Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences et de la technologie
Département de Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Énergétique

Réf. : ……

Présenté et soutenu par :

Amina Khelassi

Radia Saker

Le : 26 / 06/ 2022

Titre

Etude thermique sur les aubes pour l'amélioration des performances des turbines à gaz

---

Jury:

Mr	Adel Ben chaabane	Pr	Université de Biskra	Président
Mr	Nacer Chouchane	MCA	Université de Biskra	Rapporteur
Mr	Miloude Zalouf	MCB	Université de Biskra	Examinateur

Remerciements

Je remercie tout d'abord Allah qui est toujours m'aide et me donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur ***Dr.Nacer Chouchane****, mon encadreur, pour avoir accepté de diriger ce travail, l'expression de mon profond et sincère remerciement, pour ses efforts, ses critiques constructives et sa confiance et pour m'avoir ouvert les portes pour ses conseils et encouragements durant cette difficile période de recherche.*

Je tiens également à remercier les membres du jury ***Pr. Adel Ben chaabane*** *et* ***Dr.Miloude Zalouf*** *Pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.*

Enfin, nous remercions également ma famille respective et mes amies, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail sans votre soutien.

Mes sincères remerciements à tous.

Dédicaces

Je dédie ce travail à tous ceux que j'aime et j'estime en particulier :

A mes parents qui m'ont toujours soutenue avec beaucoup d'amour

A mon mari : Zerrouk Goudjil

A mes enfants : Nouh Djoud Lamis Mohamed lakhder Abed

A mes sœurs : Nabila fairouz Khadidja Faiza Souad

A mes frères : Saad Abed el ghaufour Ahmed Abed el Wahab Ali Goudjil

Et ma copine est au travail Saker radia.

Ainsi que pour tous mes amis et mes collègues.

Amina

Je dédie ce travail à tous ceux que j'aime et j'estime en particulier

A mes parents qui m'ont toujours soutenue avec beaucoup d'amour

A ma sœur : Douaa Amani Fadoua

A mes frères : Bilal Chaweki

A ma famille saker et turqui

A tous mes chers amis : Tayab Soufiane Zairi Hiba Chaima chahinez et ma copine est au travail khelassi amina.

Ainsi que pour tous mes amis et mes collègues.

Radia

Sommaire

Remerciements ---------- I

Dédicaces---------- II

Sommaire ---------- IV

Liste des Figures ---------- IX

Liste des Tableaux ---------- XI

Introduction Générale ---------- 1

Chapitre I
Généralité sur la turbine à gaz

I.1.Introduction---------- 03

I.2. Développement historique de la turbine à gaz ---------- 03

I.3. Définition de la turbine à gaz---------- 04

I.4. Principales utilisations de la Turbine à Gaz ---------- 05

I.4.1. Production d'électricité ---------- 05

I.4.2. Production combinée chaleur-force ---------- 05

I.4.3. Pompage et compression---------- 05

I.5. Classement des Turbine à Gaz ---------- 06

I.5.1. Turbines industrielles---------- 06

a. Turbine à un arbre---------- 06

b. Turbine à deux arbres---------- 06

I.5.2 Turbines de type "Aviation" (Aéro-dérivative)---------- 08

I.6. Composition de la turbine à gaz ---------- 08

I.6.1. Les sections principales ---------- 08

I.6.1.1 Section compression---------- 09

I.6.1.2. Section Turbine ---------- 10

I.7. Auxiliaires de la turbine---------- 12

I.7.1. Système d'air d'étanchéité---------- 12

Sommaire

I.7.2. Air extrait du 10ème étage---------- 13

I.7.3. Air de fuite des joints HP ---------- 13

I.8. Aube de Turbine ---------- 13

I.9. Avantages des Turbines à gaz---------- 14

I.10. Inconvénients des turbines à gaz ---------- 14

I.11. Matériaux---------- 15

I.12. Présentation du système barrière thermique ---------- 16

I.12.1. La couche de céramique ---------- 16

I.12.2. La couche de liaison---------- 17

I.13. L'inconel---------- 17

I.14. Magnésie (MgO) ---------- 19

I.15. Conclusion---------- 19

Chapitre II
Les méthodes utilisées pour augmenter les performances d'une TAG

II.1. Introduction---------- 21

II.2. Les méthodes d'amélioration des turbines à gaz---------- 21

II.2.1. Techniques de Refroidissements de l'Air d'Admission des Turbines à Gaz ----- 21

II.2.1.1 Refroidisseur évaporatif---------- 21

a. Refroidisseur évaporatif par module humidifié---------- 21
b. Refroidissement par atomisation ou pulvérisation d'eau (Fogging System)- 23

II.2.1.2 Systèmes de réfrigération mécanique ---------- 24

a. Type direct---------- 24
b. Type indirect---------- 25

II.2.1.3 Système de refroidisseur par absorption ---------- 26

II.2.1.4 Refroidissement indirect (Chillers)---------- 27

II.2.2. Refroidissement intermédiaire du compresseur ---------- 28

II.2.3 Régénération (cycle de récupération)---------- 28

II.2.4 Réchauffage inter-turbines de détente---------- 29

Sommaire

II.2.5 Injection de masse de fluide dans le circuit de TAG ---------- 30

II.2.5.1Cycles avec injection d'eau dans le compresseur ---------- 31

II.2.5.2 Cycles avec injection de vapeur à l'amont, dans et à l'aval de la chambre combustion ---------- 31

II.3 Conclusion---------- 32

Chapitre III
La méthode des différences finis

III.1. Introduction---------- 34

III.2. Méthodes d'approximation par collocation Interpolation et Extrapolation ---------- 34

III.2.1. Forme polynomiale de Newton ---------- 34

a. Différance divisée---------- 34
b. Calcul du polynôme d'interpolation de Newton---------- 36

III.2.2. Interpolation polynôme de newton sur un pas constant---------- 37

III.2.2.1. Différance à droite, formule de Gregory-Newton ---------- 37

a. Définition et propriétés de différance à droite (ou progressives)---------- 37
b. Formule progressive de Gregory-Newton ---------- 38

III.2.2.2. Différence à gouche, formule de Greygory-Newton ---------- 38

a. Définition et propriétés des "différfnce à gouche"(ou "régressives") ---------- 38
b. Formule régressive de Gregory-Newton ---------- 39

III.2.2.3. Différences centrées sur bas entière, formule de Stirling---------- 39

III.2.2.4. Différences centrées sur base demi entière, formule de Bessel---------- 40

III.2.2.5. Utilisation des formules d'interpolation ---------- 41

III.3. Dérivée d'un polynôme par différences divisées---------- 42

III.4. Cas d'un pas contant : Relation du type Gregory-Newton ---------- 42

III.4.1. Utilisation des différences à droite (ou progressives)---------- 42

a. Dérivées successives de f(x) en xj à l'ordre 1 en h---------- 42
b. Dérivées successives de f(x) en xj à l'ordre 2 en h ---------- 43

III.4.2. Utilisation des différences à gauche (ou régressives)---------- 44

a. Dérivées successives de f(x) en xj à l'ordre 1 en h---------- 44
b. Dérivées successives de f(x) en xj à l'ordre 2 en h ---------- 45

Sommaire

III.4.3. Utilisation des différences centrées ---- 45

III.5. Résolution des équations aux dérivées partielles ---- 47

III.5.1. Classification des équations aux dérivées partielles ---- 47

III.5.2. Méthode de résolution des E.D.P ---- 49

III.5.2.1.Equation paraboliques ---- 49

a. Méthode explicite ---- 50
b. Méthode implicite ---- 51
c. Méthode de Crank-Nicholson ---- 52

III.6 Conclusion ---- 53

Chapitre IV
Etude semi-Analytique

IV.1. Introduction ---- 56

IV.2. Géométrie du problème à étudié ---- 56

IV.3. Le maillage d'aube ---- 57

IV.4. Etude graphique ---- 70

IV.5. Interprétation des résultats ---- 70

IV.6. Conclusion ---- 71

Chapitre V
Etude numérique discussion et interprétation des résultats

V.1. Introduction ---- 73

V.2. Le solveur fluent ---- 73

V.3. Problématique et objectif ---- 73

V.4. Présentation du logiciel de simulation « ANSYS Fluent » ---- 73

V.5. Menu principal du logiciel ---- 73

V.6. Les processus de la simulation ---- 75

V.6.1 Création de la géométrie ---- 75

V.6.2 Hypothèses simplificatrices ---- 75

V.6.3 Les conditions Initial aux limites du problème sont ---- 75

V.7 Interprétation des résultats ---- 79

Sommaire

V.8. Conclusion---------- 79

Conclusion générale---------- 80

Nomenclatures---------- XII

Référence ---------- XIV

Ressemé---------- XIX

Liste de figure

Chapitre-I-

Généralité sur la turbine à gaz

Figure I.1. Turbine à Gaz……..05
Figure I-2-a.b- Schéma d'une Turbine à Gaz à u arbre……06
Figure I-3-a-et –b- : Schéma d'une Turbine à Gaz à deux arbres……07
Figure I.4. Schéma générale de la turbine à gaz……08
Figure I-5: Ensemble rotor compresseur /roue turbine HP……...…09
Figure I.6. Schéma de la chambre de combustion……10
Figure I.7. La tuyère 1ère étage……11
Figure I.8. La tuyère du second étage……...……11
Figure I.9. Système d'air d'étanchéité……..……13
Figure I.10. Canal inter aubes……...……14
Figure I.11. Système barrière thermique…….……..16

Chapitre –II-

Les méthodes utilisées pour augmenter les performances d'une TAG

Figure II.1. Refroidisseur évaporatif……...……..21
Figure II.2. Média de refroidissement…...……..……..22
Figure II.3. Refroidissement par pulvérisation d'eau (Fogging system)...…….……..23
Figure II.4. Schéma représentative de réfrigération mécanique (type direct)……...25
Figure II.5. Structure d'une machine frigorifique à absorption……...…….26
Figure II.6 Principal composantes du système de refroidissement indirect (Chillers)…….27
Figure II.7.a) Installation avec refroidissement intermédiaire du compresseur…….……...…..28
b) Cycle de Brayton avec refroidissement intermédiaire du compresseur turbine…….28
Figure II.8.a) Installation avec la régénération……...……28
b) Cycle de Brayton avec la régénération……..……28
Figure II.9.a) Installation avec réchauffage de la turbine……30
b) Cycle de Brayton avec réchauffage de la turbine……...……30
Figure II.10. Différentes configurations d'injection d'eau ou de vapeur dans un cycle simple d'une TAG……...……...30
Figure II.11 Turbine à gaz avec injection d'eau dans le compresseur…….……..….31

Chapitre -III-

La méthode des différences finis

Figure III.1. Schéma montre les différentes dérivations par la méthode des différences finies……46
Figure III.2. Condition unidimensionnelle transitoire……..……..……..48
Figure III.3. Schéma hyperbolique…….……..48
Figure III.4. Schéma de résolution des E.D.P…….……..49
Figure III.5. Schéma représente Le maillage……...……50
Figure III.6. Schéma explicite…….……..51

Liste de figure

Figure III.7. Schéma implicite……..52
Figure III.8. Schéma Crank-Nicholson…….……52

Chapitre -IV-

Etude semi-Analytique

Figure IV.1. La géométrie de problème……56
Figure IV.2. : Le maillage d'aube……...…….…….57
Figure IV.3. Evolution de la température en fonction de l'abscisse x dans plusieurs temps..…..…70

Chapitre -V-

Etude numérique discussion et interprétation des résultats

Figure V.1. La fenêtre principale du logiciel ANSYS……..74
Figure V.2. Le domaine d'étude…….……..75
Figure V.3. (a.b) Le maillage d'ANSYS Design Modeler et la géométrie……...76
Figure V.4. Variation de la température dans une aube en ce moment 60……...….77
Figure V.5. Variation de la température dans une aube en ce moment 120……..……77
Figure V.6. Variation de la température dans une aube en ce moment 180……..78
Figure V.7. Variation de la température dans une aube en ce moment 240……..78
Figure V.8. Variation de la température dans une aube en ce moment 300……..……79

Liste des Tableaux

Chapitre -II-
Les méthodes utilisées pour augmenter les performances d'une TAG

Tableau II.1. Caractéristiques de l'eau dans le système évaporatif……..…22
Tableau II.2. Caractéristiques de l'eau dans le cas de refroidissement par Atomisation……24

Chapitre -III-
La méthode des différences finis

Tableau III.1. D'utiliser la nation matricielle 19…….……..…35
Tableau III.2. Différance à droite pour n=1 à 5 22…….…….....38
Tableau III.3. Différence à gauche $\Delta_{-}^{n} f_j$pour n=1 à 5 23…….39
Tableau III.4. Différences centréesΔ_0^nfj sur une base entière 25……..40
Tableau III.5. Différences centrées$\Delta_0^n f_{j+1/2}$sur base demi centrées 26…….…...41
Tableau III.6. Dérivées à l'ordre 1 à partir des différences à droite 28……43
Tableau III.7. Dérivées, à l'ordre 2, à partir des différences à droite 29……..44
Tableau III.8. Dérivées au 1er ordre à partir des différences à gauche 30……...45
Tableau III.9. Dérivées au 2ème ordre à partir des différences à gauche 30……...…….45
Tableau III.10. Dérivées au 2ème ordre à partir des différences centrées 32…….……..47
Tableau III.11. Dérivées au 4ème ordre à partir des différences centrées 32…….……47

Chapitre -V-
Etude numérique discussion et interprétation des résultats

Tableau V.1. Les étapes de Modélisation et les sous-programmes qui en sont responsables……74

Introduction générale :

Les aubes de turbine sont soumises à des environnements très pénibles à l'intérieur d'une turbine à gaz et ils sont confrontés à des températures élevées, à des contraintes élevées et à un environnement potentiel de forte vibration. Ces trois facteurs peuvent entrainer des pannes d'aubes, détruisant potentiellement le moteur, c'est pourquoi les aubes de turbine sont soigneusement conçues pour résister à ces conditions. Et ils sont également soumises à des contraintes dues à la force centrifuge et à des forces fluides que peuvent provoquer des ruptures de fracture, d'élasticité ou de fluage. De plus, le premier étage (l'étage qui suit directement la chambre de combustion) d'une turbine à gaz moderne fait face à des températures d'environ (1 370° C), contre des températures d'environ (820°C) dans les premières turbines à gaz [1].

Les températures à réaction militaires modernes, peuvent voir des températures de turbine de (1 590°C), ces températures élevées peuvent affaiblir les lames et les rendre plus sensibles aux défaillances de corrosion.

Et enfin, les vibrations du moteur et de la turbine elle-même peuvent provoquer des ruptures de fatigue.

Cet élément très sensible et facteur importants dans l'évolution technologique des turbines à gaz est le sujet de notre thèse d'aujourd'hui, dont on va présenter, étudier et analyser la répartition des températures et les méthodes utilisées pour augmenter les performances des turbines à gaz. Nous avons également simulé l'expérience de l'utilisation de zircone MgO comme barrière thermique dans l'aube de la turbine à gaz avec programme Ansys en introduisant des conditions limites, afin d'interpréter les résultats [2].

Chapitre I :

Généralité

sur

la turbine à gaz

I.1. Introduction :

Les turbines à gaz sont essentielles à la vie quotidienne. Le trafic aérien moderne n'existerait pas sans turbines à gaz, et nous aurions également de graves pénuries de production d'électricité sans elles.

Alors, qu'est-ce qu'une turbine à gaz ?

C'est un moteur à combustion interne que brule du carburant gazeux ou liquide. Il délivre l'énergie de cette combustion soit par poussée, dans un turboréacteur d'aéronef ; ou –au moyen d'un arbre rotatif et il fournit soit de :

- L'électricité via un générateur,
- La puissance mécanique pour l'entrainement de pompes de compresseurs,
- La poussé pour la propulsion des navires. [1]

I.2. Développement historique de la turbine à gaz :

L'idée d'une turbine à gaz à combustion interne, ou d'une turbine à air chaud, est assez ancienne. Dès 1731, l'Anglais John Barber déposa un brevet sur ce sujet. Cependant, il fallut attendre environ cent ans avant que la turbine à gaz ne prenne son essor. Son développement fut longtemps retardé par le succès de la turbine à vapeur (turbine à action de Gustave Laval en 1883 et turbine à réaction de Charles Parsons en 1884). L'intérêt pour la turbine à gaz conduisit à une activité fiévreuse de dépôts de brevets entre 1880 et 1900 et à de nombreuses expériences entre 1900 et 1910.les principaux projets de recherche durant cette période sont l'œuvre des personnalités suivantes :

L'Allemand Stolze proposa une turbine à air chaud comportant un compresseur axial multi-étage et une turbine axiale (1900-1904), mais la machine ne tourna jamais. [3]

L'Allemand Holzwarth proposa (1906-1908) une turbine à gaz à explosion. Celle-ci fut construite par Koerting puis par Brown Boveri (1909-1913). Elle était équipée de deux étages de turbine Curtis suivant une configuration proposée par le Français Karovadine (1906). Le système fut abandonné en 1928. [3]

Les Français Armangaud et Lemale proposèrent la turbine à gaz à combustion interne (1903-1905) comprenant un compresseur radial, une roue de turbine à action, un réfrigérant à eau placé à l'aval et permettant de produire de la vapeur (le principe de la cogénération turbine à gaz-turbine à vapeur était énoncé). Étant dirigée sur la roue mobile, cette vapeur conduisait à l'obtention d'une puissance supplémentaire. Cependant, les chocs thermiques endommagèrent les disques et les aubes de la turbine, et le projet fut abandonné en 1909 avec le décès d'Armengaud. [3]

Comme l'Américain Sanford Moss, le Norvégien Aegidius Elling utilisa, en 1903, les mêmes principes qu'Armangaud et Le mal, mais indépendamment de leurs travaux. Au lieu d'envoyer directement la vapeur sur les aubes de turbine, celle-ci était mélangée préalablement avec le courant de gaz avant d'entrer dans la roue. Les chocs thermiques étaient ainsi annulés. Le système fut amélioré d'abord en 1904, puis entre 1924 et 1932. Les principales idées d'Aegidius Elling

étaient très saines et servirent de base pour la technologie des turbines à gaz modernes. La première turbine à gaz industrielle opérationnelle fut construite en 1930. [3]

Dans le domaine aéronautique, il fallut attendre 1921 pour trouver trace d'un brevet français déposé par Guillaume, qui montre le principe du turboréacteur simple flux moderne tel qu'on l'utilise encore aujourd'hui. Puis, dans les années 1920, de nombreux brevets et inventions ont contribué à la promotion du moteur à réaction moderne. [3]

Pour ce qui concerne les premières réalisations, nous citerons les travaux de Frank Whittle en Angleterre et de Hans Von Ohain en Allemagne. Dès 1935, Von Ohain et Max Hahn déposèrent un brevet de turboréacteur comprenant un compresseur centrifuge, une chambre de combustion annulaire à retour située autour de l'entrée d'air et une turbine centripète. Sur cette base, la société Heinkel étudia le premier turboréacteur HeS1, qui propulsa un avion monomoteur en août 1939.

Quant à Whittle, il déposa des brevets sur le turboréacteur en 1930 et en 1936. En 1937, avec le concours de la British Thomson-Houston, il fit tourner son premier turboréacteur WU au banc. Le premier moteur de vol Whittle W1, dessiné par Power Jets et réalisé par British Thomson-Houston, fut essayé au banc en 1938. Son premier vol d'essai eut lieu en mai 1941 sur un appareil Gloster E 28/29. Citons, enfin, les essais au banc d'un turboréacteur par Sensaud de Lavaud et Brunet en 1937. Cependant, la durée de vie de ce prototype ne dura guère plus de dix minutes. [3]

I.3. Définition de la turbine à gaz

La turbine à gaz est un moteur à combustion interne de tous les points de vue.

Elle peut être considérée comme un système autosuffisant. En effet, elle prend et comprime l'air atmosphérique dans son propre compresseur, augmente la puissance énergétique de l'air dans sa chambre de combustion et convertie cette puissance en énergie mécanique utile pendant les processus de détente qui a lieu dans la section turbine. [4]

L'énergie mécanique qui en résulte est transmise par l'intermédiaire d'un accouplement à une machine réceptrice, qui produit la puissance utile pour le processus industriel. Sous sa forme la plus simple, une turbine à gaz comprend un compresseur axial qui aspire l'air à la pression atmosphérique ; une chambre de combustion, où l'air comprimé est réchauffé à pression constante par la combustion d'une certaine quantité de combustible (gaz naturel, gasoil ou kérosène) et enfin une turbine de détente des gaz jusqu' à la pression atmosphérique. [4]

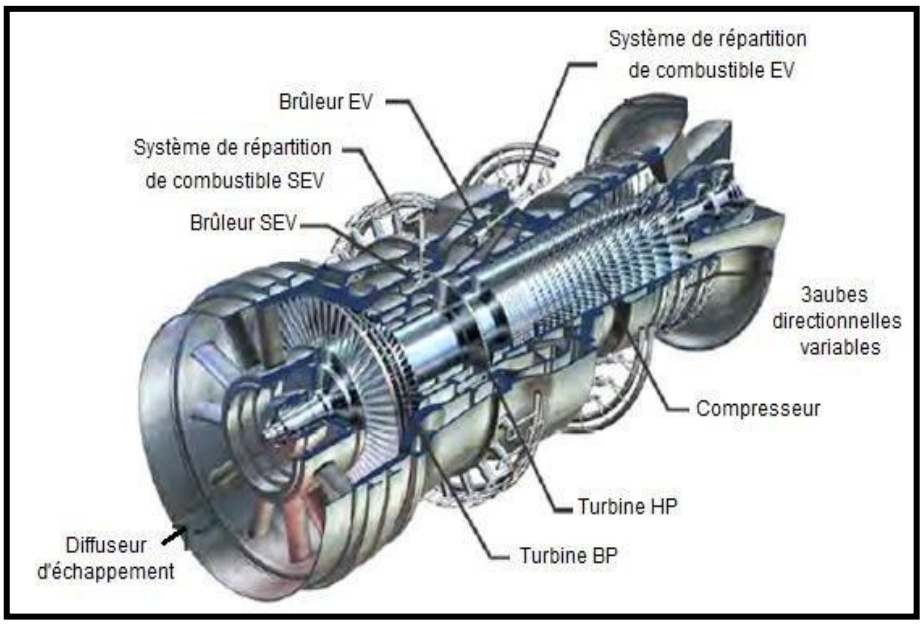


Figure I.1 : *Turbine à Gaz. [5]*

I.4. Principales utilisations de la Turbine à Gaz :

La Turbine à Gaz est une machine motrice permettant d'entraîner des alternateurs pour la génération d'électricité, ou des pompes et compresseurs, en général de forte puissance, de façon libre et continue. Chaque cas d'installation de TAG doit être personnalisé avec des paramètres spécifiques définis tels que :

- Type de combustible.
- Durée de fonctionnement par an.
- Températures extérieures extrêmes.
- Montage, nuisances, etc. [2]

I.4.1. Production d'électricité:

Cette application est extrêmement courante : l'arbre de la turbine entraîne un simplificateur dont l'arbre à petite vitesse entraîne un alternateur. Le système mécanique est simple et peut être comparé à un groupe turboalternateur à vapeur pour la production d'électricité. [2]

I.4.2. Production combinée chaleur-force :

On appelle encore cogénération lorsqu'on produit les énergies utiles, l'électricité et la chaleur, avec des sources énergétiques primaires, telles que le pétrole, le gaz ou le charbon. Cette production est généralement réalisée au sein d'une centrale thermique ou, en fonction de sa taille, d'une centrale à cycle combiné pour le chauffage domestique. [2]

I.4.3. Pompage et compression :

Dans tous les types de Turbine à Gaz, il est possible de remplacer l'alternateur entraîné par une pompe, un compresseur ou une soufflante. Le choix entre une turbine à un ou à deux arbres dépend du type de machine accouplé à la turbine et du style d'exploitation envisagé. [2]

I.5. Classement des Turbine à Gaz :

On peut classer les TAG en deux catégories selon leur conception mécanique et leur technologie :

• Les turbines industrielles pouvant être de type un (1) arbre ou deux (2) arbres.

• Les turbines de type aviation à deux (2) arbres. [2]

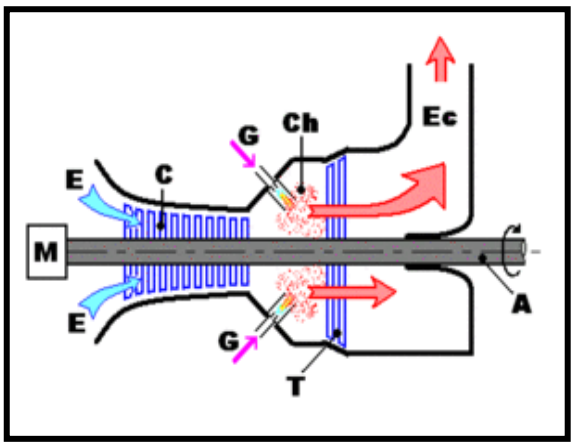
I.5.1. Turbines industrielles :

Les turbines industrielles sont des machines lourdes et assez rustiques où l'objectif principal est la longue durée d'exploitation. Ce dernier conduit à l'application de paramètre de fonctionnement peu sévère :

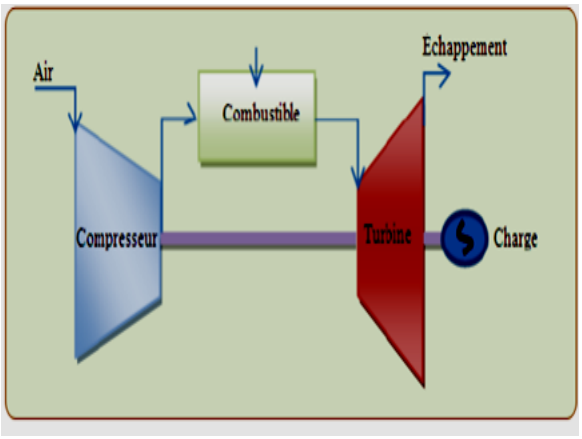
• Le rapport de compression compris entre 6 et 8.

• La TET doit être supérieur à 950°C (pour vaincre les problèmes de corrosion), alors, les rendements moyens seront compris entre 25 à 30 %.

I.5.1.1. Turbine à un arbre :



FigureI.2.a.



FigureI.2.b.

FigureI.2.a.et.b : *Schéma d'une Turbine à Gaz à u arbre. [5]*

Dans cette catégorie de TAG, le compresseur d'air, la turbine de détente et l'appareil entraîné sont sur le même arbre. Cette installation a un côté positif, du fait de sa grande simplicité, mais a aussi un côté négatif, puisqu'elle conduit à un intervalle d'utilisation de vitesse étroit, à faible rendement partiel qu'une turbine à deux arbres. En plus, le moteur de démarrage doit entraîner l'ensemble de l'équipage mobile. La deuxième catégorie de la turbine est généralement la plus utilisée pour l'entraînement d'alternateur, alors, la vitesse de rotation est constante. [2]

I.5.1.2. Turbine à deux arbres:

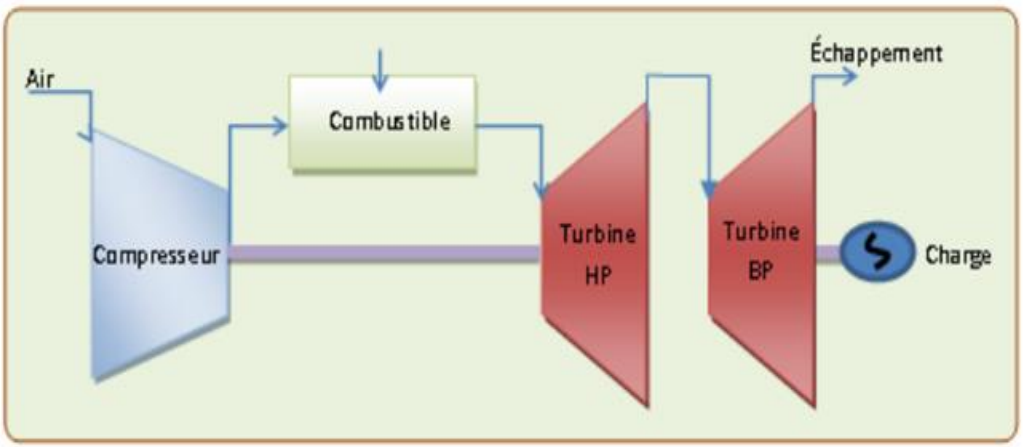


Figure I.3.a.

