



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté Des Sciences Et De La Technologie
Département De Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
Ouassim ASSAM

Le : dimanche 27 juin 2021

Convection naturelle au sein d'une enceinte carrée munie des sources chauffantes placée sur sa paroi inférieure

Jury :

Pr.	A.Hakim BENMACHICHE	Pr	Université de Biskra	Président
Dr.	Abd Elhakim BEGAR	MCB	Université de Biskra	Rapporteur
Dr.	Nacer CHOUCANE	MCA	Université de Biskra	Examineur

Remerciement

Tous mes remerciements vont au Dieu tout puissant pour la puissance, l'énergie, et l'aide qu'il me port toujours.

Je remerciement mon encadreur Docteur BEGAR Abdelhakim qui m'a proposé ce sujet qui m'a guidé et corrigé ce mémoire.

À celui qui je porte son nom avec fierté, à celui qui m'a enseigné les principes de la foi et de la morale et à celui qui travaille à mon confort et m'a inculqué la science et la connaissance, mon père que dieu le protège.

À mon ange dans la vie, au sens de l'amour, de la tendresse et de la dévotion, au sourire de la vie et au secret de l'existence, à celle qui a éclairé mon chemin de conseils et d'orientation, ma chère mère que dieu le protège.

Aux coeur tendres et aux âmes étroites, aux joies de ma vie, ceux que la vie n'a aucune valeur sans eux, mes deux sœurs.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon très Cher Père

A ma très Chère Mère

A mes très chères sœurs

*A mes chers et fidèles amis : Hireche Houcine, Lebbal
Mohamed, Saadia Aymen, Chair Adel, Absi Kaiss, Chitour Yassine,
Djezzar Moussa, Assam Mourad.*

A toute la promotion Génie mécanique énergétique

A tous ce qui m'ont aidé à finir ce mémoire.

Wassim ASSAM

Résumé

Dans ce travail, on a mené une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité carré contenant de l'air comme fluide et qui comporte des sources surfaciques de chaleur. Les parois horizontales de la cavité sont considérées comme adiabatiques sauf au niveau des sources de chaleur. En effet, la paroi horizontale inférieure pouvant être chauffée localement par deux ou quatre sources de chaleur. Les parois verticales sont quant à elles maintenues à une température T_f , qui est constante. Les équations gouvernantes ont été discrétisées par la méthode des volumes finis en utilisant un schéma hybride. La résolution a été menée avec l'algorithme Simpler. Les champs de température et de vitesses ont été obtenus ainsi que le nombre de Nusselt. Notre procédure de simulation a été validée en comparant les résultats qu'on obtient avec ceux d'autres auteurs. L'influence des paramètres de contrôle (Nombre de Rayleigh, rapport d'aspect, la distance séparant des sources) a été considérée. Des corrélations entre le nombre de Nusselt et les différents paramètres ont été également obtenues.

Mots clés : convection naturelle, Rayleigh, nusselt, volumes finis, tecplot.

ملخص:

في هذا العمل، أجرينا دراسة عددية للحمل الطبقي الطبيعي في تجويف مربع يحتوي على الهواء على شكل سائل ويحتوي هذا التجويف على مصادر سطحية للحرارة. تعتبر الجدران الأفقية للتجويف ثابتة الحرارة إلا على مستوى مصادر الحرارة. في الواقع، يمكن تسخين الجدار الأفقي السفلي محلياً بواسطة مصدرين أو أربعة مصادر للحرارة. يتم الحفاظ على الجدران الرأسية من جانبا عند درجة حرارة ثابتة. تم تحديد المعادلات الحاكمة بواسطة طريقة الحجم المحدود باستخدام مخطط هجين. تم تنفيذ القرار باستخدام خوارزمية 'سجبار'. فتم الحصول على مجالات درجة الحرارة والسرعة بالإضافة إلى معامل 'نيسلت'. تم التحقق من صحة إجراء المحاكاة لدينا من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع نتائج المؤلفين الآخرين. وأخذنا بعين الاعتبار تأثير كل من (معامل 'رايلي'، معامل الأبعاد، تقارب مصادر الحرارة) وذلك في حالة مصدرين أو أربعة مصادر للحرارة. كما تم الحصول على علاقات الارتباط بين رقم نسلت والمتغيرات المختلفة.

الكلمات المفتاحية: الحمل الطبيعي للحرارة، 'رايلي'، 'نيسلت'، الأحمال المنتهية، تاك بلوت.

Sommaire

Remercîment	I
Dédicaces	II
Résumé	III
Sommaire	IV
Liste des figures	VII
Nomenclature	X
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités et synthés bibliographique	
I.1. Modes de transfert de chaleur	2
I.1.1. La conduction	2
I.1.2. La Convection	2
I.1.2.1. Convection naturelle	2
I. 1.2.2. Convection forcée	3
I. 1.2.3. Convection mixte	3
I.1.3. Le rayonnement	3
I.2. Aspects physiques de la convection naturelle	4
I.2.1. Définition de la convection naturelle	4
I.2.2. Domaine d'application de la convection naturelle	5
I.3. La convection dans les enceintes	5
I.3.1. Enceinte avec gradient vertical de température	6
I.3.2. Enceinte avec gradient horizontal de température	7
I.3.3 Enceinte rectangulaire comportant des sources de chaleur surfaciques	7
I.4. L'intérêt de la convection naturelle	8
I.5. Nombres adimensionnels	10
I.5.1. Nombre de Nusselt	10
I.5.2. Nombre de Grashof	11
I.5.3. Nombre de Rayleigh	11
I.5.4. Nombre de Prandtl	11
I.6. Synthèse bibliographique	12
Chapitre II : Modèle mathématique	
II.1. Description du problème	14
II.2. Equations gouvernantes (Navier Stockes)	14

Sommaire

II.2.1. Equation de continuité	15
II.2.2. Equations de quantité de mouvement	15
II.2.3. Equation d'énergie	16
II.3. Adimensionalisation des équations gouvernantes	16
II.3.1. Equation de continuité	17
II.3.2. Equations de quantité de mouvement	17
II.3.3. Equation d'énergie	17
II.4. Conditions aux limites	17
II.5. Transfert de chaleur	19
II.6. Discrétisation des équations	19
II.6.1. Rappels sur La méthode des volumes finis	20
II.6.2. Maillage	21
II.6.3. Discrétisation	21
II.6.4. Application à l'intégration de l'équation de transport	22
II.6.4.1. Intégration du flux total	23
II.6.4.2. Intégration du terme source	24
II.6.4.3. Discrétisation temporelle	24
II.6.5. Schéma hybride (HDS)	24
II.7. Procédure de résolution	25
II.7.1. Equation algébrique de pression	25
II.7.2. Algorithme SIMPLER	28
II.7.3. Résolution des équations	29
II.7.3.1. La méthode des approximations successives	29
I.8. Organigramme	31
Chapitre III : Résultat numérique	
III.1. Problématique	32
III.2 Validation	34
III.3. Etude paramétrique avec des flux de chaleurs constant	36
III.3.1. Cas d'une deux sources de chaleur	36
III.3.1.1. Influence du nombre de Rayleigh	36
III.3.1.2. Influence du rapport d'aspect	40
III.3.1.3. Influence de la distance (d) séparant les deux sources	45
III.3.2. Cas d'une quatre sources de chaleur	51

Sommaire

III.3.2.1. Influence du nombre de Rayleigh	52
III.3.2.2. Influence du rapport d'aspect	57
Conclusion	64
Références bibliographiques	65

Liste des figures

Chapitre I : Généralités et synthés bibliographique

Figure.I.1. : Écoulement de la convection naturelle dans une enceinte carrée.	4
Figure I.2. : Schéma représentant la configuration de la convection de Rayleigh - Bénard.	6
Figure I.3. : Schéma représentant les rouleaux de la convection de Rayleigh - Bénard.	6
Figure I.4. : Schéma de la convection dans une Enceinte avec gradient horizontal de température.	7
Figure I.5. : Enceinte rectangulaire comportant plusieurs sources de chaleur surfaciques.	8
Figure I.6. : Structure cristallographique Mono-Si utilisé dans la fabrication des panneaux solaires.	8
Figure I.7. : Les cellules convectives dans une casserole sous le feu.	9
Figure I.8. : La circulation atmosphérique.	9
Figure I.9. : La convection du manteau de la terre.	10

Chapitre II : Modèle mathématique

Figure II.1. : configuration physique.	14
Figure II.2. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites.	18
Figure II.3. : Représentation d'un volume de contrôle bidimensionnel.	20
Figure II.4. : Schéma du Maillage.	21
Figure II.5. : Volume de contrôle.	23

Chapitre III : Résultat numérique

Figure III.1. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites.	32
Figure III.2. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites.	33
Figure III.3. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites.	34
Figure III.4. : Champs de température pour différentes conditions de Ra et ϵ .	35
Figure III.5. : Champs de température pour différents Ra, $\epsilon = \frac{4}{5}$.	35

Liste des figures

Figure III.6. : Champs de température pour différents Ra. (a) : Ra = 10^3 , (b) : Ra = 10^4 , (c) : Ra = 5×10^4 , (d) : Ra = 10^5	36
Figure III.7. : Champs de vitesse pour différents Ra. (a) : Ra = 10^3 , (b) : Ra = 10^4 , (c) : Ra = 5×10^4 , (d) : Ra = 10^5	37
Figure III.8. : Nombre de Nusselt local au niveau de la source de chaleur en fonction de (x) pour différents Ra.	38
Figure III.9. : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra.	39
Figure III.10. : Température en fonction de (y) pour x = 2,5 cm et différents Ra.	40
Figure III.11. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité horizontale) avec Ra = 10^3 (a) : A = 1, (b) : A = 1/2, (c) : A = 1/3, (d) : A = 1/4.	42
Figure III.12. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect (A = H/L) (cavité horizontale allongée) avec Ra = 10^3 .	42
Figure III.13. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité verticale) avec Ra = 10^3 (a) : A = 1, (b) : A = 1/2, (c) : A = 1/3, (d) : A = 1/4.	44
Figure III.14. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect (A = H/L) (cavité verticale) avec Ra = 10^3 .	45
Figure III.15. : champs de température pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour Ra = 10^3 .	46
Figure III.16. : Champs de vitesse pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour Ra = 10^3 .	47
Figure III.17. : nombre de nusselt moyen en fonction de la distance séparant les deux sources de chaleur et pour Ra = 10^3 .	48
Figure III.18. : champs de température pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour Ra = 10^4 .	48
Figure III.19. : Champs de vitesse pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour Ra = 10^4 .	49
Figure III.20. : nombre de nusselt moyen en fonction de la distance séparant les deux sources de chaleur pour Ra = 10^4 .	50
Figure III.21. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites.	51

Liste des figures

Figure III.22. : Champs de température pour différents Ra. (a) : $Ra = 10^3$, (b) : $Ra = 10^4$, (c) : $Ra = 5 \times 10^4$, (d) : $Ra = 10^5$.	52
Figure III.23. : Champs de vitesse pour différents Ra. (a) : $Ra = 10^3$, (b) : $Ra = 10^4$, (c) : $Ra = 5 \times 10^4$, (d) : $Ra = 10^5$.	54
Figure II.24. : Nombre de Nusselt local au niveau de la source de chaleur en fonction de (x) pour différents Ra.	55
Figure III.25. : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra.	56
Figure III.26. : Température en fonction de (y) pour $x = 2,5$ cm et différents Ra.	57
Figure III.27. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité verticale) avec $Ra = 10^3$ (a) : $A = 1$, (b) : $A = 1/2$, (c) : $A = 1/3$, (d) : $A = 1/4$.	59
Figure III.28. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect ($A = H/L$) (cavité horizontale allongée) avec $Ra = 10^3$.	60
Figure III.29. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité verticale) avec $Ra = 10^3$ (a) : $A = 1$, (b) : $A = 2$, (c) : $A = 3$, (d) : $A = 4$.	62
Figure III.30. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect ($A = H/L$) (cavité verticale) avec $Ra = 10^3$.	63

Nomenclature

Symboles latins :

A	A=L/H rapport d'aspect.
C_p	chaleur spécifique à pression constante [J/kgK].
C	terme de convection.
d	distance séparant deux sources de chaleur (cm).
D	terme de diffusion.
g	accélération de la pesanteur [m/s ²].
G_r	Nombre de Grashof.
H	hauteur de la cavité [cm].
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection [W/m ² k].
K	la conductivité thermique (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
l	longueur de la partie adiabatique de la paroi inférieure [cm].
L	largeur de la cavité [cm].
Nu_{local}	nombre de Nusselt local.
<Nu>	nombre de Nusselt moyen.
p	pression [Pa].
P**	pression adimensionnelle.
Pr	nombre de Prandtl.
P*	la valeur estimée de pression.
P'	la valeur corrigée de pression
Ra	nombre de Rayleigh.
S	longueur de la source [cm].
S_φ	terme source T température [K].
T*	température adimensionnelle.
T	température de la paroi chaude [K].
T_f	température ambiante [K].
T₀	température de référence [K].
t	temps (s).
t*	temps adimensionnel.

Nomenclature

u, v, w	composantes du vecteur vitesse [m/s].
u^*, v^*, w^*	composantes adimensionnelles du vecteur vitesse [m/s].
x, y, z	les coordonnées cartésiennes.
x^*, y^*, z^*	les coordonnées cartésiennes adimensionnelles.
Symboles Grecs :	
α	diffusivités thermique [m ² /s].
β	coefficient de dilatation [K ⁻¹].
ΔT	différence de température [K].
λ	conductivité thermique [W/mK].
μ	viscosité cinématique [m ² /s].
ρ	masse volumique [kg/m ³].
ϕ	variable dépendante.
Γ	coefficient de diffusion.

Introduction générale

Introduction générale

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans les enceintes fermées est un sujet d'intérêt considérable dans le domaine l'industrie. Les applications sont nombreuses, la conception thermique dans le domaine des bâtiments, le stockage cryogénique, la conception des fours, des réacteurs nucléaires, des collecteurs d'énergie solaire, Les composants électroniques etc.

Les composants électroniques maintenant peuvent produire plusieurs centaines de watts par centimètre carré. Pour cela, l'évacuation de la chaleur est devenue un des grands problèmes à résoudre avant la réalisation des composants. Maintenant, plusieurs recherches traitent le choix des processus de refroidissement et l'amélioration du transfert de chaleur, et la méthode la plus utilisée, reste le refroidissement par convection naturelle en raison de sa facilité d'intégration dans les systèmes et son faible coût. Mais, le refroidissement par convection naturelle atteint rapidement ses limites face aux systèmes à forte puissance et grandes échelles qui nécessitent une évacuation de chaleur plus importante.

Notre travail a pour objectif de caractériser les transferts de chaleur qui se déroulent lors de la convection naturelle d'une cavité carrée contenant de l'air comme fluide et soumis à des gradients de température.

