

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques Appliquées**

Option : **Analyse**

Par

**Menacer Rima**

Titre :

**Systeme dynamique chaotique continu**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>Laiadi Abed Elkader</b>	UMKB	Président
Dr. <b>Senouci Assia</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>Ouaar Fatima</b>	UMKB	Examinatrice

Juin 2022

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À le premier enseignant et éducateur, notre messager et notre bien-aimé, notre modèle et notre motivateur en tout lieu et à tout moment vers l'apprentissage : Mohamed bin Abdullah bin Abdul Muttalib, que la prière et la paix de Dieu soient sur lui, que Dieu nous rassemble avec lui au Paradis.

À symbole du don et de la joie de vivre, à symbole du sacrifice et de l'amour, à ceux qui sont restés debout, nous ont enseignés et encouragés à atteindre ce stade de réussite et d'excellence, à ma mère : Menacer Sabah.

À mon soutien permanent, mon espoir constant, à celui qui a sacrifié sa santé et sa jeunesse pour faire couronner ses filles des plus belles couronnes, à ma fierté et mon honneur, à mon cher père : Menacer Lakhdar.

À ma grand-mère : Menacer Lamria.

À ma grand-mère décédée : Menacer Hadda.

À chers mes frères et sœurs chaque un a son nom

À les enfants de ma sœur Mayar , Maya , Mohamed et Serine ,  
et leur père Hichem Mebarki.

À toute ma famille, et tous mes amis (Djedi Roueya), qui de près ou de loin m'on supporte, soutenu et encourage tout au long de ces années.

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le tout puissant de m'avoir donné la santé,  
la volonté et la patience pour mener à terme ce travail.

À mes chers parents, pour leur amour, leur sacrifices, leur tendresse, leur soutien  
tout au long de mes étude.

À ma encadratrice Dr : Senouci Assia

Votre compétence ,votre encadrement ont toujours suscité mon profond respect.

Je vous remercie pour votre à cueille et vos conseils.

Veillez trouver ici ,l'expression de mes gratitudes et de ma grand estime.

Aux membres du jury

Président du jury :Laiadi Abed Elkader

Examineur :Ouaar Fatima

Le jury, vous nous faites un grand honneur.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques</b>	<b>3</b>
1.1 Classification des systèmes dynamiques . . . . .	3
1.2 Système dynamique à temps continu . . . . .	4
1.3 Système dynamique à temps discret . . . . .	4
1.4 Espace de phase . . . . .	5
1.5 Trajectoire, Orbite et point d'équilibre . . . . .	6
1.6 Système autonome ou non autonome . . . . .	8
1.7 Système conservatif ou non . . . . .	9
1.8 Système dynamique linéaire . . . . .	9
1.9 Système dynamique non linéaire . . . . .	9

1.10 Flot . . . . .	10
1.10.1 Flot d'un système linéaire . . . . .	10
1.10.2 Flot d'un système non linéaire . . . . .	11
1.11 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continu . . . . .	11
1.12 Classification des points d'équilibres . . . . .	12
1.12.1 Cas des systèmes linéaires : . . . . .	12
1.12.2 Cas des systèmes non linéaires : . . . . .	12
<b>2 Système dynamique chaotique continu</b>	<b>14</b>
2.1 Système dynamique chaotique continu . . . . .	15
2.2 Propriétés du système chaotique continu . . . . .	16
2.2.1 Aspect aléatoire . . . . .	16
2.2.2 Section de Poincaré . . . . .	17
2.2.3 Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	18
2.2.4 Notion d'attracteur . . . . .	19
2.2.5 Exposants de Lyapunov . . . . .	20
2.2.6 Théorie de Bifurcation . . . . .	22
<b>3 Système de Rössler</b>	<b>29</b>
3.1 Changement des paramètres( $b$ et $c$ ) . . . . .	32
3.2 Section Poincaré . . . . .	35
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Table des figures

2.1	Aspect aléatoire du système de Lorenz . . . . .	17
2.2	Section de Poincaré . . . . .	18
2.3	Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz . . .	19
2.4	Attracteur de Lorenz . . . . .	20
2.5	Exposant de Lyapunov de système de Lorenz . . . . .	22
2.6	Bifurcation nœud-col . . . . .	24
2.7	Bifurcation transcritique . . . . .	25
2.8	Bifurcation fourche(Pitchfork) . . . . .	27
2.9	Bifurcation Hopf . . . . .	28
3.1	Attracteur de Rössler . . . . .	30
3.2	Section de Poincaré pour $c = 2$ . . . . .	35
3.3	Section de Poincaré pour $c = 2,5$ . . . . .	36
3.4	Section de Poincaré pour $c = 2,6$ . . . . .	36
3.5	Section de Poincaré pour $c = 2,9$ . . . . .	36
3.6	Diagramme de bifurcation de système de Rössler $a = 0,41,$ $b = 0,8, c$ entre 1 et 5,8. . . . .	37
3.7	Section de Poincaré pour $b = 2,5$ . . . . .	38

3.8 **Section de Poincaré pour  $b = 3,2$**  . . . . . 39

3.9 **Section de Poincaré pour  $b = 4$**  . . . . . 39

3.10 **Diagramme de bifurcation de système de Rössler  $a = 0,41,$   
 $c = 4,7, b$  entre 0.2 et 5.** . . . . . 39

# Introduction

Avant les années 1970, l'étude des systèmes dynamiques était cantonnée à un domaine relativement limité des mathématiques et de la physique mathématique. La théorie des systèmes dynamiques désigne couramment la branche des mathématiques qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. Cette recherche active se développe à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités.

Le chaos est une autre branche mathématique attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, Poincaré (1854\_1912) fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos, il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers l'interaction des trois corps célestes ; elle correspond au fait que de petites causes entraînent de grands effets.

L'œuvre de Poincaré a donc la particularité de constituer un point d'origine incontestable du domaine, par la variété des outils, des méthodes et des concepts nouveaux qui s'y déploient au service du problème de la mécanique céleste.

Après cette œuvre fondatrice on peut mentionner les principaux moments suivants

- La théorie de la stabilité d'Alexander Lyapunov à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle.
- Les travaux de Géorgie D-Birkhoff sur la topologisation des systèmes dynamiques conservatifs dans l'entre deux guerres.
- Les travaux autour d'Andrei Kolmogorov sur l'étude de la stabilité des systèmes hamiltoniens, etc...

- Les travaux d'Eberhard Hopf ou ceux de Kurt Otto Frierichs sur les bifurcations.
- En 1963, Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange, a mis en évidence ce phénomène grâce notamment à l'arrivée des ordinateurs.
- En 1975, Tien-Yien Li et James A. York ont présenté pour la première fois le terme "chaos" dans un article intitulé " Period three implies chaos ".

Dans ce mémoire on introduit trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les systèmes dynamiques et donnons quelques définitions ( points d'équilibres, trajectoire, flot....).

Nous présentons dans le deuxième chapitre de système dynamique chaotique continu. On introduit les définitions du système dynamique chaotique et système dynamique chaotique continu et donnons quelque propriétés du le système dynamique chaotique continu.