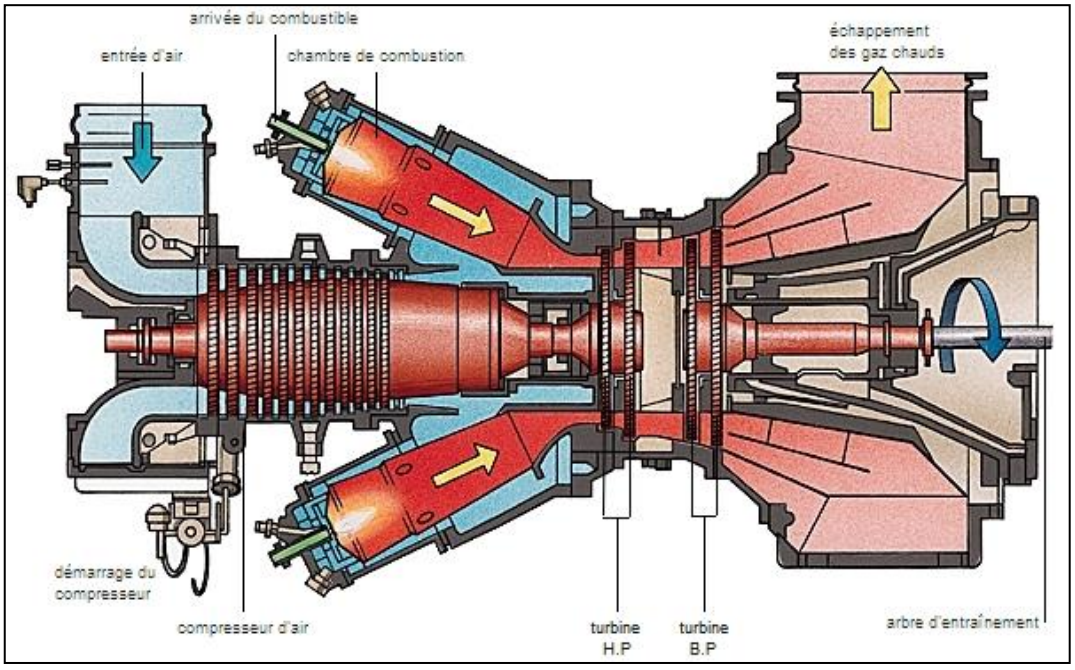


Figure I.3.b.

Figure I.3.a et b : *Schéma d'une Turbine à Gaz à deux arbres. [5]*

La turbine de détente est subdivisée en deux parties :

- La turbine HP entraîne le compresseur d'air et lui seul, par l'intermédiaire d'un arbre.
- La turbine BP garantit l'alimentation d'énergie à la machine entraînée.

La première ligne d'arbre compose le GG, la deuxième ligne d'arbre pour la production d'énergie mécanique.

De point de vue mécanique, la turbine à deux arbres est plus complexe que la turbine à un seul arbre ; mais, elle permet d'obtenir un meilleur rendement à charge partielle, elle s'adapte

particulièrement bien à l'entraînement d'un compresseur dont la prise en charge s'effectue lors delà montée en vitesse et permet de travailler sur une large plage de vitesse de rotation. A note régalement la puissance réduite du moteur de démarrage qui n'entraîne que le premier arbre du générateur de gaz. [6]

I.5.2 Turbines de type " Aviation " (Aéro-dérivative) :

Les turbines de type aviation, également appelées turbines "jet", sont constituées d'un réacteur GG suivi d'une turbine de détente (en place de la tuyère) permettant de produire de l'énergie mécanique. Il s'agit donc d'une turbine à deux arbres utilisant des techniques aéronautiques très répandues. La conception est évidemment bien différente des turbines industrielles puisque les critères de poids et d'efficacité sont primordiaux.

Le GG ne peut plus être réparé sur site, il doit être remplacé par un générateur neuf ou rénové.

La réparation se fait chez le constructeur, en atelier spécialisé compte tenu de la sécurité. [6]

I.6. Composition de la turbine à gaz.

I.6.1. Les sections principales :

Les principaux composants d'une turbine à gaz :

- Section compression
- Section combustion
- Section turbine [7]

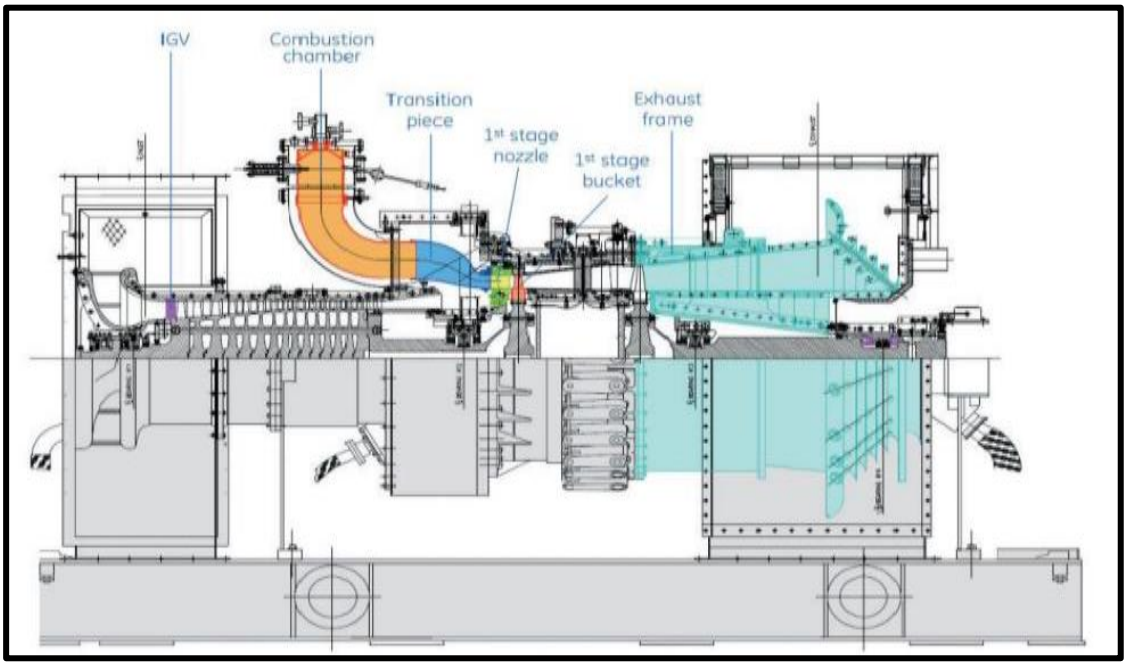


Figure I.4: *schéma générale de la turbine à gaz.* [7]

I.6.1.1 Section compression.

Le compresseur est de type axial du fait qu'il est capable de délivrer des débits d'air élevé, nécessaires pour obtenir une puissance utile importante et cela dans un espace réduit.

Il sert également à fournir une source d'air nécessaire pour refroidir les parois des directrices, des aubes et des disques de la turbine. [7]

En plus, le compresseur fournit de l'air pour le refroidissement de la turbine et pour l'étanchéité de l'huile de graissage des paliers.

Composants principaux :

- Le rotor
- Le stator
- L'enveloppe d'admission
- Le corps du compresseur
- L'enveloppe d'évacuation du compresseur
- Tubes d'interconnexion [7]

Figure I.5: *Ensemble rotor compresseur /roue turbine HP.* [7]

La combustion du mélange air-gaz a lieu dans cette section. Elle est déclenchée par des bougies, lorsque l'allumage se produit dans une des chambres, les gaz chauds de combustion passent dans des tubes foyers et vont allumer le mélange des autres chambres. [7]

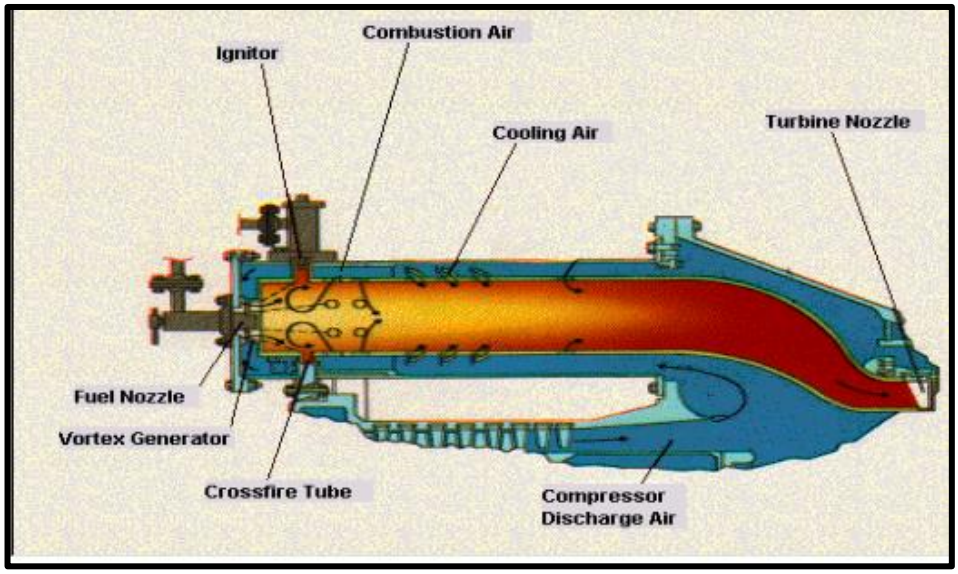


Figure I.6 : *Schéma de la chambre de combustion.* [7]

I.6.1.2. Section Turbine :

La section turbine est la partie où les gaz chauds venant de la section combustion sont convertis en énergie mécanique. Cette section comprend les éléments suivants :

- Corps de turbine
- Tuyère 1ère étage
- Roue de turbine 1ère étage (roue HP)
- Tuyère 2ème étage (aubage réglable ou directrice)
- Roue de turbine 2ème étage (roue BP). [7]

✓ **Corps de turbine :**

C'est l'élément structurel principal de la turbine car il contient tous les organes qui constituent la voie d'écoulement des gaz depuis les chambres de combustion à travers les roues jusqu'à l'échappement.[7]

✓ **Tuyère 1ère étage :**

Les gaz chauds à haute pression quittant les chambres de combustion passent par une pièce de transition et sont dirigés vers les aubes de la roue HP via la tuyère 1ère étage (figure I-7). La tuyère comprend les segments d'aube directrice montés dans une bague de retenue, soutenue dans la veine des gaz chauds par un dispositif de fixation.

Les tuyères sont soumises à des températures très élevées ce qui nécessite leur fabrication partir d'alliages spéciaux, elles sont aussi refroidies avec de l'air de combustion.[7]

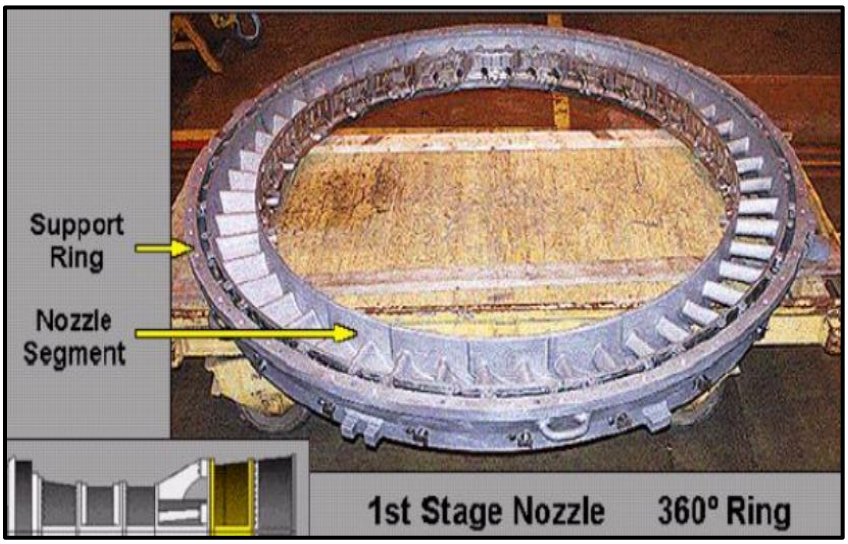


Figure I.7: *la tuyère 1ère étage.*[7]

✓ **Tuyères 2ème étage :**

La tuyère du second étage se compose d'aubes formant une directrice à angles variables dans l'espace circulaire de la veine des gaz chauds. Elle est insérée juste avant la roue BP (Figure I.8). Ces aubes peuvent être variées en même temps grâce à un mécanisme qui comporte une bague de commande qui tourne sous l'action d'un cylindre hydraulique.[7]

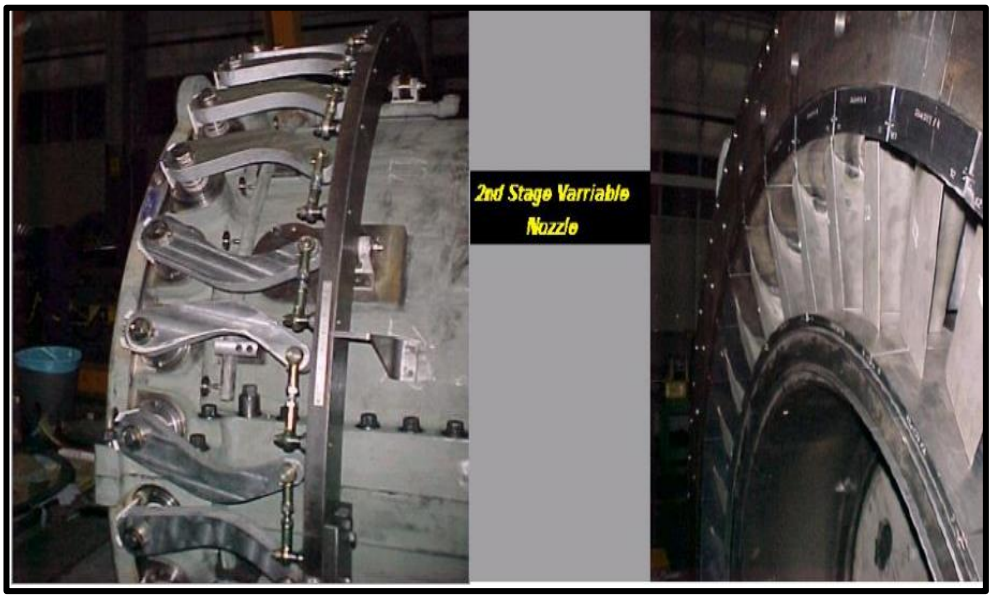


Figure I.8: La tuyère du second étage. [7]

✓ **Roues de turbine :**

La turbine comprend 2 roues :

La roue de turbine HP qui entraîne le compresseur axial et qui est directement boulonnée sur le demi-arbre arrière du rotor du compresseur de manière à former un rotor haute pression. Ce rotor HP est soutenu par deux paliers N°1 et N°2.

La roue de turbine BP qui entraîne la charge (compresseur centrifuge) et qui est directement boulonnée sur un arbre pour former le rotor de turbine basse pression. Ce rotor BP est soutenu par deux paliers N°3 et N°4.[7]

Les deux roues sont positionnées en ligne dans la turbine, mais sont mécaniquement indépendantes l'une de l'autre. Elles ont des aubes à queues longues coulées avec précision, et sont refroidies par l'air extrait du 10ème étage et par l'air de fuite d'étanchéité HP. Le volume de gaz augmente quand sa pression diminue en traversant la roue de turbine HP. Pour cela les pâles ou ailettes de la roue BP sont plus grandes que celles de la roue HP. [7]

I.7.Auxiliaires de la turbine:

La turbine à gaz comprend un certain nombre de systèmes de commande, de protection et auxiliaires associés au fonctionnement correct de la turbine.

Les systèmes de commande comprennent généralement les dispositifs nécessaires à la commande de la turbine pour le démarrage normal, le fonctionnement et la mise en charge. ILS comprennent également les fonctions de commande de vitesse, de température, commande de lancement et commande de combustible.[7]

Les systèmes de protection sont ceux nécessaires à assurer la protection pour un lancement et une mise à l'arrêt normaux ainsi qu'à éviter des incidents en cas de mauvais fonctionnement ou de conditions anormales ou d'urgence. Ces conditions anormales peuvent être le résultat d'un défaut mécanique ou d'une défaillance dans le système de commande. Ces systèmes comprennent :

- Système de gaz combustible
- Système d'huile de graissage
- Système d'huile hydraulique
- Système d'huile de commande
- Système d'huile d'étanchéité
- Système d'air d'étanchéité et de refroidissement. [7]

I.7.1 Système d'air d'étanchéité :

La plupart de l'air comprimé est utilisé pour la combustion. Une partie de cet air est retiré du compresseur du 10ième étage et utilisé comme air de refroidissement, l'autre partie provient du refoulement du compresseur et sert d'air de pressurisation, une autre partie provient de l'air ambiant.

Les différentes parties de la turbine qui doivent être refroidies sont :

- Faces avant et arrière des roues de turbines HP et BP
- Tuyère 1ère étage et sa bague de retenue
- Enveloppe du rotor de turbine
- Châssis d'échappement
- Entretoises de support de corps cylindrique intérieur.[7]

I.7.2. Air extrait du 10ème étage :

L'air extrait du 10ème étage du compresseur sert à :

- L'étanchéité des paliers N°1,3 et 4 contre les fuites d'huile. Cet air est d'abord passé à travers un séparateur de saletés centrifuge qui élimine toute particule de poussière ou de corps étrangers qui pourraient endommager les paliers. Les saletés accumulées

Sont déchargées du séparateur par une extraction continue. L'air d'étanchéité quant à lui est purgé des paliers vers le réservoir d'huile principal.

- Le refroidissement des faces avant et arrières des roues de turbines HP et BP, de la tuyère 1ère étage, de l'enveloppe du rotor de turbine et du châssis d'échappement. En effet à ces endroits les températures son très élevées et peuvent diminuer la durée de vie de ces pièces.[7]

I.7.3. Air de fuite des joints HP :

Le palier N°2 qui supporte l'arbre de la turbine HP est étanché par les fuites d'air du joint HP du compresseur axial. Cet air est aussi purgé vers le réservoir d'huile.[7]

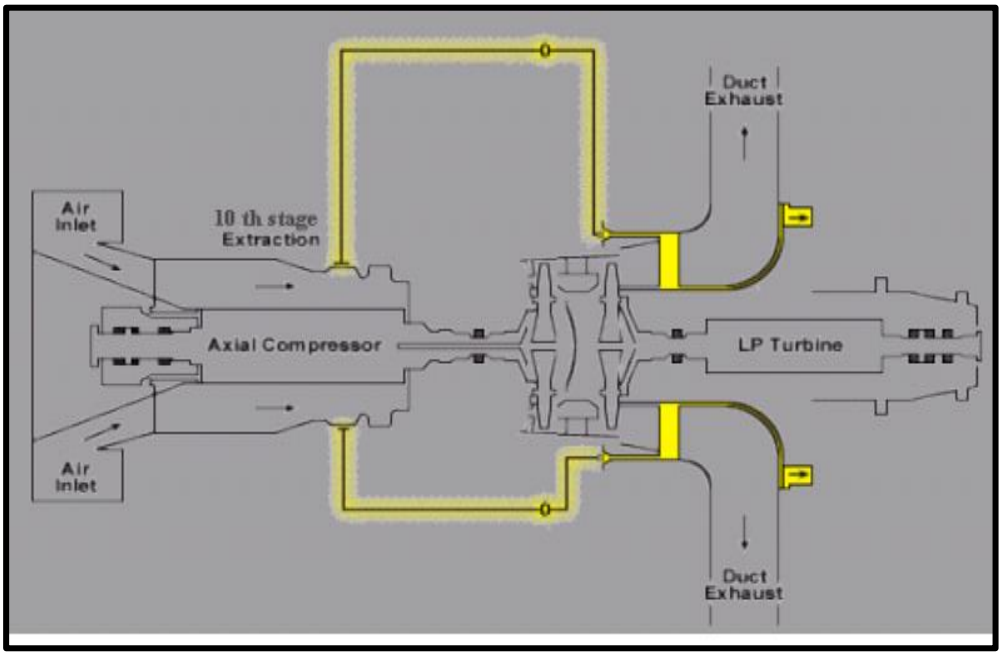


Figure I.9: *Système d'air d'étanchéité.* [7]

I.8. Aube de turbine :

C'est l`organe utilise pour réaliser la détente dans la turbine par une géométrie bien Déterminée et qui n`est pas systématique car l'écoulement accélère pose moins de problèmes que l`écoulement décéléré dans le compresseur. L'exemple de deux grilles avec la même ligne de squelette mais une distribution différente de l'épaisseur des aubes, dans le canal B on obtient une

accélération continue tandis que dans le canal A on obtient après l`accélération une décélération de l`écoulement dans l'aubage qui peut provoquer un décollement de celui-ci. [1]

Dans l`aubage d`une turbine on essaye toujours d`obtenir la surface minimale à la sortie du canal entre les aubes de turbine.

Figure I.10 : *Canal inter aubes.* [5]

I.9. Avantages des Turbines à gaz :

- La turbine a gaz représente des avantages remarquables :
- Simplicité d`installation.
- Génération simultanée d'électricité et de chaleur utilisable soit directement, soit indirectement dans les procédés industriels.
- Possibilité de fonctionnement avec différents combustibles.
- Grande sécurité de fonctionnement.
- Entretien facile.
- Marché régulière.
- Valeur d`émission favorable sans équipement. [8]

I.10. Inconvénients des turbines à gaz :

- Mauvais rendement : moins de 30% de l'énergie calorifique contenue dans le carburant est transformée en énergie mécanique.
- Faibles pressions de travail.
- Régimes souvent beaucoup trop élevés.
- Coût de fabrication élevé.
- Importante consommation de carburant.
- Mal adaptée aux faibles puissances.
- Bruyante par la vitesse des gaz.
- Nécessite des réducteurs coûteux. [8]

I.11. Matériaux :

Un facteur limitant clé dans les premiers moteurs à réaction était la performance des matériaux disponibles pour la section chaude (combustion et turbine) du moteur. Le besoin de meilleurs matériaux a stimulé de nombreuses recherches dans le domaine des alliages et des techniques de fabrication, et cette recherche a abouti à une longue liste de nouveaux matériaux et méthodes qui rendent possibles les turbines à gaz modernes. L'un des premiers d'entre eux était Nimonic, utilisé dans les moteurs britanniques Whittle. [9]

Le développement des superalliages dans les années 1940 et de nouvelles méthodes de traitement telles que la fusion par induction sous vide dans les années 1950 ont considérablement augmenté la capacité de température des aubes de turbine. D'autres méthodes de traitement telles que le pressage isostatique à chaud ont amélioré les alliages utilisés pour les aubes de turbine et augmenté les performances des aubes de turbine. [9] aubes de turbine modernes utilisent souvent du nickel à base de superalliages qui incorporent le chrome, le cobalt, et le rhénium. [10] [11]

Outre les améliorations apportées aux alliages, une percée majeure a été le développement de méthodes de production de solidification directionnelle (DS) et de monocristal (SC). Ces méthodes aident à augmenter considérablement la résistance à la fatigue et au fluage en alignant les joints de grains dans une direction (DS) ou en éliminant complètement les joints de grains (SC). La recherche SC a commencé dans les années 1960 avec Pratt et Whitney et a pris environ 10 ans pour être mise en œuvre. L'une des premières implémentations de DS était avec les moteurs J58 du SR-71. [9] [12] [13]

Une aube de turbine avec revêtement barrière thermique.

Une autre amélioration majeure de la technologie des matériaux d'aube de turbine a été le développement de revêtements de barrière thermique (TBC). Là où les développements DS et SC ont amélioré la résistance au fluage et à la fatigue, les TBC ont amélioré la résistance à la corrosion et à l'oxydation, qui sont devenues de plus en plus préoccupantes à mesure que les températures augmentaient. Les premiers TBC, appliqués dans les années 1970, étaient des revêtements en aluminure. Des revêtements céramiques améliorés sont devenus disponibles dans les années 1980. Ces revêtements ont augmenté la capacité de température des aubes de turbine d'environ 200 °F (90 °C). [9] Les revêtements améliorent également la durée de vie des aubes, doublant presque la durée de vie des aubes de turbine dans certains cas. [14]

La plupart des aubes de turbine sont fabriquées par moulage à la cire perdue (ou traitement à la cire perdue). Ce processus consiste à fabriquer une matrice négative précise de la forme de la lame qui est remplie de cire pour former la forme de la lame. Si la lame est creuse (c'est-à-dire qu'elle comporte des passages de refroidissement internes), un noyau en céramique ayant la forme du passage est inséré au milieu. La lame de cire est recouverte d'un matériau résistant à la chaleur pour former une coque, puis cette coque est remplie de l'alliage de la lame. Cette étape peut être plus compliquée pour les matériaux DS ou SC, mais le processus est similaire. S'il y a un noyau en céramique au milieu de la lame, il est dissous dans une solution qui laisse la lame creuse. Les lames sont recouvertes d'un TBC, puis tous les trous de refroidissement sont usinés. [15]

Les composites à matrice céramique (CMC), où les fibres sont noyées dans une matrice de céramiques dérivées de polymères, sont en cours de développement pour être utilisés dans les aubes de turbine. [16] Le principal avantage des CMC par rapport aux superalliages conventionnels est leur légèreté et leur capacité à haute température. Il a été démontré que les composites SiC/SiC constitués d'une matrice de carbure de silicium renforcée par des fibres de carbure de silicium résistent à des températures de fonctionnement de 200 à 300 °F supérieures à celles des superalliages de nickel. [17] GE Aviation a démontré avec succès l'utilisation de telles aubes composites SiC/SiC pour la turbine basse pression de son moteur à réaction F414. [18] [19]

I.12. Présentation du système barrière thermique :

Les barrières thermiques sont des systèmes multicouches composés d'une couche de céramique isolante déposée à la surface du superalliage constitutif de l'aube de turbine sur une couche de liaison intermédiaire qui assure la protection du superalliage contre l'oxydation. Entre la couche de liaison et la couche de céramique, se développe, dès l'élaboration du système, une couche d'alumine qui croît en service, par réaction entre l'oxygène qui diffuse à travers la couche de céramique et l'aluminium contenu dans la couche de liaison (Figure I.13). [20]

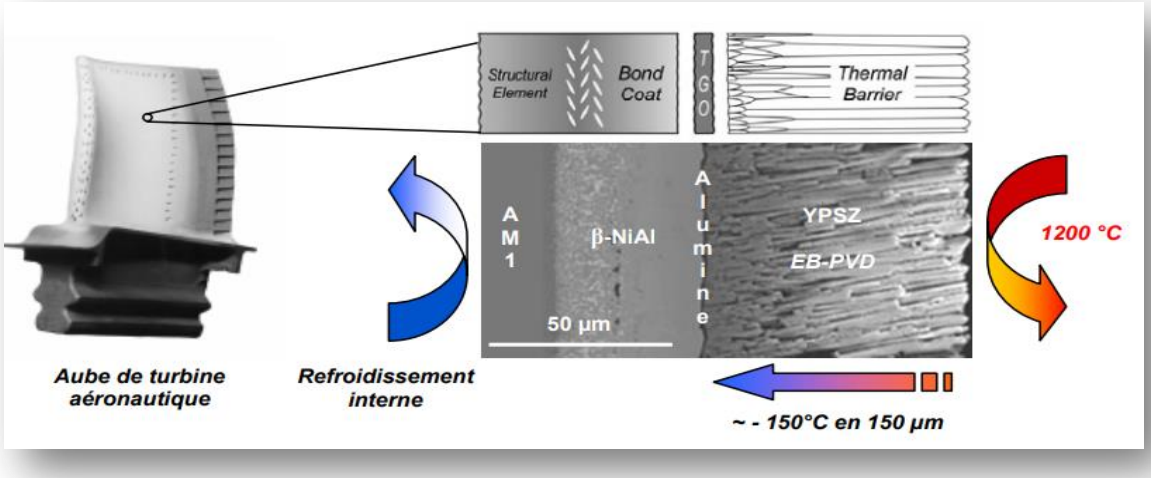


Figure I.11 : Système barrière thermique. [20]

Si la température des gaz de combustion peut atteindre 1600°C, la température en surface de la couche de céramique atteint, elle, typiquement 1200°C. La couche de céramique permet un abaissement de la température d'environ 1 K/µm, soit un abaissement global de 100 à 150°C en fonction de son épaisseur. En condition de service, la température de la couche de liaison est comprise entre 1000 et 1100°C. [20]

I.12.1. La couche de céramique :

La couche céramique communément utilisée dans les systèmes barrière thermique est la zircone yttriée partiellement stabilisée (YPSZ : Yttria Partially Stabilized Zirconia, ZrO2 - 6 à 8 %mass. Y2O3). Ce matériau a été sélectionné pour ses propriétés particulièrement intéressantes, à savoir :

- Un coefficient de dilatation relativement élevé pour une céramique (de l'ordre de $10.10^{-6}.k^{-1}$),

- Une faible conductivité thermique (de l'ordre de 2 W.$m^{-1}.k^{-1}$ sous forme dense au-dessus de 800°C),
- Une ténacité élevée,
- Une stabilité structurale satisfaisante dans le domaine des températures de fonctionnement,
- Une bonne stabilité chimique vis-à-vis de l'environnement oxydant des gaz de combustion,
- Une compatibilité chimique certaine avec la couche d'alumine sous-jacente,
- Une compatibilité avérée avec les procédés de dépôt par évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD Electron Beam-Physical Vapour Déposition) et par projection plasma (APS : Air Plasma Spray).