Le présent mémoire comporte trois chapitres, qu'ils sont organisés comme suit :

Ce mémoire débute par une introduction générale dans laquelle on présente l'objectif essentiel de cette étude.

Le premier chapitre est consacré à des généralités ainsi qu'à une synthèse bibliographique sur les problèmes de convection naturelle dans les cavités.

Le deuxième chapitre présente la modélisation du problème et la procédure de simulation numérique.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats numériques.

Enfin une conclusion générale est présentée à la fin de cette étude.

Chapitre I : Généralités et synthés bibliographique

I.1. Modes de transfert de chaleur :

Les transferts thermiques sont d'une importance capitale dans la vie quotidienne et dans la « vie » de la planète. Il est nécessaire donc de décrire les modes de transfert de chaleur ; cette description est essentiellement basée sur une approche phénoménologique en utilisant les énoncés suivants :

- Un système non isotherme sera toujours le siège de transferts de chaleur internes.
- La chaleur passe spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Les modes fondamentaux qui permettent le transfert de chaleur d'un endroit à une température donnée, à un autre endroit à une température différente, sont les suivants [1] :

I.1.1. La conduction :

La conduction représente le processus de diffusion de la chaleur par le contact direct entre les particules du corps dont les différentes parties ne sont pas isothermes. Autrement dit, la chaleur se propage au sein d'un même corps ou passe d'un corps à un autre sous l'influence d'un gradient de température bien qu'il n'y ait pas de transfert de matière. Dans les gaz en l'absence de la convection, la conduction s'effectue par la diffusion moléculaire : l'énergie se propage par contact direct entre molécules au gré des chocs aléatoires à l'échelle microscopique. Dans un solide ou un fluide stationnaire, la vibration des atomes autour de leur position d'équilibre, se transmet de proche en proche permettant donc un transfert de chaleur.

I.1.2. La Convection :

La convection se réfère aux transferts thermiques qui ont lieu dans les fluides en mouvement macroscopique. Le transfert est déterminé par le mouvement des particules élémentaires du fluide, entre les zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange intense de particules qui échangent de l'énergie sous forme de chaleur et de quantité de mouvement entre elles. On en distingue trois types :

I.1.2.1. Convection naturelle :

Contrairement à la convection forcée, le mouvement de fluide en convection naturelle n'est pas dû à un apport d'énergie mécanique extérieure, mais qu'il trouve sa source au sein même du fluide, sous l'effet conjugué de gradients de masse volumique et d'un champ de pesanteur. Les variations de masse volumique sont généralement dues à des gradients de températures ou à des gradients de concentration.

I. 1.2.2. Convection forcée :

Pour laquelle le mouvement de fluide est dû à un apport externe d'énergie mécanique, sous l'action des forces extérieures créées par exemple par une pompe ou un ventilateur. Les gradients de densité se produisent aussi en convection forcée mais leurs effets sont à peu près nuls.

Dans ce cas, le mouvement du fluide accélère le transfert de chaleur ; il est trouvé que pour une même surface d'échange et pour un même écart de température, la valeur de l'échange thermique est notablement améliorée dans le cas de la convection forcée que dans celui de la convection naturelle.

I. 1.2.3. Convection mixte :

Le cas général de la convection présente un grand nombre de situations intermédiaires où les mécanismes de la convection naturelle et de la convection forcée coexistent avec des ordres de grandeur comparables ; les deux mécanismes vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement dû aux effets de la pesanteur ; trois cas peuvent se présenter :

Si l'écoulement forcé s'oppose aux forces de pesanteur, l'écoulement sera freiné, le transfert thermique diminue et on parle de la convection mixte « contrariée ».

Si l'écoulement forcé est de même sens que les forces de pesanteur, les transferts thermiques s'amplifient alors et on parle de la convection mixte « aidée ».

Si l'écoulement forcé est perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur, il y aura une amélioration des échanges thermiques.

I.1.3. Le rayonnement :

Par définition, le transfert d'énergie se fait par rayonnement électromagnétique. Quelle que soit sa température (à partir de 0°K), un corps émet un rayonnement thermique qui est plus ou moins intense selon la température de ce corps. Ce transfert de chaleur est le seul à se réaliser dans le vide tel est le cas du rayonnement solaire arrivant sur terre. Néanmoins, celui-ci se réalise aussi dans les fluides (l'air par exemple) et dans certains solides (comme le verre) ; dans ce mode de transfert, l'échange de chaleur peut avoir lieu entre deux surfaces ou une surface et le fluide qui l'entoure par le moyen de longues ondes électromagnétiques.

I.2. Aspects physiques de la convection naturelle :

I.2.1. Définition de la convection naturelle :

Lorsque deux corps (surface solide/fluide) de températures différentes, sont mis en contact prolongé dans un champ de pesanteur (**Figure I.1**) ; le gradient de température imposé entraîne une différence de densité au sein du fluide ce qui donne naissance à une force de flottabilité (poussée d'Archimède) qui à son tour ne fait que déclencher des mouvements de particules. Ceux-ci, dits mouvements de convection, s'accompagnent par un transport d'énergie (chaleur et quantité de mouvement) au sein du fluide dont les particules (molécules) agitées se déplacent, aléatoirement, entre des points du domaine considéré. Si aucun dispositif externe tel qu'une pompe ou un ventilateur n'intervient dans son déclenchement, ce phénomène physique se fait "naturellement" d'où vient le nom « convection naturelle » : seul l'effet de l'interaction entre le gradient de la densité et la gravité en est la cause. Le transfert de chaleur est plus actif lorsque les paramètres suivants à savoir : vitesse d'écoulement du fluide, sa masse volumique, sa conductivité thermique (ou sa diffusivité thermique), sa chaleur spécifique sont plus grandes. Cependant, il est d'autant plus actif que la viscosité cinématique est plus faible. Cela peut également dépendre des dimensions de la surface d'échange, de sa nature, de sa forme géométrique et de son orientation. Or la nature de l'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) a beaucoup d'influence sur le transfert de chaleur.

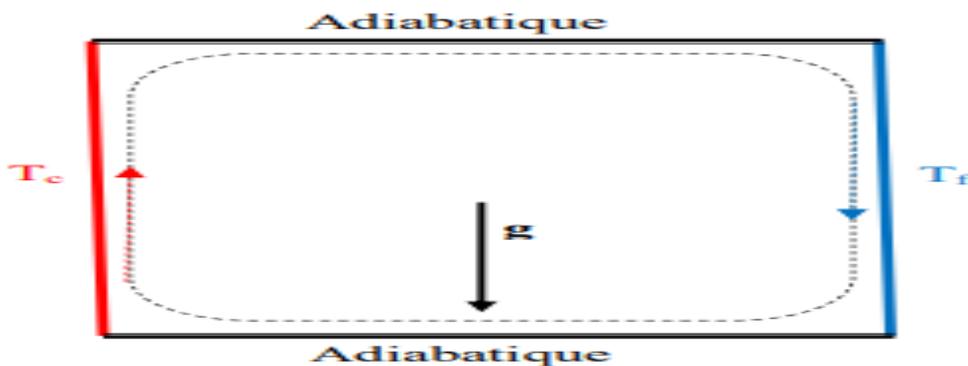


Figure.I.1. : Écoulement de la convection naturelle dans une enceinte carrée [2].

En ce qui concerne la mécanique des écoulements de la convection naturelle, on remarque que, puisque les gradients de masse volumique sont à l'origine du mouvement sont eux-mêmes dus à des gradients de température, il y a là un couplage structurel entre bilan de quantité de mouvement et bilan d'énergie, c'est-à-dire entre champ de vitesse et champ de température. En outre, l'écoulement de la convection naturelle peut passer d'un régime

laminaire à la turbulence après une phase de transition (laminaire/turbulent). En général, on en peut distinguer :

- Les écoulements externes (sont le plus souvent de régime turbulent).
- Les écoulements internes : ceux sont les écoulements (généralement de régime laminaire ou transitoire) qui se produisent dans des régions fermées tel est le cas des enceintes dont on trouve plusieurs configurations dans la littérature ; le domaine physique d'écoulement peut être partiellement fermé (avec des ouvertures à travers lesquelles l'échange du fluide avec le milieu ambiant pourrait avoir lieu) ou complètement fermé par des frontières solides. Par ailleurs, ces frontières solides peuvent être : isothermes ou adiabatiques et peuvent également subir un flux de chaleur. Dans ce travail on s'intéresse beaucoup plus aux écoulements internes de la convection naturelle laminaire.

I.2.2. Domaine d'application de la convection naturelle :

La communauté scientifique avait un intérêt croissant aux écoulements causés par la force de flottabilité résultant des différences de densité dues aux différences de température et qui prennent lieu dans des enceintes partiellement ou complètement fermées ; par conséquent, des recherches incessantes sont menées dans ce sens. La grande partie de cet intérêt surgit en raison de la demande insistante du refroidissement des circuits électriques et électroniques dont l'industrialisation prend de plus en plus de l'ampleur. Le phénomène de la convection naturelle peut être également généré en régions fermées à savoir : l'extraction de l'énergie géothermique, le traitement des matériaux, fours et chaudières, tours de refroidissement, bassins solaires, les processus environnementaux, les réacteurs nucléaires et chimiques, l'isolation des canalisations, la thermique du bâtiment et le confort humain, la thermique de l'atmosphère et des océans [2].

I.3. La convection dans les enceintes :

L'étude de la convection naturelle dans les enceintes a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux. L'intérêt de telles études réside dans son implication dans de nombreuses applications industrielles telles que le refroidissement des composants électroniques, la thermique des bâtiments, l'industrie métallurgique, la croissance des cristaux pour l'industrie des semi-conducteurs, et le cas d'une génération de chaleur accidentelle due à un incendie dans un bâtiment pour réacteur nucléaire...etc. L'enceinte rectangulaire continue à être la géométrie qui présente le plus d'intérêt.

Dans ce type d'enceinte, généralement deux parois sont maintenues à des températures différentes tandis que les autres sont isolées. On distingue principalement deux configurations, la première est celle d'une enceinte contenant un fluide et soumise à un gradient vertical de température (convection de Rayleigh-Bénard), la seconde étant celle d'une cavité avec un gradient horizontal de température.

I.3.1. Enceinte avec gradient vertical de température :

L'enceinte qui est chauffée par le bas et refroidie par le haut correspond à la configuration de la convection de Rayleigh Bénard qui traite de la stabilité et le mouvement d'un fluide confiné entre deux plaques horizontales qui sont maintenues à des températures uniformes et distinctes (**figure I.2**). La convection de Rayleigh-Bénard a une longue et riche histoire, elle a été étudiée durant des décennies aussi bien pour ses différentes applications industrielles que du point de vue recherche fondamentale [3].

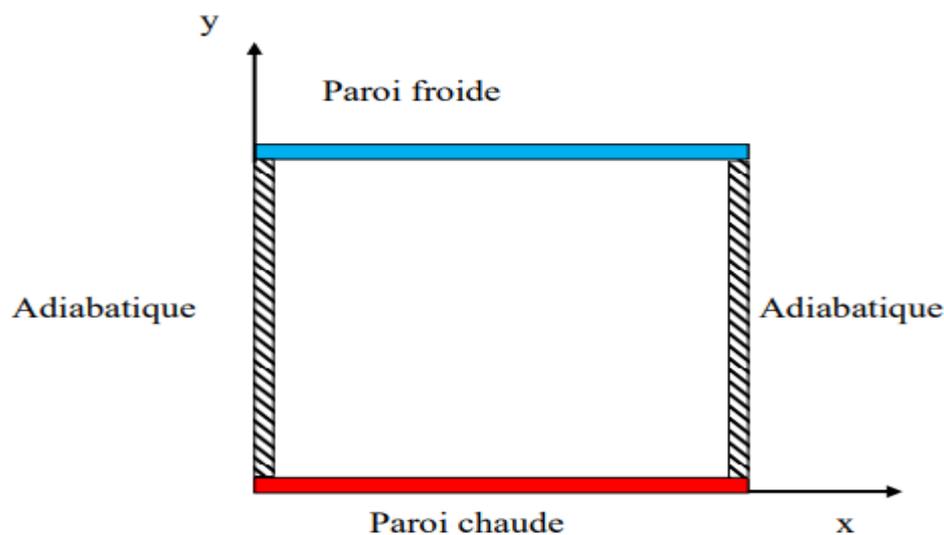


Figure I.2. : Schéma représentant la configuration de la convection de Rayleigh-Bénard [7].

Au-delà d'une valeur critique de l'écart de température, des rouleaux contrarotatifs, d'axes horizontaux apparaissent au sein du fluide (**Figure I.3**).

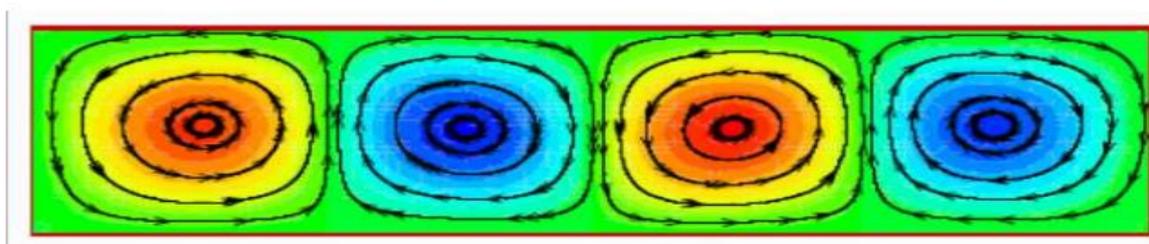


Figure I.3. : Schéma représentant les rouleaux de la convection de Rayleigh- Bénard [8].

I.3.2. Enceinte avec gradient horizontal de température :

Dans cette configuration, l'une des parois verticales est chauffée tandis que l'autre est refroidie, les parois horizontales étant considérées comme adiabatiques (**Figure I.4**). Pour cette configuration, il n'y a pas de gradient critique de température et le fluide est alors ascendant le long de la paroi chaude et descendant le long de la paroi froide [3].

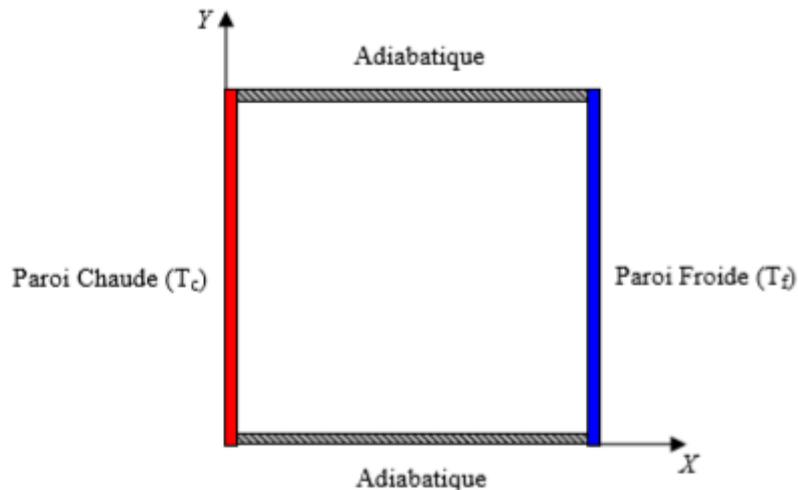


Figure I.4. : Schéma de la convection dans une Enceinte avec gradient horizontal de température [9].