Dans le troisième chapitre nous sommes donner, on étudie le système dynamique chaotique de Rössler, on a donné un aperçu historique. Nous avons étudié les points d'équilibres et leurs stabilités, changement des variables  $b$  et  $c$  et section de Poincaré.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système physique qui évolue au cours du temps (système continu) ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phase (système discret).

Cette évolution peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires (autonomes ou non), équations aux dérivées partielles, applications.

### 1.1 Classification des systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques se classifient en fonction de leur façon d'évoluer dans le temps. Ainsi, il existe trois types de systèmes dynamiques :

- Les systèmes stochastiques, qui évoluent au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régit. Aucune prévision exacte dans le temps n'est possible.
- Les systèmes déterministes, régis par des lois mathématiques bien connues et dont on peut donc prévoir exactement leur l'évolution dans le temps.

– Les systèmes chaotiques, qui possèdent un comportement complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une caractéristique géométrique de structure également complexe, sur laquelle ils se comportent erratiquement, au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux fois par le même point.

## 1.2 Système dynamique à temps continu

**Définition 1.2.1** *On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble  $\Omega$  une famille d'applications  $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}^+\}$ , ou  $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ , paramétrée soit par l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble  $\mathbb{R}$  de tous les réels, vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *Chaque application  $\varphi_t$  est définie sur une partie  $U_t$  de  $\Omega$ , et à valeurs dans  $\Omega$ .*

(2) *L'application  $\varphi_0$  définie sur  $\Omega$  entier, est  $Id_\Omega$ .*

(3) *Si  $0 \leq t_1 \leq t_2$ , alors  $U_{t_2} \subset U_{t_1}$ .*

(4) *Soient  $t$  et  $s$  deux éléments de l'ensemble ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$ ) qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit  $x \in U_s$ . Alors  $\varphi_s(x)$  est élément de  $U_t$  si et seulement si  $x$  est élément de  $U_{s+t}$  et, lorsque c'est le cas,*

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x).$$

*L'ensemble  $\Omega$  est appelé espace des phases du système dynamique.*

## 1.3 Système dynamique à temps discret

**Définition 1.3.1** *On appelle système dynamique à temps discret sur un ensemble  $\Omega$  une famille d'applications  $\{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\}$ , ou  $\{\varphi_n; n \in \mathbb{Z}\}$  paramétrée soit par l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels, soit par ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) chaque application  $\varphi_n$  est définie sur une partie  $U_n$  de  $\Omega$ , et à valeurs dans  $\Omega$ .

(2) L'application  $\varphi_0$  définie sur  $\Omega$  entier, est  $Id_\Omega$ .

(3) Si  $0 \leq n_1 \leq n_2$ , alors  $U_{n_2} \subset U_{n_1}$ .

(4) Soient  $n$  et  $m$  deux éléments de l'ensemble  $(\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z})$  qui paramètre la famille d'applications considérée. soit  $x \in U_m$ . Alors  $\varphi_m(x) \in U_n$  si et seulement si  $x \in U_{m+n}$  et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_n(\varphi_m(x)) = \varphi_{m+n}(x).$$

– Cas continu (L'oscillateur de Duffing)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où  $\delta, \omega, \gamma$  sont des paramètres physique réels (variables statistiques). L'espace des phases est :  $\mathbb{R}$ , l'espace des paramètre est  $\mathbb{R}^3$ . Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivants le mouvement avec ou sans frottement).

– Cas discret (l'application de Hénon )

$$\begin{cases} X_{k+1} = y_k + 1 - aX_k^2 \\ y_{k+1} = bX_k \end{cases}$$

Où  $a, b$  sont des paramètres réels, l'espace des phases est :  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.4 Espace de phase

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variable d'état, qui onl apropriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le

comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire.

## 1.5 Trajectoire, Orbite et point d'équilibre

On appelle trajectoire d'un point  $x$  de  $M$  l'application définie sur  $G$  et à valeurs dans  $M$  par :

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \varphi_t(x)\end{aligned}$$

On appelle orbite d'un point  $x$  l'image de la trajectoire issue de  $x$  c'est à dire le sous ensemble  $\gamma(x)$  de l'espace des phases défini par :

$$\gamma(x) = \varphi_t(x)$$

Un élément  $x$  de  $\Omega$  est dit point fixe, ou point d'équilibre du système dynamique son orbite est  $\{x\}$ .

On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre.

1. On dit que  $a$  est un point d'équilibre de système (1.1), s'il satisfait  $F(a) = 0$  ( ou pour tout  $t \in \mathbb{R} : \phi_t(a) = a$  ) sinon  $a$ , est dit point ordinaire.

2. Une orbite  $\gamma_{X_0}$  telle qu'elle existe deux points équilibres  $a$  et  $b$  vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(X_0) = a, \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(X_0) = b$$

est dite une orbite hétérocline si  $a \neq b$  et homocline  $a = b$ .

**Exemple 1.5.1** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{X} = Y^2 - X \\ \dot{Y} = X^3 - 2X - XY \\ \dot{Z} = -Z + XY \end{cases}$$

L'origine 0 est un point critique.

$$\begin{cases} Y^2 - X = 0 \\ X^3 - 2X - XY = 0 \\ -Z + XY = 0 \end{cases}$$

Son linéarisé est :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On calcule  $\det(\lambda I_n - A)$

Telle que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $n = 3$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1) [(\lambda + 2)(\lambda + 1)] = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

On trouve les valeurs propres

$$\det(\lambda I_3 - A) = 0 \implies (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

Alors :

$$\begin{cases} (\lambda + 1)^2 = 0 \\ \text{ou} \\ (\lambda + 2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -1 & \text{double} \\ \text{ou} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Les valeurs propres de  $Df(0)$  sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Toutes négatives d'où l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

## 1.6 Système autonome ou non autonome

Un système autonome est tout système dynamique non linéaire qui ne dépend pas explicitement du temps. Il est donné comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

Un système autonome est indépendant du temps initial, Dans le cas contraire, on dit que le système est non autonome. Lorsque le système dynamique non linéaire dépend explicitement du temps le système est dit non autonome.

## 1.7 Système conservatif ou non

Le caractère conservatif ou non de la dynamique fait référence à un nouveau point de vue sur l'évolution dans l'espace des phases. En effet, les définitions que nous avons introduites jusqu'à présent sont implicitement rattachées à la détermination de trajectoires individuelles (problème aux valeurs initiales).

La différence essentielle entre systèmes dissipatifs et non dissipatifs (improprement appelés ( conservatifs )) se traduit dans l'espace des phases par la propriété suivante : le flot engendré par le champ de vecteurs conserve les volumes pour un système non dissipatif, et les contracte ou les dilate pour un système dissipatif. Cette contraction est mesurée par la divergence du champ de vecteurs.

## 1.8 Système dynamique linéaire

Un système physique est dit linéaire si la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie peut être définie par des équations différentielles linéaires (à coefficients constants). Ces derniers vérifient alors les principes de proportionnalité des effets aux causes, et de superposition.

## 1.9 Système dynamique non linéaire

Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à

coefficients constants.

Cette définition, ou plutôt cette non-définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

La dynamique non linéaire a joué dans l'étude de la stabilité du système solaire, l'étude de la mécanique céleste sous cet angle révèle, par exemple pour quoi la densité des astéroïdes varie d'une façon particulière.

