

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**Université Mohamed Khider Biskra**  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
**Département de Mathématiques**



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : **Probabilité**

**Par :**

**MECHERI DOUNIA**

**Titre :**

---

---

**Solution numérique des EDS localement Lipschitzienne**

---

---

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Lakhdari Imad Eddine	Université de Biskra	Président
Pr.Khalfallah Nabil	Université de Biskra	Encadreur
Dr.Gatt Rafika	Université de Biskra	Examineur

**26/06/2022**

# *Dédicace*

Je dédie ce mémoire

À Ma chère Mère .

À Mon chère père.

À mes frères :abdelkader,mohamed,abderazake.

À mes belles sœurs :ibtissame,basma.

À mes chères amies :sadika,chaima, .....

À tous ceux qui étaient à côtés de moi.

# Remerciement

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

J'exprime mes profondes gratitude à mes parents.

Je tiens tout d'abord à exprimer à mon encadreur le Pr. "Khalfallah Nabil", de sa disponibilité, ses précieux conseils et la confiance, qu'il m'a accordée, qui ont fortement contribué à mener à bien ce travail.

C'est avec un grand honneur que je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mme "Salima Doubbakh", doctorante de troisième année, pour ses conseils et ses encouragements. De l'aide que vous m'avez apportée tout au long de mes études.

Je remercie également les membres de jury, qui ont accepté de lire et d'évaluer ce travail.

Mes remerciements vont aussi à les professeurs "Yakhlef Samia, Ghoul, Dakhia, Necir Abdelhakim"

À toutes mes amies "sadika", "chaima", ...et toute personne qui ont gagné à la réalisation de ce travail

Merci à tous les personnes qui m'ont encouragé.

## Notations et symbols

$S^p([0, T])$	L'ensemble de toutes les processus $\{\Phi(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est $\mathcal{F}_t$ -adaptés à valeurs réelles $, \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T}  \Phi(t) ^p < \infty, p > 0$
$L^p_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)$	L'ensemble de tous processus $x(\cdot)$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ progressivement mesurable, $E \int_0^T  x(t) ^p dt < \infty$ .
$C([0, T]; L^p(\Omega, \mathbb{R}^n))$	L'ensemble de tous processus $x(\cdot)$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -progressivement mesurable, l'application $t \rightarrow x(t) \in L^p(\Omega)$ est continue et $E \left[ \sup_{t \in [0, T]}  x(t) ^p \right] < \infty$ .
$M^2(\{t_0, T\}; \mathbb{R}^d)$	Toute famille des processus $(X_t)_{t_0 \leq t \leq T}$ dans $L^p(\{t_0, T\}; \mathbb{R}^d)$ , $\mathbb{E}[\int_{t_0}^T  X_t ^p dt] < \infty$ .
SISS	Semi Implicite Split Step.
SS	Split Step.
$L^p$	La norme d'ordre p.
$\mathbb{E}_m[\cdot]$	Espérance conditionnelle.
$\mathbb{E}[\cdot]$	Espérance mathématique.
$\{\cdot\}^c$	Complémentaire.

min	Minimum.
$B = (B_t)_{0 \leq t}$	Mouvement Brownien standard.
p.s	Presque surement.
$Cov(B_s, B_t)$	Fonction de covaraince du mouvement Brownien.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	Tribus Borélienne sur $\mathbb{R}^d$
$C^k$	Ensemble des fonctions $k$ -fois dérivables où le $k^{\text{ème}}$ dérivée est continue.
$\mathbb{R}^{d \times d}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $d \times d$ .
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension $d$ .
$\Omega$	Ensemble non vide (espace d'état).
$C_b^k$	Ensemble des fonctions $k$ -fois dérivables où le $k^{\text{ème}}$ dérivée est continue et bornée.
$\mathbb{P}$ -p.s	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ .
E-M	Euler Maruyama.
i.e	C'est-à-dire.

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Notations et symbols	iii
Table des matières	iv
Introduction	1
<b>1 Outils fondamentaux</b>	<b>4</b>
1.1 Processus stochastique . . . . .	4
1.2 Mouvement Brownien . . . . .	7
1.3 Processus d'Itô et les EDS . . . . .	9
1.4 Résultats utiles . . . . .	15
<b>2 Discrétisation d'équation différentielle stochastiques</b>	<b>18</b>
2.1 Schéma de discrétisation par la méthode d'Euler-Maruyama . . . .	19
2.2 Schéma de discrétisation par la méthode de Milshtein . . . . .	21

<b>3 Méthodes numériques pour les EDS localements Lipschitziennes</b>	<b>24</b>
3.1 Méthodes des étapes fractionnées et semi-implicite à étapes fractionnées (SS  SISS)	26
3.1.1 Méthode des étapes fractionnées	27
3.1.2 Une classe d'EDS non linéaires et les méthodes semi-implicites à étapes fractionnées	31
3.1.3 Les méthodes semi-implicite à étapes fractionnées pour le cas scalaire	37
3.2 Quelques exemples numériques	43
<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
<b>Annexe</b>	<b>47</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>49</b>

# Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques notées EDS ou en anglais SDE (stochastic differential equations), ce dernier est considéré comme une généralisation de la notion d'équation différentielle (EDO) perturbée avec un terme aléatoire, ces équations fournissent des modèles en physique, biologie (génétique et dynamique des populations), économie et finance. Le modèle le plus connu est basé sur une EDS, c'est le modèle de Black et Scholes, qui est un modèle classique en mathématiques financières. Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on considère deux fonctions  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'EDS

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 &= x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Cette équation est à interpréter au sens d'une équation intégrale, comme suite :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Le coefficient  $b$  s'appelle la dérive tandis que  $\sigma$  s'appelle la matrice de diffusion.

Dans de nombreux cas, on ne peut pas trouver une solution exacte aux EDS

(1), pour traiter ce problème nous devons donc avoir recours à des méthodes numériques afin de trouver une bonne approximation de la solution recherchée. Parmi différentes méthodes de discrétisations approximatives (Euler-Maruyama, Trapèzes, Runge Kutta, Milstein...), nous présentons dans ce travail seulement les approximations d'Euler-Maruyama et de Milstein.

L'approximation d'Euler-Maruyama "également appelée méthode d'Euler explicite" est l'une des méthodes les plus simples pour la résolution des EDS, il s'agit d'une simple généralisation de la méthode d'Euler pour des équations différentielles ordinaires aux EDS, la méthode de Milstein aussi est une technique de résolution numérique approchée d'une EDS basé sur la méthode de E-M, on ajoute au schéma de discrétisation d'Euler, le terme suivant

$$\frac{1}{2}\sigma'(X_{t_{i-1}}^n)\sigma(X_{t_{i-1}}^n)\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \Delta^n t\}.$$

Nous avons appliqué ces deux méthodes à EDS (1), dans le cas où la dérive et la partie de diffusion sont globalement Lipschitz et vérifient une condition de croissance linéaire.

Cependant, la plupart de ces méthodes ne s'appliquent pas lorsque les coefficients ne sont pas globalement Lipschitz ou s'ils ont une croissance linéaire, pour résoudre ce problème nous avons recours à une nouvelle procédure numérique basée sur le schéma d'Euler-Maruyama et représentée dans la méthode des étapes fractionnées et la méthode de semi-implicite à étapes fractionnées, ces méthodes sont introduites dans les EDS non linéaire localement Lipschitz avec une terme de dérive prend une forme particulière. De plus, on étudie certaines propriétés concernant la stabilité des estimations de moments et les résultats de convergence. On applique ces méthodes sur une classe des EDS de type Ginzburg-Landau, nous avons

soutenu le côté théorique avec quelques exemples numériques afin de comparer les taux de convergences.

Généralement nous allons présenter dans ce travail trois chapitres.

**Chapitre 1 :** Est un chapitre introductif, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définitions, propositions, théorèmes et des résultats de bases du calcul stochastique tels que les processus stochastiques, espérance conditionnelle, mouvement Brownien, l'intégrale d'Itô...etc.

**Chapitre 2 :** Le but de ce chapitre est de définir des schémas numériques pour une équation différentielle stochastique dans le cas où le terme de dérive et de diffusion sont globalement Lipschitz et vérifient une condition de croissance linéaire. Nous sommes concentrés sur deux méthodes, la méthode d'Euler-Maruyama et la méthode de Milstein.

**Chapitre 3 :** L'objectif de ce chapitre est de présenter des nouvelles procédures numériques qui sont les méthodes d'étapes fractionnées (Split-Step method) et semi implicite à étapes fractionnées (Semi-Implicit Split-Step method) pour obtenir des solutions numériques d'une classe d'EDS non linéaires et localement Lipschitz vérifient certaines conditions de monotonie et de dissipativité sur le terme de dérive. On applique ces méthodes pour résoudre une classe particulière des EDS généralisées de Ginzburg-Landau. À l'aide de simulations, nous comparons la forte performance de convergence de ces méthodes.

# Chapitre 1

## Outils fondamentaux

Ce chapitre consacré à la présentation des quelques résultats utiles au cours de ce mémoire. Nous allons donc rassembler les notions de base de la théorie des probabilités et le calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail telles que le processus stochastique, le mouvement Brownien, processus d'Itô, les équations différentielles stochastiques. La matière de ce chapitre est basée essentiellement sur les références suivantes [1], [2], [3], [10], [11], [12], [13].

### 1.1 Processus stochastique

On se donne  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité complet.

**Définition 1.1.1** (*Variable aléatoire*) : On appelle variable aléatoire (réelle)

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

toute application mesurable, c'est-à-dire :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

où  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est la tribu borélienne.

**Définition 1.1.2 (Tribu) :** Une tribu  $\mathcal{F}$  ( $\sigma$ -algèbre) sur  $\Omega$  est une famille de parties de  $\Omega$  vérifiant :

1. Contenant l'ensemble vide i.e :  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
2. Stable par passage au complémentaire. i.e :  $\forall A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ ,
3. Stable par réunion et intersection dénombrable. i.e : si

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \implies \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \in \mathcal{F}.$$

**Définition 1.1.3 (Filtration) :** Une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{F}$  i.e  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$ .

1. L'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  s'appelle espace filtré.
2. Une filtration est  $\mathbb{P}$ -complète pour une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  si  $\mathcal{F}_0$  contient tous les évènements de mesure nulle, i.e  $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$ .
3. On dit que un espace filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  satisfait les conditions habituelles si :
  - Les ensembles négligeables sont contenus dans  $\mathcal{F}_0$  i.e  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ ,
  - La filtration est continue à droite i.e  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s \quad \forall t$ .

**Définition 1.1.4 (Processus stochastique) :** Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in T}$  est une famille de variables aléatoires  $X_t$  indexée par un ensemble  $T$ . En général  $T = \mathbb{R}^+$  et on considère que le processus est indexé par le temps  $t$ .