I.3.3 Enceinte rectangulaire comportant des sources de chaleur surfaciques :

Les configurations considérées ci-dessus sont celles pour lesquelles le chauffage se fait uniformément au niveau d'une paroi qui est soit horizontale ou verticale, dans ce qui suit on va considérer les cas où les chauffages se font localement en utilisant des sources discrètes de chaleur. La configuration suivante représente ainsi un exemple d'une enceinte avec des sources surfaciques de chaleur discrètes. Cette enceinte rectangulaire (largeur L, hauteur H) est remplie de fluide et la température de la paroi latérale gauche est constante tandis que les deux parois horizontales inférieure et supérieure sont adiabatiques (**Figure I.5**). La paroi verticale droite étant chauffée par des flux de chaleur discrets [4].

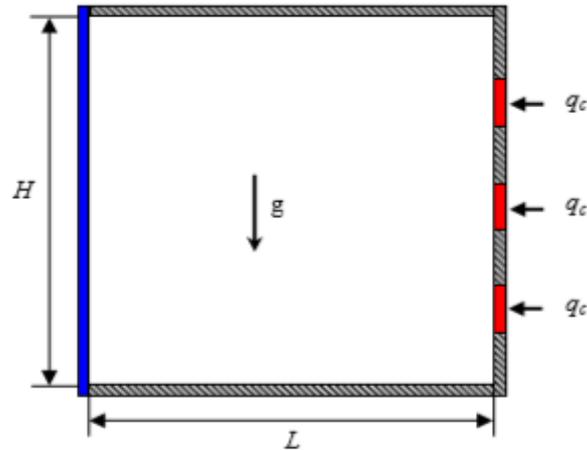


Figure I.5. : Enceinte rectangulaire comportant plusieurs sources de chaleur surfaciques [9].

I.4. L'intérêt de la convection naturelle :

Le phénomène de la convection naturelle est omniprésent autour dans nous, il existe dans plusieurs activités de l'échelle microscopique à l'échelle planétaire en passant par l'échelle macroscopique.

• La convection naturelle à l'échelle microscopique :

Ce phénomène est présent dans plusieurs mécanismes qui sont classés à l'échelle microscopique comme par exemple la croissance cristallographique où la convection naturelle joue un rôle primordial dans la qualité des cristaux comme par exemple dans les procédés d'élaboration du silicium monocristallin par la technique de Bridgman ou de Czochralski. En effet, l'apparition de la convection naturelle pendant la croissance cristalline peut conduire à des inhomogénéités qui conduisent à des défauts qui affectent la qualité des cristaux [5].

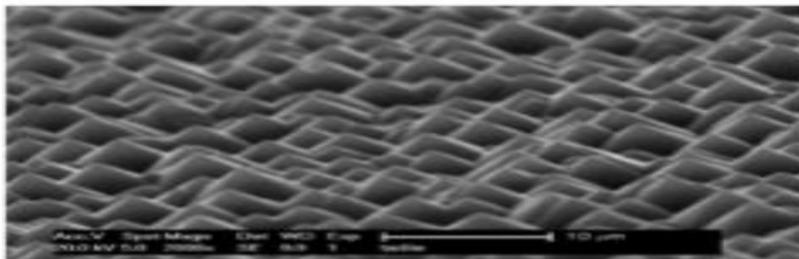


Figure I.6. : Structure cristallographique Mono-Si utilisé dans la fabrication des panneaux solaires [10].

• La convection naturelle à l'échelle macroscopique :

A notre échelle la convection naturelle est rencontrée dans plusieurs situations comme par exemple dans les processus impliqués dans la cuisine pour la préparation des plats et des boissons chaudes.

La convection naturelle représente également un avantage économique car elle est utilisée dans plusieurs techniques de production d'énergie ainsi que dans le procédé de séchage et de chauffage solaire et même dans le secteur du bâtiment comme moyen de ventilation naturelle. Dans le domaine de l'électronique, la convection naturelle est aussi présente où elle est exploitée dans le refroidissement des composants comme les microprocesseurs.

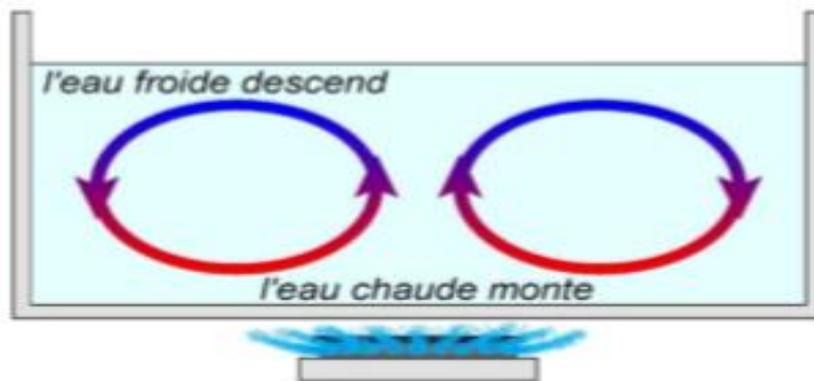


Figure I.7. : Les cellules convectives dans une casserole sous le feu [11].

• La convection naturelle à l'échelle planétaire :

Même à l'échelle planétaire la convection naturelle est fort présente dans plusieurs phénomènes comme par exemple les cellules de Hadley qui représentent l'effet de la convection naturelle dans l'atmosphère représenté sur la (**figure I.8**).

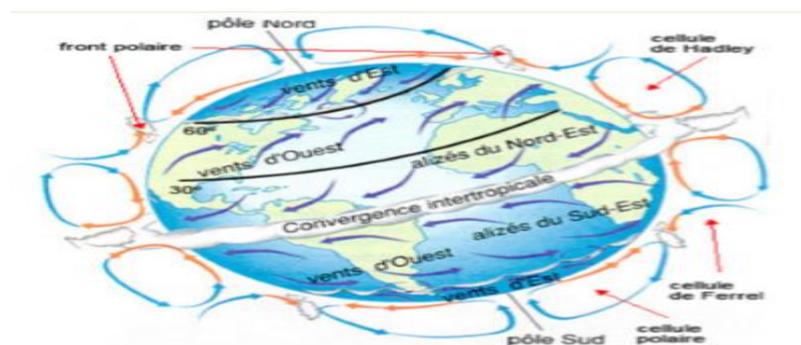


Figure I.8. : La circulation atmosphérique [12].

La convection du manteau est un phénomène physique qui se produit à l'intérieur de la terre. Il peut avoir lieu également sur d'autres planètes comme le soleil. La convection

mantellique est une composante essentielle de la théorie de la tectonique des plaques responsable des éruptions des volcans.

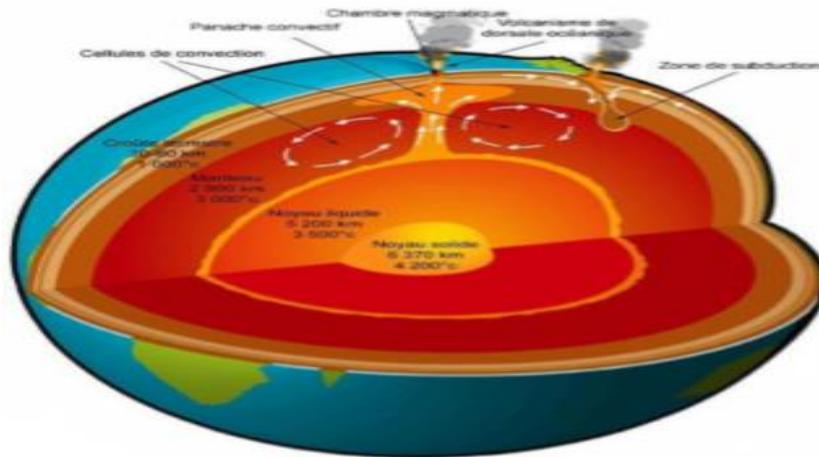


Figure I.9. : La convection du manteau de la terre [13].

I.5. Nombres adimensionnels :

I.5.1. Nombre de Nusselt :

C'est un nombre adimensionnel, il représente le rapport entre le flux thermique échangé par convection à celui par conduction. Sa définition triviale est donnée comme suit :

$$N_u = \frac{h_c l}{K} \quad (\text{I.1})$$

Toutefois, le nombre de Nusselt peut être calculer comme suit. Supposons qu'une surface chaude est refroidie par un écoulement de fluide froid. La chaleur de la surface chaude, qui est maintenue à une température constante, est diffusée à travers une couche limite par convection et par l'écoulement froid. Ce phénomène est défini par la loi de Newton de refroidissement par unité de surface. Celle-ci est donnée comme suit :

$$h_c (T_w - T_f) = -k \frac{\partial t}{\partial n} \quad (\text{I.2})$$

Où h_c est le coefficient de transfert de chaleur (par convection), k est une conductivité thermique moyenne du fluide, T_r est la température de l'écoulement du fluide et n est la direction normale à la surface de la chaleur transférée. L'équation ci-dessus peut être réécrite comme

$$\frac{h_c L}{K} = - \frac{1}{T_w - T_f} \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right| \quad (\text{I.3})$$

Où L est une dimension caractéristique.

La quantité sur le côté gauche de ce qui précède l'équation est le nombre de Nusselt (c.-à-d.

$N_u = \frac{h_c l}{k}$). Si nous appliquons les échelles non-dimensionnelles, nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus :

$$N_u = \frac{\partial t^*}{\partial n^*} \quad (\text{I.4})$$

Où N_u est le nombre de Nusselt local. Il est noté que le nombre de Nusselt local est égale au gradient de température adimensionnelle local ($\frac{\partial t^*}{\partial n^*}$).

I.5.2. Nombre de Grashof :

C'est un nombre sans dimension, utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection naturelle dans un fluide.

Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. On le définit par :

$$Gr = \frac{\beta \Delta T L_c^3}{\nu^2} = \frac{Ra}{Pr} \quad (\text{I.5})$$

Où : L_c : La longueur caractéristique entre la paroi chaude et froide.

I.5.3. Nombre de Rayleigh :

C'est un nombre sans dimension, caractérisant aussi le transfert de chaleur au sein d'un fluide. Ce nombre est utilisé en mécanique des fluides. Inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère par conduction, au-delà de cette valeur, c'est la convection libre (naturelle) qui devient importante. On le définit de la manière suivante :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L_c^3}{\nu \alpha} = Gr Pr \quad (\text{I.6})$$

I.5.4. Nombre de Prandtl :

C'est un nombre adimensionnel. Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique. On le définit de la manière suivante [6] :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{I.7})$$

I.6. Synthèse bibliographique :

L'étude des transferts de chaleur par convection naturelle dans une enceinte fermée a suscité l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. La recherche dans ce domaine s'étend sur plusieurs années. Les revues bibliographiques que nous introduirons montre l'importance de ces études, ainsi que l'existence d'un grand nombre de travaux théoriques, expérimentaux et numériques dédiés à l'étude des transferts naturels de chaleur par convection dans les milieux fluides contenus dans des cavités de formes différentes. Parmi ces travaux on peut citer :

Une étude porte sur l'analyse numérique de la convection laminaire naturelle au sein d'une enceinte carrée : la paroi verticale de l'enceinte carrée maintient une température constante, tandis que la paroi horizontale est isolée, à l'exception de la partie qui occupe 20 à 80 % de la surface inférieure du l'enceinte. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations d'écoulement et de transfert de chaleur, et l'algorithme SIMPLER est utilisé pour traiter le couplage vitesse-pression. L'objectif de cette étude est l'influence des changements du nombre de Rayleigh et de la longueur de la partie chauffée sur la structure d'écoulement et de transfert de chaleur dans une cavité complètement remplie de fluide newtonien incompressible [14].

Un travail a été mené par Shigeo and Bejan afin de synthétiser les résultats expérimentaux, les quelques simulations numériques disponibles à l'époque et surtout les études analytiques. Le comportement général du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport de forme de l'enceinte pour différents nombres de Rayleigh a ainsi été obtenu. Les résultats expérimentaux ont effectivement démontré que l'effet du nombre de Prandtl est négligeable lorsque ce dernier est de l'ordre de l'unité ou plus. De cette synthèse, il apparaît clairement que pour un nombre de Rayleigh donné, le transfert de chaleur atteint un maximum pour un certain rapport de forme optimal. Pour $Ra \sim 10^5$, le maximum se trouve autour de $A=1$ (A représenté la hauteur de l'enceinte sur sa largeur) et il se déplace vers des valeurs plus faibles du rapport de forme lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté [15].

Chu et Churchill (1976) qui ont étudié la convection naturelle au sein d'une enceinte rectangulaire bidimensionnelle munie d'une source de chaleur discrète. Avec des parois horizontales thermiquement isolées, une paroi verticale froide isotherme et une source de chaleur installée sur l'autre paroi verticale, ils ont obtenu numériquement la position de la source qui optimise le transfert thermique, en fonction du nombre de Rayleigh. Cette position

optimale se trouve près du centre de la paroi verticale, mais glisse légèrement vers le bas à mesure que le nombre de Rayleigh augmente [16].

Ganzarolli et Milanez ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte de forme rectangulaire, chauffée par le bas et refroidie par ses côtés verticaux. Cette étude a porté sur l'effet de la variation du nombre de Rayleigh (allant de 10^3 à 10^7), le nombre de Prandtl ainsi que l'effet de la variation du rapport d'aspect varie de (1 à 9) sur le mouvement du fluide et le transfert de chaleur [17].

L'étude expérimentale de Turner and Flack a confirmé ces prédictions en plus de les étendre à des nombres de Rayleigh plus élevés. Ainsi, la hauteur optimale du centre de la source par rapport à la hauteur de l'enceinte pour $10^5 < Ra < 6.10^6$ a été trouvée de (0,4) [18].

D'après cette recherche bibliographique, on a constaté que la plupart des études ont été menées avec une seule source à flux de chaleur constant dans une cavité carrée contenant de l'air. Le cas d'une source de chaleur débitant des flux variables périodiquement et dont la position peut varier n'a pas été considéré à notre connaissance. De même, l'étude de deux sources de chaleur qui sont à flux de chaleur variables et qui sont en interaction n'a pas été menée. Ces cas feront, entre autres, l'objet d'une partie importante de ce mémoire.