## 1.10 Flot

Soit  $M$  un ensemble quelconque et  $G$  un groupe additif ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ). Considérons  $\{\varphi_t\}_{t \in G}$  un groupe à un paramètre d'applications  $M$  dans  $M$  indexées par le groupe  $G$ . On appelle flot ou système dynamique le couple  $(M; \{\varphi_t\}_{t \in G})$

L'ensemble  $M$  précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point  $x$  de cet espace représente un état du système dynamique.

### 1.10.1 Flot d'un système linéaire

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2}$$

où  $A$  une matrice constante. La solution du système (1.2).

avec la valeur initiale  $x(0) = x_0$  est  $x(t) = x_0 \exp(At)$ .

**Définition 1.10.1** *L'ensemble des applications  $\exp(At) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé le flot du système (1.2).*

### 1.10.2 Flot d'un système non linéaire

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1.3}$$

On suppose que les solutions du système(1.3) sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ; le flot du système (1.3) est la famille avec un paramètre d'applications  $\{\phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\Omega$  dans lui-même définies par  $\phi_t(a) = x(t, a)$  , pour tout  $a \in \Omega$ ,  $x(t, a)$  est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = F(X, t) \\ X(0) = a \end{array} \right\}$$

\*  $\phi_t$  est différentiable sur  $\Omega$

\*  $\phi_0 = Id$  ,  $\phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$  pour tout  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  ,  $\phi_t$  est un bijection de  $\Omega$  et  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$

Alors l'ensemble  $G = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre de difféomorfisme.

\*  $\left. \frac{d\phi_t(a)}{dt} \right|_{t=0} = F(a, 0)$  cette formule montre que la donnée du flot  $\phi_t$  définit

le système(1.3).

## 1.11 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continu

La question de la stabilité et de l'équilibre se posait naturellement en dynamique, depuis les débuts de l'étude du problème a trois corps au milieu du XVII siècle (avec Clairaut, sur la figure de la Terre, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, etc..., sur le système solaire dans son ensemble).

## 1.12 Classification des points d'équilibres

### 1.12.1 Cas des systèmes linéaires :

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax$$

Où  $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  et  $A$  est une matrice à coefficients constants appartenant à  $\mathbb{R}^{n \times n}$  inversible. Soient  $\lambda_i$   $i = 1; 2; \dots; n$  les valeurs propres de  $A$  :

1. Point selle(S) : si les valeurs propres  $\lambda_i$   $i = 1; 2; \dots; n$  sont réelles, non nulles et de signe différent.
2. Nœud (N) si les valeurs propres  $\lambda_i$   $i = 1; 2; \dots; n$  sont réelles et de même signe.
3. Foyer (N) si les valeurs propres  $\lambda_i$   $i = 1; 2; \dots; n$  sont complexes avec  $\text{Re } \lambda_i \neq 0$   $\forall i = 1; 2; \dots; n$ .
4. Centre (N) si les valeurs propres  $\lambda_i$   $i = 1; 2; \dots; n$  sont imaginaire pure.

### 1.12.2 Cas des systèmes non linéaires :

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{1.4}$$

**Définition 1.12.1** *Un point critique de  $x^*$  de (1.4) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles négatives, il est appelé sources si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles positives, il est appelé selle s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x^*)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec*

*une partie réelle négative.*

**Théorème 1.12.1** *Soit  $\dot{x}(t) = f(x)$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique à temps continu. Si  $x^*$  un point fixe ( $f(x) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont de partie réelle négative  $x^*$  est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Df(x^*)$  est de partie réelle positive.*

# Chapitre 2

## Système dynamique chaotique continu

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut la non-linéarité, le déterminisme, l'imprévisible, l'irrégularité en plus de la sensibilité aux conditions initiales .

**Définition 2.0.2** *Un système dynamique est défini à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état  $X = \{x_i \in \mathbb{R}\} \quad i = 1, \dots, n$  où  $n$  représente la dimension du vecteur. Nous appelons état d'un système l'ensemble des variables qui état connues à l'instant initial, permettent de décrire l'évolution de ce système. L'ensemble de tous les états pouvant être pris par le système s'appelle l'espace des phases . Le processus évolue de manière déterministe si ses états futurs sont caractérisés par la connaissance de ses états présents et passés. La loi d'évolution dans le temps de ce système dynamique est généralement désignée par "dynamique" En somme, la notion de déterminisme provient du fait que le système est caractérisé par son état initial et sa dynamique.*

**Remarque 2.0.1** *Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.*

## 2.1 Système dynamique chaotique continu

**Définition 2.1.1** *Un système chaotique à temps continu est décrit par un système d'équation différentielle de forme :*

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad ; \quad y = h(t, x, u) \quad (2.1)$$

Où :  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  est un vecteur de dimension  $n$  ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction non linéaire désigne le champ de vecteurs,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction éventuellement non linéaire qui désigne le vecteur de sortie et  $u \in V \subseteq \mathbb{R}^p$  représente l'entrée du système. Si ce système ne dépend pas de l'entrée, on aura alors :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2)$$

Il existe plusieurs système chaotique continus, parmi eux l'on peut citer les systèmes de Lorenz, Rössler, Bogdanov, le circuit de Chua, etc.

– *Système de Lorenz :*

Le système de Lorenz est généré par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (2.3)$$

Cet exemple a été publié en 1963 dans un journal météorologique.

Les variables  $x, y$  et  $z$  représentent l'état du système à chaque instant. Et  $a, b, c$

les paramètres du système . Le système présente un comportement chaotique pour  $a = 10; b = 28; c = 8/3$  et présente un attracteur étrange en forme d'ailes de papillon.

## 2.2 Propriétés du système chaotique continu

Bien qu'il n'y ait pas de définition mathématique du chaos universellement acceptée, une définition couramment utilisée stipule que pour qu'un système dynamique soit classifié en tant que chaotique, il doit comporter les propriétés suivantes

- ★ Aspect aléatoire
- ★ Section de Poincaré
- ★ Sensibilité aux conditions initiales
- ★ Notion d'attracteur
- ★ Exposants de Lyapunov
- ★ Bifurcation

### 2.2.1 Aspect aléatoire

Les systèmes chaotiques semblent évoluer de manière aléatoire. En tout cas, on ne peut pas prévoir facilement quelle sera leur évolution dans le temps.

Cet aspect aléatoire du chaos vient du fait que l'on est incapable de donner une description mathématique du mouvement, mais ce comportement est en fait décrit par des équations non linéaires parfaitement déterministes, comme par exemple les équations de Newton régissant l'évolution d'au moins trois corps en interaction. Les figures ci-dessus illustrent les aspects aléatoires du système chaotique continu (2.3).