Dans les systèmes peu sollicités mécaniquement, la couche de céramique est déposée par projection plasma. Sa structure présente une porosité lamellaire qui abaisse sa conductivité thermique aux alentours de 1 W.$m^{-1}.k^{-1}$. Pour les systèmes plus sollicités, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques qui tournent à grande vitesse, elle est déposée par évaporation (EB-PVD). Sa structure est alors colonnaire, ce qui lui confère une meilleure résistance mécanique au détriment des propriétés thermiques, sa conductivité thermique atteignant, dans ce cas, environ 1,5 W.$m^{-1}.k^{-1}$.

A haute température, l'architecture poreuse de la couche céramique évolue, par frittage, entraînant une élévation de sa conductivité thermique et une augmentation de sa rigidité. [20]

I.12.2. La couche de liaison :

En condition de service, de l'oxygène diffuse à travers la couche de céramique, d'une part en raison de sa structure poreuse, et d'autre part du fait que la zircone yttriée est un très bon conducteur de l'oxygène. Il est par conséquent essentiel que le métal sous-jacent puisse former une couche d'oxyde protectrice, donc stable, à croissance lente, dense et adhérente, pour éviter un écaillage rapide de la couche de céramique. Le superalliage ne permettant pas la formation d'un tel oxyde, une couche de liaison intermédiaire est introduite entre le superalliage et la couche de céramique. L'alumine 'avérant être un oxyde qui répond aux attentes citées, les couches de liaison utilisées sont des alliages alumine formeurs, tels que les aluminures de nickel β-NiAl contenant typiquement, à l'état brut d'élaboration, de 40 à 45 %at. d'aluminium (les aluminières de nickel sont utilisés, entre autres, comme couche de liaison dans le système barrière thermique du moteur militaire M88, conçu par Snecma pour équiper l'avion Rafale). [21]

La couche de liaison, qui joue un rôle crucial dans la durabilité des systèmes barrière thermique, vo itsa composition évolué en condition de service, du fait de son oxydation et des phénomènes d'inter diffusion survenant avec le substrat. En particulier, sa teneur en aluminium diminue progressivement.

Il est connu depuis plusieurs années que l'addition de Pt à hauteur de 10% atomique à la couche de liaison à base de β-NiAl permet d'augmenter très significativement la durée de vie des barrières thermiques. Des travaux menés récemment à l'Ornera ont permis la conception de nouvelles couches de liaison à base de β-NiAl dopé en Zr à hauteur de quelques centaines de ppm massiques. [29]

Dételle couches de liaison sont intéressantes d'un point de vue industriel d'une part pour l'augmentation de la durée de vie des barrières thermiques qu'elles sont susceptibles d'entraîner, et d'autre part parce qu'elles permettraient de réduire significativement les coûts de production. En premier lieu, les coûts de matière première seraient moindres et, de plus, le motoriste Snecma n'aurait aucune licence d'exploitation à payer pour l'utilisation du procédé d'élaboration de ces couches de liaison β-NiAl(Zr), breveté en commun avec l'Onera. [22]

Par ailleurs, le procédé en lui-même serait simplifié, l'élaboration des couches de liaison β-NiAl(Zr) nécessitant moins d'étapes que celle des couches de liaisonβ-(Ni,Pt)Al. L'élaboration des couches β-NiAl(Zr) se faisant uniquement par voie thermochimique, les problèmes liés à la géométrie complexe de certaines pièces et à la présence de trous de refroidissement, récurrents lors du dépôt électrolytique de Pt lors de l'élaboration des couchesβ-(Ni,Pt)Al, seraient ainsi évités. Un transfert de technologie portant sur la réalisation de telles couches de liaison est actuellement en cours de l'Onera vers Snecm.[22]

I.13. L'inconel 718 :

L'Inconel 718, alliage à base nickel, est utilisé à des températures comprises entre 450 et700°C, sans que ses propriétés de résistance mécanique ne soient modifiées de façon préjudiciable, même après une longue exposition à de très hautes températures. Il est ainsi choisi pour la fabrication des pièces dont les températures de service sont élevées et dans des environnements sévères. Il est alors largement utilisé par les industries de l'aéronautique, de l'aérospatiale ou de l'énergie, subissant des températures et des pressions pouvant atteindre des valeurs bien supérieures aux limites physiques et mécaniques des matériaux conventionnels. [31]

Les surfaces fonctionnelles des pièces en Inconel 718 sont réalisées par un procédé d'usinage : tournage, fraisage ou perçage. Les caractéristiques métallurgiques et mécaniques de l'alliage rendent ces opérations critiques et l'alliage est connu comme étant parmi les plus difficiles à usiner. Cette difficulté de mise en forme impose généralement l'utilisation d'une consommation de fluides de coupe très importante induisant un coût financier, sanitaire et environnemental non négligeable. Un objectif est de migrer vers l'usinage à sec et l'usinage à grande vitesse. Cependant, à cause de sa faible usinabilité, les surfaces sont affectées ou endommagées durant l'opération d'usinage. Le caractère critique des pièces mises en forme impose une surveillance approfondie des surfaces usinées. Afin d'en assurer une intégrité satisfaisant aux critères des industriels, une attention particulière doit être portée sur le choix des conditions de coupe, de la géométrie et des revêtements d'outils.

La modification et la détérioration des surfaces usinées sont liées principalement à deux phénomènes **:** une très grande déformation plastique due aux efforts et la génération d'une importante chaleur dans la zone de coupe. Les températures présentes ont une grande incidence sur l'intégrité de la pièce usinée et particulièrement sur les contraintes résiduelle sen traction. En vue d'améliorer la qualité des surfaces produites, il semble nécessaire de déterminer les températures atteintes lors de l'usinage et de comprendre leur génération en vue de les minimiser. [23]

I.14. Magnésie (MgO) :

La magnésie (oxyde de magnésium, MgO) est une céramique spéciale aux performances exceptionnelles à haute température, utilisée principalement dans l'ingénierie thermique, les éléments chauffants, les creusets et les réfractaires.

La magnésie est un matériau inerte avec une excellente résistance à l'attaque des métaux tels que le sodium, les alliages à base de nickel et les systèmes plutonium/uranium. Le matériau est connu pour sa propriété de résistance mécanique et fonctionne très bien sous un chauffage ou un refroidissement uniforme pour éviter les chocs thermiques.

En raison de sa résistance aux matériaux à base de plomb et autres métaux en fusion, la magnésie est utilisée pour le traitement des matériaux piézoélectriques et en fait les composants parfaits pour les applications réfractaires. [24]

I.15.Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons essayé de présenter l'importance des turbines à gaz dans notre vie quotidienne, la technologie et les domaines d'utilisation, et également les éléments essentiels d'une turbine.

Chapitre II :

Les méthodes utilisées pour augmenter les performances d'une TAG

II.1 Introduction :

Les turbines à gaz étant des machines à volume constant, la puissance de sortie est réduite quand la densité de l'air est réduite, et par conséquent le débit massique d'air, diminue à température ambiante ou humidité élevée [25]. De plus, une humidité élevée augmente la consommation de la chaleur de la chambre de combustion due à la chaleur spécifique élevée de l'eau. Typiquement, pour chaque hausse d'un °C de température ambiante, la puissance de sortie d'une turbine à gaz est réduite approximativement de 0,5 à 0,9% [25]. Par conséquent, des refroidisseurs évaporatif ou des réfrigérateurs à compression sont généralement utilisés pour refroidir l'air d'admission du compresseur de la turbine à gaz. Dans ce contexte, une approche pour augmenter les rendements énergétiques des turbines à gaz en utilisant le système d'injection de vapeur, ou bien utilisé un système d'injection d'air.

II.2. Les méthodes d'amélioration des turbines à gaz :

II.2.1. Techniques de Refroidissements de l'Air d'Admission des Turbines à Gaz :

II.2.1.1. Refroidisseur évaporatif :

Le principe de refroidissement évaporatif est le même que celui qui se déroule dans la nature. On évapore une masse d'eau traitée dans le canal d'admission, la chaleur latente nécessaire à l'évaporation provient de l'air lui-même. L'air qui sort après ce système de refroidissement est donc refroidit et humidifié. Le processus de refroidissement n'exige par un apport d'énergie. Les refroidisseurs par évaporation d'eau sont appropriés dans les zones chaudes et sèches. Deux techniques existent assurent le refroidissement par évaporation d'eau. [26]

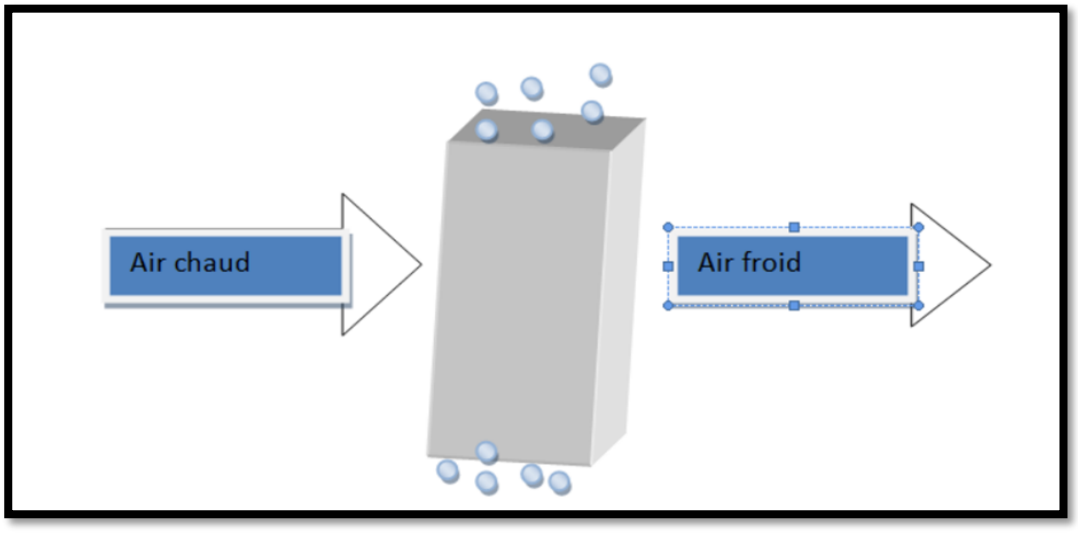


Figure II.1 : *Refroidisseur évaporatif. [26]*

a. Refroidisseur évaporatif par module humidifié :

Le refroidissement par ruissellement d'eau consiste à faire passer l'air après filtrage par un média humidifié composé de surfaces ondulées en papier de cellulose traité, ce média jeu le rôle d'un évaporateur conventionnel. L'eau s'écoule sur la surface ondulée du panneau évaporant par un système de distribution positionné en dessus du media. Une partie de l'eau est évaporée sous l'action

de l'air sec et chaud qui traverse le panneau évaporant. Le reste d'eau va tomber dans un bac situé en dessous de l'évaporateur (bac de récupération). L'air à la sortie du refroidisseur est refroidi et avant de passer par Le compresseur de la turbine à gaz, il passe par un système d'élimination des gouttelettes d'eau pour assurer un bon fonctionnement du compresseur de la turbine à gaz.

L'élément principal du refroidisseur par ruissellement d'eau est le média humide, qui consiste à favoriser au maximum l'évaporation d'eau (sans pulvérisation) dans l'air. Ce dispositif d'humidification est en forme d'un nid d'abeille constitué de matériau en fibre de cellulose qui absorbe l'eau. L'efficacité des refroidisseurs évapora tifs avec média humidifié peut atteindre jusqu'à 90%. [27]

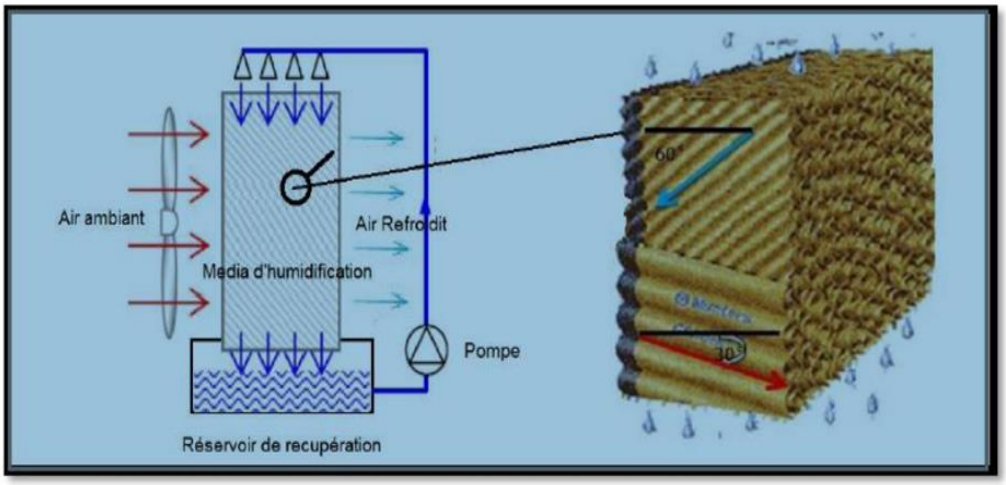


Figure II.2 : *Média de refroidissement [27]*

Généralement, il est recommandé de placer le refroidisseur évaporatif après le filtre à air d'admission. Cet arrangement protégera les médias contre la poussière et d'autres contaminants aéroportés. Autre facteur qui devrait être pris en compte dans l'utilisation des systèmes évaporatif est la qualité de l'eau. Pour éviter tout encrassement du compresseur et la corrosion dans les sections de la turbine, une eau traitée doit être utilisée (tableau II.1).

Constituants	**PPM**
Calcium	50-100
Chlorure	< 40
Fer	< 0.2
Vanadium	< 1
Plomb	< 1
Huile et graisse	< 2
Total solide dissous	< 500
PH	7-8

Tableau II.1 : Caractéristiques de l'eau dans le système évaporatif. [26]

Avantages :

- Installation simple
- Le coût estimatif pour l'installation est de 1/8 à 1/2 par rapport au coût de climatisation frigorifiée,
- Le coût estimatif de l'opération (exploitation) est de 1/4 de celui d'air frigorifié,
- Il fonctionne comme un laveur et nettoyeur d'air d'admission,
- Une augmentation des puissances produites par la turbine à gaz perm et de couvrir les pics de demande surtout dans les périodes chaudes. [26]

Inconvénients :

- L'amélioration de la capacité est limitée,
- Il n'est pas adapté aux sites humides,
- Doit être traitée l'eau avant utilisation. [26]

b. Refroidissement par atomisation ou pulvérisation d'eau (Fogging System) :

Dans ce système l'humidification est réalisée à partir de pulvérisation d'eau sous forme de petites particules au moyen de buses d'atomisation à haute pression (60 à 140 bar). L'eau s'évapore dans l'air, la température d'air diminue et l'humidité spécifique augmente. La taille de gouttelette d'eau pulvérisée est très fine (environ10pm à 20pm) donc elle s'évapore facilement dans l'air. L'efficacité des humidificateurs à pulvérisation peut atteindre 100%. [26]

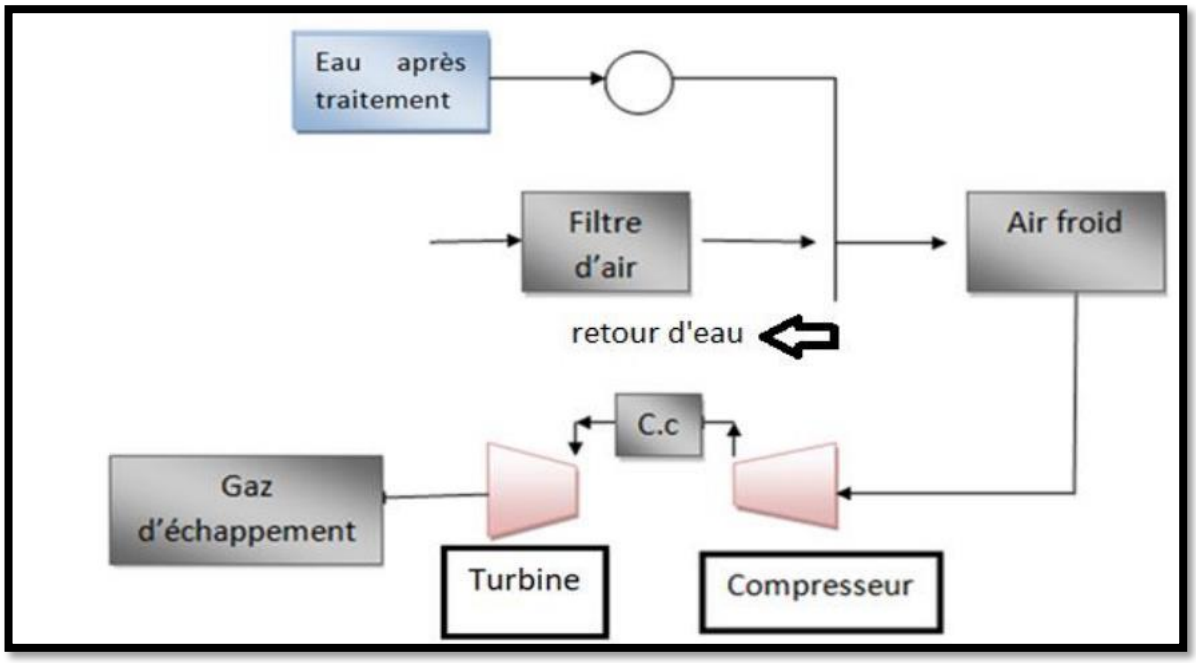


Figure II.3 **:** *Refroidissement par pulvérisation d'eau (Fogging system). [26]*

Constituants	PPM
Na+K	< 10
chlorure	< 50
Silice (SiO2)	< 10
Total solide dissous	<500
Calcium	< 50
sulfate	< 50
Conductivité	1-0,1 µS/cm
PH	< 7

Tableau II.2 : *Caractéristiques de l'eau dans le cas de refroidissement par Atomisation. [26]*

Avantages

- Simple construction,
- Bas coût d'investissement. [26]

Inconvenient :

- L'amélioration de capacité est limitée,
- Il nécessite une pompe de grande puissante. [26]

II.2.1.2 Systèmes de réfrigération mécaniques

Dans ce système prélevée la chaleur par l'utilisation d'un échangeur de chaleur où un fluide plus froid qui permette absorbe la chaleur de l'air, ce qui résulte à son refroidissement. Le cycle thermodynamique de référence est réalisé dans une machine frigorifique à compression.

Cette machine thermodynamique est constituée d'un circuit fermé et étanche dans lequel circule un fluide frigorigène à l'état liquide ou gazeux selon les organes qu'il traverse. Ces organes sont au nombre de quatre : l'évaporateur, le compresseur, le condenseur et le détendeur.

L'utilisation des systèmes de refroidissement mécanique est applicable dans les lieux où l'humidité relative est élevée. Les machines frigorifiques à compression sont utilisées de deux façons différentes à savoir en mode direct ou indirect. [26]

a. Type direct

L'air échange directement la chaleur avec le fluide frigorigène qui circule dans la machine, donc l'air qui passe à travers l'évaporateur va refroidir. [26]

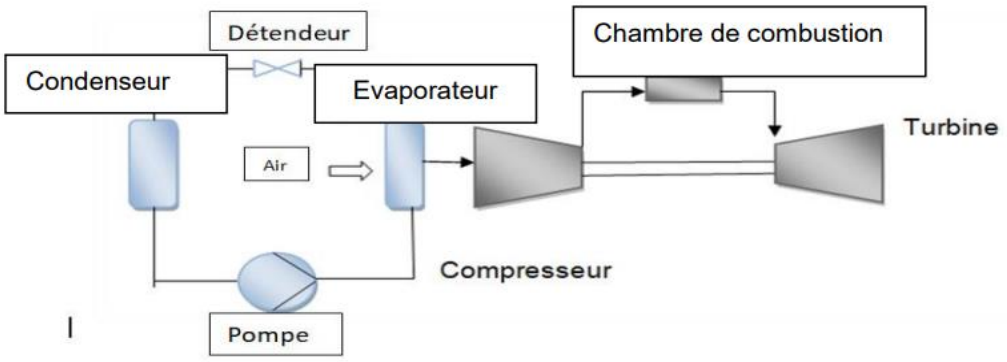


Figure II.4 : Schéma représentative de réfrigération mécanique (type direct). [26]

Avantages

- Meilleure performance par rapport autres systèmes,
- Une température d'air à l'admission constante.[26]

Inconvénients

- Le prix d'installation et d'exploitation élevé,
- Il demande une charge supplémentaire afin de faire fonctionner le groupe frigorifique,
- Il est nocif aux composantes de la turbine à gaz en cas de fuites,
- Il nécessite une maintenance périodique. [26]

b. Type indirect

Dans un système de refroidissement indirect on trouve deux circuits : primaire et secondaire. Le circuit primaire est le circuit du groupe frigorifique (production de froid) où le fluide moteur ou frigorigène s'écoule, le second est le circuit de transport de froid et il s'appelle le circuit du fluide frigoporteur.

Les fluides frigoporteurs qui sont utilisées ne sont pas nocifs à l'installation de la turbine à gaz en cas de fuites. Parmi ces fluides l'air et l'eau. [26]

Avantages :

- Peut augmenter les performances de la turbine à gaz mieux que les refroidisseurs par évaporation (par médias et pulvérisation),
- Pas sensible à la température humide de l'air ambiant,
- Pas de danger concernant les fuites et les déperditions de fluide frigorigène. [26]

Inconvenient:

- Coût d'installation élevé,
- Il exige une charge supplémentaire par rapport au système direct afin de faire fonctionner le circuit secondaire (circuit du fluide frigoporteur). [26]

II.2.1.3 Système de refroidisseur par absorption :

A la différence des groupes à compression qui ont besoin d'électricité, les groupes frigorifiques à absorption permettent de produire du froid en utilisant une source de chaleur.

Ces machines sont utilisées essentiellement dans le cas où l'on dispose d'énergie gratuite en vapeur surchauffée, apport solaire, ou les gaz d'échappement des turbines à gaz, pour faire fonctionner une machine à absorption. Avec les systèmes de refroidissement à absorption les puissances des turbines peuvent être stimulées jusqu'à 21 % lorsque l'air est refroidi à 8 °C. De plus une seule fraction de l'énergie thermique (10 %) récupérable à partir des gaz d'échappement est nécessaire pour fournir un refroidissement de 35 °C à 10 °C. Le choix des fluides utilisés conditionne les performances du cycle et ses conditions d'exploitation (pressions et matériaux en particulier) deux solutions sont couramment employées :

- Eau/NH3, l'ammoniac servant de fluide frigorigène, l'eau d'absorbant.
- Eau/LiBr, l'eau servant de fluide frigorigène, le bromure de lithium d'absorbant.[27]

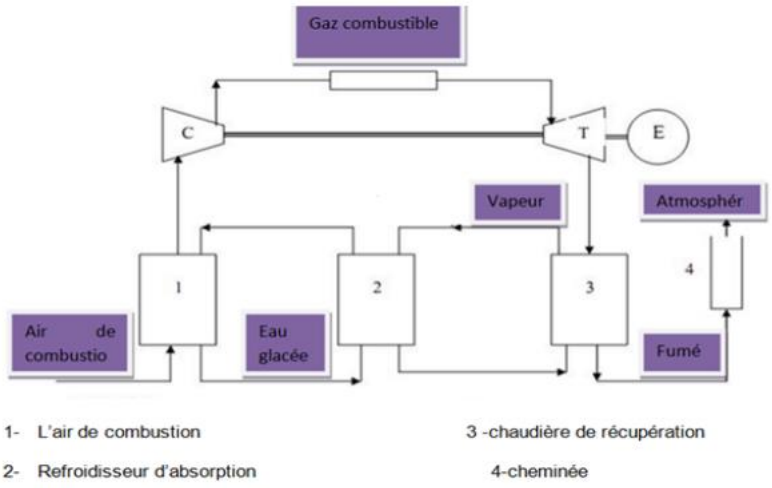


Figure II.5 : *Structure d'une machine frigorifique à absorption. [27]*

Le principe de fonctionnement d'une machine à absorption est :

- Dans le désorbeur la solution eau + bromure de lithium est portée à l'ébullition grâce à un apport de chaleur récupérée des gaz d'échappement de la turbine.
- Le fluide frigorigène ou eau est transformé en vapeur et envoyé dans le condenseur.
- Arrivant au condenseur, sous forme vapeur, le fluide frigorigène se condenseur contact d'un échangeur ou refroidisseur alimenté en eau refroidi par l'air extérieur et retourne dans l'évaporateur.
- Dans l'évaporateur la pression étant inférieure à celle du condensateur, une partie du fluide admis va se vaporiser à une température d'environ 5°c et refroidir l'eau du circuit d'utilisation circulant dans un faisceau de tubes à l'intérieur de l'évaporateur.
- Le fluide vaporiser et ensuite admis à l'absorbé Le fluide frigorigène en phase vapeur s'écoule dans l'absorbeur contenant le bromure de lithium. Ce sel qui présente une grande affinité avec la vapeur d'eau va emmagasiner (absorber) le fluide frigorigène.[27]

II.2.1.4. Refroidissement indirect (Chillers) :

Pour les sites où les conditions d'humidité et de température ne sont pas favorables pour l'utilisation des systèmes à évaporation, la solution du refroidissement indirect de l'air (chillers) devient plus appropriée. Dans ces systèmes, un fluide réfrigérant généralement de l'eau ou un mélange d'eau et de glycol avec les proportions déterminées pour éviter le givrage. Ce fluide est refroidi dans des batteries situées à l'extérieur de la machine et est ensuite acheminé vers un échangeur de chaleur monté à l'entrée de la turbine. L'air traversant cet échangeur est ainsi refroidi.

Ce type de système n'est pas limité par l'humidité et la température du site et ne nécessite pas d'eau (sauf pour les appoints) et peut booster la puissance de 25%

Ce système se compose de

- Un échangeur de chaleur ;
- Un éliminateur de brouillard (pour empêcher les gouttelettes d'eau condensée d'entrer dans la conduite et de provoquer par la suite une érosion ou une détérioration du Compresseur) ;
- Un Système de réfrigération pour alimenter l'échangeur avec un débit constant de liquide de refroidissement ;
- Le Canal d'admission doit être en acier inoxydable et plenum (en cas de la Présence d'air saturé). [26]

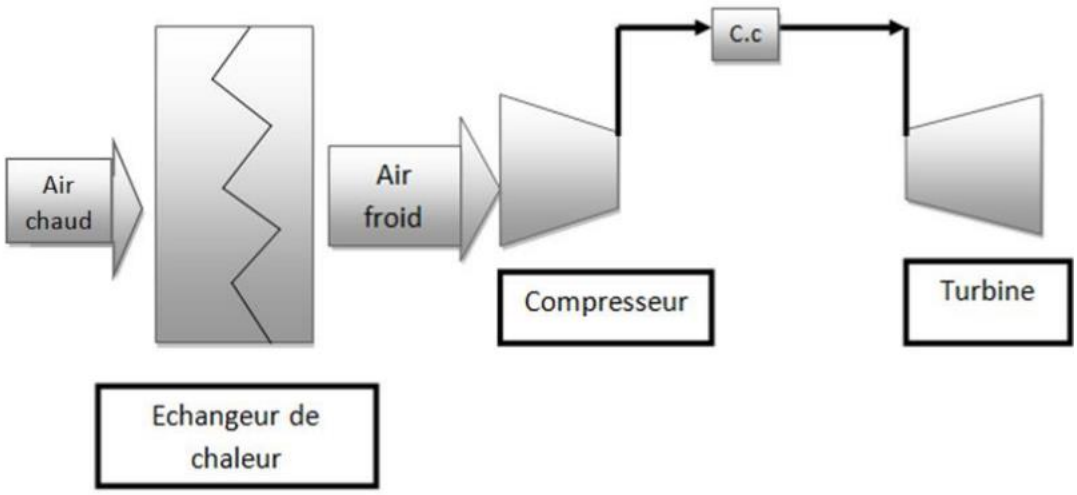


Figure II.6 : Principal composantes du système de refroidissement indirect (Chillers).[26]

Avantages :

- Peut refroidir l'air d'entrée indépendamment de l'humidité ambiante.
- Peut-être dimensionné pour petits ou grands systèmes.[26]

Inconvénients :

- Besoin de source d'eau pour le refroidissement.
- ΔP légèrement supérieur à celui d'un refroidisseur évaporatif.[26]

II.2.2 Refroidissement intermédiaire du compresseur :

La compression avec refroidissement intermédiaire, figure 3.1 est un moyen pour augmenter la puissance utile du cycle. Le refroidissement diminue la puissance requise par la compression comme on peut le voir sur le diagramme (p, v) (figure II.7.a.b) et le rendement du cycle augmente. [28]

Une compression avec refroidissement intermédiaire ne fournit pas une augmentation très significative du rendement de la turbine à gaz parce que la température à l'admission de la chambre de combustion exige un transfert thermique additionnel pour réaliser la température désirée d'admission de turbine.