Chapitre II : Modèle mathématique

Chapitre II : Modèle mathématique

II.1. Description du problème :

Le problème physique considéré est schématisé sur la (**figure II.1**). Il s'agit d'une enceinte bidimensionnelle, de longueur L et de hauteur H , remplie de fluide, qui est dans notre cas c'est l'air.

Les parois horizontales de l'enceinte sont considérées comme adiabatiques sauf au niveau des sources de chaleur. En effet, la paroi horizontale inférieure pouvant être chauffée localement par deux ou quatre sources de chaleur. Les sources de chaleur pouvant débitée des flux de chaleur qui sont constants. Les parois verticales sont quant à elles maintenues à une température T_f , qui est constante.

L'écoulement dans l'enceinte est induit par la force de flottabilité, résultant de la différence de densité, qui est à son tour due à un gradient de température.

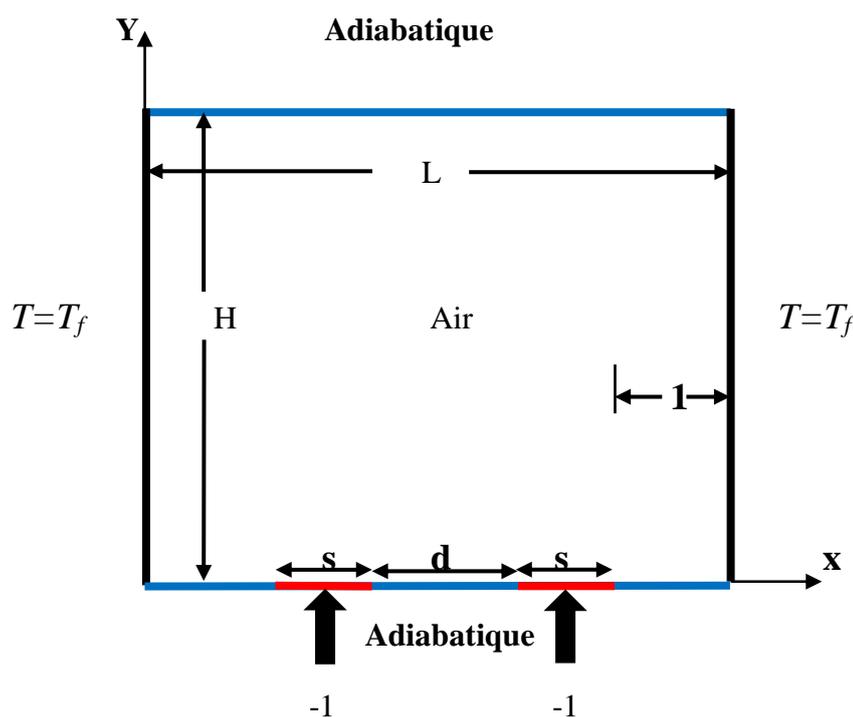


Figure II.1. : configuration physique.

II.2. Equations gouvernantes (Navier Stokes) :

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de continuité, de Navier-stokes et l'équation d'énergie, qui expriment respectivement la conservation de masse, de quantité de

Chapitre II : Modèle mathématique

mouvement et d'énergie. Pour une formulation simple du problème, nous avons considéré quelques approximations, entre autres l'approximation de Boussinesq [4]. En effet, nous supposons que l'influence de la variation de la masse volumique n'est prise en compte que par l'intermédiaire des forces volumiques, le fluide étant également Newtonien.

La masse volumique du fluide varie linéairement avec la température et est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II.1})$$

β : Coefficient de dilatation.

ρ_0 : Masse volumique à la température de référence.

T_0 : Température de référence.

Les équations gouvernantes sont données respectivement par :

II.2.1. Equation de continuité :

C'est l'équation qui exprime la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Elle s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Qui peut être aussi écrite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Avec (u) la composante du vecteur vitesse suivant x, (v) la composante suivant y et (w) la composante suivant z, (t) le temps, x, y, z étant les coordonnées cartésiennes.

II.2.2. Equations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T - T_f) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

Avec p : la pression, ρ : la masse volumique et ν : la viscosité cinématique du fluide.

Chapitre II : Modèle mathématique

II.2.3. Equation d'énergie :

$$(\rho c_p) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p) \vec{u} \nabla T = \lambda \nabla^2 T \quad (\text{II.7})$$

Qui peut être aussi écrite :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

Où :

u, v, w : composantes du vecteur vitesse.

p : pression.

ρ : masse volumique.

g : accélération de la pesanteur.

β : coefficient de dilatation.

ν : viscosité cinématique.

λ : désigne la conductivité thermique et C_p : la chaleur spécifique du fluide à pression constante.

II.3. Adimensionnalisation des équations gouvernantes :

L'adimensionnalisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

De façon à rendre les équations (II.2 à II.7) sous formes adimensionnelles, elles seront transformées par la même manière que dans [19] qui ont introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$x^* = \frac{x}{H} \quad u^* = \frac{u}{\left(\frac{\alpha}{H}\right)} \quad p^* = \frac{p}{\rho \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2} \quad (\text{II.9.a})$$

$$y^* = \frac{y}{H} \quad v^* = \frac{v}{\left(\frac{\alpha}{H}\right)} \quad T^* = \frac{T - T_f}{\frac{q_{cs}}{\lambda}} \quad (\text{II.9.b})$$

$$z^* = \frac{z}{H} \quad w^* = \frac{w}{\left(\frac{\alpha}{H}\right)} \quad t^* = \frac{t \alpha}{w} \quad (\text{II.9.c})$$

Avec :

Chapitre II : Modèle mathématique

s : longueur caractéristique.

T_f : Température froide.

α : Diffusivité thermique.

q_c : Le flux de chaleur imposé.

t : le temps.

Dans l'ensemble des équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie, les indices (*) qui indiquent le caractère adimensionnel sont omis, pour faciliter l'écriture.

En introduisant les variables adimensionnelles (II.10) dans les équations de conservation, les équations gouvernantes adimensionnelles deviennent comme suit :

II.3.1. Equation de continuité :

$$\nabla \vec{u}^* = 0 \quad (\text{II.10})$$

II.3.2. Equations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \nabla u^* = -\nabla p^* + p_r \nabla^2 u^* \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \nabla v^* = -\nabla p^* + A Ra p_r T^* + p_r \nabla^2 v^* \quad (\text{II.12})$$

II.3.3. Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u \nabla T^* = \nabla^2 T^* \quad (\text{II.13})$$

Où, u est le vecteur vitesse ($u = (u, v)$) en 2D, $A = L/H$ est le rapport d'aspect de la cavité.

Dans les équations ci-dessus nous notons la présence des nombres caractéristiques, à savoir le nombre de Rayleigh (Ra) et le nombre de Prandtl (Pr). Ces nombres adimensionnels sont définis par [6] dans le chapitre précédent.

II.4. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites utilisées pour la configuration étudiée (Figure II.2) sont comme suit [4] :

$$0 < x < L, y = H \quad u^* = v^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{II.14.a})$$

Chapitre II : Modèle mathématique

$$L1 < x < L1+S1, y=0 \quad u^* = v^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = -1 \quad (\text{II.14.b})$$

$$L1+S1+L2 < x < L1+S1+L2+S2, y=0 \quad u^* = v^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = -1 \quad (\text{II.14.c})$$

$$L1+S1+L2+S2 < x < L, y=0 \quad u^* = v^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{II.14.d})$$

$$0 < x < L1, y=0 \quad u^* = v^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{II.14.e})$$

$$L1+S1 < x < L2+L1+S1, y=0 \quad u^* = v^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{II.14.f})$$

$$0 < y < H, x=0 \quad u^* = v^* = 0, T^* = 0 \quad (\text{II.14.J})$$

$$0 < y < H, x=L \quad u^* = v^* = 0, T^* = 0 \quad (\text{II.14.H})$$

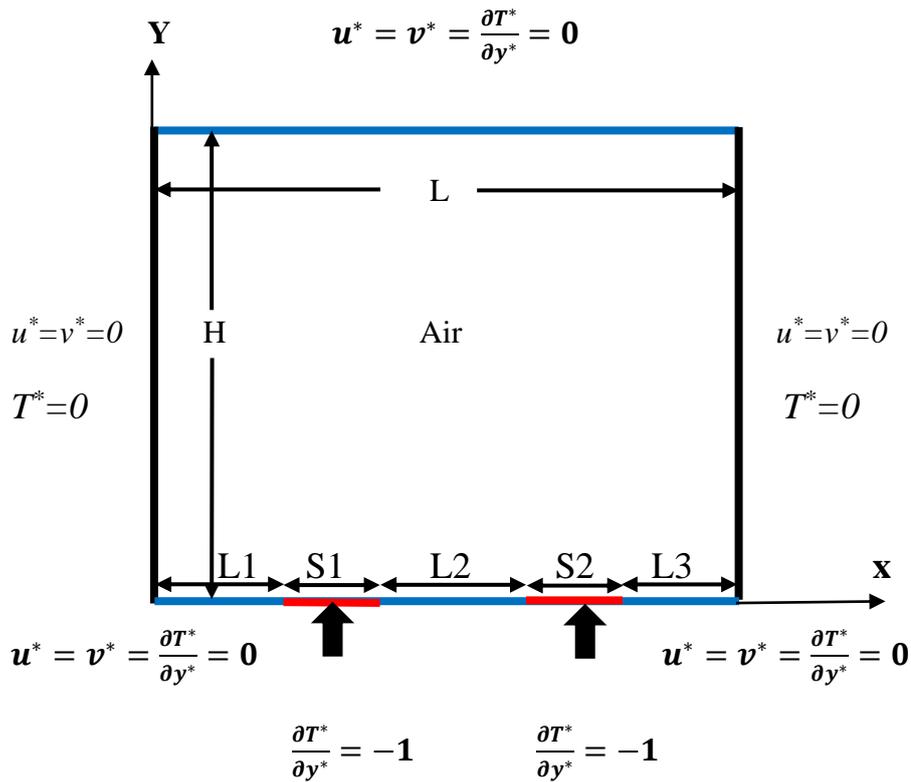


Figure II.2. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites. Cas de deux sources de chaleur.

Chapitre II : Modèle mathématique

II.5. Transfert de chaleur :

Le taux du transfert de la chaleur par convection est décrit par le nombre de Nusselt qui est le rapport entre la chaleur transférée par convection par rapport à la chaleur transférée par conduction. Le nombre de Nusselt (Nu) est défini comme suit [20] :

$$Nu_{local} = \frac{q_c s}{\lambda(T-T_f)} \quad (\text{II.15})$$

Avec :

λ : conductivité thermique du fluide.

Pour une cavité chauffée différentiellement, le Nusselt moyen peut être calculé en moyennant les nombres de Nusselt locaux calculés au niveau de tous les nœuds de la paroi froide ou chaude.

Le Nusselt moyen est alors donné par la relation [19] :

$$Nu_u = \frac{\sum_{noeuds} Nu_{local}}{n} \quad (\text{II.16})$$

Avec :

n : nombre de nœuds

II.6. Discrétisation des équations :

Le problème physique de la convection naturelle est décrit par des équations aux dérivées partielles non linéaires qui ne peuvent être résolues analytiquement, à cause de leurs non linéarité d'une part, et leurs couplages d'autre part. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode numérique pour trouver les meilleures solutions.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour la résolution de ce type de problème, les méthodes les plus connues sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.

Nous avons choisi la méthode des volumes finis, parce qu'elle est l'approche la mieux adaptée et la plus facile à appliquer en mécanique des fluides, et est calculé selon l'algorithme SIMPLER développé par spalding and patankar [20], elle présente également certains avantages

Chapitre II : Modèle mathématique

comme sa fiabilité, son adaptation au problème physique et plus important son caractère conservatif.

II.6.1. Rappels sur La méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre fini, appelé volume de contrôle. Les équations algébriques qui sont obtenues par l'intégration des équations aux dérivées partielles, décrite au chapitre précédent, à travers ces volumes de contrôle. Ces équations discrétisées conservent toutes les grandeurs physiques sur ce dernier. La technique des volumes finis comporte essentiellement les étapes suivantes :

- La division du domaine considéré en volume de contrôle.
- La formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles.
- L'écriture des équations algébriques aux nœuds du maillage.
- Résolution du système algébrique non linéaire.

À l'intérieur de petits éléments de volumes, en veillant à ce que le flux d'une grandeur à travers un élément de surface soit le même pour les deux volumes adjacents. Les équations sont mises sous forme linéaire de façon à être résolues par une méthode matricielle.

Si on appelle P le point considéré, les points adjacents sont les points est E, ouest W, sud S et nord N. Les faces du volume sont dénommées de la même façon e, w, s et n (**figure.II.3**)

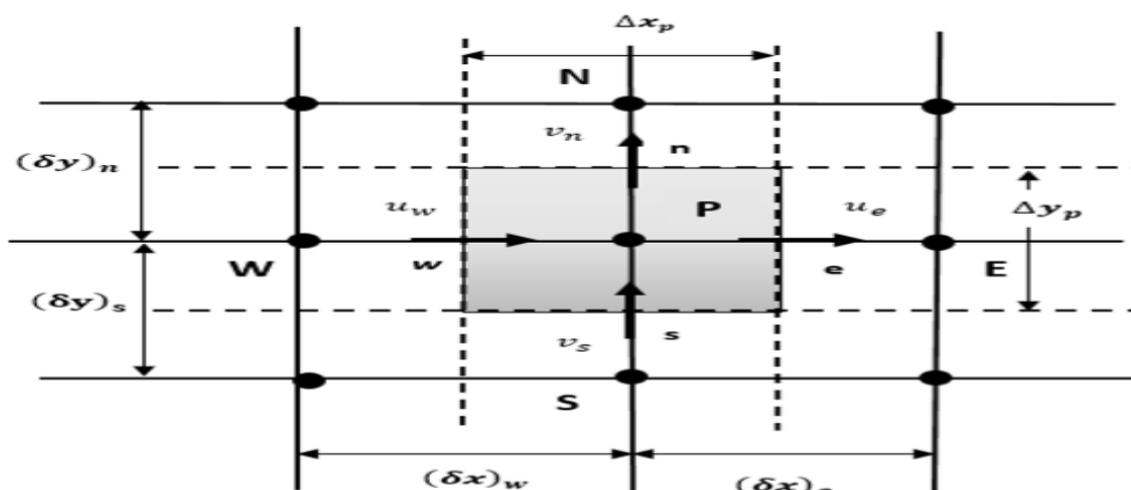


Figure II.3. : Représentation d'un volume de contrôle bidimensionnel.