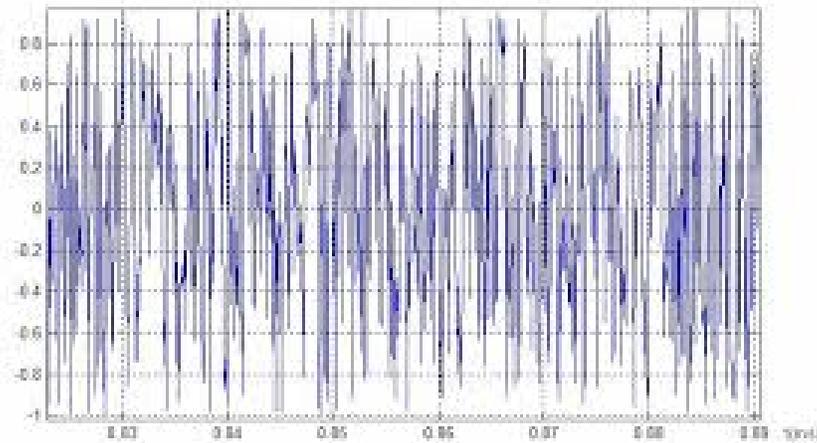


FIG. 2.1 – Aspect aléatoire du système de Lorenz

### 2.2.2 Section de Poincaré

Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les sections de Poincaré. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases par un plan en dimension 3 ou par une droite en dimension 2, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec ce plan ou cette droite, ces intersections sont faites avec un sens prédéfini. L'avantage des sections de Poincaré dans l'étude des systèmes dynamiques est le passage d'une dynamique à temps continu à une dynamique à temps discret, ce qui facilite l'analyse.

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif des différents scénarios de transition vers le chaos

Attracteur dans l'espace des phases	<b>Section de Poincaré</b>
cycle limité	1 point
tore	courbe fermé
Attracteur étrange (chaos)	nuage de points

La figure suivante montre le principe de la section de Poincaré, pour une solution périodique et une solution non périodique.

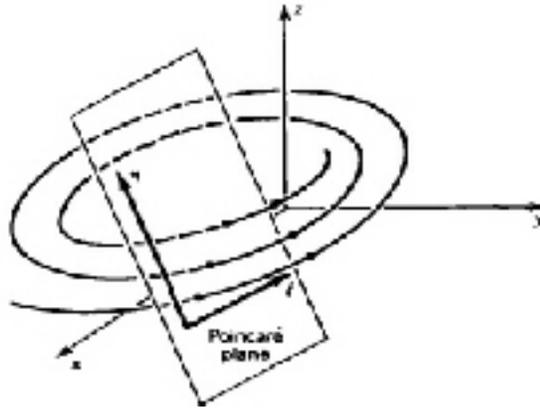


FIG. 2.2 – Section de Poincaré

### 2.2.3 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du XIXe siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique. Illustrons ce phénomène de SCI par une simulation numérique. On affecte à un système chaotique deux conditions initiales très proches. Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière ; mais, très vite, leur comportement devient différent.

- **Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz :**

On a le cas initial :

$$\begin{cases} x_1(0) = 0,100 \\ x_2(0) = 0,101 \end{cases}$$

En prenant  $x_1(0)$  et  $x_2(0)$  pour conditions initiales très proches, les évolutions des signaux  $x_1$  et  $x_2$  ont un comportement différent au fur et à mesure que le temps augmente, on a obtenu les résultats suivants :

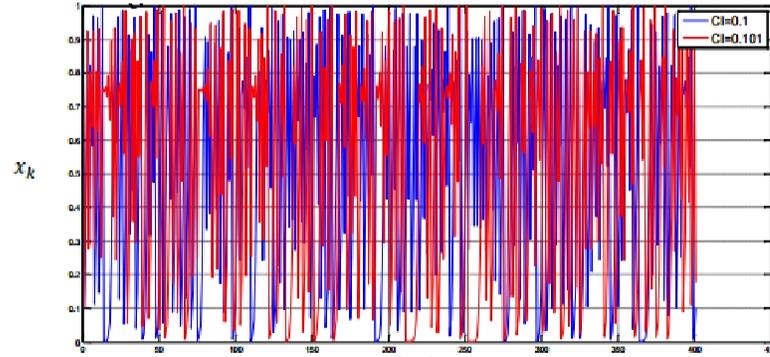


FIG. 2.3 – Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz

### 2.2.4 Notion d'attracteur

Un attracteur comme étant une limite asymptotique des solutions de toute condition initiale localisée dans un domaine de volume non nul ou bassin d'attraction.

Les trajectoires complexes dans l'espace de phase qui attirent les solutions du système chaotique sont alors des attracteurs. L'ensemble de points attirés vers l'attracteur constitue le bassin d'attraction. Autrement dit, l'attracteur est une géométrie de l'espace de phase (formant une structure feuilletée) indiquant le comportement d'un système chaotique. L'attracteur peut être étrange avec structure fractale ( une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques impliquant une transformation ponctuelle de type homothétie interne ) ou point fixe ou encore cycle limite. Parmi les premiers exemples des attracteurs étranges mentionnés dans l'histoire du chaos, on cite l'attracteur de Lorenz. Ci-dessous, nous donnerons des exemples d'attracteurs étranges pour les différents systèmes chaotiques continus où discrets.

- **Attracteur de Lorenz**

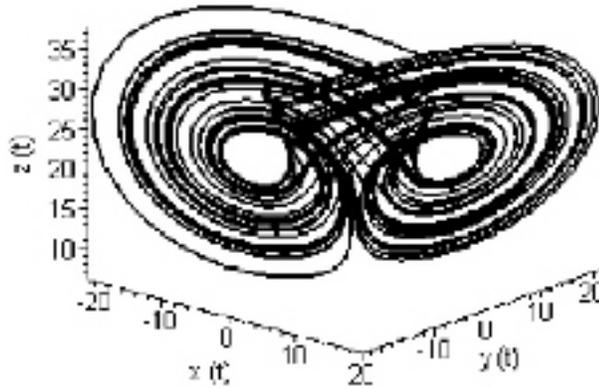


FIG. 2.4 – **Attracteur de Lorenz**

### 2.2.5 Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Le temps que mettent deux conditions initiales à atteindre cette valeur limite constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence et donc de mesurer la sensibilité aux conditions initiales.

Les exposants de Lyapunov sont des coefficients qui permettent de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle, par définition un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou de convergence de trajectoires voisines de l'espace des phases.

#### Calcul de l'exposant de Lyapunov

Les valeurs propres de la matrice d'état  $A$  d'un système linéaire permettent de caractériser les points d'équilibre et leur stabilité. Les exposants de Lyapunov sont une

généralisation de ces valeurs propres pour les systèmes non linéaires et caractérisent les attracteurs comme cité antérieurement. Cela se fait par la mesure de la distance Euclidienne de deux évolutions du système à partir de deux conditions initiales différentes, cette mesure nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur. Cette distance peut être approximée par  $e^{\lambda t+a}$  où  $a$  est une constante et une constante réelle appelée exposant de Lyapunov.

Pour le calcul de ces exposants, il existe différentes méthodes, par contre, il est difficile de le déterminer par les méthodes analytique, c'est pour cela qu'on a recours aux simulations numériques.

