation (3.28). La fonction $\zeta(\eta)$ prend la valeur :

$$\begin{aligned}
 \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) - \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\
 &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,59595391 \right) - \left(\frac{2}{3} - 0,59595391 \right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,59595391 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,59595391 \\
 &= 0,28890209
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 3^2 \times 0,28890209 = 2,60011881 \text{ m}^2 \cong 2,6 \text{ m}^2$$

x. La vitesse moyenne de l'écoulement est, par suite :

$$V = Q / A = 2,4 / 2,60011881 = 0,92303475 \text{ m} / \text{s} \cong 0,923 \text{ m} / \text{s}$$

La vitesse moyenne ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xi. Déterminons la vitesse maximale en application de la relation (3.176), soit :

$$V_{\max.} = -2,699 \sqrt{g i D} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -2,699 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 3} \log \left(\frac{10^{-3} / 3}{3,369} + \frac{7,845}{1082450,98} \right)$$

$$= 1,00780827 \text{ m / s} \cong 1 \text{ m / s}$$

La vitesse maximale calculée est bien inférieure à la vitesse maximale admissible imposée lors de l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- La fonction $\vartheta(\eta)$ prend la nouvelle valeur suivante :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,59595391 \right) = 1,45455698$$

- Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 3 \times \frac{0,28890209}{1,45455698} = 0,59585584 \text{ m}$$

- Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 0,59585584^3}}{10^{-6}} = 1129202,69$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,60011881 \times \sqrt{0,59585584 \times 3.10^{-4}} \times \log \left(\frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,59585584} + \frac{10,04}{1129202,69} \right) = 2,4099139 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\cong 2,41 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,42% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.4.2. Exemple d'application 3.23

Soit une conduite de forme ovoïdale (Figure 3.1) dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon \rightarrow 0$. Admettons que la vitesse d'auto-curage doit être supérieure ou égale à $0,2 m/s$ et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder $2 m/s$ à $2,5 m/s$. La conduite écoule le débit volume $Q = 2,6 m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$, sous une pente longitudinale $i = 4.10^{-4}$. Le taux de remplissage de la conduite est $\eta = 0,67$.

Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Solution

i. Le taux de remplissage imposé est tel que $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Pour $\eta = 0,67$, les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$, régies par les relations (3.15) et (3.27) respectivement, prennent les valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,67\right) = 1,6027673$
- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta$
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,67\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,67\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,67\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,67 = 0,33814819$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,6027673^{0,2}}{2,639 \times 0,33814819^{0,6}} \times \left(\frac{2,6}{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4}}}\right)^{0,4} = 3,54253383 m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 3,54253383^3}}{10^{-6}} = 1603861,02$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.153) :

$$\begin{aligned}\psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,721}{[0,33814819 / 1,6027673]^{3/2} \times 1603861,02} \right) \right]^{-2/5} = 0,69107636\end{aligned}$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,69107636 \times 3,54253383 = 2,44816138 m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 2,5 m$. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4,10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 950836,264$$

vi. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned}Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 4,10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left(\frac{8,359}{950836,264} \right) = 4,13760347 m^3 / s\end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{2,6}{4,13760347} \right)^{0,51} \right] = 0,65040182$$

Cette valeur de η appartient aussi à l'intervalle $[1/15; 2/3]$.

viii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,65040182 \times 2,5 = 1,62600454 m \cong 1,626 m$$

ix. Calculons l'aire de la section mouillée A en vertu la relation (3.28). La fonction $\zeta(\eta)$ prend la valeur :

$$\begin{aligned}\zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65040182\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,65040182\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,65040182\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65040182 \\ &= 0,32508418\end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2,5^2 \times 0,32508418 = 2,03177611 m^2$$

x. La vitesse moyenne de l'écoulement est, par suite :

$$V = Q / A = 2,6 / 2,03177611 = 1,27966856 m / s \cong 1,28 m / s$$

La vitesse moyenne ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage imposée à l'énoncé de l'exemple considéré.

xi. Déterminons la vitesse moyenne maximale en application de la relation (3.176), soit :

$$\begin{aligned}V_{\max.} &= -2,699 \sqrt{g i D} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p}\right) = -2,699 \times \sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 2,5} \log\left(\frac{7,845}{950836,264}\right) = 1,35894321 m / s \\ &\cong 1,36 m / s\end{aligned}$$

La vitesse moyenne maximale calculée est bien inférieure à la vitesse maximale admissible imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

• La fonction $\vartheta(\eta)$ prend la nouvelle valeur suivante :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65040182\right) = 1,56356949$$

• Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,32508418}{1,56356949} = 0,51977891 m$$

- Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 0,51977891^3}}{10^{-6}} = 1062325,13$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,03177611 \times \sqrt{0,51977891 \times 4 \cdot 10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{1062325,13}\right) = 2,60807195 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,608 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,31% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.4.3. Exemple d'application 3.24

Reprenons l'exemple d'application 3.23 et déterminons la profondeur normale y_n de l'écoulement pour les données suivantes :

$$Q = 3,2 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad i = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \eta = 0,7, \quad \varepsilon = 1 \text{ mm}, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Solution

i. Puisque le taux de remplissage η est compris entre $2/3$ et 1 , alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.145). Pour $\eta = 0,7$, les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$, régies par les relations (3.47) et (3.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 1,6628789$

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$

$$= 0,5104589 + (0,7 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,7) \times (0,7 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 0,3581111$$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{1,6628789^{0,2}}{2,639 \times 0,3581111^{0,6}} \times \left(\frac{3,2}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,5830614 m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p à l'état plein est, en vertu de la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 3,5830614^3}}{10^{-6}} = 1824030,54$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (3.155) :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 3,5830614}{19 \times [0,3581111 / 1,6628789]} + \frac{0,721}{[0,3581111 / 1,6628789]^{3/2} \times 1824030,54} \right) \right]^{-2/5} = 0,76465047 \end{aligned}$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre D de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76465047 \times 3,5830614 = 2,73978958 m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 2,75 m$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, compte tenu de la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,75^3}}{10^{-6}} = 1226449,78$$

vi. En application de la relation (3.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{giD^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,75^5} \times \log \left(\frac{10^{-3} / 2,75}{3,229} + \frac{8,359}{1226449,78} \right) = 4,55499481 m^3 / s \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, selon la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{3,2}{4,55499481} \right)^{0,51} \right] = 0,69662587$$

viii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,69662587 \times 2,75 = 1,91572114 \text{ m} \cong 1,916 \text{ m}$$

ix. Calculons l'aire de la section mouillée A en vertu la relation (3.28). La fonction $\lambda(\eta)$ prend la valeur :

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,69662587 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,69662587) \times (0,69662587 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69662587 - 2) \\ &= 0,35587185 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,75^2 \times 0,35587185 = 2,6912809 \text{ m}^2$$

x. La vitesse moyenne de l'écoulement est, par suite :

$$V = Q / A = 3,2 / 2,6912809 = 1,1890249 \text{ m/s} \cong 1,2 \text{ m/s}$$

La vitesse moyenne ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage imposée à l'énoncé de l'exemple considéré.

xi. Déterminons la vitesse moyenne maximale en application de la relation (3.176), soit :

$$\begin{aligned} V_{\max.} &= -2,699 \sqrt{g i D} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \\ &= -2,699 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,75} \log \left(\frac{10^{-3} / 2,75}{3,369} + \frac{7,846}{1226449,78} \right) = 1,23562492 \cong 1,236 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La vitesse moyenne maximale calculée est bien inférieure à la vitesse maximale admissible imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation générale (3.117)

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- La fonction $\tau(\eta)$ prend la nouvelle valeur suivante :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,69662587 - 2) = 1,65609999$$

- Le rayon hydraulique R_h est, selon la relation (3.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,75 \times \frac{0,35587185}{1,65609999} = 0,59093509 \text{ m}$$

- Selon la relation (3.118), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,59093509^3}}{10^{-6}} = 1439773,42$$

Ainsi, le débit volume Q est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,6912809 \times \sqrt{0,59093509 \times 5 \cdot 10^{-4}} \times \log \left(\frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,59093509} + \frac{10,04}{1439773,42} \right) = 3,20978699 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\cong 3,21 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,31% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.5. Coefficient n de *Manning*

III.6.5.1. Relation générale du coefficient n de *Manning*

La relation universellement connue de *Manning* exprime le débit volume Q sous la forme suivante :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (3.177)$$

où n est le coefficient de *Manning*.

En comparant les relations (3.117) et (3.177), nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4 \sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (3.178)$$

La relation (3.178) constitue la relation générale du coefficient n de *Manning*, applicable à tous les profils géométriques et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent tel que défini par le diagramme universel de *Moody*.