Une des particularités de cette méthode est d'utiliser des maillages décalés (staggered grid) suivant les grandeurs considérées

Chapitre II : Modèle mathématique

La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations de conservation des différentes grandeurs physiques ayant la forme générale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho\vec{U}) = \text{div}(\Gamma + \overline{\text{grad}\phi}) + S_\phi \quad (\text{II.17})$$

II.6.2. Maillage :

La méthode de discrétisation des équations différentielles partielles nécessite le choix d'un maillage de la géométrie (domaine physique). Nous avons opté un maillage uniforme dans les deux directions de l'écoulement comme le montre la (figure II.4).

Ce schéma du maillage adopté, est proposé par Patan Kar.

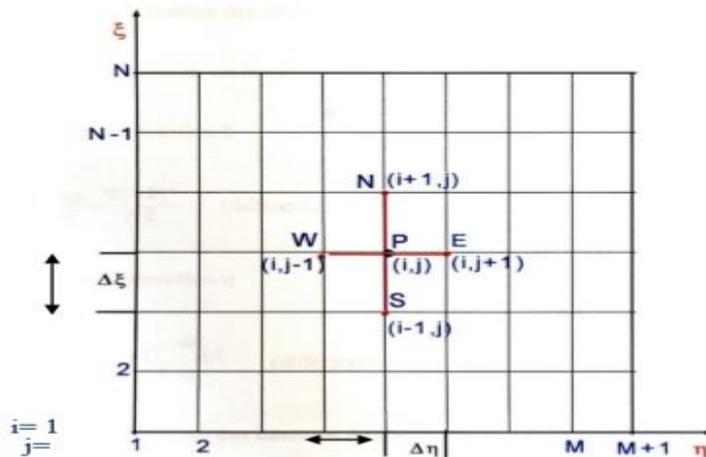


Figure II.4. : Schéma du Maillage.

II.6.3. Discrétisation :

Les équations de conservation présentées dans ce chapitre peuvent être mises sous une forme commune. Ainsi, si on note ϕ la variable étudiée, Ce qui permet d'éviter la répétition du travail de discrétisation pour chaque équation. Chacune des équations peut être réduite à une seule équation générale, en coordonnées cartésiennes selon la forme [21] :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_T + \underbrace{\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi)}_C = \underbrace{\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)}_D + \underbrace{S_\phi}_S \quad (\text{II.18})$$

Avec :

T : terme transitoire.

C : terme de convection.

Chapitre II : Modèle mathématique

D : terme de diffusion.

S : terme source.

Nous venons de voir que, pour chaque variable ϕ , l'équation de transport s'écrit dans le cas instationnaire, bidimensionnel comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_{\phi} \quad (\text{II.19})$$

Où ϕ est la propriété transportée, Γ indique le coefficient de diffusion et S_{ϕ} le terme source.

Tous ces termes sont listés dans le tableau suivant :

Grandeur transportée	ϕ	Γ	S_{ϕ}
Conservation de masse	1	0	0
Quantité de mouvement selon x	U	P_r	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement selon y	V	P_r	$\frac{\partial P}{\partial y} + RaP_r(T - T_f)$
Energie	T	1	0

II.6.4. Application à l'intégration de l'équation de transport :

Cette équation (II.19) est discrétisée et le système d'équation aux dérivées partielles est résolu pour chaque valeur successive de ϕ . Le système prend alors la forme d'une équation très condensée. L'équation (II.19) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (J_x) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y) = S_{\phi} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} J_x = (u\phi) - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ J_y = (v\phi) - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

J_x et J_y , sont les flux totaux (convection et diffusion) par unité de surface dans les directions x et y.

Chapitre II : Modèle mathématique

La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle de transport en un système d'équation algébrique. L'équation (II.20) est d'abord intégrée sur le volume de contrôle entre deux temps successifs t et $t+\Delta t$. (Figure II.5) :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dt}_I + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_x) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y) \right) dx dy dt}_{II} = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_\phi dx dy dt}_{III} \quad (\text{II.22})$$

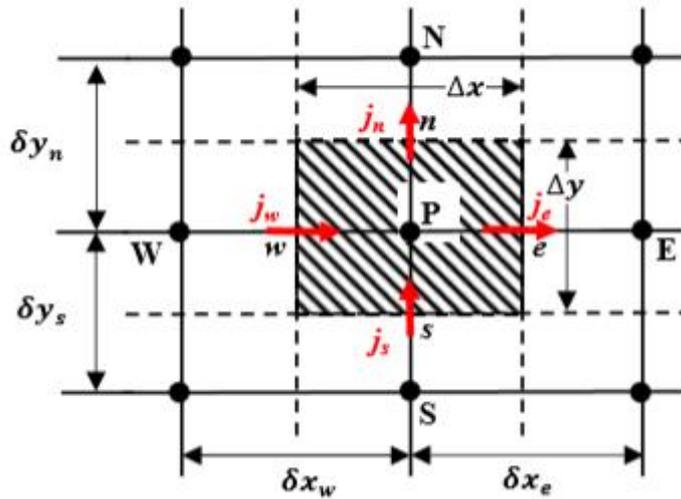


Figure II.5. : Volume de contrôle.

Pour pouvoir approximer l'équation sous forme algébrique, on considère les hypothèses suivantes :

- La variable généralisée ϕ varie linéairement entre les nœuds principaux dans les deux directions.
- Le terme source est uniforme sur le volume de contrôle.

II.6.4.1. Intégration du flux total :

L'intégration du terme convectif et diffusif (terme (II) de l'équation (II.22)) entre t et $t+\Delta t$ sur tout le volume de contrôle est :

$$II = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) dx dy dt \quad (\text{II.23})$$

$$II = \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (J_x) dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (J_y) dx dy \right] dt \quad (\text{II.24})$$

Chapitre II : Modèle mathématique

$$\Pi = \left[\left((J_x)_e - (J_x)_w \right) \int_s^n dy + \left((J_y)_n - (J_y)_s \right) \int_w^e dx \right] \Delta t \quad (\text{II.25})$$

$$\Pi = (J_x)_e \Delta y \Delta t - (J_x)_w \Delta y \Delta t + (J_y)_n \Delta x \Delta t - (J_y)_s \Delta x \Delta t \quad (\text{II.26})$$

Si on pose :

$$J_e = (J_x)_e \Delta y \quad J_n = (J_y)_n \Delta x$$

$$J_w = (J_x)_w \Delta y \quad J_s = (J_y)_s \Delta x$$

Donc l'expression de terme (II) devient :

$$\Pi = [J_e - J_w + J_n - J_s] \Delta t \quad (\text{II.27})$$

Les équations J_e, J_w, J_n et J_s sont les flux aux interfaces (e, w, n, s).

II.6.4.2. Intégration du terme source :

L'intégration du terme source (terme (III) de l'équation (II.22)) entre t et t+Δt sur tout le volume de contrôle est donnée par :

$$\text{III} = \int_t^{t+\Delta t} S_\phi \int_s^n \int_w^e dx dy dt = \overline{S_\phi} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{II.28})$$

Où $\overline{S_\phi}$ est la valeur moyenne du terme source sur ce volume de contrôle. Quand le terme source dépend de la variable dépendante, cette dépendance doit être exprimée par une relation linéaire, ce qui permettra d'utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

II.6.4.3. Discrétisation temporelle :

Dans l'équation (II.22), le terme de dérivée temporelle (I) est intégré entre les instants t et t+Δt pour tout le volume de contrôle :

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \int_w^e \int_s^n dx dy = (\phi_p^1 - \phi_p^0) \Delta x \Delta y \quad (\text{II.29})$$

Les exposants 0 et 1 indiquant les temps t et t+Δt.

(i = E, W, S, N) varie entre les instants t et t+Δt.

II.6.5. Schéma hybride (HDS) :

Ce schéma mis au point par Spalding (1972). Le schéma HDS est la combinaison des deux schémas (centré et Upwind) [22].

Chapitre II : Modèle mathématique

L'intégration de l'équation générale de transport (II.18) donne :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{II.30})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \Delta x \Delta y ; b = S_c \Delta x \Delta y$$

$$a_E = \max \left\langle -F'_E, D_E - \frac{F'_E}{2}, 0 \right\rangle \quad a_W = \max \left\langle F'_W, D_W + \frac{F'_W}{2}, 0 \right\rangle$$

$$a_N = \max \left\langle -F'_N, D_N - \frac{F'_N}{2}, 0 \right\rangle \quad a_S = \max \left\langle F'_S, D_S + \frac{F'_S}{2}, 0 \right\rangle$$

$$F'_E = u_E \Delta y, F'_W = u_W \Delta y, F'_N = u_N \Delta x, F'_S = u_S \Delta x$$

$$D_E = \frac{\Gamma_E \Delta y}{\partial x_E} \quad D_W = \frac{\Gamma_W \Delta y}{\partial x_W}$$

$$D_N = \frac{\Gamma_N \Delta x}{\partial y_N} \quad D_S = \frac{\Gamma_S \Delta x}{\partial y_S}$$

II.7. Procédure de résolution :

Le résultat de la discrétisation des équations différentielles de transport est un ensemble d'équations algébriques non linéaires. Si on divise le domaine de calcul en N mailles selon (x) et en M mailles selon (y), on aura un système de (N.M) équations algébriques non linéaires pour chaque variable ϕ considérée. Rappelons que les variables ϕ dans notre problème sont la température (T) et les deux composantes de la vitesse (u et v) et la variation de P. Un problème cependant subsiste du fait qu'il n'existe pas d'équation qui permet d'avoir directement le champ de pression. Il faut donc avoir recours à une méthode itérative, pour cela on utilise un algorithme de correction de pression appelé SIMPLER.

L'algorithme SIMPLER, acronyme pour << Semi-Implicit Method for Pressure Linked-Equations >> permet de résoudre le système d'équations discrétisées. Cet algorithme stipule l'existence d'une relation entre les vitesses corrigées et les pressions corrigées, en vue de vérifier l'équation de conservation de la masse.

II.7.1. Equation algébrique de pression :

Lorsque le champ de pression est connu, le champ de vitesse est obtenu directement par la résolution des équations de quantité de mouvement. Dans le cas où ce champ est inconnu, l'établissement d'une équation de pression est nécessaire.

Chapitre II : Modèle mathématique

Dans l'équation de mouvement, le terme ϕ représente les composantes de la vitesse (u et v) qui doivent satisfaire l'équation de continuité. Le but est de trouver le champ de pression correct sur le volume de contrôle.

L'intégration de l'équation générale de transport pour (u) et (v) sur les deux volumes de contrôle spécifiques aux composantes de vitesse donne les équations suivantes [21] :

$$\begin{aligned} a_E u_E &= \sum_i a_i u_i + A_E (P_P - P_E) + b_e \\ a_N v_N &= \sum_j a_j v_j + A_N (P_P - P_N) + b_v \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Avec :

b_e et b_n qui contiennent tous les termes source de l'équation sauf celui de pression. Le terme $A_i (P_P - P_E)$ représente les forces de pression et A_i représente les faces $i = (e, w, n, s)$. L'étape de prédiction consiste à donner un champ de pression P^* pour obtenir des valeurs estimées de la vitesse u^* et v^* à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned} a_E u_E^* &= \sum_i a_i u_i^* + A_E (P_P^* - P_E^*) + b_e \\ a_N v_N^* &= \sum_j a_j v_j^* + A_N (P_P^* - P_N^*) + b_v \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

En général, les valeurs obtenues des vitesses ne vérifient pas l'équation de continuité, c'est pourquoi on corrige la pression P^* estimée par P' qui est donnée par :

$$P = P^* + P' \quad (\text{II.33})$$

De même pour les composantes de la vitesse

$$\begin{cases} u = u^* + u' \\ v = v^* + v' \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Où P' , u' et v' sont les corrections de la pression et des vitesses.

$$\begin{cases} u_i = u_i^* + u'_i \\ v_i = v_i^* + v'_i \end{cases} \quad \text{Avec } i = (e, w) \quad (\text{II.35})$$

Si on retranche les équations des valeurs estimées de celles des valeurs corrigées, on trouve :

$$\begin{aligned} a_E u'_E &= \sum_i a_i u'_i + A_E (P'_P - P'_E) \\ a_N v'_N &= \sum_j a_j v'_j + A_N (P'_P - P'_N) \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

D'autre part, on néglige les termes $\sum_i a_i u'_i$ et $\sum_j a_j v'_j$ par rapport aux termes de pression, alors les équations (II.36) deviennent respectivement :

Chapitre II : Modèle mathématique

$$\begin{cases} u'_E = d_E(P'_P - P'_E) \\ v'_N = d_N(P'_P - P'_N) \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Avec :

$$d_E = \frac{A_E}{a_E} \quad \text{et} \quad d_N = \frac{A_N}{a_N}$$

Les champs de vitesse seront corrigés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_E = u'_E + d_E(P'_P - P'_E) \\ v_N = v'_N + d_N(P'_P - P'_N) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Maintenant pour trouver la discrétisation de P' (équation de correction de pression), il suffit d'écrire l'équation de continuité comme une équation de correction de pression.

L'équation de continuité discrétisée pour un volume de contrôle s'écrit :

$$(u_E - u_W)\Delta y + (v_N - v_S)\Delta x = 0 \quad (\text{II.39})$$

L'introduction des expressions (II.34) et (II.35) nous donne :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (\text{II.40})$$

Avec :

$$a_E = d_E \Delta y, \quad a_W = d_W \Delta y, \quad a_N = d_N \Delta x, \quad a_S = d_S \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad b = (u_W^* - u_E^*)\Delta y + (v_S^* - v_N^*)\Delta x$$

Les équations (II.32) peuvent être alors écrites sous la forme :

$$\begin{cases} u_E = u''_E + d_E(P_P - P_E) \\ v_N = v''_N + d_N(P_P - P_N) \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Les pseudo vitesse u''_E et v''_N sont définies par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u''_E = \frac{\sum a_i u_i + b_u}{a_E} \\ v''_N = \frac{\sum a_j v_j + b_v}{a_N} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

L'introduction des équations (II.39) dans l'équation de continuité discrétisée (II.39) permet d'obtenir une équation de pression analogue à l'équation de correction de pression (II.41) qui s'écrit sous la forme :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{II.43})$$

Avec :

Chapitre II : Modèle mathématique

$$a_E = d_E \Delta y, \quad a_W = d_W \Delta y, \quad a_N = d_N \Delta x, \quad a_S = d_S \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad b = (u_W^* - u_E^*) \Delta y + (v_S^* - v_N^*) \Delta x$$

II.7.2. Algorithme SIMPLER :

La résolution du système d'équations discrète (II.40), est compliquée à cause de non linéarité des équations, et de l'absence d'une équation gère la pression qui existe dans le terme source des équations de quantité de mouvement. Pour cette raison, on utilise des méthodes indirectes dont la plus répandue est l'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Links Equation Revised).

