

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
*Université Mohamed Khider, Biskra*  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : Analyse

**Par : Mokhtari Loubna**

**Titre :**

**Invariants Topologiques**

Devant le Jury :

Mme. Ouaar Fatima	Dr U. Biskra	Président
Mr. Bellagoun Abdelghani	Dr U. Biskra	Rapporteur
Mme. Senouci Assia	Dr U. Biskra	Examinatrice

**Soutenu Publiquement le 26/06/2022**

## Dédicace

★ Je remercie **Dieu Tout-Puissant** de m'avoir donné la capacité de surmonter les difficultés de mon parcours d'étude.

★ Je dédie ma graduation à celui qui a bu la coupe vide pour me donner une goutte d'amour, à celui qui a récolté les épines de mon chemin de la connaissance " **Mon père et Ma mère** ".

★ À mes chers frères : **Abderraouf, Ahmed et Hamza**.

★ Mes amis, qui sont les plus beaux bouquets de fleurs et les plus merveilleux parfums, et vous avez de mon cœur tout l'amour, la fidélité et l'appréciation : **ABIDALLAH WISSAL, TELLI MOUFIDA, MERHANADIJEN NADINE et CHAOUCHKHOANE SARA**.

★ À tout les enseignants du département de Mathématiques.

★ À tout mes collègues de ma promotion de Master 2 Mathématiques 2022.

*Je dédie mon diplôme et ma joie à toutes les personnes qui m'aiment* ♥

# Remerciements

*Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier mon professeur supérieur monsieur **Abdelghani Bellagoun** pour son soutien et son encouragement afin aboutir à cette recherche ainsi que les informations, les conseils et les orientations qu'il m'a accordés pour achever ce mémoire.*

*♥ J'implore Allah qu'il le récompense et exauce ses vœux ♥*

*Comme je tiens à remercier les membres de l'honorable commission composée des professeurs **Senouci Assia** et **Ouaar Fatima**.*

*Également à tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire (Ma famille) et ceux qui étaient à mon côté.*

MERCI.

# Notations et symboles

Les différentes notations et symboles utilisés tout au long de ce mémoire sont expliquées

ci-dessous :

- $\partial_n$  : L'opérateur de bord
- $C_n$  : Un complexe de chaînes
- $H_n(k)$  : Groupe d'homologie de  $k$  en degré  $n$
- $Z_n$  :  $\ker$  de  $\partial_n$
- $B_n$  :  $Im$  de  $\partial_{n+1}$
- $C_k$  : Les cas chaînes de  $k$
- $S^1$  : Cercle

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	i
<b>Remerciements</b>	ii
<b>Notations et symboles</b>	iii
<b>Table des matières</b>	iv
<b>Table des figures</b>	vi
<b>Liste des tableaux</b>	viii
<b>Introduction</b>	1
<b>1 Introduction à l'homologie</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Complexes simpliciaux</b> . . . . .	3
<b>1.1.1 CW-complexes</b> . . . . .	6
<b>1.2 Homologie des complexes simpliciaux</b> . . . . .	12
<b>1.2.1 Homologie : cas mod 2</b> . . . . .	12
<b>1.2.2 Homologie : cas général</b> . . . . .	15

<b>2 Invariants Topologiques</b>	<b>18</b>
2.1 La caractéristique d'Euler	18
2.1.1 La formule d'Euler pour les polyèdres sphériques	19
2.1.2 Caractéristique d'Euler d'une surface	20
2.1.3 Caractéristique d'Euler d'une somme connexe	21
2.1.4 Invariants topologiques et surfaces triangulées	23
2.2 Nombres de Betti	29
2.2.1 L'algèbre des chaînes	29
2.2.2 L'homologie	32
2.2.3 Les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler-Poincaré	33
<b>3 Calcul de certains invariants topologiques</b>	<b>36</b>
3.1 La caractéristique d'Euler	36
3.1.1 Équivalence des surfaces	36
3.1.2 Homéomorphisme de Surfaces	39
3.2 Le nombre de Betti	42
3.2.1 Complexe simplicial	42
3.2.2 Homologie d'un complexe simplicial	43
3.2.3 Calcul des nombres de Betti sur un exemple	44
<b>Conclusion</b>	<b>52</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

# Table des figures

1.1 Exemple des simplexe.	3
1.2 Un 3-simplexe.	4
1.3 Complexe simplicial.	5
1.4 Triangulations d'un carré.	5
1.5 Triangulation du tore.	6
1.6 Un CW-complexe de dimension 1.	7
1.7 Un CW-complexe de dimension 2.	8
1.8 Un triangle comme CW-complexe de dimension 2.	9
1.9 Réunion d'un point et un segment.	11
1.10 L'addition de deux chaînes sur $S^2$ .	13
2.1 Un polyèdre sphérique à 30 sommets, 60 arêtes et 32 faces.	19
2.2 Un polyèdre homéomorphe au tore, avec 21 sommets, 63 arêtes et 42 faces.	20
2.3 Illustration de la somme connexe.	22
2.4 Situations interdites.	24
2.5 le tétraèdre et l'octaèdre.	25
2.6 L'icosaèdre.	25

<a href="#">2.7 Une triangulation de la sphère.</a>	26
<a href="#">2.8 <math>\Sigma_1</math> est plus fine que <math>\Sigma_2</math>.</a>	26
<a href="#">2.9 <math>\chi_{S_1} = \chi_{S_2}</math>.</a>	28
<a href="#">2.10 Cas de la sphère <math>\chi(\mathbb{S}^2) = 2</math>.</a>	28
<a href="#">2.11 Complexe du Tore.</a>	29
<a href="#">2.12 Orientation d'un triangle.</a>	29
<a href="#">2.13 Le complexe <math>K</math> sur la sphère.</a>	32
<a href="#">3.1 Surface.</a>	36
<a href="#">3.2 Cube.</a>	37
<a href="#">3.3 Polygone.</a>	37
<a href="#">3.4 Cube.</a>	38
<a href="#">3.5 Un homéomorphisme du tore vers le verre.</a>	39
<a href="#">3.6 La sphère <math>S^2</math> et le tore <math>T^2</math>.</a>	39
<a href="#">3.7 Cube.</a>	40
<a href="#">3.8 La sphère et la tétraèdre.</a>	41
<a href="#">3.9 Schéma montrant comment le raffinement.</a>	42
<a href="#">3.10 Le simplexe.</a>	45
<a href="#">3.11 <math>S^1</math>.</a>	46
<a href="#">3.12 <math>S^1 \vee S^1</math>.</a>	47
<a href="#">3.13 <math>S^2</math>.</a>	47

# Liste des tableaux

2.1	Les cas possibles de la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces dans	
	$R^3$ .....	28

# Introduction

En mathématiques, l'homologie est d'une manière générale, une association entre une séquence d'objets algébriques tels que des groupes abéliens ou des modules à d'autres objets mathématiques tels que des espaces topologiques. A l'origine, les groupes d'homologie ont été définis dans la topologie algébrique. Des constructions similaires sont disponibles dans beaucoup d'autres contextes, tels que l'algèbre abstraite, les groupes, les algèbres de Lie, la théorie de Galois et la géométrie algébrique .[\[1\]](#)

Au début, pour définir les groupes d'homologie c'était de voir que deux formes peuvent être différenciées en examinant leurs trous. Par exemple, un cercle n'est pas un disque car le cercle est perforé alors que le disque est plein et la sphère n'est pas un cercle car la sphère renferme un trou bidimensionnel alors que le cercle renferme un trou unidimensionnel. L'homologie était à l'origine, un procédé mathématique pour définir et classer les trous dans une variété. En gros, un cycle est une sous-variété fermée, une limite est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété et une classe d'homologie (qui représente un trou) est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite. Une classe d'homologie est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété : le cycle représente un trou, à savoir une variété hypothétique dont la limite serait ce cycle.

Il existe de nombreuses théories d'homologie [\[2\]](#), [\[3\]](#), [\[4\]](#) et [\[5\]](#). Un type parti-

culier d'objet mathématique, tel qu'un espace topologique ou un groupe, peut avoir une ou plusieurs théories d'homologie associées et cela lorsque l'objet sous-jacent a une interprétation géométrique, à l'instar des espaces topologiques. La plupart des groupes d'homologie peuvent être formulés en tant que foncteurs dérivés sur des catégories abéliennes appropriées, en mesurant l'incapacité d'un foncteur à être exact. Dans cette perspective, les groupes d'homologie sont déterminés par des objets d'une catégorie dérivée.

# Chapitre 1

## Introduction à l'homologie

### 1.1 Complexes simpliciaux

Pour définir les complexes simpliciaux, nous allons avoir besoin de la notion de simplexe.

Soit  $k \leq n$  deux entiers positifs ou nuls. [6]

**Définition 1.1.1** On appelle simplexe dans  $\mathbb{R}^n$  l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide  $\{A_0, \dots, A_n\}$  de points affinement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.1.1** Un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe est un segment, et un 2-simplexe est un triangle. Pour un  $k$ -simplexe, on dit que sa dimension est  $k$ .



FIG. 1.1 – Exemple des simplexe.

► Si on ne veut pas préciser la dimension, on parle simplement de simplexe. Il est commode de considérer l'ensemble vide comme  $(-1)$ -simplexe.

► Si  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  est un  $k$ -simplexe obtenu comme enveloppe convexe de points  $x_0, \dots, x_k$  et si  $L$  est un sous-ensemble de  $\{x_0, \dots, x_k\}$ , alors l'enveloppe convexe des éléments de  $L$  est une face de  $\sigma$  (cette face est elle-même un  $l$ -simplexe, où  $l + 1$  est le cardinal de  $L$ ).

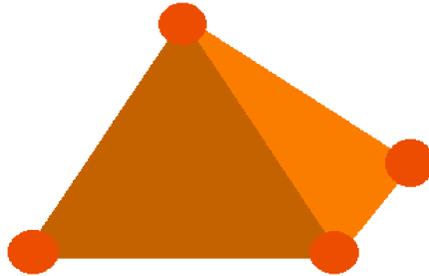


FIG. 1.2 – Un 3-simplexe.

**Définition 1.1.2** *Un complexe simplicial géométrique dans  $\mathbb{R}^n$  est une collection  $\kappa$  de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant les conditions suivantes :*

- ◆ toute face d'un simplexe de la collection est aussi dans la collection ;
- ◆ l'intersection de deux simplexes quelconques de la collection est une face commune des deux simplexes considérés (cette face peut être vide) ;
- ◆ pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $U$  ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de  $K$ .

Le support  $|\kappa|$  de  $\kappa$  est la réunion de tous les simplexes de  $\kappa$ . La dimension de  $\kappa$  est le maximum des dimensions de simplexes de  $\kappa$  (la dimension peut être infinie).

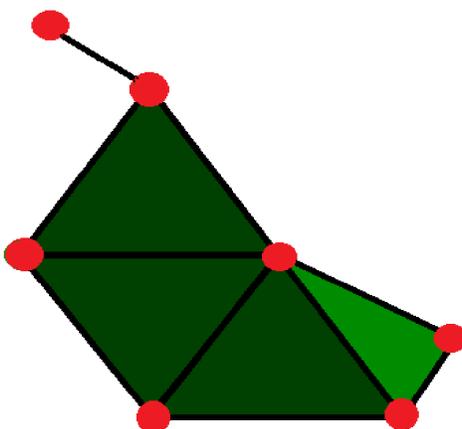


FIG. 1.3 – Complexe simplicial.

