

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département :Génie Civil et Hydraulique
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat LMD en : Génie Civil

Spécialité (Option) : Modélisation des Matériaux et Structures

**Contribution à la modélisation des plaques par
éléments finis non conformes**

Présentée par :
Sif Eddine ABDERRAHMANI

Soutenue publiquement le : 17/05/2017

Devant le jury composé de :

Dr. OUNIS Abdelhafid	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. HAMADI Djamel	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. CHEBILI Rachid	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. TATI Abdelouahab	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. KEBICHE Khelifa	Professeur	Examineur	Université de Sétif 1
Dr. NOUAOURIA M. Salah	Professeur	Examineur	Université de Guelma

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Ma mère

Mon père

Et à mes frères

Remerciement

Au terme de ce travail, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse Monsieur **HAMADI Djamal**, professeur à l'université de Biskra, qui, est resté toujours à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce travail, ainsi pour le soutien, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Je voudrais aussi remercier le Dr. **MAALEM Toufik**, pour son aide qu'il m'a apporté tout le long de cette étude.

Je remercie également les membres de jury qui ont bien voulu juger ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et remerciements à tous les enseignants de l'institut de Génie Civil et d'hydraulique de l'Université de Biskra qui ont été pour beaucoup dans notre cursus, en particulier le Dr. **ZATAR Abdallah** pour ses précieux conseils lors de ce travail.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien, leurs encouragements et leur patience tout au long de mes parcours scolaire et universitaire.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé, en particulier mon ami et mon frère : **ABDEDDAIME Mahdi**

SOMMAIRE

RESUME	I
ملخص	II
ABSTRACT	III
NOTATION	IV
LISTE DES FIGURES	V
LISTE DES TABLEAUX	VIII
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1

CHAPITRE 1

APERÇU GENERAL SUR LA METHODE DES ELEMENT FINIS

1.1. Concept de la méthode des éléments finis	6
1.2. Principes de la méthode des éléments finis	6
1.3. Étapes du calcul par éléments finis	6
1.4. Taille des éléments finis	7
1.5. Type d'éléments finis	7
1.6. Choix des éléments finis	9
1.7. Qualité d'un élément fini	9
1.8. Discrétisation d'une structure	9
1.9. Modèles d'éléments finis	11
1.9.1. Modèle déplacement	11
1.9.2. Modèle équilibre	11

1.9.3.	Modèle mixte	11
1.9.4.	Modèle hybride	11
1.9.5.	Modèle en déformation	12
1.9.5.1.	Définition	12
1.9.5.2.	Critères de convergence	12
1.9.5.3.	Avantages du modèle en déformation	12
1.9.5.4.	Eléments finis à modèles en déformation existants	13
1.9.5.5.	Procédure de développement des éléments finis basés sur le modèle en déformation	15

CHAPITRE 2

APERÇU GENERAL SUR LA THEORIE DES PLAQUES

2.1.	Introduction	19
2.2.	Généralité sur les plaques	19
2.3.	Définition d'une plaque	19
2.4.	Plaque circulaire	20
2.5.	Classification des plaques	21
2.6.	Théorie des plaques minces	21
2.6.1.	Hypothèses	21
2.6.2.	Champs de déplacement	22
2.6.3.	Champs de déformation	23
2.7	Théorie des plaques épaisses	24
2.7.1.	Hypothèses	24

2.7.2. Champs de déplacement	25
2.7.3. Champs de déformation	26

CHAPITRE 3

BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ELEMENTS FINIS NON CONFORMES DE PLAQUE

3.1. Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déplacement (ACM) pour l'étude de la flexion des plaques minces	29
3.1.1. Introduction	29
3.1.2. Calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire	29
3.2. Élément fini hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses	40
3.2.1. Introduction	40
3.2.2. Formulation variationnelle de l'élément SBH8	40
3.3. Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses	42
3.3.1. Introduction	42
3.3.2. Les équations de base de Reissner-Mindlin pour la théorie des	42
3.3.2.1. Champ de déplacement	42
3.3.2.2. Champ de déformation	43
3.3.3. Dérivation des fonctions de forme de l'élément SBRP	44

CHAPITRE 4

NOUVEL ELEMENT RECTANGULAIRE BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

4.1.	Introduction	46
4.2.	Les équations de bases de Kirchhoff pour la théorie des plaques	46
4.2.1.	Champ de déplacement	46
4.2.2.	Champ de déformation	47
4.2.3.	Conditions de compatibilité cinématique	47
4.2.4.	Les relations constitutives entre les contraintes et les déformations	48
4.3.	Dérivation des fonctions de forme et matrice de rigidité de l'élément SBRPK	48
4.4.	Validation et applications	51
4.4.1.	Plaque rectangulaire soumise à une charge concentrée	51
4.4.2.	Torsion d'une plaque carrée	54
4.4.3.	Flexion d'une plaque carrée avec diverses conditions	55
4.4.3.1.	Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	56
4.4.3.2.	Plaque Encastree sous Charge Concentree au Centre	57
4.4.3.3.	Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie	58
4.4.3.4.	Plaque encastree sous charge uniformément répartie	59
4.4.4.	Effet du cisaillement transversal sur la flèche	60
4.4.4.1.	PSA_CCC	60
4.4.4.2.	PSA_CU	60
4.4.4.3.	PE_CCC	61
4.4.4.4.	PE_CU	61

4.4.4.5.	Etude comparative entre les éléments ACM, R4, SBH8, SBRP et SBRPK	61
4.4.5.	Flexion d'une plaque carrée à deux bords adjacents encastrés aux deux autres libres	65
4.4.5.1.	Flexion de la plaque carrée sous charge concentrée	66
4.4.5.2.	Flexion de la plaque carrée sous charge uniformément répartie	68
4.4.6.	Plaque rectangulaire en porte-à-faux	69
4.5	Conclusion	71

CHAPITRE 5

NOUVEL ELEMENT SECTEUR POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

5.1.	Introduction	73
5.2.	Modélisation des structures à contour circulaire par éléments finis secteurs	73
5.3.	Déférentes approches utilisées pour le développement des éléments secteurs	75
5.3.1.	Elément de Raju et Rao	75
5.3.2.	Elément de Sabir et Salhi	76
5.3.3.	Elément de Bouzerira	77
5.3.4.	Elément de Djoudi	78
5.3.5.	Elément de Belarbi SBS4	78
5.4.	Formulations d'un nouvel élément secteur basée sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces	79
5.5.	Tests de Validation	81
5.5.1	Plaque annulaire avec charge répartie le long du cercle intérieur. Encastrement à la périphérie	82

5.5.2.	Plaque annulaire, charge répartie le long du cercle intérieur. Appui simple sur la périphérie	85
5.5.3.	Plaque annulaire en console soumise à une charge concentrée	88
5.5.4.	Plaque circulaire soumise à une charge concentrée	90
5.6.	Conclusion	92
	Conclusion générale	94
	BIBLIOGRAPHIE	97
	Annexe A1	104
	Annexe A2	107
	Annexe A3	118

RESUME

Notre thèse traite de la formulation et l'évaluation de deux éléments finis de plaque basés sur l'approche en déformation, devenue, actuellement très répandue dans la littérature. Le premier élément est de forme rectangulaire appelé : SBRPK (Strain Based Rectangulaire Plate Kirchhoff), pour l'étude de la flexion des plaques rectangulaires minces. Le deuxième élément étant de forme secteur circulaire délimité par deux rayons et deux arcs, baptisé : SBSPK (Strain Based Sector Plate Kirchhoff), pour l'étude de la flexion, cette fois ci, des plaques circulaires minces avec ouverture. Les éléments développés, possèdent chacun quatre nœuds, avec la nécessité d'avoir trois degrés de liberté par nœud(w, θ_x, θ_y), une translation transversale suivant l'axe vertical et deux rotations autour des deux axes horizontaux afin de représenter tous les mouvements spécifiques à la flexion des plaques. La validation de ces deux éléments, est réalisée en comparant les résultats obtenus aux résultats analytiques trouvés dans la littérature ainsi que ceux donnés par d'autres éléments flexionnels connus. À partir de quelques applications numériques, nous avons montré les bonnes convergence et performance des présents éléments avec l'utilisation d'un maillage très réduit.

Mots-Clés : Éléments finis, Approche déformation, Flexion des plaques, Élément rectangulaire, Élément secteur, Intégration analytique, Plaques minces.

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى تطوير عنصرين محددين اعتماداً على مبدأ التشوه الذي أصبح حالياً واسع الاستعمال. العنصر الأول مستطيل الشكل سمي SBRPK (Strain Based Rectangular Plate Kirchhoff) يستعمل لدراسة الصفائح الرقيقة تحت تأثير الانحناء. أما العنصر الثاني فهو قطاعي الشكل سمي (SBSPK) (Strain Based Sector Plate Kirchhoff)، يستعمل لدراسة الصفائح الرقيقة الدائرية الشكل بفتحات. إن كلا من العنصرين المطورين، يتكون من أربع عقد وثلاث درجات من الحرية في كل عقدة (w, θ_x, θ_y) ، انتقال خطي شاقولي ودوران حول كل من المحورين x و y على التوالي. تم التحقق من صحة عمل وفعالية العنصرين من خلال الاختبارات المعروفة في هذا المجال وذلك بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع الحلول التحليلية أو المرجعية، ونتائج العناصر الأخرى الموجودة في الأبحاث المنشورة. أظهرت نتائج الأمثلة المنجزة حصول تقارب جيد نحو الحلول المرجعية مع استخدام عدد قليل من العناصر المحددة.

الكلمات المفتاحية: العناصر المحدودة، مبدأ التشوه، انحناء الصفائح، عنصر مستطيل، عنصر قطاعي، التكامل التحليلي.

Abstract

The thesis deals with the formulation and evaluation of two plate bending finite elements based on the strain approach. The strain based approach is currently become widespread used in the literature. The first element is a rectangular in shape baptised SBRPK (strain based rectangular plate Kirchhoff), for the numerical analysis of thin plate bending. The second element is a sector one delimited by two rays and two arcs baptized SBSPK (Strain Based Sector Plate Kirchhoff), for the numerical analysis of circular thin plate bending. Each developed element has four nodes and three degrees of freedom per node (3 d.o.f./node), namely w , Θ_x and Θ_y ; transverse displacement with the normal axis, two rotations about x and y axis respectively. The Validation of the two elements is carried out by comparing their results obtained with the analytical solutions given in the literature as well as those given by other bending elements. From several numerical examples, it is shown that good convergence can be achieved with the use of only a small number of finite elements.

Keywords: Finite elements, strain based approach, plate bending, rectangular element, sector element, analytical integration.

NOTATIONS

$[ke]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[k]$	Matrice de rigidité globale
$[B]$	Matrice de déformation
$[k_0]$	Matrice de rigidité
$[A]$	Matrice des coefficients correspondant aux coordonnées de l'élément
ddl	Degrés de liberté
a, b, h	Dimensions et épaisseur de l'élément
d_i	Vecteur de déplacement nodal
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
$[F]$	Vecteur de force
$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Déplacement et rotation d'un point quelconque
x, y, z	Coordonnées du repère global
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation directes suivant x, y et z respectivement
$\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$	Déformation directes suivant r, z et θ respectivement
\int	Intégrale
$[\]$	Matrice
$[\]^T$	Matrice transposé
$[\]^{-1}$	Matrice inverse
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformation tangentielle
$\gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$	Déformation tangentielle
CT	Cisaillement transverse
M.E.F	Méthode des éléments finis

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1.

Figure 1.1	Structure type en génie civil et sa discrétisation	10
Figure 1.2	Coordonnées et points nodaux de l'élément quadrilatère "Q4SBE1"	15

Chapitre 2.

Figure 2.1	Description géométrique d'une plaque	20
Figure 2.2	Plaque anisotrope (orthotrope)	20
Figure 2.3	Cinématique de love- Kirchhoff	22
Figure 2.4	Cinématique de Reissner-Mindlin	24

Chapitre 3.

Figure 3.1	Système de coordonnées et numérotations des nœuds	29
Figure 3.2	Déplacements nodaux	30
Figure 3.3	Forces nodales	31
Figure 3.4	les rotations suivant les deux axes	33
Figure 3.5	Géométrie de l'élément SBH8	41
Figure 3.6	Élément rectangulaire de plaque à quatre nœuds, avec W, β_x et β_y les trois degrés de libertés pour chaque nœud	43

Chapitre 4.

Figure 4.1	Élément rectangulaire de plaque a quatre nœuds avec w, β_x, β_y (03d.d.l/nœud)	47
------------	--	----

Figure 4.2	plaque sous charge concentrée	51
Figure 4.3	Présentation des résultants de la flèche maximale pour une console sous charge concentrée	53
Figure 4.4	Torsion d'une plaque carrée (point F au centre de la plaque)	54
Figure.4.5	Géométrie de la plaque	55
Figure 4.6	Présentation des résultats de la flèche maximale (PSA_CCC)	56
Figure 4.7	Présentation des résultats de la flèche maximale (PE_CCC)	57
Figure 4.8	Présentation des résultats de la flèche maximale (PSA_CU)	58
Figure 4.9	Présentation des résultats de la flèche maximale (PE_CU)	59
Figure 4.10	Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PSA_CCC)	62
Figure 4.11	Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PSA_CU)	63
Figure 4.12	Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PE_CCC)	64
Figure 4.13	Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PE_CU)	65
Figure 4.14	carrée à deux bords adjacents encastres et les deux autres libres	66
Figure 4.15	Présentation des résultats de la flèche maximale ($\nu=0.3$)	67
Figure 4.16	Présentation des résultats de la flèche maximale ($\nu=0$)	68
Figure 4.17	Présentation des résultats de la flèche maximale (C.U)	69
Figure 4.18	Plaque en porte à faux soumise à (a) deux charges unitaires, (b) charge uniformément répartie	70

Chapitre 5.

Figure 5.1	les systèmes des Coordonnes et les déplacements de l'élément secteur	76
------------	--	----

Figure 5.2	Géométrie de l'élément secteur SBSPK	80
Figure 5.3	Géométrie de la plaque Circulaire	82
Figure 5.4	Plaque annulaire encastrée sous charge uniformément répartie le long du cercle intérieur	82
Figure 5.5	Exemple de maillage (2x2)	83
Figure 5.6	Convergence de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords encastrés	84
Figure 5.7	Variation de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords encastrés	85
Figure 5.8	Convergence de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords simplement appuyés	86
Figure 5.9	Variation Convergence de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords simplement appuyés	87
Figure 5.10	Plaque annulaire en console soumise à une charge concentrée	88
Figure 5.11	Convergence du déplacement W sous la charge concentrée de la plaque annulaire en console	89
Figure 5.12	Plaque circulaire soumise à une charge concentrée	90
Figure 5.13	Convergence du déplacement latéral W de la plaque circulaire à bords encastrés	91

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1.

Tableau 1.1	Types d'éléments finis	8
-------------	------------------------	---

Chapitre 4.

Tableau 4.1	Influence de l'élançement (L / h) sur la flèche maximale ($k = 5/6$)	52
Tableau 4.2	Torsion d'une plaque carrée	54
Tableau 4.3	Plaque carrée simplement appuyée sous charge concentrée au centre, convergence de la flèche maximale	56
Tableau 4.4	plaque carrée encastree sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale	57
Tableau 4.5	plaque carrée simplement appuyée sous charge uniformément répartie. Convergence de la flèche maximale	58
Tableau 4.6	plaque carrée encastree sous charge uniformément répartie. Convergence de la flèche maximale	59
Tableau 4.7	flèche normée d'une Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	60
Tableau 4.8	flèche normée d'une Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie	60
Tableau 4.9	flèche normée d'une Plaque encastree sous charge concentrée au centre	60
Tableau 4.10	flèche normée d'une Plaque encastree sous charge uniformément répartie	61
Tableau 4.11	Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	61

Tableau4.12	Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie	62
Tableau 4.13	Plaque encastree sous charge concentrée au centre	63
Tableau 4.14	Plaque encastree sous charge uniformément répartie	64
Tableau 4.15	plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L ; L=10, h=0.4, P=100, v=0.3, E=3600)	66
Tableau 4.16	plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L ; L=10, h=0.4, P=100, v=0, E=3600)	67
Tableau 4.17	plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C.U ; L=10, h=0.4, q=0.9, v=0.3, E=3600)	68
Tableau 4.18	Résultats de plaque en porte-à-faux---condition de chargement (a) (Fig. 4.18a) : $E = 1000$, $v = 0.0$, $t = 0.1$, $L = 9.00$, $H = 3.00$	70
Tableau 4.19	Résultats de plaque en porte-à-faux--condition de chargement (b) (Fig4.18b) : $E = 1000$, $v = 0.0$, $t = 0.1$, $L = 9.00$, $H = 3.00$	71

Chapitre 5.

Tableau 5.1	Convergence de la flèche pour la plaque annulaire à bords encastres et chargée uniformément suivant le cercle	83
Tableau5.2	Variation de la flèche pour la plaque annulaire à bords encastres et chargée uniformément suivant le cercle intérieur	84
Tableau5.3	Le déplacement latéral W_{max} pour la plaque simplement appuyée sous une charge uniformément répartie le long du cercle intérieur	86
Tableau 5.4	Variation de la flèche pour la plaque simplement appuyée sous une charge uniformément répartie le long du cercle intérieur	87
Tableau 5.5	Le déplacement latéral W sous la charge concentrée de la plaque annulaire en console	89
Tableau 5.6	Le déplacement latéral W pour la plaque circulaire à bords encastres soumise à une charge concentrée	91
Tableau 5.7	Erreur de la convergence du déplacement latéral de la plaque circulaire à bords encastres, sous charge concentrée	92

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Aujourd'hui, les éléments finis sont utilisés dans la plupart des domaines de l'ingénierie, depuis les calculs du rayonnement électromagnétique des antennes jusqu'à l'interaction fluides structures entre la mer et un voilier. C'est dans le cadre de la mécanique des structures que la méthode des éléments finis (MEF) a été découverte et, encore aujourd'hui, c'est dans ce domaine qu'elle est la plus utilisée et où la quantité de travaux de recherche est la plus importante.

La méthode des éléments finis connaît un développement fulgurant accompagnée par les progrès de l'informatique. Avec ce progrès, le nombre d'éléments utilisés pour l'analyse des structures est facilement gérable, ce qui a amené le succès de la méthode et sa puissance.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, puisque ces éléments peuvent être réunis de plusieurs manières et employés pour représenter les formes les plus complexes.

Les applications de la méthode des éléments finis se scindent en trois catégories, selon la nature du problème à résoudre. Dans la première catégorie, on y trouve le problème d'équilibre qui s'inscrit dans le domaine de la mécanique des solides, où on a besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique ou thermique donné, dont on trouve la majorité des applications de la MEF. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes des valeurs propres, ceux-ci, sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibrations des solides et des fluides. Dans la troisième catégorie, le facteur temps est intégré aux problèmes des deux premières catégories, les domaines d'application de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénieur, mais reste que les ingénieurs en génie civil, mécanique et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode [MAAL 07].

La méthode des éléments finis a essentiellement été mise au point pour fournir des solutions approximatives de l'analyse de milieu continu. Comme c'est souvent le cas avec les

développements originaux, il est plutôt difficile de citer une date précise à laquelle l'élément fini a été inventé, mais les racines de la méthode peuvent être retracées à deux groupes distincts, les mathématiciens appliqués et les ingénieurs. Cette méthode, telle que nous la connaissons aujourd'hui a été présentée en 1956, Hy Turner, Clough, Martin et Topp [TUR 56], a été d'abord appliquée à l'analyse des problèmes structurels d'aéronefs, qui sont considérés comme l'un des principales contributions à l'élaboration de la méthode des éléments finis. Numériquement, il avait été noté que la méthode d'élément fini mène souvent à des résultats convergents comme le nombre d'éléments est augmenté. Les premières études de convergence de la méthode des éléments finis ont été signalées par Melosh [MEL 62], dans lequel il a élaboré un critère pour assurer la convergence monotone [MEL 63]. Zienkiewicz et Cheung [ZIE 65] et Visser [VIS 65] depuis 1965 ont été les premiers à appliquer la méthode aux problèmes généraux, telle que la conduction du transfert de chaleur. Motivés par la formulation spécifique des éléments pour contrainte plane, une grande variété d'éléments ont été élaborés, y compris les éléments de flexion, des éléments courbés et le concept iso paramétrique ont été introduits [FEL 66, IRO 68]. Une fois cela avait été établie aux fins de l'analyse élastique statique linéaire, l'attention s'est tournée vers les phénomènes spéciaux tels que : la réponse dynamique, le flambage et la non-linéarité des matériaux. Ces événements ont été suivis par une période de "développement plutôt intensif d'objectif général" programmes informatiques destinés à mettre les capacités de la méthode dans les mains du praticien. Avec le développement des ordinateurs haute vitesse, l'application de la méthode des éléments finis a aussi progressé à un taux très impressionnant. Par la suite dans une décennie, les potentialités de la méthode pour la solution de différents types de problèmes de génie et sciences appliquées ont été reconnues et de nombreux ouvrages ont été écrits sur la méthode des éléments finis, les quatre éditions des livres rédigés par Zienkiewicz [ZIE 88], reçu la diffusion dans le monde entier. Au cours de la même période un certain nombre de revues ont consacré la plupart de leurs pages à la méthode des éléments finis. Sur le côté développement de nombreux chercheurs continuent d'être préoccupés par le problème de la formulation de nouveaux éléments et la poursuite du développement d'algorithmes améliorés pour les phénomènes spéciaux. Dans le même temps, une nouvelle approche des éléments a été développée à l'université de Cardiff (U.K), dénommée l'approche en déformation lequel des informations sera donnée tout au long de cette thèse. Au sein de tous ces progrès, la méthode des éléments finis est aujourd'hui considérée comme l'un du bien établis et des outils d'analyse commodes par les ingénieurs et scientifiques appliqués. Les programmes pour l'analyse des éléments finis sont maintenant largement dispersés dans la pratique. La

disponibilité de ces programmes a un coût modeste des comptes d'acquisition pour l'abondance de l'application pratique de la méthode.

Objectifs de la thèse

L'analyse numérique des plaques minces en flexion par la méthode des éléments finis a connu ces dernières années une évolution considérable. La formulation des éléments ne se limite pas à l'utilisation du champ des déplacements, mais à l'utilisation, dès le départ du champ de déformation, il s'agit bien sûr de l'approche en déformation. Nos objectifs dans cette thèse sont le développement de nouveaux éléments basés sur l'approche en déformation, l'un rectangulaire baptisé **SBRPK** (Strain Based Rectangulaire Plate kirchhoff), l'autre secteur, le **S BSPK** (Strain Based Sector Plate Kirchhoff) pour l'étude de la flexion des plaques minces respectivement rectangulaires et circulaires avec ouvertures.

Plan de la thèse

Pour aboutir à ces objectifs, on structure notre travail en cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré à une présentation générale de la M.E.F. Le second chapitre concerne la présentation des théories des plaques. Le troisième chapitre présente une synthèse bibliographique des éléments finis non conformes de plaque. Le quatrième chapitre présente la formulation d'un nouvel élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces, la prise en considération de l'effet du cisaillement transversal, avec la présentation des tests de validations et quelques applications. Le cinquième chapitre décrit un nouveau élément fini, l'élément secteur flexionnel (S BSPK), dans cette partie nous avons développé la formulation de l'élément pour la modélisation des plaques minces circulaires avec ouvertures, basé sur l'approche en déformation, avec la présentation des tests de validations. A la fin de cette thèse, une conclusion générale et recommandation liées à l'extension de l'approche utilisée.

CHAPITRE 1

APERÇU GENERAL SUR LA METHODE DES ELEMENT FINIS

Chapitre 1

Aperçu général sur la méthode des éléments finis

1.1. Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés « Eléments finis », le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage de tous les éléments [ZIE 91].

1.2. Principes de la méthode des éléments finis

- La méthode des éléments finis (MEF) est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds
- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.
- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.
- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

1.3. Étapes du calcul par éléments finis

Les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes.

1. Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage).
2. Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[ke]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{ue\}$ et les forces $\{fe\}$ appliquées aux nœuds :

$$[ke] \{ue\} = \{fe\}$$

3. Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
4. Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.
5. Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds.
6. Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations, déplacements et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

1.4. Taille des éléments finis

En général, plus le maillage est fin plus les résultats obtenus sont meilleurs, mais en même temps un grand effort de programmation est requis. Le nombre d'éléments utilisés sera en fonction du type de la structure à analyser, généralement dans les régions où les contraintes varient rapidement les éléments requis sont plus importants que dans les régions où elles varient graduellement. Cependant pour les éléments complexes, les maillages grossiers donneront des résultats aussi bons que ceux des maillages fins ayant des éléments simples.

1.5. Type d'éléments finis

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement : ils sont groupés en quatre classes [BAT 90] :

- 1- les contraintes planes ; les déformations planes ; axisymétriques (problème à deux dimensions).
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides tridimensionnels.

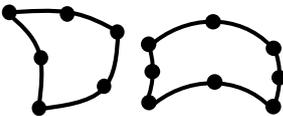
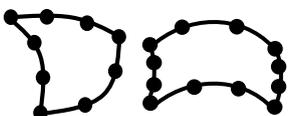
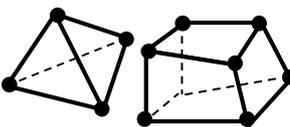
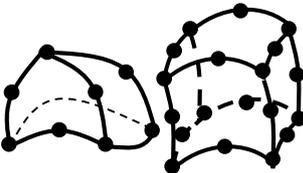
Les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées :

- ✓ **Les éléments unidimensionnels (1D) :** Sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modéliser les raidisseurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.
- ✓ **Les éléments bidimensionnels (2D) :** Élasticité plane : (déformation ou contrainte Plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou quadrangulaire.

✓ **Les éléments tridimensionnels (3D)** : élément de volume, ou coques épaisses (Tableau 1.1)

✓ **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique.

Tableau 1.1 : Types d'éléments finis [BAT 90]

Eléments	Linéaires	paraboliques (quadratiques)	Cubiques
Unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			

1.6. Choix des éléments finis

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles [FRE 01] :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...) ;
- Convergence (critères et taux) ;
- Degré (des divers champs) ;
- Nœuds et inconnues aux divers nœuds ;
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres ;
- Performances et limitations.

1.7. Qualité d'un élément fini

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes :

- Aucun défaut de base.
- Convergence rapide.
- Bonne précision.
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable.
- Vecteurs forces consistants.
- souplesse d'emploi.
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles.
- Dérivation théorique simple et claire.
- Programmation claire et efficace.

1.8. Discrétisation d'une structure

L'opération de discrétisation implique essentiellement deux choix : l'un porte sur le type de grandeur à discrétiser, soit plus explicitement sur le type d'élément fini à utiliser, l'autre sur la finesse de cette discrétisation en liaison avec le maillage [BEL 00].

Le choix d'un maillage adapté à une structure particulière doit être, dans la mesure du possible basé sur les résultats des expériences antérieures. Si cela n'est pas possible, alors il faudra étudier la structure pour différents maillages pour tester le taux de convergence.

De plus, le type d'élément utilisé dans la modélisation a une considérable sur la précision de la solution, il doit être choisi avec précaution.

Les éléments les plus utilisés en pratique sont illustrés sur la figure 1.1.

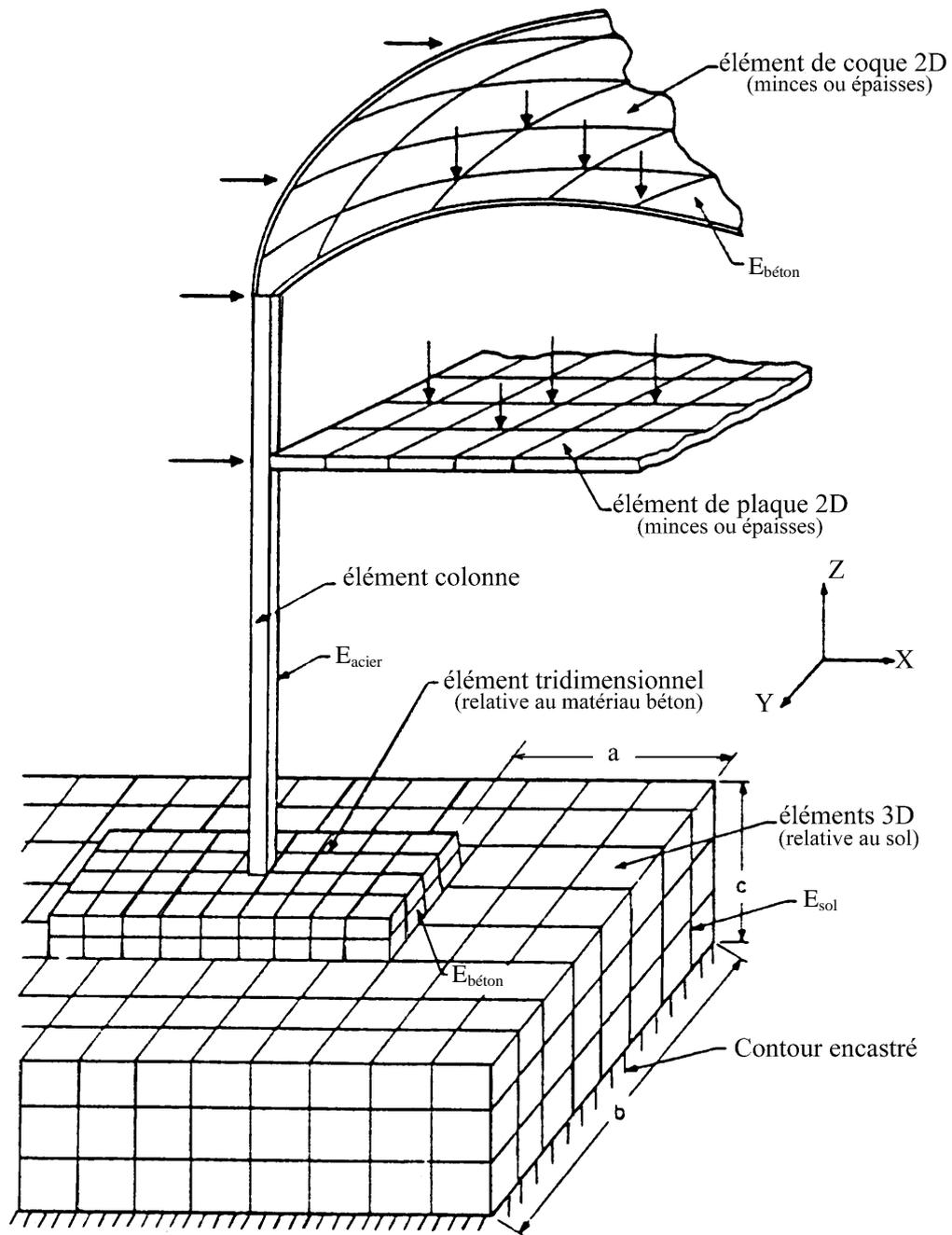


Figure 1.1 : Structure type en génie civil et sa discrétisation [BAT 90]

1.9. Modèles d'éléments finis

1.9.1. Modèle déplacement

Ce modèle est le plus connu, le plus développé et le plus populaire. Les éléments finis dans cette catégorie sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendue à tout l'élément. Donc les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

1.9.2. Modèle équilibre

Le modèle en équilibre n'a pas connu le même succès que le modèle en déplacement. Contrairement au précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est par contre sommaires.