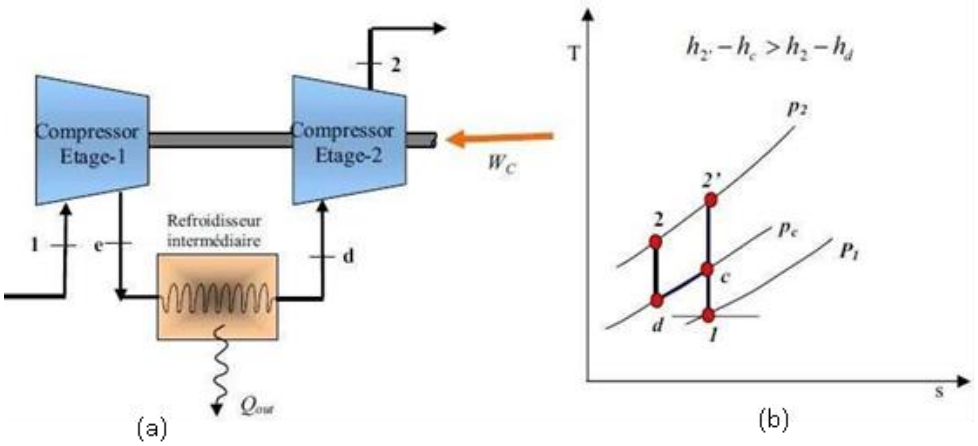


Figure II.7 : a. Installation avec refroidissement intermédiaire du compresseur.[29]

b. Cycle de Brayton avec refroidissement intermédiaire du compresseur turbine.[29]

II.2.3 Régénération (cycle de récupération) :

La régénération est l'échange interne de la chaleur dans le cycle. Dans le cycle de Baryton, T4 est souvent plus haute que T2 et l'addition de chaleur est de 2 à 3 (figure II.8.a.b). La régénération, donc, est employée pour préchauffer le gaz comprimé à 2 par les gaz d'échappement à 4 dans un échangeur de chaleur extérieur de type appelé le régénérateur ou, parfois, le récupérateur. [28]

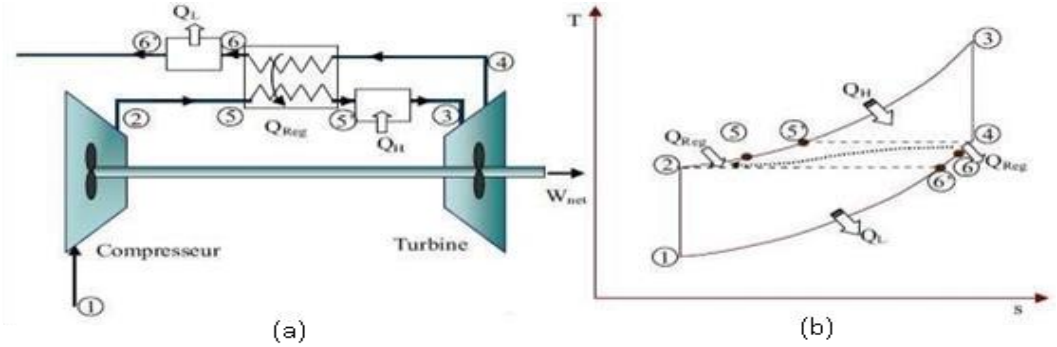


Figure II. 8 : a. Installation avec la régénération. [29]

b. Cycle de Brayton avec la régénération. [29]

Dans le cycle régénérateur, de l'énergie thermique des gaz d'échappement est transférée à l'air de sortie du compresseur avant d'être présenté dans la chambre de combustion. Pour un régénérateur idéal, la température T5 sera égale à T4 et similaire pour T2 sera égal à T6. Puisque moins d'énergie est rejetée du cycle, on aura une augmentation du rendement thermique.

En année 2007, Kadi et col [30] ont réalisé une épreuve pour la modélisation d'un cycle simple par la récupération d'une partie de l'énergie de gaz d'échappement de la turbine à gaz (pour faire fonctionner un évaporateur) afin d'obtenir la vapeur surchauffée, en considérant tous les facteurs qui affectent réellement les performances d'un cycle réel. Ils ont proposé l'injection de vapeur d'eau à l'amont de la chambre de combustion, le but de ce travail est d'analyser l'influence des conditions environnementales sur les performances des turbines à gaz avec la présence de vapeur d'eau à l'amont de la chambre de combustion.

Par cette étude, l'objectif était de rendre les turbines à gaz peu sensibles à la variation de la température ambiante par un dispositif d'injection de la vapeur d'eau entraînée par l'énergie libre des gaz d'échappement. Les résultats obtenus prouvent que la puissance utile et l'efficacité thermique totale des turbines à gaz ont été maintenues constantes, comme dans les conditions ISO, lorsque la quantité de vapeur d'eau est injectée proportionnellement à la variation de la température ambiante.[30]

II.2.4. Réchauffage inter-turbines de détente :

Une chambre de combustion de réchauffage est un composant qui peut être ajouté à un cycle de turbine à gaz pour améliorer ses performances. Dans cette méthode le processus de détente dans la turbine est divisé en deux processus et une chambre de combustion additionnelle est placée entre les turbines à haute pression et à basse pression comme il est indiqué à la figure (II.9.a.b). Le gaz d'échappement de la turbine à haute pression (HPT), qui contient suffisamment d'oxygène, décrit une chambre de combustion de réchauffage, et la température des gaz peut être augmentée en raison de la combustion supplémentaire. [31]

Les recherches antérieures sur le réchauffage des cycles idéaux montrent que celui-ci augmente le travail spécifique net mais diminue le rendement thermodynamique comparée à un cycle simple [32]. En outre, ces investigations prouvent que le travail spécifique utile maximum dans les cycles de réchauffe est obtenu si les taux de détente pour les turbines à haute et à basse pression sont supposés égaux. Dans le cas contraire le rendement n'est pas maximum et le taux de compression le plus bas pour la turbine à haute pression augmente le rendement, mais ceci mène à une réduction du travail à la sortie. [34,35-36]

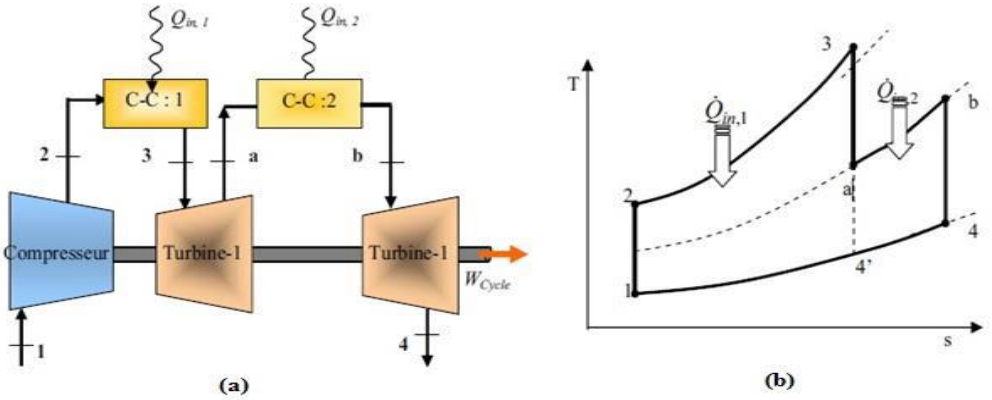


Figure II-9 : a. Installation avec réchauffage de la turbine.[29]
b. Cycle de Brayton avec réchauffage de la turbine.[29]

Pour cela la turbine de détente est coupée en deux, et une deuxième chambre de combustion est disposée où de la chaleur additionnelle le peut être ajoutée.

II.2.5. Injection de masse de fluide dans le circuit de TAG :

Beaucoup de processus à turbine à gaz utilisent l'injection de l'eau ou de vapeur d'eau pour améliorer les performances [33-34, 35-36]. Par exemple, de l'eau ou de la vapeur est ajoutée au fluide de fonctionnement (air) pour augmenter le rendement et la puissance de sortie et pour diminuer la formation de NOx (oxydes d'azote) dans le processus de combustion [37-38]. Les points d'injections d'eau ou de vapeur dans un cycle d'une turbine à gaz peuvent être soit à l'amont du compresseur, à la sortie du compresseur ou à l'amont de la combustion et présentés sur la figure(II.10).

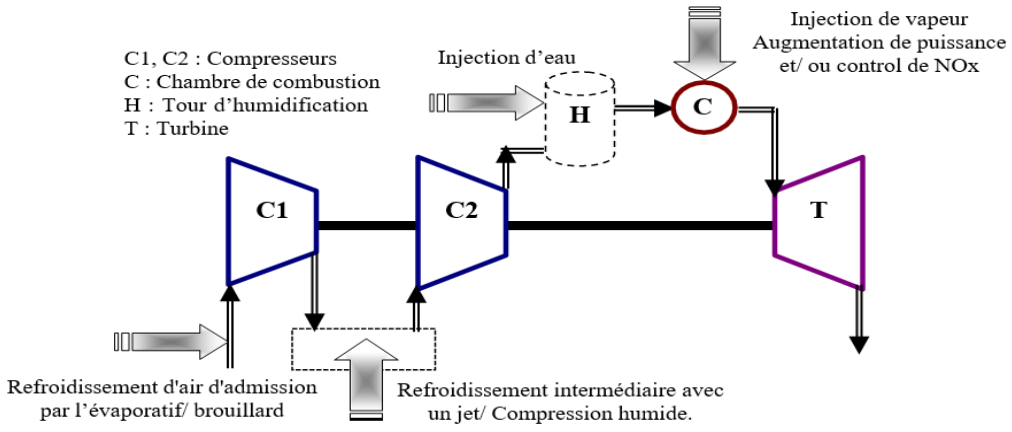


Figure II-10 : *Différentes configurations d'injection d'eau ou de vapeur dans un cycle simple d'une TAG.[29]*

L'effet positif de l'injection de vapeur ou d'eau sur les performances d'une turbine à gaz est bien connu. L'injection de l'eau a été employée pour l'augmentation de puissance dans des moteurs d'avion depuis les années 50, et dans des turbines à gaz industrielles depuis les années 60. [39]

L'injection augmente le débit massique et la chaleur spécifique du fluide de fonctionnement, qui donne une puissance additionnelle au cycle. Cette méthode consiste aussi en une diminution de la formation de NOx dans la chambre de combustion et un refroidissement plus efficace des aubes de la turbine.

L'injection de vapeur est plus efficace que l'injection d'eau, puisque la vapeur produite dans le HRSG est introduite dans la turbine, de ce fait améliorant le rétablissement de la chaleur. Un tel cycle est souvent nommé cycle de STIG (turbine à gaz d'injection de vapeur). La vapeur à haute pression peut être injectée dans la chambre de combustion, comme la vapeur à une pression intermédiaire et à basse pression est souvent injectée dans le premier étages de turbine à gaz, suivant les indications de la figure(II.10) [40]. Il y a plusieurs turbines à gaz particulièrement conçues avec l'injection de vapeur, telle que General Electric LM2500 et les séries de LM5000 STIG, l'Allison 501-K, ou le Ruston TB5000 [41, 42]. Le cycle de STIG est économique et performant est valable dans la gamme de puissance au- dessous de 150 MW comparé à d'autres cycles combinés. [43,44]

II.2.5.1. Cycles avec injection d'eau dans le compresseur

Dans les systèmes de sur vaporisation, plus d'eau que celle qui est nécessaire pour la saturation est injectée et les gouttelettes de l'eau entrent dans le compresseur où elles s'évaporent pour donner un effet d'un refroidissement intermédiaire figure(II-11). L'eau injectée peut être froide [45] ou chaude [46]. L'eau peut également être ajoutée sans interruption à l'intérieur du compresseur pour refroidir l'air [46, 47]. Pour les turbines à gaz multi-arbres, il est possible d'injecter de l'eau entre les compresseurs pour réaliser un refroidissement intermédiaire [48].

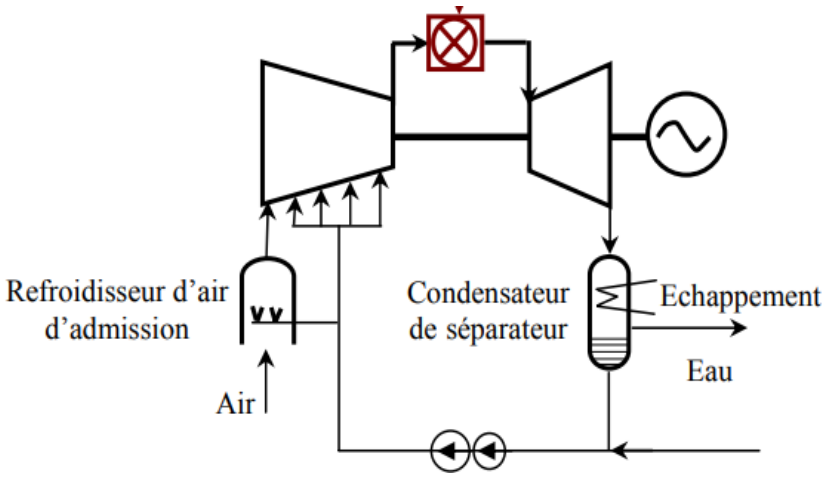


Figure II.11 **:** *Turbine à gaz avec injection d'eau dans le compresseur.[29]*

II.2.5.2. Cycles avec injection de vapeur à l'amont, dans et à l'aval de la chambre de combustion :

La vapeur produite à l'aide de l'énergie gratuite des gaz d'échappement peut être injectée, par exemple avant la chambre de combustion, dans la chambre de combustion, après la chambre de combustion, ou entre les turbines (s'il y a plusieurs détentes). L'augmentation du débit massique du

fluide moteur à travers la détente relève le rendement et la puissance utile de la turbine à gaz. Les deux noms commerciaux les plus connus de la turbine à gaz injectée par la vapeur sont le cycle de Cheng et le cycle de STIG [49]. Différentes variations de cycle pour améliorer les performances des TAG ont été proposées [50-51]. Comparé au cycle évaporatif d'une turbine à gaz, le point d'ébullition dans la chaudière du cycle vapeur- injectée est déterminé par la pression totale dans le cycle.

L'injection d'eau ou de vapeur dans la chambre de combustion est employée initialement pour réduire l'émission de NOx, particulièrement avant l'introduction de brûleurs à bas NOx secs dans le début des années 90 [52]. La formation de NOx est fortement dépendante de la température et l'eau ou la vapeur réduit la température de combustion. Dans les turbines à gaz où le fluide moteur est humidifié, la génération de NOx est réduite dans une certaine mesure.

Les constructeurs signalent que, pour permettre l'injection de vapeur dans la chambre de combustion, il est nécessaire de la produire sous une pression de l'ordre de 12 à 16 bars, donc supérieure à celle qui règne au refoulement du compresseur. Il est à noter qu'un accroissement du rapport du débit d'eau au débit d'air, (ou débit vapeur au débit d'air), peut rendre nécessaire une modification de brûleur, et même de la chambre de combustion et de la turbine. En effet, d'une part, l'injection du diluant entraine un accroissement du rapport du diluant au débit d'air, d'autre part, elle a pour effet une modification aussi bien du débit- masse que des propriétés thermodynamiques du fluide moteur traversant la turbine.[35]

II.3 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté une vue générale détaillée sur quelques méthodologies utilisées dans l'industrie ont été mentionnées dans ce chapitre. Cela a permis de rappeler quelques notions concernant les méthodes de fonctionnement de la turbine à gaz, ainsi que les cycles d'amélioration de leurs performances. Ceci permettra aux lecteurs et aux utilisateurs industriels d'évaluer la complexité du comportement des turbines à gaz et de connaître leurs caractéristiques d'environnement afin de mieux les utiliser.

Chapitre III : La méthode des différences finis

III.1. Introduction :

La résolution des équations différentielles ou plus généralement des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution de tels problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes des différences finis, des éléments finis, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc.

La méthode des différences finis est une des plus anciennes méthodes de simulation numérique qui est encore utilisée pour certaines applications, comme (la propagation d'ondes sismiques ou électro magnétiques ou la mécanique des fluides compressibles...etc).

III.2. Méthodes d'approximation par collocation Interpolation et Extrapolation :

Il arrive souvent que la fonction qu'on doive traiter (déterminer en certains points sa valeur, sa dérivée, etc…) soit définie d'une façon qui rende sa manipulation malaisée (expression algébrique compliquée, définition sous forme implicite, ou par un développement en série, etc…), ou bien encore, ce qui est le cas le plus fréquent, soit définie par les valeurs qu'elle prend pour un certain nombre de valeurs discrètes de la variable. Il est dans ces cas nécessaire de remplacer la fonction à traiter $f(x)$par une fonction approchée, plus simple, $g(x)$ou plus généralement par un ensemble de fonction $g_k(x)$, puis de traiter non pas $f(x)$, mais $g(x)$, et on appelle $g(x)$ l'interpolation de $f(x)$ Il existe un grand nombre de méthodes d'interpolation on peut citer quelques méthodes d'interpolation. **[53]**

III.2.1 Forme polynomiale de Newton :

La fonction étudiée est, ici aussi, définie par l'ensemble des valeurs f qu'elle prend aux pointx_j, non nécessairement régulièrement espacés. Nous avons déjà rencontré deux formes du même polynôme $P_n(x)$: le développement en puissances de x, et celui en puissances de $x - t$. Nous allons maintenant étudier une troisième forme, dans laquelle P n(x) s'expriment à l'aide desx_j. C'est la méthode la plus utilisée, en particulier à cause du fait qu'il n'est pas nécessaire de décider à priori du degré du polynôme par lequel on approche la fonction. **[54]**

a) Différance divisée :

On peut définir les différences divisées d'ordre 0, 1, 2, …,n, par :

$$\begin{cases} \delta(x_i)f = f(x_i) = f_i \\ \delta(x_i, x_j) = \frac{[f(x_j) - f(x_i)]}{x_j - x_i} \\ \delta(x_i, x_j, x_k)f = \frac{[\delta(x_j x_k)f - \delta(x_i x_j)f]}{x_k - x_i} \\ \delta(x_i, x_{j+1}, \dots, x_{p-1}, x_p)f = \frac{[\delta(x_{i+1}, \dots, x_p)f - \delta(x_i, \dots, x_{p-1})f]}{x_p - x_i} \end{cases} \quad \text{(III.1)}$$

On peut alors montrer quef(x) $= P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de Newton, passant par les points(x_0, f_0) … , (x_n, f_n), et donné par **[55]** :

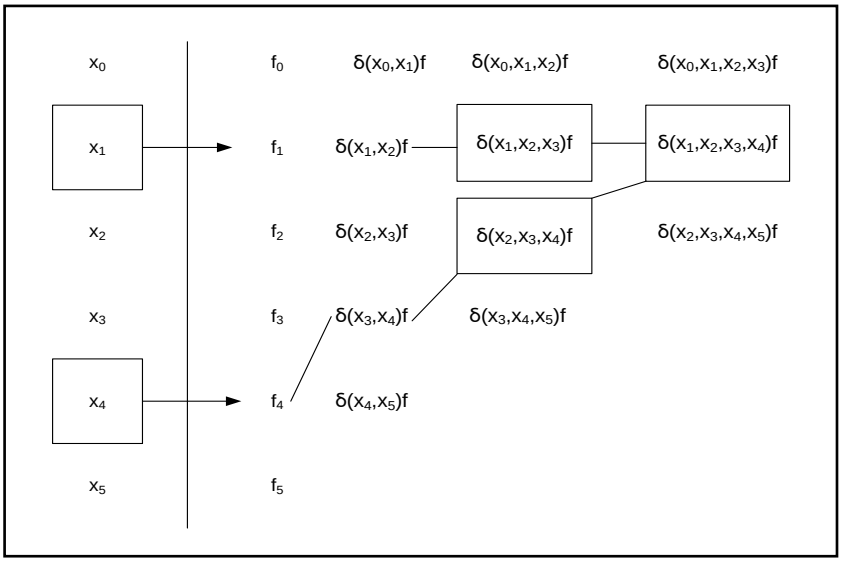
$$\left[P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta(x_0, x_1)f + (x - x_0)(x - x_1)\delta(x_0, x_1, x_2)f + \cdots \right.$$
$$\left. \dots + (x - x_{n-1})\delta(x_0, \dots, x_n)f \right] \quad \text{(III.2)}$$

L'erreur d'interpolation est donnée par **[55]**

$$\varepsilon(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{f}^{(\mathrm{n}+1)}(\varepsilon)s_n(x)/(\mathrm{n}+1)!$$

Proprieties utiles **[53]** :

a) Il résulte des équations. (III.1) que les différences divisées peuvent se calculer de proche en proche, en utilisant la disposition suivante :



Et on a, par exemple (voir termes encadrés ci-dessus) **[53]** :

b) Il est plus commode d'utiliser la nation matricielle suivante :

$$\mathrm{D}_{i,j} = \delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j})\mathrm{f} \qquad \text{(III.3)}$$

Le tableau ci-dessus devient alors :

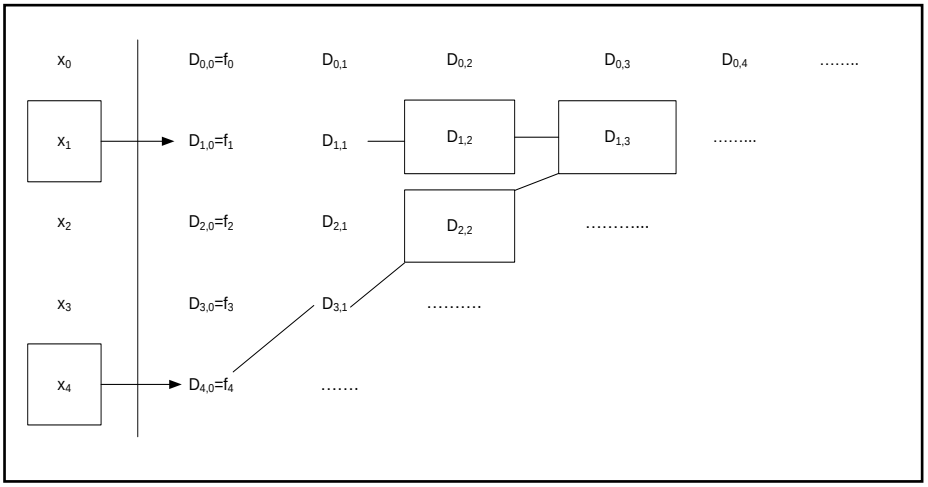


Tableau III.1 : *d'utiliser la nation matricielle.* ***[53].***

Et la relation de récurrence s'écrit (cf. tableau (III.2) ou éq. (III.1) où$p = \mathrm{i} + j$:

$$\mathrm{D}_{i,j} = (\mathrm{D}_{i+1,j+1} - \mathrm{D}_{i,j-1})/(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{(III.4)}$$

c) Les différences divisées permettent de savoir si une fonction, donnée point par point, peut être assimilée ou non à un polynôme : en effet, la différence$\mathrm{D}_{i,k}$ est liée à la dérivée d'ordre k au point i. Par conséquent, si la colonne numéro k du tableau (III.2) est constituée de nombre sensiblement constants($D_{0,k} = \mathrm{D}_{1,k} = \mathrm{D}_{2,k} = \cdots$), la fonction f(x) est assimilable à un polynôme de degré k.

d) Avec les notations (III.4), on obtient pour polynôme (III.2) **[53]** :

$$P_n(x) = D_{00} + D_{01}(x - x_0) + D_{02}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + D_{0n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad \text{(III.5)}$$

$$\text{Soit :} \begin{cases} S_0 = 1, \ S_k = (x - x_{k-1})S_{k-1} \\ P_n = \sum_{k=0}^{n} D_{0,k} S_k \end{cases} \quad \text{(III.6)}$$

b) Calcul du polynôme d'interpolation de Newton :

Nous donnons dans ce paragraphe l'idée directrice de la démonstration qui conduit à l'équation. (III.6). Nous avons vu (3.9) que $P_n(x)$ pouvait s'écrire, en prenant comme''base'', n fois le point $x = t$ **[56]** :

$P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} R_l \, (x - t)^{n-l}$, soit $P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} R_l^1 \, (x - t)^l$

Le polynôme d'interpolation de Newton consiste à prendre, comme points de base, d'abordx_0, puis x_1, puisx_2,etc… Alors **[56]**:

$$P_n(x) = R_0 + R_1(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + R_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad \text{(III.7)}$$

On voit que cette équation est de la forme (III.5), avec$R_k = D_{0,k}$.

a) $P_n(x)$ peut s'écrire :

b) $P_n(x) = D_{00} + (x - x_0)A_1(x)$ (III.8)

Où $A_1(x)$ est un polynôme de degré$(n - 1)$. Posant $x = x_0$ dans (III.8), on obtient $P_n(x_0) = f_0 = D_{00}.A_1(x)$ Est complètement déterminé, puisqu'il est connu en $x_1, x_2, \dots, x_n$: en effet, en posant $x = x_k$ dans (III.8), $k = 1$ à n, il vient :

$P_n(x_k) = f_k = f_0 + (x_k - x_0)A_1(x_k)$, donc :

$$A_1(x_k) = A_{1k} = (f_k - f_0)/(x_k - x_0)$$

On pose de même :

$$A_1(x) = D_{01} + (x - x_1)A_2(x) \quad \text{(III.9)}$$

Où $A_2(x)$ est un polynôme de degré$n - 1$. On a:

$$A_1(x_1) = D_{01} soit D_{01} = A_{11}$$

Et pour $k = 2$ à n :

$$A_1(x_k) = A_{11} + (x_k - x_1)A_2(x_k)$$

Soit :$A_{2k} = (A_{1k} - A_{11})/(x_k - x_1)$

Ainsi $A_2(x)$ est entièrement déterminé par sa connaissance en $x_2, x_3, \dots, x_n$ portant (III.9) dans (III.8) il vient :

$$P_n(x) = D_{00} + D_{01}(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_1)A_2(x)$$

c) D'une manière générale, en continuant de proche en proche, en obtiendra la relation (III.5) **[53].**

On peut calculer la valeur de P pour$x = t$, en utilisant par exemple l'algorithme de Hornes **[57]** :

$\mathrm{P}_0(t) = \mathrm{D}_{0n}$

$k = 1$ à $n, \mathrm{P}_k(t) = (t - x_{n-k})\mathrm{P}_{k-1}(t) + \mathrm{D}_{0,n-k}$ (III.10)

III.2.2. Interpolation polynôme de newton sur un pas constant :

Très souvent, la base d'interpolation a un pas constant :

$x_i = x_j = h$Quelque soit j (III.11)

La base des formules utilisées est constituée par :

a) Les formules de Newton, exprimes à l'aide des différences non divisées au lieu des différences divisées.

b) L'opérateur avancement E, défini par :

$\mathrm{E}f(x) = \mathrm{f}(x + h)$ (III.12)

Où h est le pas. L'application de E, n fois donne :

$\mathrm{E}^n\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x + nh)$

On étant la notion de puissance à un réel r quelconque :

$\mathrm{E}^r\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x - rh)$ (III.13)

Avant de donner les principes les formules utilisées, rappelons la formule du binôme, pour une puissance réelle quelconque α **[54]:**

$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$ (III.14)

III.2.2.1 Différance à droite, formule de Gregory-Newton :

a) Définition et propriétés de différance à droite (ou progressives) :

L'opérateur ″différance à droite″ (ou ″différance progressive″), sera noté iciΔ_+, il est défini par :

$$\begin{cases} \Delta_+\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x + h) - \mathrm{f}(x) \\ \Delta_+^n\mathrm{f}(x) = \Delta_+[\Delta_+^{n-1}\mathrm{f}(x)] \end{cases}$$ (III.15)

On a, d'aprés (III.12) et (III.14):

$\Delta_+\mathrm{f}(x) = \mathrm{E}f(x) - \mathrm{f}(x)$, d'où $\Delta_+ = \mathrm{E} - 1$, et par conséquent :

$\mathrm{E} = 1 + \Delta_+$ (III.16)

Applications plusieurs fois :

$\Delta_+\mathrm{f}_j = \mathrm{f}_{j+1} - \mathrm{f}_j; \Delta_+^2\mathrm{f}_j = \Delta_+\left(\mathrm{f}_{j+1} - \mathrm{f}_j\right) = \left(\mathrm{f}_{j+2} - \mathrm{f}_{j-1}\right) - \left(\mathrm{f}_{j+1} - \mathrm{f}_j\right)$

$$= f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}$$

et par récurrence :

$$\begin{cases} \Delta_+^n f_j = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f_{j+k} \\ C_n^k = n!/[k!\,(n-k)!] \end{cases} \quad \text{(III.17)}$$

Le tableau III.2.1 donne les 5 premières différances à droite. Il se lit, par exemple :

$$\Delta_+^2 f_j = f_j - 4f_{j+1} + 6f_{j+2} - 4f_{j+3} + f_{j+4}$$

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}	f_{j+5}
$\Delta_+ f_j$	-1	1				
$\Delta_+^2 f_j$	1	-2	1			
$\Delta_+^3 f_j$	-1	3	-3	1		
$\Delta_+^4 f_j$	1	-4	6	-4	1	
$\Delta_+^5 f_j$	-1	5	10	10	-5	1

Tableau III.2** : D ifférancee à droite $\Delta_+^n f_j$ pour $n = 1$ à 5. **[58]

b) Formule progressive de Gregory-Newton :

L'aboclasse x est repérée par rapport a un quelconque des points x_j de la base d'interpolation, et on pose :

$$x - x_j = rh \quad \text{(III.18)}$$

On a alors, d'après les éq.(III.13),(III.16) et (III.14) :

$$f(x) = f(x_j + rh) = E^r f_j = (1 + \Delta_+)^r f_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!} \Delta_+^k f_j$$

D'ou la formule d'interpolation de Grygory-Newton par les différences à droite:

$$f(x) = f_j + r\Delta_+ f_j + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta_+^2 f_j + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta_+^3 f_j + \cdots \quad \text{(III.19)}$$

La convergence est d'autant plus rapide que r est plus petit. On choisira donc x_j tel que :

$$x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

alors, $0 \leq r \leq 1$. En remplaçant, dans (III.19), Δ_+^n par les valeurs données au tableau III.2, on obtient aisément $f(x)$comme combinaison linéaire des f_{j+k}. **[58]**

III.2.2.2 Différence à gouche, formule de Greygory-Newton :

a) Définition et propriétés des "différence à gouche"(ou "régressives") :

Nous notrons Δ_- l'opérateur "différence à gouche", ou "différence régressives", défini par :

$$\begin{cases} \Delta_{-}f(x) = f(x) - f(x-h) \\ \Delta_{-}^{n}f = \Delta_{-}(\Delta_{-}^{n-1}f) \end{cases} \quad \text{(III.20)}$$

Ce qui donne, en appliquant n fois l'opérateur Δ_{-} à f_j **[59]** :

$$\Delta_{-}^{n}f_j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f_{j-1} \quad \text{(III.21)}$$

Les premières différences sont indiquées tableau (III.3) ci-dessous.