Si un espace topologique  $X$  admet un homéomorphisme  $\Phi : |\kappa| \rightarrow X$  pour un certain complexe simplicial géométrique  $\kappa$ , le choix d'un tel complexe simplicial géométrique  $\kappa$  et d'un tel homéomorphisme  $\Phi$  introduit une structure de complexe simplicial sur  $X$ . Parfois, on dit qu'une telle pair  $(\kappa, \Phi)$  est une triangulation de  $X$ . Pour tout  $k$ -simplexe de  $\kappa$ , l'image de ce  $k$ -simplexe par  $\Phi$  s'appelle  $k$ -simplexe de la triangulation de  $X$ .

Les figures ci-dessous donnent trois exemples d'une triangulation d'un carré (chacun des trois dessins montre les images des simplexes d'un complexe simplicial géométrique).

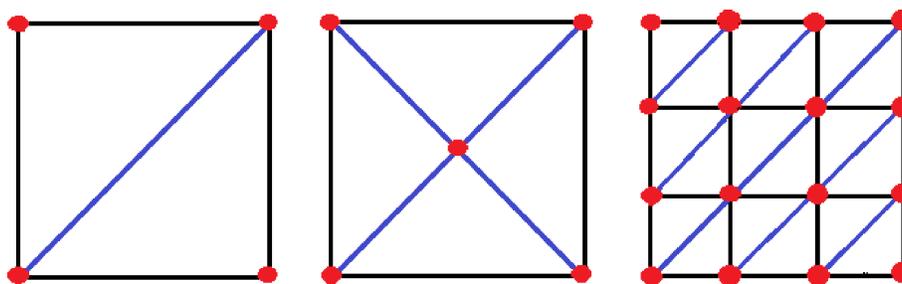


FIG. 1.4 – Triangulations d'un carré.

Si on identifie les côtés opposés du carré pour obtenir un tore, seulement un de ces trois exemples fournit les images de simplexes pour une certaine triangulation du tore.

Une autre triangulation du tore  $S^1 \times S^1$  est représentée sur la figure suivante :

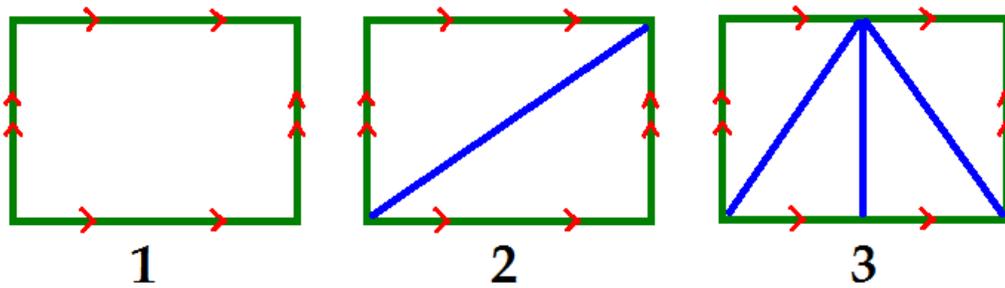


FIG. 1.5 – Triangulation du tore.

Toute surface topologique compacte admet une triangulation ayant un nombre fini de simplexes, en effet toute surface topologique connexe et compacte est homéomorphe soit à une des surfaces  $S_n$ . [6]

### 1.1.1 CW-complexes

Rappel des définitions classiques. [7]

**Définition 1.1.3** La sphère de dimension  $n$  est :

$$S^n = \{x \in R^{n+1} : \|x\| = 1\}. \quad (1.1)$$

En particulier  $S^0 = \{-1; 1\} \subset R$ .

La boule de dimension  $n$  est :

$$B^n = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}. \quad (1.2)$$

Un espace topologique quelconque qui est homéomorphe à  $B^n$  est appelé une cellule de dimension  $n$ , ou plus simplement une  $n$ -cellule. Une 0-cellule est un espace réduit à

un point.

Maintenant nous allons définir les CW-complexes. Ce sont les espaces les plus simples possibles. Avant de donner une définition formelle, on peut simplifier l'idée sous la forme suivante : Un CW-complexe est un espace obtenu en collant ensemble des cellules en basses dimensions :

↔ Un CW-complexe de dimension 0 est un ensemble fini, muni de la topologie discrète ;

↔ Un CW-complexe de dimension 1 est obtenu en attachant des 1-cellules (donc des segments) à un complexe de dimension 0, et ressemble donc à un “graphe” ;

↔ Un CW-complexe de dimension 2 est obtenu en attachant des 2-cellules (donc des espaces homéomorphes à des disques, ou à des triangles) à un complexe de dimension 1, et on peut penser au bord d'un polyèdre par exemple ;

↔ etc...

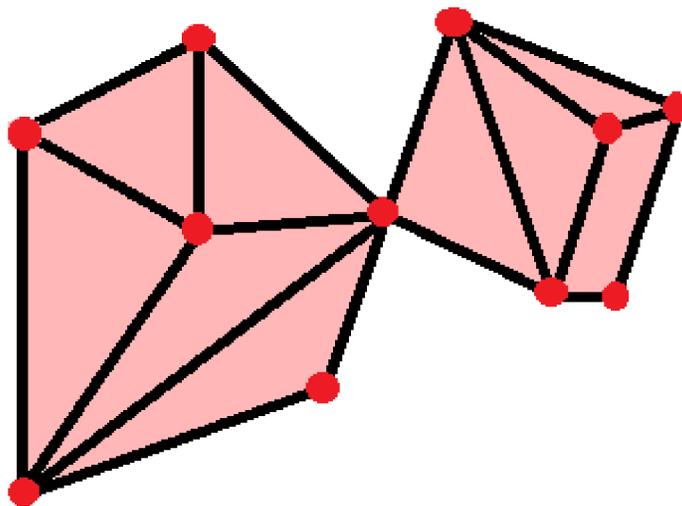


FIG. 1.6 – Un CW-complexe de dimension 1.

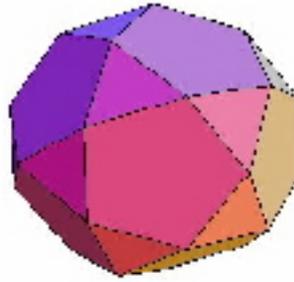


FIG. 1.7 – Un CW-complexe de dimension 2.

Passons à la définition. Notez qu'en réalité, un CW-complexe est un objet combinatoire  $\mathfrak{X}$  qui permet de construire un espace topologique  $X = |\mathfrak{X}|$ , mais en pratique et par abus de langage, on parle d'un CW-complexe comme d'un espace.

On procède par récurrence sur la "dimension".

**Définition 1.1.4** *Un CW-complexe (fini) de dimension 0 est un ensemble (fini)  $\mathfrak{X}$ . Lorsque l'on voit  $\mathfrak{X}$  comme un espace topologique (avec la topologie discrète), on écrit plutôt  $|\mathfrak{X}|$ .*

Supposons que l'on ait défini la notion de CW-complexe (fini) de dimension  $n$ .

Un CW-complexe (fini)  $\mathfrak{X}$  de dimension  $n + 1$  est la donnée de :

1. Un CW-complexe (fini)  $\mathfrak{X}_n$  de dimension  $n$  que l'on appelle le  $n$ -squelette de  $\mathfrak{X}$  ; on suppose qu'un espace topologique  $|\mathfrak{X}_n|$  a également été défini par récurrence.
2. Un ensemble (fini)  $J = J_{n+1}$  d'indices, et pour chaque  $j \in J$  une application continue  $f_j : S^n \longrightarrow |\mathfrak{X}_n|$ .

La réalisation topologique de  $\mathfrak{X}$ , notée  $|\mathfrak{X}|$ , est obtenue comme suit. Soit  $X_n = |\mathfrak{X}_n|$ , et soit :

$$Y = \coprod_{j \in J} B_j^{n+1}. \tag{1.3}$$

une union disjointe de  $n + 1$ -boules ; on voit :

$$A \coprod_{j \in J} S_j^n \tag{1.4}$$

comme un sous-espace fermé de  $Y$ , et  $f = \coprod f_j$  comme une application  $A \longrightarrow X_n$ .

L'espace  $|\mathfrak{X}|$  est alors  $X_n \cup_f Y$ . (On a donc bien attaché les cellules  $B_j^{n+1}$  sur l'espace  $X_n$ , à l'aide des application  $f_j$  qui sont définies sur le bord des cellules, et qui indiquent où l'on doit attacher ce bord).

Notons qu'il y a une application continue  $p : X_n \coprod Y \longrightarrow |\mathfrak{X}|$ . Il est facile de voir que  $X_n = |\mathfrak{X}_n|$  s'identifie à un sous-espace fermé de  $|\mathfrak{X}|$  par cette application.

D'autre part, l'image de  $B_j^n$  par  $p$ , qui est une partie fermée de  $|\mathfrak{X}|$ , est appelée la  $j$ -ème cellule de dimension  $n + 1$  de  $|\mathfrak{X}|$ . On la notera souvent  $\sigma_j$ .

Observons que  $|\mathfrak{X}|$  est la réunion de son  $n$ -squelette  $|\mathfrak{X}_n|$  et de ses  $n + 1$ -cellules.

Il y a une exception pour les 0-cellules : ce sont par définition les points qui forment le 0-squelette. [\[7\]](#)

**Exemple 1.1.2** *A l'aide de trois 0-cellules, trois 1-cellules, et une 2-cellule, on obtient un triangle (plein). Le 0-squelette est  $X_0 = \{a, b, c\}$ . On va prendre :*

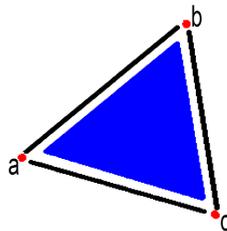


FIG. 1.8 – Un triangle comme CW-complexe de dimension 2.

trois 1-cellules, et pour des raisons évidentes on va les appeler  $B_{ab}^1, B_{bc}^1, B_{ac}^1$  (dans les cotations ci-dessus, l'ensemble  $J_1$  a trois éléments). L'application :

$$f_{ab} : S_{ab}^0 \longrightarrow \{a, b\} \subset X_0. \quad (1.5)$$

envoie  $-1$  sur  $a$  et  $1$  sur  $b$  (on voit  $S_{ab}^0$  comme le bord de  $B_{ab}^1$ ). Les définitions de  $f_{bc}$  et  $f_{ac}$  sont similaires.

Le 1-squelette  $X_1$  est alors le bord d'un triangle ; fixons un homéomorphisme  $g : S^1 \longrightarrow X_1$ .

On prend une seule 2-cellule  $B^2$ , et on prend  $g$  comme l'application correspondante (cette fois  $J_2$  a un seul élément). On voit tout de suite que  $X_2 = |\mathfrak{X}_2|$  s'obtient à partir d'un disque  $B^2$  en attachant son bord (qui est un cercle) sur un autre cercle via l'homéomorphisme  $g$ . Clairement  $|\mathfrak{X}_2|$  est alors lui-même homéomorphe à  $B^2$ . Cependant vu le choix des cellules, on voit plutôt  $|x|$  comme un triangle plein.

**Exemple 1.1.3** *Nous allons définir un CW-complexe  $\mathfrak{X}$  dont la construction est homéomorphe au disque unité dans le plan complexe (donc homéomorphe au triangle plein de l'exemple précédent). Ce complexe va être de dimension 2, avec une cellule et une seule dans chaque dimension.*

Commençons donc par le 0-squelette  $\mathfrak{X}_0$ . Il se réduit à un point  $x$ . Ainsi  $|\mathfrak{X}_0| = \{x\}$ .

Passons au 1-squelette  $\mathfrak{X}_1$ . On se donne une seule application :

$$f : S^0 \longrightarrow \{x\}. \quad (1.6)$$

qui est évidemment constante. Pour obtenir  $|\mathfrak{X}_1|$ , on part de l'union d'un intervalle  $B^1$  et d'un point, et on attache les extrêmités de l'intervalle sur le point.