Le nombre de *Reynolds* R figurant dans la relation (3.178) est, pour rappel, donné par les relations (3.125), (3.128) et (3.131), dépendant de la gamme de variation du taux de remplissage η . La relation (3.178) montre que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η de la conduite, mais il est intéressant d'observer le degré de cette dépendance. Le rayon hydraulique R_h est donné par les relations (3.8), (3.29) et (3.59), selon la gamme de variation du taux de remplissage η .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

i. $\eta \leq 1/15$

$$\frac{1}{n} = -8,559 \sqrt{g} D^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.179)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (3.180)$$

la relation (3.179) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -8,559 [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.181)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{1}{n} = -4 \sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.182)$$

ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8 [\zeta(\eta)/\vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta)/\vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.183)$$

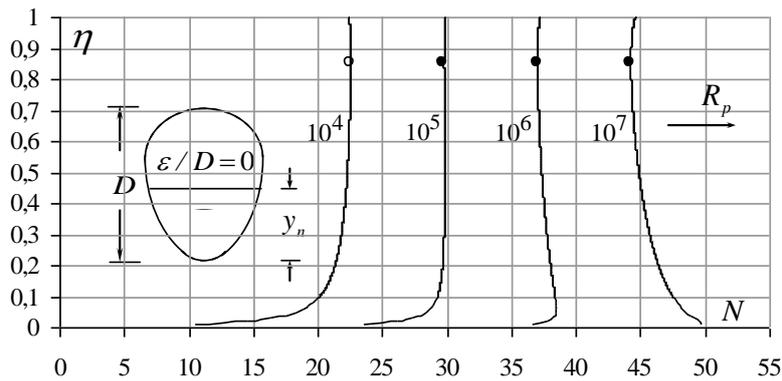
iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8 [\lambda(\eta)/\tau(\eta)]} + \frac{0,852}{[\lambda(\eta)/\tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.184)$$

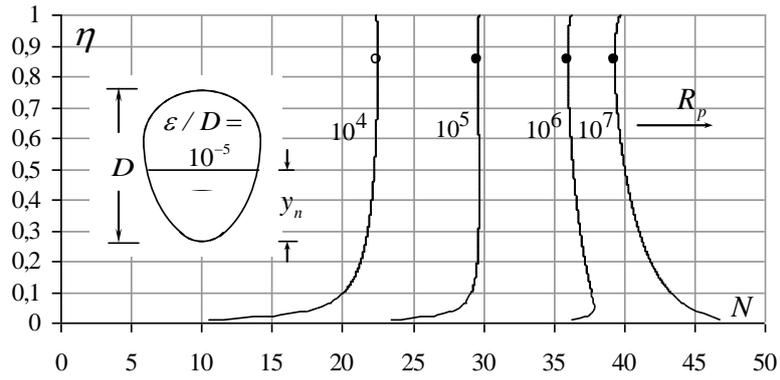
ou bien :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8 [\lambda(\eta)/\tau(\eta)]} + \frac{0,852}{[\lambda(\eta)/\tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (3.185)$$

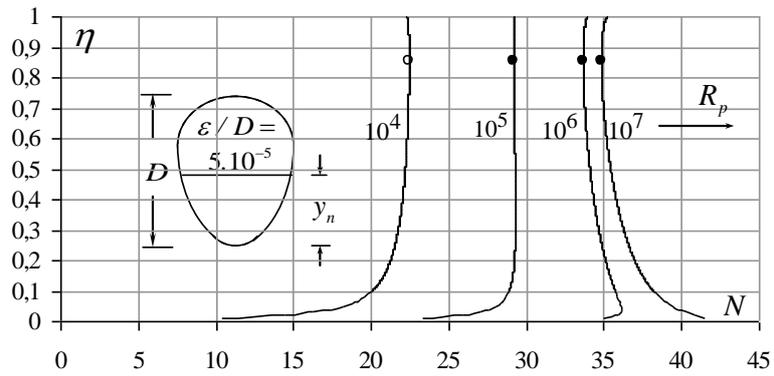
Nous pouvons donc constater que dans toute la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, le paramètre adimensionnel N est fonction du taux de remplissage η de la conduite, de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein. Les relations (3.181), (3.183) et (3.185) ont été représentées graphiquement sur la figure 3.24 (a à g), pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .



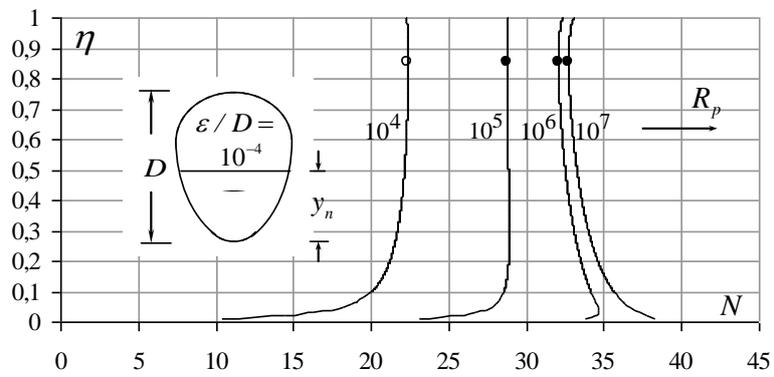
a)



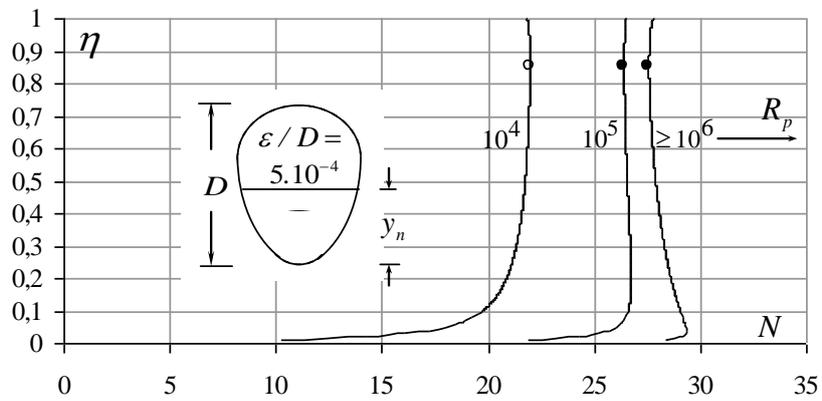
b)



c)



d)



e)

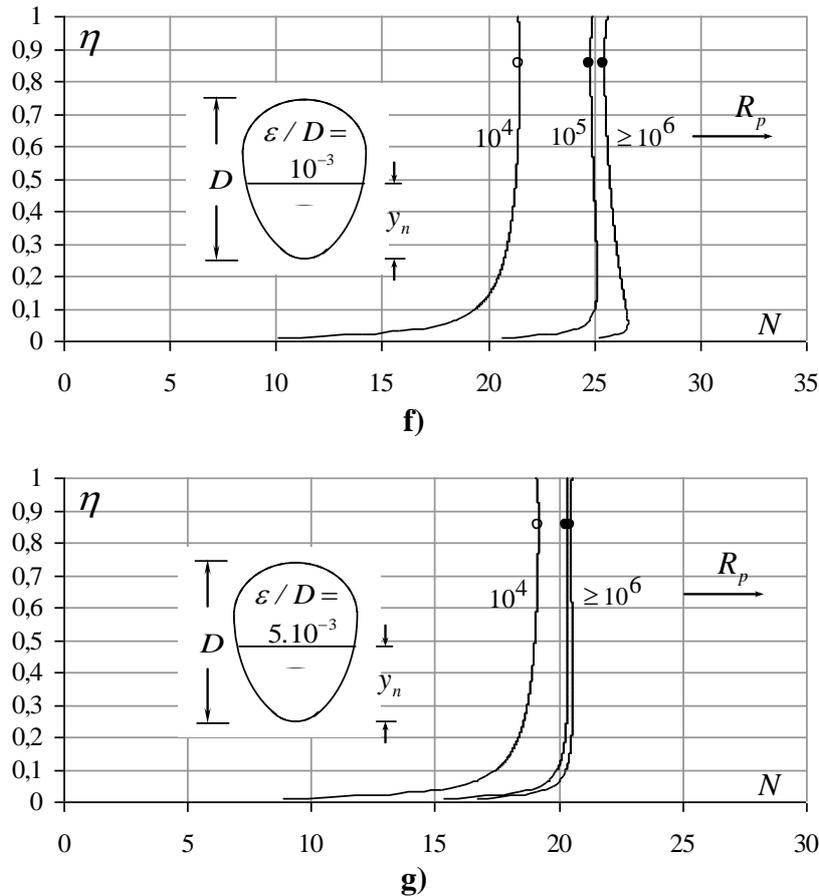


Figure 3.24 : Variation du paramètre adimensionnel N en fonction du taux de remplissage η , pour quelques valeurs de la rugosité relative ε / D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein.

(o) : Valeur maximale de N . (•) : Valeur minimale de N

Pour les valeurs pratiques de η , telles que $\eta \geq 0,2$, Il ressort de la figure 3.24 (a à g) les observations suivantes :

- i. Le paramètre adimensionnel N augmente, jusqu'à un maximum, avec l'accroissement du taux de remplissage η , pour les valeurs de R_p atteignant 10^4 ou légèrement supérieures à 10^4 . Le maximum de N a été observé pour $\eta \cong 0,85438$.
- ii. Au-delà de son maximum, le paramètre N diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- iii. Pour les valeurs de $R_p \geq 10^5$, le paramètre N diminue avec l'accroissement de η , jusqu'à un minimum. Le minimum de N a été également observé pour $\eta \cong 0,85438$.