Ce modèle est rarement employé en pratique, car il conduit en général à qualité égale à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

1.9.3. Modèle mixte

Si on combine les deux modèles précédents, on peut avoir des champs mixtes (déplacement, déformation, contrainte) qui sont considérés ici, ce qui rend la formulation, ou la mise au point longue et couteuse ; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité, on utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement.

1.9.4. Modèle hybride

Ce Modèle qui peut être défini par deux interpolations indépendantes, l'une portant sur le champ intérieur de l'élément, l'autre sur le champ décrivant la frontière, les paramètres inconnus du champ intérieur sont exprimés en fonction des paramètres nodaux de champ de bord, on cherche à minimiser la différence entre les deux champs, ces derniers peuvent être du même type (déplacement - déplacement) ou de types différents (déplacement - contrainte). En général ce modèle donne des résultats meilleurs que le modèle déplacement surtout au niveau des contraintes.

1.9.5. Modèle en déformation

1.9.5.1. Définition

Un élément basé sur le modèle en déformation signifie que sa formulation s'obtient en intégrant un champ de déformation défini auparavant, dont les fonctions sont indépendantes. Cette idée qui a, fait sa gloire est basée sur un calcul exact des termes représentant les modes rigides, les autres composantes du champ de déplacement sont basées sur l'intégration de présumées fonctions indépendantes de déformation et le tout vérifie les équations de compatibilités :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (1.1)$$

Les termes des polynômes des champs des déplacements sont d'un ordre élevé malgré la non introduction de degrés de liberté supplémentaires ni de nœuds intermédiaires. Les éléments basés sur la dite approches sont non-conformes mais conduisent généralement à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de d.d.l.

1.9.5.2. Critères de convergence

Un des critères principaux pour qu'un élément fini soit validé, pour une application générale dans la mécanique des structures, est qu'il soit en mesure de représenter les modes de corps rigides et ceux des déformations constantes, la représentation adéquate de ces modes est une condition nécessaire pour qu'on ait une bonne précision et des propriétés de convergence.

Donc, lorsqu'une théorie imprudente est employée pour le développement d'un élément fini, de faux modes de corps rigides et de déformation peuvent apparaître.

1.9.5.3. Avantages du modèle en déformation

L'utilisation du modèle en déformation apporte de nombreux avantages en termes de comportement des structures, en effet, on tire profit des bonnes adaptations pour la description exacte des mouvements : corps rigides et déformations constantes. Ainsi, les éléments développés permettront d'augmenter la performance des résultats, avec seulement un nombre limité d'éléments, les avantages des éléments à modèle en déformation sont [BEL 99], [HAM 06] :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence, liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires

1.9.5.4. Eléments finis à modèles en déformation existants

L'approche en déformation a été appliquée par Sabir et Ashwell [ASH 71], pour développer une nouvelle classe des éléments pour les problèmes d'élasticité plane dans des coordonnées cartésiennes, ensuite un élément fini de coque cylindrique par Ashwell (1972). L'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant pour l'analyse d'un cylindre pincé court à bords libres. Les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes [ASH 72].

Sabir (1983) a appliquée l'approche en déformation pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes [SAB 83a].

Dans la même période, la grande innovation à l'époque était l'introduction de la rotation dans le plan (drilling rotation) par Sabir et Chow et pour l'analyse du flambement des panneaux plans avec ouverture circulaire et carrée [SAB 83 b]. L'année suivante, Sabir a utilisé les mêmes éléments pour l'analyse des voiles avec des ouvertures [SAB 84]. L'attention s'est focalisée ensuite sur le développement et l'amélioration des éléments rectangulaires et triangulaires (SBRIER, SBTIEIR), ayant des rotations dans le plan au niveau des nœuds et les résultats obtenus sont très satisfaisants avec un nombre réduit d'éléments [SAB 85a]. Durant la même année, l'analyse des structures présentant des formes circulaires et des éléments secteurs en coordonnées polaires sont aussi développés [SAB 85b]. En suite, et toujours avec les éléments secteurs présentant deux degrés de liberté par nœud (2 d.d.l.) et pour l'analyse des problèmes en élasticité plane utilisant les coordonnées polaires [SAB 86]. Durant la même année, Bouzira a développé un élément secteur avec incorporation des rotations dans le plan (12 ddl/ élément) [BOUZ 86]. Cet élément fut modifié et amélioré par Djoudi [DJOU 90].

Belarbi et Charif ont développé un élément fini secteur basé sur le modèle de déformation avec la rotation dans le plan [BEL 98], l'année suivante, ces mêmes auteurs ont développé un élément fini hexaèdre « SBH8 » et basé sur l'approche en déformation [BEL 99]. Cet élément

composé de huit nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (u , v et w) a été utilisé pour l'étude des plaques minces et épaisses et les résultats obtenus sont très encourageants.

Les nouvelles générations s'occupant de ce modèle se sont vues frayer des chemins [DJO 03] dans les domaines non linéaires et ceux des vibrations des coques cylindriques [DJO 04a], Dans la même période, Djoudi et Bahai se sont ensuite intéressés à l'analyse des vibrations des panneaux cylindriques avec ouvertures et l'influence de ces dernières sur le comportement dynamique des structures citées [DJO 04b]. Belarbi et Maalem ont développé un nouvel élément avec une condensation statique pour l'élasticité plane [BELA 05]. Belounar et Guenfoud ont formulé un nouvel élément pour la flexion des plaques épaisses [BELO 05], et dans la même année Belarbi et Bourezane ont développé un élément secteur pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane. Après cela, en 2007, A.I. Mousa et M.H. El Naggar ont développé un nouvel élément fini rectangulaire sphérique basé sur la formulation des coques surbaissées [MOU 07], les résultats obtenus sont intéressants. Après trois années, Hamadi et Maalem [HAM 10] travaillent sur le développement des éléments tridimensionnels avec condensation. Les performances de l'approche en déformation se multiplièrent et avec elles les performances des éléments tridimensionnels furent résumées par Maalem [MAAL 11]. En 2011, Bourezane a développé un élément pour la modélisation des coques [BOU 11]. Profitant des bonnes performances de la technique de condensation statique appliquée aux éléments de l'approche en déformation et durant la même année, Himeur et Guenfoud ont développé un élément fini flexionnel triangulaire doté d'un quatrième nœud fictif basé sur l'approche en déformation [HIM 11]. En 2013 Rebiai et Belounar ont développé un nouvel élément fini avec rotation dans le plan pour les problèmes statiques linéaires et non linéaires. L'année 2014, Belounar et Guerraiiche ont développé un nouvel élément fini 3D à 9 nœuds basés sur l'approche en déformation, formulé pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques minces et épaisses [BELO 14].

Ensuite, en 2015, l'utilisation de la fonction des contraintes d'Airy par Himeur et al [HIM 15] a permis l'apparition d'un nouvel élément triangulaire possédant un nœud fictif et une rotation dans le plan pour la modélisation des poutres en flexion [HIM 15].

Récemment, en 2016, Hamadi et al ont développé deux éléments ; le premier élément fini pour l'analyse linéaire des structures en coque mince [HAM 16a], et le deuxième pour les problèmes de l'élasticité plane [HAM 16b], ces éléments sont très performants. Et la même année, Meguelatti et Maalem ont aussi développé un nouvel élément rectangulaire avec quatre nœuds au coin et possédant deux nœuds fictifs, chaque nœud a deux degrés de liberté de translation, en tenant compte de l'utilisation de la technique de double condensation statique [MEG 16].

1.9.5.5. Procédure de développement des éléments finis basés sur le modèle en déformation [HAM 16b]

Pour illustrer la procédure de développement des éléments finis basés sur le modèle en déformation, en exposant comme exemple l'élément **Q4SBE5** [HAM 16b], qui est un élément quadrilatère avec quatre nœuds d'angle et un nœud central, chaque nœud dispose de deux degrés de liberté. Ainsi, le champ de déplacement devrait contenir dix constantes indépendantes. La figure 1.2 montre la géométrie de l'élément "Q4SBE5" et les déplacements nodaux correspondants.

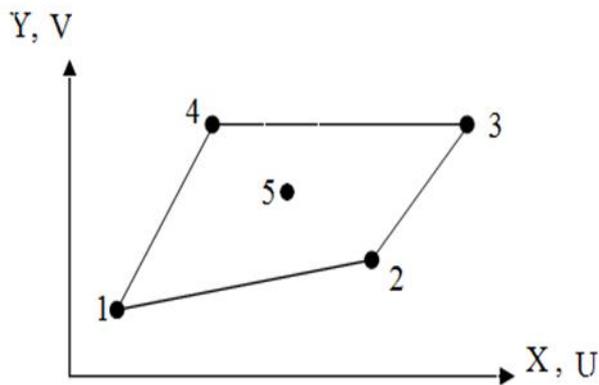


Figure 1.2 : Coordonnées et points nodaux de l'élément quadrilatère "Q4SBE5"

Les trois composants du champ de déformation à un point quelconque sont donnés par l'équation (1.2)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad (1.2)$$

U, V : Les composants des déplacements respectivement dans les directions X et Y.

Les équations (1.2) doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps rigide.

Donc, on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

L'intégration de (1.3) permet d'obtenir une solution particulière :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 y \\ V = a_2 + a_3 x \end{cases} \quad (1.4)$$

Les déformations dans l'équation (1.2) doivent satisfaire une équation additionnelle appelée l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.5)$$

L'équation (1.3) donne les trois composants qui représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide et exige trois constantes indépendantes (a_1, a_2, a_3).

Ainsi il reste sept constantes ($a_4, a_5 \dots \dots a_{10}$) pour représenter approximativement la déformation dans l'élément.

Ces sept constantes indépendantes sont réparties comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_4 + a_5 y + a_9 x \\ \varepsilon_y = a_6 + a_7 x + a_{10} y \\ \gamma_{xy} = -a_5 x R - a_7 y R + a_8 - a_9 H y - a_{10} H x \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{Avec : } H = \frac{2}{(1-\nu)} \quad ; \quad R = \frac{2\nu}{(1-\nu)}$$

Ces déformations données par les équations (1.6) satisfont l'équation de compatibilité (1.5) et les équations bidimensionnelles d'équilibre (1.7 a) et (1.7 b)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.7b)$$

En intégrant les équations (1.6) nous obtenons :

$$\begin{cases} U = a_4x + a_5xy - a_7y^2 \frac{(R+1)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{(x^2-Hy^2)}{2} \\ V = -a_5x^2 \frac{(R+1)}{2} + a_6y + a_7xy + a_8 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{(y^2-Hx^2)}{2} \end{cases} \quad (1.8)$$

Le champ de déplacement final pour l'élément **Q4SBE5** est obtenu par l'addition de l'équation (1.4) et (1.8) come suit :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy - a_7y^2 \frac{(R+1)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{(x^2-Hy^2)}{2} \\ V = a_2 + a_3x - a_5x^2 \frac{(R+1)}{2} + a_6y + a_7xy + a_8 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{(y^2-Hx^2)}{2} \end{cases} \quad (1.9)$$

CHAPITRE 2

APERÇU GENERAL SUR LA THEORIE DES PLAQUES

Chapitre 2

Aperçu général sur la théorie des plaques

2.1. Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans les constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans l'industrie sous-marine, aérospatial, dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,), etc. tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

2.2. Généralité sur les plaques

Il existe différentes configurations de plaques. Dans la littérature, les plaques sont très souvent classées selon leur géométrie (plaque rectangulaire, circulaire), selon les sollicitations subies (charges ponctuelles, réparties), mais également selon leur comportement type (membrane, flexion) et la prise en compte ou non du cisaillement transverse. Pour ce dernier aspect, on distingue les plaques sans cisaillement (souvent minces et homogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Love-Kirchhoff, et les plaques prenant en compte le cisaillement (souvent épaisses et/ou hétérogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Hencky- Mindlin [DRA 10].

2.3. Définition d'une plaque

On appelle plaque tout corps plan ou prismatique de hauteur "h" (épaisseur) plus petite en comparaison avec les deux autres dimensions longueur "L" et largeur " b" (Fig. 2.1).

En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc. Si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la plaque sont différentes selon les directions, la plaque est dite anisotrope (Fig. 2.2).

Dans une plaque on trouve :

Le plan moyen "plan médian, ou feuillet neutre" : plan situé à équidistance entre les faces d'équation $z = 0$ (équivalent de la ligne moyenne des poutres).

La fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian ou à un endroit (x, y) donné, elle a pour direction z .

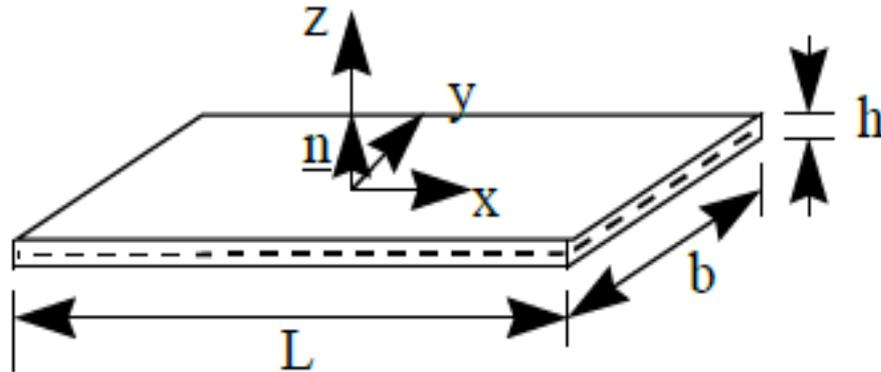


Figure 2.1 : Description géométrique d'une plaque

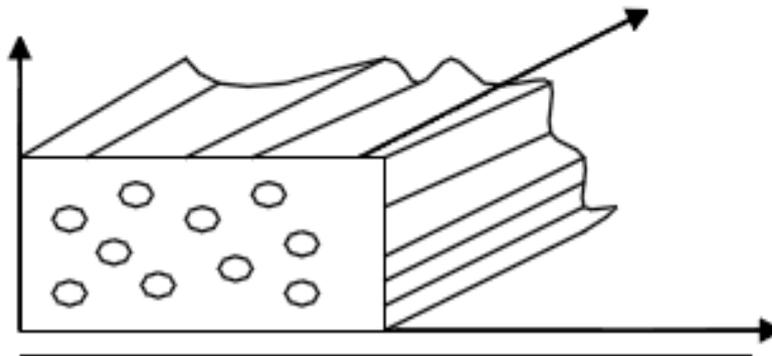


Figure 2.2 : Plaque anisotrope (orthotrope)

2.4. Plaque circulaire

Les plaques circulaires sont courantes dans de nombreuses structures telles que les couvertures de buses, les fermetures d'extrémité dans les récipients sous pression, membranes de pompes, les disques de turbine, et les cloisons dans les sous-marins et avions, etc. Lors de l'analyse des plaques circulaires, il est commode d'exprimer les équations différentielles régissant, en coordonnées polaires. Cela peut être facilement accompli par une transformation de coordonnées [TIM 61].

2.5. Classification des plaques

- La théorie de Henky-Mindlin relative aux plaques épaisses s'applique quand les rapports dimensions-épaisseur sont compris entre 4 et 20 ($4 \leq L/h \leq 20$).

- La théorie de Kirchhoff relative aux plaques minces, est applicable lorsque le rapport de la plus petite de leurs dimensions sur l'épaisseur est supérieur ou égal à 20 ($L/h > 20$).

L : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y).

h : est l'épaisseur de la plaque

L/h : est le facteur d'élanement de la plaque

2.6. Théorie des plaques minces

La théorie des plaques minces énoncée par Love [LOV 88] sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli.

2.6.1. Hypothèses

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent celles à deux dimensions adoptées pour les poutres sans déformation sous l'effort tranchant. (Fig.2.3)

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle quelque soit z .

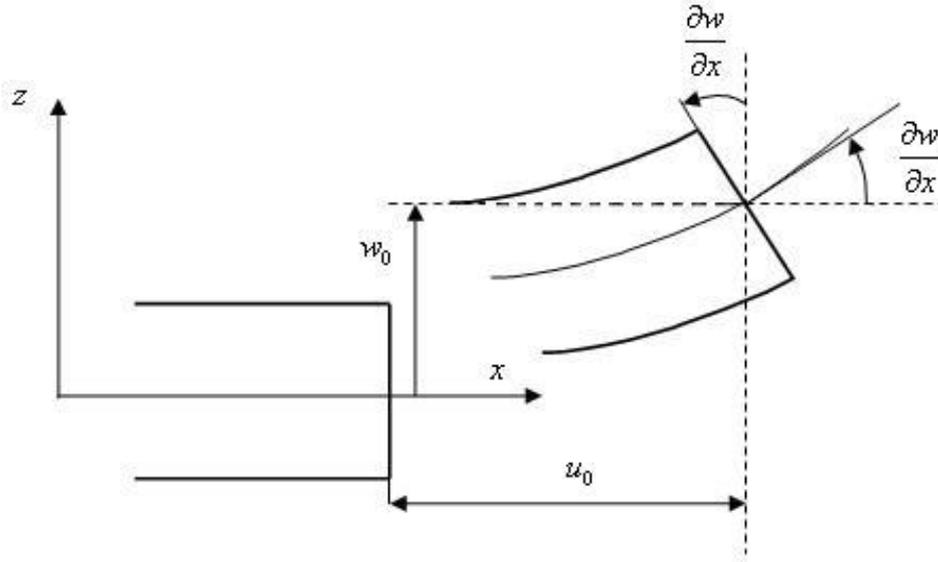


Figure 2.3 : Cinématique de love- Kirchhoff

2.6.2. Champs de déplacement

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.1)$$

Avec :

u_α : Le déplacement de membrane dans la direction

w : La flèche de la plaque

w_α : La rotation due à la flexion (sans cisaillement)

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable, c'est le déplacement transverse.

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = W(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

2.6.3. Champs de déformation

D'après la définition du tenseur des déformations, les équations des déformations sont données comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_y - \theta_y) = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\theta_x + \theta_x) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

D'autre part, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (2.5)$$

L'équation précédente peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

2.7.2. Champs de déplacement

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen, si θ_x et θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe z, ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z \cdot \phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.7)$$

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

u_α : Le déplacement de membrane dans la direction

w : Le déplacement transversal

$\beta_x(\theta_y)$: la rotation du plan xy autour de y

$\beta_y(-\theta_x)$: la rotation du plan xy autour de x

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes. Cette description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs.

Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

2.7.3. Champs de déformation

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

Et par ailleurs, ε_{xz} et ε_{yz} ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.11)$$

On ne peut donc négliger le cisaillement. Le vecteur des courbures ne peuvent plus se simplifier et restent comme suit :

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Et l'on a toujours

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = z \cdot k \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = z \cdot \vec{\chi} \quad (2.15)$$

➤ **Efforts résultants de membrane :**

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (2.16)$$

➤ **Moments de flexions :**

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz \quad (2.17)$$

➤ **Efforts tranchants :**

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, \quad T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz, \quad (2.18)$$

CHAPITRE 3

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ELEMENTS FINIS NON CONFORMES DE PLAQUE

Chapitre 3

Synthèse bibliographique sur les éléments finis non conformes de plaque

3.1. Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déplacement (ACM) pour l'étude de la flexion des plaques minces [MEL 61], [ROC 79]

3.1.1. Introduction

On présente dans ce paragraphe la formulation de l'élément fini « ACM », utilisé pour l'analyse numérique des problèmes de flexion des plaques, basé sur le modèle en déplacement. Les fonctions d'interpolation sont tirées des termes du triangle de Pascal (pyramide de Pascal en 3D), donc le nombre total des constantes indépendantes est égal au nombre de degré de liberté de l'élément.

3.1.2. Calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire

Le calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire suit les sept étapes bien connues en élément fini.

- ✓ **Etape 1 : choisir un système de coordonnées convenables et numéroté les nœuds.**

Le système de coordonnées et la numérotation des nœuds pour la flexion des plaques sont représentés sur la figure 3.1.

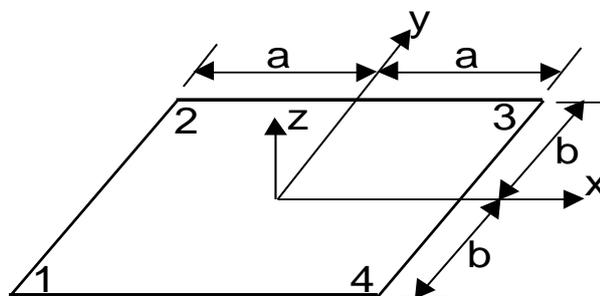


Figure 3.1 : Système de coordonnées et numérotations des nœuds

Chapitre 3 : Synthèse bibliographique sur les éléments finis non conformes de plaque

L'axe des z ayant été pris normal au plan de la plaque. Dans le cas de la flexion des plaques, l'élément à trois degrés de liberté en chaque nœud, c'est-à-dire deux rotations et la flèche transversale. La déformation latérale est représentée par w , la rotation autour de l'axe des x par θ_x et celle autour de l'axe des y par θ_y .

Les directions positives de ces rotations sont définies selon la règle du tire-bouchon.

L'élément a alors un total de douze degrés de liberté (Fig. 3.2). Les moments et les forces correspondantes consistent en deux moments M_x et M_y et une force de cisaillement F_z en chaque nœud. Les déplacements au nœud 1 peuvent être écrits de la façon suivante :

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

De même pour les forces et les moments correspondant au nœud 1 :

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z1} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

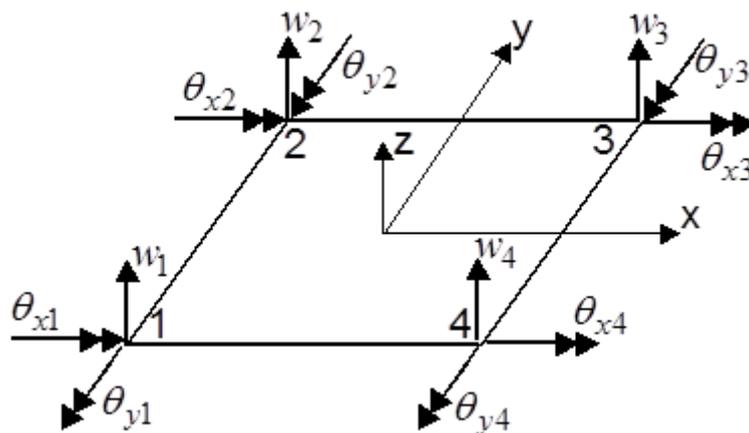


Figure 3.2 : Déplacements nodaux

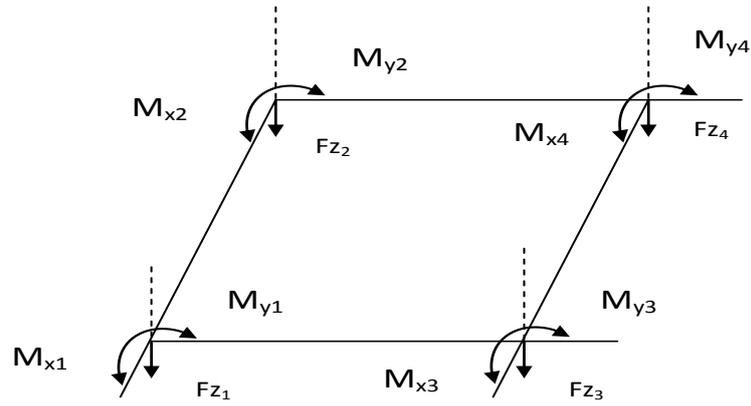


Figure 3.3 : Forces nodales

De telle sorte que les vecteurs complets des forces et des déplacements pour l'élément s'écrivent :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \dots \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \\ \dots \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_3 \\ \dots \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{F}^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z1} \\ \dots \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ F_{z2} \\ \dots \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ F_{z3} \\ \dots \\ M_{x4} \\ M_{y4} \\ F_{z4} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité de l'élément est carrée d'ordre 12.

$$[\mathbf{F}^e] = [\mathbf{K}^e] \{\delta^e\} \quad (3.4)$$

✓ **Etape 2 : Choisir la fonction de déplacement $f(x, y)$ qui définit le déplacement**

$\delta(x, y)$ en chaque point de l'élément.

Dans le cas de la flexion des plaques où les flèches sont petites ; l'état des déplacements en chaque point de l'élément peut être représenté par trois composantes :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Les deux pentes θ_x et θ_y sont reliées au déplacement latéral w par les expressions :

$$\theta_x = +\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.6)$$

Puisque l'élément a douze degrés de liberté, on doit avoir douze coefficients indéterminés dans le polynôme qui représente w . L'équation suivante donne une fonction convenable.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} y^3 \quad (3.7)$$

La fonction de déplacement donne les expressions suivantes pour les rotations :

$$\theta_x = +\frac{\partial w}{\partial y} = (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2) \quad (3.8)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3) \quad (3.9)$$

Il faut maintenant vérifier que cette fonction assure la continuité des flèches et des pentes de la solution. Considérons un bord de l'élément. Par exemple le bord 1-2 où x est constant et égal à zéro.

Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord figure (Fig. 3.4), Sont donnés à partir de l'équation 3.10 par :

$$\begin{cases} w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ \theta_x = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2) \\ \theta_y = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3 \end{cases} \quad (3.10)$$

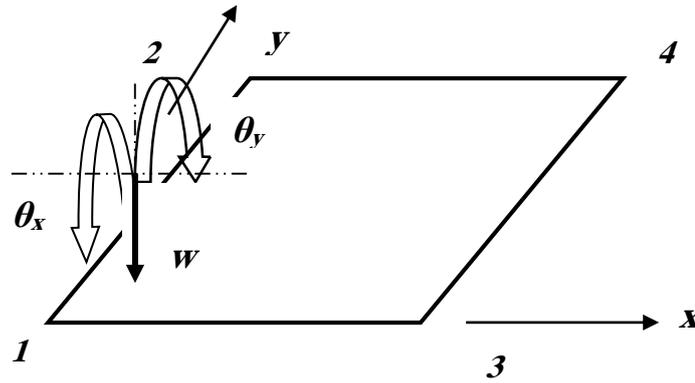


Figure 3.4 : Les rotations suivant les deux axes

En considérant les conditions aux extrémités de ces bords, c'est-à-dire aux nœuds 1 et 2 quand $y = 0$ (nœud 1),

$$\begin{cases} w = w_1 = \alpha_1 \\ \theta_x = \theta_{x1} = -\alpha_3 \\ \theta_y = \theta_{y1} = \alpha_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Et quand $y = b$ (nœud 2),

$$\begin{aligned} w &= w_2 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3 \\ \theta_x &= \theta_{x2} = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2) \\ \theta_y &= \theta_{y2} = \alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ainsi on dispose seulement de six équations pour obtenir les huit coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}$) qui ne peuvent donc être déterminés. Cependant un examen approfondi montre que w et θ_x contiennent quatre coefficients identiques ($\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}$) tandis que θ_y contient les quatres autres coefficients ($\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{12}$).

Puisque quatre des conditions sur la frontière se rapportent à w et θ_x , on a un nombre suffisant d'équations pour calculer les coefficients reliés à ces quantités et on peut exprimer w et θ_x en fonction des déplacements nodaux. Les deux équations restantes ne suffisent pas pour déterminer les quatres inconnues dans θ_y . Bien qu'il soit clair que le déplacement latéral w et la rotation le long du bord θ_x sont complètement définis par les mouvements des extrémités, la rotation normale au bord θ_y n'est pas définie de façon unique. Puisque les mouvements des

extrémités sont compatibles, cela signifie que la continuité de w et θ est assurée le long des bords où x est constant, mais d'autre part, il est discontinu le long de ces bords.