Donc  $|\mathfrak{X}_1|$  est homéomorphe à un cercle :

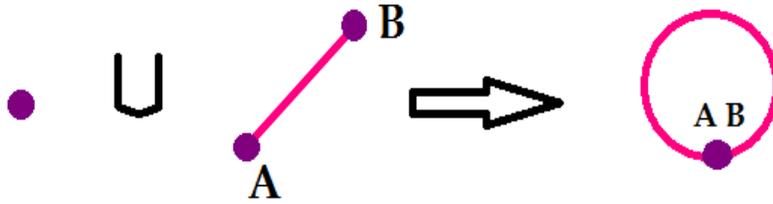


FIG. 1.9 – Réunion d'un point et un segment.

Fixons un homéomorphisme  $g : S^1 \longrightarrow |\mathfrak{X}_1|$ . On prend  $g$  comme seule application pour construire le 2-squelette  $\mathfrak{X}_2$ . Comme dans l'exemple précédant, on conclut que l'espace obtenu est un disque.

Ces deux exemple montrent qu'un espace donné (ici le disque) peut être obtenu comme la réalisation de CW-complexe différents.

Notons aussi qu'à la fin, on a montré que  $B^2$ , qui est une 2-cellule, est aussi la réalisation topologique d'un CW-complexe. Ceci va nous permettre, dans le chapitre suivant, de faire des calculs avec  $B^2$ .

**Exemple 1.1.4** [7] *Voici un autre exemple. On prend le même 1-squelette, et on attache une 2-cellule par l'application :*

$$S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1 \xrightarrow{g} |\mathfrak{X}_1|. \quad (1.7)$$

C'est un CW-complexe bien défini, et il est plutôt difficile de faire un dessin, même pour  $n = 2$ !

**Exemple 1.1.5** *Soit  $X$  un tétraèdre (creux). On peut facilement trouver un CW-complexe  $\mathfrak{X}$  tel que  $|\mathfrak{X}| = X$  ; en l'occurrence, on peut prendre  $\mathfrak{X}$  avec 4 points (0-cellules), 6 segments (1-cellules), et 4 faces (2-cellules).*

On va s'intéresser tout particulièrement à certains CW-complexe, dit "réguliers", pour lesquels les applications  $f_j$  sont régulières et souples. Typiquement, le CW-complexe de (1.1.4) n'est pas régulier. Ceux des exemple (1.1.3) et (1.1.5) sont réguliers.

Il serait bien trop fort d'exiger que  $f_j$  soit un homéomorphisme. La bonne définition va faire intervenir la notion d'homotopie. [7]

## 1.2 Homologie des complexes simpliciaux

### 1.2.1 Homologie : cas mod 2

**Définition 1.2.1** Soit  $(V, K)$  un complexe simplicial et  $n$  un entier. On note  $C_n(K, F_2)$  le  $F_2$ -espace vectoriel libre sur l'ensemble des simplexes de dimension  $n$  dans  $K$ . On l'appelle l'espace des chaînes de degré  $n$  à coefficients dans  $F_2$ .

Notez qu'on a  $C_n(K, F_2) = 0$  pour  $n < 0$  ou pour  $n > \dim K$ .

Pour abrégé, on écrit simplement  $C_n(K)$  voire  $C_n$  si le complexe que l'on considère est évident à un moment donné.

**Exemple 1.2.1** Prenons  $\mathbb{S}^1$ . Alors il y a trois simplexes de dimension 1 (des arêtes), à savoir  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 0\}$ . Une chaîne de degré 1, c'est-à-dire un élément de  $C_1(\mathbb{S}^1, F_2)$ , est donc une somme formelle de la forme :

$$\lambda_0\{1, 2\} + \lambda_1\{0, 2\} + \lambda_2\{0, 1\} \tag{1.8}$$

avec  $\lambda_i = 0$  ou 1. On peut penser à une chaîne, de manière intuitive, comme à un sous-complexe (même si formellement ça n'est pas la même chose) : par exemple  $\{0, 1\} + \{1, 2\}$  peut se représenter comme l'union de deux des trois arêtes.

L'addition correspond alors à la différence symétrique des complexes (c'est-à-dire l'opération  $A\Delta B := A \cup B - A \cap B$  que vous avez sans doute déjà rencontrée). Voir la figure (1.8) pour un exemple non trivial d'addition de deux chaînes sur  $\mathbb{S}^2$ .

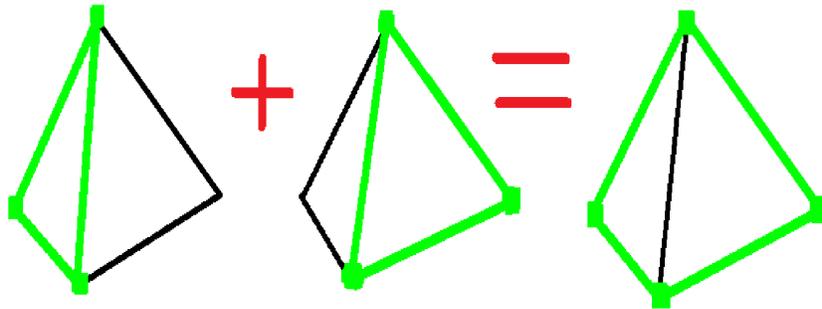


FIG. 1.10 – L'addition de deux chaînes sur  $\mathbb{S}^2$ .

**Définition 1.2.2** On définit l'opérateur bord  $\partial_n : C_n(K, F_2) \longrightarrow C_{n-1}(K, F_2)$  en spécifiant sa valeur sur chaque simplexe  $\sigma$  :

$$\partial_n \sigma = \sum_{v \in \sigma} (\sigma \setminus \{v\}). \quad (1.9)$$

**Exemple 1.2.2** En revenant à l'exemple de  $\mathbb{S}^1$ , on a :

$$\partial_1 \{0, 1\} = \{0\} + \{1\}. \quad (1.10)$$

Souvent on écrit  $\partial$  au lieu de  $\partial_n$  lorsque le  $n$  est évident. Par exemple, voici un autre calcul :

$$\partial(\{0, 1\} + \{1, 2\} + \{2, 0\}) = 2(\{0\} + \{1\} + \{2\}) = 0. \quad (1.11)$$

car  $2 = 0$ .

**Lemme 1.2.1** *Soit  $\sigma$  un simplexe de dimension  $n$ , alors :*

$$\begin{aligned}
 \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left( \sum_{v \in \sigma} \sigma \setminus \{v\} \right) \\
 &= \sum_{v \in \sigma} \sum_{w \in \sigma \setminus \{v\}} \sigma \setminus \{v, w\} \\
 &= 2 \sum_{\{v, w\} \subset \sigma} \sigma \setminus \{v, w\} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

car  $2 = 0$ .

**Définition 1.2.3** *Posons  $Z_n = Z_n(K, F_2) = \ker(\partial_n)$ , le groupe des cycles en degré  $n$ , et  $B_n = B_n(K, F_2) = \text{Im}(\partial_{n+1})$ , le groupe des bords en degré  $n$ .*

**Définition 1.2.4** *Puisque  $B_n \subset Z_n$  d'après le lemme précédent, on peut poser :*

$$H_n(K, F_2) = Z_n/B_n. \tag{1.13}$$

le groupe d'homologie (simpliciale) de  $K$  en degré  $n$ .

Le nombre  $\beta_n = \dim H_n(K, F_2)$  s'appelle le nombre de Betti de  $K$  en dimension  $n$ .

**Exemple 1.2.3** *Prenons  $K = \mathbb{S}^1$ , et calculons son  $H_1$ . Puisqu'il s'agit là d'un complexe de dimension 1, on a  $H_1 = Z_1 = \ker(\partial_1)$ . En prenant la base  $\{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1\}$  pour  $C_1$  et  $\{0\}, \{1\}, \{2\}$  pour  $C_0$ , la matrice de  $\partial_1$  est :*

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0
 \end{pmatrix}.$$

On calcule immédiatement que le noyau est de dimension 1, engendré par  $\{1, 2\} + \{0, 3\} + \{0, 1\}$ . On résume la situation en écrivant :

$$H_1(\mathbb{S}^1, F_2) = F_2. \quad (1.14)$$

Si on regarde maintenant  $\Delta^2$ , il s'agit presque du même complexe sauf que l'on a un simplexe de dimension 2, à savoir  $\sigma = \{0, 1, 2\}$ . Donc  $C_2(\Delta^2)$  est de dimension 1, engendré par  $\sigma$ . Par ailleurs :

$$\partial_\sigma = \{1, 2\} + \{0, 3\} + \{0, 1\}. \quad (1.15)$$

Dans ce cas, on a donc  $B_1(\Delta^2) = Z_1(\Delta^2) =$  l'espace engendré par  $\{1, 2\} + \{0, 3\} + \{0, 1\}$ .

On en conclut que :

$$H_1(\Delta^2, F_2) = 0. \quad (1.16)$$

## 1.2.2 Homologie : cas général

Soit  $k$  un anneau commutatif quelconque (avec  $k = F_p$  ou  $k = Z$ ).

On veut définir l'homologie à coefficient dans  $k$ , et nous commençons par des commentaires intuitifs. En travaillant modulo 2, le bord d'un simplexe  $\sigma = \{v_0, v_1, v_2\}$  de dimension 2, c'est-à-dire  $\partial\sigma$ , était défini comme  $\{v_0, v_1\} + \{v_1, v_2\} + \{v_2, v_0\}$ . C'est, en gros, ce qu'on a appelé le bord au sens intuitif, « en tant qu'ensemble ». On pourrait affiner la définition du bord « comme une courbe », avec un sens de parcours.

Utilisons la notation  $\langle v_i, v_j \rangle$  pour désigner « l'arête  $\{v_i, v_j\}$  parcourue de  $v_i$  vers  $v_j$  », et la notation  $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$  pour « le triangle  $\{v_0, v_1, v_2\}$  orienté de sorte que le sens direct (trigonométrique) aille de  $v_0$  à  $v_1$  à  $v_2$ , et puis de nouveau à  $v_0$  ». On a alors envie de

dire que le bord du triangle est :

$$\partial\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_0 \rangle. \quad (1.17)$$

Vient ensuite une idée très algébrique : un simplexe n'a que deux orientations possibles, finalement, de même qu'un espace vectoriel n'a que deux orientations, et on trouverait naturel que, formellement, on ait des relations telles que  $\langle v_i, v_j \rangle = -\langle v_j, v_i \rangle$ . En gros, remplacer les orientations par de simples signes paraît séduisant. La formule ci-dessus deviendrait :

$$\partial\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle. \quad (1.18)$$

**Lemme 1.2.2** *Soit  $K$  un complexe simplicial et  $n$  un entier. Il existe un homomorphisme*

$$\partial_n : C_n(K, k) \longrightarrow C_{n-1}(K, k) \quad (1.19)$$

tel que

$$\partial_n \langle v_0, \dots, v_n \rangle = \sum_i (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle. \quad (1.20)$$

pour chaque simplexe orienté  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ .

**Preuve.** [8] On pose

$$\tilde{\partial}_n \langle v_0, \dots, v_n \rangle = \sum_i (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle. \quad (1.21)$$

ce qui donne un homomorphisme bien défini  $\tilde{C}_n(K, k) \longrightarrow C_{n-1}(K, k)$ , et il nous faut vérifier que :

$$\tilde{\partial}_n \langle v_0, \dots, v_n \rangle = \varepsilon(s) \tilde{\partial}_n \langle v_{s(0)}, \dots, v_{s(n)} \rangle. \quad (1.22)$$

pour toute permutation  $s$ . Comme le groupe symétrique est engendré par les transpo-

sitions  $(j, j + 1)$ , ce que nous allons vérifier c'est que pour tout  $j$  on a l'identité :

$$\tilde{\partial}_n(v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) = -\tilde{\partial}_n(v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n). \quad (1.23)$$

Pour  $i < j$  on a bien sûr

$$(-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle = -(-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n \rangle. \quad (1.24)$$

par les propriétés du symbole  $\langle \rangle$ . De même pour  $i > j + 1$ . Il reste deux termes dans la définition de  $\tilde{\partial}_n(v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$  qu'il faut considérer ensemble, pour  $i = j$  et  $i = j + 1$ , donc écrivons :

$$\begin{aligned} & (-1)^j \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n \rangle + (-1)^{j+1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_{j+1}, \dots, v_n \rangle \\ &= -(-1)^j \langle v_0, \dots, \hat{v}_{j+1}, \dots, v_n \rangle - (-1)^{j+1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

une identité tautologique mais qui montre que les deux membres de (1.23) sont opposés.

■

**Lemme 1.2.3** *On a  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .*

**Preuve.** Nous calculons :

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n \langle v_0, \dots, v_n \rangle &= \sum_i (-1)^i \partial_{n-1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle \\ &\quad + \sum_i \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^{j-1} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

puisque les termes s'annulent deux à deux. ■

# Chapitre 2

## Invariants Topologiques

### 2.1 La caractéristique d'Euler

Dans ce chapitre on commence par illustrer un invariant topologique des surfaces : la caractéristique d'Euler-Poincaré. L'invariant permet de montrer que les surfaces ne sont pas homéomorphes lorsque les genres  $g_1 \neq g_2$ .

La caractéristique d'Euler-Poincaré fait l'objet d'une présentation plus approfondie en l'homologie.

**Définition 2.1.1** *Un invariant topologique est un objet associé à une variété (le plus souvent un nombre ou un groupe), qui est invariant par homéomorphisme (c'est-à-dire que la valeur de cet invariant est la même pour deux variétés homéomorphes), et qu'on peut dans la plus part des cas les calculer explicitement. Si ce calcul donne des résultats différents sur deux variétés  $M_1$  et  $M_2$ , ce qui prouve que ces deux variétés ne sont pas homéomorphes. Le but de la topologie algébrique est d'élaborer des invariants topologiques [9].*

Le calcul d'un invariant topologique pourrai donner la même chose sur deux varié-

tés qui ne sont pas homéomorphes. La dimension d'une variété, par exemple, est un invariant topologique, mais ça ne risque pas de nous aider à distinguer les surfaces.

Dans ce paragraphe, nous présentons un invariant topologique plus fin, qui permet de distinguer les surfaces orientables.

### 2.1.1 La formule d'Euler pour les polyèdres sphériques

**Définition 2.1.2** *Considérons un polyèdre homéomorphe à la sphère de dimension 2 (c'est par exemple le cas pour tout polyèdre convexe). Soit  $S$ ,  $A$  et  $F$  le nombre de sommets, arêtes et faces de ce polyèdre. Un célèbre théorème d'Euler affirme alors que*

$$S - A + F = 2. \tag{2.1}$$

*et ce quelque soit le polyèdre.*

On peut appliquer cette formule sur le polyèdre ci-contre, qui a 30 sommets, 60 arêtes et 32 faces (il s'agit d'un icosaèdre).[\[10\]](#)



FIG. 2.1 – Un polyèdre sphérique à 30 sommets, 60 arêtes et 32 faces.

## 2.1.2 Caractéristique d'Euler d'une surface

**Théorème** Soit  $\Sigma$  une surface compacte. Notons  $S$ ,  $A$ ,  $F$  le nombre de sommets, arêtes et faces d'une décomposition polyédrale de  $\Sigma$ . Alors le nombre

$$S - A + F \tag{2.2}$$

est indépendant du choix de cette décomposition polyédrale. On l'appelle caractéristique d'Euler de  $\Sigma$  et on la note  $\chi(\Sigma)$ .

Dans le paragraphe de l'Analysis Situs, Poincaré généralise la proposition ci-dessus en dimension quelconque, et en donne une preuve conceptuelle, basée l'homologie. Une formulation moderne de cette preuve pour les lecteurs maîtrisant le concept d'homologie se trouve ici [\[11\]](#).

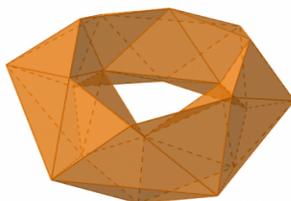


FIG. 2.2 – Un polyèdre homéomorphe au tore, avec 21 sommets, 63 arêtes et 42 faces.

D'après le théorème d'Euler, la caractéristique d'Euler de la sphère est donc égale à 2. De même, on peut vérifier que la décomposition polyédrale du tore ci-dessus possède 21 sommets, 63 arêtes et 42 faces. La caractéristique d'Euler du tore est donc égale à :

$$21 - 63 + 42 = 0. \tag{2.3}$$

### 2.1.3 Caractéristique d'Euler d'une somme connexe

**Définition 2.1.3** *La caractéristique d'Euler de la somme connexe de deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  se calcule grâce à la formule suivante :*

$$\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2. \quad (2.4)$$

**Preuve.** Choisissons des décomposition polyédrales de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Quitte à les subdiviser, on peut supposer que toutes les faces sont des triangles. Notons  $S_i$ ,  $A_i$  et  $F_i$  le nombre de sommets, arêtes et faces de la décomposition polyédrale de  $\Sigma_i$ . La réunion de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  admet donc une décomposition polyédrale avec  $S_1 + S_2$  sommets,  $A_1 + A_2$  arêtes et  $F_1 + F_2$  faces.

Pour réaliser la somme connexe de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , retirons deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  dans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  respectivement, puis collons les côtés de  $T_1$  avec ceux de  $T_2$ . Cette opération nous a fait perdre (les triangles  $T_1$  et  $T_2$ ), trois arêtes (puisque'on a fusionné deux par deux les côtés de  $T_1$  et ceux de  $T_2$ ) et trois sommets (pour la même raison) [12].

On a donc :

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) &= (S_1 + S_2 - 3) - (A_1 + A_2 - 3) + (F_1 + F_2 - 2) \\ &= (S_1 - A_1 + F_1) + (S_2 - A_2 + F_2) - 3 + 3 - 2 \\ &= \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Puisque la caractéristique d'Euler du tore  $\mathbb{T}^2$  est nulle, on a donc :

$$\chi(\Sigma \# \mathbb{T}^2) = \chi(\Sigma) - 2. \quad (2.6)$$

pour toute surface  $\Sigma$ . On en déduit la caractéristique d'Euler de la somme connexe de

$g$  tores :

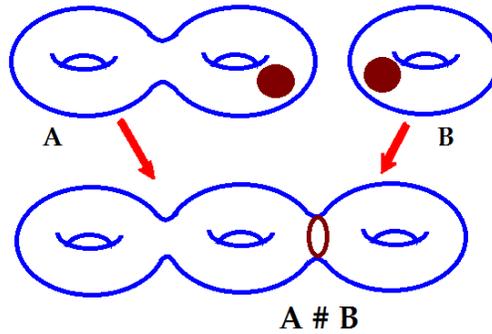


FIG. 2.3 – Illustration de la somme connexe.

■

**Corollaire 2.1.1** Soit  $\Sigma_g$  la surface fermée de genre  $g$  [13]. On a :

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g. \quad (2.7)$$

Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux entiers distincts. Puisque  $\chi(\Sigma_{g_1}) \neq \chi(\Sigma_{g_2})$ , on peut donc conclure que les surfaces de genre  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas homéomorphes.

**Exemple 2.1.1** Soit  $\Sigma$  une surface fermée de genre  $g$ , que l'on suppose triangulée (c'est-à-dire munie d'une décomposition polyédrale dont toutes les faces sont des triangles; voir définition ci-dessous). On note  $S$ ,  $A$ ,  $F$  les nombres de sommets, arêtes et faces (i.e. triangles) de la triangulation. D'après le corollaire ci-dessus, on a donc

$$2 - 2g = \chi(\Sigma) = S - A + F \quad (2.8)$$

Comme  $\Sigma$  est une surface sans bord, toute arête appartient à exactement 2 faces, et chaque face contient exactement 3 arêtes.

Ainsi  $2A = 3F$  d'où  $S - \chi(\Sigma) = A/3$ . Par ailleurs, dans une triangulation, 2 sommets (distincts) déterminent au plus une arête et donc  $A \leq S(S-1)/2$ . On en déduit que :

$$7S - 6\chi(\Sigma) \leq S^2 \quad (2.9)$$

c'est-à-dire :

$$(S - 7/2)^2 \geq (49/4 - 6\chi(\Sigma)) = \frac{1}{4}(1 + 48g). \quad (2.10)$$

On en déduit finalement la borne suivante sur le nombre de sommets d'une triangulation de  $\Sigma$  :

$$S \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48g}). \quad (2.11)$$

En particulier,  $S \geq 4$  pour la sphère,  $S \geq 7$  pour le tore.

## 2.1.4 Invariants topologiques et surfaces triangulées

Dans ce qui suit nous exposons ces invariants dans le cas des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , puis nous les relierons au Théorème de Gauss-Bonnet d'une manière très simple. [\[14\]](#)

### I) Surfaces triangulées

**Définition 2.1.4** *On appelle triangle un espace isométrique à l'enveloppe convexe de trois points non alignés dans  $\mathbb{R}^2$ .*

**Définition 2.1.5** *On appelle surface triangulée un espace  $\Sigma$ , non vide, qui vérifie les propriétés suivantes :*

*i)  $\Sigma$  est une réunion finie de triangles.*

$\Sigma = \cup_{i \in I} T_i$ , Où  $I$  est un ensemble fini.

ii) Deux triangles  $T_i$  et  $T_j$ ,  $i \neq j$ , ont leur intersection soit vide, soit réduite à un sommet commet, soit réduite à une arête commune. En particulier, la situation de la (2.4) ne peut pas se présenter, car  $T_1 \cap T_2$  et  $T_1 \cap T_3$  ne sont que des morceaux d'arête de  $T_1$ .

Toute arête est contenue dans exactement deux triangles distincts. [15]

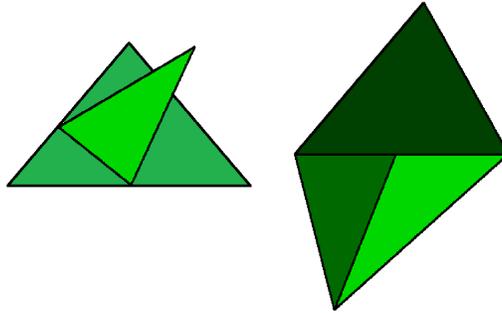


FIG. 2.4 – Situations interdites.

**Remarque 2.1.1** *Explicitement ils ne sont que de triangles dans un plan et de les recoller suivant des arêtes de même longueur On ne peut néanmoins pas toujours le faire physiquement, car notre surface ne se plonge pas forcément dans  $\mathbb{R}^3$ .*

Dans la suite, nous nous focalisons que sur des surfaces triangulées connexes.