Cet algorithme consiste à résoudre l'équation de pression pour obtenir le champ correspondant, et résoudre l'équation de pression corrigée seulement pour corriger la vitesse, cette résolution doit être séquentielle.

L'algorithme SIMPLER se résume la résolution du problème posé dans les étapes suivantes [21] :

- Estimer un champ de vitesse.
- Calcul des coefficients pour les équations du mouvement et détermination des pseudo vitesses \mathbf{u}'' et \mathbf{v}'' .
- Calcul des coefficients pour l'équation de pression et obtention de la pression.
- Considération du champ de pression (P) comme un champ estimé (P^*).
- Résoudre les équations de mouvement pour obtenir les vitesses u^* et v^* .
- Calcul du terme (b) de l'équation de correction de pression.
- Résoudre l'équation de pression pour obtenir la correction \mathbf{P}'' .
- Correction des valeurs des vitesses.

Cette succession d'opérations est reprise et se poursuit jusqu'à convergence des différentes grandeurs calculées.

Chapitre II : Modèle mathématique

II.7.3. Résolution des équations :

Une fois les équations algébriques, décrivant l'évolution des variables de l'écoulement dans le domaine de calcul, établies, une méthode numérique de résolution est choisie en fonction du type de ces équations et en considérant la notation indicielle qui est utilisée pour faciliter la programmation des étapes de calcul. La forme de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport sous la nouvelle notation est alors :

$$A_{P(i,j)}\phi_{i,j} = A_{E(i,j)}\phi_{i+1,j} + A_{W(i,j)}\phi_{i-1,j} + A_{N(i,j)}\phi_{i-1,j} + A_{S(i,j)}\phi_{i+1,j} + S_{(i,j)} \quad (\text{II.44})$$

Avec : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$

Les coefficients de cette équation sont des variables de transport ϕ . Une méthode de résolution itérative doit être utilisée à cause de la non-linéarité. Le système (II.44) est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[A]\{\phi\} = \{S\} \quad (\text{II.45})$$

La matrice [A] est une matrice carrée. Pour la résolution de cette matrice on utilise la méthode des approximations successives qui est brièvement décrite ci-dessous.

II.7.3.1. La méthode des approximations successives :

Lorsque le nombre des inconnues d'un système linéaire est élevé, il devient beaucoup plus commode de trouver la résolution du ce système par des méthodes numériques approchées. L'une d'elles est la méthode des approximations successives dite aussi méthode des itérations [22].

Soit le système (II.44) avec la forme matricielle (II.45), supposant que les coefficients diagonaux $\phi_{(i,j)}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$) sont différents de zéro. On résout la première équation du système (II.44) par rapport à $\phi_{(1,1)}$, la deuxième par rapport à $\phi_{(2,2)}$ et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} \phi_{(1,1)} = c_{(1,2)}\phi_{(1,2)} + c_{(1,3)}\phi_{(1,3)} + c_{(1,4)}\phi_{(1,4)} + \dots + c_{(1,m)}\phi_{(1,m)} + (1,1) \\ \phi_{(2,2)} = c_{(2,1)}\phi_{(2,1)} + c_{(2,3)}\phi_{(2,3)} + c_{(2,4)}\phi_{(2,4)} + \dots + c_{(2,m)}\phi_{(2,m)} + (2,2) \\ \dots \\ \phi_{(n,m)} = c_{(n,1)}\phi_{(n,1)} + c_{(n,2)}\phi_{(n,2)} + c_{(n,3)}\phi_{(n,3)} + \dots + c_{(n,m)}\phi_{(n,m)} + (n,m) \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

$$c_{(i,j)} = \frac{A_{r(i,j)}}{A_{p(i,j)}}$$

Chapitre II : Modèle mathématique

$$(i, j) = \frac{S_{(i,j)}}{A_{p(i,j)}}$$

La forme générale de la matrice est :

$$\phi = h + c. \phi \quad (\text{II.47})$$

Cherchons la solution du système (II.45) par la méthode des approximations successives. Prenons par exemple pour approximation initiale la colonne des termes constants $\phi^0 = h$ puis construisons successivement les matrices colonnes.

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = h + c\phi^{(0)} \\ \phi^{(2)} = h + c\phi^{(1)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \phi^{(k+1)} = h + c\phi^{(k)} \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Avec :

ϕ^1 : la première approximation.

ϕ^2 : la deuxième approximation.

ϕ^{k+1} : la (k+1) -ème approximation.

Pour estimer l'erreur des approximations du processus itératif on utilise les formules suivantes :

$$\|\phi - \phi^{(k)}\| \leq \frac{\|c\|}{1-\|c\|} \|\phi^{(k)} - \phi^{(k-1)}\| \quad (\text{II.49})$$

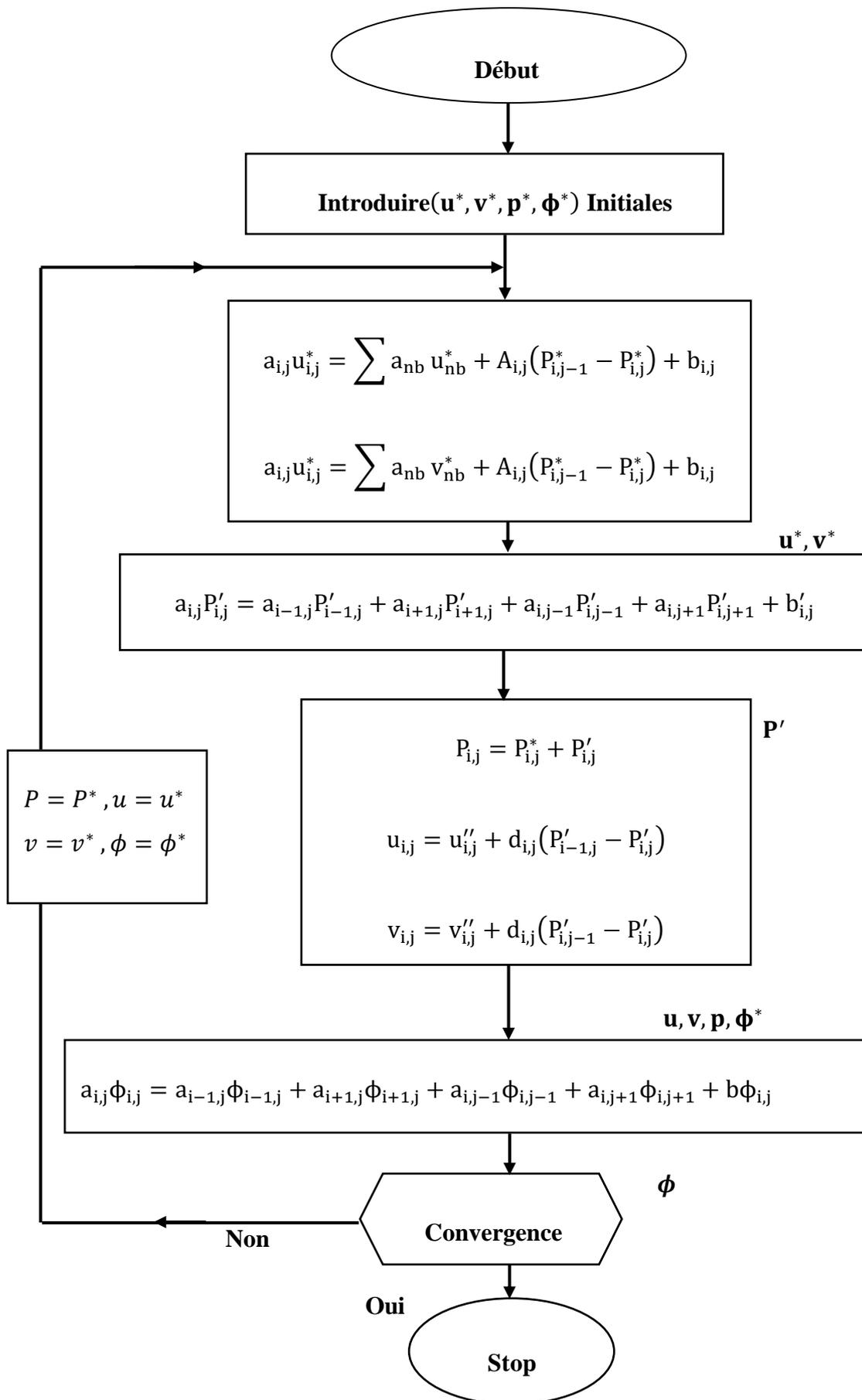
Dans ce cas, si au cours du calcul il s'avère que :

$$\|\phi - \phi^{(k)}\| \leq \frac{\|c\|}{1-\|c\|} e, \text{ où } (e) \text{ est la précision voulue, alors } \|\phi - \phi^{(k)}\| \leq e$$

$$\phi_{(i,j)} - \phi_{(i,j)} \leq e (i = 1,2,3,4, \dots n), (j = 1,2,3,4, \dots, m).$$

Chapitre II : Modèle mathématique

I.8. Organigramme :



Chapitre III : Résultat numérique

III.1. Problématique :

Les configurations étudiées sont représentées sur les figures (III.1 et III.2). Il s'agit d'une enceinte contenant de l'air comme fluide. Les parois horizontales de l'enceinte sont considérées comme adiabatiques sauf au niveau des sources de chaleur. En effet, la paroi horizontale inférieure pouvant être chauffée localement par deux ou quatre sources de chaleur. Les sources de chaleur pouvant débiter des flux de chaleur qui sont soient constants. Les parois verticales sont quant à elles maintenues à une température T_f , qui est constante. Le modèle mathématique utilisé ainsi que la procédure de simulation numérique ayant été décrits en détails dans le chapitre précédent, ils sont rappelés brièvement ci-dessous.

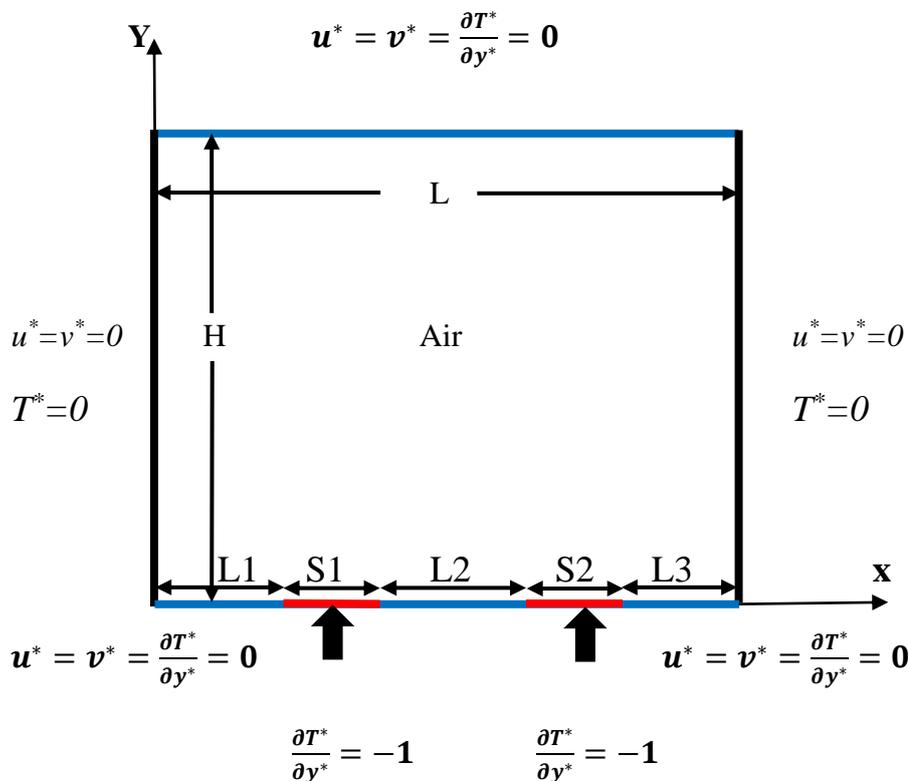


Figure III.1. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites. Cas de deux sources de chaleur.

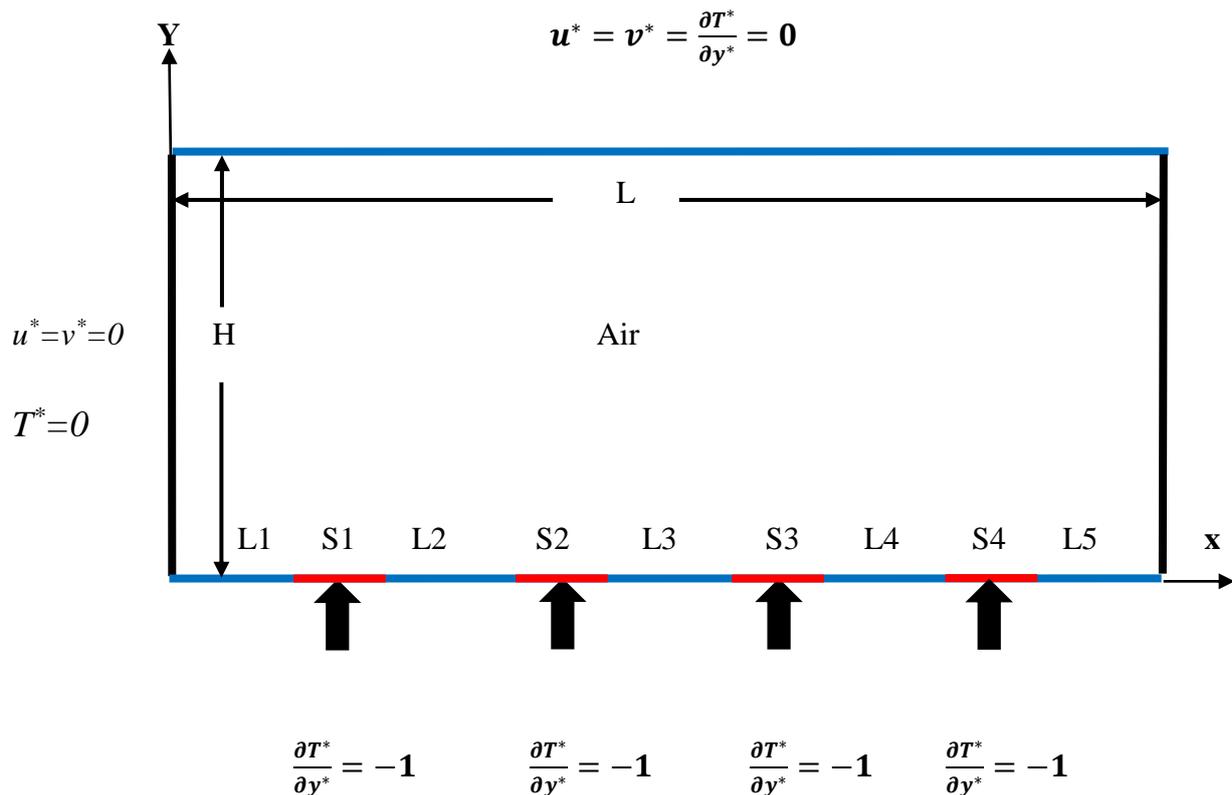


Figure III.2. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites. Cas de quatre sources de chaleur.