- iv. Au-delà de son minimum, le paramètre N augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- v. Un changement de concavité des courbes s'opère dès que le nombre de Reynolds R_p atteint 10^5 .
- vi. Au-delà de $\eta = 0,2$, la variation de N est graduelle et les courbes se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε / D . Dès que la rugosité relative atteint la valeur $5 \cdot 10^{-3}$, les courbes se confondent quasiment lorsque le nombre de Reynolds R_p atteint 10^5 .

Pour les cas pratiques, la plus petite valeur du nombre de Reynolds R_p est de l'ordre de 10^5 , ce qui permet de conclure que le paramètre adimensionnel N présente en pratique des valeurs minimales. Pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,85438$, N est régi par la relation (3.185) et les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ prennent la valeur $\tau(\eta = 0,85438) = 1,99488775$ et $\lambda(\eta = 0,85438) = 0,45409685$.

Ainsi, en vertu de la relation (3.185), nous pouvons écrire que pour $R_p \geq 10^5$:

$$N_{\min.} = -7,239 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right)$$

(3.186)

Ou bien, compte tenu de la relation (3.180) :

$$n_{\max.} = - \frac{0,138 D^{1/6}}{\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right)} \quad (3.187)$$

III.6.5.2. Calcul du coefficient n de Manning par la MMR

Les relations (3.179), (3.182) ou (3.184) ne permettent d'évaluer le coefficient n de Manning que si le diamètre D de la conduite est une donnée du problème. Dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer de manière explicite la valeur de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En comparant les relations (3.61) et (3.177), nous pouvons déduire que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (3.188)$$

Par conséquent, le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de résistance \bar{n} de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{C} \quad (3.189)$$

Rappelons que $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$.

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre \bar{D} ; il écoule un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, pour une pente longitudinale \bar{i} . Pour déterminer le coefficient n de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- v. $\bar{D} \neq D$: le diamètre de la conduite considérée est différent de celui du modèle rugueux de référence.
- vi. $\bar{Q} = Q$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume Q .
- vii. $\bar{i} = i$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence sont caractérisés par la même pente longitudinale i .
- viii. $\bar{\eta} = \eta$: Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- ix. $\bar{\nu} = \nu$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même liquide.

Le débit volume \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (3.190)$$

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence \bar{A} et \bar{R}_h par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (3.191)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (3.192)$$

En tenant compte des relations (3.191) et (3.192), la relation (3.177) devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (3.193)$$

Il ressort ainsi des relations (3.190) et (3.193) que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (3.194)$$

En combinant les relations (3.189) et (3.194), il vient que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (3.195)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par l'une des relations (3.151), (3.153) ou (3.155) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , tandis que \bar{R}_h s'exprime par l'une des relations (3.150), (3.152) ou (3.154). Ainsi :

i. $\eta \leq 1/15$

$$n = \frac{0,13}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{1,583 \varphi(\eta)} + \frac{29,985}{[\varphi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (3.196)$$

ii. $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (3.197)$$

iii. $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15}$$

(3.198)

Selon les relations (3.196), (3.197) et (3.198), le coefficient n de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de η , le diamètre \bar{D} est donné par l'une des relations (3.139), (3.142) ou (3.145), tandis que le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p est régi par la relation (3.147).

L'exemple d'application suivant montre les étapes d'évaluation du coefficient n de *Manning* par la MMR.

III.6.5.3. Exemple d'application 3.25

La conduite ovoïdale représentée par la figure 3.1 écoule le débit volume $Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous la pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est dans un état pratiquement lisse et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 60%.

Calculer la valeur :

- i. du coefficient n de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale y_n .

Solution

i. Puisque le taux de remplissage $\eta = 0,60$ est compris entre $1/15$ et $2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Les fonctions $\mathcal{G}(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement. Ainsi :

- $\mathcal{G}(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,6 \right) = 1,46266832$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6 = 0,29158036 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right)^{0,4} = \frac{1,46266832^{0,2}}{2,639 \times 0,29158036^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,48088718m$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,48088718^3}}{10^{-6}} = 1050899,66$$

iii. Puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (3.197), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 2,48088718^{1/6} \times \left[\frac{0,29158036}{1,46266832} \right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[-\log \left(\frac{0,721}{[0,29158036 / 1,46266832]^{3/2} \times 1050899,66} \right) \right]^{-16/15} = 0,00981168m^{-1/3}s \end{aligned}$$

iv. Selon la relation (3.95), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{1/4}}{[\zeta(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} = \frac{1,46266832^{1/4}}{0,29158036^{5/8}} \times \left(\frac{0,00981168 \times 1}{\sqrt{5.10^{-4}}}\right)^{3/8} = 1,7445369m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 1,75m$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,75^3}}{10^{-6}} = 622598,118$$

vi. Le débit maximum $Q_{\max.}$ pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (3.164) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,75^5} \times \log \left(\frac{8,359}{622598,118} \right) \\ &= 1,82750313 m^3 / s \end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre $D = 1,75 m$, la nouvelle valeur du taux de remplissage η est, en application de la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{1}{1,82750313} \right)^{0,51} \right] = 0,59878202$$

La profondeur normale y_n est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,59878202 \times 1,75 = 1,04786853 m \cong 1,05 m$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (3.117).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28). La valeur de la fonction $\zeta(\eta)$ est, selon la relation (3.27) :

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,59878202 \right) - \left(\frac{2}{3} - 0,59878202 \right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,59878202 \right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,59878202 = 0,2907739 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 1,75^2 \times 0,2907739 = 0,89049505 m^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (3.29). La valeur de la fonction $\vartheta(\eta)$ est, en vertu de la relation (3.15) :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,59878202 \right) = 1,46022683$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,75 \times \frac{0,2907739}{1,46022683} = 0,34847621 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* R est, selon la relation (3.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,34847621^3}}{10^{-6}} = 651994,887$$

Par suite, selon la relation (3.117), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,89049505 \times \sqrt{0,34847621 \times 5 \cdot 10^{-4}} \times \log \left(\frac{10,04}{651994,887} \right) = 1,00226892 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\cong 1 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,23% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.5.4. Exemple d'application 3.26

Reprenons l'exemple d'application 3.25 en imposant un taux de remplissage $\eta = 2/3$.

Calculer la valeur :

- i. du coefficient n de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale y_n .

Solution

i. Puisque le taux de remplissage est $\eta = 2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement. Ainsi :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = 1,59610062$
- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = 0,33592598$
- $\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,59610062^{0,2}}{2,639 \times 0,33592598^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,3189891 m$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R}_p caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,3189891^3}}{10^{-6}} = 949727,016$$

iii. Puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (3.197), soit :

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 2,3189891^{1/6} \times \left[\frac{0,33592598}{1,59610062} \right]^{1/6}$$

$$\times \left[-\log \left(\frac{0,721}{[0,33592598 / 1,59610062]^{3/2} \times 949727,016} \right) \right]^{-16/15} = 0,00980771 m^{-1/3} s$$

Il est utile de noter que le coefficient n de *Manning*, calculé au cours de l'exemple d'application 3.25, n'a subi aucune variation notable alors le taux de remplissage η est passé de 0,60 à 2/3. Cette variation extrêmement faible du coefficient n a été mise en évidence sur la figure 3.24 (a à g).

iv. Selon la relation (3.95), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{[\mathcal{G}(\eta)]^{1/4}}{[\zeta(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,59610062^{1/4}}{0,33592598^{5/8}} \times \left(\frac{0,00980771 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 1,63171303 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre $D = 1,65 \text{ m}$. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,65^3}}{10^{-6}} = 570002,35$$

vi. Le débit maximum $Q_{\max.}$ pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (3.164) :

$$Q_{\max.} = -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,65^5} \times \log \left(\frac{8,359}{570002,35} \right) \\ = 1,56510154 \text{ m}^3 / \text{s}$$

vii. Pour le diamètre $D = 1,65 \text{ m}$, la nouvelle valeur du taux de remplissage η est, en application de la relation approchée (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{1}{1,56510154} \right)^{0,51} \right] = 0,6570223$$

La profondeur normale y_n est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,6570223 \times 1,65 = 1,08408679 \text{ m} \cong 1,1 \text{ m}$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (3.117).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28). La valeur de la fonction

$\zeta(\eta)$ est, selon la relation (3.27) :

$$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6570223 = 0,3294967$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 1,65^2 \times 0,3294967 = 0,89705476 m^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (3.29). La valeur de la fonction $\vartheta(\eta)$ est, en vertu de la relation (3.15) :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right) = 1,57681159$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,65 \times \frac{0,3294967}{1,57681159} = 0,34479043 m$$

Le nombre de *Reynolds* R est, selon la relation (3.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,34479043^3}}{10^{-6}} = 641678,211$$

Par suite, selon la relation (3.117), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,89705476 \times \sqrt{0,34479043} \times 5 \cdot 10^{-4} \times \log\left(\frac{10,04}{641678,211}\right) = 1,00285279 m^3 / s$$

$$\cong 1 m^3 / s$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,3%

seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.5.5. Exemple d'application 3.27

Reprenons l'exemple d'application 3.25 en imposant la rugosité absolue $\varepsilon = 0,0008\text{ m}$ ainsi que le taux de remplissage $\eta = 2/3$. Calculer la valeur :

- i. du coefficient n de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale y_n .