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	f_{j-5}
$\Delta_{-}f_j$	1	-1				
$\Delta_{-}^{2}f_j$	1	-2	1			
$\Delta_{-}^{3}f_j$	1	-3	3	1		
$\Delta_{-}^{4}f_j$	1	-4	6	-4	1	
$\Delta_{-}^{5}f_j$	1	-5	10	-10	5	-1

Tableau III.3** : Différence à gauche $\Delta_{-}^{n}f_j$ pour $n = 1$ à 5. **[54]

b) Formule régressive de Gregory-Newton :

Les formules d'interpolation de Gregory-Newton par différences à gauche s'établissent de même manière que celles par les différences à droite :

On exprime $f(x_j + rh) = E^r f(x_j)$ à l'aide de l'opérateur Δ_{-} : d'après les éqs. (III.13) et (III.20), on a :

$\Delta_{-}f(x) = f(x) - E^{-1}f(x)$,soit$\Delta_{-} = 1 - E^{-1}$, ou encore :

$$E = (1 - \Delta_{-})^{-1} \quad \text{(III.22)}$$

$$E^r = (1 - \Delta_{-})^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\dots(-r-k+1)}{k!}\Delta_{-}^{k}$$

$$E^r = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r(r+1)(r+2)\dots\dots(r+k-1)}{k!}\Delta_{-}^{k}$$

$$f(x) = f_j + r\Delta_{-}f_j + \frac{r(r+1)}{2!}\Delta_{-}^{2}f_j + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\Delta_{-}^{3}f_j + \cdots \quad \text{(III.23)}$$

Les Δ_{-}^{n} sont données par le tableau (III.2.2). On voit que l'éq. (III.23) donne $f(x)$comme combinaison linéaire desf_{j-k}. Ici encore, il faut choisir r aussi petit que possible, on choisit doncx_j, tel que$x_{j-1} \le x \le x_j$, dans ce cas$1 \le r \le 0$**[59].**

III.2.2.3 Différences centrées sur bas entière, formule de Stirling :

L'opérateur ″différences centrée, que nous noteronsΔ_0, est défini par **[60]** :

$$\begin{cases} \Delta_0 f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x - \frac{h}{2}) \\ \Delta_0^n f(x) = \Delta_0(\Delta_0^{n-1}f) \end{cases} \quad \text{(III.24)}$$

On a donc : $\Delta_0 = E^{1/2} - E^{-1/2}$ (III.25)

En appliquant cet opérateur àf_j, on obtient :

$$\Delta_0 f_j = f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \quad \text{(III.26)}$$

Mais les $f_{j+1/2}$ ne sont pas connus : on les définit donc à partir des entiers qui les encadrent :

$f_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f_{j+1} + f_j)etf_{j-1/2} = \frac{1}{2}(f_j - f_{j-1})$

Ces valeurs portées dans (III.26) donnent :

$$\Delta_0 f_j = \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_{j-1}) \quad \text{(III.27)}$$

$\Delta_0^2 f_j$ est obtenu en appliquant Δ_0 à l'équation (III.26) (et non pas à(III.27) :

$$\Delta_0^2 f_j = \Delta_0 f_{j+1/2} \Delta_0 f_{j-1/2} = (f_{j+1} - f_j) - (f_j - f_{j-1}) = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$$

Et ainsi de suite. D'une manière générale, on aura :

$$\Delta_0^n f_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f_j + (n - 2k)/2 \quad \text{(II.28)}$$

Et on devra distinguer les cas où n est pair et impair **[60]** :

$$\begin{cases} \Delta_0^{2p} f_j = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k f_{j+p+k} = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k f_{j-p+k} \\ \Delta_0^{2p+1} f_j = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k C_{2p+1}^k (f_{j+p-k+1} + f_{j+p-k}) \end{cases} \quad \text{(III.29)}$$

Le tableau III.4 ci-dessous donne les premières différences :

	f_{j-3}	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}
$2\Delta_0 f_j$			-1	0	1		
$\Delta_0^2 f_j$			1	-2	1		
$2\Delta_0^3 f_j$		-1	2	0	-2	1	
$\Delta_0^4 f_j$		1	-4	6	-4	1	
$2\Delta_0^5 f_j$	-1	4	-5	0	5	-4	1

Tableau III.4** : Différences centrées $\Delta_0^n f_j$ sur une base entière. **[54]

En utilisent la relation en peut aboutir la formule de Gauss, puis à la formule de Stirling:

$$\left[f(x) = f_j + r\Delta_0 f_j + \frac{r^2}{2!}\Delta_0^2 f_j + \frac{r(r^2-1)}{3!}\Delta_0^3 f_j + \frac{r^2(r^2-1)}{4!}\Delta_0^4 f_j + \frac{r(r^2-1)(r^2-4)}{5!}\Delta_0^5 f_j + \cdots \right] \quad \text{(III.30)}$$

On voit, d'après le tableau (III.30), que l'équation. (III.31) définit f(x) en onction des f_{j+1}**[60].**

III.2.2.4 Différences centrées sur base demi entière, formule de Bessel :

Les différences centrées sur base demi entière $f_{j+1/2}$ sont construites comme précédemment **[54]**:

$$\begin{cases} \Delta_0 f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j \\ d'où \\ \Delta_0^{2p} f_{j+1/2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2p}^k f_{j+k} + \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

Il faut à aussi distinguer les cas n pair et n impair :

$$\begin{cases} \Delta_0^{2p+1} f_{j+1/2} = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k C_{2p+1}^k f_{j+p+1-k} \\ \Delta_0^{2p} f_{j+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k (f_{j+p-k+1} + f_{j+p-k}) \end{cases} \quad \text{(III.31)}$$

Le tableau III.5 donne les premiers termes :

	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}
$\Delta_0 f_j$			-1	1		
$\Delta_0^2 f_j$		1	-1	-1	1	
$2\Delta_0^3 f_j$		-1	3	-3	1	
$\Delta_0^4 f_j$	1	-3	2	2	-3	1
$2\Delta_0^5 f_j$	-1	5	-10	10	-5	1

Tableau III.5 : *Différences centrées $\Delta_0^n f_{j+1/2}$ sur base demi centrées* ***[54].***

A partir des relations précédentes, et de l'équation. (III.25), on peut obtenir les formules de Gauss d'où on déduit la situé au milieu d'un segment joignant deux valeurs tabulées (base demi entiers) :

$$\left[\begin{array}{c} f(x) = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) + r\Delta_0 f_{j+1/2} + \frac{(r^2-\frac{1}{4})}{2!}\Delta_0^2 f_{j+1/2} + \\ \frac{r(r^2-\frac{1}{4})}{3!}\Delta_0^3 f_{j+1/2} + \frac{(r^2-\frac{1}{4})(r^2-\frac{9}{4})}{4!}\Delta_0^4 f_{j+1/2} \\ + \frac{r(r^2-\frac{1}{4})(r^2-\frac{9}{4})}{5!}\Delta_0^5 f_{j+1/2} + \cdots \end{array}\right] \quad \text{(III.32)}$$

III.2.2.5. Utilisation des formules d'interpolation :

Pour pouvoir utiliser ces formules d'interpolation polynomiale, il faut s'être assuré que la fonction $f(x)$ peut effectivement être approche par un polynôme. On utilise pour cela une propriété, déjà mentionnée, des différences divisées, appliquée aux différences non divisées. En effet, la comparaison des définitions des différences divisées et non divisées montre que celles-ci peuvent directement se déduire des premières : en posant
$x_{j+1} - x_j = h$ Par exemple, on obtient, si $\xi \in [x_0, x_n]$:

$$\delta[x_0, x_1, \ldots, x_n] f = \frac{\Delta_+^n f_0}{n! h^n} = f^{(n)}(\xi)/n! \quad \text{(III.33)}$$

Il s'ensuit que les différences d'ordre m d'un polynôme de degré m constantes, les différences d'ordre supérieur à m sont nulles. Afin de savoir si une fonction $f(x)$ peut être approchée par un polynôme, on calcule les différences successives (soit à droite, soit à gauche, soit

centrées) : si les différences sont à peu près constantes au rang$m$, et négligeables au rang $(m+1)$, f(x)peut être approchée par un polynôme de degré m. **[53]**

III.3. Dérivée d'un polynôme par différences divisées :

Les relations données dans ce paragraphe sont à utiliser lorsquef(x), donne par les $N+1$ valeurs $f_j = f(x_j)$ qu'elle prend aux points $x_j (0 \le j \le N)$, est approchée par collation par un polynôme de degré$n (n \le N)$. On se propose de calculer les dérivées def(x), soit en l'un des points x_j du support d'interpolation, lorsque le pas $x_j - x_{j-1}$ n'est pas constant. Soit en un point quelconque $x = t \neq x_j$, même si le pas $x_j - x_{j-1}$ x_j-x_{j-1} est constant.

On utilise pour cela la formule de base des différences divisées : on a alorsf$(x) = P_n(x)$, avec (III.3) :

$$\begin{bmatrix} P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\delta[x_0-x_1]f + (x-x_0)(x-x_1)\delta[x_0,x_1,x_2]f + \cdots \\ \cdots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\delta[x_0,\ldots,x_n]f \end{bmatrix} \quad \text{(III.34)}$$

III.4. Cas d'un pas contant : Relation du type Gregory-Newton :

Il arrive fréquemment que le pas $x_j - x_{j-1} = h$ soit constant, et que de plus on ait besoin de calculer des dérivées de f, approchées par collocation, aux points d'interpolationx_j. Les formules correspondantes peuvent se déduire comme cas particuliers des relations données précédemment. Toutefois, compte tenu de leur importance, nous leur consacrerons ce paragraphe et nous les établirons directement.

III.4.1. Utilisation des différences à droite (ou progressives) :

a) Dérivées successives de f(x) en x_j à l'ordre 1 en h :

Calcul de f $'_j$:

On développe $f(x+h)$ de Taylor à l'ordre 1 :

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \cdots$, d'où

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) + \cdots = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \vartheta(h) \quad \text{(III.35)}$$

C'est à dire, au point$x = x_j$, et en remarquent que $x_j + h = x_{j+1}$:

$$f'_j = \frac{f_{j+1}-f_j}{h} + \vartheta(h) \quad \text{(III.36)}$$

Ou encore, d'après(III.15):

$$f'_j = \frac{\Delta_+ f_j}{h} + \vartheta(h) \quad \text{(III.37)}$$

Calcul de f''_j :

On développe $f(x+h)$ et $f(x+2h)$:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \cdots & |-2 \\ f(x+2h) = f(x) + 2hf(x) + 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \cdots & |1 \end{cases}$$

La combinaison indiquée donne :

$$-2\mathrm{f}(x+h)+\mathrm{f}(x+2h)=-\mathrm{f}(x)+h^2\mathrm{f}''(x)+h^3\mathrm{f}'''(x)+\cdots,$$

$d'o\grave{u}$

$$\mathrm{f}''(x)=\frac{\mathrm{f}(x)-2\mathrm{f}(x+h)+\mathrm{f}(x+2h)}{h^2}-h\mathrm{f}'''(x)+\cdots \qquad \text{(III.38)}$$

Ou encore, en faisant$x=x_j$:

$$\mathrm{f}_j''=\frac{f_j-2f_{j+1}+f_{j+2}}{h^2}+\sigma(h) \qquad \text{(III.39)}$$

On voit d'après le tableau (III.1) que :

$$\mathrm{f}_j''=\frac{\Delta_+^2 f_j}{h^2}+\sigma(h) \qquad \text{(III.40)}$$

Calcul de $\mathbf{f}_j^{(n)}$:

On peut poursuivre ainsi les calculs, et montrer que $\mathrm{f}_j^{(n)}$ s'exprime en fonction def$_j, \mathrm{f}_{j+1}, \ldots, \mathrm{f}_{j+n}$. Plus précisément :

$$\mathrm{f}_j^{(n)}=\frac{\Delta_{+\mathrm{f}}^n{}_j}{h^n}+\sigma(h)=\frac{(-1)^n}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^k\,\mathrm{f}_{j+k}+\sigma(h) \qquad \text{(III.41)}$$

On sait ainsi exprimer les dérivées de $\mathrm{f}(x)$ en$x=x_j$, au 1er ordre en$h$, à condition de connaitre f en un nombre suffisamment grand de points.

Le tableau (III.6) ci-dessous donne les coefficients jusqu'à l'ordre4. Par exemple, on lit sur le tableau III.6 :

$$\mathrm{f}_j^{(4)}=\frac{1}{h^4}\left(\mathrm{f}_j-4\mathrm{f}_{j+1}+6\mathrm{f}_{j+2}-4\mathrm{f}_{j+3}+\mathrm{f}_{j+4}\right)+\sigma(h)$$

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}	
$h\mathrm{f}_j'$	-1	1				$+\sigma(h)$
$h^2\mathrm{f}_j''$	1	-2	1			
$h^3\mathrm{f}_j'''$	-1	3	-3	1		
$h^4\mathrm{f}_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1	

Tableau III.6: *Dérivées à l'ordre 1 à partir des différences à droite*. ***[59]***

b) Dérivées successives de $\mathbf{f}(x)$ en x_j à l'ordre 2 en h :

On obtient une meilleure précision en prenant plus de termes dans le développement en série. Ainsi pour trouverf_j', on utilise le développement jusqu'à l'ordre 2 :

$$\mathrm{f}(x+h)=\mathrm{f}(x)+h\mathrm{f}'(x)+\frac{h^2}{2!}\mathrm{f}''(x)+\frac{h^3}{3!}\mathrm{f}'''(x)+\cdots,$$

$d'o\grave{u}$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots \quad \text{(III.42)}$$

En remplaçant, dans (III.33), f ″ par sa valeur tirée de (III.30), on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}\left[\frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \sigma(h) \ldots\right] - \frac{h^2}{6}f''' + \cdots$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(x) + \cdots \quad \text{(III.43)}$$

Ce qui s'écrit, pour $x = x_j$:

$$f'_j = \frac{1}{2h}\left(-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}\right) + \sigma(h) \quad \text{(III.44)}$$

Le tableau III.7 donne les dérivées ainsi calculées jusqu'à l'ordre 4 : par exemple :

$$f''_j = \frac{1}{h^2}\left(2f_j - 5f_{j+1} + 4f_{j+2} - f_{j+3}\right) + \sigma(h^2)$$

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}	f_{j+5}	
$2h\,f'_j$	-3	4	-1				$+\sigma(h^2)$
$h^2 f''_j$	2	-5	4	-1			
$2h^3 f'''_j$	-5	18	-24	14	-3		
$h^4 f^{(4)}$	3	-14	26	-24	11	-2	

Tableau III.7: *Dérivées, à l'ordre 2, à partir des différences à droite*. ***[53]***

III.4.2. Utilisation des différences à gauche (ou régressives) :

Cette méthode permet d'obtenir $f_j^{(n)}$ comme combinaison linière des$f_j, f_{j-1}, \ldots, f_{j-n}, \ldots$

a) Dérivées successives de $f(x)$ en x_j à l'ordre 1 en h :

On opère comme précédemment, mais à partir du développement de $f(x-h)$ au lieu de $f(x+h)$:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots,$$

$d'o\grave{u}$

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{h}{2}f''(x) + \cdots \quad \text{(III.45)}$$

Soit, en $x = x_j$:

$$f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + \sigma(h)$$

On obtient ainsi les dérivées de f_j comme combinaison linière des

$f_j, f_{j-1}, \ldots$:

$$f_j^{(n)} = \frac{\Delta^n}{h^n} f_j + \sigma(h) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f_{j-k} + \sigma(h) \quad \text{(III.46)}$$

Les premières dérivées sont données par le tableau III.8

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	
hf_j'	1	-1				$+\sigma(h)$
$h^2 f_j''$	1	-2	1			
$h^3 f_j'''$	1	-3	3	-1		
$h^4 f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1	

Tableau III.8**: Dérivées au 1er ordre à partir des différences à gauche. **[53]

b) Dérivées successives de f(x) en x_j à l'ordre 2 en h :

On procède comme au paragraphe III.4.1.b, à partir du développement de f$(x-h)$ au lieu def$(x+h)$. Les premières dérivées à l'ordre 2 sont données dans le tableau III.9.

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	f_{j-5}	
$2hf_j'$	3	-4	1				$+\sigma(h^2)$
$h^2 f_j''$	2	-5	4	-1			
$2h^3 f_j'''$	5	-16	24	-14	3		
$h^4 f_j^{(4)}$	3	-14	26	-24	11	-2	

Tableau III.9:** Dérivées au 2ème ordre à partir des différences à gauche. **[53]

III.4.3. Utilisation des différences centrées :

Pour calculer$f_j^{(n)}$, on utilise les points situés de part et d'autre dex_j. Considérons les deux développements :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(III.47)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(III.48)}$$

En retranchant (III.47) de (III.46), il vient :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \cdots,$$

$d'o$ù

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots \quad \text{(III.49)}$$

Pour$x = x_j$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2h} + \sigma(h^2) \quad \text{(III.50)}$$

Interpolation géométrique :

La tangente en $M_j$et remplacées par la sécante$M_{j-1}M_{j+1}$. On voit sur la figure 5.1 que cette approximation est bien meilleure que celle obtenue à partir des différences à droite ou à gauche, ce que traduit le fait que (III.48) donne une approximation en h^2alors que (III.35) et (III.45) ne sont approchées qu'en h.

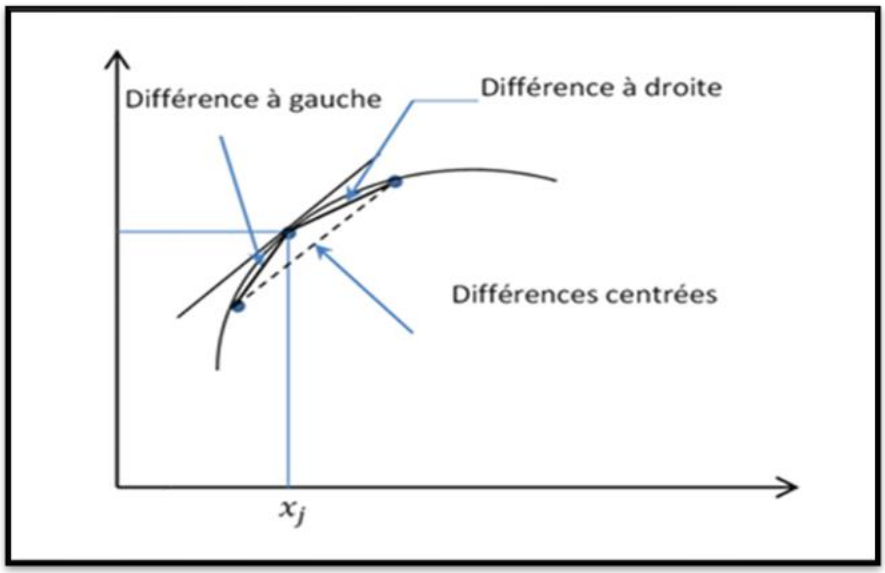


Figure III.1: *Schéma montre les différentes dérivations par la méthode des différences finies. [59]*

Pour obtenirf'', on ajoute (III.46) et (III.47) :

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \sigma(h^6)$$

$d'o\grave{u}$

$$f''(x) = \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \sigma(h^4) \qquad \text{(III.50)}$$

C'est-à-dire, pour $x = x_j$:

$$f_j'' = \frac{f_{j-1}-2f_j+f_{j+1}}{h^2} + \sigma(h^2) \qquad \text{(III.51)}$$

D'une manière générale, on peut montrer que :

Pour n pair$(n = 2p)$, ou impair $(n = 2p+1)$:

$$\begin{cases} f_j^{(2p)} = \frac{\Delta_-^{2p} f_{j+p} + \Delta_+^{2p} f_{j-p}}{2h^{2p}} + \sigma(h^2) \\ f_j^{(2p+1)} = \frac{\Delta_-^{2p+1} f_{j+p} + \Delta_+^{2p+1} f_{j-p}}{2h^{2p+1}} + \sigma(h^2) \end{cases} \qquad \text{(III.52)}$$

On peut ainsi calculer toutes les dérivées à l'ordre 2 en h. On peut aussi obtenir des approximations à l'ordre 4 en h. Les tableaux III.10 et III.8 donnent les quatre premières dérivées, à l'ordre 2 et à l'ordre 4 en h.

	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	
$2hf_j'$		-1	0	1		

$h^2 f_j''$		1	-2	1		$+\sigma(h^2)$
$2h^3 f_j'''$	-1	2	0	-2	1	
$h^4 f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1	

Tableau III.10: *Dérivées au 2ème ordre à partir des différences centrées.* ***[59]***

	f_{j-3}	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	
$12hf_j'$		1	-8	0	8	-1		$+\sigma(h^4)$
$12h^2 f_j''$		-1	16	-30	16	-1		
$8h^3 f_j'''$	1	-8	13	0	-13	8	-1	
$h^4 f_j^{(4)}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1	

Tableau III.11: *Dérivées au 4ème ordre à partir des différences centrées.* ***[59]***

On voit que les différences centrées donnent des résultats bien plus précis que les différences à droite ou à gauche. Par conséquent, chaque fois qu'il sera possible, on utilisera les différences centrées. Toutefois, le nombre de valeurs x étant limité, en bord de domaine on devra aussi utiliser les différences à droite (au voisinage de x_0) ou à gauche (au voisinage de x_n). **[59]**

III.5. Résolutions des équations aux dérivées partielles :

Nous avons intéressé dans a cette partie aux équations dérivées partielles des premiers et second ordre à deux variables indépendantes qui sont de loin celles qu'on, rencontre le plus souvent en pratique. L'extension au cas d'équation d'ordre plus élevé, et /ou contenant un nombre plus grand de variables indépendants ne pose pas de problème.

Outre la fonction f des variables $x\ et\ y$ les équations aux dérivées partielles font inter venir $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ et plus rarement $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. **[61]**

III.5.1. Classification des équations aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = e \qquad \text{(III.53)}$$

Avec :$(a, b, c \text{ et } e)$ sont des coefficients qui peuvent dépendre de, y, f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $(b^2 - 4ac) < 0$ L'équation est dite ***elliptique*** un exemple typique d'équation elliptique est $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = g(x, y)$

   C'est l'équation de ***Boisson*** Lorsque g et $\neq 0$, de ***La place*** lorsque $g = 0$.

2) Si $(b^2 - 4ac) = 0$ L'équation est dite ***parabolique*** un exemple de telle équation est l'équation de diffusion ou équation de la chaleur de la forme

$$\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

   $\alpha = \frac{k}{\rho c}$Avec :

   α:Diffusive thermique

k: Conductivité thermique des matériaux

ρ: Masse volumique

c : Chaleur massique des matières

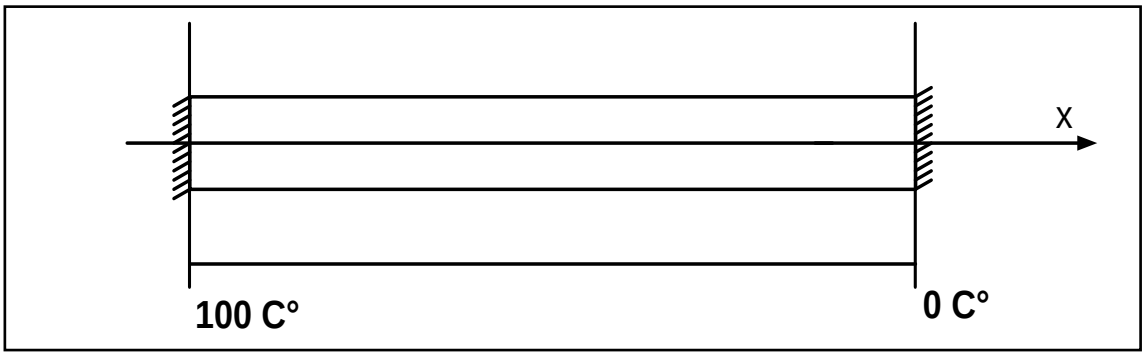


Figure III.2: *Condition unidimensionnelle transitoire.* ***[59]***

3) Si $(b^2 - 4ac) > 0$ L'équation (III.53) est dite ***hyperbolique*** avec pour exemple type de l'équation de propagation ou des ords vibrantes :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial^2 t}, \qquad \Delta = 0 - 4\left(-\frac{1}{c^2}\right) = \frac{4}{c^2}$$

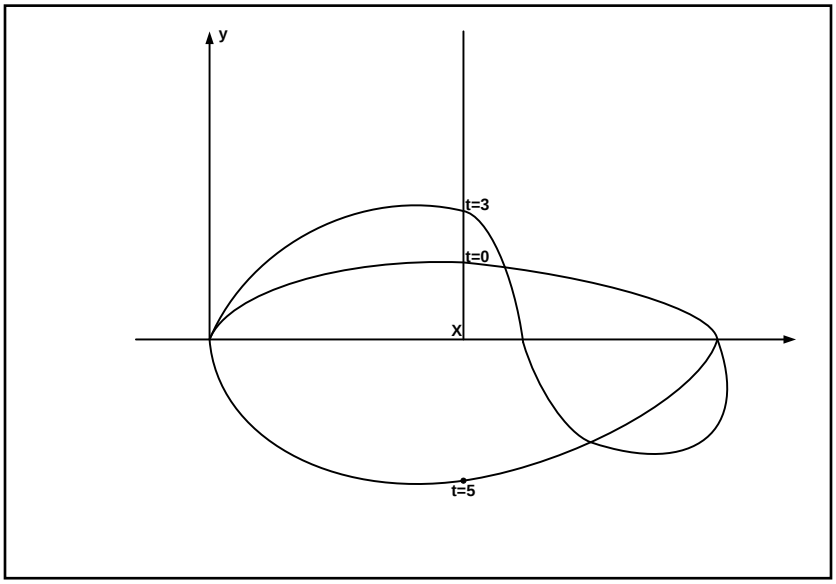


Figure III.3*: Schéma hyperbolique.* ***[59]***

Notons enfin qu'une équation telle que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial^2 x} + (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial^2 y} = g(x, y, \mathrm{f}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}).$$

Est hyperbolique si $|x| < |y|$, parabolique si $|x| = |y|$ et elliptique si $|x| > |y|$ certaines équations sont encore compliquées par le fait que les coefficients des dérivées se con des peuvent dépendre de la solution cherchée $\mathrm{f}(x, y)$. **[62]**

III.5.2 Méthode de résolution des E.O.P :

III.5.2.1 Equation paraboliques :

Elles se rencontrent typiquement dans les problèmes de diffusion en régime transitoire, telle que l'équation de la chaleur :

$$\alpha \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} \qquad (\alpha = constante) \tag{III.54}$$

Nous désignerons par t la variable par rapport à laquelle apparait la dérivée d'ordre au plus égal à un, car dans les situations pratiques, elle est relative au temps. **[63]**

Il existe essentiellement trois types de méthodes de base pour résoudre de telles équations : méthodes explicite, implicite, et de type Crank-Nicholson. Nous exposerons chacune d'elle en prenant l'exemple d'une équation linéaire à une variable d'espace x.

$$\frac{\partial \mathrm{f}(x,t)}{\partial t} = \mathrm{A}(x)\frac{\partial^2 \mathrm{f}(x,t)}{\partial x^2} + \mathrm{B}(x)\frac{\partial \mathrm{f}(x,t)}{\partial x} + \mathrm{C}(x)\mathrm{f}(x,t) + \mathrm{D}(x) \tag{III.55}$$

$$\begin{cases} \mathrm{f}(x=a,t) = \mathrm{f}_a(t) \\ \mathrm{f}(x=b,t) = \mathrm{f}_b(t) \\ \mathrm{f}(x,t=0) = \mathrm{f}_0(x) \end{cases} \tag{III.56}$$

Figure III.4: *Schéma de résolution des E.O.P.* ***[59]***

Puis, nous indiquerons les modifications à apporter dans le cas de conditions initiales différences, d'équation à deux variables d'espace x et y, d'équations non linéaires.