1. Si  $T$  est ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire,
2. Si  $T = \mathbb{N}$ , le processus est une suite de variables aléatoires,
3. Si  $T \subset \mathbb{Z}$ , le processus est dit discret,
4. Si  $T \subset \mathbb{R}^d$ , on parle de champ aléatoire.

**Définition 1.1.5 (Mesurable-Adapté-Progressivement mesurable) :**

1. Un processus  $X$  est mesurable si, l'application  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$  est mesurable par rapport aux tribus  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
2. Un processus  $X$  est adapté par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si, pour tout  $t \geq 0$   $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
3. Un processus  $X$  est Progressivement mesurable par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$  de  $[0, t] \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Définition 1.1.6 (Espérance conditionnelle) :** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telle que  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ . On appelle espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}$ , toute variable aléatoire  $Y$  satisfaisant les deux conditions

1.  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable,
2.  $\forall A \in \mathcal{F}$ , on a

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.$$

**Proposition 1.1.1 (Propriétés de l'espérance conditionnelle) :**

1. *Linéarité* : On a  $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ ,
2. On a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{F})|) \leq \mathbb{E}(X)$ ,
3. Si  $X$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable,  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = X$ ,
4. Si  $X, Y \in L^1$  telle que  $X \leq Y$ , alors  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ ,
5. Si  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable,  $\mathbb{E}(XY | \mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ ,
6. Si  $X \geq 0$ , alors  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ ,
7. *Croissance* : Soient  $X, Y$  deux v.a telle que  $X \leq Y$ , alors

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}),$$

8. On a  $X \in L^1 \Leftrightarrow |X| \in L^1$  et on a  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$ ,
9. Si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ .

**Définition 1.1.7 (Martingale)** : Le processus stochastique  $M = (M_t)_{t \in T}$  défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ . On dit que  $M$  est une martingale si :

- (i)  $M$  est adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  (soit pour chaque  $t \in T$ ,  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable),
- (ii)  $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty, \forall t \in T$ ,
- (iii)  $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ , pour tout  $0 \leq s \leq t$ .

## 1.2 Mouvement Brownien

**Définition 1.2.1 (Mouvement Brownien)** : Le processus  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien (standard) si :

- (i)  $B_0 = 0$ ,
- (ii)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $(t - s)$ ,
- (iii)  $\forall n, \forall t, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , les variables  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}$  sont indépendants,
- (iv)  $B$  est un processus à trajectoires continues.

**Proposition 1.2.1** : Le processus  $B$  est gaussienne d'espérance nulle et sa covariance donnée par

$$\text{cov}(B_t, B_s) = s \wedge t.$$

**Proposition 1.2.2** :

- \* Si  $B$  est un processus gaussien d'espérance nulle et de covariance  $\text{cov}(B_t, B_s) = \min(s, t)$  et  $B_0 = 0$  alors  $B$  est un mouvement Brownien standard,
- \*  $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_t) = t - s$ ,
- \* Le mouvement Brownien est une martingale par rapport à sa filtration canonique.

**Définition 1.2.2 (Mouvement Brownien géométrique)** : Un processus stochastique de la forme

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left( b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\},$$

est appelé mouvement Brownien géométrique, telle que  $b$  et  $\sigma$  deux constante et  $B$  mouvement brownien.

### 1.3 Processus d'Itô et les EDS

On se donne un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et un mouvement Brownien  $B$  sur cet espace. On désigne par  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$  la filtration naturelle du mouvement Brownien.

**Définition 1.3.1 (Processus d'Itô) :** On appelle processus d'Itô un processus  $X$  à valeurs réelles tel que :

$$\mathbb{P}\text{-p.s.}, \forall 0 \leq t \leq T, X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \forall t \leq T.$$

où  $x$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $b$  et  $\sigma$  sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions  $\mathbb{P}$ -p.s :

$$\int_0^t b_s ds < \infty \text{ et } \int_0^t |\sigma_s|^2 ds < \infty.$$

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient  $b$  est le drift ou la dérive,  $\sigma$  est le coefficient de diffusion.

**Théorème 1.3.1 (Formule d'Itô) :**

· **Première formule d'Itô :**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds,$$

et sous la forme différentielle :  $df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_t^2 dt$ .

• **Deuxième formule d'Itô :**

Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  de  $C^1$  par rapport à  $t$ , de  $C^2$  par rapport à  $x$  on

a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_x(s, X_s) d\langle X_s \rangle,$$

où

$$\begin{aligned} d\langle X_s \rangle &= \langle dX_s, dX_s \rangle \\ &= \langle b_s ds + \sigma_s dB_s, b_s ds + \sigma_s dB_s \rangle \\ &= \sigma_s^2 ds, \end{aligned}$$

et sous forme différentielle :

$$df(t, X_t) = f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''_x(t, X_t) d\langle X_t \rangle.$$

**Proposition 1.3.1 (Intégration par partie) :** Si  $X$  et  $Y$  sont deux processus d'Itô, alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_s.$$

**Définition 1.3.2 (Équation différentielle stochastique) :** On appelle équation différentielle stochastique une relation de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

ou sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{1.1}$$

où :

- Soient  $n, d \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (condition initiale), et  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel.
- Les fonctions  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  sont mesurables et bornées.

L'inconnue est le processus  $X$ . Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients  $b$  et  $\sigma$ , l'EDS (1.1) a une unique solution.

**Définition 1.3.3 (Solution d'une EDS) :** Une solution de l'EDS (1.1), est un processus continu  $X$  tel que :

1.  $X$  est progressivement mesurable,
2. On a

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t \{ |b(s, X_s)| + \|\sigma(s, X_s)\|^2 \} ds \right] < +\infty$$

où  $\|\sigma\|^2 = \text{trace}(\sigma\sigma^*)$ ,

3.  $\mathbb{P}$ -p.s on a :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

**Théorème 1.3.2 (Existence et unicité dans le cas globalement Lipchitzienne) :**

Soient  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  :

1. *Condition de Lipschitz en espace uniforme en temps :*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K |x - y|, \quad (1.2)$$

2. *Condition de croissance linéaire :*

$$|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + |x|), \quad (1.3)$$

3.  $\mathbb{E} [|x|^2] < \infty$ .

Alors, il existe une unique solution de l'EDS (1.1) à trajectoire continues pour tout  $t$ .

### Condition 1

**(H1)**  $b : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $\mathbf{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mesurable, où  $\mathbf{P}$  est la tribu des processus  $\mathcal{F}_T$ -progressivement mesurables sur  $\Omega \times [0, T]$ . L'application  $x \rightarrow b(x, t)$  est  $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et satisfait une condition de  $\alpha$ -dissipativité, i.e il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que,  $\mathbb{P}$ -p.s.

$$\langle b(x, t) - b(x', t), x - x' \rangle \leq \alpha |x - x'|^2, \quad t \in [0, T], \quad x, x' \in \mathbb{R}^n,$$

**(H2)**  $\sigma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  est mesurable par rapport à  $\mathbf{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . De plus l'application  $x \rightarrow \sigma(x, t)$  est  $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times d})$  et il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que,  $\mathbb{P}$ -p.s.

$$|\sigma(x, t) - \sigma(x', t)| \leq C_1 |x - x'|, \quad t \in [0, T], \quad x, x' \in \mathbb{R}^n,$$

**(H3)** (Croissance polynomiale) :

$$\exists c > 0 \text{ et } r \in \mathbb{N}, |b(x)| \leq c(1 + |x|^r), \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

**(H4)** (Croissance linéaire) :  $\exists k > 0, |\sigma(x)|^2 \leq k(1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^d$ .

**Théorème 1.3.3** (*Existence et unicité dans le cas localement Lipschitzienne*) :

Sous les hypothèses (H1)-(H4) l'équation stochastique (1.1) admet une solution unique  $X_t$  progressivement-mesurable en  $C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ .

**Preuve.** : En fixant  $\gamma \in C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ , par un argument de point fixe on veut montrer que le problème

$$dX(t) = b(t, X(t)) dt + \sigma(t, \gamma(t)) dB_t, \quad X(0) = x_0,$$

admet une unique solution  $J(\gamma)$  qui appartient à  $C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ . La partie existance découle du fait que le problème reformulé en une équation différentielle de la forme

$$\frac{d}{dt} \eta(t) = b(t, \eta(t) + \omega^\gamma(t))$$

où  $\omega^\gamma(t) := \int_0^t \sigma(s, \gamma(s)) dB(s)$  est bien définie grâce à la croissance linéaire imposée par l'hypothèse de Lipschitz. Puisque  $b(\cdot)$  est continue, on sait qu'il existe une solution locale qui peut être facilement étendue à l'ensemble  $[0, T]$ , par les hypothèses de dissipativité. Il reste maintenant à vérifier que l'opérateur  $J : C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$  est une contraction si  $T_0$  est assez petit, alors pour tout  $\gamma_1, \gamma_2 \in C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$  :

$$J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2) = \int_0^t [b(s, J_s(\gamma_1)) - b(s, J_s(\gamma_2))] ds + \int_0^t [\sigma(s, \gamma_1(s)) - \sigma(s, \gamma_2(s))] dB_s,$$

alors par la formule d'Itô

$$\begin{aligned} d[|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)|^2] &= 2|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)| d[J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)] + \frac{1}{2} 2d \langle J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2) \rangle \\ &= 2|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)| [(b(t, J_t(\gamma_1)) - b(t, J_t(\gamma_2)))dt \\ &\quad + (\sigma(t, \gamma_1(t)) - \sigma(t, \gamma_2(t)))dB_t] + [\sigma(t, \gamma_1(t)) - \sigma(t, \gamma_2(t))]^2 dt, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)|^2] &= 2\mathbb{E} \int_0^t \langle b(s, J_s(\gamma_1)) - b(s, J_s(\gamma_2)), J_s(\gamma_1) - J_s(\gamma_2) \rangle ds \\ &\quad + \mathbb{E} \int_0^t \|\sigma(s, \gamma_1(s)) - \sigma(s, \gamma_2(s))\|_2^2 ds \\ &\leq 2\alpha \int_0^t \mathbb{E}|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)|^2 ds + C_1^2 \int_0^t \mathbb{E}|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

et donc par le lemme de Gronwall (1.4.1)

$$\mathbb{E}[|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)|^2] \leq C_1^2 e^{2\alpha t} \int_0^t \mathbb{E}|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|^2 ds,$$

où nous avons utilisé des hypothèses sur les coefficients. Eventuellement

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[|J_t(\gamma_1) - J_t(\gamma_2)|^2] &\leq C_1^2 \sup_{t \in [0, T]} e^{2\alpha t} \int_0^t \sup_{s \in [0, T]} \mathbb{E}|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|^2 ds \\ &\leq C_1^2 e^{2\alpha T} T \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|^2, \end{aligned}$$

et si on choisit  $T_0$  tel que  $C_1 \sqrt{T_0} e^{\alpha T_0} < 1$  on prouve que  $J$  est une contraction. En procédant de même sur  $[T_0, T_1]$ ,  $[T_1, T_2]$ , ... on trouve une solution unique définie sur l'ensemble  $[0, T]$ . ■

**Proposition 1.3.2** : *Sous les hypothèses (H1), (H3) et (H4) l'équation stochastique (1.1) admet une solution unique  $X(t)$  progressivement mesurable en  $C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ .*

**Preuve.** La preuve de cette proposition se fait en utilisant la même technique de la preuve du théorème (1.3.3). ■

## 1.4 Résultats utiles

**Définition 1.4.1 (La convergence presque sûre) :** Une suite  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers la variable aléatoire  $X$  si la convergence est vraie avec une probabilité 1

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

On note la convergence presque sûre :  $X_n \rightarrow X$  p.s.