Les équations gouvernantes étant respectivement l'équation de continuité, celles de Navier-stokes et d'énergie qui sont discrétisées par la méthode des volumes finis en utilisant un schéma hybride et par la suite résolues avec l'algorithme Simplé et la méthode des approximations successives.

Pour notre travail, un maillage uniforme de 40x40 mailles a été utilisé. Le nombre de 1600 mailles a été choisi parce qu'on a mené une étude préliminaire avec plusieurs maillages et on a trouvé qu'à partir de ce nombre, il n'y a plus de variation des résultats obtenus ; de plus ce nombre a été utilisé par d'autres auteurs qui ont jugé qu'il est largement suffisant pour l'étude envisagée.

Le pas de temps utilisé étant de 300 secondes entre deux itérations successives. Le programme de simulation numérique a été développé en utilisant le langage **Fortran 6.0**. La restitution des champs de température et vitesse obtenus a été réalisée en utilisant le logiciel **TECPLOT**.

Dans la première partie de ce chapitre, on a considéré deux sources de chaleur avec des flux constants dans le temps. La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'influence de quatre flux de chaleur constants.

III.2 Validation :

La première étape consiste à valider notre simulation numérique en comparant nos résultats avec ceux publiés par d'autres auteurs. Pour cela on a gardé les mêmes conditions que B. Calcagni et al (fluide de convection : air dans une géométrie carrée de dimensions (0.0500x0.0500 m) avec une source de chaleur localisée au centre de la paroi horizontale inférieure (**Figure III.3**). Les mêmes nombres de Rayleigh (Ra) que dans ainsi que les mêmes ε (qui est le rapport entre la longueur de la source de chaleur par rapport à la longueur totale de la paroi horizontale inférieure) ont été également considérés. Calcagni et al ont obtenu leurs résultats numériques en utilisant le code Fluent et les résultats expérimentaux en utilisant la technique d'holographie interférométrique.

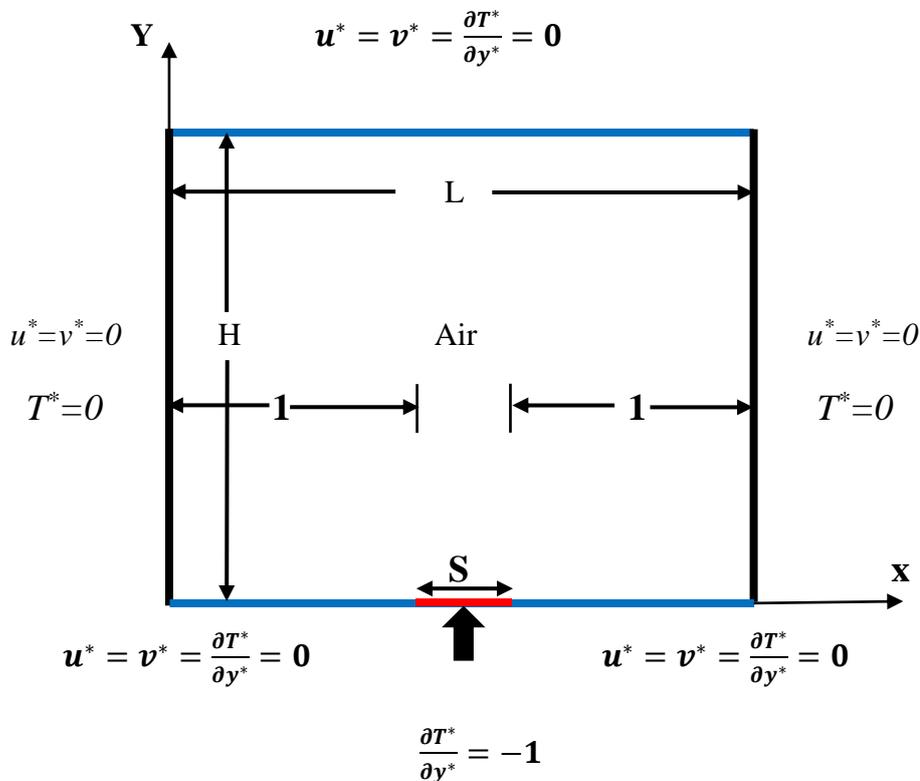
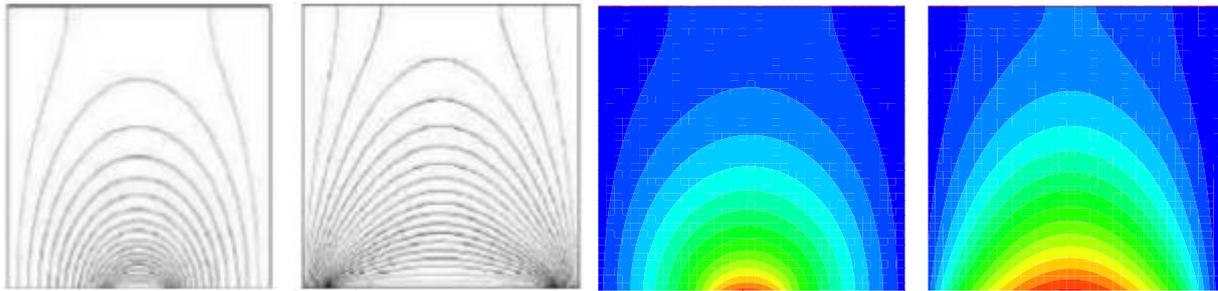


Figure III.3. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites. Cas d'une seule source de chaleur.

Les figures (III.4) et (III.5) montrent qu'il y a un accord qualitatif entre les résultats qu'on a obtenus et ceux de B. Calcagni et al ce qui nous permet de valider notre procédure de simulation numérique.

a) $Ra = 10^3$

b) $Ra = 10^3$



$$\epsilon = \frac{1}{5}$$

$$\epsilon = \frac{4}{5}$$

$$\epsilon = \frac{1}{5}$$

$$\epsilon = \frac{4}{5}$$

Figure III.4. : Champs de température pour différentes conditions de Ra et ϵ .(a) résultats numériques dans [23], (b) nos résultats numériques.

a) $Ra = 18.6 \times 10^4$

b) $Ra = 18.6 \times 10^4$

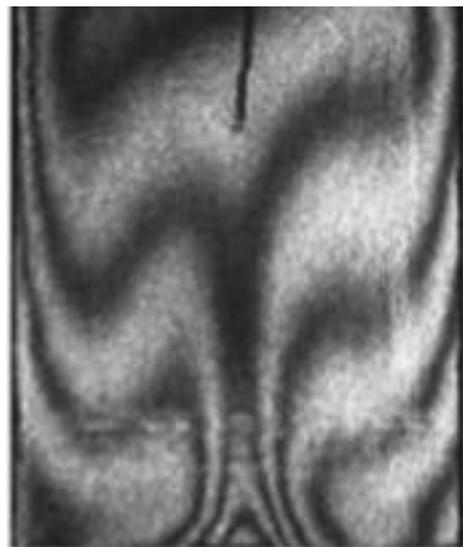
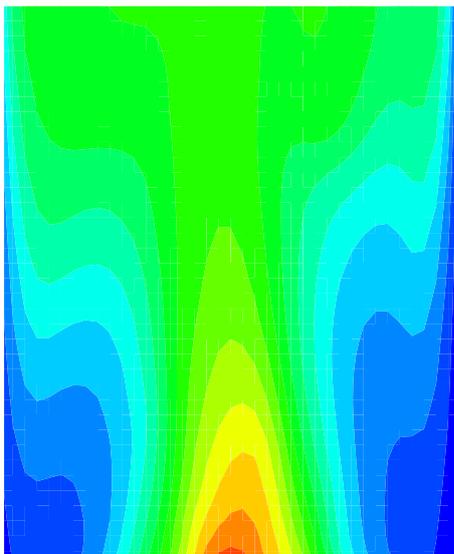


Figure III.5. : Champs de température pour différents Ra . $\epsilon = \frac{4}{5}$. (a): nos résultats numériques.(b): résultats expérimentaux dans [23].

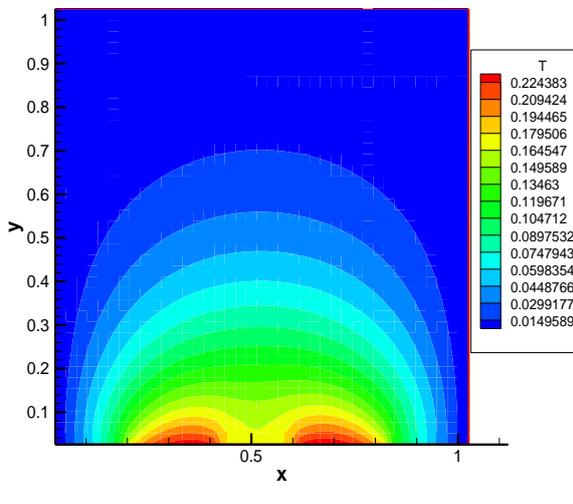
III.3. Etude paramétrique avec des flux de chaleurs constant :

III.3.1. Cas d'une deux sources de chaleur :

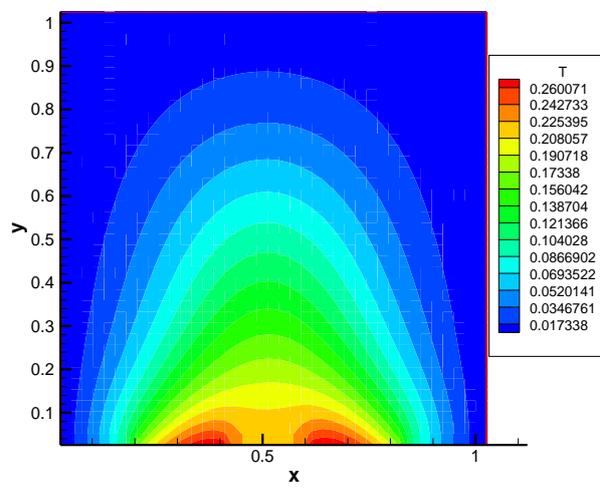
III.3.1.1. Influence du nombre de Rayleigh :

Les champs de température obtenus dans une cavité carrée (de dimensions 0.05mx0.05m) et contenant de deux sources de chaleur localisée à la paroi inférieure où chacun source 1 cm de longueur, sont montrés dans la figure (III.6) et ce pour un nombre de Ra allant de 10^3 à 10^5 . La figure (III.7) représente les champs de vitesse pour les mêmes conditions.

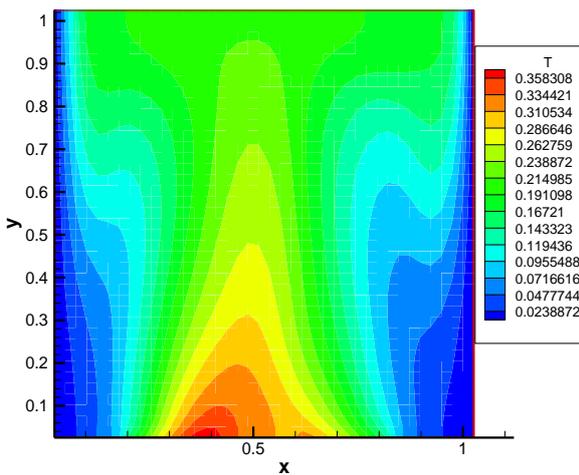
a) $Ra = 10^3$



b) $Ra = 10^4$



c) $Ra = 5 \times 10^4$



d) $Ra = 10^5$

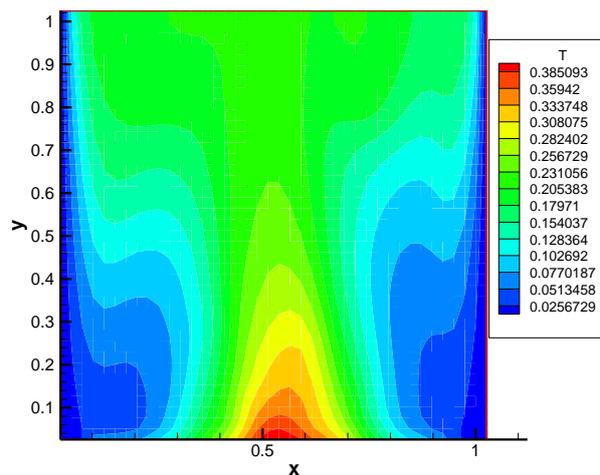


Figure III.6. : Champs de température pour différents Ra. (a) : $Ra = 10^3$, (b) : $Ra = 10^4$, (c) : $Ra = 5 \times 10^4$, (d) : $Ra = 10^5$.