Solution

Puisque le taux de remplissage est $\eta = 2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement. Ainsi :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = 1,59610062$
- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = 0,33592598$
- $\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,59610062^{0,2}}{2,639 \times 0,33592598^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,3189891\text{ m}$

- i. Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,3189891^3}}{10^{-6}} = 949727,016$$

ii. Puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le coefficient n de *Manning* est régi par la relation (3.197), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} D^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 2,3189891^{1/6} \times \left[\frac{0,33592598}{1,59610062} \right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[-\log \left(\frac{0,0008 / 2,3189891}{19 \times [0,33592598 / 1,59610062]} + \frac{0,721}{[0,33592598 / 1,59610062]^{3/2} \times 949727,016} \right) \right]^{-16/15} \\ &= 0,01263231 m^{-1/3} s \end{aligned}$$

iii. Selon la relation (3.95), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{1/4}}{[\zeta(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,59610062^{1/4}}{0,33592598^{5/8}} \times \left(\frac{0,01263231 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 1,79416349 m$$

iv. Adoptons le diamètre $D = 1,80 m$. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 649470,587$$

v. Le débit maximum Q_{\max} pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (3.164) :

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^5} \times \log \left(\frac{0,0008 / 1,8}{3,229} + \frac{8,359}{649470,587} \right) = 1,53840838 m^3 / s \end{aligned}$$

vi. Pour le diamètre $D = 1,80 m$, la nouvelle valeur du taux de remplissage η est, en application de la relation approchée (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{1}{1,50242029} \right)^{0,51} \right] = 0,6736776$$

La profondeur normale y_n est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,6736776 \times 1,8 = 1,21261967 \text{ m} \cong 1,213 \text{ m}$$

vii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (3.117).

Puisque la nouvelle valeur du taux de remplissage η est telle que $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors l'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.56). La valeur de la fonction $\lambda(\eta)$ est, selon la relation (3.55) :

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,6736776 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,6736776) \times (0,6736776 - 1/3)} \\ &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,6736776 - 2) = 0,34059958 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 1,8^2 \times 0,34059958 = 1,10354265 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (3.59). La valeur de la fonction $\tau(\eta)$ est, en vertu de la relation (3.47) :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,6736776 - 2) = 1,61012351$$

soit :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 1,8 \times \frac{0,34059958}{1,61012351} = 0,38076535 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* R est, selon la relation (3.118) :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,38076535^3}}{10^{-6}} = 744681,595$$

Par suite, selon la relation (3.117), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,10354265 \times \sqrt{0,38076535 \times 5.10^{-4}} \times \log \left(\frac{0,0008}{14,8 \times 0,38076535} + \frac{10,04}{744681,595} \right)$$

$$= 1,00350834 m^3 / s \cong 1 m^3 / s$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré n'est que de 0,35% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.6.5.6. Exemple d'application 3.28

La conduite ovoïdale représentée par la figure 3.1 écoule le débit volume $Q = 2,75 m^3 / s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2 / s$, sous la pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,001 m$ et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 75%. Calculer la valeur :

- i. du coefficient n de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale y_n .

Solution

i. Puisque le taux de remplissage est tel que $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.145). Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Ainsi :

$$\bullet \quad \tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$$

$$\bullet \quad \lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

$$= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2)$$

$$= 0,39089728$$

$$\bullet \quad \bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left(\frac{2,75}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,23783934 \text{ m}$$

ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 3,23783934^3}}{10^{-6}} = 1566872,55$$

iii. Puisque $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors le coefficient n de *Manning* est régi par la relation (3.198), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 3,23783934^{1/6} \times \left[\frac{0,39089728}{1,76455412} \right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[-\log \left(\frac{0,001 / 2,3189891}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 1566872,55} \right) \right]^{-16/15} \\ &= 0,01318011 \text{ m}^{-1/3} \text{ s} \end{aligned}$$

iv. Selon la relation (3.97), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{[\tau(\eta)]^{1/4}}{[\lambda(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,76455412^{1/4}}{0,39089728^{5/8}} \times \left(\frac{0,01318011 \times 2,75}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 2,48474646 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre $D = 2,5 \text{ m}$. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 1063067,26$$

vi. Le débit maximum Q_{\max} pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (3.164) :

$$\begin{aligned}
 Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\
 &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left(\frac{0,001 / 2,5}{3,229} + \frac{8,359}{1063067,26} \right) = 3,55029255 \text{ m}^3 / \text{s}
 \end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre $D = 2,5 \text{ m}$, la nouvelle valeur du taux de remplissage η est, en application de la relation approchée (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{2,75}{3,55029255} \right)^{0,51} \right] = 0,74116143$$

La profondeur normale y_n est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,74116143 \times 2,5 = 1,85290358 \text{ m} \cong 1,853 \text{ m}$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (3.117).

Puisque la nouvelle valeur du taux de remplissage η est telle que $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors l'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.56). La valeur de la fonction $\lambda(\eta)$ est, selon la relation (3.55) :

$$\begin{aligned}
 \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\
 &= 0,5104589 + (0,74116143 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,74116143) \times (0,74116143 - 1/3)} \\
 &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,74116143 - 2) = 0,38517259
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,5^2 \times 0,38517259 = 2,40732869 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (3.59). La valeur de la fonction $\tau(\eta)$ est, en vertu de la relation (3.47) :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,74116143 - 2) = 1,7463591$$

soit :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,38517259}{1,7463591} = 0,55139374 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* R est, selon la relation (3.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,55139374^3}}{10^{-6}} = 1297708,74$$

Par suite, selon la relation (3.117), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,40732869 \times \sqrt{0,55139374 \times 5.10^{-4}} \times \log \left(\frac{0,001}{14,8 \times 0,55139374} + \frac{10,04}{1297708,74} \right)$$

$$= 2,7514832 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,751 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,054% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

III.7. ECOULEMENT CRITIQUE

La profondeur critique est un paramètre important qui permet de se prononcer sur le caractère fluvial ou torrentiel de l'écoulement. Lorsque la profondeur critique y_c est supérieure à la profondeur normale y_n , l'écoulement est de nature torrentielle. Dans le cas contraire, l'écoulement est fluvial.

L'écoulement critique est régi par la relation bien connue sous le nom de condition de criticité. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q^2 e_c}{g A_c^3} = 1 \quad (3.199)$$

où e_c désigne la largeur du plan d'eau (Figure 3.25) et l'indice « c » se réfère l'état critique de l'écoulement.

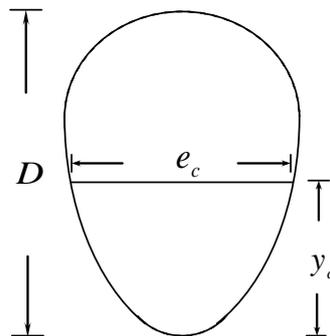


Figure 3.25 : Schéma de définition de l'écoulement critique dans une conduite de forme ovoïdale.

La largeur du plan d'eau critique e_c est régie, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η_c , par l'une des relations (3.1), (3.10) ou (3.37), tandis que l'aire de la section mouillée critique A_c est donnée par l'une des relations (3.7), (3.28) ou (3.56). Tenant compte de ces relations, la condition de criticité s'écrit, pour :

i. $\eta_c \leq 1/15$

$$\frac{\phi(\eta_c)}{[\sigma(\eta_c)\phi(\eta_c)/36]^3} \left(\frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (3.200)$$

où :

$$\phi(\eta_c) = \sqrt{\frac{4}{3}\eta_c(1-3\eta_c)} \quad (3.201)$$

Les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\phi(\eta)$ sont régies par les relations (3.3) et (3.6) respectivement.

Introduisons le débit relatif :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \quad (3.202)$$

La relation (3.200) s'écrit alors :

$$Q^* = \frac{[\sigma(\eta_c)\phi(\eta_c)/36]^{3/2}}{[\phi(\eta_c)]^{1/2}} \quad (3.203)$$

ii. $1/15 \leq \eta_c \leq 2/3$

$$\frac{\gamma(\eta_c)}{[\zeta(\eta_c)]^3} \left(\frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (3.204)$$

où :

$$\gamma(\eta_c) = 2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c \right)^2} - \frac{2}{3} \right] \quad (3.205)$$

La fonction $\zeta(\eta_c)$ est régie par la relation (3.17). La relation (3.204) permet également d'écrire que :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta_c)]^{3/2}}{[\gamma(\eta_c)]^{1/2}} \quad (3.206)$$

iii. $2/3 \leq \eta_c \leq 1$

$$\frac{\delta(\eta_c)}{[\lambda(\eta_c)]^3} \left(\frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (3.207)$$

où :

$$\delta(\eta_c) = 2\sqrt{(1-\eta_c)(\eta_c - 1/3)} \quad (3.208)$$

La fonction $\lambda(\eta_c)$ est donnée par la relation (3.55). La relation (3.207) peut se mettre sous la forme :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta_c)]^{3/2}}{[\delta(\eta_c)]^{1/2}} \quad (3.209)$$

Les relations (3.203), (3.206) et (3.209) ont été représentées graphiquement sur la figure 3.26. Elle montre que le débit relatif Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage critique η_c et tend vers l'infini lorsque $\eta_c \rightarrow 1$. La courbe obtenue a été comparée à celle de l'écoulement critique dans la conduite de forme circulaire.