**Définition 1.4.2 (La convergence en moyenne quadratique) :** La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge en moyenne quadratique vers la variable aléatoire  $X$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X_n - X|^2 = 0,$$

on note

$$X_n \xrightarrow{L^2} X.$$

**Définition 1.4.3 (La convergence dans  $L^p$ ) :** Soient  $X$  et  $(X_n)_{n \geq 0}$  des variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Si  $p > 0$ , on dénote par  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  l'ensemble des variables aléatoires  $X$  telles que  $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ . Si  $X_n, X \in L^p$ , on dit que  $X_n$  converge dans  $L^p$  vers  $X$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

**Définition 1.4.4 (Chaîne de Markov) :** Une chaîne de Markov est une suite

$X_0, X_1, \dots$  de variable aléatoire à valeurs dans un ensemble  $E$  (dit ensemble des états) où l'avenir ne dépend que du présent. i.e. :  $\forall x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ ,

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

**Lemme 1.4.1 (Lemme de Gronwall) :** Soit  $T > 0$  et soit  $g$  une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle  $[0, T]$ . Supposons qu'il existe deux constantes  $a \geq 0, b \geq 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds,$$

Alors, on a pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

**Théorème 1.4.1 (Théorème du point fixe) :** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $\varphi : E \rightarrow E$  une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport  $k < 1$ . Alors,  $\varphi$  admet un unique point fixe  $a \in E$  tel que :  $\varphi(a) = a$ .

**Définition 1.4.5 (Erreur quadratique moyenne "EQM" ) :** En statistique, l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur  $X^n$  d'un paramètre  $X$  de dimension 1 (mean squared error (MSE), en anglais) est une mesure caractérisant la "précision" de cet estimateur. i.e. :

$$MSE(X^n) = \mathbb{E} [(X^n - X)^2].$$

**Proposition 1.4.1 (L'inégalité de Cauchy Schwarz) :**  $\forall (f, g) \in L^2(\Omega) \times$

$L^2(\Omega)$ , on a

$$\left| \int_{\Omega} |f(t) \cdot g(t)| dt \right| \leq \left( \int_{\Omega} (f(t))^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\Omega} (g(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

où :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

# Chapitre 2

## Discrétisation d'équation différentielle stochastiques

Le but de ce chapitre est d'énoncer un schéma numérique d'une équation différentielle stochastique. Il est bien connu qu'il y a plusieurs méthodes pour discrétiser l'EDS mais nous avons concentrer à deux méthodes seulement, la méthode d'Euler-Maruyama et la méthode de Milstein. Dans le domaine des EDS, il existe une technique pour mesurer l'exactitude de cette approximation, en utilisant la convergence forte qui consiste en l'approximation des trajectoires des solutions peuvent être calculés (pour plus de détails voir [4] et [14]).

On définit l'équation différentielle stochastique par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ X_0 = x, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  définie sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , et  $\forall T > 0$ , on définit deux

fonctions mesurables :

$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ , et  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , vérifient la condition de Lipschitz (1.2) et la condition de la croissance linéaire (1.3), telle que  $x$  est une v.a  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et de carré intégrable.

## 2.1 Schéma de discrétisation par la méthode d'Euler-Maruyama

Le moyen le plus simple de résoudre l'EDS (2.1), dans le cas déterministe ( $\sigma(t, X_t) = 0$ ) est la méthode ou schéma d'Euler, qui est la plus connue et la plus utile dans le calcul stochastique pour trouver une solution approximée à une EDS donnée, cette méthode s'étend au cas des processus de diffusion sous le nom de la méthode d'Euler explicite (ou Euler-Maruyama), il consiste à calculer une approximation du processus continu  $X_t$  par une chaîne de Markov sur une discrétisation de l'intervalle  $[0, T]$ .

Pour construire ce schéma, on se donne une partition de l'intervalle  $[0, T]$ ,  $\pi^n := (t_0, \dots, t_i, \dots, t_n)$  avec  $t_i = \frac{iT}{n}$  et un pas uniforme  $h$ . Les accroissements du temps et du mouvement Brownien sont donnés par  $\Delta^n t = t_{i+1} - t_i$  et  $\Delta^n B_{i+1} = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . On a :

$$\begin{aligned} X_{t_i} &= X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_{t_i}) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_{t_i}) dB_s \\ &\simeq X_{t_{i-1}} + b(X_{t_{i-1}}) \Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}}) \Delta^n B_i, \end{aligned}$$

d'où la construction du schéma :

$$\begin{cases} X_{t_{i+1}}^n = X_{t_i}^n + b(t_i, X_{t_i}^n) \cdot h + \sigma(t_i, X_{t_i}^n) \Delta^n B_{i+1}, \\ X_0^n = X_0 \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \text{ où } h = \Delta^n t = \frac{T}{n}, \end{cases}$$

est approximation de  $X(t)$  discrétisée dans le temps.

Par définition de mouvement Brownien,  $\Delta^n B_i$  est une suite des vecteurs aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , indépendants et de même loi. Chacune des coordonnées de  $\Delta^n B_i$  suit la loi normale  $N(0, \Delta^n t)$  de moyenne 0 et d'écart type  $\sqrt{\Delta^n t}$ . Donc la simulation de  $X^n$  se ramène à la simulation des accroissements de  $B$ , où  $\Delta^n B_i$  suit la loi  $N(0, \Delta^n t I_d) = N(0, ht I_d)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Théorème 2.1.1 (Vitesse de convergence) :** *Supposons que  $\sigma$  et  $b$  sont des fonctions Lipschitziennes de classe  $C^4$ . Alors  $\forall p \geq 1$ , il existe une constante  $C$  tel que*

$$\left[ \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|X_t^n - X_t\|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

**Remarque 2.1.1** *On a :*

- L'approche forte consiste à comparer la solution exacte et son approximation pour une même trajectoire du mouvement brownien  $B$ .
- L'algorithme de simulation de la suite  $(X^n)$  est très facile à implémenter,
- La méthode d'Euler Maruyama a plusieurs avantages comme, la facilité de programmation, la rapidité de l'exécution mais elle représente aussi, comme dans le cas déterministe, le problème de cumul des erreurs (l'écart entre la solution exacte et la solution approximée augmente avec le temps).

**Exemple 2.1.1 :** *Considérons l'EDS linéaire  $dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dB_t$ , où  $X_0 = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ , la figure FIG 2.1 représente une trajectoire de l'EDS réalisée par un programme Matlab basée sur la méthode d'Euler-Maruyama, en la comparant avec la solution exacte. (Voir L'Annexe pour le programme).*

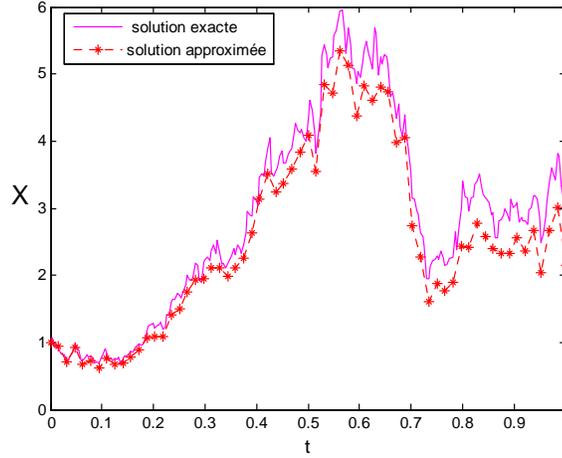


FIG. 2.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximée.

## 2.2 Schéma de discrétisation par la méthode de Milshtein

Dans le schéma d'Euler on a utilisé l'approximation

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s) dB_s \sim \sigma(X_{t_{i-1}}) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

et ce n'est pas la seule qu'on peut utiliser, on supposons que la dimension  $d = 1$  et  $b = 0$

pour  $s \in ]t_{i-1}, t_i]$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma(X_s) &= \sigma \left( X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^s \sigma(X_t) dB_t \right) \\ &\sim \sigma(X_{t_{i-1}} + \sigma(X_{t_{i-1}}) (B_s - B_{t_{i-1}})) \\ &\sim \sigma(X_{t_{i-1}}) + \sigma'(X_{t_{i-1}}) \sigma(X_{t_{i-1}}) (B_s - B_{t_{i-1}}), \end{aligned}$$

en utilisant l'égalité

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (B_s - B_{t_{i-1}}) dB_s = \frac{1}{2}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \Delta^n t),$$

ce qui donne l'approximation :

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s) dB_s \sim \sigma(X_{t_{i-1}}) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sigma'(X_{t_{i-1}}) \sigma(X_{t_{i-1}}) ((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \Delta^n t).$$

Le rôle de terme  $b$  (dérive) est minime dans l'erreur d'approximation par rapport au terme de diffusion donc il n'est pas nécessaire de le corriger.