Afin de résoudre l'équation (III.55) nous déversons l'intervalle $[a,b]$ en $n+1$ intervalles Δx pour les points$x_0 = a, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = b$.

Nous choisirons de même un pas Δt sur le temps. Notons qu'un général ces pas sont différents et ne s'expriment même pas avec les même limités.

Le maillage est représenté sur la figure

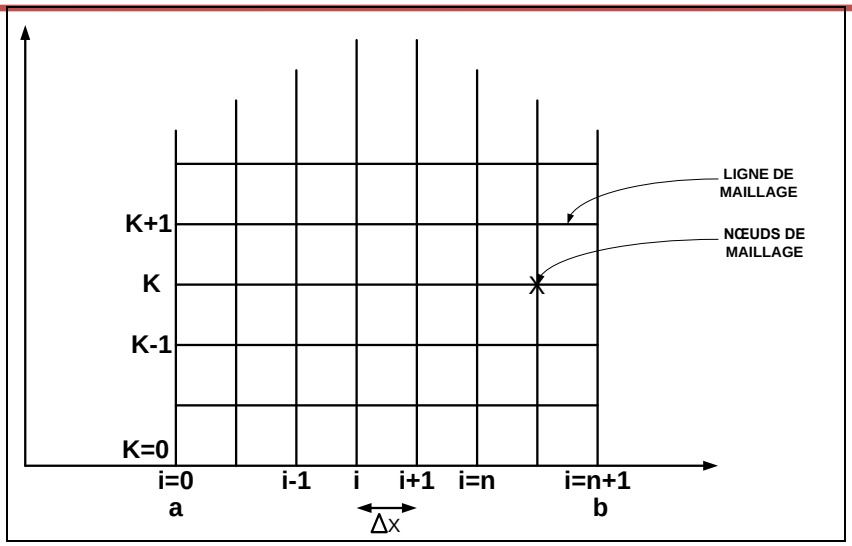


Figure III.5: *Schéma représente Le maillage.* ***[59]***

a)Méthode explicite :

Considérons l'équation (III.55) et supposons connue $\mathrm{f}(x,t)$ en tout point $x(a<x<b)$ à l'instant t : on peut calculer $\frac{\partial \mathrm{f}(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \mathrm{f}(x,t)}{\partial^2 x}$ de sorte que le second membre de (II.55) est connu et on peut écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{f}(x,t)}{\partial t} = g(x,t) \\ \mathrm{f}(x,t=0) = \mathrm{f}_0(x) \end{cases} \qquad \text{(III.57)}$$

Ou $g(x,t)$ est connue on est ainsi ramené à une équation différentielle avec condition initiale par rapport à t la résolution de cette équation par l'une des méthodes exposées (connus) effectué séparément en chacun des points $x_1, x_2, \dots, x_n$ donne la solution cherché de façon plus précise si l'indice i repère les variables x et l'indice k repère la variable t l'équation (II.55) discrétisée peut s'écrire en utilisant les différences centrées sur x et les différences à droite sur t.

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{f}_{i,k+1} - \mathrm{f}_{i,k}\right) = \frac{\mathrm{A}_i}{\Delta x^2}\left(\mathrm{f}_{i-1,k} - 2\mathrm{f}_{i,k} + \mathrm{f}_{i+1,k}\right) + \frac{\mathrm{B}_i}{2\Delta x}\left(\mathrm{f}_{i+1,k} - \mathrm{f}_{i-1,k}\right) + \mathrm{C}_i \mathrm{f}_{i,k} + \mathrm{D}_i$$

Ce qui donne

$$\mathrm{f}_{i,k+1} = \left[\frac{\mathrm{A}_i \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\mathrm{B}_i \Delta t}{2\Delta x}\right]\mathrm{f}_{i-1,k} + \left[1 - \frac{2\mathrm{A}_i \Delta t}{\Delta x^2} + \mathrm{C}_i \Delta t\right]\mathrm{f}_{i,k} + \left[\frac{A_i \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{B_i \Delta t}{2\Delta x}\right] f_{j+1,k} + D_i \Delta t \qquad \textit{(III.58)}$$

On obtient f_i à l'instant $k+1$ comme combinaison de $f_{i-1}, f_i \; et \; f_{i+1}$ à l'instant k : la molécule de base est représentée figure.

La résolution de l'équation (III.58) fait progresser cette molécule vers t_{k+1}, t_{k+2}, etc ...

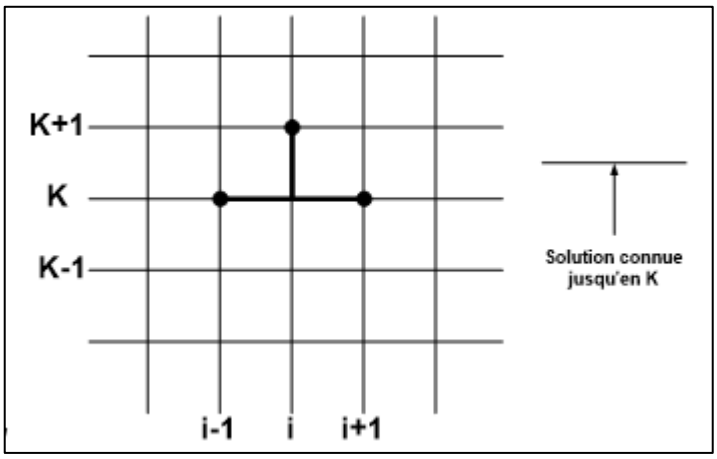


Figure III.6**: Schéma explicite. **[64]

La méthode s'applique, sans aucune modification de principe aux équations dont les coefficients A, B, C, D dépendent non seulement de x mais aussi de t et de f , ainsi qu'aux fonctions de plusieurs variables d'espace.

L'inconvenant principal de la méthode explicite est qu'elle nécessite de choisir Δt suffisamment petit si non la solution de l'équation (III.57) devient instable, en fait, il faut que le coefficient de $f_{i,k}$soit positif c.à.d. $(\frac{2A_i}{\Delta x^2} - C_i)\Delta t \leq 1$

A cause de ce risque d'instabilité il est préférable, lorsque cela est possible d'utiliser l'une des méthodes suivantes **[64]**.

c) Méthode implicite :

L'équation explicite (III.57) a été obtenue en écrivant le second membre de (III.56) à l'instant $t_k$où la solution est connue on obtient une équation implicite en écrivant le second membre de (III.56) à l'instant t_{k+1}où la solution n'est pas connue ce qui donne :

$$\frac{1}{\Delta t}(f_{i,k+1} - f_{i,k}) = \frac{A_i}{\Delta x^2}(f_{i-1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i+1,k+1}) + \frac{B_i}{2\Delta x}(f_{i+1,k+1} - f_{i-1,k+1}) + C_i f_{i,k+1} + D_i$$

Ou encore

$$\left[\frac{A_i}{\Delta x^2} - \frac{B_i}{2\Delta x}\right] f_{i-1,k+1} - \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{2A_i}{\Delta x^2} - C_i\right] f_{i,k+1} + \left[\frac{A_i}{\Delta x^2} + \frac{B_i}{2\Delta x}\right] f_{i+1,k+1} = -\left[\frac{f_{i,k}}{\Delta t} + D_i\right] \quad \text{(III.59)}$$

On obtient $f_i$connue à l'instant k comme combinaison de $f_{i-1} f_i \; et \; f_{i+1}$ inconnue à l'instant $k+1$.

La molécule de base est représentée figure (III.3).

On voit que l'équation (III.59) est en tous points identique dans sa forme à l'équation (III.54) ou la résoudre par la même méthode matricielle.

On peut traiter aussi bien le cas ou en impose aux limites $x = a, et \; x = b$ les valeurs de la fonction, ou sa dérivée.

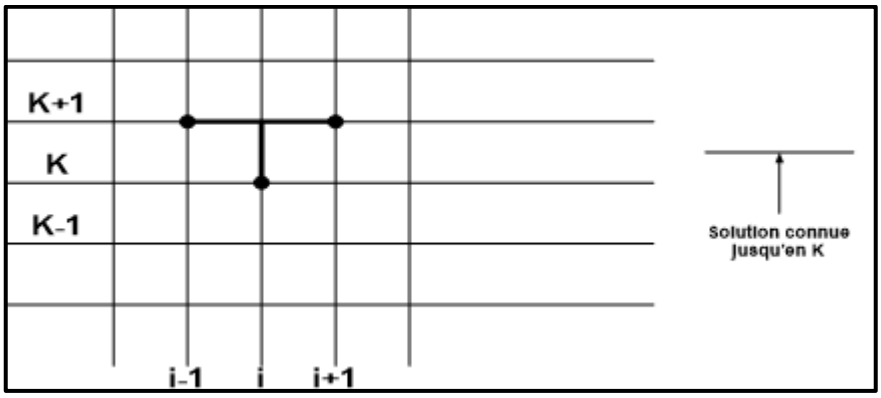


Figure III.7: *Schéma implicite.* ***[65]***

Le ventage essentiel de cette méthode est quelle est universellement stable **[65]**.

c)Méthode de Crank-Nicholson :

Dans la méthode explicite, le 2éme membre de l'équation (III.54) est écrit à l'instant k. Dans la méthode implicite, il écrit à l'instant k+1. Dans les deux cas, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$ est écrite sous la forme $(f_{j,k+1} - f_{j,k})/\Delta t$, c'est-à-dire en fait à l'instant $k + \frac{1}{2}$. La méthode de Crank-Nicholson consiste à écrire le second membre de (III.54) au point $k + \frac{1}{2}$ en l'expriment comme la demi somme des seconds membres des méthodes implicite et explicite.

On obtient alors la molécule de la figure) III.8).

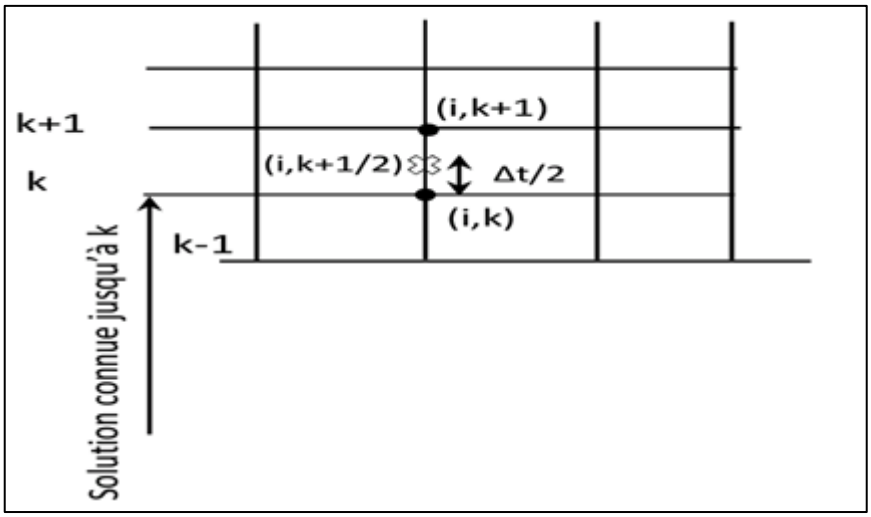


Figure III.8: *Schéma Crank-Nicholson.* ***[59]***

L'équation (III.54) s'écrit alors :

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Delta t}\left(f_{i,k+1} - f_{i,k}\right) = \left[\frac{A_i}{\Delta x^2}\left(f_{i-1,k} - 2f_{i,k} + f_{i+1,k}\right) + \frac{B_i}{2\Delta x}\left(f_{i+1,k} - f_{i-1,k}\right) + C_i f_{i,k} + D_i\right] \\ +\left[\frac{A_i}{2\Delta x^2}\left(f_{i-1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i+1,k+1}\right) + \frac{B_i}{2\Delta x}\left(f_{i+1,k+1} - f_{i-1,k+1}\right)\right. \\ \left. +C_i f_{i-1,k+1} + D_i\right] \end{array}\right] \quad \text{(III.60)}$$

Le premier crochet de (III.60) étant connu, on voit que (III.60) est on fait une équation implicite. L'avantage principal de cette équation est que, pour une valeur donnée de Δx, l'erreur de

troncature sur le terme enΔt est nettement plus petit que dans les méthodes implicite et explicite (elle exprime en effet la dérivée par rapport à t à l'aide de différences centrées de pas $\Delta t/2$ au lieu de le faire à l'aide de différences à droite ou à gauche de pas Δt. Ce gain est obtenu au prix d'une complication mineure des calculs. **[66]**

En résumé, si pour abréger les notations, on écrit l'équation (III.54) sous la forme :

$$\frac{\partial \mathrm{f}(x,t)}{\partial t} = S_t(x) \qquad \text{(III.61)}$$

On obtient :

Méthode explicite $$:\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{f}_{i,k+1} - \mathrm{f}_{i,k}\right) = S_k(\{x\})$$

Méthode implicite $$:\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{f}_{i,k+1} - \mathrm{f}_{i,k}\right) = S_{k+1}(\{x\})$$

Crank-Nicholson $$:\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{f}_{i,k+1} - \mathrm{f}_{i,k}\right) = \frac{1}{2}[S_k(\{x\}) + S_{k+1}(\{x\})]$$

Où $$\{x\} = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$$

Ces trois écritures sont des cas particuliers de la forme :

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{f}_{i,k+1} - \mathrm{f}_{i,k}\right) = \theta S_{k+1}(\{x\}) + (1+\theta)S_k(\{x\}) \qquad \text{(III.62)}$$

Où θ est le ″degré d'implicite″ : $\theta = 1$ donne la représentation implicite.
$\theta = 0$ La représentation explicite et $\theta = \frac{1}{2}$ celle de Crank-Nicholson.

La représentation (III.62) est universellement stable pour$\theta \geq \frac{1}{2}$ pour les équations linéaires. Elle est conditionnellement stable pour $\theta \leq \frac{1}{2}$. **[53]**

III.6. Conclusion :

Dans ce chapitre nous allons présenter l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies.
La méthode des différences finies est l'une des techniques de recherche de solution approchée d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. En apparence, cette méthode est en général simple à mettre en œuvre, elle procède en deux étapes :

1. La discrétisation du domaine d'étude (l'espace discrétisé ou maillage) et des opérateurs de dérivation/différentiation. Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, etc., dérivées partielles) peut être obtenue par les formules de Taylor, en particulier celle de Taylor avec reste intégral permet de mesurer les erreurs.

2. La convergence du schéma numérique ainsi obtenu (lorsque la distance entre les points diminue).
Les avantages de la méthode :

- Grande simplicité d'écriture
- Et faible coût de calcul.
- Les inconvénients de la méthode :
- Limitation à des géométries simples,
- Difficultés de prise en compte des conditions aux types Neumann.

Chapitre IV :

Etude semi Analytique

IV.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré pour étudier le comportement thermique d'une aube qui se trouve en aval de la chambre de combustion à la présence d'un système de refroidissement. Pour étudier l'évolution de la température dans l'aube pendant 5min on a résolu l'équation de la chaleur par la méthode des différences finis.

IV.2. Géométrie du problème à étudié :

La géométrie du problème considéré est schématisée par la figure IV-1 :

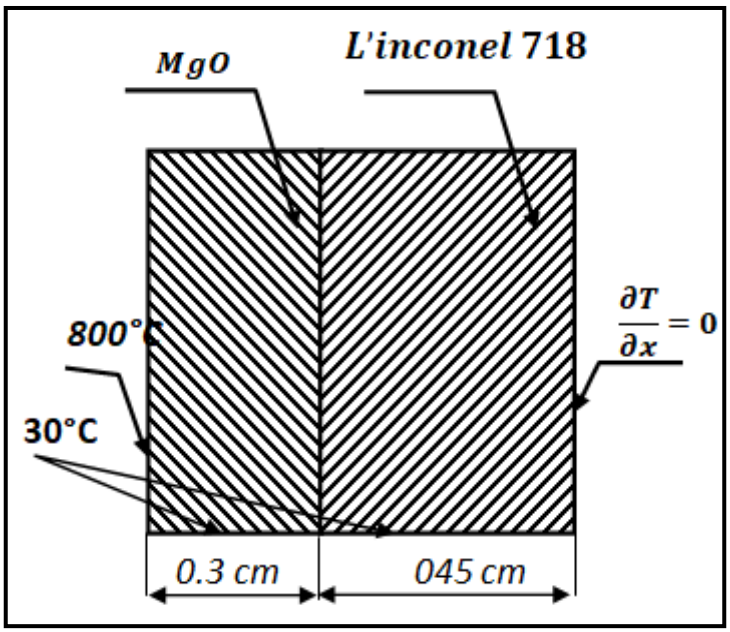


Figure IV.1 : *La géométrie de problème.*

- ✓ Hypothèses et données
  - L'évolution de la température est suivante x sur l'épaisseur d'aube.
  - Le régime de transfert de chaleur est non permanent.
- $\Delta x = 7.5 * 10^{-4}$ m (l'épaisseur de céramique=0.3cm).
- Δy=60s (pendant 300s).
-
- ✓ Les conditions initiales et aux limites sont :

x=0 cm et t=0→T=30°c (condition de Dirichlet)

x=0cm et t> 0→ T=800°c (condition de Dirichlet)

x=0.75cm→ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$(condition de Newman)

IV.3. Le maillage d'une aube :

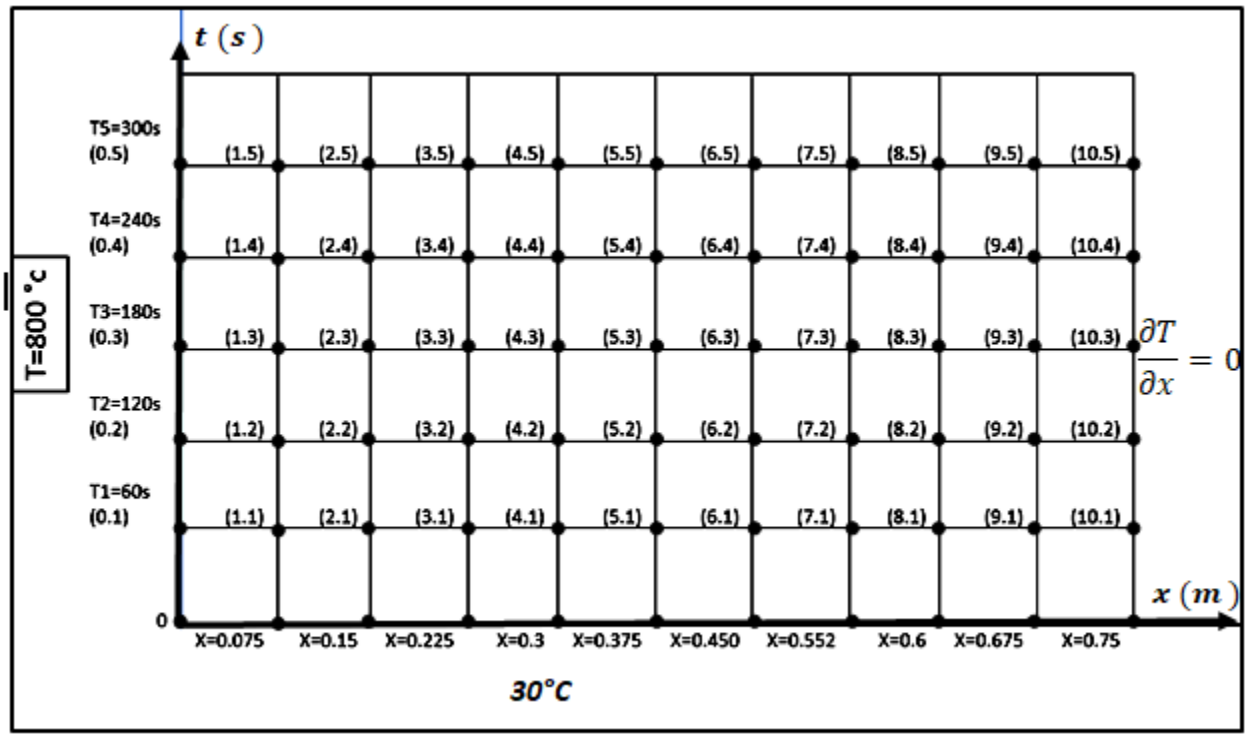


Figure IV.2 : *Le maillage d'une aube.*

La détermination de l'évolution de la température en fonction du temps suivant x est régie par l'équation de chaleur.

Pour la discrétisation de l'équation de chaleur on a utilisé la méthode de différence centrée et différence à gauche.

- ***Equation de chaleur***

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(IV.1)}$$

- ***Couche zicrone MgO***

Pour la discrétisation en appliquant la méthode des différences centrées et différence à gauche

- ***Données :***

$\rho = 5.5 g/cm^3$=5500Kg/m^3

$\lambda = 2 - 2.5 W/m.k$

C=420J/Kg. k

$$\propto = \frac{\lambda}{\rho.c} \rightarrow \alpha = 1.08 * 10^{-6} m^2/s$$

Pour la discrétisation de l'équation de chaleur on a utilisé la méthode des différences centrées et différence à gauche.

- ***La discrétisation de l'équation :*** $\frac{\partial T}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \propto \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$

$T_{i,j} - T_{i-1,j} = \frac{\Delta t . \propto}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}\right)$

$T_{i,j} - T_{i-1,j} = 115.2(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})$

$$231.4T_{i,j} - T_{i,j-1} - 115.2T_{i+1,j} - 115.2T_{i-1,j} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Remplacement de la numérotation de chaque nœud dans l'équation(IV.2).

❖ **Point (1,1)**

$231.4T_{1,1} - T_{1,0} - 115.2T_{2,1} - 115.2T_{0,2} = 0$

CI : $T_{1,0} = 30°\text{c}$

$T_{0,2} = 800°c$

$$231.4T_{1,1} - 115.2T_{2,1} = 92190 \quad (IV.3)$$

❖ **Point (2,1)**

$231.4T_{2,1} - T_{2,0} - 115.2T_{3,1} - 115.2T_{1,1} = 0$

CI : $T_{2,0} = 30°c$

$$231.4T_{2,1} - 115.2T_{3,1} - 115.2T_{1,1} = 30 \quad (\text{IV.4})$$

❖ **Point (3,1)**

$231.4T_{3,1} - T_{3,0} - 115.2T_{4,1} - 115.2T_{2,1} = 0$

CI : $T_{3,0} = 30°c$

$$231.4T_{3,1} - 115.2T_{4,1} - 115.2T_{2,1} = 30 \quad (\text{IV.5})$$

❖ **Point (4,1)**

$231.4T_{4,1} - T_{4,0} - 115.2T_{5,1} - 115.2T_{3,1} = 0$

CI : $T_{4,0} = 30°231$

$$231.4T_{4,1} - 115.2T_{5,1} - 115.2T_{3,1} = 30 \quad (\text{IV.6})$$

- **Couche l'inconel 718**

Pour la discrétisation en appliquant la méthode des différences centrées et différence à gauche

- **Données** :

$\rho = 8.11 g/cm^3$=8110 Kg/m^3

$\lambda = 11.4\ W/m.k$

C=800 J/Kg. k

$\propto = \frac{\lambda}{\rho.c} \rightarrow \alpha = 1.75 * 10^{-6} m^2/s$

- **La discrétisation de l'équation :** $\frac{\partial T}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$T_{i,j} - T_{i,j-1} = 186.66(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})$

$374.32T_{i,j} - T_{i,j-1} - 186.66T_{i+1,j} - 186.66T_{i-1,j} = 0$ $(IV.7)$

- **Point (5,1)**

$374.32T_{5,1} - T_{5,0} - 186.66T_{6,1} - 186.66T_{4,1} = 0$

CI : $T_{5,0} = 30°$

$374.32T_{5,1} - 186.66T_{6,1} - 186.66T_{4,1} = 30$ (IV.8)

- **Point (6,1)**

$374.32T_{6,1} - T_{6,0} - 186.66T_{7,1} - 186.66T_{5,1} = 0$

CI : $T_{6,0} = 30°$

$374.32T_{6,1} - 186.66T_{7,1} - 186.66T_{5,1} = 30$ (IV.9)

- **Point (7,1)**

$374.32T_{7,1} - T_{7,0} - 186.66T_{8,1} - 186.66T_{6,1} = 0$

CI : $T_{7,0} = 30°$

$374.32T_{7,1} - 186.66T_{8,1} - 186.66T_{6,1} = 30$ (IV.10)

- **Point (8,1)**

$374.32T_{8,1} - T_{8,0} - 186.66T_{9,1} - 186.66T_{7,1} = 0$

CI : $T_{8,0} = 30°$

$374.32T_{8,1} - 186.66T_{9,1} - 186.66T_{7,1} = 30$ (IV.11)

❖ **Point (9,1)**

$374.32T_{9,1} - T_{9,0} - 186.66T_{10,1} - 186.66T_{8,1} = 0$

CI : $T_{9,0} = 30°$

$374.32T_{9,1} - 186.66T_{10,1} - 186.66T_{8,1} = 30$

$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} = 0$

$\frac{T_{10,1} - T_{9,1}}{7.5*10^{-4}} = 0$

$T_{10,1} - T_{9,1} = 0$

$T_{10,1} = T_{9,1}$

$374.32T_{9,1} - 186.66T_{9,1} - 186.66T_{8,1} = 30$

$187.66T_{9,1} - 186.66T_{8,1} = 30$ (IV.12)

Donc on a un système d'équation on utilise un ***Code Matlab***

A= [231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0 0; -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0;0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0;0 0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 ;0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0 0 ;0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0 ;0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 ;0 0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 ;0 0 0 0 0 0 0 -186.66 187.66];

B= [92190;30;30;30;30;30;30;30;30];

$X = inv(A) * B$

- ***Les solutions***

$T_{1,1} = 759.5860°c$

$T_{2,1} = 726.0475°c$

$T_{3,1} = 698.2811°c$

$T_{4,1} = 676.3158°c$

$T_{5,1} = 659.9608°c$

$T_{6,1} = 646.9808°c$

$T_{7,1} = 637.3061°c$

$T_{8,1} = 630.8850°c$

$T_{9,1} = 627.6830°c$

❖ **Point (1,2)**

$231.4T_{1,2} - T_{1,1} - 115.2T_{2,2} - 115.2T_{0,2} = 0$

CI : $T_{1,1} = 759.5860°c$

$T_{0,2} = 800°c$

$231.4T_{1,2} - 115.2T_{2,2} = 92919.856$ (IV.13)

❖ **Point (2,2)**

$231.4T_{2,2} - T_{2,1} - 115.2T_{3,2} - 115.2T_{1,2} = 0$

CI : $T_{2,1} = 726.0475°c$

$231.4T_{2,2} - 115.2T_{3,2} - 115.2T_{1,2} = 726.0475$ (IV.14)

❖ **Point (3,2)**

$231.4T_{3,2} - T_{3,1} - 115.2T_{4,2} - 115.2T_{2,2} = 0$

CI : $T_{3,1} = 698.2811°c$

$231.4T_{3,2} - 115.2T_{4,2} - 115.2T_{2,2} = 698.2811$ (IV.15)

❖ **Point (4,2)**

$231.4T_{4,2} - T_{4,1} - 115.2T_{5,2} - 115.2T_{3,2} = 0$

CI : $T_{4,1} = 676.3158°c$

$231.4T_{4,2} - 115.2T_{5,2} - 115.2T_{3,2} = 676.3158$ (IV.16)

❖ **Point (5,2)**

$374.32T_{5,2} - T_{5,1} - 186.66T_{6,2} - 186.66T_{4,2} = 0$

CI : $T_{5,1} = 659.9608°c$

$374.32T_{5,2} - 186.66T_{6,2} - 186.66T_{4,2} = 659.9608$ (IV.17)