En règle générale, le débit volume Q ainsi que le diamètre D de la conduite de forme ovoïdale considérée sont des paramètres connus et l'on cherche à déterminer la valeur de la profondeur critique y_c . Le problème revient donc à calculer y_c à partir de la valeur connue du débit relatif Q^* , défini par la relation (3.202). L'évaluation de la profondeur critique y_c peut se faire graphiquement en ayant recours à la figure 3.26, ou par voie de calcul itératif en utilisant l'une des relations (3.203), (3.206) ou (3.209). La valeur connue de Q^* permet le choix de la relation appropriée pour le calcul de η_c et donc de y_c . Le calcul a en effet montré que lorsque $Q^* \leq 0,00268197$, le taux de remplissage η_c est inférieur à $1/15$ et doit être évalué par la relation (3.203). Lorsque $0,00268197 \leq Q^* \leq 0,23845751$, le taux de remplissage η_c est tel que $1/15 \leq \eta_c \leq 2/3$ et doit donc être calculé en ayant recours à la relation (3.206). Pour les valeurs de Q^* telles que $Q^* \geq 0,23845751$, le taux de remplissage critique η_c est supérieur à $2/3$ et doit donc être évalué par la relation (3.209).

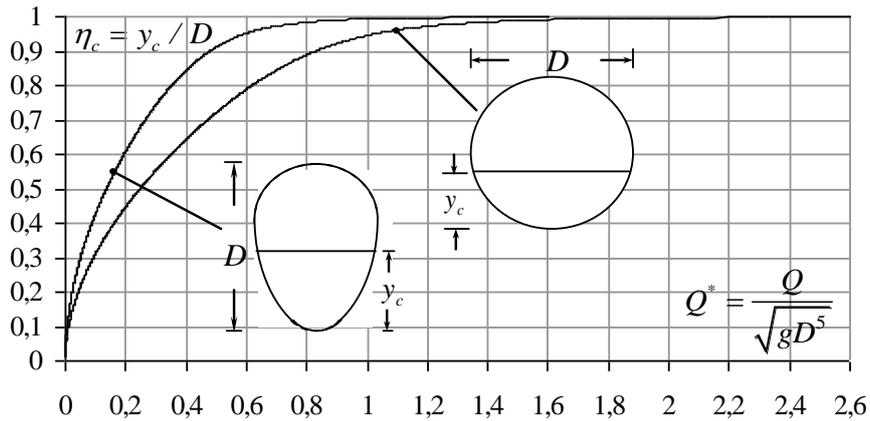


Figure 3.26 : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire.

Afin de simplifier le calcul du taux de remplissage critique η_c et donc de celui de la profondeur critique y_c , il est recommandé d'utiliser la relation approchée suivante, établie dans la large gamme pratique $1/15 \leq \eta_c \leq 0,83$ et qui correspond à $0,0027 \leq Q^* \leq 0,383$:

$$\sinh(0,7 \eta_c) = 1,0155 Q^{*0,52} \quad (3.210)$$

L'écart relatif maximal, occasionné par l'application de la relation (3.210), est inférieur à 0,5% dans toute la gamme ci-dessus définie du taux de remplissage critique η_c . La relation (3.210) permet donc d'écrire que :

$$y_c = \frac{D}{0,7} \operatorname{asinh}\left(1,0155 Q^{*0,52}\right) \quad (3.211)$$

Les écarts relatifs occasionnés par l'application de la relation approchée (3.210) sont représentés graphiquement sur la figure 3.27.

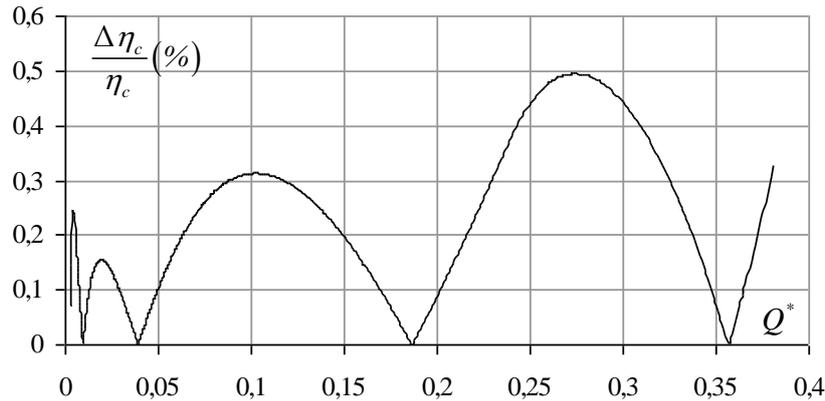


Figure 3.27 : Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (3.210) sur le calcul du taux de remplissage à l'état critique de la conduite de forme ovoïdale.

III.7.1. Exemple d'application 3.29

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 écoule le débit volume $Q = 2,2 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous la pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$ et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$. Pour le taux de remplissage $\eta = 0,65$, déterminer :

1. le diamètre D de la conduite en ayant recours à la relation de *Manning*.
2. la nature de l'écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

Solution

1.

i. Puisque le taux de remplissage $\eta = 0,65$ est compris entre $1/15$ et $2/3$, alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.142). Les fonctions $\vartheta(\eta)$ et $\zeta(\eta)$ sont données par les relations (3.15) et (3.27) respectivement. Ainsi :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) = 1,56276574$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65 = 0,32481641$$

$$\bullet \quad \bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right)^{0,4} = \frac{1,56276574^{0,2}}{2,639 \times 0,32481641^{0,6}} \times \left(\frac{2,2}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}}\right)^{0,4} = 3,22996548 m$$

ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (3.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 3,22996548^3}}{10^{-6}} = 1561160,49$$

iii. Puisque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, alors le coefficient n de *Manning* est régi par la relation (3.197), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)}\right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 3,22996548^{1/6} \times \left[\frac{0,32481641}{1,46266832} \right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[-\log \left(\frac{0,001 / 3,22996548}{[0,32481641 / 1,46266832]} + \frac{0,721}{[0,32481641 / 1,46266832]^{3/2} \times 1561160,49} \right) \right]^{-16/15} \\ &= 0,01313634 m^{-1/3} s \end{aligned}$$

iv. Selon la relation (3.95), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{1/4}}{[\zeta(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} = \frac{1,56276574^{1/4}}{0,32481641^{5/8}} \times \left(\frac{0,01313634 \times 2,2}{\sqrt{5.10^{-4}}}\right)^{3/8} = 2,4858749 m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 2,5 m$. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 1063067,26$$

vi. Le débit maximum $Q_{\max.}$ pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (3.164) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left(\frac{0,001 / 2,5}{3,229} + \frac{8,359}{1063067,26} \right) = 3,55029255 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre $D = 2,5 \text{ m}$, la nouvelle valeur du taux de remplissage η est, en application de la relation (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{2,2}{3,55029255} \right)^{0,51} \right] = 0,64492099$$

La profondeur normale y_n est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,64492099 \times 2,5 = 1,61230249 \text{ m} \cong 1,612 \text{ m}$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume Q par la relation générale (3.117).

L'aire de la section mouillée A est donnée par la relation (3.28). La valeur de la fonction $\zeta(\eta)$ est, selon la relation (3.27) :

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,64492099 \right) - \left(\frac{2}{3} - 0,64492099 \right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,64492099 \right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,64492099 = 0,32143229 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2,5^2 \times 0,32143229 = 2,00895181 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique R_h est régi par la relation (3.29). La valeur de la fonction $\vartheta(\eta)$ est, en vertu de la relation (3.15) :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - 0,64492099 \right) = 1,55260585$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,32143229}{1,55260585} = 0,51756904 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* R est, selon la relation (3.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,51756904^3}}{10^{-6}} = 1180149,21$$

Par suite, selon la relation (3.117), le débit volume Q est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,00895181 \times \sqrt{0,51756904 \times 5 \cdot 10^{-4}} \\ \times \log \left(\frac{0,001}{14,8 \times 0,51756904} + \frac{10,04}{1180149,21} \right) = 2,20839457 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,208 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est de 0,38% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

2.

i. Selon la relation (3.202), le débit relatif Q^* est :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} = \frac{2,2}{\sqrt{9,81 \times 2,5^5}} = 0,07107848$$

La valeur ainsi calculée de Q^* est telle que $0,00152 \leq Q^* \leq 0,383$, la relation approchée (3.211) est donc applicable. En outre, le taux de remplissage critique η_c doit se situer dans l'intervalle $[1/15; 2/3]$ puisque $0,00268197 \leq Q^* \leq 0,23845751$. La profondeur critique est, en vertu de la relation approchée (3.211), est :

$$y_c = \frac{D}{0,7} \operatorname{asinh} \left(1,0155 Q^{*0,52} \right) = \frac{2,5}{0,7} \times \operatorname{asinh} \left(1,0155 \times 0,07107848^{0,52} \right) = 0,90732739 \text{ m} \cong 0,91 \text{ m}$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n > y_c$.