TAB. 2.2 – Résumé des différents cas rencontrés

<b>Etat stable</b>	<b>Flot</b>	<b>dimension</b>	<b>exposants de Lyapunov</b>
point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
quasi - périodiques	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
chaotique	complexe-irruglier	non entière	$\lambda_1 > 0$ et $\sum \lambda_i < 0$

**Remarque 2.2.1** *Illustration :*

*Pour illustrer cette caractéristique nous avons choisi le système de Lorenz décrit par le système d'équations (2.3), la figure suivante montre l'évolution des trois exposants de Lyapunov du système de Lorenz.*

*On remarque que la trajectoire qui décrit l'exposant de Lyapunov positif  $\lambda_1$  augmente à une vitesse exponentielle au début, puis se stabilise à une valeur fixe. Ce qui traduit la divergence exponentielle des deux trajectoires du système issues de deux conditions initiales différentes, utilisées pour la mesure de l'exposant.*

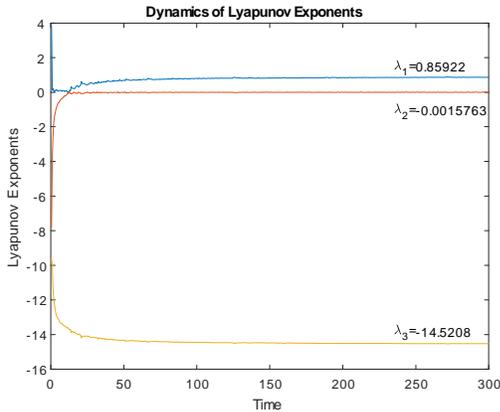


FIG. 2.5 – Exposant de Lyapunov de système de Lorenz

## 2.2.6 Théorie de Bifurcation

La théorie des bifurcations est un aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques, ses origines se situent dans les travaux de H-Poincaré. Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système.

La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

Soit le système dynamique non linéaire de dimension  $n$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (2.4)$$

avec le paramètre de contrôle  $\mu$  ; et soit  $x^*$  sa solution.

**Définition 2.2.1** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système (2.4) lorsqu'on modifie, et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

*Dans un système se ramènent à quatre types de bifurcations générique que nous allons présenter sur quatre cas simples monodimensionnels.*

### Bifurcation nœud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque  $c$  franchit 0, un point d'équilibre stable (nœud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est souvent représenté par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = c - X^2 \quad (2.5)$$

Qui s'appelle équation générique de bifurcation nœud-col, On a alors  $F(X, c) = c - X^2$

- Si  $c < 0$  , l'équation  $f(X, c) = 0$  n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes
- Si  $c > 0$  on a :

$$c - X^2 = 0 \Leftrightarrow X^2 = c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{c} \\ \text{ou} \\ X = -\sqrt{c} \end{cases}$$

Par conséquent (2.5) admet deux points fixes.

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = -2X$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=-\sqrt{c}} = -2\sqrt{c} > 0 \\ \text{et} \\ \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=\sqrt{c}} = -2\sqrt{c} < 0 \end{cases}$$

Par suite :

Le point fixe  $X = -\sqrt{c}$  est stable, mais  $X = \sqrt{c}$  est instable.

- Si  $c = 0$  le seul point fixe est  $X = 0$ , par intégration de (2.5) on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point  $X = 0$  est semi-stable. (stable si  $X_0 > 0$  est instable si  $X_0 < 0$  )

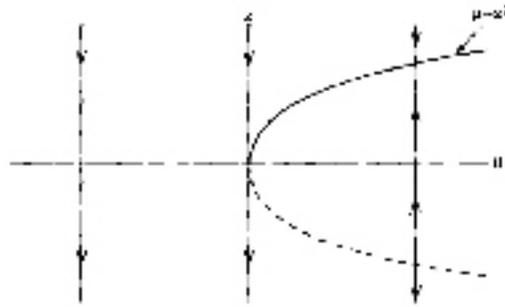


FIG. 2.6 – **Bifurcation nœud-col**

### **Bifurcation transcritique**

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes ( les points stables deviennent instable et vice versa ) lorsque  $c$  franchit 0.

Elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^2 \tag{2.6}$$

Qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique. On a alors :

$$cX - X^2 = 0 \Leftrightarrow X(c - X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ \text{ou} \\ X = c \end{cases}$$

Par conséquent on a deux points fixes

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 2X$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=0} = c \\ \text{et} \\ \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=c} = c - 2c = -c \end{cases}$$

Par suite :

-Si  $c < 0$  le point fixe  $X = 0$  est stable, mais  $X = c$  est instable.

-Si  $c > 0$  le point fixe  $X = 0$  est instable, mais  $X = c$  est stable.

On remarque un échange de stabilité en  $c = 0$ .

-Si  $c = 0$ , le seul point fixe est  $X = 0$ , par intégration de (2.6) on obtient :

*D'où le point  $X = 0$  est semi-stable (stable si  $X_0 > 0$  et instable si  $X_0 < 0$ ).*

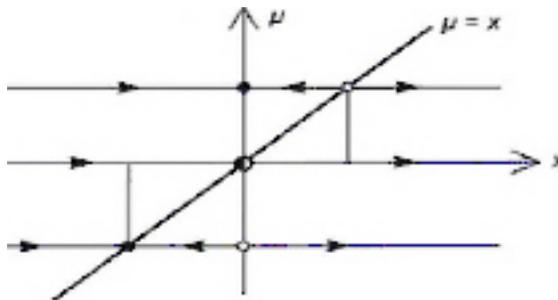


FIG. 2.7 – Bifurcation transcritique

### Bifurcation fourche(Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance

d'une paire de point fixes.

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^3$$

Et pour sous -critique :

$$\frac{dX}{dt} = cX + X^3$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a

$$F(X, c) = cX - X^3$$

$$F(X, c) = 0 \Leftrightarrow cX - X^3 = 0 \Leftrightarrow X(c - X^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ \text{ou} \\ c - X^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ \text{ou} \\ X^2 = c \end{array} \right.$$

Alors

- Si  $c < 0$  on a un seul point fixe  $X = 0$ .
- Si  $c > 0$  on a trois point fixes :

$$\begin{cases} X = 0 \\ X = \sqrt{c} \\ X = -\sqrt{c} \end{cases}$$

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 3X^2$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=0} = c \\ \text{et} \\ \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=\pm\sqrt{c}} = -2c \end{cases}$$

Par suite :

- Si  $c < 0$  ,le seul point fixe  $X = 0$  est instable.
- Si  $c > 0$  ,le point fixe  $X = 0$  est stable , mais  $X = \sqrt{c}$  et  $X = -\sqrt{c}$  sont instables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes est dans la stabilité en  $c = 0$ .