**Remarque 2.1.2** *Une surface triangulée est munie d'une topologie naturelle, où une partie est ouverte si sa trace sur chaque triangle (c'est-à-dire l'intersection) est une partie ouverte du triangle. Cette topologie ne dépend pas de la forme des triangles mais uniquement de la façon dont ils sont recollés. Ainsi, Pour mieu simplifier le schema et lorsqu'on ne s'intéresse qu'a la topologie de la surface, on peut prendres des triangles équilatéraux ce qui permet d'étudier la surface en étudiant simplement sa combinatoire.*

Néanmoins, on ne peut restreindre l'étude de la courbure d'une surface, qui est une notion géométrique, a une étude uniquement combinatoire. Pour parler de géométrie,

il faut parler de distance, et une surface triangulée est justement munie d'une distance naturelle ou les triangles sont plongés isométriquement dans la surface et où la distance entre deux points est la longueur minimale d'un chemin affine par morceaux joignant ces deux points.

**Exemple 2.1.2** *Le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre sont des surfaces triangulées, toutes trois homéomorphes à la sphère.*

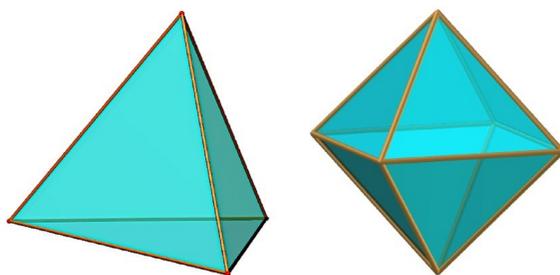


FIG. 2.5 – le tétraèdre et l'octaèdre.

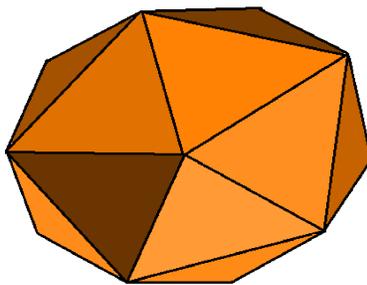


FIG. 2.6 – L'icosaèdre.

De plus, on a le théorème important suivant :

**Théorème 2.1.1 (Rado 1925)** *Il existe des surfaces triangulées homéomorphes à n'importe quelle surface compacte.*

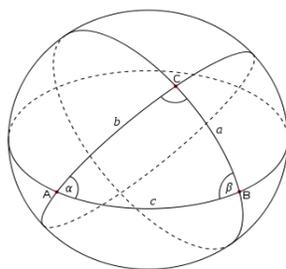


FIG. 2.7 – Une triangulation de la sphère.

**Définition 2.1.6** *Etant donne deux surfaces triangulées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , on dit que  $\Sigma_1$  est plus fine que  $\Sigma_2$  (ou est une subdivision de  $\Sigma_2$ ) s'il existe un homéomorphisme qui soit affine sur chaque triangle de  $\Sigma_1$ , et tel que tout triangle de  $\Sigma_2$  soit réunion d'images de triangles de  $\Sigma_1$ .* [14]

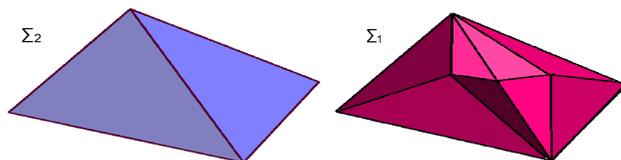


FIG. 2.8 –  $\Sigma_1$  est plus fine que  $\Sigma_2$ .

On a aussi le théorème suivant :

**Théorème 2.1.2** *Etant donné deux surfaces triangulées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  homéomorphes, il existe une surface triangulée plus fine que  $\Sigma_1$  et que  $\Sigma_2$ .*

C notions sont indispensables pour étudier la courbure des surfaces triangulées, notion plus simple que pour les surfaces riemanniennes.

**II) Caractéristique d'Euler-Poincaré** Si  $T$  est une triangulation d'une surface compacte  $\Sigma$ , on note  $n_S$  le nombre des sommets de  $T$ ,  $n_A$  le nombre des arêtes et  $n_T$  le nombre des faces, on définit le nombre  $\chi(T)$  par :

$$\chi(T) = n_S - n_A + n_T. \quad (2.12)$$

**Théorème 2.1.3** *Le nombre  $\chi(T)$  ne dépend pas de la triangulation choisie, C'est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface  $\Sigma$ . On la note  $\chi(\Sigma)$ .*

**Remarque 2.1.3** *On peut aussi calculer  $\chi(\Sigma)$  à partir d'une polygonisation ; on remplace les triangles par des polygones homéomorphes au disque. On peut admettre que deux polygones se couper suivant une réunion quelconque de leurs sommets et arêtes. Le but est qu'à partir d'une telle polygonisation on peut construire une triangulation par subdivision : exemple du tore obtenu à partir d'un seul rectangle.*

**Théorème 2.1.4** *Soit  $\Sigma$  une surface triangulée. L'entier  $\chi(\Sigma)$  associé cette surface triangulée ne dépend que de la topologie de la surface.*

Il existe plusieurs preuves de l'invariance topologique de  $\chi(\Sigma)$ . [15]

**Preuve.** D'après le théorème, il suffit de vérifier que l'on ne change pas ce nombre en raffinant la surface triangulée. Or, raffiner une surface triangulée revient à lui rajouter des sommets. Regardons donc ce qui se passe lorsqu'on rajoute un sommet :

Si le sommet  $S_1$  qu'on rajoute est à l'intérieur d'un triangle, cela donne la situation suivante (2.9) :

On remarque que trois nouveaux triangles sont apparus avec trois nouvelles arêtes et un nouveau sommet, mais qu'un triangle a disparu. Le nombre  $n_S - n_A + n_T$  n'a donc pas changé.

Si le sommet  $S_2$  qu'on rajoute se trouve sur une arête, cela donne :

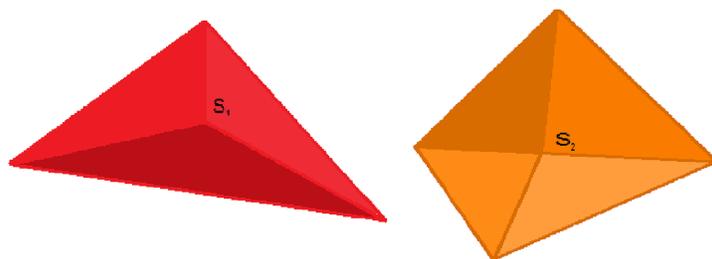


FIG. 2.9 –  $\chi_{S_1} = \chi_{S_2}$ .

De même sont apparus quatre nouveaux triangles avec quatre nouvelles arêtes et un nouveau sommet, mais que deux triangles et une arête ont disparu. Le nombre  $n_S - n_A + n_T$  n'a pas changé non plus.

Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface triangulée est la même que celle d'une surface triangulée plus fine, elle ne dépend que de la topologie de la surface.

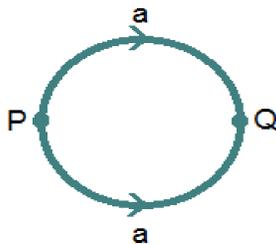


FIG. 2.10 – Cas de la sphère  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ .

Surface	$n_S$	$n_A$	$n_T$	$\chi$
Sphère	2	1	1	1
$n$ -tore	1	$2n$	1	$2 - 2n$
$m$ -plan projectif	1	$m$	1	$2 - m$

TAB. 2.1 – Les cas possibles de la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces dans  $R^3$

■

## 2.2 Nombres de Betti

### 2.2.1 L'algèbre des chaînes

En étudiant les caractéristiques d'Euler, nous avons comptabilisé le nombre de cellules de chaque type. Afin d'obtenir plus d'informations sur un processus complexe, nous allons étudier non seulement le nombre de cellules qu'il a, mais aussi quel type de cellules, et comment elles sont identifiées.

Nous souhaitons garder en mémoire toutes les cellules dans un complexe et la façon dont elles sont collées ensemble. Nous devons également prendre compte des directions de tous les bords collés ensemble.

Une arête, est homéomorphe à l'intervalle  $[0, 1]$ , a une direction naturelle : à partir du point de départ (correspondant à 0) au point d'arrivée (correspondant à 1). Nous noterons la direction le long du bord une par une flèche. [\[16\]](#)

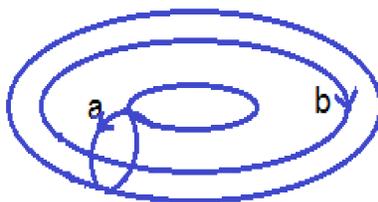


FIG. 2.11 – Complexe du Tore.

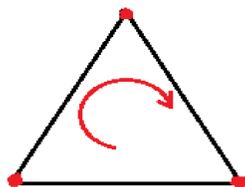


FIG. 2.12 – Orientation d'un triangle.

On comptabilise positivement une cellule si elle est parcourue dans le sens de l'orientation, sinon elle est comptabilisée négativement, et par addition et soustraction on définit les opérations sur le complexe considéré ; exp : la quantité  $6a - 2b$  du complexe de la (2.11), signifie que l'on parcourt le cercle  $a$  6 fois dans le sens de la flèche, et puis on parcourt le cercle  $b$  deux fois dans le sens inverse à la flèche.

**Définition 2.2.1** *Un complexe de chaînes sur  $k$ , ou complexe de  $k$ -modules, est la donnée pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$  d'un module  $C_n$  et d'un homomorphisme  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , avec la propriété fondamentale  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . On écrit en général :*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \quad (2.13)$$

et  $\partial^2 = 0$ . On écrit aussi  $C_*$  pour désigner le complexe en entier, ou encore  $(C_*, \partial)$ .

La condition  $\partial^2 = 0$  équivaut à  $\text{Im}(\partial_n) \subset \ker(\partial_{n-1})$ . On peut donc définir sans ambiguïté le groupe :

$$H_n(C_*) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}. \quad (2.14)$$

Ce groupe  $H_n(C_*)$  s'appelle le  $n$ -ème groupe d'homologie du complexe. C'est l'objet le plus important de ce chapitre. [16]

**Définition 2.2.2** *Soit  $C$  et  $D$  des  $k$ -chaînes dans un complexe orienté  $K$ , écrite comme :*

$$C = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n ; D = b_1\sigma_1 + \dots + b_n\sigma_n. \quad (2.15)$$

La somme  $C + D$  est définie par  $C + D = (a_1 + b_1)\sigma_1 + \dots + (a_n + b_n)\sigma_n$

Et on le résultat suivant :

**Théorème 2.2.1** *Soient  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  sont toutes des  $k$ -chaînes dans un complexes orienté  $K$ .*

l'addition des  $k$ -chaines possède les propriétés suivantes :

- 1/ Commutativité :  $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$ .
- 2/ Associativité :  $C_1 + (C_2 + C_3) = (C_1 + C_2) + C_3$ .
- 3/ Identité :  $C_i + \phi = C_i$  ( $\phi$  l'ensemble vide).
- 4/ Inverse :  $C_1 + (-C_1) = C_1 - C_1 = 0$ .

Si  $K$  est un complexe orienté dans  $\mathbb{R}^3$  On note  $C_k(K)$ , le groupe abélien de toutes les  $k$ -chaines de  $K$ , pour  $k = 0, 1, \dots, \dim(K)$ . Notez que pour des complexes finis, en particulier pour les surfaces compactes, le groupe  $C_k(K)$  possède un nombre fini de générateurs et il sera de la forme  $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ .

**Définition 2.2.3** *Le bord d'une  $k$ -cellule  $\sigma$ , noté  $\partial(\sigma)$ , est la  $k$ -chaîne constituée de toutes les  $(k - 1)$  cellules qui sont des faces de  $\sigma$ , et qui héritent de l'orientation de  $\sigma$ .*

Le bord d'une 0-cellule est l'ensemble vide  $\partial(P) = \phi$ . Le bord d'une 1-cellule formée des points  $P$  et  $Q$  et du segment  $(PQ)$  s'écrit :

$$\partial(P) = Q - P. \tag{2.16}$$

**Définition 2.2.4** *Un cycle est une chaîne qui commence et se termine au même sommet.*

**Définition 2.2.5** *Si  $C$  est une  $k$ -chaîne orientée dans un complexe  $K$ , telle qu'il existe une  $(k + 1)$ -chaîne avec  $\partial(C) = \phi$ , alors  $C$  s'appelle un  $k$ -cycle. L'ensemble de tous les  $k$ -cycles est l'ensemble  $Z_k \subseteq C_k$ .*

**Théorème 2.2.2** *La composition  $\partial \circ \partial : C_k \rightarrow C_{k-2}$  satisfait :  $\partial \circ \partial(C) = \phi$  pour toute  $k$ -chaîne  $C$  du complexe  $K$ .*

La démonstration est basée sur la triangulation vue dans la première partie.

## 2.2.2 L'homologie

**Définition 2.2.6** Deux  $k$ -chaines  $C_1$  et  $C_2$  sont dites homologues, et on écrit  $C_1 \sim C_2$  si  $C_1 - C_2 \in B_k(K)$  ; i.e  $C_1 - C_2 = \partial(D)$ , Pour une  $(k + 1)$ -chaîne  $D$ .

**Lemme 2.2.1** Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

**Définition 2.2.7** Soit  $K$  un complexe orienté. Le groupe  $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$  est appelé  $k^{\text{ème}}$  groupe d'homologie de  $K$ , il s'agit du groupe des classes d'équivalence des éléments de  $Z_k(K)$  avec la relation d'équivalence définie ci-dessus. [15]

**Exemple 2.2.1** Calculons les groupes d'homologie de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , représentée par le complexe de la figure :

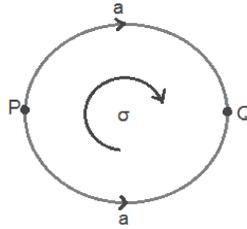


FIG. 2.13 – Le complexe  $K$  sur la sphère.

Puisque nous n'avons que des  $k$ -cellule pour  $k$  allant de 0 à 2, Nous allons calculer  $H_0(K)$ ,  $H_1(K)$ , et  $H_2(K)$ .

Commençons par chercher  $C_2(K)$  :

La seule 2-cellule est  $\sigma$ . Alors les 2-chainnes sont sous la forme  $\sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots, -\sigma, -2\sigma \dots$  et  $\phi$ , alors  $C_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

Calculons  $Z_2(K)$  et  $B_2(K)$  :

\*  $\sigma$  est un 2-cycle vue que  $\partial(\sigma) = a - a = \phi$ , donc  $Z_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

\*  $\mathbb{S}^2$  ne contient pas de 3-cellule, donc  $\sigma$  ne peut être le bord d'aucune 3-cellue, alors  $B_2(K) = \phi \simeq 0$ .

Nous pouvons conclure que  $H_2(K) = Z_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

Pour  $H_1(K)$  :

On a  $C_1(K) = \{a, 2a, \dots, \phi, -a, -2, \dots\} \simeq \mathbb{Z}$ .

$\partial(a) = Q - P \neq 0$ , d'où  $a$  n'est pas un 1-cycle, donc  $Z_1(K) = \{\phi\} \simeq 0$ .

Puisque  $\partial(\sigma) = \phi$ , alors  $V$  est le seul 1-bord de  $\sigma$  donc  $B_1(K) = \phi \simeq 0$ .

donc :  $H_1(K) = Z_1(K) \simeq 0$ .

On répète ce processus pour  $H_0(K)$  :

On a  $C_0(K) = \{\phi, P, 2P, \dots, -P, -2P, \dots, Q, 2Q, \dots, -Q, -2Q, \dots\}$ ,  $C_0(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

On a  $\partial(P) = \partial(Q) = \phi$ , donc  $Z_0(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

On a  $P \sim Q$ , donc  $H_0(K) = \{\phi, P, 2P, \dots, -P, \dots\} \simeq \mathbb{Z}$ .

### 2.2.3 Les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler-Poincaré

Il y'a une relation évidente entre la caractéristique d'Euler et les groupes de chaînes, Puisque les  $C_k(K)$  sont engendrés par les  $k$ -cellules. Ainsi, le rang,  $rg C_k(K)$ , est le nombre de  $k$ -cellules. Pour un 2-complexe  $K$  :

$$\chi(K) = n_S - n_A + n_T = rg(C_0(K)) - rg(C_1(K)) + rg(C_2(K)). \quad (2.17)$$

En général, pour un  $n$ -complexe  $K$  :

$$\chi(K) = rg(C_0(K)) - rg(C_1(K)) + rg(C_2(K)) - \dots + (-1)^n rg(C_n(K)). \quad (2.18)$$

Il y'a aussi une relation plus intéressante entre les groupes d'homologie intégrale et la

caractéristique d'Euler ; pour l'explorer, nous devons aller un peu plus profondément dans la théorie des groupes. Notons le  $k^{\text{ème}}$  homomorphisme sur les groupes de la chaîne d'un complexe  $K$  par  $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ . Notez que  $Z_k(K) = \ker(\partial_k)$  on  $B_k(K) = R(\partial_{k+1})$ .

Notons :

$$\begin{cases} c_k = \text{rg}(C_k(K)) \\ z_k = \text{rg}(Z_k(K)) \end{cases} \quad b_k = \text{rg}(B_k(K)). \quad (2.19)$$

On a le résultat suivant :

$$c_k = z_k + b_{k-1}. \quad (2.20)$$

**Définition 2.2.8** *On appelle les nombres de Betti d'un complexe  $K$  les nombres  $\beta_k = \text{rg}(H_k(K))$ .*

Par définition on a,  $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ , alors on conclue que :

$$\beta_k = z_k - b_k. \quad (2.21)$$

**Théorème 2.2.3** *Soit  $K$  un  $n$ -complexe. Alors on a la relation suivante :*

$$\chi(k) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - + \dots + (-1)^n \beta_n. \quad (2.22)$$

**Preuve.** En utilisant les résultats ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - + \dots + (-1)^n \beta_n \\
 &= (z_0 - b_0) - (z_1 - b_1) + - \dots + (-1)^n (z_n - b_n) \\
 &= z_0 - (b_0 + z_0) + (b_1 + z_2) - + \dots + (-1)^n (b_{n-1} + z_n) + (-1)^n b_n \quad (2.23) \\
 &= z_0 - c_1 + c_2 - + \dots + (-1)^n c_n + (-1)^n b_n.
 \end{aligned}$$

Pour tout 0-chaîne  $C$ ,  $\partial(C) = \phi$  si  $Z_0(K) = C_0(K)$  et, par conséquent,  $z_0 = c_0$ . Le groupe  $B_n(K) = 0$ , donc  $b_n = 0$ .

$$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - + \dots + (-1)^n \beta_n = c_0 - c_1 + c_2 - + \dots + (-1)^n c_n = \chi(K). \quad (2.24)$$

Les nombres de Betti sont des invariants topologiques contenant beaucoup d'informations. Ils peuvent être combinés comme ci-dessus pour former la caractéristique d'Euler. Notez que si  $S$  est une surface orientable,  $\beta_2 = 1$ , et si  $S$  non-orientable,  $\beta_2 = 0$ . Ainsi,  $\beta_2$  détermine l'orientabilité de la surface. Le nombre des composantes connexes du complexe est évidemment donné par  $\beta_0$ . ■

# Chapitre 3

## Calcul de certains invariants topologiques

### 3.1 La caractéristique d'Euler

#### 3.1.1 Équivalence des surfaces

► Nous allons nous intéresser à la notion d'équivalence des surfaces. Par exemple, il est clair que si nous prenons une surface et la faisons pivoter, nous devrions considérer que le résultat est la même surface :

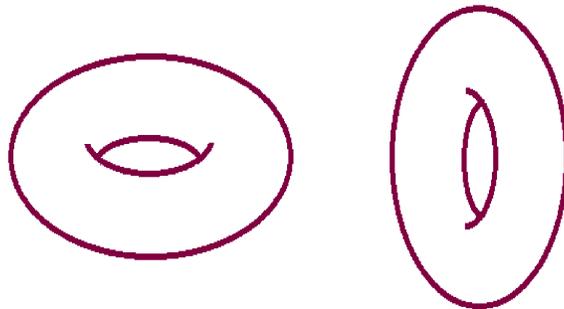


FIG. 3.1 – Surface.

**Définition 3.1.1** *Deux surfaces sont simplement équivalentes si elle peuvent être obtenues l'une de l'autre par rotation.*

Comme il y a trop de surfaces différentes, il devient difficile de les classer convenablement ! Par exemple, gonflement d'un cube pour se transformer en une sphère :

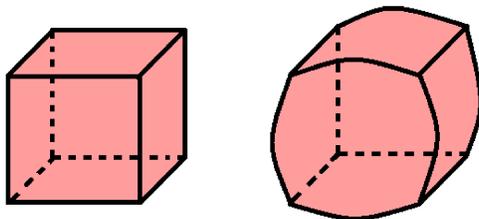


FIG. 3.2 – Cube.

Ce n'est pas facile à décrire ; il faudrait préciser à quoi ressemble la courbe de chaque côté. Et c'est juste pour un cube. Il y a beaucoup d'autres formes de spher là-base.

**Exemple 3.1.1** *Pour avoir un aperçu de la façon dont nous devrions vraiment définir l'équivalence, considérons les polygones.*

Une façon simple de les classer est par le nombre de côtés, c'est-à-dire de dire que deux polygones sont équivalents s'ils ont le même nombre de côtés.

De cette façon, nous pouvons étirer et déformer un polygone comme nous le souhaitons, et le résultat sera équivalent au polygone d'origine :

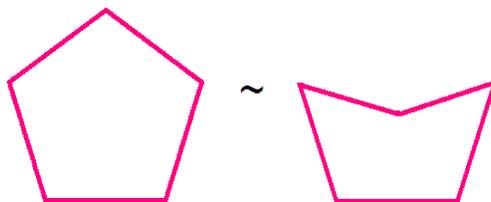


FIG. 3.3 – Polygone.

Nous utilisons le symbole  $\sim$  pour désigner l'équivalence, c'est-à-dire que nous écrivons  $A \sim B$  pour signifier que "A est équivalent à B", quelle que soit la définition de l'équivalence que nous utilisons.

Notez que si nous disons plutôt que deux polygones sont équivalents si l'un peut être obtenu de l'autre par rotation, la classification des polygones devient beaucoup plus difficile : il faudrait spécifier chaque angle et chaque longueur de côté.

Nous utilisons ces informations pour donner une meilleure définition de l'équivalence pour les surfaces.

**Définition 3.1.2** *Deux surfaces sont équivalentes, ou homéomorphes, si nous pouvons obtenir l'une de l'autre en étirant, en serrant et en déformant la surface comme si elle était faite d'une feuille de caoutchouc.*

Définition formelle. Deux surfaces sont homéomorphes s'il y a une fonction continue de l'une à l'autre qui a un inverse continu.

La notion d'homéomorphisme n'est en fait pas spécifique à deux dimension.

Nous verrons plus tard que cela s'applique aux espaces de n'importe quelle dimension. Le domaine de la topologie est l'étude des espaces sous cette équivalence.

**Exemple 3.1.2** *Une conséquence intéressante de notre définition est que maintenant une sphère et un cube sont en fait homéomorphes ! Le diagramme suivant montre comment :*

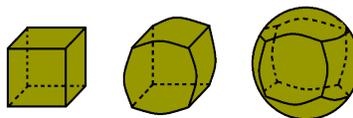


FIG. 3.4 – Cube.