On a seulement considéré ci-dessus le cas du bord 1-2 où $x=0$. Cependant, la conclusion est généralement vraie et une discontinuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord. A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale et est appelée «fonction non conforme». Les équations (3.7), (3.8) et (3.9) sous forme matricielle donnent l'équation (3.14) qui peut être résumée par l'équation générale suivante :

$$\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)]\{\alpha\} \quad (3.13)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Etape 3 : Exprimer l'état des déplacements $\{\delta(x, y)\}$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{\delta_e\}$

En remplaçant les coordonnées nodales dans l'équation $\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)]\{\alpha\}$ et en cherchant $\{\alpha\}$ solution ; cela nous mène à la formation de la matrice $[A]$, c'est-à-dire $\{\delta_e\} = [A]\{\alpha\}$. Puisque dans le cas présent l'élément a un total de douze degrés de liberté, $[A]$ est carré d'ordre 12 et ses coefficients sont donnés par l'équation (3.16). On doit maintenant inverser cette matrice et la relation cherchée est donnée par l'équation générale suivante :

$$\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)][A]^{-1}\{\delta_e\} \quad (3.15)$$

Enfin la torsion est égale à la variation par rapport à x de la dérivée par rapport à y , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \quad (3.19)$$

Les courbures et la torsion seront multipliées par les moments internes en vue d'obtenir le travail interne effectué. Les signes des expressions ci-dessus correspondent à ceux définis pour les moments internes dans l'étape suivante.

Les moments internes M_x et M_y agissent chacun sur deux côtés de l'élément ; il en est de même pour les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , mais puisque M_{xy} est égal à M_{yx} , on peut considérer qu'un des deux, par exemple M_{xy} , agit sur les quatre côtés, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état des déformations dans l'élément peut ainsi être représenté par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Et en remplaçant w par sa valeur à partir de l'équation 3.7 on obtient l'équation 3.21

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Qui peut être écrite :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (3.22)$$

De façon à définir la matrice C pour le cas de la flexion des plaques.

La relation cherchée entre déformations et déplacements nodaux est obtenue par :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x, y)\} &= [B]\{\delta^e\} \\ \text{avec: } [B] &= [C][A]^{-1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

A cause de la taille des matrices considérées, la matrice $[B]$ ne sera pas développée explicitement. En pratique cela peut être fait avec l'ordinateur.

✓ **Etape 5 : Relier les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ aux déformations et aux déplacements nodaux $\{\delta_e\}$**

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont en vérité les moments de flexion et de torsion et les déformations, les courbures et les torsions. Ainsi l'état des contraintes peut être représenté par les trois composantes M_x , M_y et M_{xy} comme cela est indiqué par l'équation 3.23.

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion internes par unité de longueur et M_{xy} est le moment de torsion interne par unité de longueur. Les relations entre contraintes et déformation, c'est-à-dire entre moments et courbures, sont données par la théorie de la flexion des plaques.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Ces relations sont écrites en termes généraux pour une plaque orthotrope, c'est-à-dire une plaque ayant des propriétés élastiques différentes dans deux directions perpendiculaires, une tôle ondulée étant un exemple type. D_x et D_y sont les rigidités de flexion dans les directions x et y respectivement, D_1 est une rigidité de couplage ayant un effet du type coefficient de Poisson et D_{xy} est la rigidité de torsion.

D'autre part, une plaque isotrope a les mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions et dans ce cas particulier on a

$$\begin{aligned} D_x = D_y = D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \\ D_1 = \nu D \quad \text{et} \quad D_{xy} &= \frac{(1-\nu)}{2} D \end{aligned}$$

Les équations 3.24 et 3.25 peuvent s'écrire alors sous forme matricielle :

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

C'est-à-dire :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} \quad (3.27)$$

Définissant ainsi la matrice (D), en prenant la valeur de $\{\varepsilon(x, y)\}$, on obtient la relation cherchée entre les contraintes de l'élément et ses déplacements nodaux :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (3.28)$$

✓ **Etape 6 :** Remplacer les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ par des forces nodales statiquement équivalentes $\{F_e\}$, relier ces forces nodales aux déplacements nodaux $\{\delta_e\}$ et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément $\{K_e\}$

En faisant égaliser le travail interne et le travail externe, produits pendant les déplacements virtuels $\{\delta_e\}$ nous obtenons :

$$\{\delta^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{\delta^e\} = \{\delta^e\}^T \left(\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \{\delta^e\} \right) \quad (3.29)$$

Puisque l'égalité ci-dessus (principe des déplacements virtuels) est valide pour n'importe quels déplacements virtuels nodaux $\{\delta_e\}$ et pour n'importe quels déplacements réels nodaux $\{\delta_e\}$ on obtient la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$:

$$[K^e] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dv \quad (3.30)$$

$$[K^e] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx dy \quad (3.31)$$

3.2. Élément fini hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses

3.2.1. Introduction

Afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels (hexaédriques et prismatiques) d'ordre élevé pour l'étude de la flexion des plaques, Belarbi et Charif ont développé un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (U, V et W) « SBH8 », basé sur le modèle en déformation [BEL 99].

3.2.2 Formulation variationnelle de l'élément SBH8

Pour une théorie linéaire où les déformations unitaires sont faibles, il existe six composantes de déformation intervenant en analyse complètement tridimensionnelle :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= U, x & \gamma_{xy} &= U, y + V, x \\ \varepsilon_{yy} &= V, y & \gamma_{yz} &= V, z + W, y \\ \varepsilon_{zz} &= W, z & \gamma_{xz} &= W, x + U, z \end{aligned} \quad (3.32)$$

U, V et W : sont les déplacements suivant X, Y et Z respectivement.

Les équations (3.32) doivent représenter la condition du mouvement de corps rigide (MCR).
Donc on peut écrire que :

$$\varepsilon_{ii} = 0 \quad (3.33)$$

$$\gamma_{ij} = 0 \quad (3.34)$$

L'intégration de (3.33) et (3.34) permet d'obtenir une solution particulière :

$$\begin{aligned} U &= a_1 + a_4 y + a_6 z \\ V &= a_2 - a_4 x - a_5 z \\ W &= a_3 + a_5 y - a_6 x \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les équations (3.35) représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide (MCR).

Le présent élément est un hexaèdre à huit nœuds avec trois degrés de liberté (ddl) par nœud (Fig.3.5). Donc, le champ de déplacement doit contenir vingt-quatre constantes indépendantes, six d'entre elles (a_1, a_2, \dots, a_6) sont déjà utilisées pour représenter le MCR, il en reste donc dix-huit constantes (a_7, a_8, \dots, a_{24}) pour représenter de façon approximative la déformation dans l'élément, tout en vérifiant les six équations de compatibilité le champ de déformation est:

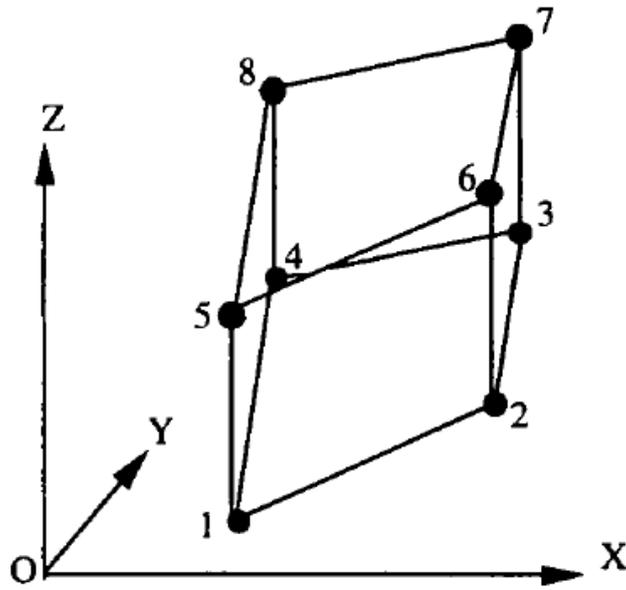


Figure 3.5 : Géométrie de l'élément SBH8

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= a_7 + a_8 y + a_9 z + a_{10} yz \\
 \varepsilon_{yy} &= a_{11} + a_{12} x + a_{13} z + a_{14} xz \\
 \varepsilon_{zz} &= a_{15} + a_{16} x + a_{17} y + a_{18} xy \\
 \gamma_{yz} &= a_{19} + a_{20} x \\
 \gamma_{xz} &= a_{21} + a_{22} y \\
 \gamma_{xy} &= a_{23} + a_{24} z
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Comme on peut le constater, le découplage des différentes composantes du vecteur de déformation, peut être facilement assuré, ce qui n'est pas le cas si on adopte le modèle de déplacement.

En substituant (3.36) dans (3.33) et (3.34), et après intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 u &= a_7x + a_8xy + a_9xz + a_{10}xyz - 0.5a_{12}y^2 - 0.5a_{14}y^2z - 0.5a_{16}z^2 - 0.5a_{18}yz^2 + \\
 &\quad 0.5a_{21}z + 0.5a_{23}y + a_{24}yz \\
 v &= -0.5a_8x^2 - 0.5a_{10}x^2z + a_{11}y + a_{12}xy + a_{13}yz + a_{14}xyz - 0.5a_{17}z^2 - 0.5a_{18}xz^2 + \\
 &\quad 0.5a_{19}z + a_{20}xz + 0.5a_{23}x \\
 w &= -0.5a_9x^2 - 0.5a_{10}x^2 - 0.5a_{13}y^2 - 0.5a_{14}xy^2 + a_{15}z + a_{16}xz + a_{17}yz + a_{18}xyz + \\
 &\quad 0.5a_{19}y + 0.5a_{21}x + a_{22}xy
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Le champ de déplacement final sera obtenu par superposition de (3.35) et (3.37) :

$$\begin{aligned}
 u &= a_1 + a_4y + a_6z + a_7x + a_8xy + a_9xz + a_{10}xyz - 0.5a_{12}y^2 - 0.5a_{14}y^2z - 0.5a_{16}z^2 - \\
 &\quad 0.5a_{18}yz^2 + 0.5a_{21}z + 0.5a_{23}y + a_{24}yz \\
 v &= a_2 - a_4x - a_5z - 0.5a_8x^2 - 0.5a_{10}x^2z + a_{11}y + a_{12}xy + a_{13}yz + a_{14}xyz - 0.5a_{17}z^2 - \\
 &\quad 0.5a_{18}xz^2 + 0.5a_{19}z + a_{20}xz + 0.5a_{23}x \\
 w &= a_3 + a_5y - a_6x - 0.5a_9x^2 - 0.5a_{10}x^2 - 0.5a_{13}y^2 - 0.5a_{14}xy^2 + a_{15}z + a_{16}xz + a_{17}yz + \\
 &\quad a_{18}xyz + 0.5a_{19}y + 0.5a_{21}x + a_{22}xy
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.3. Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses

3.3.1. Introduction

Cet élément, appelé SBRP (Strain Based Rectangulaire Plate) ; élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses possède quatre nœuds, avec la nécessité d'avoir trois degrés de liberté pour représenter les mouvements possible pour chaque des nœuds(w, β_x, β_y), donc cet élément contient douze degrés de liberté [BELO 05].

3.3.2. Les équations de base de Reissner-Mindlin pour la théorie des plaques

3.3.2.1. Champ de déplacement

Le champ de déplacement dans n'importe quel point dans le système des coordonnées cartésien est donné par :

$$\begin{aligned}
 U &= u(x, y, z) = z\beta_x(x, y) \quad , \quad V = v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) \\
 W &= w(x, y, z) = w(x, y) \quad , \quad \{\delta\} = \{W, \beta_x, \beta_y\}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

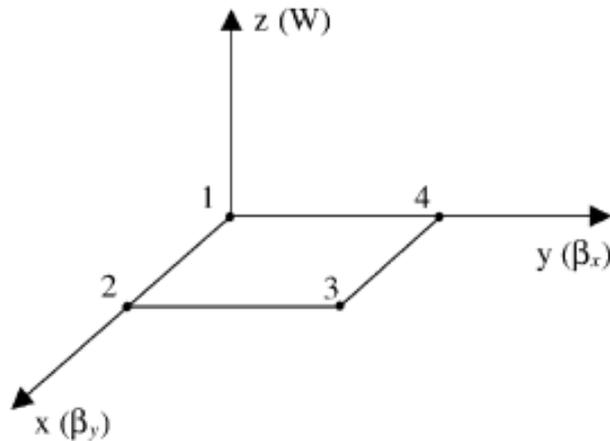


Figure 3.6 : Élément rectangulaire de plaque à quatre nœuds, avec W , β_x et β_y les trois degrés de liberté pour chaque nœud.

3.3.2.2. Champ de déformation

Les cinq composantes du champ de déformation sont données par :

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \tag{3.40a}$$

$$\varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \tag{3.40b}$$

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \tag{3.40c}$$

$$\gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial W}{\partial x} \tag{3.40d}$$

$$\gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial W}{\partial y} \tag{3.40e}$$

Les courbures sont données comme suit :

$$K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y}, K_{xy} = \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \tag{3.41}$$

Les déformations du cisaillement sont données par :

$$\gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial W}{\partial x}, \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial W}{\partial y} \tag{3.42}$$

Les cinq composantes du champ de déformation citées ci-dessus et données par les équations (3.41) et (3.42) doivent satisfaire les équations de compatibilité suivantes :

$$\frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial K_x}{\partial y} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial K_y}{\partial x}$$

3.3.3. Dérivation des fonctions de forme de l'élément SBRP

Les déformations données par les équations (3.41) et (3.42) sont égales à zéro, l'intégration de ces équations permet d'obtenir les expressions suivantes :

$$W = a_1 - a_2 x - a_3 y, \beta_x = a_2, \beta_y = a_3 \quad (3.44)$$

Tout en vérifiant les équations de compatibilité (3.43) :

Les valeurs de : k_x ; k_y ; k_{xy} ; γ_{xy} ; γ_{yz} sont résumées comme suit :

$$K_x = a_4 + a_5 y, K_y = a_6 + a_7 x, K_{xy} = a_8$$

$$\gamma_{xy} = a_9 + a_{10} y - (a_7 y^2) \quad (3.45)$$

$$\gamma_{yz} = a_{11} + a_{12} x - (a_5 x^2)$$

Equation (3.45) est substituée en équations (3.41) et (3.42), et après l'intégration, les fonctions de déplacement sont obtenues comme suit :

$$w = -a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2 y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{xy^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} + a_9 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{xy}{2} + a_{11} \frac{y}{2} + a_{12} \frac{xy}{2}$$

$$\beta_x = a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + \frac{a_9}{2} + a_{10} \frac{y}{2} - a_{12} \frac{y}{2} \quad (3.46)$$

$$\beta_y = -a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} - a_{10} \frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{2} + a_{12} \frac{x}{2}$$

Le champ de déplacement final (w, β_x, β_y) pour l'élément SBRP sera obtenu par superposition des équations du mouvement d'un corps rigide (3.44) et des termes de d'équation (3.46) :

$$w = a_1 - a_2 x - a_3 y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2 y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{xy^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} + a_9 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{xy}{2} + a_{11} \frac{y}{2} + a_{12} \frac{xy}{2}$$

$$\beta_x = a_2 + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + \frac{a_9}{2} + a_{10} \frac{y}{2} - a_{12} \frac{y}{2} \quad (3.47)$$

$$\beta_y = a_3 - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} - a_{10} \frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{2} + a_{12} \frac{x}{2}$$

CHAPITRE 4

NOUVEL ELEMENT RECTANGULAIRE BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

Chapitre 4

Nouvel élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces

4.1. Introduction

Dans l'histoire de la méthode des éléments finis, le développement d'éléments de flexion des plaques remonte à longtemps. La plupart des formulations sont basées sur la théorie de Kirchhoff (la théorie des plaques minces), qui néglige les effets de cisaillement transversal en flexion. Un grand nombre de travaux de recherche ont été orientés vers le développement d'éléments basés sur cette théorie. En effet, elle est très adaptée pour les plaques minces (dont le rapport : Longueur / épaisseur > 10). Ce n'est certainement pas la première fois que l'on utilise l'approche en déformation pour présenter une solution pour la flexion des plaques, un ensemble d'éléments a déjà été développé [BELO 05, BEL 99, HIM 11] et qui a donné de très bons résultats. Dans la littérature de l'ingénierie, des éléments finis non conformes sont fréquemment utilisés, en particulier pour les problèmes des plaques en flexion [ZIE 71], la précision des solutions obtenues par leur utilisation est connue pour être excellente. Dans ce chapitre, nous allons présenter le développement d'un élément baptisé SBRPK (Strain Based Rectangular Plate Kirchhoff) ; élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces, basé sur le modèle en déformation et possédant quatre nœuds, avec la nécessité d'avoir trois degrés de liberté pour représenter les mouvements possibles pour chacun des nœuds (w, θ_x, θ_y) , donc l'élément possède douze (12) degrés de liberté.

4.2. Les équations de bases de Kirchhoff pour la théorie des plaques

4.2.1. Champ de déplacement

Le champ de déplacement dans n'importe quel point dans le système des coordonnées cartésiennes est donné par :

$$U = u(x, y, z) = z\beta_x(x, y) \quad (4.1a)$$

$$V = v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) \quad (4.1b)$$

$$W = w(x, y, z) = w(x, y) \quad (4.1c)$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.1d)$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.1e)$$

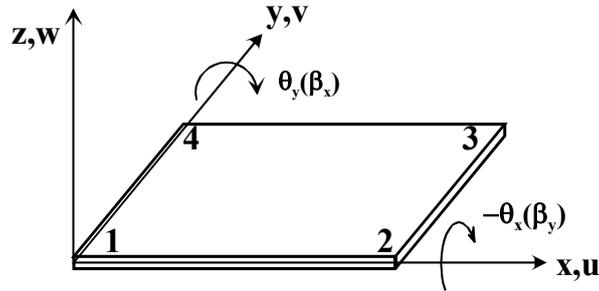


Figure 4.1 : Elément rectangulaire de plaque a quatre nœuds avec w, β_x, β_y (03d.d.l/nœud).

4.2.2. Champ de déformation

Les composantes du champ de déformation sont données par :

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (4.2a)$$

$$\varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (4.2b)$$

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (4.2c)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.2d)$$

Les courbures sont données ci-dessous :

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.3a)$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.3b)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.3c)$$

4.2.3. Conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions ont été établies par Saint Venant [Fra 98], leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements.

$$\frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial k_x}{\partial y} \quad (4.4b)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial k_y}{\partial x} \quad (4.4c)$$

4.2.4. Les relations constitutives entre les contraintes et les déformations

Pour un matériau isotrope, les relations constitutives entre les contraintes et les déformations pour la théorie de Kirchhoff sont données par :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Avec M_x, M_y, M_{xy} représentant les moments de flexion

La matrice de rigidité [D] contient les valeurs d_{ij} , qui sont définies par :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{12} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{33} = d_{11} \frac{(1-\nu)}{2}$$

Avec E le module d'Young, h l'épaisseur de la plaque, et ν coefficient de poisson

4.3. Dérivation des fonctions de forme et matrice de rigidité de l'élément SBRPK

Les courbures sont données par l'équation (4.3) comme suit :

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (4.6a)$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (4.6b)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \quad (4.6c)$$

Si on a :

$$k_x = 0 ; k_y = 0 ; k_{xy} = 0 \quad (4.7)$$

Après intégrations des termes de l'équation (4.7), on obtient :

$$\beta_x = a_2, \beta_y = a_3 \quad (4.8)$$

$$\text{On a aussi} \begin{cases} \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Après substitution les valeurs de β_x et β_y dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{cases} a_2 + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ a_3 + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Après intégration de l'équation différentielle (4.10) on obtient :

$$w = a_1 - a_2x - a_3y \quad (4.11)$$

Cette équation représente le mouvement d'un corps rigide (translation et rotation).

Le présent élément à quatre nœuds, avec trois degrés de liberté (ddl) par nœud, donc l'élément possède douze degrés de liberté, le champ de déplacement doit donc contenir aussi douze coefficients indépendants, trois ont été utilisés (a_1, a_2, a_3) pour la représentation du MCR dans l'équations (4.8 ; 4.11), il en reste donc neuf coefficients, ($a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$) pour représenter de façon approximative la déformation dans l'élément, tout en vérifiant les équations de compatibilité (4.4).

Les valeurs de k_x ; k_y ; k_{xy} sont résumées comme suit :

$$k_x = a_4 + a_5x + a_6y + a_7xy \quad (4.12a)$$

$$k_y = a_8 + a_9x + a_{10}y + a_{11}xy \quad (4.12b)$$

$$k_{xy} = a_{12} + 2a_6x + a_7x^2 + 2a_9y + a_{11}y^2 \quad (4.12c)$$

En remplaçant dans les équations (4.3) les courbures par leurs valeurs données par les équations (4.12) et après intégration, nous obtenons les champs des déplacements suivants :

$$w = -a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2y}{2} - a_7 \frac{x^3y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{xy^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{xy^3}{6} - a_{12} \frac{xy}{2} \quad (4.13a)$$

$$\beta_x = a_4x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6xy + a_7 \frac{x^2y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \quad (4.13b)$$

$$\beta_y = a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8y + a_9xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \quad (4.13c)$$

Chapitre 4 : Nouvel élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces

Le champ de déplacement final pour l'élément **SBRPK** sera obtenu par superposition des termes des équations (4.8 ; 4.11) et celle de l'équation (4.13), on obtient donc :

$$w = a_1 - a_2x - a_3y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2y}{2} - a_7 \frac{x^3y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{xy^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{xy^3}{6} - a_{12} \frac{xy}{2} \quad (4.14a)$$

$$\beta_x = a_2 + a_4x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6xy + a_7 \frac{x^2y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \quad (4.14b)$$

$$\beta_y = a_3 + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8y + a_9xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \quad (4.14c)$$

Les fonctions de déplacement de l'élément développé **SBRPK** données par l'équation (4.14) contient la représentation exacte des modes de corps rigide à travers les termes associés aux constantes a_1, a_2 et a_3 , et satisfait aussi la compatibilité dans la présentation approximative de la déformation dans l'élément. Les 12 degrés de liberté nodaux de l'élément sont exprimés en termes de a_1, a_2, \dots, a_{12} constantes par la matrice de transformation [C].

$$\{\delta^e\} = [C]. [A] \quad (4.15)$$

Les vecteurs $\{\delta^e\}$ et $[A]$ sont donnés par :

$$\{\delta^e\} = \{w_1\beta_{x1}\beta_{y1}w_2\beta_{x2}\beta_{y2}w_3\beta_{x3}\beta_{y3}w_4\beta_{x4}\beta_{y4}\}^T \quad (4.16)$$

$$\{A\} = \{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}\}^T \quad (4.17)$$

La matrice [C] de (12 × 12) éléments est donnée dans l'annexe A2. En suivant le procédé bien connu pour les éléments finis de type de déplacement [ZIE 91], la matrice de rigidité [Ke] de l'élément de plaque est donnée par :

$$[k^e] = [C]^{-T} \left(\int \int [Q]^T [D] [Q] ds \right) [C]^{-1} = [C]^{-T} [k_0] [C]^{-1} \quad (4.18)$$

Ainsi la matrice de déformation est donnée par :

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $[k_0]$ pour l'élément **SBRPK** est donnée dans l'annexe A2.

4.4. Validation et applications

La validation de l'élément formulé, est représentée par la comparaison entre les résultats analytique indiqués dans la littérature et les résultats donnés par les autres éléments à travers des tests similaires.

Pour les tests de validation, l'élément formuler **SBRPK** et programmer en fortran 77.

L'organigramme pour l'étude de la flexion des plaques est donné dans l'annexe A2.

4.4.1. Plaque rectangulaire soumise à une charge concentrée

Le problème à considérer est celui de la plaque rectangulaire soumise à une charge concentrée à son extrémité libre. La figure 4.2 présente la géométrie de la plaque avec le dispositif de chargement. Ce problème a été traité par plusieurs chercheurs [BEL 99, GUE 93] pour tester les performances des éléments de flexion. Le rapport entre la longueur et l'épaisseur est donné par $(L/h=1 \text{ à } 100)$. La longueur $L=10$, la largeur $b=1.0$, le module d'élasticité longitudinal du matériau $E=1.2 \times 10^6$, le coefficient de Poisson $\nu=0.0$, une charge concentrée est appliquée à l'extrémité de la console $P=0.1$. Nous évaluons le déplacement vertical W_{max} à l'extrémité libre de la plaque et nous le comparons avec les solutions analytiques rapportées dans la littérature et d'autres résultats des éléments finis (maillage 2×5).

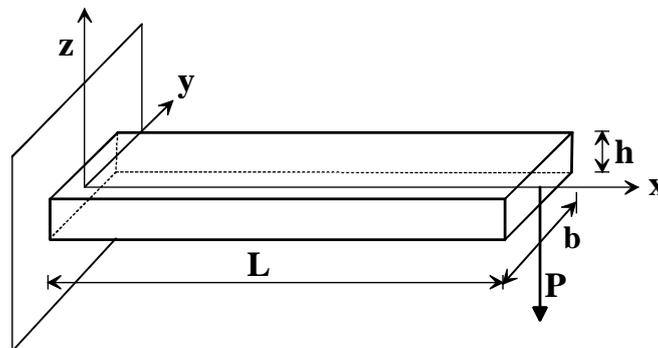


Figure 4.2 : plaque sous charge concentrée

Chapitre 4 : Nouvel élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces

La solution analytique du déplacement vertical W à l'extrémité libre de la plaque est donnée par :

$$W = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \left[1 + \frac{1}{2k} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (4.19)$$

Si on néglige l'effet de cisaillement transversal ; l'expression du déplacement vertical de la plaque devient :

$$W = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \quad (4.20)$$

Les résultats du déplacement vertical à l'extrémité libre de la plaque, sont présentés dans le tableau 4.1 et la figure 4.3

Tableau 4.1 : Influence de l'élanement (L / h) sur la flèche maximale ($k = 5/6$)

L/h	W_{\max}						
	1	2	3	4	5	10	100
ACM	0.6266417	0.8645161	0.9437500	0.9727273	0.9720930	1.0424242	1.0033003
R4	0.9943715	0.9677419	0.9583333	0.9545455	0.9069767	0.7272727	0.0234923
SBH8	0.9943715	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9975998
SBRP	0.9943715	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9975998
SBRPS	0.9981238	0.9870968	0.9916667	0.9954545	0.9837209	1.0060606	1.0003000
SBRPK	0.6247655	0.8580645	0.9375000	0.9681818	0.9674419	1.0090909	1.0000000
Solution Analytique	5.33E-07 (1.000)	3.10E-06 (1.000)	9.60E-06 (1.000)	2.20E-05 (1.000)	4.30E-05 (1.000)	3.30E-04 (1.000)	0.3333 (1.000)

* R4 : Elément rectangulaire bilinéaire basé sur le model en déplacement.

Le champ de déplacement est donnée par :

$$\begin{aligned} W &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ \beta_x &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \\ \beta_y &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy \end{aligned} \quad (4.21)$$

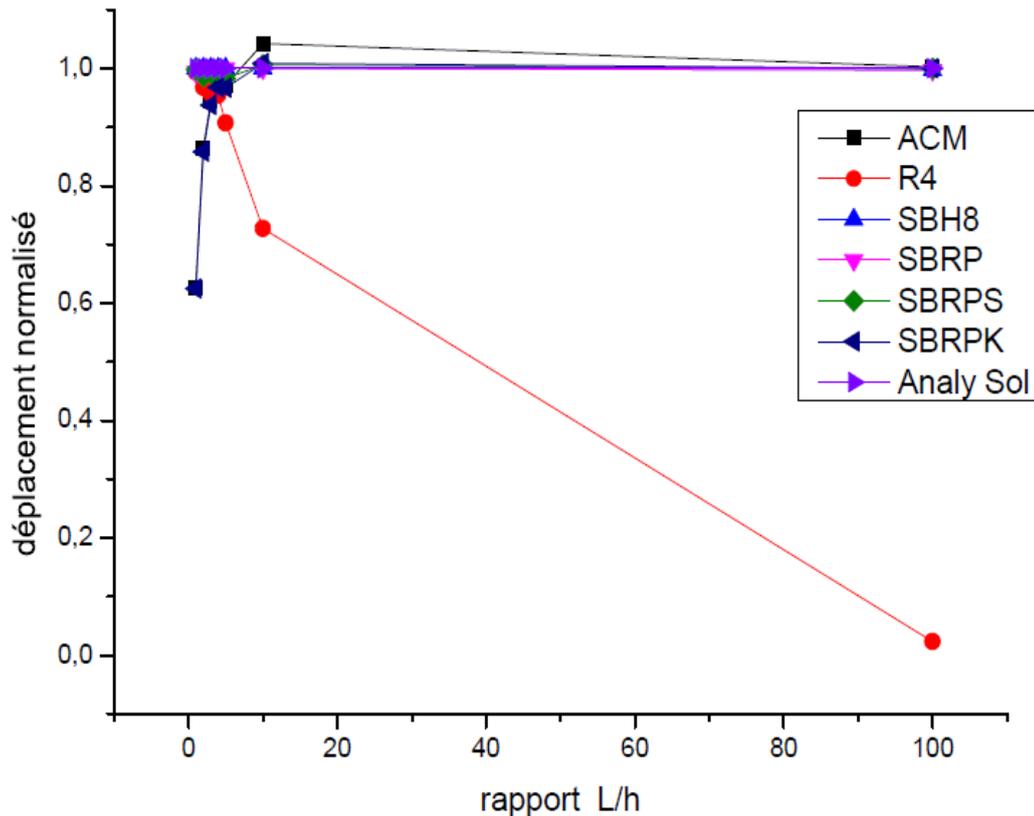


Figure 4.3 : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une console sous charge concentrée

A partir du Tableau 4.1, on note que les résultats donnés par l'élément SBRPK (le seul) coïncident exactement avec la solution analytique pour $L/h=100$ (plaque très mince). On note aussi que pour $L/h < 10$, le présent élément est très convergent malgré que sa formulation ne prend pas en compte l'effet du cisaillement transversal. Avec ces résultats, le SBSPK démontre une convergence suffisante comparée aux autres éléments pour la poutre console. Ceci montre clairement que le nouveau élément peut rapprocher les solutions connues de flexion des plaques avec différentes valeurs de l'épaisseur, l'élément est très compétitif. On voit aussi que notre élément est suffisamment robuste comparé aux autres éléments de la même approche et particulièrement lorsque $L/h > 10$.