1. Pour  $d = 1$ , on a le schéma d'approximation suivant :

$$\begin{cases} X_0^n = X_0, \\ X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + b(X_{t_{i-1}}^n) \Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}}^n) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}), \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma'(X_{t_{i-1}}^n) \sigma(X_{t_{i-1}}^n) \{ (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \Delta^n t \}, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

2. Pour  $d > 1$ , en suivant le même raisonnement on aura le schéma suivant :

$$\begin{cases} X_0^n = X_0, \\ X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + b(X_{t_{i-1}}^n) \Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}}^n) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ \quad + \sum_{j,k=1}^d (\nabla \sigma^j \sigma^k) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (B_s^j - B_{t_{i-1}}^k) dB_s^k, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

**Théorme 2.2.1 (Vitesse de convergence) :** Si  $b, a \in C_b^2$ , alors pour tout  $p \geq 1$ ,

$$\max_{i \leq n} \mathbb{E} [\|X_{t_i}^n - X_{t_i}\|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n}.$$

**Exemple 2.2.1 :** Considérons l'EDS  $dX_t = bX_t(k - X_t)dt + \sigma X_t dB_t$ , où  $X_0 = 0.5$ ,  $b = 2$ ,  $k = 1$ ,  $\sigma = 0.25$  et  $T = 1$ , la figure FIG 2.2 représente une trajectoire de l'EDS réalisée par un programme Matlab basé sur la méthode de Milstein, en comparant avec la solution approximée. (Voir l'Annexe pour le programme)

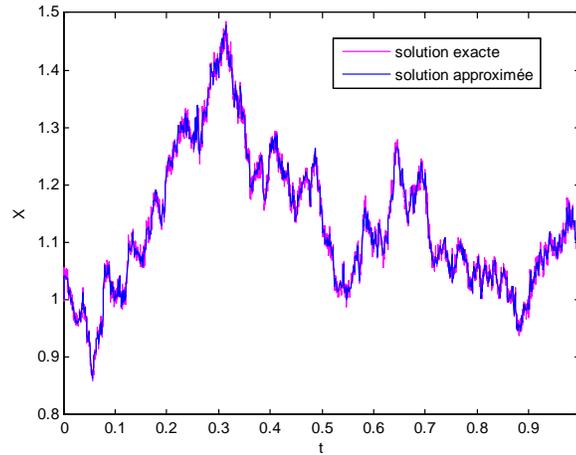


FIG. 2.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximée.

**Remarque 2.2.1** : *Ce théorème montre l'intérêt de schéma de Milshstein, qui permet d'avoir une vitesse de convergence  $L^p$  en  $\frac{1}{n}$  à la place de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  dans le schéma d'Euler.*

- Lors l'application de ce schéma, on a affaire à la simulation de l'intégrale d'Itô

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (B_s^j - B_{t_{i-1}}^j) dB_s^j,$$

ce qui difficile à calculer quand  $d > 1$ .

- Il existe plusieurs schéma d'ordres supérieurs à 1 mais, malheureusement, ils sont difficiles à appliquer, surtout quand la dimension est grande.

# Chapitre 3

## Méthodes numériques pour les EDS localement Lipschitziennes

Dans ce chapitre, nous discutons des solutions numériques d'une classe d'équations différentielles stochastiques non linéaires de la forme suivante

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad (3.1)$$

en utilisant des méthodes semi-implicites à étapes fractionnées. Sous certaines conditions de monotonie sur le terme de dérive, nous étudions les estimations des moments et les propriétés de convergence forte des solutions numériques, en mettant l'accent sur l'EDS de Ginzburg-Landau. De plus, nous comparons les performances de différentes méthodes, y compris SISS1, SISS2, SISS3 et SISS4. Voir [5], [8], [9].

**Condition 2** : Supposons que  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sont satisfait les conditions suivantes :

**(i) Condition de croissance linéaire unilatéral :**

$$\exists C > 0, \langle x, b(x) \rangle \leq C(1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

**(ii) Condition de Lipschitz unilatéral :**

$$\exists C > 0, \langle x - y, [b(x) - b(y)] \rangle \leq C|x - y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

**(iii) Dissipativité :**  $\exists \alpha \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  telle que  $\langle x, b(x) \rangle \leq \alpha - \beta|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^d,$

**(iv) Croissance linéaire :**  $\exists K > 0, |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^d,$

**(v) Croissance polynomiale :**

$$\exists c > 0 \text{ et } r \in \mathbb{N}, |b(x)| \leq c(1 + |x|^r), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Notez que chaque une des conditions (ii)-(iv) implique la condition (i) (si elle est appliquée à  $b(\cdot)$ ).

**Lemme 3.0.1 :** *Supposons que  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie les conditions (i) et (v), et  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  satisfait la condition de la croissance linéaire (iv) de la Condition 2. Alors*

**(i)** *Il existe une unique solution  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$  est  $\mathcal{F}_t$ -adaptée à l'EDS (3.1), l'estimateur d'ordre  $L^p, \forall p \geq 2$ , et  $t \in [0, T]$  :*

$$\mathbb{E} |X(t)|^p \leq 2^{\frac{p}{2}-1} (1 + |x_0|^p) e^{pC_0 t}, \text{ pour } C_0 > 0,$$

**(ii)** *Si  $b(\cdot)$  vérifie la condition (ii) ou (iii), alors la solution unique  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$*

est dans  $S^p([0, T])$ ,  $\forall p \geq 2$ , et elle satisfait l'estimation suivante :

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^p \leq C_1 (1 + |x_0|^p), \text{ pour } C_1 > 0,$$

(iii) Si  $K \leq 2\beta$  et  $b(\cdot)$  vérifie la condition (iii), alors on a le résultat suivant de la stabilité dans  $L^2(P)$  :

$$\mathbb{E} |X(t)|^2 \leq |x_0|^2 + 2(\alpha + \beta)t, \forall t \geq 0.$$

(iv)  $\exists C_2 > 0$ ,  $\forall 0 \leq s < t \leq T$ , la solution unique  $X$  de (3.1) satisfait :

$$\mathbb{E} |X(t) - X(s)|^2 \leq C_2 (1 + |x_0|^{r+1}) |t - s|.$$

**Preuve.** : Voir l'annexe A dans [8]. ■

**Remarque 3.0.2** Sous la condition 2 l'EDS (3.1) admet une solution unique d'après la proposition (1.3.2).

### 3.1 Méthodes des étapes fractionnées et semi-implicite à étapes fractionnées (SS |SISS)

On donne quelques résultats de moment et de stabilité de solution de l'EDS (3.1). Notre objectif donc est de construire une méthode numérique qui préserve ces propriétés. En utilisant une partition uniforme  $\Delta = \frac{T}{n}$  et l'étape initiale,  $X_0 = x_0$ , la procédure d'Euler-Maruyama standard consiste en les itérations

$$X_{m+1} = X_m + b(X_m)\Delta + \sigma(X_m)\Delta B_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

où

$$\Delta B_{m+1} = B[(m+1)\Delta] - B(m\Delta).$$

Malgré sa simplicité, cette procédure numérique peut être exploser en un temps fini lorsque soit la dérive soit le terme de diffusion a une croissance superlinéaire, comme prouvé dans [5].

### 3.1.1 Méthode des étapes fractionnées

Nous allons d'abord présenter la méthode d'approximation en deux étapes avec les itérations

$$X_m^* = X_m + \Delta b(X_m^*), \quad (3.2)$$

$$X_{m+1} = X_m^* + \sigma(X_m^*) \Delta B_{m+1}, \quad (3.3)$$

pour tout  $m = 1, 2, \dots, n$ . L'étape (3.2) peut être besoin d'avoir résolu approximativement si une solution explicite n'est pas existée. Pour  $1 \leq m \leq k \leq n$ , on a  $\mathbb{E}_m[X_k] = \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X_k | B_m]$ , grâce à la propriété de Markov. Si  $F^\Delta(\cdot)$  est une fonction vérifie

$$F^\Delta(x) = x + \Delta b(x) = x^*, \quad (3.4)$$

alors on peut représenter (3.3) par des itérations explicites

$$X_{m+1} = F^\Delta(X_m) + \sigma(F^\Delta(X_m)) \Delta B_{m+1}, \quad (3.5)$$

tant que nous pouvons résoudre l'EDS (3.4) exactement ou numériquement. Si l'expression  $F^\Delta(x)$  est obtenue explicitement (sous une forme simple), alors la

procédure (3.5) peut être mise en œuvre facilement. Sinon, on peut appliquer la méthode de Newton ou une autre approximation à chaque itération. Pour remédier ce problème, nous introduisons des procédures alternatives pour une classe de termes de dérive dans la sous-section suivante, dont la mise en œuvre peut être plus rapide que d'utiliser la fonction explicite  $F^\Delta(x)$  dans la procédure (3.5). Les méthodes des étapes fractionnées et ces variations sont viables et alternatives aux discrétisations explicites d'Euler-Maruyama lorsque le coefficient de dérive  $b(\cdot)$  ne satisfait pas la condition de croissance linéaire habituelle ou la condition de globalement Lipschitz. Nous énonçons maintenant les résultats suivants pour la procédure des étapes fractionnées (3.2)-(3.3) dans une configuration générale. Puis, nous considérons une famille d'EDS avec certaines formes des termes de dérive, et introduisons notre procédures numérique alternative dans la sous-section suivante. Notez que la stabilité de la procédure dépend de la valeur de  $K - 2\beta$  comme dans le lemme (3.0.1).

**Lemme 3.1.1** : Soient  $b(\cdot)$  et  $\sigma(\cdot)$  comme dans le lemme (3.0.1). Alors,

- (i)  $\mathbb{E} |X_m|^2 \leq \left(\frac{1+K\Delta}{1-2C\Delta}\right)^m |x_0|^2 + \left(\left(\frac{1+K\Delta}{1-2C\Delta}\right)^m - 1\right)$ , pour tout  $m = 1, 2, \dots, n$ .
- (ii) Si  $b(\cdot)$  satisfait également (iii) dans la condition 2, alors des meilleures bornes sont obtenues : pour  $K - 2\beta \neq 0$ ,

$$\mathbb{E} |X_m|^2 \leq \left(\frac{1+K\Delta}{1+2\beta}\right)^m |x_0|^2 + \left(\left(\frac{1+K\Delta}{1+2\beta}\right)^m - 1\right) \frac{2\alpha+K}{K-2\beta} + \left(\left(\frac{1+K\Delta}{1+2\beta}\right)^m - 1\right) \frac{2(\alpha+\beta)K}{K-2\beta} \Delta,$$

Autrement, si  $K - 2\beta = 0$ , alors

$$\mathbb{E} |X_m|^2 \leq |x_0|^2 + \frac{2(\alpha+\beta)}{1+2\beta\Delta} m\Delta + \frac{4(\alpha+\beta)\beta}{1+2\beta\Delta} m\Delta^2.$$

**Preuve.** :

(i) Tout d'abord, nous multiplions les deux membres de l'équation (3.2) par chacun des termes  $X_m$ ,  $X_m^*$  et  $b(X_m^*)$ , respectivement pour obtenir les trois équations :

$$\begin{aligned}\langle X_m, X_m^* \rangle &= |X_m|^2 + \Delta \langle b(X_m^*), X_m \rangle, \\ |X_m^*|^2 &= \langle X_m, X_m^* \rangle + \Delta \langle b(X_m^*), X_m^* \rangle, \\ \langle X_m^*, b(X_m^*) \rangle &= \langle b(X_m^*), X_m \rangle + \Delta |b(X_m^*)|^2.\end{aligned}$$