❖ **Point (6,2)**

$374.32T_{6,2} - T_{6,1} - 186.66T_{7,2} - 186.66T_{5,2} = 0$

CI : $T_{6,1} = 646.9808°c$

$374.32T_{6,2} - 186.66T_{7,2} - 186.66T_{5,2} = 646.9808$ (IV.18)

❖ **Point (7,2)**

$374.32T_{7,2} - T_{7,1} - 186.66T_{8,2} - 186.66T_{6,2} = 0$

CI : $T_{7,1} = 637.3061°c$

$$374.32T_{7,2} - 186.66T_{8,2} - 186.66T_{6,2} = 637.3061 \quad \text{(IV.19)}$$

- **Point (8,2)**

$$374.32T_{8,2} - T_{8,1} - 186.66T_{9,2} - 186.66T_{7,2} = 0$$

CI : $T_{8,1} = 630.8850°c$

$$374.32T_{8,2} - 186.66T_{9,2} - 186.66T_{7,2} = 630.8850 \quad \text{(IV.20)}$$

- **Point (9,2)**

$$374.32T_{9,2} - T_{9,1} - 186.66T_{10,2} - 186.66T_{8,2} = 0$$

CI : $T_{9,1} = 627.6830°c$

$$374.32T_{9,2} - 186.66T_{10,2} - 186.66T_{8,2} = 627.6830$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{T_{10,2} - T_{9,2}}{7.5 * 10^{-4}} = 0$$

$$T_{10,2} - T_{9,2} = 0$$

$$T_{10,2} = T_{9,2}$$

$$374.32T_{9,2} - 186.66T_{9,2} - 186.66T_{8,2} = 627.6830$$

$$187.66T_{9,2} - 186.66T_{8,2} = 627.6830 \quad \text{(IV.21)}$$

Code Matlab

A= [231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0 ; -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0 ;0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 ;0 0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 ;0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0 ;0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 ;0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 ;0 0 0 0 0 0 -186.66 187.66] ;

B= [92919.856;726.0475 ;698.28 ;676.3158 ;659.9608 ;646.9808 ;637.3061 ;630.8850 ;627.6830] ;

$X = inv(A) * B$

- ***Les solutions***

$T_{1,2} = 794.0402°c$

$T_{2,2} = 788.3771°c$

$T_{3,2} = 783.2551°c$

$T_{4,2} = 778.8707°c$

$T_{5,2} = 775.3765°c$

$T_{6,2} = 772.5005°c$

$T_{7,2} = 770.2973°c$

$T_{8,2} = 768.8064°c$

$T_{9,2} = 768.0544°c$

❖ **Point (1,3)**

$231.4T_{1,3} - T_{1,2} - 115.2T_{2,3} - 115.2T_{0,3} = 0$

CI : $T_{1,2} = 794.0402°c$

$T_{0,3} = 800°c$

$231.4T_{1,3} - 115.2T_{2,3} = 92909.0402$ (IV.22)

❖ **Point (2,3)**

$231.4T_{2,3} - T_{2,2} - 115.2T_{3,3} - 115.2T_{1,3} = 0$

CI : $T_{2,2} = 788.3771°c$

$231.4T_{2,3} - 115.2T_{3,3} - 115.2T_{1,3} = 788.3771$ (IV.23)

❖ **Point (3,3)**

$231.4T_{3,3} - T_{3,2} - 115.2T_{4,3} - 115.2T_{2,3} = 0$

CI : $T_{3,2} = 783.2551°c$

$231.4T_{3,3} - 115.2T_{4,3} - 115.2T_{2,3} = 783.2551$ (IV.24)

❖ **Point (4,3)**

$231.4T_{4,3} - T_{4,2} - 115.2T_{5,3} - 115.2T_{3,3} = 0$

CI : $T_{4,2} = 778.8707°c$

$231.4T_{4,3} - 115.2T_{5,3} - 115.2T_{3,3} = 778.8707$ (IV.25)

❖ **Point (5,3)**

$374.32T_{5,3} - T_{5,2} - 186.66T_{6,3} - 186.66T_{4,3} = 0$

CI : $T_{5,2} = 775.3765°c$

$374.32T_{5,3} - 186.66T_{6,3} - 186.66T_{4,3} = 775.3765$ (IV.26)

❖ **Point (6,3)**

$374.32T_{6,3} - T_{6,2} - 186.66T_{7,3} - 186.66T_{5,3} = 0$

CI : $T_{6,2} = 772.5005°c$

$374.32T_{6,3} - 186.66T_{7,3} - 186.66T_{5,3} = 772.5005$ (IV.27)

❖ **Point (7,3)**

$374.32T_{7,3} - T_{7,2} - 186.66T_{8,3} - 186.66T_{6,3} = 0$

CI : $T_{7,2} = 770.2973°c$

$374.32T_{7,3} - 186.66T_{8,3} - 186.66T_{6,3} = 770.2973$ (IV.28)

❖ **Point (8,3)**

$374.32T_{8,3} - T_{8,2} - 186.66T_{9,3} - 186.66T_{7,3} = 0$

CI : $T_{8,2} = 768.8064°c$

$374.32T_{8,3} - 186.66T_{9,3} - 186.66T_{7,3} = 630.8850$ (IV.29)

❖ **Point (9,3)**

$374.32T_{9,3} - T_{9,2} - 186.66T_{10,3} - 186.66T_{8,3} = 0$

CI : $T_{9,2} = 768.0544°c$

$374.32T_{9,3} - 186.66T_{10,3} - 186.66T_{8,3} = 768.0544$

$\frac{T_{10,3} - T_{9,3}}{7.5 * 10^{-4}} = 0$

$T_{10,3} - T_{9,3} = 0$

$T_{10,3} = T_{9,3}$

$374.32T_{9,3} - 186.66T_{9,3} - 186.66T_{8,3} = 768.0544$

$187.66T_{9,3} - 186.66T_{8,3} = 768.0544$ (IV.30)

Code Matlab

A=[231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0;-115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0;0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0;0 0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0;0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0;0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0;0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66;0 0 0 0 0 0 -186.66 187.66];

B=[92909.0402;788.3771;783.2551;787.8707;775.3765;772.5005;770.2973;768.8064;768.0544];

X=inv(A)*B

- **Les solutions**

$T_{1,3} = 798.6602°c$

$T_{2,3} = 797.7512°c$

$T_{3,3} = 796.9235°c$

$T_{4,3} = 796.2145°c$

$T_{5,3} = 795.5780°c$

$T_{6,3} = 795.0496°c$

$T_{7,3} = 794.6421°c$

$T_{8,3} = 794.3649°c$

$T_{9,3} = 794.2247°C$

❖ **Point (1,4)**

$231.4T_{1,4} - T_{1,3} - 115.2T_{2,4} - 115.2T_{0,4} = 0$

CI : $T_{1,3} = 798.6602°c$

$T_{0,4} = 800°C$

$231.4T_{1,4} - 115.2T_{2,4} = 92958.6602$ (IV.31)

❖ **Point (2,4)**

$231.4T_{2,4} - T_{2,3} - 115.2T_{3,4} - 115.2T_{1,4} = 0$

CI : $T_{2,3} = 797.7512°C$

$231.4T_{2,4} - 115.2T_{3,4} - 115.2T_{1,4} = 797.7512$ (IV.32)

❖ **Point (3,4)**

$231.4T_{3,4} - T_{3,3} - 115.2T_{4,4} - 115.2T_{2,4} = 0$

CI : $T_{3,3} = 796.9235°C$

$$231.4T_{3,4} - 115.2T_{4,4} - 115.2T_{2,4} = 796.9235 \quad \text{(IV.33)}$$

- **Point (4,4)**

$$231.4T_{4,4} - T_{4,3} - 115.2T_{5,4} - 115.2T_{3,4} = 0$$

CI : $T_{4,3} = 796.2145°C$

$$231.4T_{4,4} - 115.2T_{5,4} - 115.2T_{3,4} = 796.2145 \quad \text{(IV.34)}$$

- **Point (5,4)**

$$374.32T_{5,4} - T_{5,3} - 186.66T_{6,4} - 186.66T_{4,4} = 0$$

CI : $T_{5,3} = 799.2086°c$

$$374.32T_{5,4} - 186.66T_{6,4} - 186.66T_{4,4} = 799.2086 \quad \text{(IV.35)}$$

- **Point (6,5)**

$$374.32T_{6,5} - T_{6,4} - 186.66T_{7,5} - 186.66T_{5,5} = 0$$

CI : $T_{6,4} = 795.0496°c$

$$374.32T_{6,5} - 186.66T_{7,5} - 186.66T_{5,5} = 795.0496 \quad \text{(IV.36)}$$

- **Point (7,4)**

$$374.32T_{7,4} - T_{7,3} - 186.66T_{8,4} - 186.66T_{6,4} = 0$$

CI : $T_{7,3} = 794.6421°c$

$$374.32T_{7,4} - 186.66T_{8,4} - 186.66T_{6,4} = 794.6421 \quad \text{(IV.37)}$$

- **Point (8,4)**

$$374.32T_{8,4} - T_{8,3} - 186.66T_{9,4} - 186.66T_{7,4} = 0$$

CI : $T_{8,3} = 794.3649°c$

$$374.32T_{8,4} - 186.66T_{9,4} - 186.66T_{7,4} = 794.3649 \quad \text{(IV.38)}$$

- **Point (9,4)**

$$374.32T_{9,4} - T_{9,3} - 186.66T_{10,4} - 186.66T_{8,4} = 0$$

CI : $T_{9,3} = 794.2247°c$

$$374.32T_{9,4} - 186.66T_{10,4} - 186.66T_{8,4} = 794.2247$$

$$T_{10,4} = T_{9,4}$$

$374.32T_{9,4} - 186.66T_{9,4} - 186.66T_{8,4} = 794.2247$

$187.66T_{9,4} - 186.66T_{8,4} = 794.2247$ (IV.39)

Code Matlab

A= [231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0 0; -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0;0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0;0 0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0;0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0 0;0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0;0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0;0 0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66;0 0 0 0 0 0 0 -186.66 187.66];

B= [92958.6602;797.7512;796.9235;796.2145;795.5780;795.0496;794.6421;794.3649;794.2247];

X=inv(A)*B

- ***Les solutions***

$T_{1,4} = 799.8097°c$

$T_{2,4} = 799.6294°c$

$T_{3,4} = 799.4654°c$

$T_{4,4} = 799.3235°c$

$T_{5,4} = 799.2086°c$

$T_{6,4} = 799.1131°c$

$T_{7,4} = 799.0394°c$

$T_{8,4} = 798.9892°c$

$T_{9,4} = 798.9638°c$

❖ **Point (1,5)**

$231.4T_{1,5} - T_{1,4} - 115.2T_{2,5} - 115.2T_{0,5} = 0$

CI : $T_{1,4} = 799.8097$

$T_{0,5} = 800°c$

$231.4T_{1,4} - 115.2T_{2,4} = 92959.8097$ (IV.40)

❖ **Point (2,5)**

$231.4T_{2,5} - T_{2,4} - 115.2T_{3,5} - 115.2T_{1,5} = 0$

CI : $T_{2,4} = 799.6294°c$

$231.4T_{2,5} - 115.2T_{3,5} - 115.2T_{1,5} = 799.6294$ (IV.41)

❖ **Point (3,5)**

$231.4T_{3,5} - 4 - 115.2T_{4,5} - 115.2T_{2,5} = 0$

CI : $T_{3,4} = 799.3235°c$

$231.4T_{3,5} - 115.2T_{4,5} - 115.2T_{2,5} = 799.3235$ (IV.42)

❖ **Point (4,5)**

$231.4T_{4,5} - T_{4,4} - 115.2T_{5,5} - 115.2T_{3,5} = 0$

CI : $T_{4,4} = 799.3235$

$231.4T_{4,5} - 115.2T_{5,5} - 115.2T_{3,5} = 799.3235$ (IV.43)

❖ **Point (5,5)**

$374.32T_{5,5} - T_{5,4} - 186.66T_{6,5} - 186.66T_{4,5} = 0$

CI : $T_{5,4} = 799.2086°c$

$374.32T_{5,5} - 186.66T_{6,5} - 186.66T_{4,5} = 795.5780$ (IV.44)

❖ **Point (6,5)**

$374.32T_{6,5} - T_{6,4} - 186.66T_{7,5} - 186.66T_{5,5} = 0$

CI : $T_{6,4} = 799.1131°c$

$374.32T_{6,5} - 186.66T_{7,5} - 186.66T_{5,5} = 799.1131$ (IV.45)

❖ **Point (7,5)**

$374.32T_{7,5} - T_{7,4} - 186.66T_{8,5} - 186.66T_{6,5} = 0$

CI : $T_{7,4} = 799.0394°c$

$374.32T_{7,5} - 186.66T_{8,5} - 186.66T_{6,5} = 799.0394$ (IV.46)

❖ **Point (8,5)**

$374.32T_{8,5} - T_{8,4} - 186.66T_{9,5} - 186.66T_{7,5} = 0$

CI : $T_{8,4} = 798.9892°c$

$374.32T_{8,5} - 186.66T_{9,5} - 186.66T_{7,5} = 798.9892$ (IV.47)

❖ **Point (9,5)**

$374.32T_{9,5} - T_{9,4} - 186.66T_{10,5} - 186.66T_{8,5} = 0$

CI : $T_{9,4} = 798.9638°c$

$374.32T_{9,5} - 186.66T_{10,5} - 186.66T_{8,5} = 798.9638$

$T_{10,5} = T_{9,5}$

$374.32T_{9,5} - 186.66T_{9,5} - 186.66T_{8,5} = 798.9638$

$187.66T_{9,5} - 186.66T_{8,5} = 798.9638$ (IV.48)

Code Matlab

A= [231.4 -115.2 0 0 0 0 0 0;-115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0 0;0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0 0;0 0 -115.2 231.4 -115.2 0 0 0;0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0 0;0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66 0;0 0 0 0 0 -186.66 374.32 -186.66;0 0 0 0 0 0 -186.66 187.66];

B= [92959.8097;799.6294;799.4654;799.3235;799.2086;799.1131;799.0394;798.9892;798.9638];

X=inv(A)*B

- ***Les solutions***

$T_{1,5} = 799.9667°c$

$T_{2,5} = 799.9348°c$

$T_{3,5} = 799.9055°c$

$T_{4,5} = 799.8800°c$

$T_{5,5} = 799.8594°c$

$T_{6,5} = 799.8422°c$

$T_{7,5} = 799.8290°c$

$T_{8,5} = 798.8200°c$

$T_{9,5} = 798.8154°C.$

IV.4. Etude graphique :

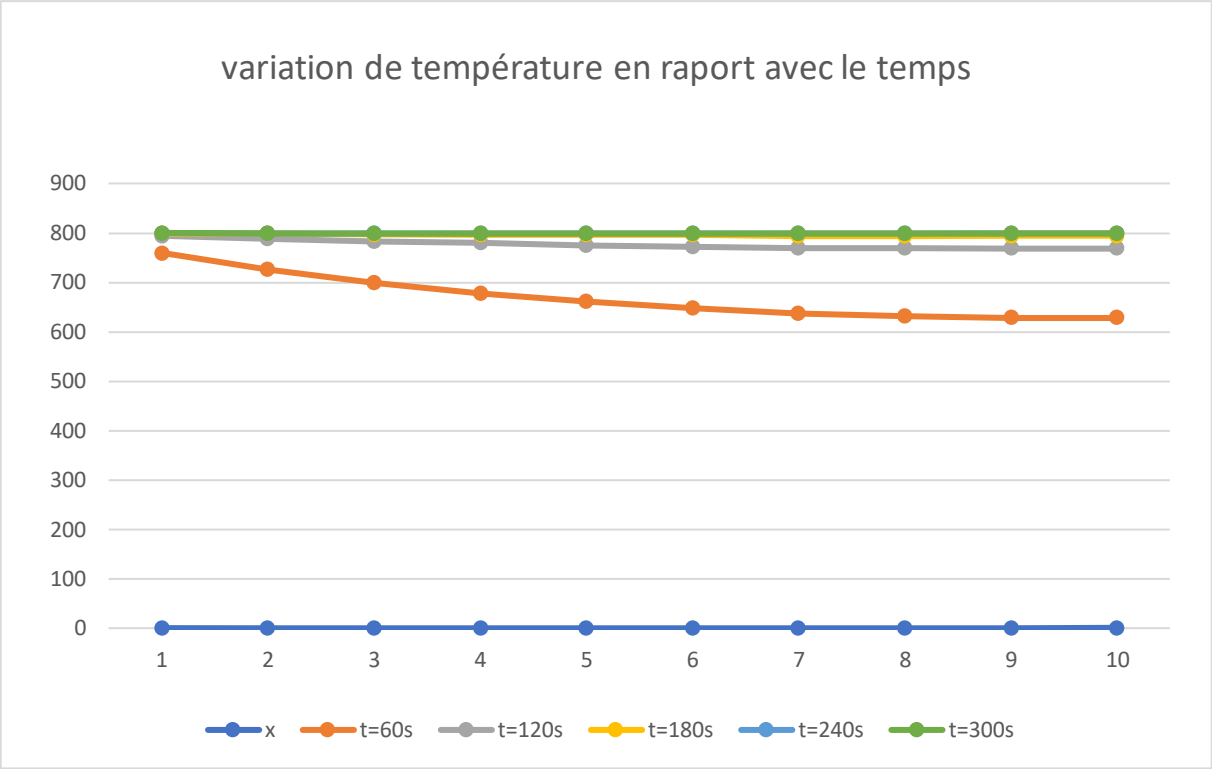


Figure IV.3. *Evolution de la température en fonction de l'abscisse x dans plusieurs temps.*

IV.5. Interprétation des résultats *:*

La figure IV.2 Présente l'évolution de la température en fonction de l'abscisse x dans plusieurs temps ; La courbe commence à partir de la valeur maximal ($T_{max} = 759.5860C^{\circ}$)en ce moment 60, et puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre de valeur ($T = 627.6830C^{\circ}$). Même chose en ce moment 120, la courbe commence à partir de la valeur maximal ($T_{max} = 794.0402C^{\circ}$)et puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre de valeur ($T = 627.6830C^{\circ}$). Même chose en ce moment 180, la courbe commence à partir de la valeur maximal ($T_{max} = 798.6602C^{\circ}$) et puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre de valeur ($T = 794.2247C^{\circ}$).Même chose en ce moment 240, la courbe commence à partir de la valeur maximal ($T_{max} = 799.8097C^{\circ}$) et puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre de valeur ($T = 798.9638C^{\circ}$). Même chose en ce moment 300, la courbe commence à partir de la valeur maximal ($T_{max} = 799.9667C^{\circ}$) et puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre de valeur ($T = 798.8154$).

Après 5 minutes, nous avons remarqué que $T_{max} < 800C^{\circ}$dans une aube avec des barrières thermiques en zircone MgO.

C’est la preuve de l’efficacité de l’utilisation de zircone MgO comme barrière thermique.

IV.6. Conclusion :

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'étude digitale du transfert de chaleur dans une lame équipée d'un système de barrière thermique. *(FigureIV.1)*

L’étude numérique est effectuée en utilisant le code de calcul élaboré et implémenté sur l’éditeur Matlab basé sur la méthode de l’inverse de matrice (la méthode de Cramer) pour rissoler le système d’équation.

La discrétisation de l’équation de chaleur pour l’évolution de la température dans une aube.

Chapitre V :

Etude numérique discussion et interprétation des résultats

V.1. Introduction :

Ces dernières années, la CFD, (computationnel fluide Dynamics), est devenue un outil primordial dans le procédé de conception des applications et qui est très efficace économiquement et écologiquement. La modélisation des écoulements internes dans les turbomachines, utilisant les codes de simulation numérique, a connu un véritable succès ces dernières décennies. L'apparition de grands moyens de calcul a favorisé l'émergence des codes commerciaux, utilisant les méthodes des volumes finis, différences finis et éléments finis pour la résolution. [1]

Ce chapitre tente d'étudier l'efficacité des parois thermiques de nature céramique en refroidissement et leur effet sur la répartition de la température et le taux de transfert de chaleur dans une aube de turbine en l'inconel 718 utilisant le CFD.

V.2.Le solveur fluent :

Fluent est un code de calcul qui permet de simuler les écoulements des fluides avec et sans transferts thermiques dans des géométries complexes.

Il peut également résoudre des problèmes d'écoulement avec des mailles structurées et nom structurées, produites grâce à des géométries complexes. Les mailles supportées en 2D sont de types triangulaires ou quadrilatéraux, elles sont tétraédriques/hexaédriques/pyramidales en 3D, ou des mailles (hybrides) mélangées. Le code « fluent » est écrit en langage C et utilise pleinement la flexibilité et la puissance offertes par ce langage (allocation de la mémoire dynamique). En outre il utilise une architecture qui lui permet de s'exécuter en tant que plusieurs processus simultanés sur le même poste de travail ou sur des postes séparés, pour une exécution plus efficace. [2]

V.3. Problématique et objectif :

Considérons le problème axial in stationnaire de la conduction de la chaleur dans une aube, elle se compose de deux couches, couche de zircone MgO et couche de l'inconel 718 par CFD.

V.4. Présentation du logiciel de simulation « ANSYS Fluent » :

ANSYS FLUENT est un logiciel de simulation CFD qui permet de modéliser l'écoulement du fluide, le transfert de chaleur, et les réactions chimiques dans des géométries complexes. Ce programme est écrit dans le langage C de programmation et permet d'utiliser pleinement la flexibilité et la puissance offerte par cette langue. ANSYS FLUENT utilise une architecture client / serveur, ce qui lui permet d'exécuter des processus simultanés distinctes sur plusieurs postes de travail client et serveurs de calcul puissants. Cette architecture est essentielle pour une exécution efficace, un contrôle interactif, et une flexibilité totale entre les différents types de machines ou de systèmes d'exploitation. **[40]**

V.5. Menu principal du logiciel :

L'interface graphique de Workbench ANSYS est montrée sur la (Figure V.1). Dans cette étude, nous utilisons mécanique des fluides (fluents) qui se trouve en la barre d'outils.

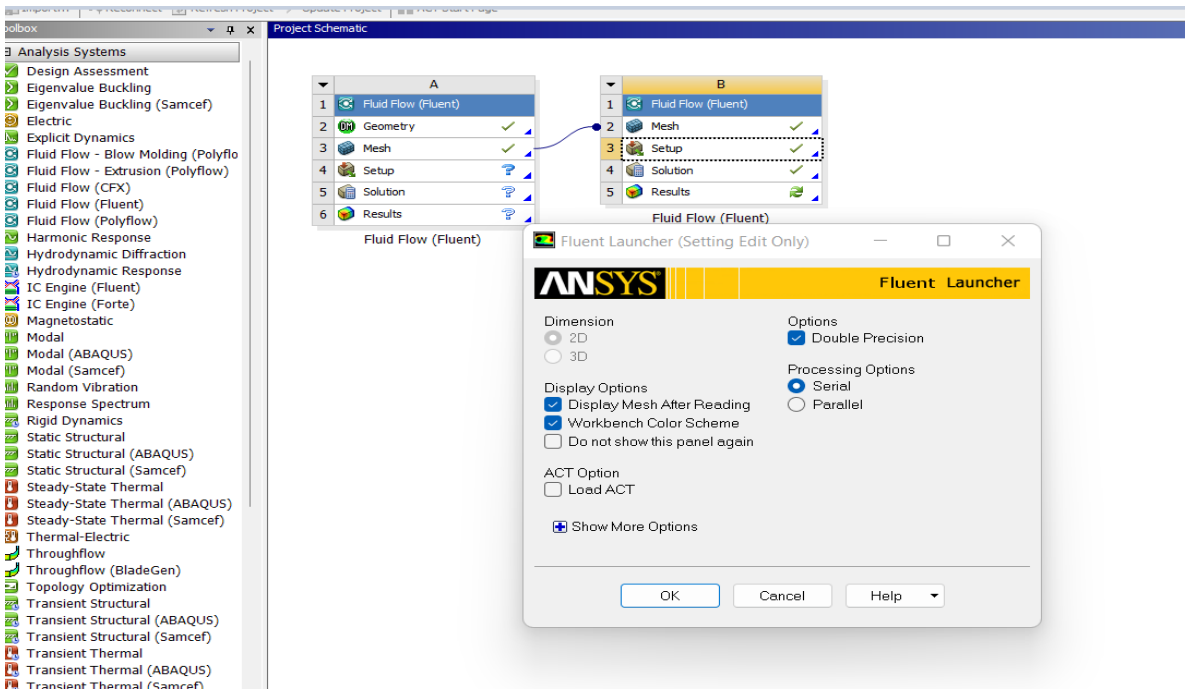


Figure V.1 : *la fenêtre principale du logiciel ANSYS.*

Les différentes étapes :

- **Géométrie :** Utilisé pour importer ou de créer ou de modifier ou de mettre à jour un modèle qui peut être utilisé pour l'analyse.
- **Maillage :** Cette cellule est liée à la définition de la géométrie, systèmes de coordonnées et réseau de communication dans le module de simulation mécanique.
- **Configuration :** Permet de définir les charges et conditions aux limites et une autre configuration pour l'analyse.
- **Solution :** La solution cellulaire permet d'accéder aux données.
- **Résultats :** Cette cellule combine les résultats de l'analyse.

Géométrie	***Création de la géométrie***	***ANSYS Design Modeler***
Maillage	***Maillage***	***ANSYS Meshing***
Configuration	***Mise en données et simulation***	***ANSYS fluent***
Solution	***Résultats CFD***	
Résultats	***Post-processus***	***CFD-Post***

Tableau V.1 : *Les étapes de Modélisation et les sous-programmes qui en sont responsables.*

V.6. Les processus de la simulation :

V.6.1. Création de la géométrie :

Pour créer une géométrie avec ANSYS Workbench double clique sur géométrie pour ouvrir le module de création géométrique « Design Modeler ». Il faut préciser que l'on va travailler en 2D ou 3D. La géométrie étudiée est composée respectivement de :

La première couche :

$$L = 5\ cm$$

$$l = 0.3\ cm$$

La deuxième couche :

$$L = 5\ cm$$

$$l = 0.9\ cm$$

La troisième couche :

$$L = 5\ cm$$

$$l = 0.3\ cm$$

V.6.2. Hypothèses simplificatrices :

- Le flux d'air chaud provoque un transfert de chaleur pour les aubes de turbine à gaz.
- Il est supposé axial.
- L'écoulement est compressible et en régime stationnaire.
- La dissipation visqueuse et les forces de gravité sont négligeables.

V.6.3 Les conditions Initial aux limites du problème sont :

- $y = 0 \rightarrow \mathrm{T} = 30$ ℃ Dirichlet
- $x = 0 \rightarrow T = 800°C$ Dirichlet
- $x = 0.75\ cm \rightarrow \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = 0$ Newman

Le domaine d'étude est présenté dans la figure ci-dessous.