Comme un exemple pour $\frac{L}{h} = 10$ (maillage 2×5), le fichier des données (données .dat), et les résultats (résultats .txt) sont présentés dans l'annexe A2.

4.4.2. Torsion d'une plaque carrée

Pour prouver l'applicabilité du présent élément, nous proposons une plaque carrée, (Fig.4.4) simplement appuyé sur les trois coins (B, C et D), le quatrième coin est soumis à une force transversale de 5 lb. La plaque est faite d'un matériau isotrope avec une épaisseur constante de 1,0 in et la longueur est de 8,0 in. Les propriétés du matériau sont considérées comme $E=10,000$ psi pour le module d'Young et $\nu=0.3$ pour le coefficient de Poisson. Les déplacements verticaux et les contraintes aux points A et F sont évalués et comparés avec les solutions analytiques rapportées dans la littérature et des résultats d'autres éléments finis (Tableau 4.2).

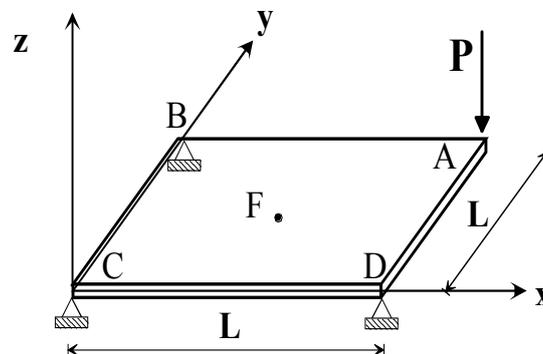


Figure 4.4 : Torsion d'une plaque carrée (point F au centre de la plaque)

Tableau 4.2 : Torsion d'une plaque carrée

Element	fleches (in)		Moments	
	Point A	Point F	Mx et My	Mxy (lb-in/in)
SBRPK (1x1)	0.24960	-	0	2.5
SBRPK (2x2)	0.24960	0.06240	0	2.5
SBRP[BELO 05] (1x1)	0.24960	-	0	2.5
SBRP[BELO 05] (2x2)	0.24960	0.06240	0	2.5
Ref[YUA 88] (1x1)	0.24960	-	0	2.5
Ref[YUA 88] (2x2)	0.24960	0.06240	0	2.5
ACM[CLO 66] (8x8)	0.24972	0.06244	-	-
HTC[CLO 66] (8x8)	0.25002	0.06254	-	-
DKT[BAT 80]	0.24960	0.06240	0	2.5
HSM[BAT 80]	0.24960	0.06240	0	2.5
Solution Analytique [BAT 90]	0.24960	0.06240	0	2.5

Chapitre 4 : Nouvel élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces

Pour les deux maillages, l'élément SBRPK (Tableau 4.2) donne exactement la même solution calculée analytiquement pour les flèches et les contraintes. Les résultats donnés par les éléments ACM (élément rectangulaire 12 d.d.1) et HTC ne coïncident pas exactement avec la solution analytique même avec un maillage régulier de 8x8.

4.4.3. Flexion d'une plaque carrée avec diverses conditions

Le test de flexion d'une plaque carrée (Fig.4.5) est devenu *de facto* un test de convergence standard pour le développement de nouveaux éléments [BELO 05, BEL 99]. La plaque considérée a un rapport d'aspect équivalent à $L / h = 100$ avec des bords simplement appuyés ou encastés, soumise à une charge concentrée au centre ou à une charge uniformément répartie.

Pour simplifier la lecture, nous adoptons les notations suivantes :

- PSA_CU : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Uniforme
- PSA_CCC : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Concentrée au Centre
- PE_CU : Plaque Encastée sous Charge Uniforme
- PE_CCC : Plaque Encastée sous Charge Concentrée au Centre

Les résultats sont comparés à la solution analytique donnée par Timoshenko [TIM 59] et avec d'autres sources. Pour la géométrie (Fig.4.5) et les propriétés des matériaux nous avons : $L=20$, $h=0.2$, $P=1$, $q=1$, $\nu=0.3$ et $E=10^6$.

Notre étude sera limitée à la modélisation d'un quart de la plaque pour des raisons de symétrie.

D : représente la rigidité de plaque, q et P sont les types de forces.

Il est inutile de préciser les unités à cause des rapports adimensionnels.

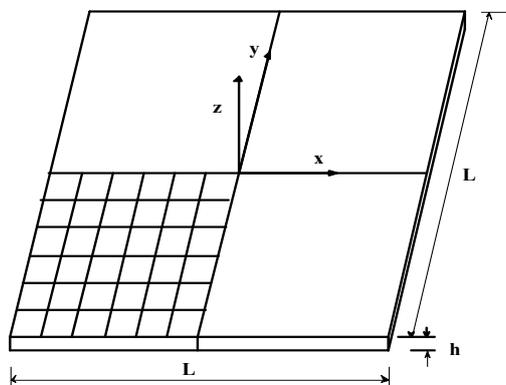


Figure.4.5 : Géométrie de la plaque

4.4.3.1. Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.3 et la figure 4.6

Tableau 4.3 : Plaque carrée simplement appuyée sous charge concentrée au centre, convergence de la flèche maximale

Maillage	W _{max} (Flèche maximale)				
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPS	SBRPK
2x2	0.93488793	0.22039655	0.1576207	0.1473448	0.8009569
4x4	0.98019828	0.73818966	0.7284138	0.7216552	0.9369569
8x8	0.99393966	0.9627069	0.9624224	0.8776638	0.98022414
10x10	0.99599138	0.98065517	0.9805172	1.0169569	0.9867069
Sol. Analytique [TIM59]	116.0 (1.000)				

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

PSA_CCC : ($w_{ref} = 11.6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D}$)

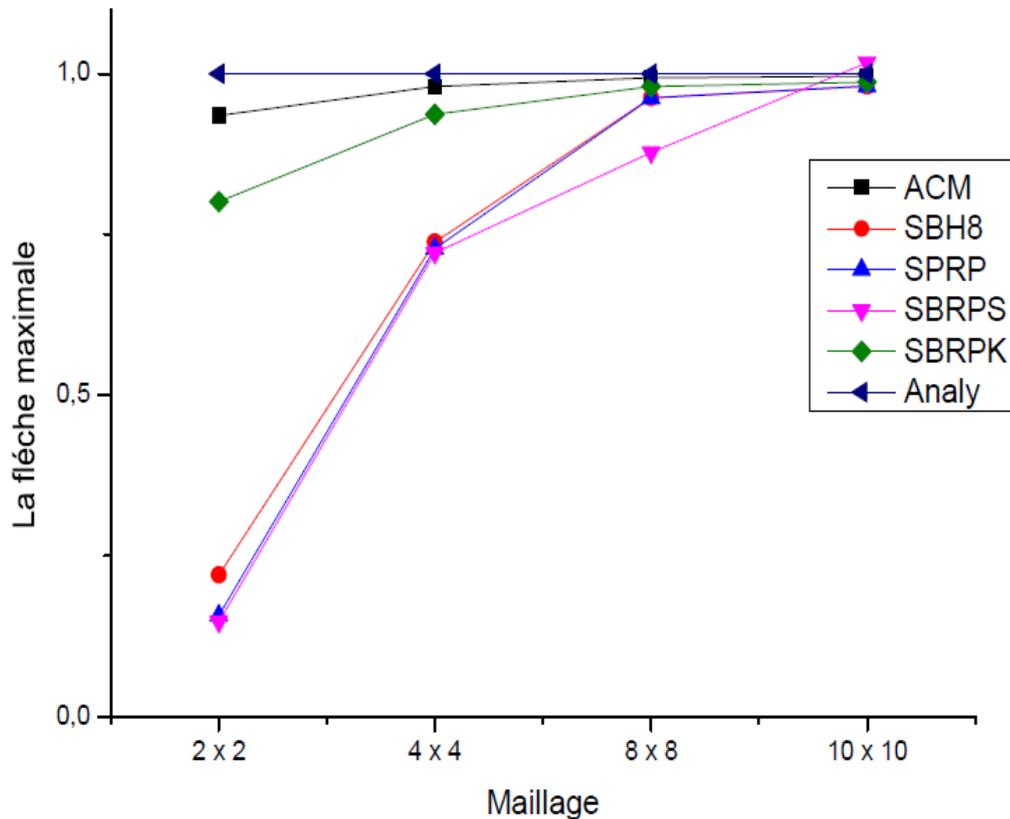


Figure 4.6 : Présentation des résultats de la flèche maximale (PSA_CCC)

4.4.3.2. Plaque Encastée sous Charge Concentrée au Centre

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.4 et la figure 4.7

Tableau 4.4 : plaque carrée encastée sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale

Maillage	W_{max} (Flèche maximale)				
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPS	SBRPK
2x2	0.90469643	0.01925	0.019	0.0271071	0.90457143
4x4	0.96389286	0.43221429	0.4292679	0.4496964	0.94314286
8x8	0.98710714	0.91457143	0.9139821	0.8731607	0.96351786
10x10	0.99039286	0.95591071	0.9555893	0.9587857	0.97417857
Sol. Analytique [TIM59]	56.0				

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

$$PE_CCC : (w_{ref} = 5.6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D})$$

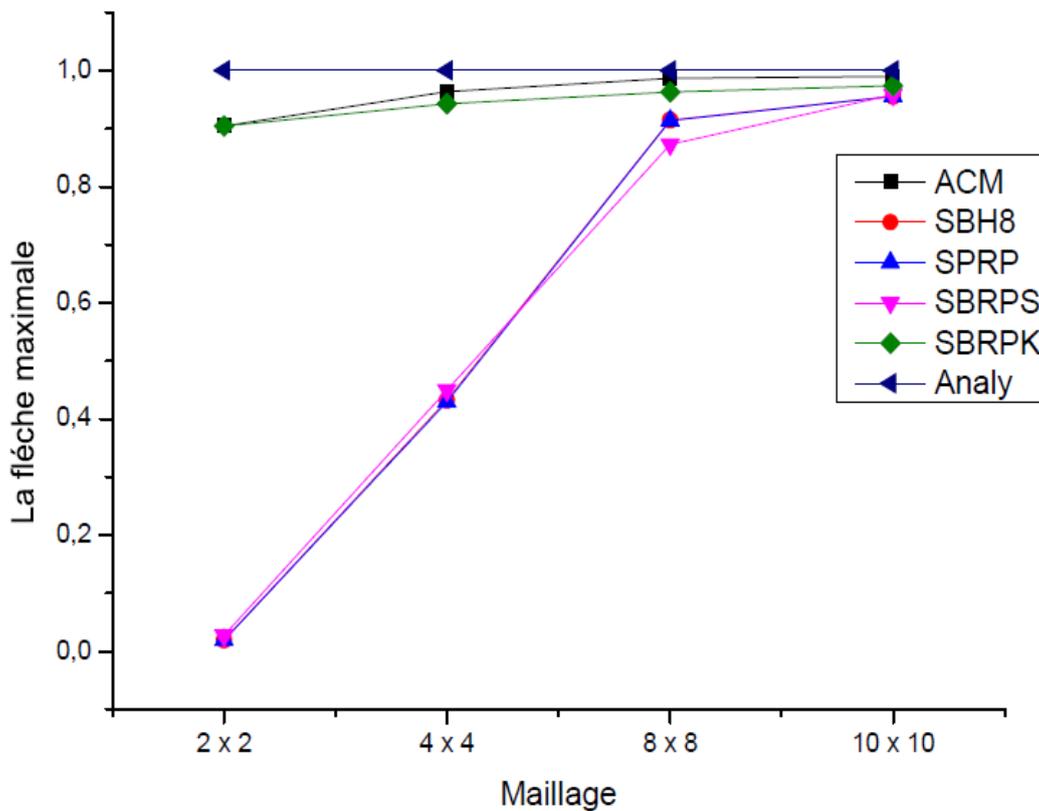


Figure 4.7 : Présentation des résultats de la flèche maximale (PE_CCC)

4.4.3.3. Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5 et la figure 4.8

Tableau 4.5 : plaque carrée simplement appuyée sous charge uniformément répartie, convergence de la flèche maximale

Maillage	W _{max} (Flèche maximale)			
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPK
2x2	0.93308715	0.21706056	0.1657558	0.8560315
4x4	0.98335795	0.76895618	0.7668882	0.9701132
8x8	0.99576563	0.97557853	0.9752831	0.9930084
10x10	0.99721812	0.98860167	0.9885032	0.995421
Sol. Analytique [TIM 59]	40.62			

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

$$PSA_CU : (w_{ref} = 4.062 \cdot 10^{-3} \frac{qL^4}{D})$$

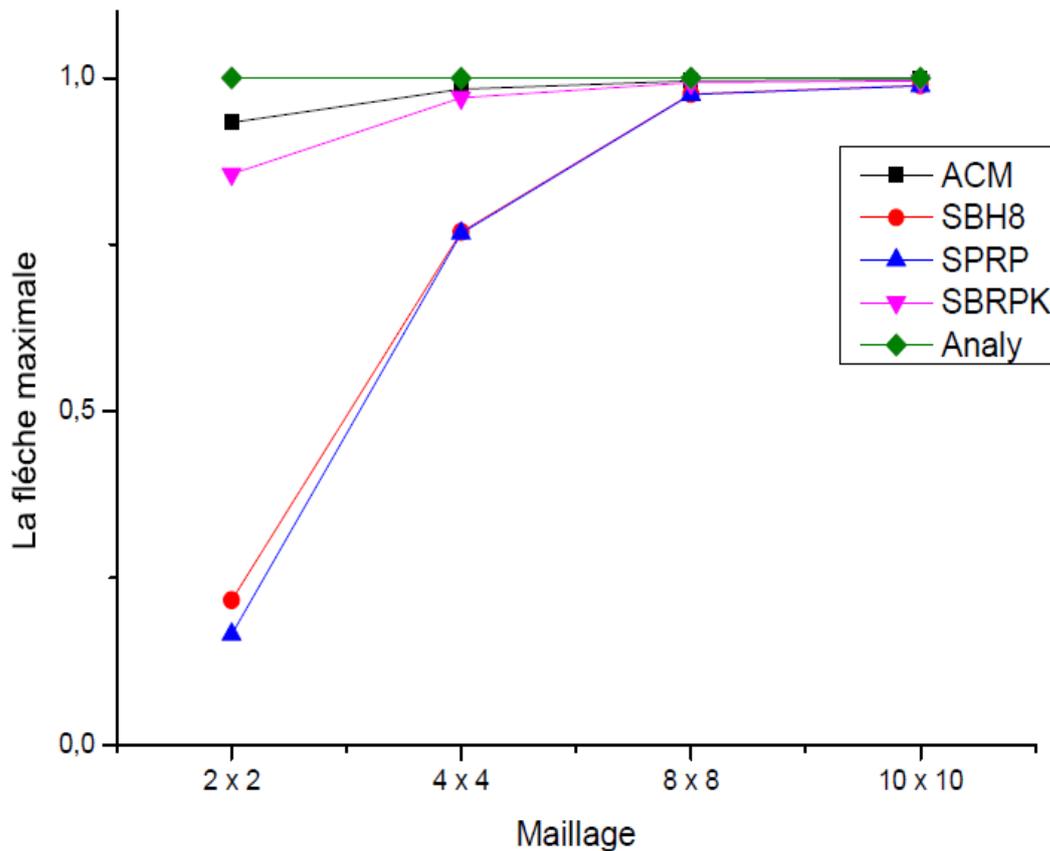


Figure 4.8 : Présentation des résultats de la flèche maximale (PSA_CU)

4.4.3.4. Plaque encastree sous charge uniformement repartie

Les resultats sont presentes dans le tableau 4.6 et la figure 4.9

Tableau 4.6 : plaque carree encastree sous charge uniformement repartie. Convergence de la fleche maximale

Maillage	W _{max} (Flèche maximale)			
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPK
2x2	0.88619048	0.02166667	0.0214286	0.8257143
4x4	0.96507937	0.44626984	0.4431746	0.8862698
8x8	0.98793651	0.93626984	0.9356349	0.9644444
10x10	0.99087302	0.97246032	0.9722222	0.9761905
Sol. Analytique [TIM 59]	12.6 (1.000)			

La solution analytique est donnee par l'equation suivante :

$$PE_CU : (w_{ref} = 1.26 \cdot 10^{-3} \frac{qL^4}{D})$$

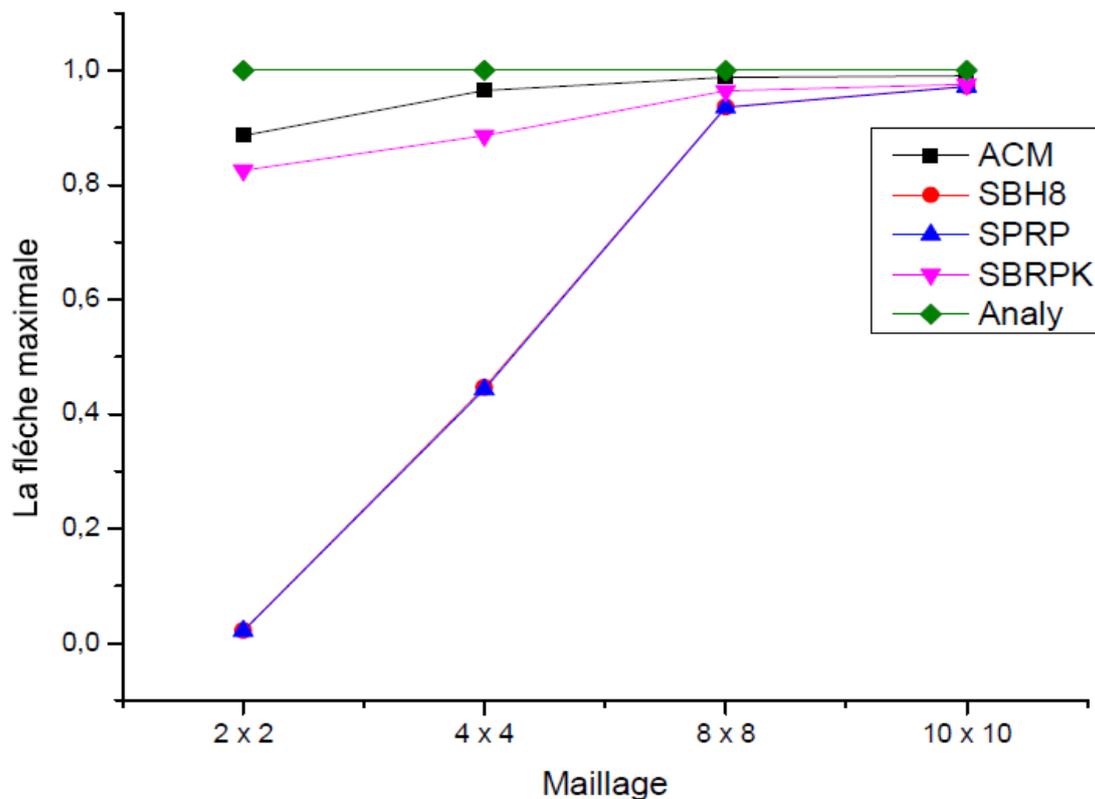


Figure 4.9 : Presentation des resultats de la fleche maximale (PE_CU)

Chapitre 4 : Nouvel élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces

Les flèches verticales normalisées au centre de la plaque montrées dans les tableaux (4.3, 4.4, 4.5, et 4.6) indiquent que le taux de convergence de l'élément développé (à partir de la limite inférieure à la valeur analytique) est plus élevé (quelque soit le maillage) par rapport aux autres éléments (2D et 3D) basés sur l'approche en déformation. Ceci, encore une fois, montre ses très bonnes performances.

4.4.4 Effet du cisaillement transversal sur la flèche

L'effet du cisaillement transversal est vérifié à travers une série de tests qui consistent à évaluer l'influence de l'élanement L/h (longueur/épaisseur) d'une plaque carrée sur la flèche au centre W_c (les résultats sont donnés pour le maillage 10×10), avec les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques suivantes: ($L = 20, h = 0.2 \text{ à } 4, P = 1, Q = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$). Les résultats obtenus sont donnés pour un maillage de (10×10) et présentés sur les tableaux 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 pour les différents cas de chargement et conditions aux limites.

4.4.4.1. PSA_CCC

Tableau 4.7 : flèche normée d'une plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

L/h	5	10	20	30	40	50	70	90	100
W_c/W_{ref}	2.0948	1.9957	1.2272	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867

4.4.4.2. PSA_CU

Tableau 4.8 : flèche normée d'une plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie

L/h	5	10	20	30	40	50	70	90	100
W_c/W_{ref}	2.0325	1.9536	1.1418	0.9954	0.9954	0.9954	0.9954	0.9954	0.9954

4.4.4.3. PE_CCC :

Tableau 4.9 : flèche normée d'une plaque encastree sous charge concentrée au centre

L/h	5	10	20	30	40	50	70	90	100
W_c/W_{ref}	2.1864	2.0129	1.3538	0.9741	0.9741	0.9741	0.9741	0.9741	0.9741

4.4.4.4. PE_CU :

Tableau 4.10 : flèche normée d'une plaque encastrée sous charge uniformément répartie

L/h	5	10	20	30	40	50	70	90	100
W_c/W_{ref}	2.1023	1.9846	1.1661	0.9761	0.9761	0.9761	0.9761	0.9761	0.9761

D'après les résultats obtenus ci-dessus, nous remarquons que la solution "Kirchhoff" est presque atteinte et reste stable pour $L/h = 30$ jusqu'à $L/h=100$ et ce pour tous les cas de conditions aux limites et chargements appliqués. Cela confirme la robustesse de l'élément fini **SBRPK** basé sur l'approche en déformation.

4.4.4.5. Etude comparative entre les éléments ACM, R4, SBH8, SBRP et SBRPK

La flèche W_c au centre de la plaque est calculée pour un maillage de (10x10), et cela pour les différents cas de chargement et conditions aux limites. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par les éléments **ACM, R4, SBH8 et SBRP** et présentés sur les tableaux 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14 et les figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13. Les propriétés géométriques et mécaniques sont: ($L = 20, h = 0.2 \text{ à } 4, P = 1, Q = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)

A/ PSA_CCC :

Tableau 4.11 : Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{ref}}$	ACM	1.9866	1.8924	1.1391	0.9959	0.9959	0.9959
	R4	1.8157	1.1937	0.9282	0.6334	0.5188	0.2096
	SBH8	1.688	1.226	1.05	1.004	0.9966	0.981
	SBRP	1.8167	1.2234	1.0548	1.0039	0.9964	0.9805
	SBRPK	2.0948	1.9957	1.2272	0.9867	0.9867	0.9867

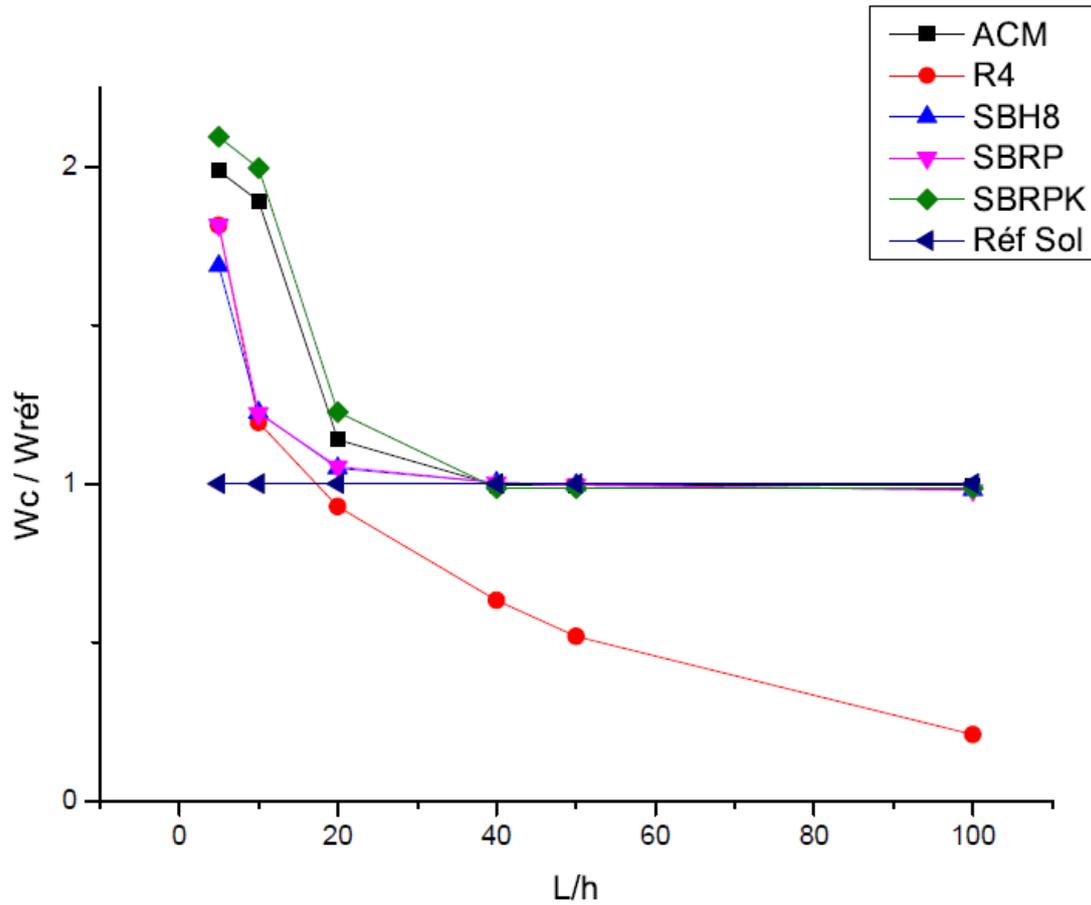


Figure 4.10 : Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PSA_CCC)

B/ PSA_CU :

Tableau4.12 : Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{ref}}$	ACM	1.9866	1.8925	1.0402	0.9973	0.9972	0.9972
	R4	1.3473	1.0872	0.9105	0.6413	0.5291	0.2171
	SBH8	1.3079	1.122	1.037	1.005	0.9998	0.9886
	SBRP	1.3545	1.1215	1.0368	1.0049	0.9997	0.9885
	SBRPK	2.0325	1.9536	1.1418	0.9954	0.9954	0.9954

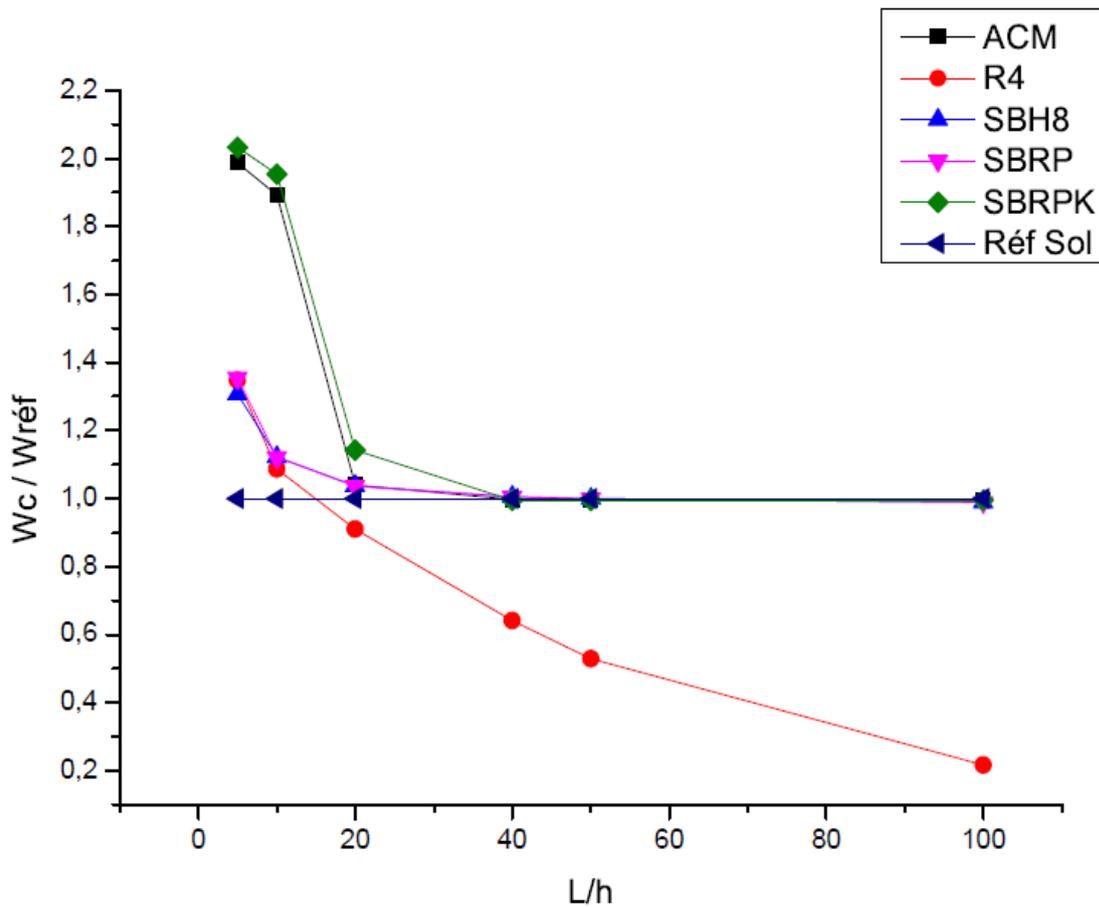


Figure 4.11 : Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PSA_CU)