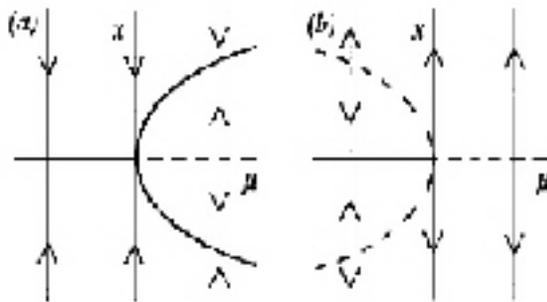


FIG. 2.8 – Bifurcation fourche(Pitchfork)

### Bifurcation Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque la paramètre de contrôle  $c$  prend une valeur critique  $c_0$  pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

**Définition 2.2.2** *Soit :*

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t, c) \quad (2.7)$$

Un système dynamique non linéaire de dimension  $n$  et de paramètre de contrôle  $c$ . Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $X_0$  de système ( 2.7) lors qu'on modifie  $c$ , d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

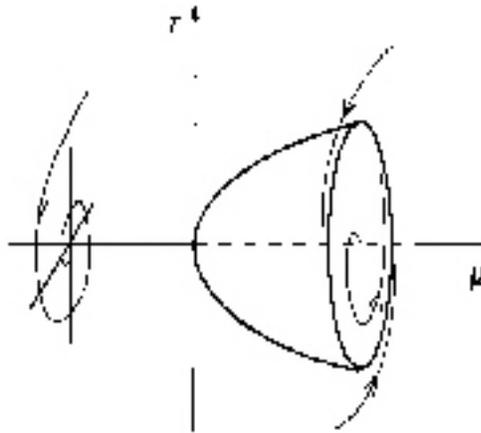


FIG. 2.9 – Bifurcation Hopf

# Chapitre 3

## Systeme de Rössler

Otto Rössler, en 1976, et dans un but purement théorique, à la quête d'un nouvel attracteur étrange, avait proposé un modèle non linéaire dont les équations s'avèrent pourtant très utiles dans la modélisation de l'équilibre dans certaines réactions chimiques. L'article original de Rössler mentionne que son modèle a été conçu pour fonctionner d'une façon similaire à celui de Lorenz, mais devrait être plus simple à analyser : il ne présente en fait qu'une seule spirale.

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

Avec  $a, b$  et  $c$  sont des constantes réelles. Rössler étudia ce système pour :

$a = b = 0, 2$  et  $c = 5, 7$ .

### Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition tel que  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ .

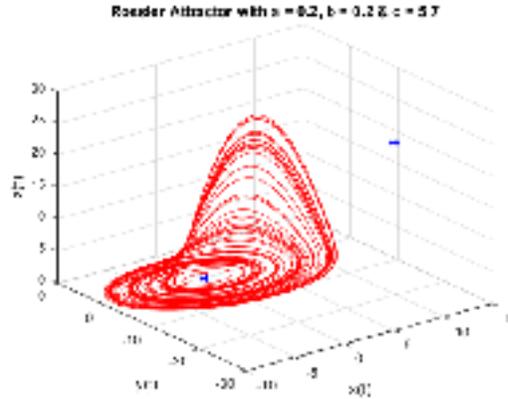


FIG. 3.1 – Attracteur de Rössler

$$\begin{cases} -y - z = 0 \Leftrightarrow y = -z & (1) \\ x + ay = 0 \Leftrightarrow x = -ay & (2) \\ b + z(x - c) = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) dans (2) donne  $x = az$  (4)

(4) dans (3) donne  $b + az^2 - cz = 0$

Alors

$$\Delta = c^2 - 4ab$$

Donc

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2a} (c - \sqrt{-4ab + c^2}) \\ z_2 = \frac{1}{2a} (c + \sqrt{-4ab + c^2}) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} (c - \sqrt{-4ab + c^2}) \\ x_2 = \frac{1}{2} (c + \sqrt{-4ab + c^2}) \\ y_1 = \frac{1}{2a} (-c + \sqrt{-4ab + c^2}) \\ y_2 = \frac{1}{2a} (-c - \sqrt{-4ab + c^2}) \end{cases}$$

Les points fixes  $P_1$  et  $P_2$  sont :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left( \frac{1}{2} \left( c - \sqrt{-4ab + c^2} \right); \frac{1}{2a} \left( -c + \sqrt{-4ab + c^2} \right); \frac{1}{2a} \left( c - \sqrt{-4ab + c^2} \right) \right) \\
 \text{et } P_2 &= \left( \frac{1}{2} \left( c + \sqrt{-4ab + c^2} \right); \frac{1}{2a} \left( -c - \sqrt{-4ab + c^2} \right); \frac{1}{2a} \left( c + \sqrt{-4ab + c^2} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

L'un de ces points fixes réside dans le centre de la boucle d'attracteur et l'autre se trouve relativement éloigné de l'attracteur.

### Stabilité des points d'équilibres

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes.

La stabilité des points d'équilibre est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées  $\lambda_i$ , de la matrice jacobienne en ces points. La matrice jacobienne s'écrit :

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (c - a - x)\lambda^2 + (z - a(c - x) + 1)\lambda + (c - x - az) = 0$$

Pour  $P_1$

Les valeurs propres associées au premier point fixe  $P_1$  de paramètres  $a = 0,41$  ;  $b = 0,8$  et  $c = 4,7$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,186972 - 0,978502i \\ \lambda_2 = 0,186972 + 0,978502i \\ \lambda_3 = -4,59309 \end{cases}$$

Les deux paires valeurs propres ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) a parties réelles positives. Alors, le premier point fixe  $P_1$  est instable.

Pour  $P_2$

Les valeurs propres associées au deuxième point fixe  $P_2$  de paramètres  $a = 0,41$  ;  $b = 0,8$  et  $c = 4,7$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1,6124 \times 10^{-2} - 3,5033i \\ \lambda_2 = -1,6124 \times 10^{-2} + 3,5033i \\ \lambda_3 = 0,37139 \end{cases}$$

La troisième valeur propre  $\lambda_3$  est positive, alors le point  $P_2$  est instable.

### 3.1 Changement des paramètres ( $b$ et $c$ )

Le modèle ne montre pas la bifurcation de Hopf pour  $4ab \leq c^2$ . Mais il y a une possibilité de montrer Hopf bifurcation quand  $4ab \geq c^2$ . Dans ce modèle nous avons d'abord fixé les paramètres  $a$  à 0,41 et  $b$  à 0,8 et fait varier  $c$  entre 1,7 et 5. Dans le second cas, nous avons fixé  $a$  à 0,41 et  $c$  à 4,7 et avons augmenté  $b$  pour observer les changements. Nous avons obtenu les valeurs propres dans les deux cas.

Pour  $P_1$

Ici, les conditions initiales sont prises comme  $(x_0; y_0; z_0) = (1; 1; 1)$ , l'une des valeurs propres est négatif qui montre que le point critique est un nœud stable, alors que la partie réelle des valeurs propres complexes est positive comme le paramètre  $c$

augmente. Le tableau 3 montre les valeurs propres au point fixe  $P_1$  lorsque  $c$  est augmenté.

TAB. 3.1 – les valeurs propres au point fixe P1 lorsque c est augmenté.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_{2,3}$
1.7	-1,17877	$0,0553366 \pm 1,03083i$
2	-1,61099	$0,100617 \pm 1,00378i$
2.5	-2,23125	$0,140087 \pm 0,988079i$
2.6	-2,34739	$0,140087 \pm 0,98654i$
3	-2,79721	$0,160425 \pm 0,982603i$
4	-3,86643	$0,1800 \pm 0,979179i$
5	-4,90166	$0,189071 \pm 0,9786i$

Pour  $P_2$

l'une des valeurs propres est positive qui montre que le point critique est un nœud instable, alors que la partie réelle des valeurs propres complexes est négative quand on augmente le paramètre  $c$ . Le tableau 4 montre les valeurs propres au point fixe  $P_2$  lorsque  $c$  est augmenté.