En utilisant des substitutions successives et la condition (i) dans la condition 2,

on a

$$\begin{aligned}|X_m^*|^2 &= \langle X_m^*, X_m^* \rangle \\ &= |X_m|^2 + 2\Delta \langle b(X_m^*), X_m^* \rangle - \Delta^2 |b(X_m^*)|^2 \\ &\leq |X_m|^2 + 2\Delta C(1 + |X_m^*|^2) - \Delta^2 |b(X_m^*)|^2 \\ &\leq |X_m|^2 + 2\Delta C + 2\Delta C |X_m^*|^2 - \Delta^2 |b(X_m^*)|^2,\end{aligned}\tag{3.6}$$

alors

$$(1 - 2\Delta C) |X_m^*|^2 \leq |X_m|^2 + 2\Delta C - \Delta^2 |b(X_m^*)|^2,$$

ce qui implique la majoration suivante pour tout  $m$

$$\begin{aligned}|X_m^*|^2 &\leq \frac{|X_m|^2 + 2\Delta C}{1 - 2\Delta C} - \frac{C\Delta^2(1 + |X_m^*|^{2r})}{1 - 2\Delta C} \\ &\leq \frac{|X_m|^2 + 2\Delta C}{1 - 2\Delta C}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Alors à partir de cette inégalité, la croissance linéaire de  $\sigma$ , l'étape (3.3) et en prenant l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_m |X_{m+1}|^2 &= |X_m^*|^2 + |\sigma(X_m^*)|^2 \Delta \\ &\leq (1 + K\Delta) \frac{|X_m|^2 + 2\Delta C}{1 - 2\Delta C} + K\Delta \\ &= \frac{(1 + K\Delta)}{1 - 2\Delta C} |X_m|^2 + \frac{(2C + K)}{1 - 2\Delta C} \Delta.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Alors, si on suppose que  $u = \frac{(1+K\Delta)}{1-2\Delta C}$  et  $v = \frac{2C+K}{1-2\Delta C}$ , on obtient inductivement les inégalités itératives,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} |X_{m+1}|^2 &= \mathbb{E} [\mathbb{E}_m |X_{m+1}|^2] \\ &\leq u^{m+1} (x_0)^2 + v (1 + u + u^2 + \dots + u^m) \Delta,\end{aligned}$$

Puis notant que  $v\Delta = u - 1$  et  $1 + u + u^2 + \dots + u^m = \frac{u^{m+1}-1}{u-1}$ ,

(ii) Revenons à l'inégalité (3.6) et en utilisant le fait que  $\langle x, b(x) \rangle \leq \alpha - \beta |x|^2$ , on trouve

$$|X_m^*|^2 \leq |X_m|^2 + 2\Delta (\alpha - \beta |X_m^*|^2)$$

Ceci implique que  $|X_m^*|^2 \leq \frac{|X_m|^2 + 2\Delta\alpha}{1+2\beta\Delta}$ .

En remplaçant l'inégalité  $|\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$  dans (3.8), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} |X_{m+1}|^2 &\leq (1 + K\Delta) |X_m^*|^2 + K\Delta \\ &\leq \frac{(1+K\Delta)}{1+2\beta\Delta} |X_m|^2 + \frac{2\alpha+K}{1+2\beta\Delta} \Delta + \frac{2(\alpha+\beta)K}{1+2\beta\Delta} \Delta^2,\end{aligned}$$

En particulier, il est clair que si on prend  $K = 2\beta$  alors  $\frac{(1+K\Delta)}{1+2\beta\Delta} = 1$ , d'où la deuxième inégalité de (ii),

$$\begin{aligned}\mathbb{E} |X_{m+1}|^2 &\leq (1 + K\Delta) |X_m^*|^2 + K\Delta \\ &\leq |X_m|^2 + \frac{2\alpha+K}{1+2\beta\Delta} \Delta + \frac{2(\alpha+\beta)K}{1+2\beta\Delta} \Delta^2.\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant des itérations comme dans la partie (i) et en simplifiant la série géométrique correspondante dans les coefficients pour obtenir (ii).

■

**Corollaire 3.1.1** : *Supposons que les hypothèses (ii) du lemme (3.1.1) soient*

vérifiées et  $K - 2\beta \leq 0$ . Alors, pour tout  $m \in N$  et  $\Delta > 0$ ,

$$\mathbb{E} |X_m|^2 < |x_0|^2 + 2(\alpha + \beta)m\Delta + 4(\alpha + \beta)\beta m\Delta^2.$$

En particulier, pour  $\Delta = \frac{T}{n}$ ,

$$\mathbb{E} |X_n|^2 < |x_0|^2 + 2(\alpha + \beta)T + 4(\alpha + \beta)\beta \frac{T}{n}.$$

**Remarque 3.1.1** : Ce corollaire implique que la solution numérique obtenue par la méthode des étapes fractionnées préserve le résultat de stabilité de la solution réelle dans le lemme (3.0.1) (iii) lorsque  $K - 2\beta \leq 0$ .

### 3.1.2 Une classe d'EDS non linéaires et les méthodes semi-implicites à étapes fractionnées

Dans cette sous-section, nous considérons une famille de coefficients de dérive localement Lipschitz  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que la  $i$ ème composante de la fonction vectorielle  $b(x)$  peut être écrite comme

$$b_i(x) = v_i(x) + x^{(i)}h_i(x), \tag{3.9}$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, d$ , où  $v_i(\cdot)$  et  $h_i(\cdot)$  sont des fonctions à valeurs réelles et  $x^{(i)}$  est la  $i$ ème composante de  $x$ . Une condition suffisante pour que l'hypothèse de monotonie (i) de la condition 2 soit vérifiée est la suivante :

**Condition 3** : Pour  $1 \leq i \leq d$ , la fonction  $h_i(\cdot)$  est bornée, et  $v_i(x)$  a une croissance linéaire en  $x$ .

En résumé, on considère un vecteur non linéaire d'une EDS de la forme (2.1) dont

la  $i$ ème composante satisfait l'EDS

$$dX^{(i)}(t) = b_i(X(t))dt + \sigma_i(X(t))dB(t), 0 < t \leq T, \quad (3.10)$$

où  $\sigma_i(x)$  représente la  $i$ ème ligne de la matrice  $\sigma(x)$ , pour tout  $i = 1, 2, \dots, d$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ . L'approche numérique que nous allons proposer consiste à approximer l'équation implicite (3.4) dans l'étape (3.2) de la méthode des étapes fractionnées comme suit : Commencant par  $x = x_0$ , nous résolvons

$$y^{(i)} = x^{(i)} + [v_i(x) + y^{(i)}h_i(x)] \Delta,$$

pour chaque  $i = 1, 2, \dots, d$  pour obtenir l'expression explicite  $y^{(i)} = \frac{x^{(i)} + v_i(x)\Delta}{1 - h_i(x)\Delta}$ . Alors, pour  $\Delta > 0$ , on définit les fonctions vectorielles  $f^\Delta, b^\Delta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  dont les  $i$ èmes composantes sont données par

$$f_i^\Delta(x) = \frac{x^{(i)} + v_i(x)\Delta}{1 - h_i(x)\Delta}, \quad (3.11)$$

$$b_i^\Delta(x) = \frac{f_i^\Delta(x) - x^{(i)}}{\Delta} = \frac{b_i(x)}{1 - h_i(x)\Delta},$$

respectivement. Alors, avec  $X_0^\Delta = x_0$ ,  $f^\Delta(x) = x + \Delta b^\Delta(x)$  et  $\Delta = \frac{T}{n}$ , on obtient le procédure d'approximation explicite suivante pour  $k = 0, 1, \dots, n - 1$

$$X_{k+1}^\Delta = f^\Delta(X_k^\Delta) + \sigma(X_k^\Delta)\Delta B_{k+1}, \quad (3.12)$$

Un autre choix avec un terme de diffusion légèrement différent,  $\sigma^\Delta(\cdot) = \sigma^\Delta(f^\Delta(\cdot))$ , serait

$$X_{k+1}^\Delta = f^\Delta(X_k^\Delta) + \sigma^\Delta(X_k^\Delta)\Delta B_{k+1}. \quad (3.13)$$

**Lemme 3.1.2** : Si les termes de dérive (3.9) satisfont la condition 3 et  $\sigma(\cdot)$  satisfait l'hypothèse (iv) de la condition 2. Alors, il existe  $0 < \Delta^* < T$  et  $D > 0$  tels que les itérations  $X_m$  définies par (3.12)-(3.13) pour résoudre l'équation (3.10) satisfont l'estimation suivante pour tous  $0 < \Delta \leq \Delta^*$  :

$$\sup_{1 \leq m \leq n} \mathbb{E} |X_m|^2 \leq e^{DT} (1 + |x_0|^2) - 1.$$

**Preuve.** : Soit  $M \geq 0$  tel que  $\sup\{h_i(x) : x \in \mathbb{R}^d; i = 1, 2, \dots, d\} \leq M$ . Supposons  $M > 0$ . Pour  $K_1 > 2M$ , soit  $\Delta_1 < \min\left\{\frac{1}{M} \left(1 - \left(\frac{2M}{K_1}\right)^{1/3}\right), T\right\}$ . Alors les inégalités  $1 - M\Delta > 0$  et  $\sup\left\{\frac{1}{(1-h_i(x)\Delta)^2} : x \in \mathbb{R}^d; i = 1, 2, \dots, d\right\} \leq \frac{1}{(1-M\Delta)^2} \leq 1 + K_1\Delta$  valable pour tout  $0 < \Delta = \frac{T}{n} \leq \Delta_1$ . Donc, par les conditions de croissance linéaire sur  $h_i(x)$  et  $\sigma(x)$ , il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $m = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X_m|^2 &= \mathbb{E} \left[ \left| f^\Delta(X_{m-1}^\Delta) \right|^2 + \left| \sigma(X_{m-1}^\Delta) \right|^2 \mathbb{E}_{m-1} |\Delta B_m|^2 \right] \\ &\leq \frac{\mathbb{E} |X_{m-1}|^2}{(1-M\Delta)^2} + C_1 (1 + \mathbb{E} |X_{m-1}|^2) \Delta + C_2 (1 + \mathbb{E} |X_{m-1}|^2) \Delta^2 \\ &\leq [1 + (dK_0 + K_1) \Delta] \mathbb{E} |X_{m-1}|^2 + dK_0 \Delta. \end{aligned}$$

Puisque  $\Delta^2 \leq \Delta$ . Plus explicitement, on peut trouver  $0 < \Delta^* < \min\{1, \Delta_1\}$  et  $D > C_1 + K_1$  telle que

$$\mathbb{E} |X_m|^2 \leq (1 + D\Delta) \mathbb{E} |X_{m-1}|^2 + D\Delta,$$

et par suite,  $\forall \Delta > 0$  et  $m = 1, 2, \dots, n$ .

$$\mathbb{E}[|X_m|^2 + 1] < [1 + D\Delta] (1 + \mathbb{E} |X_{m-1}|^2).$$

Nous répétons ce procédure plusieurs fois afin d'obtenir

$$1 + \mathbb{E} |X_m|^2 \leq (1 + D\Delta)^m (1 + |x_0|^2),$$

$\forall 1 \leq m \leq n$ , où

$$(1 + D\Delta)^m \leq \left(1 + \frac{DT}{n}\right)^n \leq e^{DT}.$$

■

**Remarque 3.1.2** : Il est facile de vérifier que pour  $0 < \Delta \leq \Delta^*$ ,  $f^\Delta(x)$  a une croissance linéaire en  $x$ , et  $b^\Delta(x)$  est localement Lipschitz satisfaisant l'hypothèse de monotonie (i) dans la condition 2. De plus, si  $b(x)$  satisfait l'hypothèse de dissipativité (iii) dans la condition 2. Il en est de même pour  $b^\Delta(x)$ , avec  $0 < \Delta \leq \Delta^*$ . Alors l'EDS

$$dY^\Delta(t) = b^\Delta(Y^\Delta(t)) dt + \sigma^\Delta(Y^\Delta(t)) dB_t, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.14)$$

avec le terme de dérive  $b^\Delta(x)$  et le terme de diffusion  $\sigma^\Delta(\cdot)$  serait un outil très utile pour l'analyse des erreurs.