ii. Vérifions que la condition de criticité est bien satisfaite pour la profondeur critique ainsi calculée. Le taux de remplissage critique η_c est :

$$\eta_c = y_c / D = 0,90732739 / 2,5 = 0,36293096 \cong 0,363$$

Puisque η_c appartient à l'intervalle $[1/15; 2/3]$, la condition de criticité est alors définie par la relation (3.206), dans laquelle les fonctions $\zeta(\eta_c)$ et $\gamma(\eta_c)$ sont, en vertu des relations (3.27) et (3.205) respectivement :

- $$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{4}{3}\eta_c$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right)^2}$$

$$- \frac{4}{3} \times 0,36293096 = 0,14290964$$
- $$\gamma(\eta_c) = 2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 2 \times \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 0,57217932$$

Ainsi :

$$Q^* \frac{[\gamma(\eta_c)]^{1/2}}{[\zeta(\eta_c)]^{3/2}} = 0,07107848 \times \frac{0,57217932^{1/2}}{0,14290964^{3/2}} = 0,99520365 \cong 1$$

La condition de criticité définie par la relation (3.206) est vérifiée avec un écart relatif inférieur à 0,48% seulement. La valeur approchée de la profondeur critique y_c , calculée à l'étape (i), est donc bien acceptable.

III.7.2. Exemple d'application 3.30

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 3.1 écoule le débit volume $Q = 2,4 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous la pente longitudinale $i = 4,10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$ et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$. Pour le taux de remplissage $\eta = 0,75$, déterminer :

1. le diamètre D de la conduite en ayant recours à la relation de *Manning*.
2. la nature de l'écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

Solution

1.

i. Puisque le taux de remplissage $\eta = 0,75$ est compris entre $2/3$ et 1 , alors le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est régi par la relation (3.145). Les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$

$$= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$$

Selon la relation (3.145), le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est par suite :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left(\frac{2,4}{\sqrt{9,81 \times 4,10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,20618602 \text{ m}$$

ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p à l'état plein est, par suite, selon la relation (3.120) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 3,20618602^3}}{10^{-6}} = 1380952,69$$

iii. Puisque $2/3 \leq \eta \leq 1$, alors le coefficient n de Manning est régi par la relation (3.198), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[\frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 3,20618602^{1/6} \times \left[\frac{0,39089728}{1,76455412} \right]^{1/6} \times \\ &\quad \left[-\log \left(\frac{0,001 / 3,20618602}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 1380952,69} \right) \right]^{-16/15} \\ &= 0,01318352 m^{-1/3} s \end{aligned}$$

iv. Selon la relation (3.97), le diamètre de la conduite est :

$$D = \frac{[\tau(\eta)]^{1/4}}{[\lambda(\eta)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{8/3} = \frac{0,39089728^{1/4}}{1,76455412^{5/8}} \times \left(\frac{0,01318352 \times 2,4}{\sqrt{0,0004}} \right)^{8/3} = 2,46220602 m$$

v. Adoptons le diamètre $D = 2,5 m$. Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds R_p à l'état plein est, selon la relation (3.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4,10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 950836,264$$

vi. Pour le diamètre adopté, le débit volume maximal $Q_{\max.}$ est, selon la relation (3.164) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 4,10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left(\frac{0,001 / 2,5}{3,229} + \frac{8,359}{950836,264} \right) = 3,1729831 m^3 / s \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage η est, en vertu de la relation approchée (3.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,798 \times \left(\frac{2,4}{3,1729831} \right)^{0,51} \right] = 0,72992858 \cong 0,73$$

viii. La profondeur normale est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,72992858 \times 2,5 = 1,82482146 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre adopté, le débit volume Q par la relation générale (3.117). Puisque la nouvelle valeur du taux de remplissage est comprise entre $2/3$ et 1 , alors les fonctions $\tau(\eta)$ et $\lambda(\eta)$ sont données par les relations (3.47) et (3.55) respectivement. Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,72992858 - 2) = 1,72339657$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$
 $= 0,5104589 + (0,72992858 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,72992858) \times (0,72992858 - 1/3)} -$
 $(1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,72992858 - 2) = 0,37784602$

Selon la relation (3.56), l'aire de la section mouillée A est :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,5^2 \times 0,37784602 = 2,36153763 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique R_h est, en vertu de la relation (3.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,37784602}{1,72339657} = 0,54811241 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds* R , de la relation (3.117), est donné par la relation (3.118), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 0,54811241^3}}{10^{-6}} = 1150360,42$$

Selon la relation (3.117) le débit volume Q serait donc égal à :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,36153763 \times \sqrt{0,54811241} \times 4.10^{-4}$$

$$\times \log \left(\frac{0,001}{14,8 \times 0,54811241} + \frac{10,04}{1150360,42} \right) = 2,40345684 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,403 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Il apparaît que l'écart relatif entre le débit volume ainsi calculé et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,15%, ce qui confirme la validité des calculs

effectués.

2.

i. Selon la relation (3.202), le débit relatif Q^* est :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} = \frac{2,4}{\sqrt{9,81 \times 2,5^5}} = 0,07754016$$

Le débit relatif ainsi calculé appartient bien à l'intervalle $0,00152 \leq Q^* \leq 0,383$, ce qui permet de conclure que la relation approchée (3.211) est applicable. Il apparaît également que le taux de remplissage à l'état critique η_c doit se situer dans l'intervalle $[1/15; 2/3]$, puisque $0,00268197 \leq Q^* \leq 0,23845751$. La profondeur critique est alors :

$$y_c = \frac{D}{0,7} \operatorname{asinh}(1,0155 Q^{*0,52}) = \frac{2,5}{0,7} \times \operatorname{asinh}(1,0155 \times 0,07754016^{0,52}) = 0,94838279 \text{ m} \cong 0,95 \text{ m}$$

Nous pouvons donc conclure que l'écoulement est de nature fluviale, puisque $y_n > y_c$.

ii. Vérifions si la condition de criticité est bien vérifiée pour la profondeur critique ainsi calculée. Le taux de remplissage à l'état critique est :

$$\eta_c = y_c / D = 0,94838279 / 2,5 = 0,37935312 \cong 0,38$$

Puisque η_c appartient à l'intervalle $[1/15; 2/3]$, la condition de criticité est alors définie par la relation (3.206), dans laquelle les fonctions $\zeta(\eta_c)$ et $\gamma(\eta_c)$ sont, en vertu des relations (3.27) et (3.205), respectivement :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \zeta(\eta_c) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{4}{3} \eta_c \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,37935312 = 0,15239033 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \gamma(\eta_c) = 2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c \right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 2 \times \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,37935312 \right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 0,58233984$$

Ainsi :

$$Q^* \frac{[\gamma(\eta_c)]^{1/2}}{[\zeta(\eta_c)]^{3/2}} = 0,07754016 \times \frac{0,58233984^{1/2}}{0,15239033^{3/2}} = 0,99466959 \cong 1$$

La condition de criticité définie par la relation (3.206) est vérifiée avec un écart relatif inférieur à 0,54% seulement. La valeur approchée de la profondeur critique y_c , calculée à l'étape (x), est donc acceptable.

III.8. Conclusion

Le troisième chapitre de notre mémoire a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale de hauteur D , égale au diamètre du cercle qui l'a générée. Les caractéristiques géométriques de la conduite ont été données ainsi les propriétés hydrauliques de l'écoulement, telles que la largeur du plan d'eau, le rayon hydraulique et l'aire de la section mouillée. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique de l'écoulement et dépendent ainsi du taux de remplissage de la conduite. Leur variation a été représentée graphiquement et a été comparée à celle de la conduite de forme circulaire. Nous avons noté en particulier que le rayon hydraulique atteint un maximum dont l'expression a été déterminée.

L'étude a d'abord concerné l'écoulement uniforme à coefficient de résistance constant aussi bien le coefficient C de *Chézy* que celui n de *Manning*. Selon le taux de remplissage de la conduite, l'expression du débit volume a été déterminée lorsque l'une ou l'autre des relations de *Chézy* et de *Manning* a été utilisée.

La relation de *Chézy* a permis d'introduire la notion de conductivité relative qui est $Q^* = Q / \sqrt{C^2 D^5 i}$, où i est la pente longitudinale de la conduite et Q est le débit volume. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage de la conduite, l'expression de la conductivité relative a été donnée, en particulier la conductivité relative à l'état plein dont la valeur est constante et vaut $Q_p^* = 0,22432005$. La variation de la conductivité relative en fonction du taux de remplissage η a montré une courbe à deux branches distinctes. L'une croissante et l'autre décroissante, indiquant un maximum pour la conductivité relative. Ce maximum a été déterminé pour la valeur $\eta = 0,9617$, correspondant à $Q_{\max}^* \cong 0,233792$. La relation de la conductivité relative est implicite vis-à-vis du taux de remplissage η et nous avons pu proposer une excellente relation approchée établie dans la large gamme $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ et correspondant à $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$. Cette relation permet, pour la valeur connue de la conductivité relative, la détermination du taux de remplissage et par conséquent celle de la profondeur normale y_n . Des exemples d'application ont été proposés dans le but d'illustrer la démarche à suivre pour le calcul de cette profondeur. La conductivité relative rapportée au diamètre de la conduite a été transformée pour s'écrire $Q_y^* = Q / \sqrt{C^2 i y_n^5}$. Elle a donc été rapportée à la profondeur normale y_n . La relation de Q_y^* est implicite vis-à-vis du taux de

remplissage η et nous avons alors proposé une relation approchée selon la gamme de valeurs de η . Cette relation permet de déterminer le taux de remplissage η , par suite le diamètre D de la conduite, pour les valeurs connues du débit volume Q , du coefficient C de *Chézy*, de la pente longitudinale i et de la profondeur normale y_n . Des exemples d'application ont été également proposés, illustrant les étapes de calcul.