C/ PE_CCC :

Tableau 4.13 : Plaque encastree sous charge concentree au centre

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{ref}}$	ACM	1.9864	1.8918	1.1346	0.9907	0.9906	0.9903
	R4	2.4888	1.3256	0.9124	0.5550	0.4363	0.1583
	SBH8	2.234	1.362	1.070	0.994	0.983	0.955
	SBRP	2.4835	1.3570	1.0691	0.9934	0.9826	0.9556
	SBRPK	2.1864	2.0129	1.3538	0.9741	0.9741	0.9741

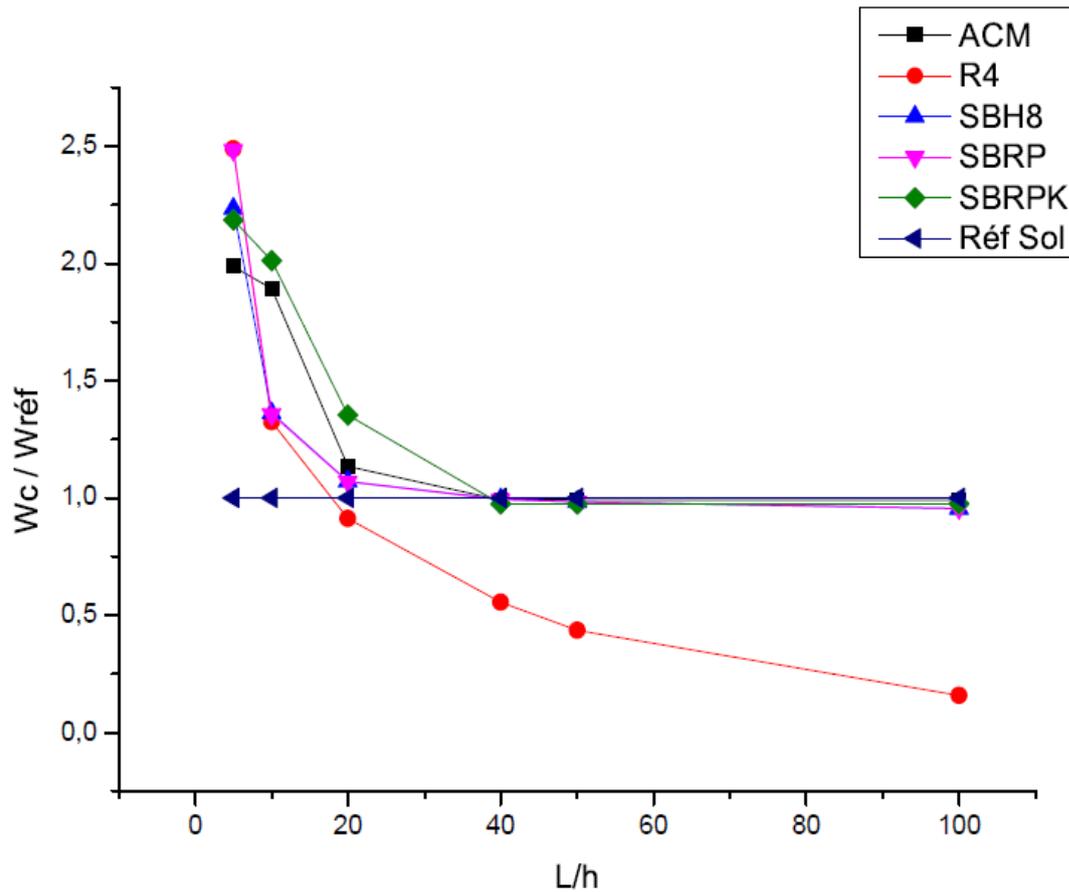


Figure 4.12 : Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PE_CCC)

D / PE_CU :

Tableau 4.14 : Plaque encastree sous charge uniformement repartie

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{ref}}$	ACM	1.9864	1.8919	1.1347	0.991	0.9906	0.9908
	R4	1.7070	1.1188	0.8664	0.5411	0.4260	0.1545
	SBH8	1.72	1.18	1.3	0.98	0.988	0.972
	SBRP	1.7115	1.1795	1.0372	0.9980	0.9920	0.9720
	SBRPK	2.1023	1.9846	1.1661	0.9761	0.9761	0.9761

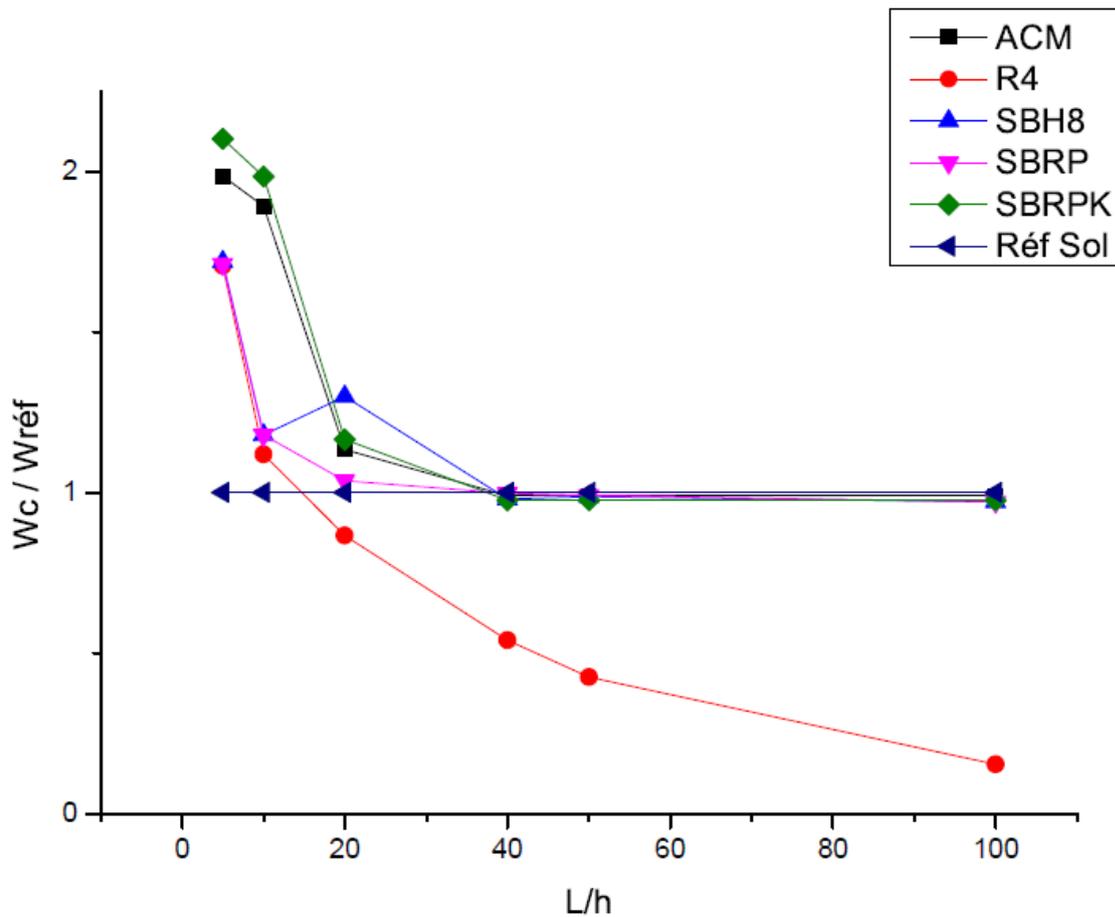


Figure 4.13 : Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche (PE_CU)

D'après les résultats donnés ci-dessus, nous pouvons conclure que :

- Les éléments ACM et SBRPK basés sur la théorie de Kirchhoff, présentent une grande performance, contrairement à l'élément R4 qui se comporte très mal dans le cas de l'analyse des plaques minces.
- Les éléments SBH8 et SBRP basés sur la théorie de Reissner-Mindlin présentent une bonne performance pour l'analyse des plaques épaisses, mais l'élément SBRPK les dépassent lorsqu'il s'agit des plaques très minces ($L/h=100$).

4.4.5. Flexion d'une plaque carrée à deux bords adjacents encastrés aux deux autres libres

Dans cette partie, la plaque étudiée est discrétisée respectivement en différents maillages, il s'agit de passer du maillage grossier au maillage fin pour montrer l'effet de la discrétisation géométrique sur la réponse de la plaque d'une part, et de prendre le maillage qui convient à la présente analyse d'autre part.

Chapitre 4 : Nouvel élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces

Dans ce cadre, nous avons effectué un calcul d'une plaque de côté L et d'épaisseur h , possédant deux bords encastés et deux bords libres, la plaque est soumise à deux types de sollicitations :

- Charge Uniforme (C.U)

-Charge Concentré au Coin libre (C.C.C.L)

Le maillage a été effectué avec des éléments rectangulaires (fig.4.14), il s'agit de quatre discrétisations différentes : 4 éléments, 16 éléments, 64 éléments et enfin 81 éléments. Les résultats obtenus sont présentés sur les tableaux 4.15, 4.16 et 4.17 et les figure 4.15, 4.16 et 4.17.

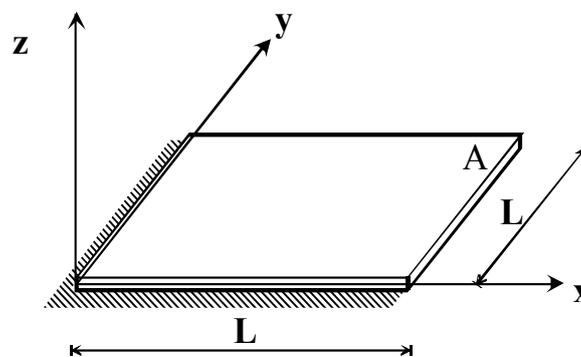


Figure 4.14 : carrée à deux bords adjacents encastés et les deux autres libres

4.4.5.1. Flexion de la plaque carrée sous charge concentrée

**Tableau 4.15 : plaque carrée à deux bords encastés et deux autres libres.
Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L ; $L=10$, $h=0.4$, $P=100$, $\nu=0.3$, $E=3600$)**

Maillage	W_{\max} (Flèche maximale)				
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPS	SBRPK
2x2	0.96857698	0.21782556	0.2155461	0.2624362	0.96836126
4x4	0.9930251	0.82440498	0.8224779	0.8224635	0.99309700
8x8	0.99805853	0.99618897	0.9958726	0.9959013	0.99784281
9x9	0.99805853	1.00266053	1.0023801	1.0012224	0.99841806
Sol.Analytique [DER 90]	139.07 (1.000)				

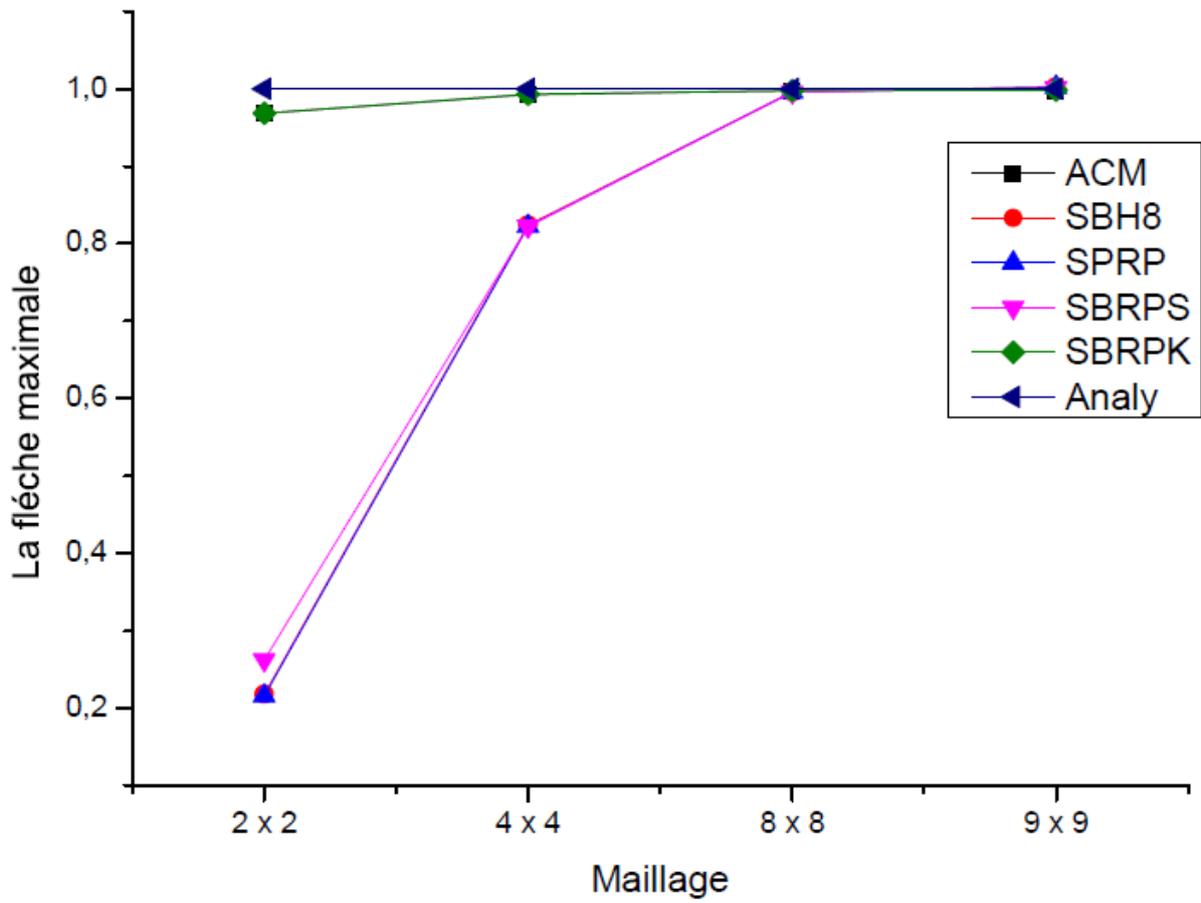


Figure 4.15 : Présentation des résultats de la flèche maximale ($\nu=0.3$)

**Tableau 4.16 : plaque carrée à deux bords encastés et deux autres libres.
Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L ; L=10, h=0.4, P=100, $\nu=0$, E=3600)**

Maillage	W_{\max} (Flèche maximale)				
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPS	SBRPK
2x2	0.97434672	0.19530752	0.1931724	0.2331899	0.97418738
4x4	0.99426386	0.79374602	0.7916985	0.8232951	0.99386552
8x8	0.99824729	0.99083811	0.9904637	0.9931485	0.99824729
9x9	0.99824729	0.99912365	0.998789	0.999761	0.99880497
Sol.Analytique [DER 90]	125.52 (1.000)				

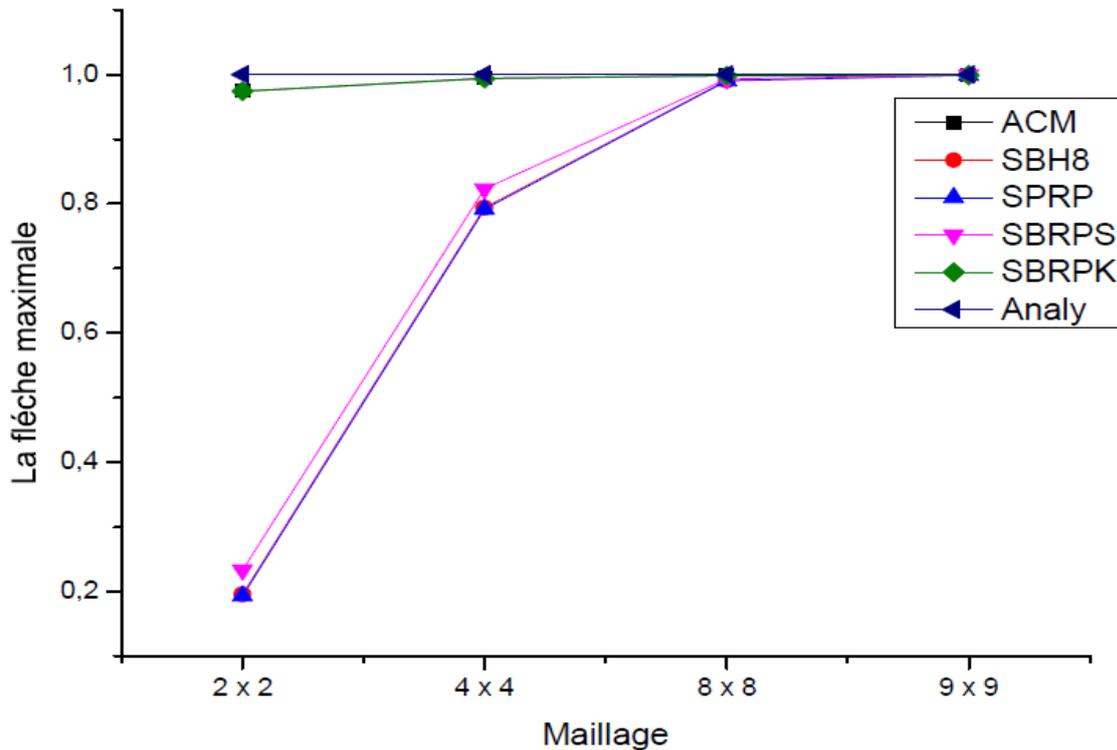


Figure 4.16 : Présentation des résultats de la flèche maximale (v=0)

Pour ces deux cas (Tableaux 4.15 et 4.16) avec la charge concentrée et un maillage de 9x9, l'élément SBRPK est supérieur à l'élément ACM de point de vue convergence et meilleur (pour $v=0,3$) que celle des autres éléments basés sur la même approche (convergence monotone). Pour $v=0,0$ les résultats sont presque les mêmes au millième près. Ceci montre que le SBRPK présente une très bonne convergence pour la flexion des plaques minces.

4.4.5.2. Flexion de la plaque carrée sous charge uniformément répartie

Tableau 4.17 : plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C.U ; L=10, h=0.4, q=0.9, v=0.3, E=3600)

Maillage	W_{\max} (Flèche maximale)			
	ACM	SBH8	SBRP	SBRPK
2x2	0.97585837	0.20252146	0.2003755	0.8706545
4x4	0.99517167	0.79667382	0.7945815	0.9672747
8x8	0.9973176	0.97730687	0.9915773	0.9932403
9x9	0.99785408	0.99629828	0.9980687	0.9948498
Sol.Analytique [DER 90]	18.64(1.000)			

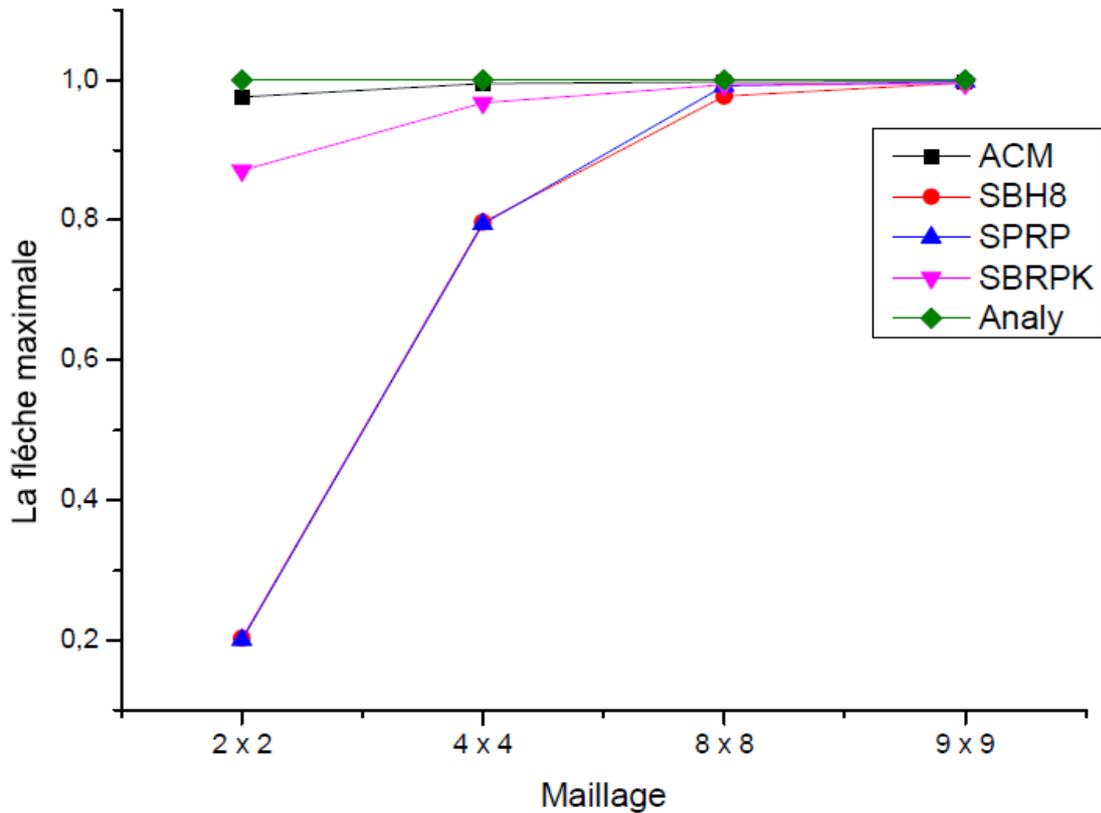


Figure 4.17 : Présentation des résultats de la flèche maximale (C.U)

L'élément SBRPK pour le cas de la charge répartie montre de bonnes performances, les résultats sont presque les mêmes.

4.4.6. Plaque rectangulaire en porte-à-faux

Considérons une plaque en porte à faux, soumise aux deux conditions de chargement suivantes :

- (a) deux charges unitaires appliquées au bord libre (Fig. 4.18a)
- (b) une charge répartie le long du bord libre (Fig. 4.18b)

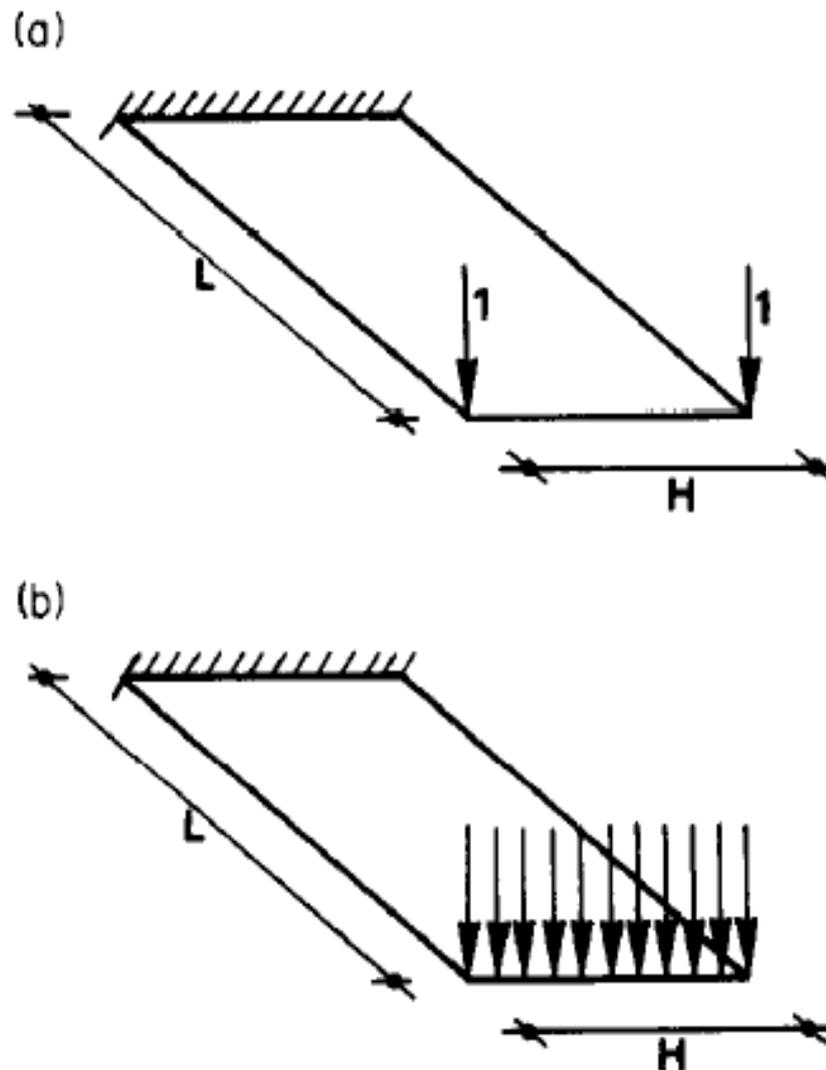


Figure 4.18 : Plaque en porte à faux soumise à :
(a) deux charges unitaires, (b) charge uniformément répartie

Tableau 4.18 : Résultats de plaque en porte-à-faux---condition de chargement (a)
(Fig 4.18a): $E = 1000$, $\nu = 0.0$, $t = 0.1$, $L = 9.00$, $H = 3.00$

Maillage	W_{max}		M_x	
	[DER 90]	SBRPK	[DER 90]	SBRPK
3x3	2054.48	1946.7	-6.00	-6.00
9x3	1959.49	1942.3	-6.00	-6.00
18x6	1950.83	1943.1	-6.00	-6.00
Sol.Analytique [DER 90]	1944		-6.00	

Tableau 4.19 : Résultats de plaque en porte-à-faux--condition de chargement (b)

(Fig4.18b) : $E = 1000$, $\nu = 0.0$, $t = 0.1$, $L = 9.00$, $H = 3.00$

Maillage	W_{max}		M_x	
	[DER 90]	SBRPK	[DER 90]	SBRPK
3x3	2052.0	1944.7	-6.00	-6.00
9x3	1956.0	1944.5	-6.00	-6.00
18x6	1947.0	1944.2	-6.00	-6.00
Sol.Analytique [DER 90]	1944		-6.00	

L'élément SBRPK a une convergence meilleure que celle [DER 90] vers la solution de référence pour la flèche normée.

Les résultats représentés dans les tableaux (4.18 ; 4.19) montrent les bonnes performances de l'élément SBRPK.

4.5. Conclusion

L'élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces basé sur le modèle en déformation possédant quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœud a été présenté dans cette étude. Plusieurs exemples de plaques isotropes ont été illustrés. La présente formulation donne des résultats précis pour la flexion des plaques minces. Les expériences numériques montrent que de bons résultats peuvent être obtenus. Les résultats pour les plaques très minces sont très précis et en bon accord avec ceux des solutions analytiques des plaques minces et d'autres résultats disponibles trouvés dans la littérature. Le présent élément présente un bon taux de convergence que ce soit pour les déplacements ou les moments (centre de la plaque et aux bords libres).

CHAPITRE 5

NOUVEL ELEMENT SECTEUR POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

Chapitre 5

Nouvel élément secteur basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces

5.1. Introduction

Lors l'analyse des structures de formes quelconques et dans le but d'avoir des résultats satisfaisants on utilise alors des éléments finis de géométrie typique, tels les éléments rectilignes (triangles, rectangles, quadrilatères). Dans le cas de structures à bords incurvés, et pour avoir des résultats suffisamment convergent, on doit discrétiser ces structures en un très grand nombre d'éléments finis. Toutefois, dans certains cas particuliers où les bords sont circulaires, tels que des plaques annulaires et au voisinage des trous circulaires, il semble plus approprié et économique d'utiliser les coordonnées polaires (r,θ) , pour analyser ces structures. Par ailleurs, le succès de l'approche basée sur la déformation appliquée aux problèmes de l'élasticité plane, a incité les chercheurs à étendre leur travail aux autres types de structures de formes arbitraires et aux structures à contours circulaires.

Dans la plupart des cas de modélisation de ces types de structures par éléments secteurs, les résultats sont directement comparés aux solutions analytiques [FEL 13]. Dans la littérature de l'approche en déformation, ce domaine n'est pas suffisamment couvert.

Nous allons présenter dans ce chapitre, le développement d'un nouvel élément appelé SBSPK (Strain Based Sector Plate kirchhoff) pour l'étude de la flexion des plaques minces. L'efficacité et la robustesse de l'élément développé ont été évaluées à travers des exemples disponibles dans la littérature.