**Corollaire 3.1.2** : Supposons que les hypothèses du lemme (3.1.2) soient vérifiées et que  $b(x)$  satisfait l'hypothèse de dissipativité (iii) dans la condition 2. Pour  $0 < \Delta \leq \Delta^*$ , considérons l'EDS (3.14) avec  $Y^\Delta(0) = x_0$ . Alors, la solution unique de cette EDS est dans  $S^p([0, T], \mathbb{R})$  et on a l'estimation

$$\mathbb{E} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 < \Delta \leq \Delta^*}} |Y^\Delta(t)|^p \leq C_1 (1 + |x_0|^p), \quad (3.15)$$

pour tout  $p \geq 2$ , où  $C_1 = C_1(p, T, \Delta^*)$ . De plus,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y^\Delta(t)|^2 \right] = 0. \quad (3.16)$$

Dans le reste de cette sous-section, nous focalisons sur l'application des méthodes semi-implicite à étapes fractionnées sur les EDS de Ginzburg-Landau. Plus précisément, pour  $\delta > 0$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  on considère les EDS de la forme (3.10) où  $\sigma_i(x)$  a une croissance linéaire en  $x$ , et

$$b_i(x) = Ax^{(i)} - \delta x^{(i)} |x|^{2k}, \quad (3.17)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, d$ . Il est facile de vérifier que la fonction  $b(x)$  satisfait l'hypothèse de monotonie (i) de la condition 2. Par conséquent, les estimations dans l'espace  $L^p$  et les résultats de la continuité en moyenne quadratique dans le lemme (3.0.1) s'appliquent à cette EDS.

**Remarque 3.1.3 :** Si on suppose que  $v_i(x) = 0$  et  $h_i(x) = A - \delta|x|^{2k}$ , alors les termes de dérive de la forme (3.17) vérifient la représentation  $f_i^\Delta(x) = \frac{x^{(i)}}{1 + \Delta(\delta|x|^{2k} - A)}$ . De même, avec  $v_i(x) = Ax^{(i)}$  et  $h_i(x) = -\delta|x|^{2k}$ , on obtient une autre représentation, soit  $g_i^\Delta(x) = \frac{x^{(i)}(1 + \Delta A)}{1 + \Delta\delta|x|^{2k}}$ . Quelques versions supplémentaires peuvent être obtenues en utilisant quelques itérations et approximations successives (par exemple, voir le cas scalaire dans la sous-section suivante).

**Lemme 3.1.3 :** Soit  $\sigma(x)$  satisfaire la condition 2 (iv) avec  $K = K_0 > 0$ . Alors, les itérations  $X_m$  utilisant les méthodes semi-implicite à étapes fractionnées (3.12)-(3.13) et les représentations  $f_i^\Delta(x)$  et  $g_i^\Delta(x)$  (comme dans la remarque (3.1.3)) pour résoudre l'EDS (3.10) avec la dérive (3.17) satisfait les estimations suivantes :

(a) Lorsque  $A \leq 0$ , pour tout  $m = 1, 2, \dots, n$  et  $1 + A\Delta > 0$ , la majoration

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_m|^2 &\leq (1 + dK_0\Delta)^m (1 + |x_0|^2) - 1 \\ &\leq e^{dK_0T} (1 + |x_0|^2) - 1, \end{aligned}$$

est toujours vraie pour toutes les méthodes semi-implicite à étapes fractionnées.

(b) Lorsque  $A > 0$ , soit  $K_1 > 2A$  et  $\Delta^* = \min \left\{ \frac{1}{A} \left( 1 - \left( \frac{2A}{K_1} \right)^{1/3} \right), T \right\}$ . Alors, pour tout  $m = 1, 2, \dots, n$  et  $0 < \Delta \leq \Delta^*$ , en utilisant la représentation  $f^\Delta(x)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_m|^2 &\leq [1 + (dK_0 + K_1)\Delta]^m (1 + |x_0|^2) - 1, \text{ en utilisant (3.12)}, \\ \mathbb{E}|X_m|^2 &\leq [(1 + dK_0\Delta)(1 + K_1\Delta)]^m (1 + |x_0|^2) - 1, \text{ en utilisant (3.13)}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

(c) Lorsque  $A > 0$ , considérons les itérations semi-implicite à étapes fractionnées

$$X_{k+1}^\Delta = g^\Delta(X_k^\Delta) + \sigma(X_k^\Delta) \cdot \Delta B_{k+1}, \tag{3.19}$$

$$X_{k+1}^\Delta = g^\Delta(X_k^\Delta) + \sigma(g^\Delta(X_k^\Delta)) \cdot \Delta B_{k+1}, \tag{3.20}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . alors, pour tout  $m = 1, 2, \dots, n$  et  $0 < \Delta \leq T$ , les estimations suivantes sont valables :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_m|^2 &\leq [(1 + A\Delta)^2 + dK_0\Delta]^m (1 + |x_0|^2) - 1, \text{ pour (3.19)}, \\ \mathbb{E}|X_m|^2 &\leq (1 + A\Delta)^{2m} (1 + dK_0\Delta)^m (1 + |x_0|^2) - 1, \text{ pour (3.20)}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.4** : Dans la sous-section suivante, nous mettons l'accent sur le cas scalaire d'EDS de Ginzburg-Landau pour expliquer comment cette procédure peut être mise en œuvre.

### 3.1.3 Les méthodes semi-implicite à étapes fractionnées pour le cas scalaire

Pour un entier positif impair  $r \geq 3$ , et des constantes  $\delta \geq 0$  et  $A \in \mathbb{R}$ , on considère l'EDS unidimensionnelle de type Ginzburg-Landau suivante

$$dX(t) = [AX(t) - \delta X^r(t)]dt + \sigma(X(t)) dB(t), 0 < t \leq T, \quad (3.21)$$

avec la condition initiale  $X(0) = x_0$ , où  $\sigma(\cdot)$  satisfait la condition (iv). Il est facile de voir que lorsque  $A \leq 0$ , la fonction  $b(x)$  satisfait les hypothèses (i)-(iii) de la condition 2. Lorsque  $A > 0$ , pour tout  $\beta \geq 0$ , on peut choisir

$$\alpha \geq (r-1) \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{2}{r-1}} \left(\frac{A+\beta}{r+1}\right)^{\frac{r+1}{r-1}},$$

de telle sorte que la condition de dissipativité (iii) soit vérifiée. En particulier si on choisit  $\beta = 0$ , la condition de dissipativité (iii) implique la condition de monotonie (i). De même, en utilisant le théorème de la valeur moyenne, nous pouvons vérifier la propriété de Lipschitz unilatérale :

Pour tout  $x$  et  $y$ , il existe  $z$  (entre  $x$  et  $y$ ) tel que  $x^r - y^r = (x - y)rz^{r-1}$ . Alors, puisque  $z^{r-1} \geq 0$ , on obtient

$$(x - y)(b(x) - b(y)) = (A - \delta rz^{r-1})(x - y)^2 \leq A(x - y)^2.$$

Dans cette sous-section, nous fournissons plus de détails sur la construction des méthodes semi-implicite à étapes fractionnées pour résoudre l'EDS (3.21). L'équation (3.4) de l'étape (3.2) de la méthode des étapes fractionnées pour cette EDS scalaire se réduit à

$$y = x + \Delta(Ay - \delta y^r). \quad (3.22)$$

Nous approchons le terme  $b(y) = Ay - \delta y^r$  avec

$$\rho_1(x, y) = Ay - \delta y x^{r-1},$$

ou avec

$$\rho_2(x, y) = Ax - \delta y x^{r-1}.$$

On résout l'équation  $y = x + \rho_1(x, y) \Delta$  pour  $y$ , et obtenir les expressions

$$\begin{aligned} f^\Delta(x) &= \frac{x}{1 + \Delta(\delta x^{r-1} - A)}, \\ b^\Delta(x) &= \frac{b(x)}{1 - \Delta(A - \delta x^{r-1})}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

où  $f^\Delta(x) = x + \Delta b^\Delta(x)$ . Ces fonctions sont bien définies si  $\delta x^{r-1} - A \geq 0$  ou si  $\Delta$  est suffisamment petit. Il est facile de vérifier que  $b^\Delta(x)$  converge uniformément vers  $b(x)$  sur les ensembles compacts si  $\Delta$  tend vers à 0. De même, si on utilise l'approximation  $\rho_2(x, y) = Ax - \delta y x^{r-1}$  dans (3.22) et soit  $g^\Delta(x) = \frac{(1+\Delta A)x}{1+\Delta\delta x^{r-1}}$ , alors l'itération correspondante serait  $y \simeq g^\Delta(x) = x + \Delta \frac{b(x)}{1+\Delta\delta x^{r-1}}$ . Dans ce cas,  $b^\Delta(x)$  est approché par  $\frac{b(x)}{1+\Delta\delta x^{r-1}}$  qui aussi converge uniformément vers  $b(x)$  sur les ensembles compacts. Cependant, nous concentrons sur la première approximation

$$b(x) \simeq Ay - \delta y x^{r-1}.$$

Nous énonçons maintenant formellement les quatre méthodes semi-implicite à étapes fractionnées. La première et la deuxième méthodes ainsi que quelques estimations de moments simples pour le cas scalaire ont été brièvement discutées dans İzgi and Çetin [9].