TAB. 3.2 – les valeurs propres au point fixe P2 lorsque c est augmenté.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_{2,3}$
1.7	0,0443408	$-0,0443408 \pm 2,12995i$
2	0,304333	$-0,0372886 \pm 2,32074i$
2.5	0,330607	$-0,0297633 \pm 2,59241i$
2.6	0,33431	$-0,0286314 \pm 2,64216i$
3	0,346134	$-0,0248861 \pm 2,6248861i$
4	0,363918	$-0,018836 \pm 3,24512i$
5	0,373896	$-0,0151901 \pm 3,60789i$

*On observe maintenant qu'au point fixe  $P_1$ , lorsque nous augmentons  $b$  en gardant  $a$  et  $c$  fixés respectivement à 0,41 et 4,7 l'une des valeurs propres est réelle et négatif qui montre que le point critique est un nœud stable alors que la partie réelle des valeurs propres complexes passe de positive à négative lorsque la valeur de  $b$  augmente*

*c'est-à-dire que l'origine passe d'une spirale instable à une spirale stable. Cela suggère qu'une sorte de bifurcation de Hopf a lieu lorsque la partie réelle de la valeur propre complexe est nulle. Le tableau 5 montre les valeurs propres au point fixe  $P_1$ .*

TAB. 3.3 – les valeurs propres au point fixe P1 lorsque b est augmenté.

<b>b</b>	$\lambda_1$	$\lambda_{2,3}$
0.8	-4, 59309	0, 186972 ± 0, 978502i
2	-4, 42292	0, 157199 ± 0, 977688i
3.5	-4, 19011	0, 114178 ± 0, 975693i
4	-4, 10648	0, 0980382 ± 0, 974702i
6.444	-3, 63729	0, 0000483 ± 0, 966032i
6.454	-3, 6351	-0, 000439 ± 0, 965978i
7	-3, 51154	-0, 028555 ± 0, 962696i

*De même au point fixe  $P_2$ , l'une des valeurs propres est positive ce qui montre que le point critique est un nœud instable, alors que la partie réelle des valeurs propres complexes passe de positive à négative lorsque le paramètre b est augmenté c'est-à-dire que l'origine passe d'une spirale instable à une spirale stable. Cela suggère qu'une sorte de bifurcation de Hopf a lieu lorsque la partie réelle des valeurs propres complexes est nulle. Le tableau 6 montre les valeurs propres au point fixe de  $P_2$ .*

TAB. 3.4 – les valeurs propres au point fixe P2 lorsque b est augmenté.

<b>b</b>	$\lambda_1$	$\lambda_{2,3}$
0.05	0, 377105	0, 01426461 ± 3, 52704i
0.1	0, 376733	0, 012263 ± 3, 52549i
0.5	0, 373712	-0, 0038711 ± 3, 512954i
2	0, 3615865	-0, 0665308 ± 3, 4626686i
2.6	0, 3563348	-0, 092646 ± 3, 4409390i
3	0, 3563348	-0, 092646 ± 3, 4409390i
4	0, 363918	-0, 018836 ± 3, 24512i

## 3.2 Section Poincaré

Lorsque le paramètre  $c$  est augmenté : Nous avons observé que notre modèle montre une période un cycle limite lorsque  $c$  se situe entre 1,7 et 2,1 et une amplitude distincte dans la série chronologique, puis il subit un comportement de période deux lorsque  $c$  est compris entre 2,2 et 2,5, avec deux amplitudes distinctes. Lorsque  $c$  est compris entre 2,6 et 2,8, il affiche un cycle limite de période quatre avec quatre amplitudes. Lorsque  $c = 2,9$  et plus, il subit un comportement aléatoire, c'est-à-dire un comportement chaotique. Nous avons montré la section Poincaré, le portrait de phase et les séries chronologiques de notre modèle lorsqu'il affiche la période un, deux, quatre et finalement le choix à certains paramètres fixes dans la plage donnée. Par conséquent, nous avons observé que notre modèle subit une route de doublement de période vers le chaos, c'est-à-dire qu'il subit une bifurcation lorsque le paramètre  $c$  est augmenté.

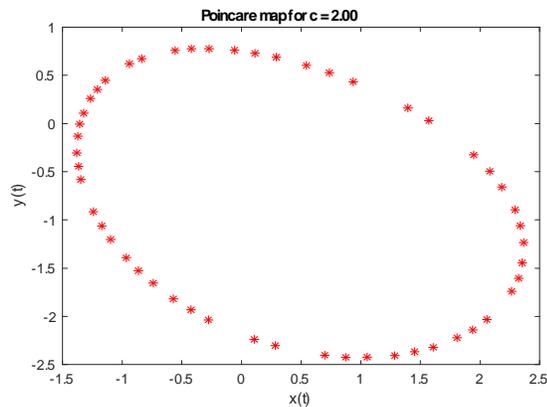


FIG. 3.2 – Section de Poincaré pour  $c = 2$

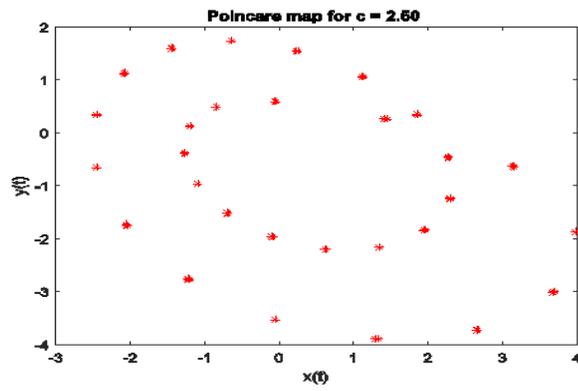


FIG. 3.3 – Section de Poincaré pour  $c = 2,5$

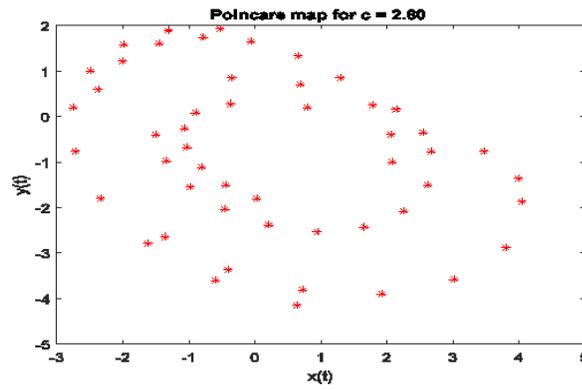


FIG. 3.4 – Section de Poincaré pour  $c = 2,6$

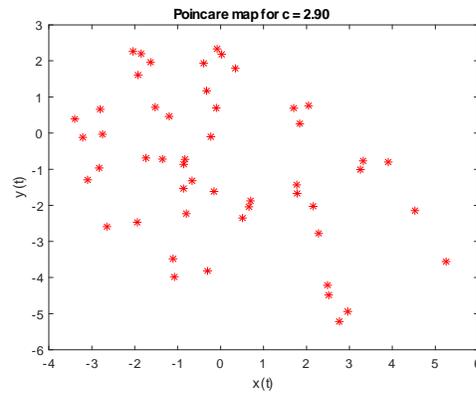


FIG. 3.5 – Section de Poincaré pour  $c = 2,9$

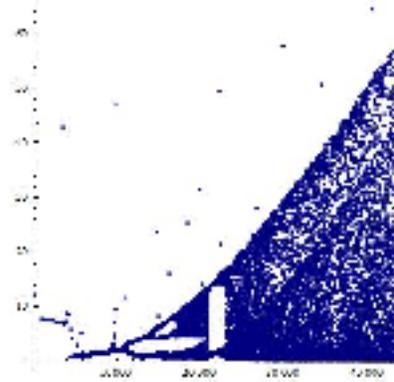


FIG. 3.6 – Diagramme de bifurcation de système de Rössler  $a = 0,41$ ,  $b = 0,8$ ,  $c$  entre 1 et 5,8.