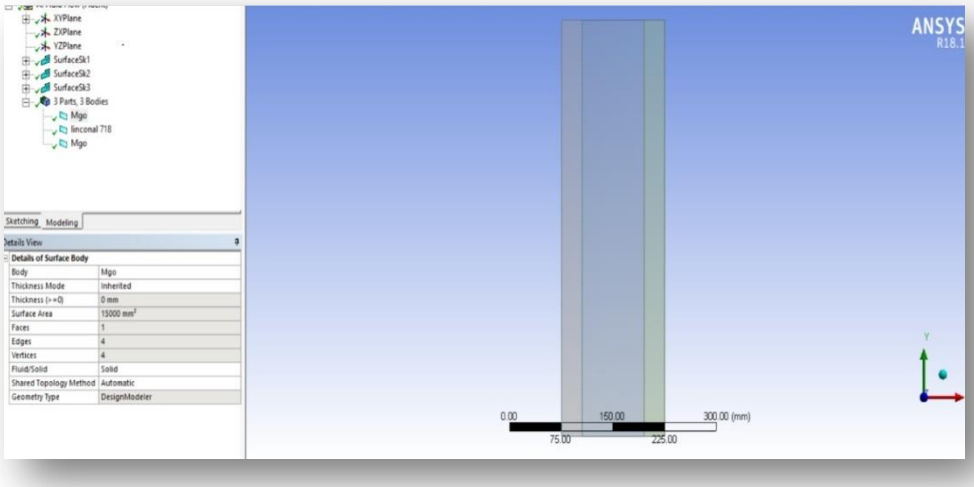


***Figure V.2 : Le** domaine d'étude*

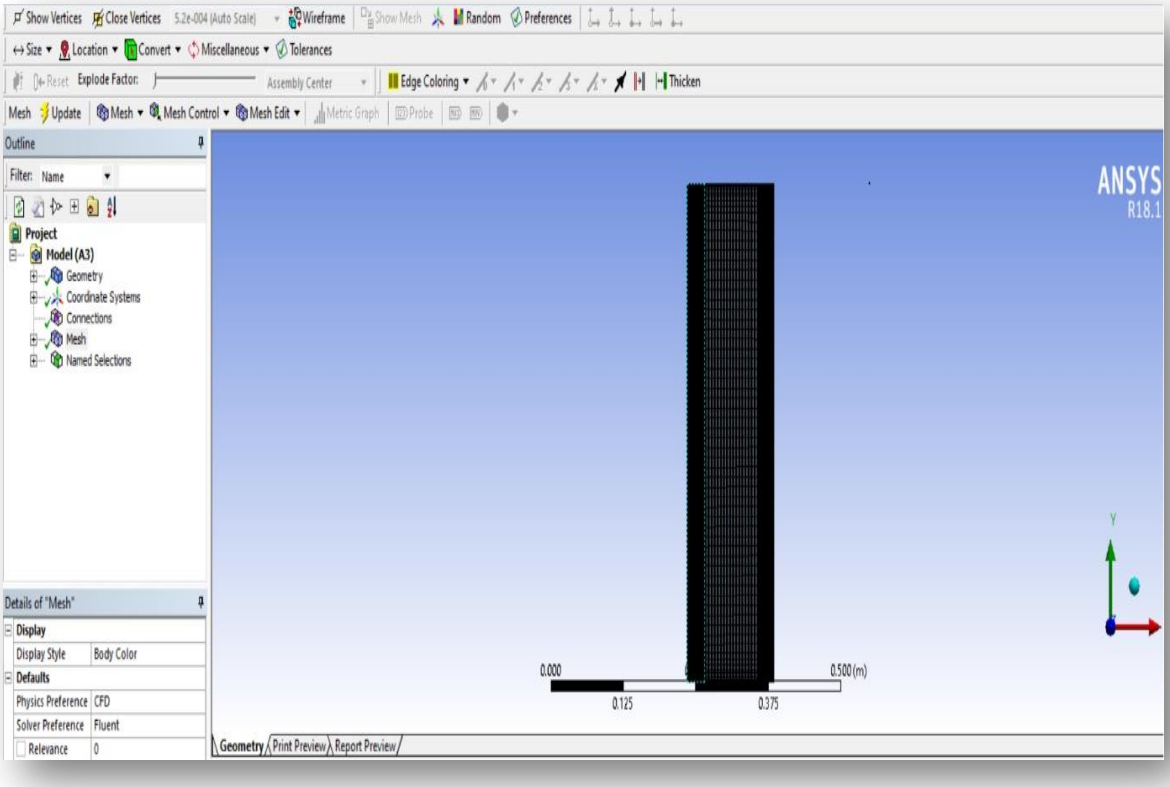


Figure V.3.a

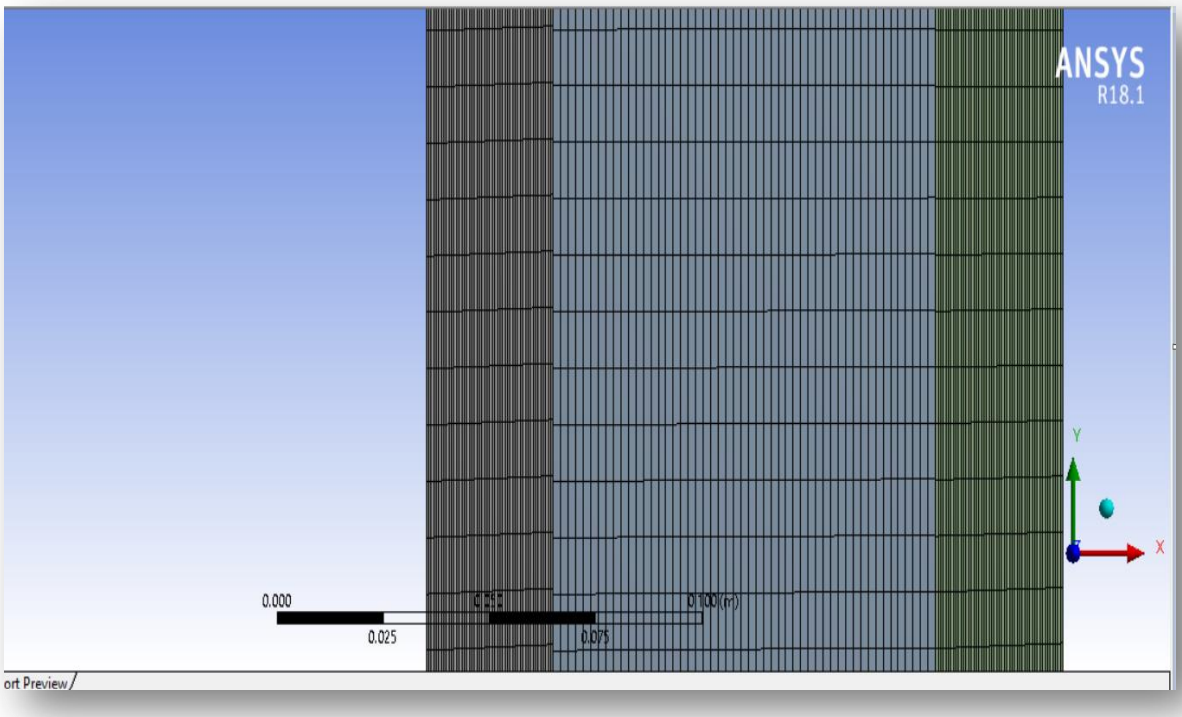


Figure V.3.b

FigureV.3. a et b*: Le maillage d'ANSYS Design Modeler et la géométrie.*

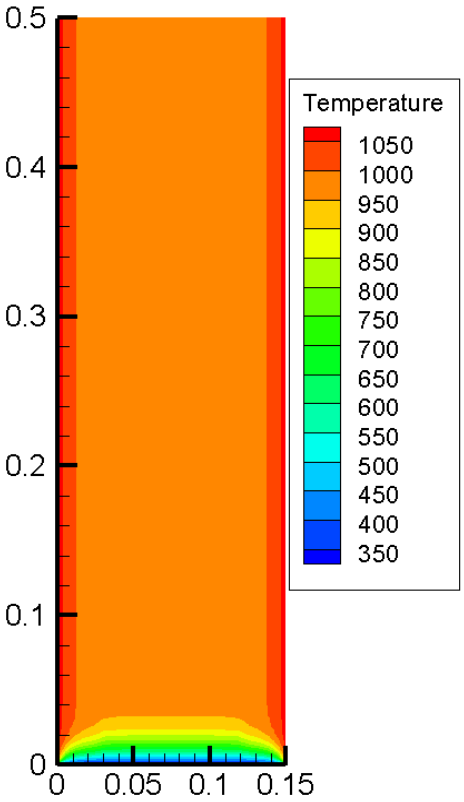


Figure V.4 : Variation *de la température dans une aube en ce moment 60.*

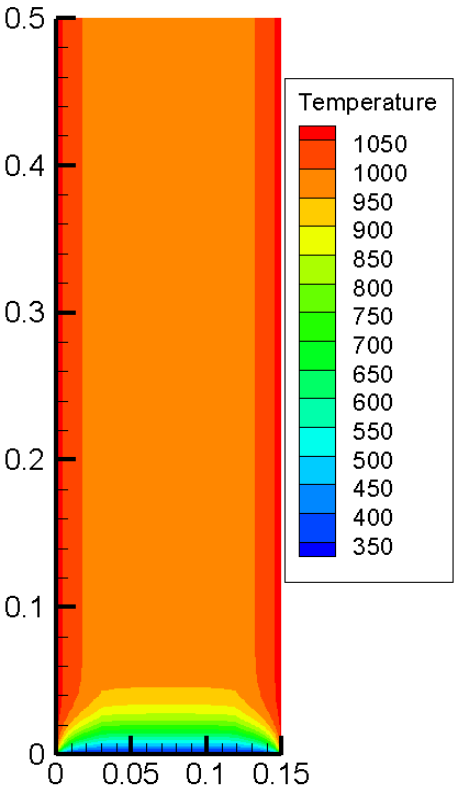


Figure V.5 : Variation *de la température dans une aube en ce moment 120.*

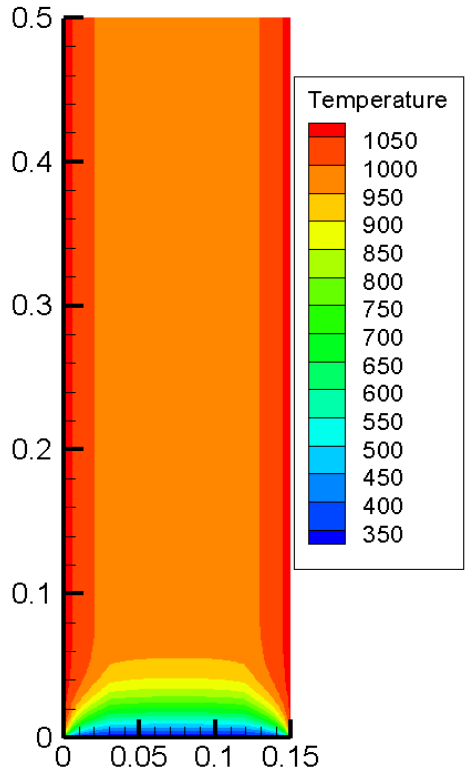


***Figure V.6 : Variation** de la température dans une aube en ce moment 180.*

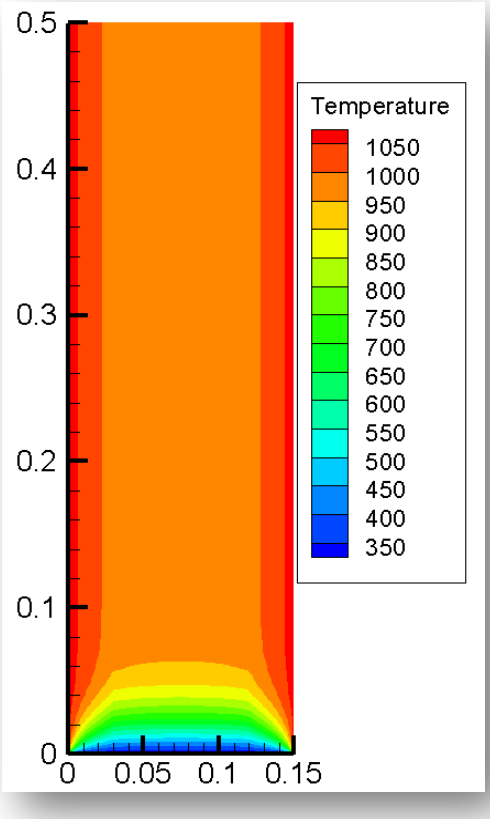


***Figure V.7 : Variation** de la température dans une aube en ce moment 240.*

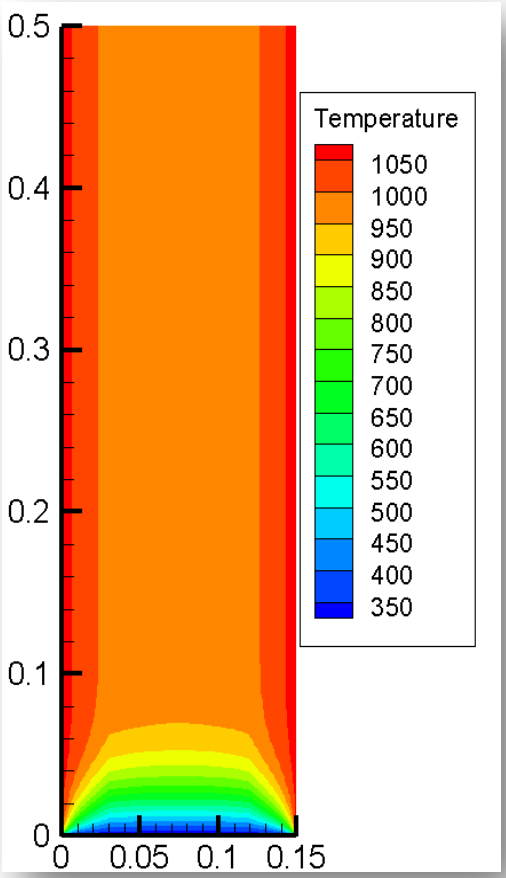


***Figure V.8 : Variation** de la température dans une aube en ce moment 300.*

V.7. Interprétation des résultats :

D'après les figures ci-dessus, vous constatez que les barrières thermiques sont celles qui contrent la contrainte thermique et assurent la protection de l'aube de la turbine à gaz.

V.8.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement l'évolution de la température dans une aube. Les calculs présentés sont réalisés avec un maillage 2D.

Après avoir montré les résultats analytiques et numériques de la diffusion de la chaleur dans une aube de la turbine à gaz avec des barrières thermiques en zircone MgO qui étaient très, très proches, nous avons assuré l'utilité de son utilisation dans la fabrication des barrières thermiques.

Conclusion générale

L'augmentation de la température de combustion améliore les performances de la turbine ce qui nécessite des matériaux résistants aux contraintes thermiques et des techniques de refroidissement très sophistiqués permettant d'augmenter de plus la température de combustion.

Donc le type de fluide, la température, le débit massique, les géométries des conduites de refroidissement, ainsi que la combinaison des techniques de transfert se sont tous des outils et techniques utilisées pour déterminer et limité la température de fonctionnement.

Dans cette mémoire nous avons simplifié notre étude, car nous avons confirmé l'efficacité de l'utilisation de la zircone (MgO) dans la fabrication de barrières thermiques, qui à son tour protège les aubes de turbine à gaz et augmente leur durée de vie. Nous avons également appris les concepts de base qui permettent l'utilisation et l'exploitation d'Ansys avec aisance dans la conception de forme géométrique dans Design Modeler, mèche, composition, solution et résultats. Puis nous avons présenté les résultats obtenus analytiquement auparavant et nous avons confirmé ces résultats uniquement.

Nomenclature

Symbole	*Désignation*	*Unité*
$\frac{\partial T}{\partial t}$	Dérivée de la température par rapport le temps	/
$\frac{\partial T}{\partial x}$	Dérivée de la température par rapport l'abscisse x	/
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	Deuxième dérivée de la température par rapport l'abscisse x au carré	/
$\propto$	Diffusive thermique	$m^2 s^{-1}$
ρ	Masse volumique	Kg/m^3
ג	Conductivité thermique des matériaux	$W/m.k$
C	Chaleur massique des matières	$J/Kg.k$
T	Température	$°C$
L	Longueur	m
L	Largeur	m
Δx	Le pas	m
Δt	Le pas	s
$\Delta+$	L'opérateur "différance à droite"	/
$\Delta-$	L'opérateur "différence à gauche.	/
Δ_0	L'opérateur "différences centrée.	/
t	Temps	s

DS	Méthodes de production de solidification directionnelle	/
SC	Méthodes de production de monocristal	/
CMC	Les composites à matrice céramique	/
SiC	Carbure de silicium	/
ZrO2	L'oxyde de zirconium	/
Y2O3	L'oxyde d'yttrium	/
β-NiAl	Aluminures de nickel	/

Référence

[1] M.Rekibi , la répartition de la température dans une aube refroidie par air dans une turbine à gaz thème de master , université mohamed khieder biskra 2020-2021.

[2] S.Daoud , contribution à l'amélioration des performances des turbines à gaz par le refroidissement de l'air à l'entrée du compresseur axial, thème de magister, université M'hamed Bougara- Boumardes 2015-2016.

[3]https://www.universalis.fr/encyclopedie/turbines-a-gaz/1 historique/#:~:text=La%20premi%C3%A8re%20turbine%20%C3%A0%20gaz,'utilise%20encore%20aujourd'hui.

[4] S.Hassani , Etude comparative entre les cycles thermodynamique dans le cadre d'augmentation les performances d'une turbine à gaz thème de master, université mohamed kheidre biskra 2020-2021.

[5] https://www.larousse.fr/encyclopedie/images/Turbine_%C3%A0_gaz/1006728.

[6] Maria J.Tinyue., «Humidi fied gas –technologie et fonctionnement ENSPM Formation industrie IFP Training 2005 ».

[7] I.NESRAOUI., «Analyse et simulation de refroidissement des AUBES d'une turbine à gaz, université KASDI MERBAH. OUARGLA ,23/05/2016.

[8] M.BEN IkHLEF Etude et renovation de la turbine à gaz MS5002C de HASSI R'MEL, thème de Mastère 2013-2014

[9] A b c d e f Koff, Bernard L. (2003). "Aperçu de la technologie des turbines à gaz - La perspective d'un concepteur". Symposium et exposition internationaux AIAA/ICAS sur l'air et l'espace : les 100 prochaines années. 14-17 juillet 2003, Dayton, Ohio. AIAA 2003-2722.

[10] A b c Flack, p. 429.

[11] Magyar, Michael J. "Annuaire des minéraux : Rhenium" (PDF). Commission géologique des États-Unis.

[12] Langston, Lee S. (16 mars 2018). "Les pales de turbines monocristallines obtiennent le statut de jalon ASME" .www.machinedesign.com . Consulté le 25 novembre 2018.

[13] Langston, Lee S. "Chaque lame un cristal unique" .www.americanscientist.org . Consulté le 25 novembre 2018.

[14] Boyce, p. 449

[15] Flack, p. 430-3

[16] Takeshi, Takashi, Kuniyuki, Ken-ichi, Masato. "Développement de pièces de turbine CMC pour moteurs d'avion" (PDF) . CS1 maint : plusieurs noms : liste des auteurs (lien)

[17] Halbig, Jaskowiak, Kiser, Zhu (juin 2013). "Évaluation de la technologie composite à matrice céramique pour les applications de moteurs à turbine d'avion" (PDF). 51e réunion des sciences aérospatiales de l'AIAA, y compris le forum New Horizons et l'exposition aérospatiale .doi : 10.2514/6.2013-539. hdl : 2060/20130010774. ISBN 978-1-62410-181-6.CS1 maint : plusieurs noms : liste des auteurs (lien)

[18] "Les composites à matrice céramique permettent aux moteurs à réaction GE de voler plus longtemps - Rapports GE". Rapports GE. Consulté le 2 novembre 2015.

[19] "GE teste avec succès le premier matériau composite à matrice céramique rotative au monde pour le moteur de combat de nouvelle génération | Communiqué de presse | GE Aviation" .www.geaviation.com . Consulté le 2 novembre 2015.

[20] M. Pierre-Yvan THERY.Adhérence de barrières thermiques pour aube de turbine avec couche de liaison β-(Ni,Pt)Al ou β-NiAl(Zr). THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER. 29 octobre 2007.

[21] S. Navéos, G. Oberlaender, Y. Cadoret, P. Josso, M.-P. Bacos, Zirconium Modified Aluminide by Vapour Pack Cementation Process for Thermal Barrier Applications: Formation Mechanisms and Properties, Materials Science Forum, 461-464 (2004) 375-382.

[22] M.-P. Bacos, S. Navéos, P. Josso, Procédé pour former sur un métal un revêtement protecteur Contenant de l'aluminium et du zirconium, Brevet N° FR2853329 ONERA/SNECMA MOTEURS(2003).

[23] Daniel DUDZINSKI, usinage de l'inconel 718 : Intégrité de surface , mesure de température et modèle analytique de fraisage périphérique, université de LORRAINE , 13 décembre 2012.

[24]https://www.ceramicsrefractories.saint-gobain.com/fr/mat%C3%A9riels/mgo-de-magn%C3%A9sie

[25] ''Etude thermodynamique, maintenance de fiabilité d'une turbine a gaz 5002c''2011.Djelfa

[26] I.BOUTAGHANE . Amélioration des performances de la Turbine à Gaz de Propane (MS 7001) du Complexe GL 1K. thèse de Master. UNIVERSITE SEDDIK BENYAHIA DE JIJEL. 2018-2019.

[27] Aboubacar Nomao Maman Toukour «augmentation de l'efficacité de la turbine a gaz de la NIGELEC en utilisant un système de refroidissement d'air d'admission», Master en ingénierie de l'eau et de l'environnement 2016, institut international d'ingénierie, Ouagadougou 01, Burkina faso.

[28] Gaz Turbine engineering handbook sacand edition by MeherwanP.Bouce.

[29] Mr. BOUAM Abdallah. Amélioration des performances des turbines à gaz utilisées dans l'industrie des hydrocarbures par l'injection de vapeur d'eau à l'amont de la chambre de combustion. THESE DE DOCTORAT. UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES. : 05 / 10 / 2009.

[30] Laboratoire de hassirmel

[31] Cohen, H., Rogers, G. F. C., and Saravanamuttoo, H. L. N., 1996, "Gas Turbine Theory", 4th Edition, Longman, London.

[32] A.M.Bassily, 2004, "Performance improvements of the inter cooledreheatrecuperated gas-turbine cycle using absorption inlet-cooling and evaporativeafter-cooling", Applied Energy, Vol. 77, pp. 249–272.

[33] Daniele FIASCHI and Giampaolo MANFRIDA, 1998, "Exergyanalysis of the semi- closedgas turbine combined cycle (SCGT/CC)", Energy Convers. Mgmt Vol. 39, No. 16-18, pp. 1643-1652.

[34] FrankDelattin, Svend Bram, Sofie Knoops, Jacques De Ruyck, 2008, "Effects of steam injection on microturbineefficiency and performance", Energy, Vol. 33, pp. 241–247.

[35] P. Chambadal, 1976, "La turbine à gaz", collectiuon de la direction des études et recherches d'éléctricité de france. Eyrolles 1976, Edition Paris.

[36] Roberto Carapellucci, Adriano Milazzo, 2007, "Repoweringcombined cycle power plants by a modified STIG configuration", Energy Conversion and Management, Vol. 48, pp: 1590–1600.

[37] Yasushi Ozawa, TomoharuFujii, ShunjiKikumoto, Mikio Sato, 1995, "Development of a low NOx catalyticcombustor for a gas turbine", CatalysisToday, vol. 26, pp. 351-357.

[38] Andrea Lazzaretto, Andrea Toffolo, 2008, "Prediction of performance and emissions of a two-shaftgas turbine fromexperimental data", Applied Thermal Engineering, S1359- 4311(08)00049-5.

[39] Foster-Pegg, R.W., 1989, "Turbo-STIG. – The Turbocharged Steam Injected Gas Turbine Cycle", ASME Paper 89-GT-100.

[40] Larson, E.D. and Williams, R.H., 1987, "Steam-Injected Gas Turbines", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 109, pp: 55–63.

[41] Tuzson, J., 1992, "Status of Steam-Injected Gas Turbines", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 114, pp: 682–686.

[42] Rice, I.G., 1995, "Steam-Injected Gas Turbine Analysis: Steam Rates", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 117, pp: 347–353.

[43] M.A. Korobitsyn, 1998, "New and Advanced Energy Conversion Technologies. Analysis of Cogeneration, Combined and Integrated Cycles", ISBN 90 365 1107 0, Cover by Anja Astapova, Amsterdam, © 1998, Printed by Febodruk BV, Enschede.

[44] Bolland, O., and Stadaas, J.F., 1995, "Comparative Evaluation of Combined Cycles and Gas Turbine Systemswith Water Injection, Steam Injection, and Recuperation", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 117, pp: 138–145.

[45] Johnke, T. and Mast, M., 2002, Power boosters – Technologies to enhance gas turbine power output on demand, Siemens Power Journal Online, May. http://www.siemens westinghouse.com/download/pool/mast_engl_3.pdf, access date Nov. 12.

[46] Anonymous, 2001, "The top hat turbine cycle", Modern Power Systems, April, 35-37.

[47] Wang, Y., Wang, G., Li S, and Sun, Y., 2002, "Analysis on effects of wet compression on surgemargin of a small gas turbina", Proc., 2002 International Joint Power Generation Conference, Phoenix, Arizona, USA, June 24-26, ASME Paper No. IJPGC, pp: 2002-26042.

[48] de Biasi, V., 2000, "LM6000 sprint design enhanced to increase power and efficiency", Gas Turbine World, 30(4), pp: 16-19.

[49] Chiesa, P., Lozza, G., Macchi, E. and Consonni, S., 1995, "An assessment of the thermodynamic performance of mixed gas-steam cycles: Part B: Water-injected and HAT cycles", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 117(3), 499-508.

[50] Tuzson, J., 1992, "Status of steam-injectedgas turbines, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power", 114(4), 682-686.

[51] MICHEL A. SAAD and DAH YU CHENG, 1997, "The new LM2500 Cheng cycle for power generation and cogeneration", Energy Convers. Mgmt, Vol. 38, No. 15-17, pp. 1637-1646.

[52] Schorr, M. M., 1992, "NOx emission control for gas turbines: A 1992 Update on Regulations and Technology", Proc., 1992 ASME Cogen-Turbo, Houston, Texas, USA, September 1-3, IGTI-Vol. 7, 1-12.

[53]M. Kadja, « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Méthodes des différen ces finies », Cours et exercices résolus. Les éditions de l'université 2000/2001.

[54] https://www.math.univ-paris13.fr/~halpern/teaching/MACS1_2010/ch5.pdf.

[55] https://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi2.pdf .

[56] D.ALILI, L'interpolation polynômiale : étude et applications,Thème de Master, Université Mohamed Boudiaf De M'sila, Promotion : 2017 / 2018. Site web :

http://dspace.univmsila.dz:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/5087/ALILI%20Dounia.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[57] http://poiret.aurelien.free.fr/Informatique/Exercices/horner/TP%20Algorithme%20Horner.pdf.

[58] K.MEBARKI1, Analyse Numérique (Cours, 2eme année licence mathématiques), Université Abderrahmane Mira de Bejaïa. Site web :

https://elearning.univ-bejaia.dz/mod/resource/view.php?id=47203.

[59] Dr HARNANE YAMINA, Méthodes numériques I « Méthodes des différences finies», Cours1ère Année Master Energétique.Université Larbi Ben M'Hidi - Oum-El-Bouaghi.Année Universitaire 2015-2016.

[60] Jean-François Burnol, L305 : ANALYSE COMPLEXE, Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006), Université Lille 1 — UFR de Mathématiques.

[61] NEGADI Chahrazad, Résolution numérique de l'équation de chaleur stationnaire à deux dimensions, Thème de Master,Université « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA,Année Universitaire 2018 – 2019.

[62] Eric Goncalvès da Silva, Méthodes et Analyse Numériques, Submitted on 18 Jan 2011, Site web :https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556967 .

[63] S.Besseghir, A.Hachani, Schéma aux différences finies pour l'équation des ondes, Mémoire de fin d'étude, Université Echahid HAMMA LAKHDAR EL OUED, Année universitaire 2018 – 2019.

[64] Méthodes numériques II (Notes de cours « Sup Galilée, Ingénieurs Energétique 1ère année »), Site web :

https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/Energetique/MethNumII/1617/MethNumII_24mai2016_lignes.pdf.

[65]A.Maher, Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement, THESE de DOCTORAT, Université Louis Pasteur de Strasbourg, Soutenue publiquement le 3 mai 2005.

[66] J.-F. Scheid, Méthodes numériques pour la dynamique des fluides, Année 2011-2012.

ملخص

يتعلق محتوى الأطروحة المنجزة بدراسة تحليلية ورقمية لعملية انتشار وتوزع الحرارة داخل شفرة التوربين الغازي مزودة بحواجز حرارية ذات طبيعة سيراميكية (MgO) قصد التأكد من نجاعة هذا النظام حيث قمنا في البداية بتقديم ونمذجة هذه الشفرة من اجل دراسة انتشار وتوزع الحرارة بداخلها تحليليا باستعمال الفروق المنتهية وفي الخطوة الثانية استخدمنا برنامج Ansys وهو برنامج رقمي قمنا من خلاله بتصميم شكل الشفرة واختيار الشبكة المناسبة مع إدخال الشروط الحدية وهذا قصد حساب درجات الحرارة داخل الشفرة.

الكلمات المفتاحية

الشفرة, الفروق المنتهية . (MgO), سيراميك حرارية, حواجز توربين,

Ressemé

Le contenu de la thèse terminée se rapporte à une étude analytique et numérique du processus de diffusion et de distribution de la chaleur dans d'aube de la turbine à gaz avec des barrières thermiques de nature céramique (MgO) pour assurer l'efficacité de ce système, nous avons d'abord introduit et modélisé ce aube afin d'étudier analytiquement la propagation et la distribution de la chaleur à l'intérieur en utilisant les différences finis et dans la deuxième étape, nous avons utilisé Ansys, un programme numérique par lequel nous avons conçu la forme du l'aube de badminton et sélectionné la mèche appropriée avec l'introduction de condition limites. Il s'agit de calculer les températures à l'intérieur de l'aube.

Les mot clé

Turbine, Barrières thermiques, Céramique (MgO), Aube, Difference fini.

Summary

The content of the completed thesis relates to an analytical and numerical study of the process of diffusion and distribution of heat in the blade of the gas turbine with ceramic thermal barriers (MgO) to ensure the efficiency of this system, we first introduced and modelled this dawn in order to analyse the propagation and distribution of heat inside using the completed differences and in the second step we used Ansys, a digital program by which we designed the shape of the badminton dawn and selected the proper wick with the introduction of boundary condition. It is a matter of calculating the temperatures inside the dawn.

Keywords

Turbine, Thermal barriers, Ceramic (MgO), Dawn, Differences finished.