**(1) La première méthode semi-implicite à étapes fractionnées (SISS1) :**

Pour

$$\begin{aligned} f^\Delta(x) &= \frac{x}{1+\Delta(-A+\delta x^{r-1})} \\ &= x + \Delta b^\Delta(x), \end{aligned}$$

on définit

$$X_{m+1} = f^\Delta(X_m) + \sigma(X_m)\Delta B_{m+1}, \quad (3.24)$$

qui correspond aux discrétisations d'Euler-Maruyama (E-M) appliquées à une EDS où son terme de dérive  $b(x)$  est remplacé par  $b^\Delta(x)$ .

**(2) La seconde méthode de semi-implicite à étapes fractionnées (SISS2) :**

Pour  $f^\Delta(X_m)$  et  $\sigma^\Delta(x) = \sigma(f^\Delta(x))$ ,

$$X_{m+1} = f^\Delta(X_m) + \sigma^\Delta(X_m)\Delta B_{m+1}, \quad (3.25)$$

**(3) La troisième méthode semi-implicite à étapes fractionnées (SISS3) :**

Pour  $g^\Delta(x) = \frac{(1+\Delta A)x}{1+\Delta\delta x^{r-1}}$ , on a

$$X_{m+1} = g^\Delta(X_m) + \sigma(X_m)\Delta B_{m+1}, \quad (3.26)$$

**(4) La quatrième méthode semi-implicite à étapes fractionnées (SISS4) :**

Pour  $g^\Delta(x)$ , on a

$$X_{m+1} = g^\Delta(X_m) + \sigma^\Delta(X_m)\Delta B_{m+1}. \quad (3.27)$$

Notez que la première et la deuxième (de même, la troisième et la quatrième) méthodes coïncident si le terme de diffusion ne dépend pas de  $x$ . Clairement, les fonctions  $b^\Delta(x)$  et  $\sigma^\Delta(x)$  sont différentiables (et donc localement Lipschitz) et convergent uniformément sur les ensembles compacts vers des fonctions  $b(x)$  et

$\sigma(x)$ , respectivement. De plus, puisque  $\delta x^{r-1} \geq 0$ , l'inégalité  $|f^\Delta(x)| \leq \frac{|x|}{1-A\Delta}$  est vérifiée pour tout  $x$  et  $\Delta$ . Grâce à la condition de croissance linéaire unilatérale de  $b(x)$ , Il est facile de voir que  $b^\Delta(x)$  satisfait la propriété de la croissance linéaire unilatérale (i) dans la condition 2.

En utilisant le fait que les dérivées des fonctions  $b^\Delta(x)$  et  $f^\Delta(x)$  sont bornées, on énonce leurs propriétés de Lipschitz (unilatérales ou globales) sous la condition suivante :

**Condition 4** : Il existe  $\Delta^* > 0$  tel que pour tout  $0 < \Delta = \frac{T}{n} < \Delta^*$  avec  $1 - A\Delta > 0$ , telles que la fonction  $f^\Delta(x)$  est bijective (de sorte que la solution de l'EDS(3.22) soit unique).

**Lemme 3.1.4** : Pour  $\Delta_0 > 0$  fixé, on suppose que la condition 4 est vérifiée pour tout  $0 < \Delta \leq \Delta_0$ . Alors, pour  $\Delta \in (0, \Delta_0]$ ,

- (i) La fonction  $f^\Delta(x)$  est globalement Lipschitz, uniformément en  $\Delta$ ,
- (ii) La fonction  $b^\Delta(x)$  satisfait la propriété de Lipschitz unilatérale, condition 2 (ii), uniformément en  $\Delta$ ,
- (iii) La fonction  $b^\Delta(x)$  est globalement Lipschitz (mais pas nécessairement uniformément en  $\Delta$ ) : il existe une constante  $C = C(\Delta) > 0$  telle que pour tout  $x, y$  on a :

$$|b^\Delta(x) - b^\Delta(y)| \leq C|x - y|.$$

**Preuve.** : voir [8]. ■

**Remarque 3.1.5** : Puisque  $b^\Delta(x)$  satisfait la propriété de Lipschitz unilatérale, l'estimation 3.15 et le résultat de convergence (3.16) du corollaire (3.1.2) sont également valables pour les systèmes stochastiques de Ginzburg-Landau.

**Lemme 3.1.5** : Si  $\sigma(\cdot)$  est globalement Lipschitzienne, alors il existe  $\Delta_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que  $1 - A\Delta_0 > 0$  et  $\mathbb{E}[|X(T) - Y^\Delta(T)|^2] \leq C\Delta$ , pour tout  $0 < \Delta \leq \Delta_0$ .

**Preuve.** : Soit  $\Delta_0 > 0$  comme dans le corollaire ci-dessus et on considère  $0 < \Delta \leq \Delta_0$ ,

$$\mathbb{E}[|X(T) - Y^\Delta(T)|^2] = \mathbb{E} \int_0^T \left\{ 2 \left( X_t - Y_t^\Delta \right) \left( b(X_t) - b^\Delta(Y_t) \right) + \left| \sigma(X_t) - \sigma^\Delta(Y_t^\Delta) \right|^2 \right\} dt \quad (3.28)$$

Pour trouver une majoration pour le premier terme du membre de droite de l'égalité (3.28), notons que pour tout  $x$  et  $y$ , on a

$$\begin{aligned} (x - y) \left( b(x) - b^\Delta(y) \right) &= A(x - y)^2 - \delta(x - y)(x^r - y^r) - (x - y) \frac{\Delta y (\delta y^{r-1} - A)^2}{1 + \Delta(\delta y^{r-1} - A)} \\ &\leq A(x - y)^2 - (x - y) \frac{\Delta y (\delta y^{r-1} - A)^2}{1 + \Delta(\delta y^{r-1} - A)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

D'après le corollaire (3.1.2) et le lemme (3.0.1), tous les moments des processus  $\{X_t\}$  et  $\{Y_t\}$  existent sur  $[0, T]$  avec une borne supérieure qui ne dépend pas de  $\Delta$ . Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.4.1) et l'EDS (3.29), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \left\{ \left( X_t - Y_t^\Delta \right) \left( b(X_t) - b^\Delta(Y_t^\Delta) \right) \right\} dt &\leq \mathbb{E} \int_0^T A \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 dt \\ &\quad + \Delta \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\quad \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \left( Y_t^\Delta \right)^2 \frac{[\delta(Y_t^\Delta)^{r-1} - A]^4}{[1 + \Delta[\delta(Y_t^\Delta)^{r-1} - A]]^2} dt \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

pour tout  $0 < \Delta \leq \Delta_0$ ,  $\mathbb{E} \left\{ \int_0^T \left( Y_t^\Delta \right)^2 \frac{[\delta(Y_t^\Delta)^{r-1} - A]^4}{[1 + \Delta[\delta(Y_t^\Delta)^{r-1} - A]]^2} dt \right\} < C$ , où  $C =$

$C(\delta, A, T, r, \Delta_0)$  est un constant positive, ce qui est nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \left\{ \left( X_t - Y_t^\Delta \right) \left( b(X_t) - b^\Delta(Y_t^\Delta) \right) \right\} dt &\leq \mathbb{E} \int_0^T A \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 dt \\ &\quad + C\Delta \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 dt \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pour le dernier terme de (3.28), nous utilisons les propriétés de Lipschitz de  $\sigma(y)$  et  $\sigma^\Delta(y)$  avec l'inégalité traingulaire : pour tout  $x$  et  $y$ , il existe  $K > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \left| \sigma(x) - \sigma^\Delta(y) \right|^2 &\leq \left| \sigma(x) - \sigma(y) \right|^2 + \left| \sigma(y) - \sigma(f^\Delta(y)) \right|^2 \\ &\leq K[(x - y)^2 + (y - f^\Delta(y))^2] \\ &\leq K[(x - y)^2 + \Delta^2 |b(y)|^2]. \end{aligned}$$

Ensuite, grâce aux estimations des moments de  $Y_t^\Delta$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \left| \sigma(X_t) - \sigma^\Delta(Y_t^\Delta) \right|^2 dt &\leq K \times \mathbb{E} \int_0^T \left\{ \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 + \Delta^2 \left| b(Y_t^\Delta) \right|^2 \right\} dt \\ &\leq k \times \mathbb{E} \int_0^T \left\{ \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 + \Delta^2 \right\} dt, \end{aligned}$$

pour une certaine constante générique  $K$ , et pour tout  $0 < \Delta \leq \Delta_0$ . En supposant que  $\Delta_0 < 1$ , en combinant cette dernière inégalité avec (3.28) et (3.30), et en utilisant l'identité  $\sqrt{x} \leq 1 + x$ , on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| X_t - Y_t^\Delta \right|^2 &\leq K\Delta^2 + (K + 2A) \int_0^T \mathbb{E}(X_t - Y_t^\Delta)^2 dt + C\Delta \left\{ \int_0^T \mathbb{E} \left( X_t - Y_t^\Delta \right)^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\leq K\Delta + C \int_0^T \mathbb{E}(X_t - Y_t^\Delta)^2 dt, \end{aligned}$$

pour certaines constantes positives  $C$  et  $K$ . Enfin, nous introduisons une fonction déterministe non négative,  $g(t) = \mathbb{E}(X_t - Y_t^\Delta)^2$ , pour  $0 \leq t \leq T$ , qui vérifie  $g(0) = 0$  et  $g(T) \leq K\Delta + C \int_0^T g(t) dt$ . Finalement, par le lemme de Gronwall

(1.4.1), on obtient

$$\mathbb{E} \left| X_T - Y_T^\Delta \right|^2 \leq K \Delta e^{CT}.$$

■

## 3.2 Quelques exemples numériques

Dans cette section, nous appliquons les méthodes semi-implicite à étapes fractionnées pour étudier quelques exemples d'EDS non linéaire avec un terme de diffusion présentant une croissance sur linéaire. cette type d'équation nomée l'équation de "Ginzburg-Landau".

Puisque ces équations ont des solutions explicites, nous pouvons également comparer la performance de quatre méthodes SISS.

Soit  $B = [B_1, B_2, \dots, B_d]'$  un mouvement brownien d-dimensionnel,  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $x_0 > 0$ , alors, pour  $\delta > 0$  et  $A \in \mathbb{R}$ , on considère les processus

$$X_i(t) = \frac{E_i(t)}{\left( x_0^{-2} + 2\delta \int_0^t |E(s)|^2 ds \right)},$$

pour  $i = 1, 2, \dots, d$ , où  $E_i(t) = \exp \left[ (A - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_i(t) \right]$  est un mouvement Brownien géométrique. Par la formule d'Itô (1.3.1), chaque  $X_i(t)$  satisfait une EDS de Ginzburg-Landau de la forme suivante

$$dX_i(t) = \left( AX_i(t) - \delta X_i |X|^2(t) \right) dt + \sigma X_i(t) dB_i(t),$$

pour  $0 < t \leq T$  avec  $X_i(0) = x_0 > 0$ .