- Lorsque le paramètre  $b$  est augmenté, nous observons que notre modèle subit une route sans dédoublement de période vers le chaos. Lorsque  $b < 3$ , il montre un comportement chaotique avec un comportement aléatoire dans le tracé de la série chronologique, à  $b = 3,1$ , il montre un comportement de la période quatre avec quatre amplitudes distinctes dans le tracé de la série chronologique, lorsque  $3,2 \leq b \leq 3,6$  montre le comportement de la période deux avec deux amplitudes distinctes, entre 3,7 et 5,8 il montre le comportement de la période un. Nous avons montré la section Poincaré, le portrait de phase et la série chronologique qui montre la période de chaos quatre, deux et un lorsque le paramètre  $b$  est augmenté.

**Remarque 3.2.1** *Le modèle ne montre aucun comportement spécifique lorsque le paramètre  $a$  est augmenté ou diminué en gardant les deux autres paramètres fixes.*

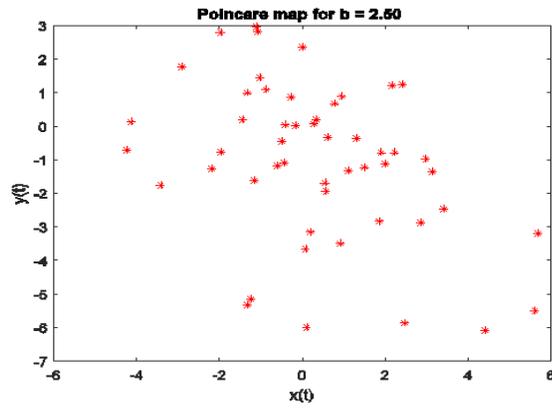
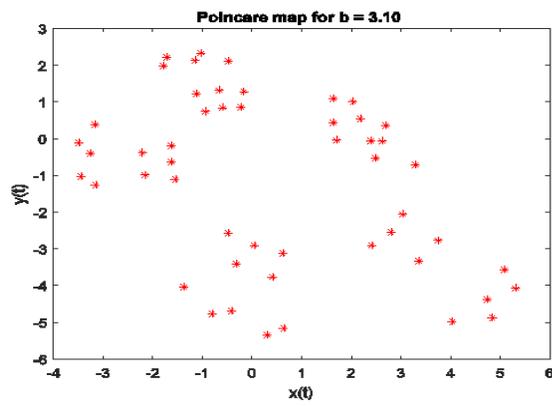


FIG. 3.7 – Section de Poincaré pour  $b = 2,5$



Section de Poincaré pour  $b = 3,1$

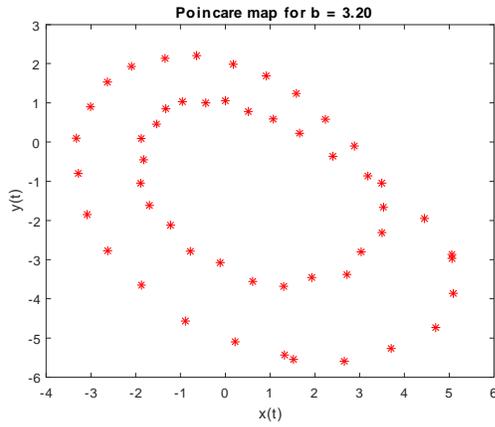


FIG. 3.8 – Section de Poincaré pour  $b = 3, 2$

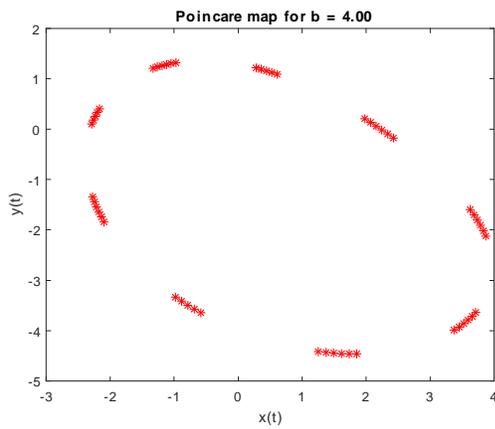


FIG. 3.9 – Section de Poincaré pour  $b = 4$

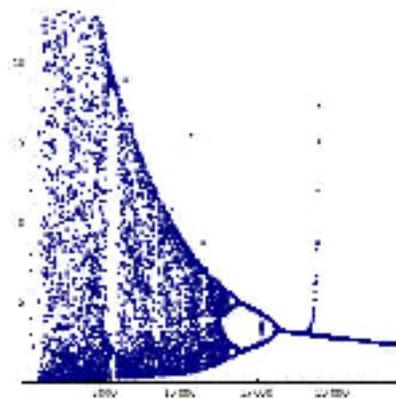


FIG. 3.10 – Diagramme de bifurcation de système de Rössler  $a = 0, 41$ ,  $c = 4, 7$ ,  $b$  entre 0.2 et 5.



# Bibliographie

- [1] Devaney, R. (2008). An introduction to chaotic dynamical systems. Westview press (Book By Robert L. Devaney).
- [2] Hamiche, H. (2011). Inversion à gauche des systèmes dynamiques hybrides chaotiques : Application à la transmission sécurisée de données (Doctoral dissertation, Université Mouloud Mammeri).
- [3] Hammami, S. (2009). Sur la stabilisation de systèmes dynamiques continus non linéaires exploitant les matrices de formes en flèche : application à la synchronisation de systèmes chaotiques (Doctoral dissertation, Ecole Centrale de Lille ; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie)).
- [4] Kharkhache, C., & Chaibi, S. (2019). Le Chaos dans les systèmes dynamiques (Doctoral dissertation, Université laarbi tebessi tebessa).
- [5] Marle, C. M. (2003). Systèmes dynamiques : une introduction. Ellipses.
- [6] Menacer, T. (2014). Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires (These Université Frères Mentouri - Constantine 1).
- [7] Merabti, N. L., & Diar, A. (2020). Etude de quelques systèmes dynamiques chaotiques (These Université Oum El Bouaghi).
- [8] Moser, J., Moser, J., & Zehnder, E. (2005). Notes on dynamical systems (Vol. 12). American Mathematical Soc., (These New York University).

- [9] Müllhaupt, P. (2009). Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires. PPUR Presses polytechniques
- [10] Ott, E. (2002). Chaos in dynamical systems. Cambridge university press.
- [11] Sarmah, H. K., Baishya, T. K., & Ch, M. (2013). Das, Period Doubling Bifurcation and Feigenbaum Universality in Rössler system. Journal of Global Research in Mathematical Archives, 1(9),(These Department of Mathematics, Gauhati University, Assam).
- [12] Senouci, A. (2020). Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider–BISKRA).