La courbe de remplissage de la conduite considérée, traduisant la variation de $\eta(Q/Q_p)$ a été graphiquement représentée. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, l'expression de Q/Q_p a été déterminée et sa variation a été graphiquement représentée. La courbe obtenue est constituée de deux branches. L'une croissante et l'autre décroissante, indiquant un maximum pour Q/Q_p . Ce maximum correspond à $Q_{\max.}/Q_p = 1,04225$ et il a été obtenu pour $\eta = 0,962$. L'expression de Q/Q_p est implicite vis-à-vis de η et une relation approchée a été proposée dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,049 \leq Q/Q_p \leq 0,895$. Pour le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* constant, nous avons déterminé l'expression de $Q/Q_{\max.}$ et sa représentation graphique a montré deux branches, l'une croissante et l'autre décroissante, passant un maximum correspondant à $Q/Q_{\max.} = 1$ et $\eta = 0,962$.

En ayant recours à la relation de *Manning*, la conductivité relative $Q^* = nQ/(D^{8/3}\sqrt{i})$ a été exprimée, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η . La courbe de variation de Q^* passe par un maximum correspondant à $Q_{\max.}^* \cong 0,181324$, atteint pour le taux de remplissage $\eta = 0,953$. La relation de la conductivité relative Q^* est implicite vis-à-vis du taux de remplissage η et une excellente relation approchée a été déterminée dans la large gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$. D'intéressantes relations approchées ont été également proposées et qui permettent de déterminer de manière explicite le taux de remplissage η de la conduite de forme ovoïdale étudiée, et par conséquent le diamètre D de la conduite, à partir des valeurs imposées du débit volume Q , de la pente longitudinale i , de la profondeur normale y_n et du coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*.

La courbe de remplissage de la conduite pour $n =$ constante a révélé que $Q_{\max.} = 1,0632Q_p$, correspondant à un taux de remplissage $\eta = 0,953$. Dans la large gamme

$0,15 \leq \eta \leq 0,80$, une relation approchée explicite de $\eta(Q/Q_p)$ a été déterminée. Elle permet de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement. Dans la même gamme de valeurs du taux de remplissage η , une relation approchée explicite de $\eta(Q/Q_{\max})$ a été proposée.

Notre étude s'est poursuivie par l'analyse de l'écoulement à coefficient de résistance variable, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*.

La relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative ε/D , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds* R , lui-même fonction de la pente longitudinale i , du diamètre D , de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous avons donc écrit la relation fonctionnelle $C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , nous avons déterminé le paramètre adimensionnel C/\sqrt{g} . Il se présente en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein. La représentation graphique du paramètre C/\sqrt{g} , en fonction de η et de R_p , a montré que C/\sqrt{g} passe par un maximum pour $\eta \cong 0,8544$. Lorsque le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient C de *Chézy* a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). Des exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

En tenant compte de la relation générale du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006), nous avons montré que le débit volume maximal est atteint pour la profondeur $y \cong 0,955 D$. Dans la gamme $0,20 \leq \eta \leq 0,75$, nous avons pu exprimer la relation approchée explicite permettant le calcul du taux de remplissage η et, par conséquent, celui de la profondeur normale y_n .

La relation générale de la vitesse moyenne V a été exprimée en tenant compte également de la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). La vitesse relative $V^* = V/\sqrt{giD}$ a été exprimée selon la gamme de variation du taux de remplissage η . Sa représentation graphique a montré qu'elle passe par un maximum, atteint à la profondeur $y = 0,854375 D$.

En ce qui concerne le coefficient de résistance n de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel $N = D^{1/6} / (n\sqrt{g})$ a montré un minimum, atteint pour $\eta \cong 0,85438$. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale et dont l'expression a été déterminée. Lorsque le diamètre de la conduite n'est pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*. Des exemples d'application numériques ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

Notre étude s'est poursuivie par l'analyse de l'écoulement critique dans la conduite de forme ovoïdale considérée. En se basant sur la condition de criticité, le débit relatif $Q^* = Q / \sqrt{gD^5}$ a été exprimé pour chacune des gammes du taux de remplissage critique. La forme implicite du taux de remplissage critique a été levée en proposant une excellente relation approchée. Cette relation permet de calculer la profondeur critique dans la conduite de forme ovoïdale considérée.

CONCLUSION GENERALE

L'étude a eu pour objectif d'évaluer les coefficients de résistances de *Chézy* et de *Manning* dans les conduites de forme rectangulaire et ovoïdale normale, ainsi que leur variation.

Pour atteindre notre objectif, il a été nécessaire de subdiviser notre mémoire en trois grands chapitres.

Le premier chapitre a été consacré à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme dont, nous avons exposé les différentes relations actuellement en vigueur, telles que les relations de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy –Weisbach* qui constituent les relations les plus utilisées en pratique. Nous avons également rappelé les formules usuelles destinées à l'évaluation des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Colebrook*.

Le second chapitre a consisté en une étude des coefficients de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire.

En se basant essentiellement sur la relation de *Achour et Bedjaoui (2006)* et celle de *Chézy*, nous avons pu obtenir la relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Nous avons présenté cette relation en une relation adimensionnelle pour une validité générale, de type: $C/\sqrt{g} = f(\varepsilon/b; \eta; R^*)$. Les courbes de variation de cette relation montrent que si la rugosité relative ε/b augmente, elle entraîne la diminution du coefficient C/\sqrt{g} , quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* .

En comparant aussi la relation de *Achour et Bedjaoui (2006)* et celle de *Manning* pour évaluer le coefficient n de *Manning*, on obtient une relation générale pour calculer le coefficient de *Manning* qui a été présenté également sous forme adimensionnelle. La relation obtenue est de type $N = f(\varepsilon/b; \eta; R^*)$. Nous avons ensuite procédé au tracé de la variation de du nombre adimensionnel N , qui a montré que plus la rugosité ε/b augmente et plus N diminue, quelque soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Cela signifie que $1/n$ diminue ou que le coefficient n de *Manning* augmente.

Le troisième chapitre de notre mémoire a consisté en une étude approfondie de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale de diamètre générateur D . Nous avons présenté les caractéristiques géométriques de la conduite et hydraulique de l'écoulement. Leur variation a été représentée graphiquement et a été comparée à celle de la conduite de forme circulaire.

Notre étude dans ce chapitre a été subdivisée en deux grands axes :

Le premier axe a concerné l'écoulement uniforme à coefficient de résistance constant aussi bien le coefficient C de *Chézy* que celui n de *Manning*. Selon le taux de remplissage, l'expression du débit volume a été déterminée lorsque l'une ou l'autre des relations de *Chézy* et de *Manning* a été utilisée.

Le deuxième axe a concerné l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. La relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours à la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est en fonction à la fois de la rugosité relative ε/D , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds*. La représentation graphique du paramètre C/\sqrt{g} , en fonction de η et de R_p , a montré que C/\sqrt{g} passe par un maximum pour $\eta \cong 0,8544$. Lorsque le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient C de *Chézy* a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). Des exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