5.2. Modélisation des structures à contour circulaire par éléments finis secteurs

La modélisation par éléments finis dits secteurs des structures à contours circulaires a fait l'objet de beaucoup de recherches. Raju et Rao [RAJ 69] ont présenté un élément secteur pour l'état plan de contrainte avec deux degrés de liberté pour chaque nœud. En 1970, Olson et Lindberg [OLS 70], ont développé des éléments finis de forme annulaire et circulaire pour les problèmes de flexion des plaques.

Chapitre 5 : Nouvel élément secteur pour l'étude de la flexion des plaques minces

Après cela, Raju, Krishna et Rao [RAJ 73], ont développé trois éléments secteurs, deux pour les problèmes de contrainte plane et un pour la flexion des plaques.

Durant l'année 1984, Avanesian [DER 84] a développé un élément secteur basé sur le modèle en déplacement qui a été appliqué pour l'analyse linéaire et géométriquement non linéaire des plaques en forme d'anneau. En 1986, deux éléments secteurs à modèle en déformation ayant deux ddl par nœud ont été développés par Sabir et Salhi [SAB 86].

Durant la même période, et vu le succès dû à l'application de l'approche en déformation aux problèmes d'élasticité plane [SAB 86], ceci a encouragé l'extension de la recherche aux développements des éléments secteurs en coordonnées polaires, ayant « θz » comme degré de liberté additionnel (DDLA). De tels éléments sont utilisés dans certaines applications particulières où ils s'adaptent bien à la géométrie du problème, ainsi qu'aux structures complexes (comme les buses ou les tunnels enterrés). La combinaison de ces éléments avec les éléments poutres (arcs) ayant trois ddl par nœud, nécessite l'introduction d'un ddl additionnel aux éléments plans bidimensionnels. Bouzerira [BOU 87] a développé un élément secteur avec en plus des déplacements de translation comme degrés de liberté, une rotation autour de la normale en se basant sur le modèle en déformation, cependant les résultats obtenus en analysant quelques problèmes d'élasticité plane (cas de flexion pure) ont été non concluants à cause du choix inapproprié du champ de déformation. Deux autres éléments secteurs dus à Djoudi [DJO 90] ont amélioré la qualité des résultats mais restent sensibles au rapport d'aspect.

Pour pallier à ces inconvénients, Belarbi [BEL 00] a développé un élément secteur simple à quatre nœuds avec trois ddl par nœud, qui donne des résultats plus précis que les autres éléments. Hamadi [HAM 06] a développé ensuite un nouvel élément secteur mixte basé sur l'approche en déformation avec quatre nœuds d'angle et un nœud central, chaque nœud possède deux degrés de liberté, en utilisant la technique de condensation statique. Les résultats obtenus sont en accord étroit avec la solution analytique et avec les résultats donnés par d'autres éléments. Aghdam et al [AGH 07] ont présenté une solution approximative pour la flexion des plaques circulaires minces en utilisant la méthode Kantorovich étendue. Bouzriba et Bouzriba [BOU15] ont développé un élément secteur pour l'analyse des cylindres épais, exposés à la pression et au changement de la température interne, avec deux degrés de liberté de translation, ainsi que la rotation dans le plan. Cet élément peut prédire la contrainte et le déplacement en un point quelconque du cylindre soumis à une pression et à la température combinée.

5.3. Différentes approches utilisées pour le développement des éléments secteurs

Le développement d'éléments finis secteurs en coordonnées polaires, peut être obtenu par les trois approches suivantes :

- La première approche : "Approche directe" ou approche de Raju [RAJ 69], c'est d'utiliser les champs de déplacement obtenus en coordonnées cartésiennes en remplaçant directement les variables cartésiennes "x, y" par les coordonnées polaires "r, θ ".
- La deuxième approche : "Transformation des coordonnées», est d'utiliser les champs de déplacements obtenus en coordonnées cartésiennes, puis les transformer en coordonnées polaires. Cette méthode a été utilisée par Sabir et Salhi [SAB 86].
- La troisième approche : dite "Intégration directe", c'est la formulation des champs de déplacement et de déformation directement en coordonnées polaires. Pour l'approche en déformation il suffit d'intégrer le champ des déformations pour obtenir celui des déplacements. Cette méthode a été utilisée par Sabir et Bouzerira [BOU 87].

5.3.1. Élément de Raju et Rao [RAJ 69]

L'un des éléments finis les plus utilisés dans l'analyse des problèmes de l'élasticité plane est l'élément quadrilatère bilinéaire. En coordonnées cartésiennes les fonctions de déplacement sont données par :

$$U = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (5.1a)$$

$$V = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (5.1b)$$

Raju et Rao ont développé un élément secteur **PSL** (Sector element with Linear displacement variation) utilisant le champ des déplacements (5.1) soit :

$$U_r = a_1 + a_2r + a_3\theta + a_4r\theta \quad (5.2a)$$

$$V_\theta = a_5 + a_6r + a_7\theta + a_8r\theta \quad (5.2b)$$

Cependant, l'élément résultant **PSL** donne de mauvais résultats quand il s'agit d'étudier un problème plan de flexion pure (flexion pure d'un anneau semi-circulaire).

5.3.2. Élément de Sabir et Salhi [SAB 86]

Sabir et Salhi ont utilisé la deuxième approche et ont développé un élément secteur basé sur l'approche en déformations. Il a deux degrés de liberté à chaque nœud. Les systèmes des coordonnées et les déplacements sont indiqués sur la Fig.5.1.

Les fonctions de déplacement sont données par les équations suivantes :

$$\bar{U} = a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy + a_8y/2 - a_7y^2/2 \tag{5.3a}$$

$$\bar{V} = a_2 + a_3x + a_6y + a_7xy + 0.5a_8x - a_5x^2/2 \tag{5.3b}$$

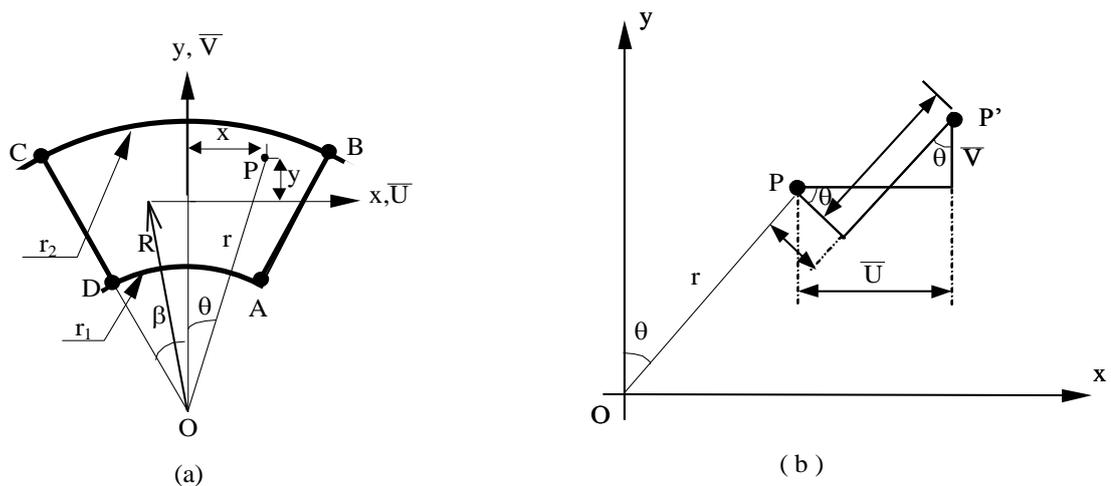


Figure 5.1 : les systèmes des Coordonnées et les déplacements de l'élément secteur

Pour convertir les deux équations ci-dessus en termes de système de coordonnées polaires, on utilise les expressions suivantes :

$$x = r \sin \theta \tag{5.4a}$$

$$y = r \cos \theta - R \tag{5.4b}$$

Chapitre 5 : Nouvel élément secteur pour l'étude de la flexion des plaques minces

Où R est le rayon de courbure de la ligne circonférentielle centrale de l'élément et les coordonnées polaires r et θ sont représentés sur la figure 5.1 (a).

U et V sont les déplacements en translation donnés par : "Fig.5.1 (b)"

$$U = \bar{U} \sin\theta + \bar{V} \cos\theta \quad (5.5a)$$

$$V = \bar{U} \cos\theta - \bar{V} \sin\theta \quad (5.5b)$$

Les fonctions finales de déplacement sont données en termes de coordonnées polaires de la façon suivante :

$$U = a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta + a_3 R \sin\theta + a_4 r \sin 2\theta + a_5 r \sin 2\theta (r \cos\theta / 2 - R) + a_6 \cos\theta (r \cos\theta - R) + \frac{a_7 \sin\theta (r^2 \cos 2\theta - R^2)}{2} + a_8 \sin\theta (r \cos\theta - \frac{R}{2}) \quad (5.6a)$$

$$V = a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta + a_3 (R \cos\theta - r) + a_4 r \sin\theta \cos\theta + a_5 r \sin\theta \left(r \cos^2\theta + \frac{r \sin^2\theta}{2} \right) + a_6 \sin\theta (R - r \cos\theta) - \frac{a_7 (r^2 \cos^3\theta - R^2 \cos\theta + 2r^2 \sin^2\theta \cos\theta - 2rR)}{2} + a_8 (\cos 2\theta - R \cos\theta) / 2 \quad (5.6b)$$

5.3.3 Élément de Bouzerira [BOU 87]

Bouzerira a développé un élément secteur à douze degrés de liberté basé sur l'approche en déformation, le champ de déformation proposé est:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_4 + a_5 \theta + a_6 r \\ \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8 \theta + \frac{a_9}{r} + a_6 r \\ \gamma_{r\theta} &= a_{10} + \frac{a_{11} \theta}{r} + a_{12} r + a_6 r \theta / 2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Lors de l'analyse de certains problèmes d'élasticité plane, cet élément s'avère insatisfaisant, en particulier pour la convergence de la déflexion.

5.3.4. Elément de Djoudi [DJO 90]

Djoudi a développé deux éléments secteurs:

Le premier élément est développé en utilisant la deuxième approche et en utilisant les fonctions de forme de SBRIEIR développé par Sabir [SAB 86], le champ de déformation est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_6y + a_{10}y^2 + 2a_{11}xy^3 \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8x - a_{10}x^2 - 2a_{11}yx^3\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$\gamma_{xy} = 2a_5 + a_6x + a_8y + 2a_9y + 2a_{12}x$$

Le deuxième élément est développé en utilisant la première approche et en utilisant les fonctions de forme de l'élément Bouzerira [BOU 87], le champ de déformation est:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= a_4 + a_5\theta + a_6r \\ \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8\theta + \frac{a_9}{r} + a_6r \\ \gamma_{r\theta} &= a_{10} + \frac{a_{11}\theta}{r} + a_{12}r + a_6r\theta/2\end{aligned}\tag{5.9}$$

Ces deux éléments améliorent les résultats, mais restent instables pour le rapport d'aspect.

5.3.5. Elément de Belarbi SBS4 [BEL 98]

Belarbi et Charif ont utilisé la même approche que Raju et Rao [RAJ 69], et ont développé un élément secteur basé sur l'approche en déformation. Il possède trois degrés de liberté dans chaque noeud. Les champs de déplacement en coordonnées cartésiennes proposés sont les suivants:

$$\begin{aligned}U &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5y + a_6xy + a_8\frac{y^2}{2} + a_9y^2 + a_{10}xy^2 + a_{11}x^2y^3 \\ V &= a_2 + a_3x + a_5x + a_6\frac{x^2}{2} + a_7y + a_8xy - a_{10}x^2y - a_{11}y^2x^3 + a_{12}x^2 \\ \theta_z &= a_3 - a_9y - 2a_{10}xy - 3a_{11}x^2y^2 + a_{12}x\end{aligned}\tag{5.10}$$

En remplaçant x et y par r et θ ; le champ de déplacement serait:

$$U = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta + a_6r\theta + a_8\frac{\theta^2}{2} + a_9\theta^2 + a_{10}r\theta^2 + a_{11}r^2\theta^3$$

$$V = a_2 + a_3r + a_5r + a_6\frac{r^2}{2} + a_7\theta + a_8r\theta - a_{10}r^2\theta - a_{11}y\theta^2r^3 + a_{12}r^2 \quad (5.11)$$

$$\theta_z = a_3 - a_9\theta - 2a_{10}r\theta - 3a_{11}r^2\theta^2 + a_{12}r$$

Cet élément était plus précis.

5.4. Formulations d'un nouvel élément secteur basée sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces

L'approche directe mentionnée ci-dessus est utilisé pour développer un nouvel élément secteur **SBSPK** (Strain Based Sector Plate Kirchhoff) sur la base des fonctions de forme de l'élément SBRPK ,il possède quatre nœuds et 12 degrés de liberté au total, destiné au calcul des plaques minces de forme circulaire en flexion.

$$w = a_1 - a_2x - a_3y - a_4\frac{x^2}{2} - a_5\frac{x^3}{6} - a_6\frac{x^2y}{2} - a_7\frac{x^3y}{6} - a_8\frac{y^2}{2} - a_9\frac{xy^2}{2} - a_{10}\frac{y^3}{6} - a_{11}\frac{xy^3}{6} - a_{12}\frac{xy}{2} \quad (5.12a)$$

$$\beta_x = a_2 + a_4x + a_5\frac{x^2}{2} + a_6xy + a_7\frac{x^2y}{2} + a_9\frac{y^2}{2} + a_{11}\frac{y^3}{6} + a_{12}\frac{y}{2} \quad (5.12b)$$

$$\beta_y = a_3 + a_6\frac{x^2}{2} + a_7\frac{x^3}{6} + a_8y + a_9xy + a_{10}\frac{y^2}{2} + a_{11}\frac{xy^2}{2} + a_{12}\frac{x}{2} \quad (5.12c)$$

En remplaçant x et y par r et θ , nous avons :

$$w = a_1 - a_2r - a_3\theta - a_4\frac{r^2}{2} - a_5\frac{r^3}{6} - a_6\frac{r^2\theta}{2} - a_7\frac{r^3\theta}{6} - a_8\frac{\theta^2}{2} - a_9\frac{r\theta^2}{2} - a_{10}\frac{\theta^3}{6} - a_{11}\frac{r\theta^3}{6} - a_{12}\frac{r\theta}{2} \quad (5.13a)$$

$$\beta_r = a_2 + a_4r + a_5\frac{r^2}{2} + a_6r\theta + a_7\frac{r^2\theta}{2} + a_9\frac{\theta^2}{2} + a_{11}\frac{\theta^3}{6} + a_{12}\frac{\theta}{2} \quad (5.13b)$$

$$\beta_\theta = a_3 + a_6\frac{r^2}{2} + a_7\frac{r^3}{6} + a_8\theta + a_9r\theta + a_{10}\frac{\theta^2}{2} + a_{11}\frac{r\theta^2}{2} + a_{12}\frac{r}{2} \quad (5.13c)$$

Les relations déformation-déplacement en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\epsilon_{rr} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (5.14a)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \quad (5.14b)$$

$$\gamma_{r\theta} = -\left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}\right) \quad (5.14c)$$

La matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ de SBSPK, s'obtient ainsi en suivant les techniques habituelles de la méthode des éléments finis.

$$[k^e] = [A]^{-T} \left(\int_{-\beta}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] [B] r dr d\theta \right) [A]^{-1} = [A]^{-T} [k_0] [A]^{-1} \quad (5.15)$$

La matrice de déformation $[B]$ s'obtient en substituant les équations (5.13) dans (5.14) :

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & r & \theta & r\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 1 & \frac{r}{2} & \theta & \frac{r\theta}{2} & \frac{1}{r^2} & \frac{\theta^2}{2r} + \frac{1}{r} & \frac{\theta}{r^2} & \frac{\theta^3}{6r} + \frac{\theta}{r} & \frac{\theta}{2r} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{r}{3} & -\frac{\theta}{r^2} & 0 & -\frac{\theta^2}{2r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $[A]$ de 12×12 éléments, est donnée dans Appendix A3

La matrice $[k_0]$ pour l'élément SBSPK est donnée dans Appendix A3

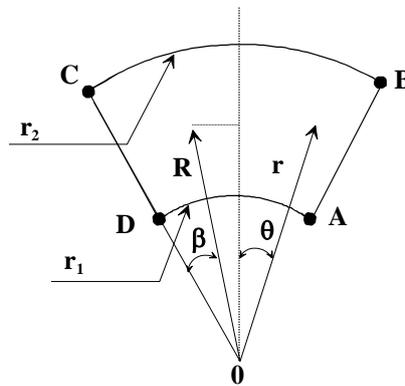


Figure 5.2 : Géométrie de l'élément secteur SBSPK

Chapitre 5 : Nouvel élément secteur pour l'étude de la flexion des plaques minces

Pour un matériau isotrope, les relations constitutives entre les contraintes et les déformations sont données par :

$$\begin{bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Avec M_r , M_θ et $M_{r\theta}$ qui représentent les moments de flexion

La matrice de rigidité [D] contient les valeurs d_{ij} , qui sont définies par :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{12} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{33} = d_{11} \frac{(1-\nu)}{2}$$

Avec E le module d'Young, h est l'épaisseur de plaque et ν coefficient de poisson.

5.5. Tests de Validation

Afin de valider l'élément proposé « SBSPK », des tests de convergence sont effectués sur des plaques circulaires (fig.5.3) avec différentes conditions aux limites de chargements et d'appuis.

Dans les relations données ci-dessous :

- P : est la charge par unité de surface exercée sur la plaque.
- h : est l'épaisseur constante de la plaque
- E et ν : sont respectivement le module de Young et le coefficient de poisson du matériau.
- D : représente la rigidité de plaque et a pour valeur :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- R : le rayon extérieur de la plaque.
- r : un rayon quelconque. $r = \alpha R$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$

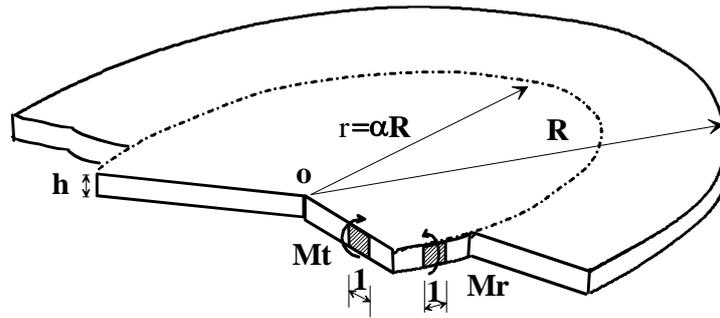


Figure 5.3 : Géométrie de la plaque Circulaire

5.5.1. Plaque annulaire avec charge répartie le long du cercle intérieur. Encastrement à la périphérie

La plaque annulaire montrée dans la Fig.5.4 est soumise à une charge uniformément répartie $P = 1\text{N.mm}$ le long du diamètre intérieur et encastree aux bords. Les propriétés géométriques et mécaniques sont les suivantes:

$$h = 0,2 \text{ mm}, R = 40 \text{ mm}, r = 20 \text{ mm}, E = 2 \times 10^5, \nu = 0,3.$$

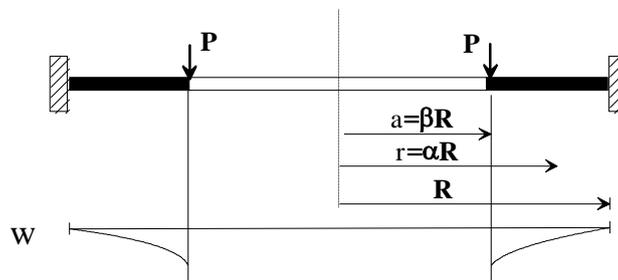


Figure 5.4 : Plaque annulaire encastree sous charge uniformément répartie le long du cercle intérieur

La solution analytique du déplacement latéral W est donnée par Geminard et Get [GEM 71].

$$W = \frac{PR^2}{8D} \beta [(1 + 2K_2)(1 - \alpha^2) + 4K_2 \log \alpha + 2\alpha^2 \log \alpha]$$

Où : $K_2 = \beta^2 \frac{1+(1-\nu)\log\beta}{1-\nu+(1+\nu)\beta^2}$

Chapitre 5 : Nouvel élément secteur pour l'étude de la flexion des plaques minces

Pour l'analyse numérique, le maillage de la forme est représenté sur la Fig.5.5. Les résultats numériques du déplacement latéral W_{max} sont donnés dans le tableau 5.1 et la courbe de convergence est présentée sur la Fig.5.6.

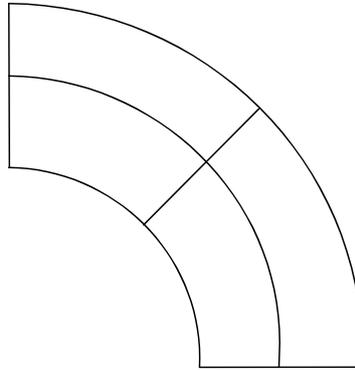


Figure 5.5 : Exemple de maillage (2x2)

Tableau 5.1 : Convergence de la flèche pour la plaque annulaire à bords encastrés et chargée uniformément suivant le cercle intérieur

Maillage	W_{max} (SBSPK)
1x1	0.03183
2x2	0.09322
3x3	0.2028
4x4	0.3791
4x5	0.4492
Solution Analytique	0.4391

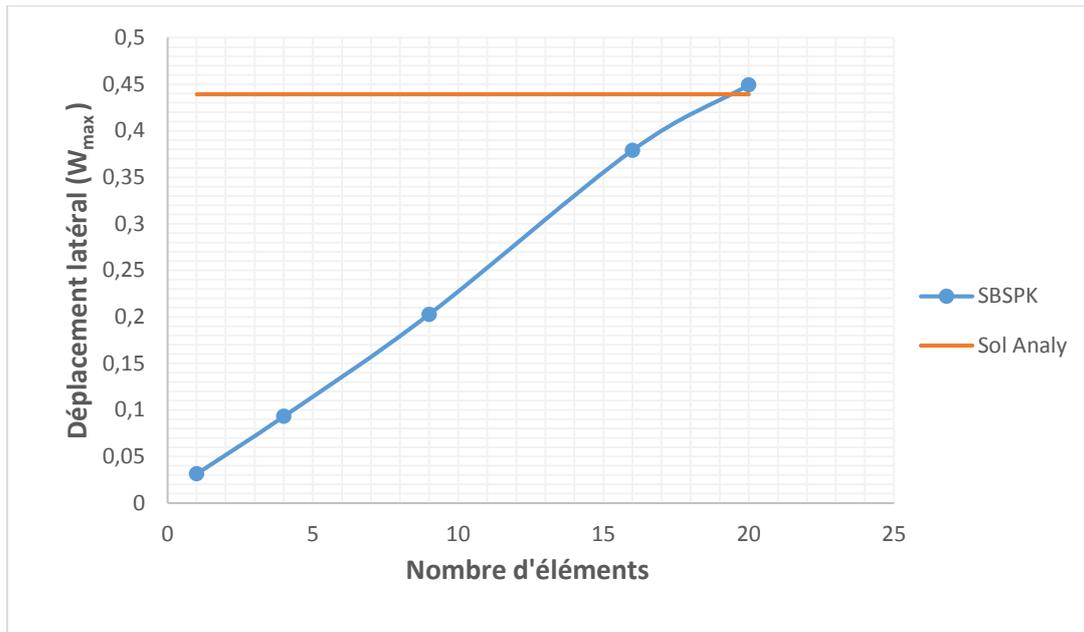


Figure 5.6 : Convergence de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords encastres

Les résultats représentés sur la Figure (5.6) montrent la bonne convergence de l'élément développé SBSPK vers la solution analytique (convergence monotone).

Tableau 5.2 : Variation de la flèche pour la plaque annulaire à bords encastres et chargée uniformément suivant le cercle intérieur

r (mm)	Wmax	Solution Analytique
20	0.4492	0.4391
24	0.356	0.367
28	0.263	0.284
32	0.173	0.194
36	0.085	0.098
40	0	0

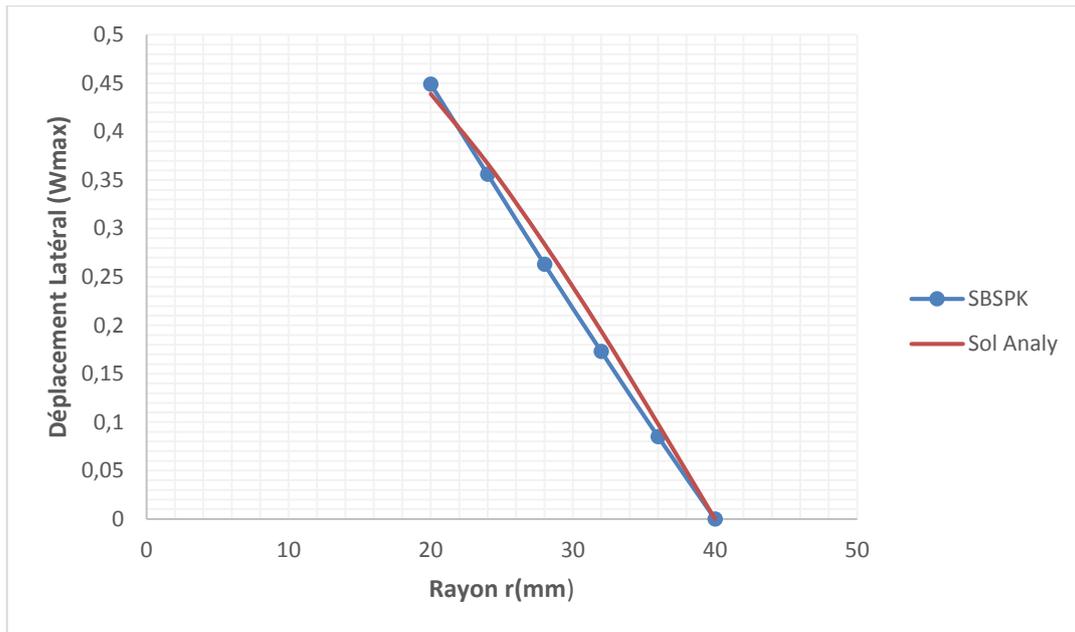


Figure 5.7 : Variation de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords encastrés

5.5.2 Plaque annulaire, charge répartie le long du cercle intérieur. Appui simple sur la périphérie

Dans ce test, nous avons utilisé la même plaque que l'exemple précédent, mais les bords sont simplement appuyés. La solution analytique du déplacement latéral W est donnée par Geminard et Get [GEM 71].

Les résultats obtenus pour le déplacement latéral sont donnés dans le tableau 5.3 et la courbe de convergence est présentée sur la Fig.5.8.

$$W = \frac{Pa^3}{8D} \beta \left[\frac{3 + \nu - 2k_1}{1 + \nu} (1 - \alpha^2) + 4 \frac{k_1}{1 - \nu} \log \alpha + 2\alpha^2 \log \alpha \right]$$

Où : $k_1 = (1 + \nu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \log \beta$

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 5.3 : Le déplacement latéral W_{max} pour la plaque simplement appuyée sous une charge uniformément répartie le long du cercle intérieur

Maillage	W_{max} (SBSPK)
1x1	2.6387
2x2	6.3017
3x3	8.0700
4x4	8.0344
5x5	8.0027
6x6	7.3333
Solution Analytique	7.2515

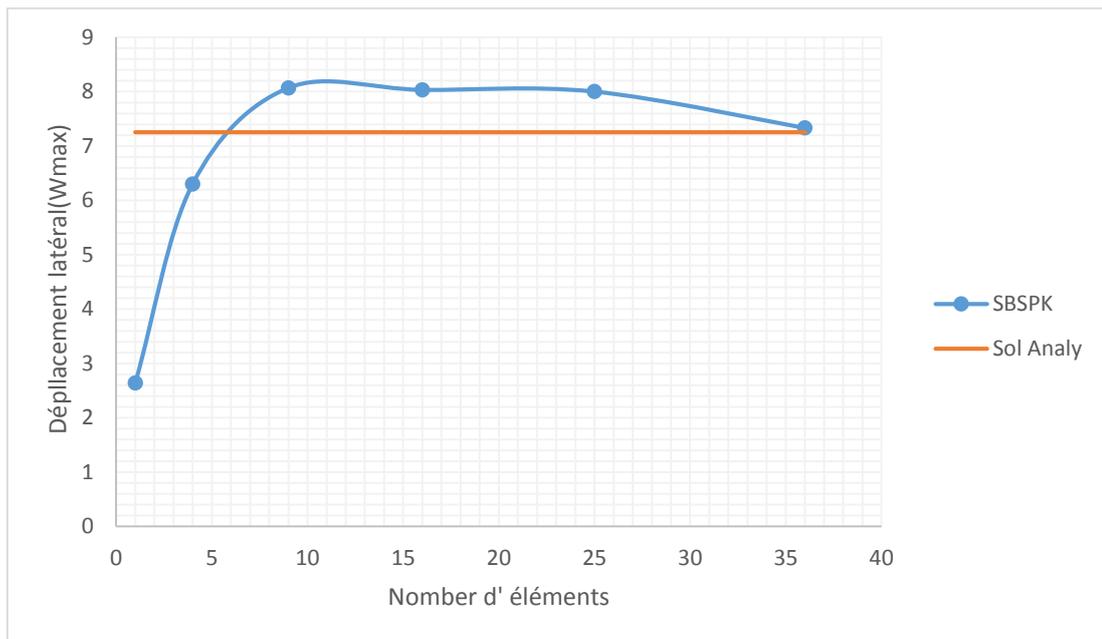


Figure 5.8 : Convergence de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords simplement appuyés

Dans la figure (5.8) on remarque que cet élément SBSPK converge rapidement vers la solution analytique avec un maillage de 4 éléments.