**Exemple 3.2.1** : Dans cet exemple, nous comparons les performances de convergence de différentes méthodes semi-implicite à étapes fractionnées. On considère

d'abord une EDS scalaire

$$dX(t) = -[X(t) + (0.1)X^3(t)]dt + X(t)dB(t),$$

avec  $x_0 = 1$ ,  $\sigma = 1$  et  $T = 1$ . En utilisant le critère de la convergence d'erreur quadratique moyenne, nous estimons  $\mathbb{E}|X(1) - X_n|^2$ , pour  $n = 16, 32, 64$  et  $128$  en utilisant plusieurs ensembles de simulations. Voir la figure 3 ci-dessous pour les résultats de la simulation. Les résultats de convergence quadratique moyenne du graphe log-log (figure 3), on remarque que la méthode SISS4 fonctionne mieux que les autres méthodes.

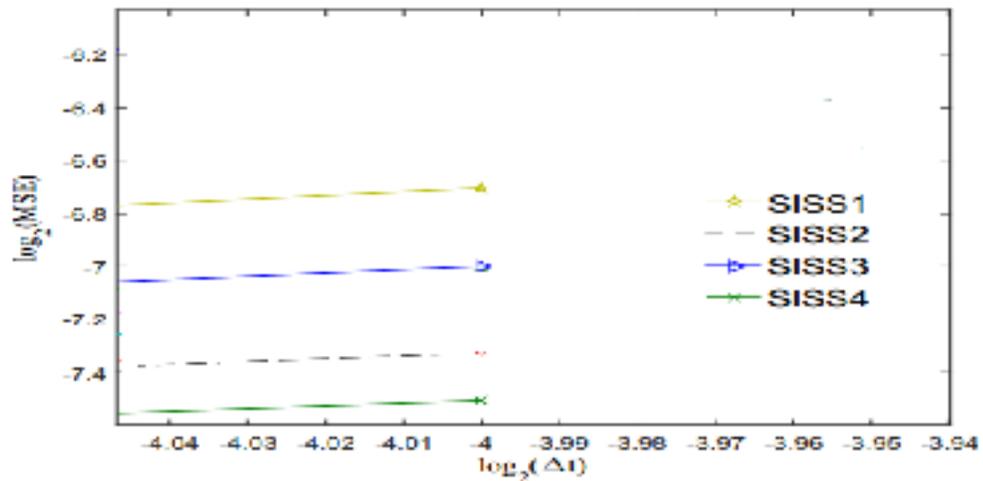


Figure3 : Graphique log-log pour le taux de convergence EQM des multiples méthodes dans le cas  $x=1$  et  $\sigma=1$

**Exemple 3.2.2** : Pour une implémentation multidimensionnelle, nous avons d'abord effectué des simulations répétées de taille  $N = 100000$  dans chaque ensemble, en utilisant la version  $d = 10$  dimensions de l'EDS de l'exemple 1 avec une condition initiale  $X(0) = x_0 [1, 1, \dots, 1]'$  et  $n = 32, 64, 128$  et  $256$  sur l'intervalles  $[0, 1]$ . Ensuite, nous calculons l'EQM pour chacune des deux méthodes suivantes : SISS2, SISS4. Nous obtenons le tableau de comparaison suivant en évaluant la moyenne

des résultats multiples de simulation pour chaque méthode :

<i>MSE for <math>x=5</math>, <math>\sigma=1, d=10</math> and <math>N=100,000</math></i>				
<i>Methods</i>	<i><math>n=32</math></i>	<i><math>n=64</math></i>	<i><math>n=128</math></i>	<i><math>n=256</math></i>
<i>SISS2</i>	<i>5,059E-02</i>	<i>3,587E-02</i>	<i>2,844E-02</i>	<i>2,506E-02</i>
<i>SISS4</i>	<i>6,514E-02</i>	<i>4,292E-02</i>	<i>3,213E-02</i>	<i>2,676E-02</i>

*Tableau1 : Analyse de convergence EQM pour SISS2 et SISS4.*

<i>MSE for <math>x=5</math>, <math>\sigma=2, d=10</math> and <math>N=100,000</math></i>				
<i>Methods</i>	<i><math>n=32</math></i>	<i><math>n=64</math></i>	<i><math>n=128</math></i>	<i><math>n=256</math></i>
<i>SISS2</i>	<i>9,811E-01</i>	<i>5,908E-01</i>	<i>4,438E-01</i>	<i>3,816E-01</i>
<i>SISS4</i>	<i>1,001E+00</i>	<i>6,128E-01</i>	<i>4,559E-01</i>	<i>3,904E-01</i>

*Tableau2 : Analyse de convergence EQM pour SISS2 et SISS4.*

Nous avons observé dans la figure 3 que la méthode SISS4 fonctionne assez bien que la méthode SISS2, mais dans le tableau 1 et le tableau 2 la comparaison EQM (était mélangé) selon les paramètres du modèle indiquent que la méthode SISS2 était meilleur que SISS4. De plus, ces estimations de l'EQM pourraient être améliorées avec plus de répétitions. l'article [6] contient des résultats théoriques et des comparaisons numériques comprenaient plus de répétitions et sont donc un peu plus précis.

# Conclusion

Dans ce travail nous avons essayer d'exposer deux resultats sur les procédures numériques pour l'EDS :

La première procédure on s'intéressé à la discrétisation d'EDS par la méthode d'Euler Maruyama et de Milstein dans le cas où le générateur est globalement Lipschitz avec une condition de croissance linéaire.

La deuxième procedure alternative est de semi-implicit à étapes fractionnées dans le cas où le générateur non linéaire, localement Lipschitz avec une condition de dissipativité. Nous mettons l'accent sur les EDS de Ginzburg-Landau pour expliquer comment cette procedure peut être mise en œuvre. A l'aide de simulations, nous comparons les performances de convergence des méthodes SISS. Nous suggérons pour les travaux ultérieur l'article de [7] qui développe les versions de type Milshstein des méthodes semi-implicites à étapes fractionnées pour les solutions numériques des équations différentielles stochastiques non linéaires avec des coefficients localement Lipschitz.

# Annexe

## Simulation de trajectoire Brownienne

```
randn(100,1);  
  
T=1; N=600; dt=T/N;  
  
dB=zeros(1,N); Bzeros(1,N);  
  
dB(1)=sqrt(dt)*randn;  
  
for j=2 :N  
  
dB(j)=sqrt(dt)*randn;  
  
B(j)=B(j-1)+dB(j);  
  
end  
  
plot(0 :dt :T,[0,B], 'r-');  
  
xlabel('t','FontSize',16);  
  
ylabel('B(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

## Programme de la méthode d'Euler Maruyama :

```
randn('state',100)  
  
lamda=2;mu=1;Xzeros=1; %pp  
  
T=1;N=2^8;dt=1/N;  
  
dW=sqrt(dt)*randn(1,N); %B
```

```
W=cumsum(dW); % DB
Xtrue=Xzeros*exp((lamda-0.5*mu^2)*(dt :dt :T)+mu*W);
plot([0 :dt :T],[Xzeros,Xtrue], 'm-'), hold on
R=4;Dt=R*dt ;L=N/R; % L EM
Xem=zeros(1,L); % P
Xtemp=Xzeros;
for j=1 :L
Winc=sum(dW(R*(j-1)+1 :R*j));
Xtemp=Xtemp+Dt*lamda*Xtemp+mu*Xtemp*Winc;
Xem(j)=Xtemp;
end
plot([0 :Dt :T],[Xzeros,Xem], 'r-*'),hold off
xlabel('t', 'FontSize',12)
ylabel('X', 'FontSize',16, 'Rotation',0, 'HorizontalAlignment', 'right')
emerr=abs(Xem(end)-Xtrue(end))
legend(' solution exact', 'solution approximé').
```

**programme de la méthode de Milstein :**

```
sigma=0.4; mu=0.2; Xzero=1; T=1; N=2^14;
dt=T/N;
dB=sqrt(dt)*randn(1,N);
B=cumsum(dB);
Xtrue=Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt :dt :T)+sigma*B);
plot(0 :dt :T,[Xzero,Xtrue], 'm-'),hold on
```

```
R=20;Dt=R*dt; L=N/R; Xtemp=Xzero;
for j=1 :L
Binc=sum(dB(R*(j-1) + 1 :R*j));
Xtemp=Xtemp+Dt*mu*Xtemp+sigma*Xtemp*Binc+0.5*(sigma^2)*((Binc^2)-Dt);
Xem(j)=Xtemp;
end
plot(0 :Dt :T,[Xzero,Xem], 'b-'),hold off
xlabel('t', 'FontSize',12);
ylabel('X', 'FontSize',16, 'Rotation',0, 'HorizontalAlignment', 'ri')
emerr=abs(Xem(end)-Xtrue(end));
```

# Bibliographie

- [1] Berglund, N. (2013). Martingales et calcul stochastique. arXiv preprint arXiv :1312.7799.
- [2] Demailly, J. P. (2016). Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed. EDP sciences.
- [3] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7.
- [4] Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. SIAM review, 43(3), 525-546.
- [5] Hutzenthaler, M , Jentzen, A , & Kloeden, P. E. (2011). Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. Proceedings of the Royal Society A :Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 467(2130) 1563-1576.
- [6] İzgi, B., & Çetin, C. (2021). Strong convergence of semi-implicit split-step methods for SDE with locally Lipschitz coefficients. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 94, 105574.
- [7] İzgi, B., & Cetin, C. (2019). Milstein-type semi-implicit split-step numerical methods for nonlinear SDE with locally Lipschitz drift terms. Thermal Science, 23, S1-S12.

- [8] İzgi, B., & Çetin, C. (2018). Semi-implicit split-step numerical methods for a class of nonlinear stochastic differential equations with non-Lipschitz drift terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 343, 62-79.
- [9] İzgi, B., & Çetin, C. (2017, April). Some moment estimates for new semi-implicit split-step methods. In *AIP conference proceedings* (Vol. 1833, No. 1, p. 020041). AIP Publishing LLC.
- [10] Gallay, T. (2009). *Théorie de la mesure et de l'intégration*. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [11] Le Gall, J. F. (2012). *Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique* (Vol.71). Springer Science & Business Media.
- [12] Orrieri, C. (2013). A stochastic maximum principle with dissipativity conditions. arXiv preprint arXiv :1309.7757.
- [13] Briand, P. (2001). *Equations différentielles stochastiques rétrogrades*. Mars.
- [14] Zitouni, M. (2009). *Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades* (Doctoral dissertation, Boumerdès, Université M'hamed bougara. Faculté des Sciences), (2009-2010) [cf. p. 50-54].