En ce qui concerne le coefficient de résistance n de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel $N = D^{1/6} / (n\sqrt{g})$ a montré un minimum, atteint pour $\eta \cong 0,85438$. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale et dont l'expression a été déterminée. Lorsque le diamètre de la conduite n'est pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*. Des exemples d'application numériques ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Achour B. and Bedjaoui, A., Discussion of Explicit Solutions for Normal Depth Problem, J. Hydraulic Research, IAHR, 2006, 44, No. 5, pp. 715-717.
- Achour B., *Calcul des conduites et canaux par la MMR - Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 2007, 610p.
- Bakhmeteff B.A., Feodoroff N.V., Discussion on open channel flow, Transactions, American Society of Engineers, Vol. 108, p.492-502, 1943,
- Bazin H., Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire n°41, Annales des ponts et chaussées, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, p.20-70, 1897.
- Blench T., A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity, Journal, Institution of Civil Engineers, London, Vol.1 1, n°6, p.611-612, April, 1939.
- Camp T.R., Design of sewers to facilitate flow, Sewage Works Journal, Vol.18, p.1-16, 1946.
- Chow V.T., *Open channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.
- Forchheimer P., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, p. 139-163, 1930.
- Ganguillet E., Kutter W.R., An investigation to establish a new général formula for uniform flow of water in canals and rivers, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol.21, n°1, p.6-25, n°2-3, p.46-59, 1869.
- Houk I.E., Calculation of flow in open channels, Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio, 1918.
- Keulegan G.H., Laws of turbulent flow in open channels, Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol, 21, p.707-741, December, 1938.
- Lindquist E., On velocity formulas for open channels and pipes, Transactions of the World Power Conférence, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol.1, p.177-234, 1933.
- Manning R., On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil engineers of Ireland, Vol.20, p.161-207, Dublin, 1891.
- Pavlovski N.N., "Handbook of Hydraulic", Kratkil Gidravlicheskil, Spravochnik, Gosstrolizdat, Leningrad and Moscow, 1940, 314p.*
- Powell R.W., Résistance to flow in rough channels, Transactions, American Geophysical Union, Vol.31, n°4, p.575-582, August, 1950.
- Prandtl L., On fully developed turbulence, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich, P.62-74, 1926.
- Schnackenberg E.C., Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers. Prôceeding, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, p.340-409, Wellington, 1951.
- Sinniger, R.O., Hager W.H., *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1^{ère} Edition, Suisse, 1989.
- Swamee P.K., Jain A.K., Explicit equations for pipe-flow problems, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol. 102, HY5, p.657-664, 1976.
- Toebe C., Streamflow : Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers, Proceedings, Institution of Civil Engineers,

London, Vol.4, n°3, pt. III, p.900-938, December, 1955.

Vladislavljevitch Z., Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme, Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage, New Delhi, Vol.2, rept.12, question 2, p.405-428, 1951.

Liste du tableau

Nom du tableau	Page
Tableau 1.1 : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)	23
Tableau 2.1 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b=0$	34
Tableau 2.2 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b=10^{-4}$	36
Tableau 2.3 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b=10^{-3}$	38
Tableau 2.4 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.52)	50
Tableau 2.5 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.52)	52
Tableau 2.6 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.52)	54
Tableau 3.1 : Valeurs du taux de remplissage η_o correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p	152

Liste des figures

Nom de la figure	Page
Figure 1.1 : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur	3
Figure 1.2: Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de <i>Chézy</i>	6
Figure 1.3 : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de <i>Keulegan</i>	16
Figure 1.4 : Facteur de section relatif en fonction de la profondeur normale relative pour le cas de la conduite de forme circulaire	25
Figure 1.5 : Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire selon <i>Camp (1946)</i>	25
Figure 2.1 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/b=0$	35
Figure 2.2 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/b=10^{-4}$	37
Figure 2.3 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η , pour $\varepsilon/b=10^{-3}$	39

Figure 2.4 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / b = 0$	51
Figure 2.5 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / b = 10^{-4}$	53
Figure 2.6 : Variation de N en fonction de η , pour $\varepsilon / b = 10^{-3}$	55
Figure 3.1 : Schéma de définition de la conduite ovoïdale	66
Figure 3.2 : Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale	68
Figure 3.3 : Variation du périmètre mouillé relatif P / D en fonction du taux de remplissage η	82
Figure 3.4 : Variation de la section relative A / D^2 en fonction du taux de remplissage η	82
Figure 3.5 : Variation du rayon hydraulique relatif R_h / D en fonction du taux de remplissage η	83
Figure 3.6 : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η	87
Figure 3.7 : Ecart relatif $\Delta\eta / \eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (3.70) sur le calcul du taux de remplissage η , dans la gamme $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$	89
Figure 3.8 : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η pour les cas des conduites de forme ovoïdale et circulaire	93
Figure 3.9 : Variation de $\eta(Q / Q_p)$ pour les cas des conduites de forme ovoïdale et circulaire à coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy constant	99
Figure 3.10 : Ecart relatif occasionnés par la relation approchée (3.85) dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$	100
Figure 3.11 : Variation de $\eta(Q / Q_{\max.})$ pour $C = \text{constante}$, selon les relations (3.87), (3.88) et (3.89)	102
Figure 3.12 : Ecart relatif en % occasionnés par la relation approchée (3.90) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q / Q_{\max.})$	103
Figure 3.13 : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η selon la formule de Manning-Strickler, pour le cas des conduites de formes ovoïdale et circulaire	106
Figure 3.14 : Ecart relatif en (%) occasionnés par la relation approchée (3.99) sur le calcul du taux de remplissage de la conduite de forme ovoïdale dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$	107
Figure 3.15 : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ de l'écoulement dans les conduites de formes ovoïdale et circulaire	113

Figure 3.16 : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (3.107)	115
Figure 3.17 : Variation du rapport Q/Q_p pour les conduites de forme ovoïdale et circulaire en fonction du taux de remplissage η	120
Figure 3.18 : Ecart relatifs occasionnés par la relation approchée (3.112) dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,042 \leq Q/Q_p \leq 0,918$	120
Figure 3.19 : Variation de $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire ($n = \text{constante}$)	123
Figure 3.20 : Ecart relatif (%) occasionnés par la relation approchée (3.116) dans la gamme $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,0395 \leq Q/Q_{\max.} \leq 0,864$	125
Figure 3.21 : Variation du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy en fonction du taux de remplissage $\eta = y_n/D$, selon les relations (3.126), (3.129) et (3.132)	130
Figure 3.22 : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément aux relations (3.160), (3.161) et (3.162)	151
Figure 3.23 : Variation de $\eta(V^*)$ pour diverses valeurs du nombre de Reynolds R_p à l'état plein, conformément aux relations (3.170), (3.172) et (3.174)	168
Figure 3.24 : Variation du paramètre adimensionnel N en fonction du taux de remplissage η , pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein	184
Figure 3.25 : Schéma de définition de l'écoulement critique dans une conduite de forme ovoïdale	202
Figure 3.26 : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire	205
Figure 3.27 : Ecart relatifs occasionnés par la relation approchée (3.210) sur le calcul du taux de remplissage à l'état critique de la conduite de forme ovoïdale	206

PRINCIPALES NOTIONS

g	Accélération de la pesanteur	m/s^2
\bar{A}	Aire de la section mouillée du modèle rugueux	m^2
A	Aire de la section mouillée	m^2
A_c	Aire de la section mouillée critique	m^2
\bar{b}	Largeur de base du modèle rugueux de forme rectangulaire	m
b	Largeur de base de forme rectangulaire	m
e	Largeur du plan d'eau	m
e_c	La largeur du plan d'eau critique	m
\bar{C}	Coefficient de <i>Chézy</i> du modèle rugueux	$m^{1/2}/s$
C	Coefficient de <i>Chézy</i>	$m^{1/2}/s$
\bar{f}	Coefficient de frottement du modèle rugueux	-
f	Coefficient de frottement	-
n	Coefficient de kutter	-
\bar{n}	Coefficient de Manning du modèle rugueux	$m^{-1/3}s$
n	Coefficient de Manning	$m^{-1/3}s$
Q_y^*	Conductivité relative rapportée à la profondeur normale	-
Q^*	Conductivité relative	-
Q_p^*	Conductivité relative à l'état plein	-
Q_{max}^*	Conductivité relative maximum	-
\bar{Q}	Débit volume du modèle rugueux	m^3/s
Q	Débit volume	m^3/s
\bar{D}_h	Diamètre hydraulique du modèle rugueux	m
D_h	Diamètre	m
β	Exposant	-
γ	Exposant	-
ψ	Facteur de correction des dimensions linéaires	-
K	Facteur de proportionnalité	-
F_r	Force de résistance	N
τ_o	Force tractrice unitaire	N

L	Longueur du canal	M
ρ	Masse volumique du liquide	Kg/m ³
\bar{R}	Nombre de <i>Reynolds</i> dans le modèle rugueux	-
R	Nombre de <i>Reynolds</i>	-
\bar{R}^*	Nombre de <i>Reynolds</i> modifié dans le modèle rugueux	-
R^*	Nombre de <i>Reynolds</i> modifié	-
R_p	Nombre de <i>Reynolds</i> a l'état plein	-
S_w	Pente de la surface libre	-
J	Pente de ligne de charge	-
<i>i</i>	Pente longitudinal	-
\bar{i}	Pente longitudinale du modèle rugueux	-
<i>P</i>	Périmètre mouillé	m
\bar{P}	Périmètre mouillé du modèle rugueux	m
<i>W</i>	Poids du liquide	N
ϖ	Poids spécifique du liquide	N/m ³
\bar{y}_n	Profondeur normale de l'écoulement du MMR	m
y_n	Profondeur normale de l'écoulement	m
y_c	Profondeur critique de l'écoulement	m
$\bar{\eta}$	Paramètre de forme du modèle rugueux de forme rectangulaire	-
η	Paramètre de forme de forme rectangulaire	-
R_h	Rayon hydraulique	m
$\bar{\varepsilon}$	Rugosité absolue du modèle rugueux	m
ε	Rugosité absolue	m
T	Température	⁰ C
η_c	Taux de remplissage critique	-
$\bar{\nu}$	Viscosité cinématique dans le modèle rugueux	m ² /s
ν	Viscosité cinématique	m ² /s
V	Vitesse moyenne de l'écoulement	m/s