Tableau 5.4 : Variation de la flèche pour la plaque simplement appuyée sous une charge uniformément répartie le long du cercle intérieur

r (mm)	Wmax	Solution Analytique
20	7.333	7.251
23.33	6.523	6.256
26.66	5.564	5.056
29.99	4.445	3.92
33.33	3.154	2.73
36.66	1.667	1.31
40	0	0

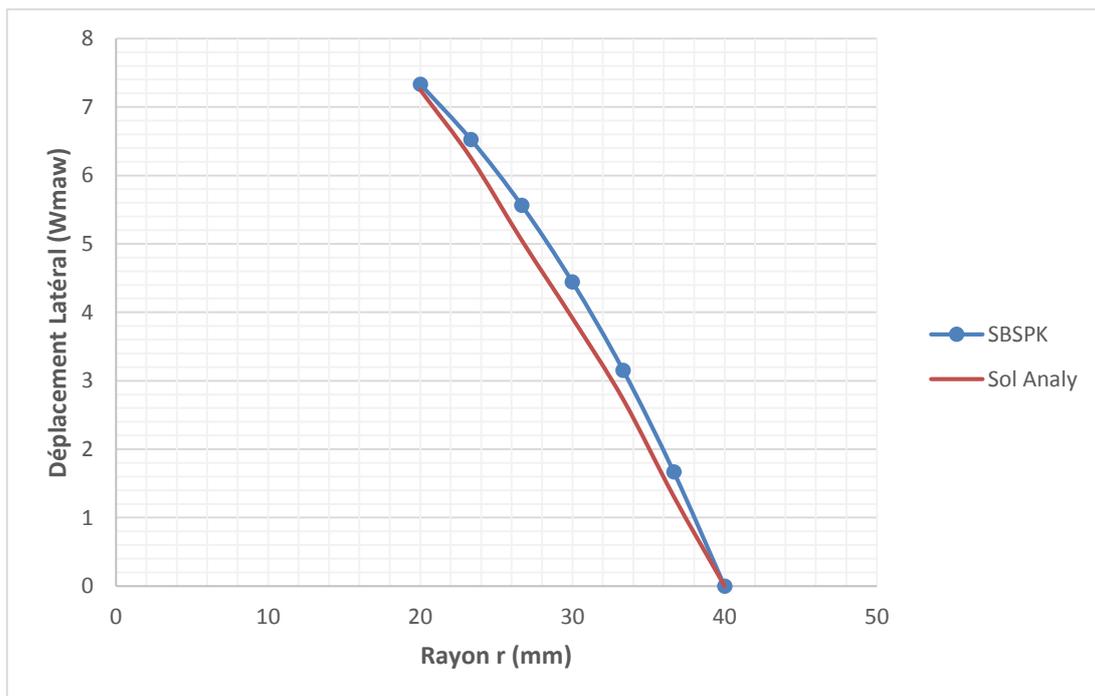


Figure 5.9 : Variation Convergence de la flèche maximale pour la plaque annulaire à bords simplement appuyés

5.5.3 Plaque annulaire en console soumise à une charge concentrée

Le problème considéré ici est celui d'une plaque annulaire en console (Fig.5.10) ; encastrée le long du bord intérieur ($r = b$), et soumise à une charge concentrée $P = 1\text{N}$ sur le bord extérieur ($R = a$). La solution analytique pour ce cas est donnée par Timoshenko et Woinowsky-Krieger [TIM 59]. Un élément fini secteur a été utilisé par Olson et Lindberg [OLS 70] pour étudier ce même problème avec les propriétés géométriques et mécaniques suivantes : $h = 0,2\text{ mm}$, $R = 150\text{ mm}$, $r = 100\text{ mm}$, $E = 2 \times 10^5$, $\nu = 0,3$. Les résultats obtenus pour le déplacement latéral sous la charge, sont donnés dans le tableau 5.5 et la courbe de convergence est présentée sur le Fig.5.11.

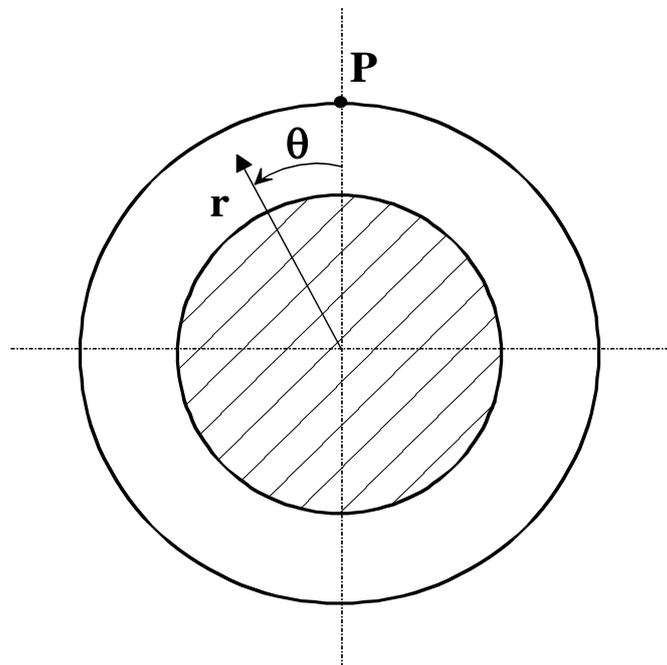


Figure 5.10 : Plaque annulaire en console soumise à une charge concentrée

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 5.5 : Le déplacement latéral W sous la charge concentrée de la plaque annulaire en console

Maillage	SBSPK	Olson's element [Ols70]
1x6	0.017940	0.050896
2x6	0.032634	-
2x12	0.033968	0.051372
3x12	0.047662	-
3x18	0.050147	0.051027
3x24	0.050772	-
Solution Analytique	0.050718	

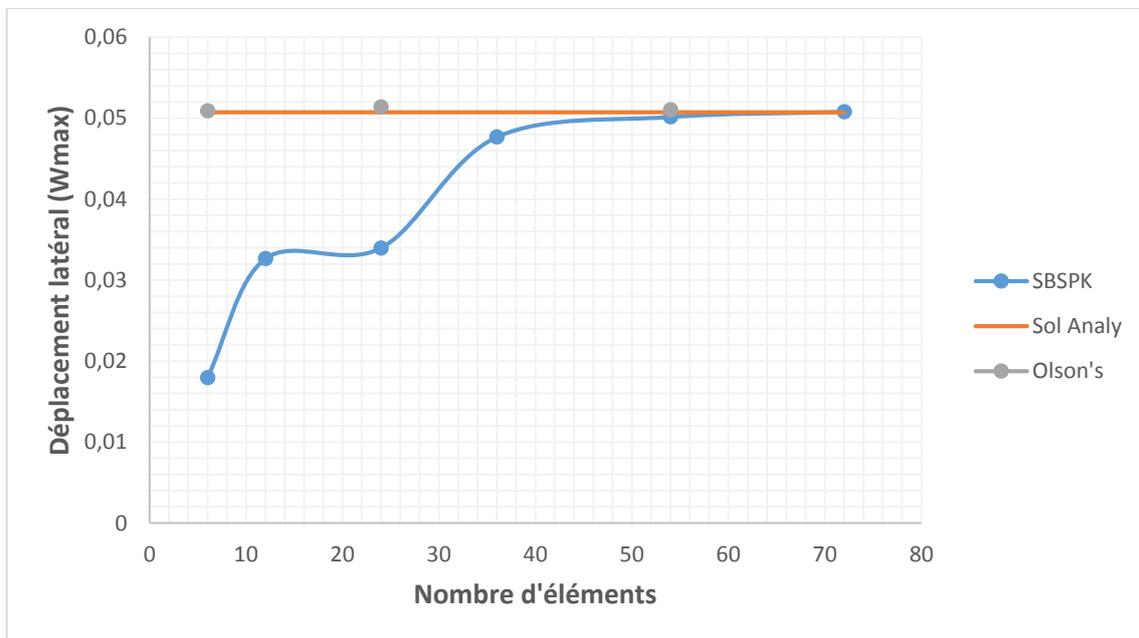


Figure 5.11 : Convergence du déplacement W sous la charge concentrée de la plaque annulaire en console

A partir du figure (5.11), on note que les résultats donnés par l'élément de Olson's converge rapidement vers la solution analytique avec un maillage de 6 éléments, mais le présent élément « SBSPK » donne un bon résultat avec un maillage de 54 éléments et reste stable jusqu'à un maillage de 74 éléments (en pourcentage 1.001).

5.5.4 Plaque circulaire soumise à une charge concentrée

Dans cette dernière application, la plaque est de forme circulaire, dont les bords extérieurs sont encastres ($R = a$) et est soumis à une charge concentrée P à une distance $r = b$ (figure 5.12). La solution analytique pour ce problème est également donnée par Timoshenko et Woinowsky-Krieger [TIM 59]. Avec les propriétés géométriques et mécaniques suivantes :

$$P = 0.1N, h = 0,2 \text{ mm}, R = 100 \text{ mm}, r = 50 \text{ mm}, E = 2 \times 10^5, \nu = 0,3.$$

Les résultats obtenus pour le déplacement latéral sous la charge, sont donnés sur le tableau 5.6 et la courbe de convergence est présentée dans le la figure 5.13

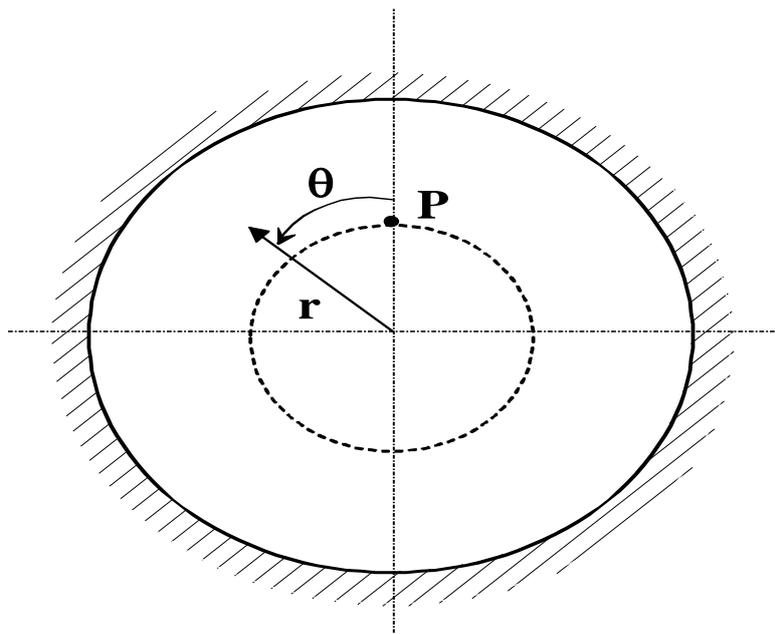


Figure 5.12 : Plaque circulaire soumise à une charge concentrée

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 5.6 : Le déplacement latéral W pour la plaque circulaire à bords encastés soumise à une charge concentrée

Maillage	W (SBSPK)
1x1	0.00114
2x2	0.00180
3x3	0.00471
4x4	0.00837
4x5	0.01133
Solution Analytique	0.01119

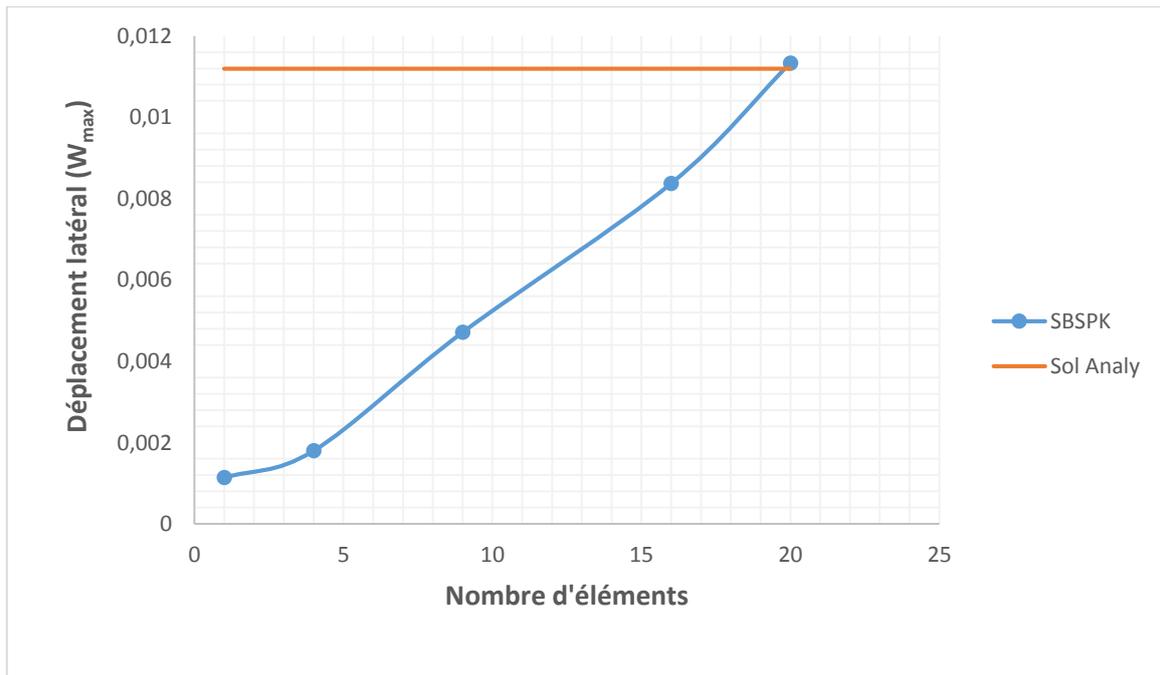


Figure 5.13 : Convergence du déplacement latéral W de la plaque circulaire à bords encastés

Chapitre 5 : Nouvel élément secteur pour l'étude de la flexion des plaques minces

Une étude comparative de l'erreur de convergence entre le nouvel élément formulé SBSPK et l'élément d'Olson [OLS70] est présentée dans le tableau 5.7.

Tableau 5.7 : Erreur de la convergence du déplacement latéral de la plaque circulaire à bords encastés, sous charge concentrée

Element	Maillage	Nombre de degrés de liberté	Déplacement latéral	Solution Analytique	Erreur
SBSPK	4x5	30	0.01133	0.01119	1.25%
Olson's element [OLS70]	20x8	523	0.01099	0.01119	1.78%

Les résultats montrés dans les tableaux (5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7) indiquent, en générale, la bonne performance de l'élément **SBSPK** pour ce type de structure.

5.6. Conclusion

Le présent élément secteur "SBSPK" basé sur l'approche en déformation proposé pour l'analyse des problèmes de la flexion des plaques circulaires minces s'avère très performant. C'est un élément simple avec quatre nœuds (3 d.d.l./nœud). La matrice de rigidité est établie grâce à une intégration analytique. Plusieurs exemples numériques ont été étudiés pour évaluer la performance du présent élément. En général, il a été démontré qu'avec l'utilisation d'un nombre réduit d'éléments, on peut obtenir de bons résultats par rapport aux solutions analytiques et ceux d'autres éléments connus dans la littérature spécialisée. Tout cela fait que l'approche en déformation est très appropriée pour beaucoup d'applications en Génie civil.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Tout au long de ce travail nous avons développé deux éléments finis basés sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des structures minces de types plaques. Ces deux éléments possèdent chacun, seulement, quatre nœuds et dans chaque nœud on a trois degrés de liberté (une translation et deux rotations). Pour la construction des matrices de rigidités élémentaires des éléments développés, une intégration analytique suivie d'un calcul automatique des termes de cette matrice est pratiqué. Dans les champs des déplacements, le mouvement de corps rigide -MCR- est représenté de manière exacte et les formulations vérifient les équations de compatibilité. Plusieurs tests ont été utilisés pour étudier l'effet de cisaillement transversal sur la flèche, et cela pour différentes valeurs de l'élancement. Le premier élément développé est nommé SBRPK (Strain Based Rectangular Plate Kirchhoff) destiné à la modélisation des plaques minces rectangulaires en flexion. Les résultats pour cet élément, ont montré de bonnes performances. En effet ils sont meilleurs que ceux d'autres éléments basés sur l'approche en déformation, et montrent qu'ils sont libres de tout blocage en cisaillement transverse lorsqu'on modélise les plaques minces. Cet élément présente une convergence assez rapide vers les solutions de référence (solutions de Kirchhoff) pour les déplacements et les moments de flexion au centre de la plaque et aux bords libres.

Lors de la formulation du champ des déplacements en coordonnées polaires, du deuxième élément baptisé SBSPK (Strain Based Sector Plate Kirchhoff), on a utilisé l'approche dite directe. En effet, ce sont les coordonnées cartésiennes, utilisées dans les fonctions de forme de l'élément SBRPK qui ont été transformées en coordonnées polaires. Pour la validation, l'élément développé est passé sur plusieurs tests numériques et les résultats obtenus confirment sa bonne performance dans l'analyse des plaques circulaires minces avec ouvertures en flexion. À partir de toutes ces applications numériques, il a été prouvé encore une fois de plus l'efficacité de l'approche en déformation.

Conclusion générale

Enfin, il serait intéressant de formuler un élément secteur à facette plane, pour l'analyse des structures en coque, en superposant le présent élément flexionnel SBSPK avec le très connu élément secteur membranaire SBS4 (Strain Based Sector 4-node).

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [ALL 88] Allman D.J. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *IJNME* 26, 717-730 (1988).
- [ARG 60] Argyris J. H., Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements, *J.Roy. Aer. Soc.*, Vol. 69, pp. 801-805, 1965.
- [ASH 71] Ashwell D.G. and Sabir A.B., Limitations of certain curved finite elements when applied to arches, *IJMS* Vol. 13, pp. 133-139, 1971.
- [ASH 72] Ashwell D.G. and Sabir A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *IJMS*, Vol.14, pp.171-183, 1972.
- [BAT 80] Batoz JL, Bathe KJ, Ho LW. "A study of three-node triangular plate bending elements". *Int J Numer Meth Eng* 1980;15:1771–812
- [BAT 90] Batoz J. L. et Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 1 : Solides élastiques, Eds. Hermès, Paris, 1990
- [BEL 98] Belarbi M.T. et Charif A, ((Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan)) *Européenne des Eléments Finis*, Vol. 7, N0 4, p. 439-458, juin 1998.
- [BEL 99] Belarbi M.T. et Charif A., "Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur Le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses", *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.8, N0 2, pp. 135157,1999
- [BEL 00] Belarbi M.T., Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire et non linéaire. Thèse de doctorat, Université de Constantine, Février 2000. 235 pages
- [BELA 05] Belarbi M.T & Maalem .T « On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne des Eléments*, 14:8, 985-997
- [BEL 05] Belarbi M.T and Bourezane M,"On improved Sabir triangular element with drilling rotation",*Revue Européenne de Génie Civil*,Vol.9,N 0 910, pp. 117123,2005
- [BELO 05] Belounar L and Guenfoud M,"A New Rectangular finite element based on the strain approach for plate bending",*Thin Walled Structures* 43 (2005) 4763
- [BELO 14] Belounar .L and Guerraiche .K" A new strain based brick element for plate bending" *Alexandria Engineering Journal* (2014) 53, 95–105

- [BOUR 06] Bourezane M., "Utilisation of the strain model in the analysis of structures", Thèse de Doctorat, Université de Biskra, Juillet 2006.
- [BOU 11] B. Messaoud, Cylindrical element based on strain approach, international conference on Computer Methods in Mechanics, 9-12 May 2011, Warsaw, Poland
- [BOU 87] Bouzerrira C., Finite element analysis for general plane elasticity, Msc. Thesis, University of Wales College of Cardiff (G.B.), 1987.
- [CLO 66] Clough R.W. and Tocher J.L., Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending, Proc – Ist Conf. Matrix Meth. Struct. Meth, AFFDL –TR – 66 –80 pp. 515-545, 1966.
- [DER 84] Der Avanessian G.V., *Finite element analysis of curved box girder bridges*, PhD thesis University College Cardiff; 1984.
- [DER 90] DEROSA M.A., FRANCIOSI C., "Plate bending analysis by the cell method: numerical comparisons with Finite Element Methods", *Computers and Structures*, Vol. 37, w 5, p. 731-735, 1990.
- [DJO 90] Djoudi M.S., Strain based Finite Elements for linear and geometrically analysis of structures, PHD thesis, University of Wales College of Cardiff (G.B.), June 1990.
- [DJO 03] Djoudi M.S. & Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and nonlinear analysis of cylindrical shells. *Engineering structures* (25): 769-778, 2003.
- [DJO 04a] Djoudi M.S. & Bahai H., A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40: 1947-1961. 2004.
- [DJO 04b] Djoudi M.S. & Bahai H., Strain- based finite element for the vibration of cylindrical panels with openings. *Thin-walled structures* (42): 575-588, 2004.
- [DRA 10] Drapier .S & Fortunier .R, Méthodes numériques d'approximation et de résolution en mécanique. Ecole Nationale supérieure des mines, 15 décembre 2010- Version β
- [ERG 68] Ergatoudis J.G., Irons B.M. and Zienkiewicz O.C., Curvedisoparametric, quadrilateral elements for finite element analysis, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 4, pp. 31-42, 1968.
- [FRA 98] François Frey, *Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne – Volume 3 – Analyse des structures et milieux continus – mécanique des solides*, Presses polytechniques et universitaires romandes CH-1015, 1998

- [FRA 00] François. Frey, et Marc-André Studer « Analyse des structures et milieu continu- Coques», volume 5, Presses polytechniques, édition 2000.
- [FRA 01] François. Frey, et Jarostove. Jirousek, « Analyse des structures et milieu continu par la méthode des éléments finis », volume 6, Presses polytechniques, édition 2001.
- [FLU 66] Flugge W. and Fosberge K., Point load on shallow elliptic paraboloid, J. Appl. Mech. Vol. 33, pp. 575-585, 1966.
- [GEM 71] Geminard L et Giet A, Stabilité des constructions, Paris 1971
- [GUE 93] GUENFOUD M., « Présentation de l'élément DSTM pour le calcul linéaire des coques d'épaisseur quelconque », Annales de L'ITBTP N° 512, Mars-Avril, p. 25-52, 1993
- [HAM 06] Hamadi. D "Analysis of structures by non-conforming finite elements", PhD Thesis, Civil engineering department, Biskra University, Algeria, 2006, pp. 130
- [HAM 10] Hamadi. D and T. Maalem, Presentation of an efficient parallelepiped finite element based on the strain approach" sbp8C, in: Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. 3, 2010.
- [HAM 12] HAMADI D., DERBANE S. and OUNIS A., "Formulation of A new plate bending finite element based on the strain approach", international conference on applied and computational mathematics October 2012 Ankara,
- [HAM 16a] HAMADI D., Ashraf A. and OUNIS A" A new flat shell finite element for the linear analysis of thin shell structures" European Journal of Computational Mechanics, Vol. 24 Iss: 6, pp.232-255, Mars 2016
- [HAM 16b] HAMADI D., Ashraf A. and Toufik M "A new strain-based finite element for plane elasticity problems" Engineering Computations, Vol. 33 Iss: 2, pp.562 - 579; 2016
- [HIM 11] Himeur .H, M. Guenfoud « Elément fini flexionnel triangulaire doté d'un quatrième nœud fictif basé sur l'approche en déformation » Revue « Nature & Technologie ». n° 05/Juin 2011. Pages 43 à 56
- [HIM 15] Himeur .H, A. Zergua, M. Guenfoud, A finite element based on the strain approach using airy's function, Arabian Journal for Science and Engineering 40 (3) (2015) 719–733.
- [JEN 02] Jean-F.R « Mécanique des Structures» ; université catholique de Louvain Faculté des Sciences Appliquées Unité de Génie Civil et Environnemental ; 25 Novembre 2002.
- [IMB 84] Imbert J.F, " Analyse des structures par éléments finis ", Cépaduès éditions 1984

- [IRO 68] Irons B.M. and Zienkiewicz O.C., The isoparametric finite element system, A new concept in finite element analysis, Proc. Conf. On recent advances in stress analysis, Royal Aeronautical Society London, 1968.
- [OLS 70] Olson M.D. and Lindberg G.M., Annular and circular sector finite element for plate bending, IJMS. Vol. 12, pp. 17-33, 1970.
- [LOV 88] Love A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells.Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. s´erie A, N0 17 p. 491–549.
- [MAC 85] Mac-Neal R.H, Harder R.L, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite Element in Analysis and Design 11, 3–20 (1985).
- [MAAL 07] Maalem.T « CONTRIBUTION DU MODELE EN DEFORMATION DANS L’ANALYSE DES STRUCTURES » these de doctorat, 2007
- [MAAL 11] Maalem. T, Performances of the 3d strain based finite elements, Courrier du Savoir 11.
- [MEG 16] MEGUELATTI.Y « Investigation numérique des problèmes de l’élasticité plane par élément Fini Rectangulaire basé sur l’approche en déformation » MEMOIRE de Magistère ,2016
- [MEL 61] Melosh, R.J., A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending, J. Aero-Space Sci., 28 (1961) 34-42
- [MEL 62] Melosh R.J., Development of the stiffness method to define bounds on elastic behaviour of structures, PhD thesis University of Washington, 1962.
- [MEL 63] Melosh R.J., Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, J.AIAA Vol. 1 N7, pp. 1631-1637, 1963
- [MIN 51] Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of Isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 p. 31–38.
- [MOU 07] A.I. Mousa et M.H. El Naggar « Shallow Spherical Shell Rectangular Finite Element for Analysis of Cross Shaped Shell Roof » Electronic Journal of Structural Engineering, 7(2007)
- [NGA 04] Ngamy D. et Didier F., Les Fondements de la Méthode des Eléments finis,Les Ouvrages de la" Cameroon University Press" (CAMUP),2004.
- [PIA 84] Pian T.H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering 20, 1685–1695. (1984).

- [RAJ 69] Raju I.S. and Rao A.K., Stiffness matrices for sector elements, AIAA J.7, pp. 156-157, 1969.
- [RAJ 73] Raju I.S., Krishna A.V. and Rao A.K., Sector elements for matrix displacement analysis, IJNME. Vol. 6, pp. 553-563, 1973.
- [RAY 45] Rayleigh L. Theory of sound, Vol I et Vol. II. Dover Pub. 1945.
- [REI 45] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. of Appl. Mech., 1945, Vol. 12 p. A69–A77
- [REB 13] Rebiai et L.Belounar « A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis Archives of Civil And Mechanical Engineering 13 (2013)72-81
- [ROC 79] ROCKEY Lenneth et William GRIFFITHS « Introduction à la Méthode des éléments Finis», EDITION EYROLLES, édition 1979.
- [SAB 83a] Sabir A.B., A new class of Finite Elements for plane elasticity problems, CAFEM 7th , Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Technology, Chicago, 1983.
- [SAB 83 b] Sabir A.B, Chow F.Y. Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes International conference on instability and plastic collapse of steel structures. Manchester University (1983).
- [SAB 84] Sabir A.B., Strain based finite element analysis of shear walls. , Pro. 3 rd Int. Conf. on Tall Building, Y.K Cheung and P.K.K. Lee, eds., Hong Kong, 447-453. 1984.
- [SAB 85] Sabir A.B., "A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom" Chapter 9 in proceeding of the 2nd international conference on variational methods in engineering, Southampton University, SpringerVerlag, Berlin, pp.1725.1985.
- [SAB 86] Sabir A.B. and Salhi H.Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. Mechanica 19, pp. 1-16, 1986.
- [SAB 95] A.B. Sabir, A. Sfindji, Triangular and rectangular plane elasticity finite element, Thin-Walled Structures 21 (1995) 225–232.
- [TAY 76] Taylor R.L, Beresford P.J, Wilson E.L, Non conforming element for stress analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering 10 1211–1219 (1976).
- [TIM 21] Timoshenko S. On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6) p. 744–746.