**Exemple 3.1.3** *Il existe un célèbre dicton mathématique selon lequel “les topologues ne peuvent pas faire la différence entre un beignet et une tasse de café”. C’est parce que ces deux objets sont homéomorphes aussi !*

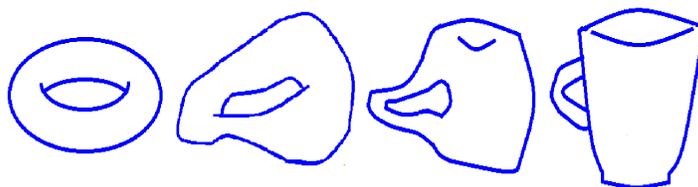


FIG. 3.5 – Un homéomorphisme du tore vers le verre.

### 3.1.2 Homéomorphisme de Surfaces

L’homéomorphisme est parfois difficile à travailler. Comment peut-on dire que deux surfaces ne sont pas homéomorphes ? Par exemple, pouvez-vous dire si la sphère  $S^2$  et le tore  $T^2$  sont homéomorphes ou non ?

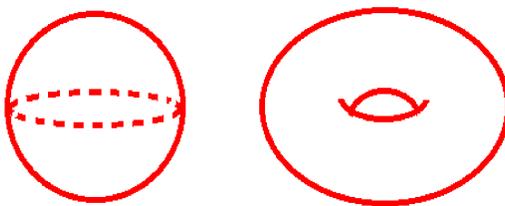


FIG. 3.6 – La sphère  $S^2$  et le tore  $T^2$ .

Posez cette question à un mathématicien, et il/elle y répondra.

En général, pour distinguer les objets, définissons un invariant de nos objets qui attribue la même quantité à des objets équivalents.

Nous allons définir un invariant appelé caractéristique d’Euler qui attribue un entier à chaque surface, de sorte que si deux surfaces sont homéomorphes, elles ont la même

caractéristique d'Euler. De cette façon, si nous calculons la caractéristique d'Euler pour la sphère et le tore et obtenons des entiers différents, nous savons avec certitude qu'ils ne sont pas homéomorphes.

**Définition 3.1.3** *Voici les étapes pour calculer la caractéristique d'Euler d'une surface.*

1] Déformer la surface jusqu'à ce qu'elle soit un polyèdre, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'elle soit constituée de polygones.

2] Compter le nombre de sommets  $S$ , d'arêtes  $A$  et de faces  $F$  sur le polyèdre.

3] Calculer  $S - A + F$ , qui est la caractéristique d'Euler.

Si  $X$  est la surface, sa caractéristique d'Euler est notée  $\chi(X)$ .

**Exemple 3.1.4** *Pour calculer la caractéristique d'Euler  $\chi(S^2)$  de la sphère, on la déforme d'abord en cube :*

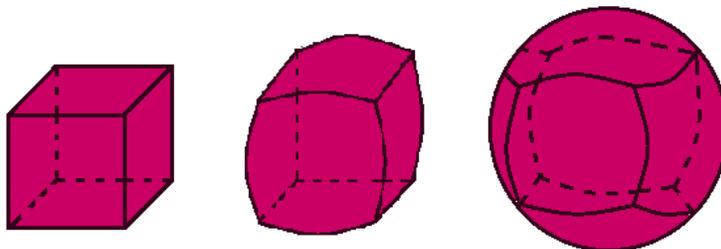


FIG. 3.7 – Cube.

Le cube a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces, donc :

$$\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2. \quad (3.1)$$

Comme la caractéristique d'Euler est la même pour les surfaces homéomorphes, il vaut mieux que le calcul de la caractéristique d'Euler en utilisant cette autre déformation donne le même nombre. Mais ce n'est pas évident du tout.

**Exemple 3.1.5** *Calculons les caractéristique d'Euler de la sphère en la déformant en tétraèdre à la place.*

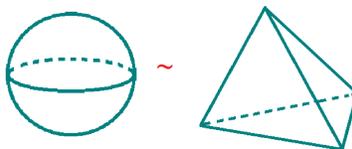


FIG. 3.8 – La sphère et la tétraèdre.

Le tétraèdre a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc :

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2. \quad (3.2)$$

**Théorème 3.1.1** *Si deux surfaces sont homéomorphes, elles ont la même caractéristique d'Euler.*

**Preuve.** Notons les deux surfaces  $X$  et  $Y$ .

Si nous voulions calculer la caractéristique d'Euler de  $X$ , nous n'avons pas réellement besoin de faire la déformation à l'étape 1 du processus.

Au lieu de cela, nous pouvons simplement dessiner où se trouvent les sommets et les arêtes sur  $X$  (par exemple, le diagramme ci-dessus pour le cube dessine le cube sur la sphère). Nous pouvons faire la même chose pour  $Y$ . Mais comme  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes, nous pouvons déformer  $Y$  jusqu'à ce qu'il soit identique à  $X$ . Maintenant, nous avons deux copies de  $X$ , mais elles peuvent avoir des dessins différents de sommets et d'arêtes.

Il suffit donc de montrer que peu importe la façon dont nous dessinons les sommets et les arêtes sur  $X$ , nous obtenons la même caractéristique d'Euler à la fin. Cela implique la deuxième démarche :

Étant donné deux façons de dessiner des sommets et des arêtes sur  $X$ , nous pouvons les “chevaucher” pour obtenir une autre façon de dessiner des sommets et des arêtes, appelée le raffinement .

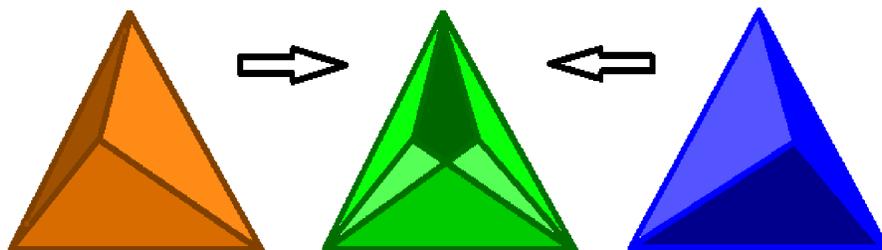


FIG. 3.9 – Schéma montrant comment le raffinement.

Nous pouvons vérifier que si nous prenons deux polygones partageant une arête et que nous supprimons simplement cette arête, la caractéristique d’Euler ne change pas.

De même, si nous prenons un polygone et le divisons en deux polygones adjacents partageant une arête, la caractéristique d’Euler ne change pas. En d’autres termes, le raffinement ne change pas la caractéristique d’Euler ! Il faut donc que les deux façons originales de dessiner les sommets et les arêtes avaient la même caractéristique d’Euler pour commencer. ■

## 3.2 Le nombre de Betti

### 3.2.1 Complexe simplicial

**Définition 3.2.1** [17] *On appelle simplicial tout couple  $(E, \kappa)$  où  $E$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés des sommets et  $\kappa$  un ensemble non vide formé par*

des parties de  $E$  appelées faces, vérifiant la condition suivante :

$$\alpha \in \kappa, \beta \neq \emptyset \text{ tel que } \beta \subset \alpha \Rightarrow \beta \in \kappa. \quad (3.3)$$

Pour un simplexe  $\alpha$ , on pose  $\dim \alpha = \text{card}(\alpha) - 1$  et on notera par  $\kappa_p$  l'ensemble des simplexes de dimension  $p$ .

Pour tout  $\alpha = \{x_0, \dots, x_p\} \in \kappa_p$  avec  $x_0 < \dots < x_p$  et pour tout  $0 \leq i \leq p$ , on pose :

$$\partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\} \quad \text{face numéro } i \text{ de } \alpha. \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Homologie d'un complexe simplicial

On pose pour tout  $p \geq 0$ ,

$$C_p = \mathbb{R}^{\kappa_p}. \quad (3.5)$$

Pour tout  $\alpha \in \kappa_p$ , on note  $\hat{\alpha}$  l'élément de  $C_p$  définie par :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\beta) &= 1 \quad \text{si } \beta = \alpha \\ &= 0 \quad \text{si } \beta \neq \alpha \end{aligned} \quad (3.6)$$

Il est facile de vérifier que  $(\hat{\alpha})_{\alpha \in \kappa_p}$  est une base canonique de  $C_p$ , en plus orthonormée pour le produit scalaire défini par :

$$\left( \sum_{\alpha \in \kappa_p} a_\alpha \hat{\alpha} \right) \cdot \left( \sum_{\alpha \in \kappa_p} b_\alpha \hat{\alpha} \right) = \sum_{\alpha \in \kappa_p} a_\alpha b_\alpha. \quad (3.7)$$

On convient d'écrire  $C_{-1} = 0$  et on définit une suite d'application linéaire :

$$d_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$$

$$\hat{\alpha} \longmapsto \sum_{i=0} (-1)^i \widehat{\partial_p^i \alpha} \quad (3.8)$$

On vérifie que  $d_{p-1} \circ d_p = 0$  pour tout  $p \geq 1$ , ainsi  $\text{Im } d_p \subset \ker d_{p-1}$ . On pose alors :

$$H_p = \ker d_p / \text{Im } d_{p+1}. \quad (3.9)$$

appelé p-ème groupe d'homologie de  $\kappa$  dont la dimension

$$\beta_p = \dim H_p. \quad (3.10)$$

est appelé p-ème nombre de Betti de  $\kappa$ .

Pour deux matrices  $A$  et  $B$  de même nombre de colonnes, on notera  $\left[ \frac{A}{B} \right]$ , la matrice obtenue en plaçant les lignes de  $B$  en dessous de celles de  $A$ .

On notera  $D_p$  la matrice associée à  $d_p$  relativement aux bases canoniques.

On montre que  $\ker \left[ \begin{smallmatrix} {}^t D_{p+1} \\ D_p \end{smallmatrix} \right]$  est l'orthogonal de  $\text{Im } d_p$  dans  $\ker d_{p-1}$ , ainsi :

$$\beta_p = \dim \left( \ker \left[ \begin{smallmatrix} {}^t D_{p+1} \\ D_p \end{smallmatrix} \right] \right). \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Calcul des nombres de Betti sur un exemple

On considère le simplexe suivant :

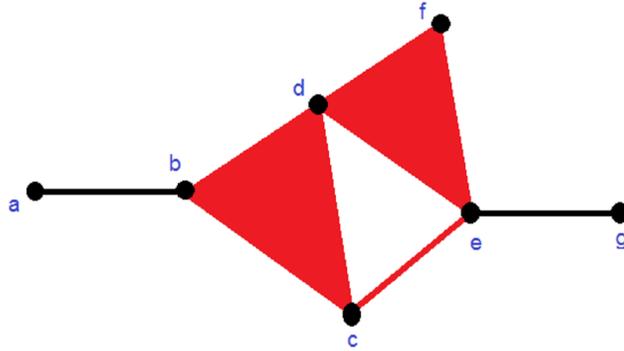


FIG. 3.10 – Le simplexe.

Dont les simplexes sont numérotés comme suit :

• Dimension 0

$j$	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_j^{(0)}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$

• Dimension 1

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha_j^{(1)}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, d\}$	$\{c, e\}$	$\{d, e\}$	$\{d, f\}$	$\{e, f\}$	$\{e, g\}$

• Dimension 2

$j$	1	2
$\alpha_j^{(2)}$	$\{b, c, d\}$	$\{d, e, f\}$

On a la chaîne suivante :

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0 \quad (3.12)$$

D'où les relations suivantes :

$$\beta_0 = \dim \left( \ker \begin{bmatrix} {}^t D_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \beta_1 = \dim \left( \ker \begin{bmatrix} {}^t D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} \right), \beta_2 = \dim \left( \ker \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.13)$$

Les tableaux suivants qu'on appellera  $face[p, j, i]$  retourneront comme valeurs les numéros des  $\partial_p^i \alpha_j^{(p)}$ .

$$\text{face}[1, j, i] = \begin{array}{c|cccccccc}
 i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 \hline
 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\
 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5
 \end{array}, \text{face}[2, j, i] = \begin{array}{c|cc}
 i \setminus j & 1 & 2 \\
 \hline
 0 & 4 & 8 \\
 1 & 3 & 7 \\
 2 & 2 & 6
 \end{array}$$

On obtient les calculs suivants, faits à l'aide de Maple pour le calcul de  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ .

Quelques exemples d'homologie simplicial :

**Exemple 3.2.1**

✠ Dans le cas de  $S^1$  :

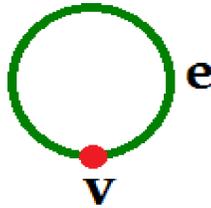


FIG. 3.11 –  $S^1$ .

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \longleftarrow 0 \tag{3.14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 \quad \mathbb{Z} \quad v \\ C_1 \quad \mathbb{Z} \quad e \end{array} \right.$$

$$\sphericalangle H_0 = \frac{\ker(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{C_0}{0} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}.$$

$$\partial_1(e) = v - v = 0.$$

$$\sphericalangle H_1 = \frac{\ker(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}.$$

$$\sphericalangle H_{i \geq 2} = 0.$$

✠ Dans le cas de  $S^1 \vee S^1'$  :

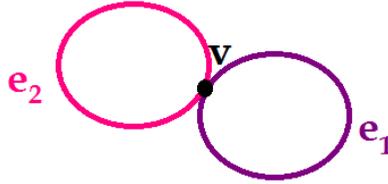


FIG. 3.12 –  $S^1 \vee S^1'$ .

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \longleftarrow 0 \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} C_0 & \mathbb{Z} & v \\ C_1 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & e_1, e_2 \end{cases}$$

$$\simeq H_0 = \frac{\ker(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{C_0}{0} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}.$$

$$\partial_1(e_1) = v - v = 0.$$

$$\simeq H_1 = \frac{\ker(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$\partial_1(e_2) = v - v = 0.$$

$$\simeq H_{i \geq 2} = 0.$$

**Exemple 3.2.2**

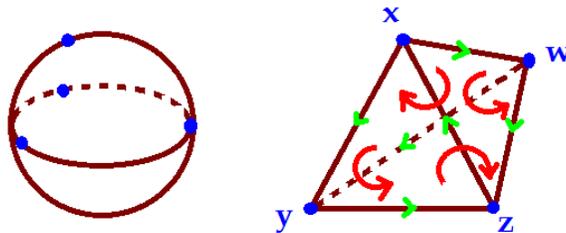


FIG. 3.13 –  $S^2$ .

$$X = \{(xyz), (xzw), (xwy), (y wz)\}. \tag{3.16}$$

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \longleftarrow 0 \quad (3.17)$$

$$C_0(S^2) = \langle x, y, z, w \rangle = \mathbb{Z}^4.$$

$$C_1(S^2) = \langle (x, y), (y, z), (z, x), (x, w), (w, z), (w, y) \rangle = \mathbb{Z}^6.$$

$$C_2(S^2) = \langle (xyz), (xzw), (xwy), (y wz) \rangle = \mathbb{Z}^4.$$

$$H_n = \frac{Z_n}{B_n} = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}. \quad (3.18)$$

$$\star H_0 : Z_0 = \ker \partial_0 = C_0 = \langle x, y, z, w \rangle.$$

$$B_0 = \text{Im } \partial_1 = \langle y - x, z - y, x - z, w - x, z - w, y - w \rangle.$$

$$\alpha_1(y - x); \alpha_2(z - y); \alpha_3(x - z); \alpha_4(w - x); \alpha_5(z - w); \alpha_6(y - w)$$

$$\implies x(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4) + y(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_6) + z(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_5) + w(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6) = \mathbb{Z}^4.$$

$$\implies H_0 = \frac{Z_0}{B_0} = \frac{\mathbb{Z}^4}{\mathbb{Z}^4} = \mathbb{Z}.$$

$$\star H_1 : Z_1 = \ker \partial_1 = \alpha_1(xy) + \alpha_2(yz) + \alpha_3(zx) + \alpha_4(xw) + \alpha_5(wz) + \alpha_6(wy).$$

$$\downarrow \partial_1$$

$$\alpha_1(y - x) + \alpha_2(z - y) + \alpha_3(x - z) + \alpha_4(w - x) + \alpha_5(z - w) + \alpha_6(y - w) = 0.$$

$$x(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4) + y(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_6) + z(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_5) + w(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6) = 0.$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\
 x & \left( \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 y & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 z & \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 w & \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \\
 & = & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \\
 & = & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & = & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & & r & & s & & t
 \end{array}$$

$$\alpha_1 = r - s - t; \alpha_2 = r - s; \alpha_3 = r; \alpha_4 = s + t; \alpha_5 = s; \alpha_6 = t.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout les solths sont des multiples de cycles.

$$Z_1 = \mathbb{Z}^3.$$

$$B_1 = \text{Im } \partial_2 = \langle \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5), -\alpha_2 + \alpha_5 - \alpha_6, \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_1 \rangle.$$

$$\implies H_1 = \frac{Z_1}{B_1} = 0.$$

$$\star H_2 = \frac{Z_2}{B_2} = \frac{\ker(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)}$$

$$\partial_2\left(\underset{A}{(xyz)} + \underset{B}{(xzw)} + \underset{C}{(yzw)} + \underset{D}{(xwy)}\right) = 0.$$

$$Z_2 = \langle A + B + C + D \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

$$B_2 = 0.$$

$$\implies H_2 = \mathbb{Z}.$$

Alors :

$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}.$$

$$H_1(S^2) = 0.$$

$$H_2(S^2) = \mathbb{Z}.$$

$$H_n(S^2) = 0 \quad ; \quad n \geq 3.$$

*Caractéristiques topologiques des variétés 1 et 2 fermées :*

Variété		Caractéristique d'Euler X	Orientabilité	Nombres de Betti			Coefficient torsion (1 dimension)
Symbole	Nom			$b_0$	$b_1$	$b_2$	
$S^1$	Cercle (variété-1)	0	Orientable	1	1	N / A	N / A
$S^2$	Sphère	2	Orientable	1	0	1	aucun
$T^2$	Tore	0	Orientable	1	2	1	aucun
$P^2$	Plan projectif	1	Non-orientable	1	0	0	2
$K^2$	Bouteille de Klein	0	Non-orientable	1	1	0	2
	Tore à 2 trous	-2	Orientable	1	4	1	aucun
	g-holed tore (Genre=g)	2 - 2g	Orientable	1	2g	1	aucun

# Conclusion

La conclusion général de notre travail est que les invariants topologiques comme la caractéristique d'Euler, le nombre de Betti et l'homologie des complexes simpliciaux constituent un outil intéressant pour comparer les surfaces géométriques et plus généralement les sous variétés.

On a introduit, dans le cas des surfaces deux importantes notions qui sont ; la caractéristique d'Euler-Poincaré et l'homologie, ces concepts admettent des généralisations pour des variétés plus complexes.

La caractéristique d'Euler-Poincaré et les nombres de Betti sont de nature purement globale.

L'origine combinatoire de ces invariants topologiques clarifie le rôle fondamentale de la topologie algébrique qui consiste à étudier les espaces topologiques à travers non seulement des invariants topologiques mais aussi des invariants algébriques.

# Bibliographie

- [1] Application de la topologie algébrique en informatique théorique. Rapport du stage de M1, ENS Cachan Jérémy Dubut sous la direction de Kathryn Hess Bellwald MATHGEOM, EPFL, 26 août 2012.
- [2] Christine L. Kinsey, Topology of Surfaces (Undergraduate Texts in Mathematics) Corrected Edition, Kindle Edition, Publication date : October 3,2012.
- [3] Dell’Ambrogio, I., & Fresse, B. " Homologie et Topologie.
- [4] De Loera, J., Rambau, J., & Santos, F. (2010). Triangulations : structures for algorithms and applications (Vol. 25). Springer Science & Business Media.
- [5] Ethier, M. (2012). Introduction à l’homologie persistante avec application à la suspension topologique. CaMUS (Cahiers Mathématiques de l’Université de Sherbrooke), 3, 1 – 18.
- [6] Francis Lazarus, Homologie en dimension supérieure  
<http://www.gipsa-lab.fr/~francis.lazarus/Enseignement/homologie-nD.pdf>
- [7] Frédéric Bosio, Courbure des surfaces triangulées, Le journal de maths des élèves, Vol.1 (1994), no.1, ENS Lyon.
- [8] Homology (Topological space), PlanetMath.
- [9] Ilia Itenberg, Topologie Algébrique, Version préliminaire de ces notes a été préparée par Alexandre, Ecole Normale Supérieure, 2017-2018.

- [10] Initiation à la topologie algébrique, fibration de Hopf et surfaces de Riemann de genre 1, Emeline LUIRARD sous la direction de Jean-Claude SIKORAV, Juin-Juillet 2016.
- [11] Jean-Claude Pont, La topologie algébrique, des origines à Poincaré, Revue d'histoire des sciences Année 1976 29 – 1 pp.86 – 89.
- [12] J.W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, University Press of Virginia 1965.
- [13] Massey W.S., Algebraic Topology, An Introduction, Graduate Texts in Mathematics, vol 56, Springer, 1967.
- [14] René thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Commentarii Mathematici Helvetici 28,17-86,(1954), Strasbourg.
- [15] R. NOGUÈS, THÉORÈME DE FERMAT Son histoire, Paris, Librairie Vuibert 1932.
- [16] Topologie algébrique, Pierre Guillot, 12 décembre 2012.
- [17] Welschinger, J. Y. (2015). Introduction aux théories homologiques (Doctoral dissertation, École normale supérieure de Lyon).

---

## ABSTRACT

---

- ◇ We begin to define the homology in the context of Algebraic topology and give some fundamental properties of the homology groups.
- ◇ We introduced the notion of topological invariants and give the Euler's-Poincaré characteristic for some varieties topological.
- ◇ As application we calculate by examples some invariants like Euler's constant, and simplicial homology of somme varieties.

**KEY WORDS:** Homology, Topological invariant, Euler's characteristic, The number of Betti.

---

## ملخص

---

- ◇ بدأنا بتعريف التنادد في سياق الطوبولوجيا الجبرية وإعطاء بعض الخصائص الأساسية لمجموعات التنادد.
  - ◇ ثم قدمنا فكرة لا متغير الطوبولوجية و تعطي الخاصية من نقطة أولير لبعض الأصناف الطوبولوجية.
  - ◇ يبقى لنا أن نحسب من خلال الأمثلة بعض لا متغير مثل لا متغير أولير و عدد بيتي لبعض الأصناف الطوبولوجية.
- الكلمات المفتاحية:** التنادد, لا متغير الطوبولوجية, خاصية أولير, عدد بيتي.
- 

## RÉSUMÉ

---

- ◇ La notion d'homologie en topologie algébrique est fondamentalement important pour mieux différencié les surfaces et en général les variétés, et de même l'étude des invariants topologiques qui constitue une des clés des propriétés fondamentales des groupes d'homologie.
- ◇ Nous avons introduit la notion des invariants topologiques et donner la caractéristique d'Euler-Poincaré pour certaines variétés topologiques.
- ◇ En fin nous avons illustré l'ensemble par des applications de calculs de la constante d'Euler, nombre de Betti et quelques homologies simpliciales.

**MOTS CLÉS:** Homologie, Invariant topologiques, La caractéristique d'Euler, Le nombre de Betti.