- [TIM 22] Timoshenko S. On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6) p. 125–131.
- [TIM 51] S. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1951.
- [TIM 59] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. London: McGraw-Hill; 1959
- [TIM 61] Timoshenko .S « Théorie des plaques et coques », Université de Stanford, édition 1961, volume 1 et 2.
- [TUR 56] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C. and Topp L.J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. of Aeron. Sci.,Vol. 23, pp. 805-824, 1956.
- [UFL 48] Uflyand Y. S. The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech., 1948, Vol. 12 p. 287–300.
- [VIS 65] Visser W., A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformations, Proc.Conf.Math. Methods. Struct..Mech , Air bforce institute of technology Dayton Ohio, 1965 .
- [WIL 73] Wilson E.L, Taylor R., Doherty W.P, Ghaboussi J. Incompatible displacement models, in: Fenves et al. (Ed.), Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, New York, 43–57 (1973).
- [YUA 88] Yuan F, Miller RE. “A rectangular finite element for moderately thick flat plates”. Comput Struct 1988;30: 1375–87
- [ZIE 65] Zienkiewicz O.C. and Cheung Y.K., Finite Element in the solution of field problems, the engineer, pp. 507-510, 1965.
- [ZIE 71] ZIENKIEWCZ.O.C ,The Finite Element Method, McGraw-Hill, London 1971
- [ZIE 88] Zienkiewicz O.C., The finite element method, Mc Graw-Hill, (UK) London,1988
- [ZIE 91] ZIENKIEWCZ.O.C ET TAYLOR R.L,The Finite Element Method, McGraw-Hill, London 1991

ANNEXES

Annexe A1

Les matrices $[A]$; $[k_0]$ d'un élément Flexionnel ACM :

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \end{pmatrix}$$

$$[K_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_{44} & 0 & H_{46} & H_{47} & H_{48} & H_{49} & H_{410} & H_{411} & H_{412} & \\ & & & & H_{55} & 0 & 0 & H_{58} & H_{59} & 0 & H_{511} & H_{512} & \\ & & & & & H_{66} & H_{67} & H_{68} & H_{69} & H_{610} & H_{611} & H_{612} & \\ & & & & & & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & H_{711} & H_{712} & \\ & & & & & & & H_{88} & H_{89} & H_{810} & H_{811} & H_{812} & \\ & & & & & & & & H_{99} & H_{910} & H_{911} & H_{912} & \\ & & & & & & & & & H_{1010} & H_{1011} & H_{1012} & \\ & & & & & & & & & & H_{1111} & H_{1112} & \\ & & & & & & & & & & & H_{1212} & \end{pmatrix}$$

Sym.

$$H_{44} = 4 \times d(1,1) \times a \times b$$

$$H_{46} = 4 \times d(1,2) \times a \times b$$

$$H_{47} = 6 \times d(1,1) \times a^2 \times b$$

$$H_{48} = 2 \times d(1,1) \times a \times b^2$$

$$H_{49} = 2 \times d(1,2) \times a^2 \times b$$

$$H_{410} = 6 \times d(1,2) \times a \times b^2$$

$$H_{411} = 3 \times d(1,1) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{412} = 3 \times d(1,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{55} = 4 \times d(3,3) \times a \times b$$

$$H_{58} = 4 \times d(3,3) \times a^2 \times b$$

$$H_{59} = 4 \times d(3,3) \times a \times b^2$$

$$H_{511} = 4 \times d(3,3) \times a^3 \times b$$

$$H_{512} = 4 \times d(3,3) \times a \times b^3$$

$$H_{66} = 4 \times d(2,2) \times a \times b$$

$$H_{67} = 6 \times d(2,1) \times a^2 \times b$$

$$H_{68} = 2 \times d(2,1) \times a \times b^2$$

$$H_{69} = 2 \times d(2,2) \times a^2 \times b$$

$$H_{610} = 6 \times d(2,2) \times a \times b^2$$

$$H_{611} = 3 \times d(2,1) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{612} = 3 \times d(2,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{77} = 12 \times d(1,1) \times a^3 \times b$$

$$H_{78} = 3 \times d(1,1) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{79} = 4 \times d(1,2) \times a^3 \times b$$

$$H_{710} = 9 \times d(1,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{711} = 6 \times d(1,1) \times a^3 \times b^2$$

$$H_{712} = 6 \times d(1,2) \times a^3 \times b^2$$

$$H_{88} = (4/3) \times d(1,1) \times a \times b^3 + (16/3) \times d(3,3) \times a^3 \times b$$

$$H_{89} = (d(1,2) + 4 \times d(3,3)) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{810} = 4 \times d(1,2) \times a \times b^3$$

$$H_{811} = 2 \times d(1,1) \times a^2 \times b^3 + 6 \times d(3,3) \times a^4 \times b$$

$$H_{812} = 2 \times (d(1,2) + 2 \times d(3,3)) \times a^2 \times b^3$$

$$H_{99} = (4/3) \times d(2,2) \times a^3 \times b + (16/3) \times d(3,3) \times a \times b^3$$

$$H_{910} = 3 \times d(2,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{911} = 2 \times (d(2,1) + 2 \times d(3,3)) \times a^3 \times b^2$$

$$H_{912} = 2 \times d(2,2) \times a^3 \times b^2 + 6 \times d(3,3) \times a \times b^4$$

$$H_{1010} = 12 \times d(2,2) \times a \times b^3$$

$$H_{1011} = 6 \times d(2,1) \times a^2 \times b^3$$

$$H_{1012} = 6 \times d(2,2) \times a^2 \times b^3$$

$$H_{1111} = 4 \times d(1,1) \times a^3 \times b^3 + (36/5) \times d(3,3) \times a^5 \times b$$

$$H_{1112} = 4 \times (d(1,2) + d(3,3)) \times a^3 \times b^3$$

$$H_{1212} = 4 \times d(2,2) \times a^3 \times b^3 + (36/5) \times d(3,3) \times a \times b^5$$

Annexe A2

a/ La matrice [C] (12x12) pour l'élément SBRPK est :

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \end{bmatrix}$$

Ou :

$$[C_i] = \begin{pmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\frac{x_i^2 y_i}{2} & -\frac{x_i^3 y_i}{6} & -\frac{y_i^2}{2} & -\frac{x_i y_i^2}{2} & -\frac{y_i^3}{6} & -\frac{x_i y_i^3}{6} & -\frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & \frac{x_i^2}{2} & x_i y_i & \frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & \frac{y_i^2}{2} & 0 & \frac{y_i^3}{6} & \frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_i^2}{2} & \frac{x_i^3}{6} & y_i & x_i y_i & \frac{y_i^2}{2} & \frac{x_i y_i^2}{2} & \frac{x_i}{2} \end{pmatrix}$$

Et x_i, y_i sont les coordonnées des nœuds i ($i = 1,2,3,4$).

b/ La matrice $[K_0]$ pour l'élément SBRPK (Eq. (4.18)) est donnée par :

$$[K_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & & & 0 \\ & & & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & & & 0 \\ & & & & H_{16} & H_{17} & H_{18} & H_{19} & H_{20} & H_{21} & H_{22} & & \\ & & & & & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & H_{27} & H_{28} & & \\ & & & & & & H_{29} & H_{30} & H_{31} & H_{32} & & 0 & \\ & & & & & & & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & & \\ & & \text{Sym.} & & & & & & H_{37} & H_{38} & & 0 & \\ & & & & & & & & & H_{39} & H_{40} & & \\ & & & & & & & & & & & & H_{41} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = d_{11}S ; H_2 = d_{11}S_x ; H_3 = d_{11}S_y ; H_4 = d_{11}S_{xy} ; H_5 = d_{12}S ; H_6 = d_{12}S_x$$

$$H_7 = d_{12}S_y$$

$$H_8 = d_{12}S_{xy} ; H_9 = d_{11}S_{xx} ; H_{10} = H_4 ; H_{11} = d_{11}S_{xxy} ; H_{12} = d_{12}S_x ; H_{13} = d_{12}S_{xx}$$

$$H_{14} = d_{12}S_{xy} ; H_{15} = d_{12}S_{xxy} ; H_{16} = d_{33}4S_{xx} + d_{11}S_{yy} ; H_{17} = d_{33}2S_{xxx} + d_{11}S_{xyy}$$

$$H_{18} = d_{11}S_y ; H_{19} = d_{12}S_{xy} + d_{33}4S_{xy} ; H_{20} = d_{12}S_{yy} ; H_{21} = d_{12}S_{xyy} + d_{33}2S_{xyy}$$

$$H_{22} = d_{33}2S_x ; H_{23} = d_{33}S_{xxxx} + d_{11}S_{xxyy} ; H_{24} = d_{12}S_{xy} ; H_{25} = d_{12}S_{xxy} + d_{33}2S_{xxy}$$

$$H_{26} = d_{12}S_{xyy} ; H_{27} = d_{12}S_{xxyy} + d_{33}S_{xxyy} ; H_{28} = d_{33}S_{xx} ; H_{29} = d_{22}S ; H_{30} = d_{22}S_x$$

$$H_{31} = d_{22}S_y ; H_{32} = d_{22}S_{xy} ; H_{33} = d_{22}S_{xx} + d_{33}4S_{yy} ; H_{34} = d_{22}S_{xy}$$

$$H_{35} = d_{22}S_{xxy} + d_{33}2S_{yyy} ; H_{36} = d_{33}2S_y ; H_{37} = d_{22}S_{yy} ; H_{38} = d_{22}S_{xyy}$$

$$H_{39} = d_{22}S_{xxyy} + d_{33}S_{yyyy} ; H_{40} = d_{33}S_{yy} ; H_{41} = d_{33}S$$

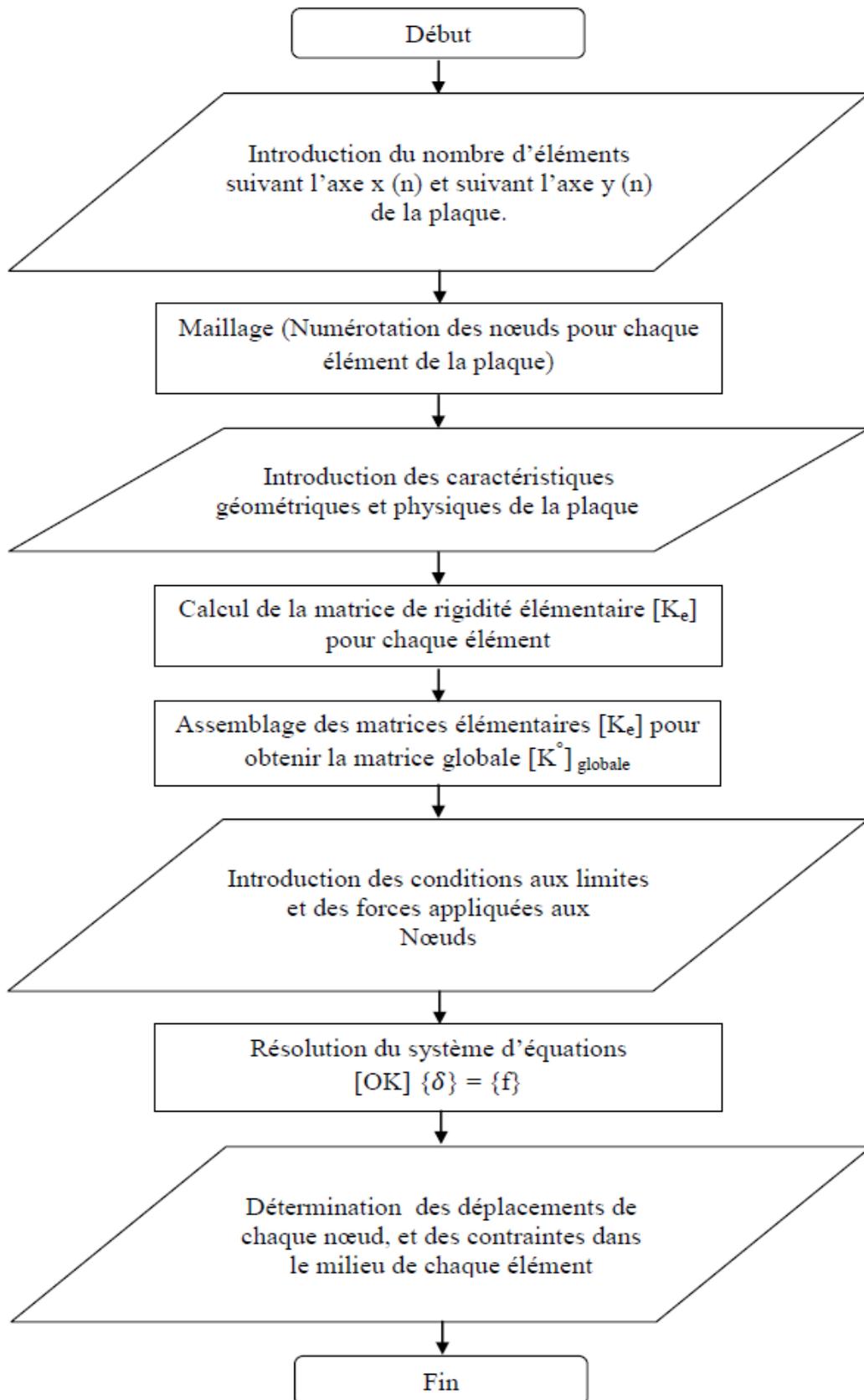
Les termes $S, S_x, \text{ect.}$...sont des intégrales au-dessus du secteur du rectangle et sont donnée par :

$$S = \int_s ds = ab ; S_x = \int_s x ds ; S_y = \int_s y ds ; S_{xy} = \int_s xy ds ; S_{xx} = \int_s x^2 ds ; S_{yy} = \int_s y^2 ds$$

$$S_{xxy} = \int_s x^2 y ds ; S_{xyy} = \int_s xy^2 ds ; S_{xxyy} = \int_s x^2 y^2 ds ; S_{xxx} = \int_s x^3 ds ; S_{yyy} = \int_s y^3 ds$$

$$S_{xxxx} = \int_s x^4 ds ; S_{yyyy} = \int_s y^4 ds$$

L'organigramme pour l'étude de la flexion des plaques est donnée par :



**Fichier de donnée du programme de calcul en FORTRAN 77 pour l'élément SBRPK
pour un maillage de 2X5.**

***PRECISION

1E50

***TITRE

CALCUL D une plaque ret

***DEFINITION

18 NTNO

10 NTEL

9 NTDI

1 NTFI

24 LB

6 ICC

***UNITE

M N

***DONNEE

***COO**

0. 0.

0. 2.

0. 4.

0. 6.

0. 8.

0. 10.

0.5 0.

0.5 2.

0.5 4.

0.5 6.

0.5 8.

0.5 10.

1. 0.0

1. 2.

1. 4.

1. 6.

1. 8.

1. 10.

***CON**

1 7 8 2

2 8 9 3

3 9 10 4

4 10 11 5

5 11 12 6

7 13 14 8

8 14 15 9

9 15 16 10

10 16 17 11

11 17 18 12

***SECTION**

1

***MAT**

1200000 0.

***DEPLACEMENT IMPOSE**

1 1 0

1 2 0

1 3 0

7 1 0

7 2 0

7 3 0

13 1 0

13 2 0

13 3 0

***FORCES IMPOSEES**

12 1 0.1

***DEP

***EFF

***FIN

Fichier des résultats du programme de calcul en FORTRAN 77 pour l'élément SBRPK pour un maillage de 2X5.

```

*****
**  CALCUL D une plaque ret                               **
*****

*****
***                                     ***
***  DEFINITION DU PROBLEME                               ***
***                                     ***
*****
***                                     ***
***  NOMBRE TOTALE DES NOEUDS           18 ***
***                                     ***
***  NOMBRE TOTALE D ELEMENTS          10 ***
***                                     ***
***  NOMBRE DES DEPLACEMENTS IMPOSES   9 ***
***                                     ***
***  NOMBRE DES FORCES IMPOSEES        1 ***
***                                     ***
***  LARGEUR DE BANDE                   24 ***
***                                     ***
***  POINTS DE CONTRAINTES A CHOISIR   6 ***
***                                     ***

```

```

*****
***   U N I T E S   ***
*****
***                               ***
***   M N           ***
*****
*****
*****
*****   C O O R D O N N E E S   *****
*****
*****                               *****
*****   C O O R D >>>> 1 >>>> X   *****
*****   C O O R D >>>> 2 >>>> Y   *****
*****
*****

```

*** NOEUD *** COORD >>> 1 * COORD >>> 2 *

```

***   1 ***   .00000E+00 * .00000E+00 *
***   2 ***   .00000E+00 * .20000E+01 *
***   3 ***   .00000E+00 * .40000E+01 *
***   4 ***   .00000E+00 * .60000E+01 *
***   5 ***   .00000E+00 * .80000E+01 *
***   6 ***   .00000E+00 * .10000E+02 *
***   7 ***   .50000E+00 * .00000E+00 *
***   8 ***   .50000E+00 * .20000E+01 *
***   9 ***   .50000E+00 * .40000E+01 *
***  10 ***   .50000E+00 * .60000E+01 *
***  11 ***   .50000E+00 * .80000E+01 *
***  12 ***   .50000E+00 * .10000E+02 *
***  13 ***   .10000E+01 * .00000E+00 *
***  14 ***   .10000E+01 * .20000E+01 *
***  15 ***   .10000E+01 * .40000E+01 *
***  16 ***   .10000E+01 * .60000E+01 *
***  17 ***   .10000E+01 * .80000E+01 *
***  18 ***   .10000E+01 * .10000E+02 *

```

***** C O N N E X I O N S *****

*** ELEMENT *** NOEUD >>> 1 * NOEUD >>> 2 * NOEUD >>> 3 * NOEUD >>> 4 *

```

***   1 ***   1 *   7 *   8 *   2 *
***   2 ***   2 *   8 *   9 *   3 *

```

```

*** 3 ***      3 *      9 *      10 *      4 *
*** 4 ***      4 *      10 *     11 *      5 *
*** 5 ***      5 *      11 *     12 *      6 *
*** 6 ***      7 *      13 *     14 *      8 *
*** 7 ***      8 *      14 *     15 *      9 *
*** 8 ***      9 *      15 *     16 *     10 *
*** 9 ***     10 *      16 *     17 *     11 *
*** 10 ***     11 *      17 *     18 *     12 *

```

***** SECTIONS *****

***** *****

***** CONSTANTES LE LONG DE L ELEMENT *****

***** *****

***** SECTION - 1 ==>>> EPAISSEURE *****

***** *****

***** TOUTE LES ELEMENTS POSSEDENTS LES *****

***** MEME CARACTERISTIQUES DE SECTIONS *****

***** *****

*** ELEMENT *** SECT >>> 1 *

*** 1 *** .10000E+01 *

***** CARACTERISTIQUES DU MATERIAU *****

***** *****

***** MODULE - 1 ==>>>> YOUNG1 *****

***** MODULE - 2 ==>>>> POISSON1 *****

***** MODULE - 3 ==>>>> GAMA *****

***** MODULE - 4 ==>>>> YOUNG2 *****

***** MODULE - 5 ==>>>> POISSON2 *****

***** MODULE - 6 ==>>>> CISAILLEMENT2 *****

***** MODULE - 7 ==>>>> BETA *****

***** *****

***** TOUTE LES ELEMENTS POSSEDENTS LES *****

***** MEME CARACTERISTIQUES DE MATERIAUX *****

***** *****

*** ELEMENT *** MODULE >> 1 * MODULE >> 2 *

*** 1 *** .12000E+07 * .00000E+00 *

***** DEPLACEMENTS IMPOSES *****

*** NOEUD *** DIERCTION * VALEUR *

*** 1 *** 1 * .00000E+00 *

*** 1 *** 2 * .00000E+00 *

*** 1 *** 3 * .00000E+00 *

*** 7 *** 1 * .00000E+00 *

*** 7 *** 2 * .00000E+00 *

*** 7 *** 3 * .00000E+00 *

*** 13 *** 1 * .00000E+00 *

*** 13 *** 2 * .00000E+00 *

*** 13 *** 3 * .00000E+00 *

***** FORCES IMPOSEES *****

*** NOEUD ** DIRECTION * VALEUR *

*** 12 *** 1 * .10000E+00 *

***** DEPLACEMENTS *****

* * * * *
 * NODE * W * Bx * By *
 * * * * *

* 1 * .37307E-58 * -.45175E-61 * -.17857E-55 *

```

* 2 * .18667E-04 * -.14879E-10 * -.18000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 3 * .69334E-04 * .66410E-10 * -.32000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 4 * .14400E-03 * -.10190E-08 * -.42000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 5 * .23467E-03 * .24092E-08 * -.47997E-04 *
*-----*-----*-----*
* 6 * .33332E-03 * -.50421E-07 * -.49996E-04 *
*-----*-----*-----*
* 7 * .37263E-58 * -.28019E-61 * -.17857E-55 *
*-----*-----*-----*
* 8 * .18667E-04 * .92610E-11 * -.18000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 9 * .69334E-04 * -.87648E-10 * -.32000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 10 * .14400E-03 * -.33220E-10 * -.42000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 11 * .23467E-03 * -.40789E-08 * -.48002E-04 *
*-----*-----*-----*
* 12 * .33334E-03 * -.79006E-08 * -.50004E-04 *
*-----*-----*-----*
* 13 * .37310E-58 * .12099E-60 * -.17857E-55 *
*-----*-----*-----*
* 14 * .18667E-04 * -.25214E-10 * -.18000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 15 * .69334E-04 * .13732E-10 * -.32000E-04 *
*-----*-----*-----*
* 16 * .14400E-03 * -.11249E-09 * -.42001E-04 *
*-----*-----*-----*
* 17 * .23467E-03 * -.11368E-07 * -.47999E-04 *
*-----*-----*-----*
* 18 * .33333E-03 * .36185E-07 * -.49998E-04 *
*****
*****      CONTRAINTES      *****
*****
*  *n *      *      *
*elt*o * Mx * My * Mxy * Tx * Ty *
*  *d *      *      *
*****
* 1* 0 * -.35906D-05 * -.90000D+00 * -.12889D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*--*_*-----*-----*-----*
* 1* 1 * .15212D-54 * -.10000D+01 * .81491D-08 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*--*_*-----*-----*-----*
* 1* 7 * -.14526D-54 * -.10000D+01 * .12151D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*--*_*-----*-----*-----*
* 1* 8 * -.71812D-05 * -.80000D+00 * .63484D-06 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*--*_*-----*-----*-----*
* 1* 2 * -.71812D-05 * -.80000D+00 * -.57216D-06 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*--*_*-----*-----*-----*

```



```

* 7* 0 * -.33913D-03 * -.70002D+00 * -.77564D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 7* 8 * -.14722D-03 * -.80001D+00 * -.27086D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 7*14 * -.32767D-03 * -.80002D+00 * .40842D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 7*15 * -.53104D-03 * -.60003D+00 * .36020D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 7* 9 * -.35060D-03 * -.60002D+00 * -.31908D-05 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 8* 0 * .27888D-02 * -.49907D+00 * .62847D-04 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 8* 9 * .14430D-02 * -.59952D+00 * -.13590D-04 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 8*15 * .30561D-02 * -.59893D+00 * -.22623D-04 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 8*16 * .41346D-02 * -.39861D+00 * -.15568D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 8*10 * .25215D-02 * -.39920D+00 * -.14665D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 9* 0 * -.20366D-01 * -.31064D+00 * -.46616D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 9*10 * -.10837D-01 * -.40572D+00 * .48371D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 9*16 * -.22844D-01 * -.41262D+00 * .14775D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 9*17 * -.29895D-01 * -.21555D+00 * .84343D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
* 9*11 * -.17888D-01 * -.20865D+00 * .11794D-02 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
*10* 0 * .14284D+00 * -.87984D-01 * .19900D-02 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
*10*11 * .79444D-01 * -.19341D+00 * -.12401D-02 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
*10*17 * .16498D+00 * -.18519D+00 * .13351D-02 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
*10*18 * .20624D+00 * .17439D-01 * .21494D-02 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*
*10*12 * .12071D+00 * .92232D-02 * -.42581D-03 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*-----*-----*-----*

```

```

*****
*****
***** FIN NORMALE *****
*****
*****

```

Annexe A3

a/ La matrice $[K_0]$ pour l'élément SBSPK est donnée par :

$$[K_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & H_1 & 0 & H_2 & H_3 & 0 & 0 & H_4 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & H_6 & 0 & 0 & H_7 & H_8 & 0 & 0 & H_9 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_{10} & H_{11} & 0 & 0 & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & H_{14} & 0 & 0 & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & H_{17} & H_{18} & 0 & 0 & H_{19} & H_{20} & H_{21} & 0 \\ & & & & & & H_{22} & 0 & 0 & H_{23} & H_{24} & H_{25} & 0 \\ & & & & & & & H_{26} & H_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & H_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym.} & & & & & & & H_{29} & H_{30} & H_{31} & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{32} & H_{33} & 0 \\ & & & & & & & & & & & H_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

$$AL = A \log(r_2) - A \log(r_1)$$

$$H_1 = 2 \cdot B \cdot d_{22} \cdot (AL)$$

$$H_2 = 2 \cdot B \cdot (d_{12} + d_{22}) \cdot (r_2 - r_1)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot B \cdot d_{12} + B \cdot d_{22}) \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

$$H_4 = -2 \cdot B \cdot d_{22} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$H_5 = \frac{1}{3} \cdot d_{22} \cdot (B^3 + 6 \cdot B) \cdot (AL)$$

$$H_6 = -B \cdot d_{33} \cdot \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

$$H_7 = -B \cdot d_{33} \cdot (AL)$$

$$H_8 = -\frac{2}{3} \cdot B \cdot d_{33} \cdot (r_2 - r_1)$$

$$H_9 = -\frac{1}{6} \cdot B^3 \cdot d_{33} \cdot \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

$$H_{10} = B \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (d_{11} + 2 \cdot d_{12} + d_{22})$$

$$H_{11} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot (r_2^3 - r_1^3) \cdot (2 \cdot d_{11} + 3 \cdot d_{12} + d_{22})$$

$$H_{12} = 2 \cdot B \cdot (d_{12} + d_{22}) \cdot (AL)$$

$$H_{13} = \frac{1}{3} \cdot (r_2 - r_1) \cdot (B^3 + 6 \cdot B) \cdot (d_{12} + d_{22})$$

$$H_{14} = \frac{1}{8} \cdot B \cdot (r_2^4 - r_1^4) \cdot (4 \cdot d_{11} + 4 \cdot d_{12} + d_{22})$$

$$H_{15} = B \cdot (r_2 - r_1) \cdot (2 \cdot d_{12} + d_{22})$$

$$H_{16} = \frac{1}{12} \cdot (2 \cdot d_{12} + d_{22}) \cdot (B^3 + 6 \cdot B) \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

$$H_{17} = \frac{1}{12} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (3 \cdot B \cdot d_{33} + 4 \cdot B^3 \cdot d_{11} + 8 \cdot B^3 \cdot d_{12} + 4 \cdot B^3 \cdot d_{22})$$

$$H_{21} = \frac{1}{3} \cdot B^3 \cdot (r_2 - r_1) \cdot (d_{12} + d_{22})$$

$$H_{22} = \frac{1}{72} \cdot B \cdot (r_2^4 - r_1^4) \cdot (4 \cdot d_{33} + 12 \cdot B^2 \cdot d_{11} + 12 \cdot B^2 \cdot d_{12} + 3 \cdot B^2 \cdot d_{22})$$

$$H_{23} = \frac{1}{9} \cdot B^3 \cdot (r_2 - r_1) \cdot (6 \cdot d_{12} + 3 \cdot d_{22} - d_{33})$$

$$H_{24} = \frac{1}{60} \cdot (2 \cdot d_{12} + d_{22}) \cdot (B^5 + 10 \cdot B^3) \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

$$H_{25} = \frac{1}{12} \cdot B^3 \cdot (2 \cdot d_{12} + d_{22}) \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

$$H_{26} = \frac{-1}{6} \cdot (d_{33} \cdot B^3 + 3 \cdot d_{22} \cdot B) \cdot \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

$$H_{27} = \frac{-1}{3} \cdot d_{22} \cdot (B^3 + 6 \cdot B) \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$H_{18} = \frac{1}{9} \cdot (r_2^3 - r_1^3) \cdot (B \cdot d_{33} + 2 \cdot B^3 \cdot d_{11} + 3 \cdot B^3 \cdot d_{12} + B^3 \cdot d_{22})$$

$$H_{19} = \frac{1}{6} \cdot B^3 \cdot (AL) \cdot (4 \cdot d_{12} + 4 \cdot d_{22} - d_{33})$$

$$H_{20} = \frac{1}{15} \cdot (r_2 - r_1) \cdot (B^5 + 10 \cdot B^3) \cdot (d_{12} + d_{22})$$

$$H_{28} = \frac{1}{30} \cdot d_{22} \cdot (3 \cdot B^5 + 20 \cdot B^3 + 60 \cdot B) \cdot (AL)$$

$$H_{29} = -\frac{1}{60} \cdot (3 \cdot d_{33} \cdot B^5 + 20 \cdot B^3 \cdot d_{22}) \cdot \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

$$H_{30} = -\frac{1}{15} \cdot d_{22} \cdot (B^5 + 10 \cdot B^3) \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$H_{31} = -\frac{1}{3} \cdot B^3 \cdot d_{22} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$H_{32} = \frac{1}{630} \cdot d_{22} \cdot (5 \cdot B^7 + 84 \cdot B^5 + 420 \cdot B^3) \cdot (AL)$$

$$H_{34} = \frac{1}{6} \cdot B^3 \cdot d_{22} \cdot (AL)$$

b/ La matrice [A] (12x12) pour l'élément SBSPK est :

$$[A] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \end{bmatrix}$$

Ou:

$$[C_i] = \begin{pmatrix} 1 & -r_i & -\theta_i & -\frac{r_i^2}{2} & -\frac{r_i^3}{6} & -\frac{r_i^2 \theta_i}{2} & -\frac{r_i^3 \theta_i}{6} & -\frac{\theta_i^2}{2} & -\frac{r_i \theta_i^2}{2} & -\frac{y_i^3}{6} & -\frac{r_i \theta_i^3}{6} & -\frac{r_i \theta_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & r_i & \frac{r_i^2}{2} & r_i \theta_i & \frac{r \theta_i}{2} & 0 & \frac{\theta_i^2}{2} & 0 & \frac{\theta_i^3}{6} & \frac{\theta_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{r_i^2}{2} & \frac{r_i^3}{6} & \theta_i & r_i \theta_i & \frac{\theta_i^2}{2} & \frac{r_i \theta_i^2}{2} & \frac{r_i}{2} \end{pmatrix}$$

Et r_i, θ_i sont les coordonnées des nœuds i ($i = 1,2,3,4$).