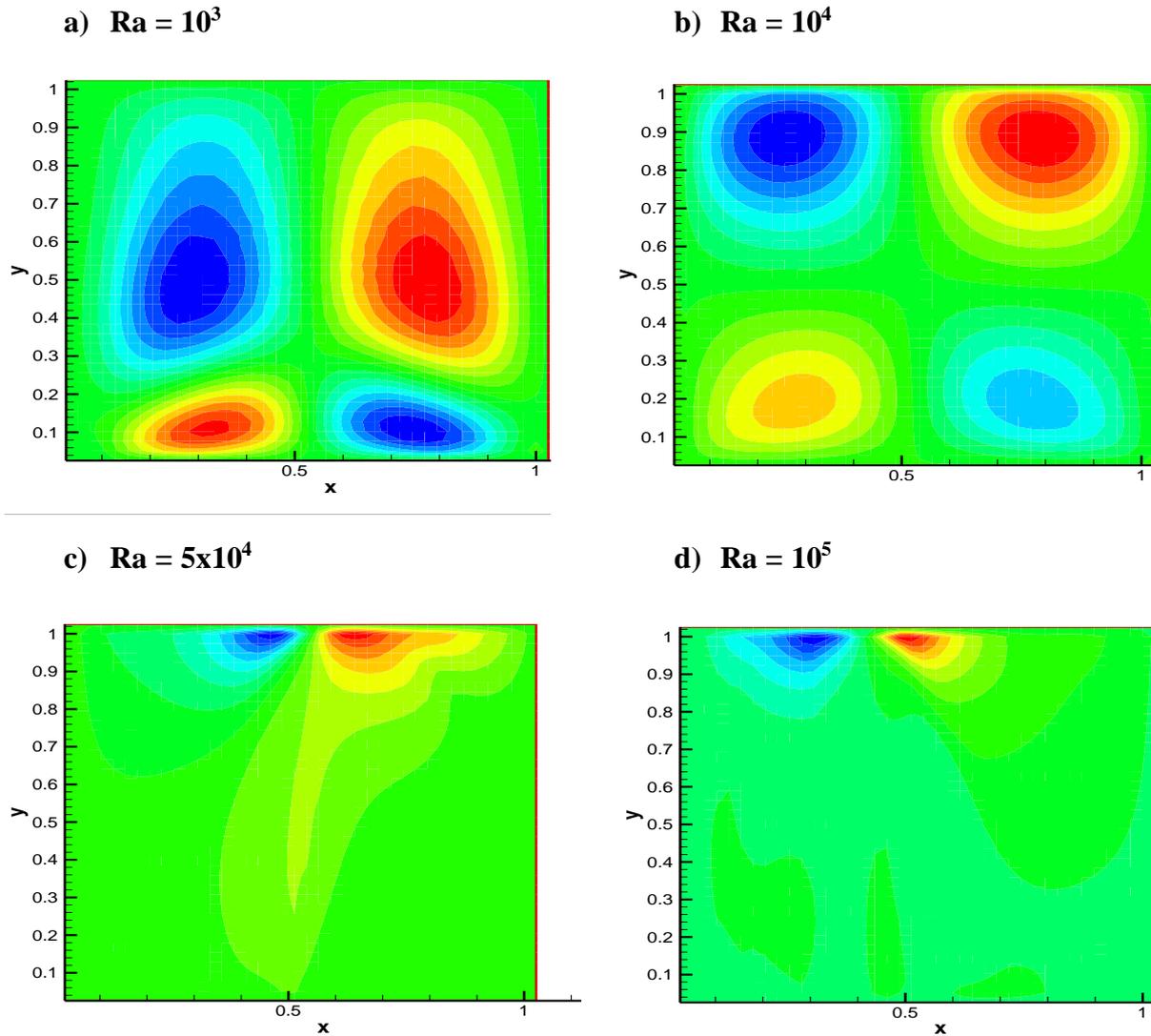


Figure III.7. : Champs de vitesse pour différents Ra. (a) : Ra =10³, (b) : Ra =10⁴, (c) : Ra=5x10⁴, (d) : Ra = 10⁵

Le nombre de Nu local est tracé en fonction de x dans la figure (III.7) pour un nombre de Ra allant de 10³ à 10⁵, et on peut remarquer que le nombre de Nu est à son minimum au niveau du centre de la cavité de la même manière que dans [23] et ce pour toutes les valeurs de Ra considérées et cette valeur minimale croit lorsqu'on fait croître le nombre de Rayleigh. On déduit également les équations qui représentent des corrélations entre le nombre de Nusselt local et ce en fonction de x (pour Ra allant de 10³ à 10⁵).

$$\text{Pour Ra} = 10^3 \quad \mathbf{Nu}_{\text{local}} = 5,7061x^2 - 5,2518x + 5,9059 \text{ avec : } R^2=0,839 \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Pour Ra} = 10^4 \quad \mathbf{Nu}_{\text{local}} = 5,1822x^2 - 5,3859x + 5,7911 \text{ avec : } R^2=0,8755 \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Pour Ra} = 5x10^4 \quad \mathbf{Nu}_{\text{local}} = 4,6055x^2 - 6,7085x + 5,0286 \text{ avec : } R^2=0,9932 \quad (\text{II.3})$$

Pour $Ra = 10^6$ $Nu_{local} = 3,1762x^2 - 4,3662x + 4,7299$ avec: $R^2=0,9826$

(II.4)

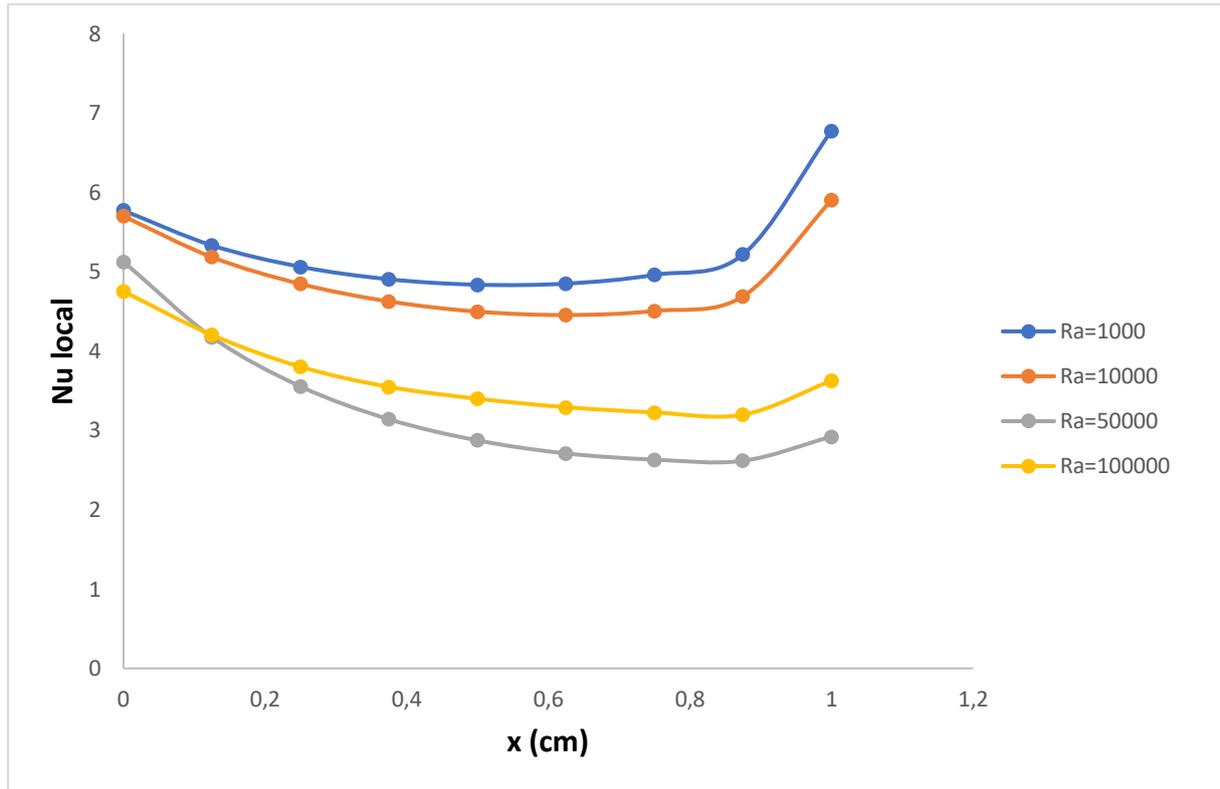


Figure III.8. : Nombre de Nusselt local au niveau de la source de chaleur en fonction de (x) pour différents Ra.

Le nombre de Nusselt moyen, $\langle Nu \rangle$, est tracé en fonction de (Ra) dans la figure (III.9). À partir de la courbe de la figure (III.9) on déduit l'équation qui représente la corrélation (III.5) entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh (Ra allant de 10^3 à 10^5).

$$\langle Nu \rangle = 5.10^{-10} Ra^2 - 7.10^{-5} Ra + 5,4443 \quad \text{avec : } R^2 = 0,9935 \quad \text{(II.5)}$$

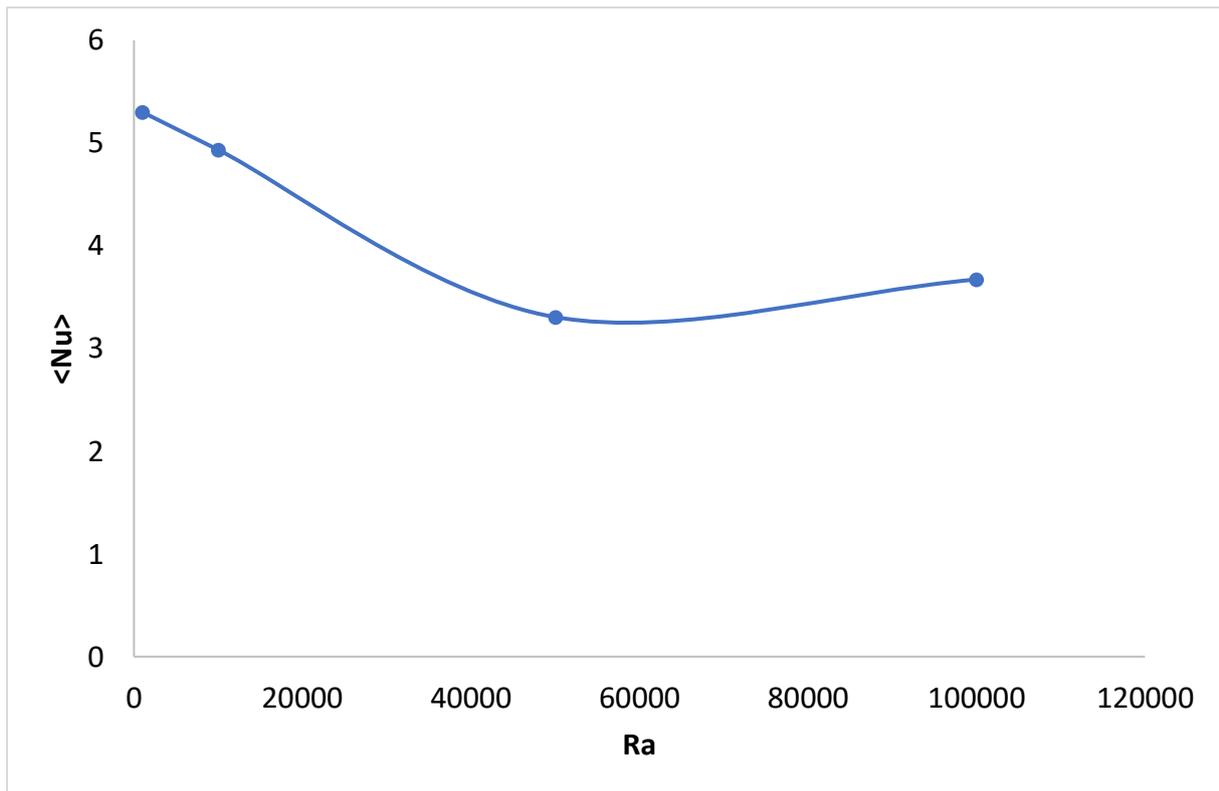


Figure III.9. : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra.

La figure (III.10) représente la variation de la température au sein de la cavité en fonction de la coordonnée (y) et ce pour $x = 2,5$ cm et différents Ra. La température est à sa plus grande valeur près de la limite inférieure de la cavité ($y = 0$) et elle diminue jusqu'à ce qu'elle atteigne sa valeur la plus faible au niveau de la limite supérieure de la cavité ($y = 5$ cm).

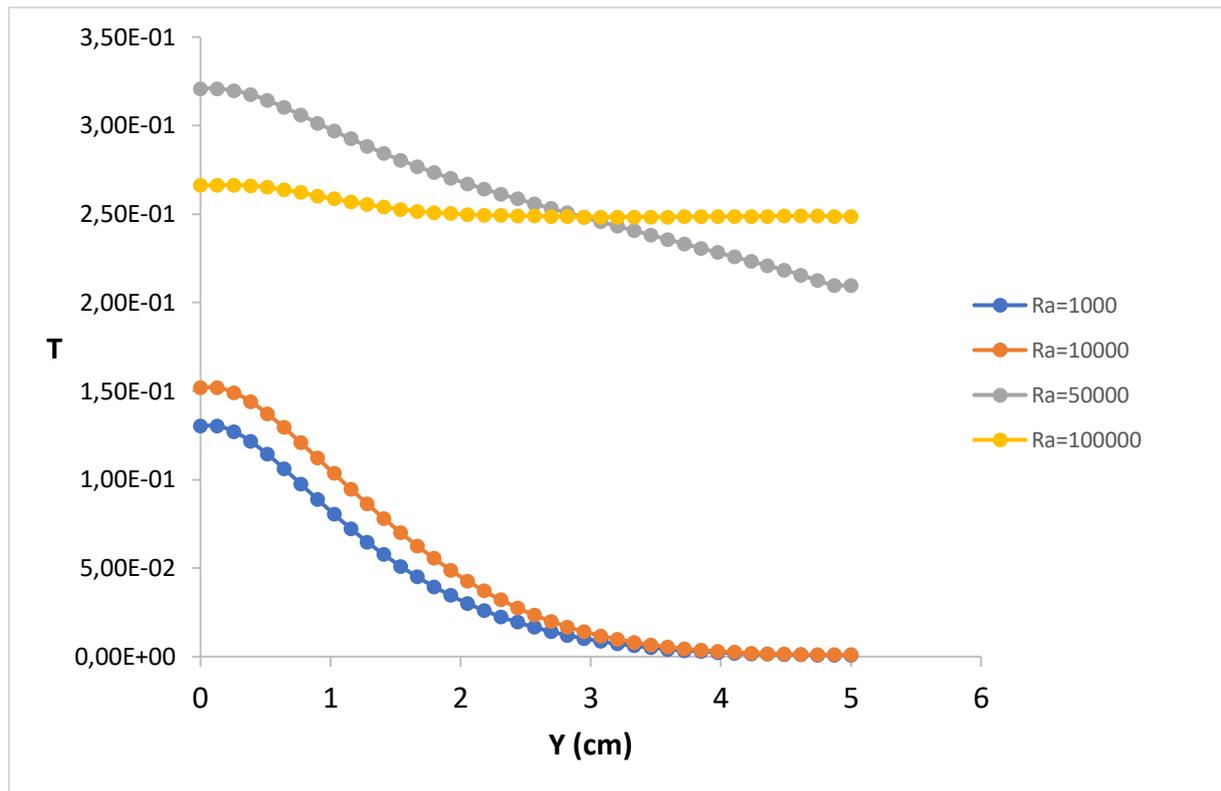
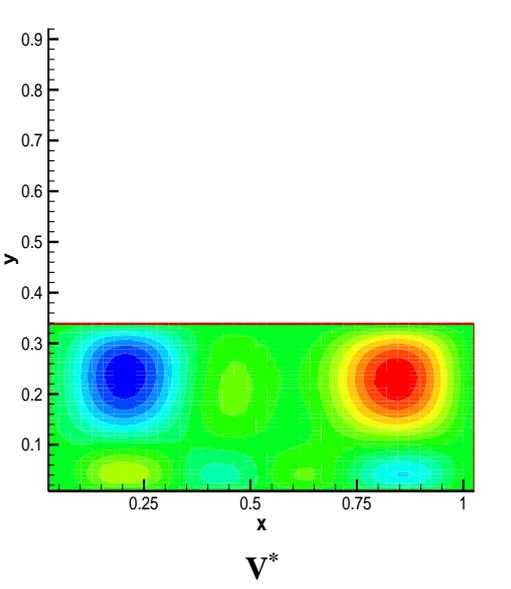
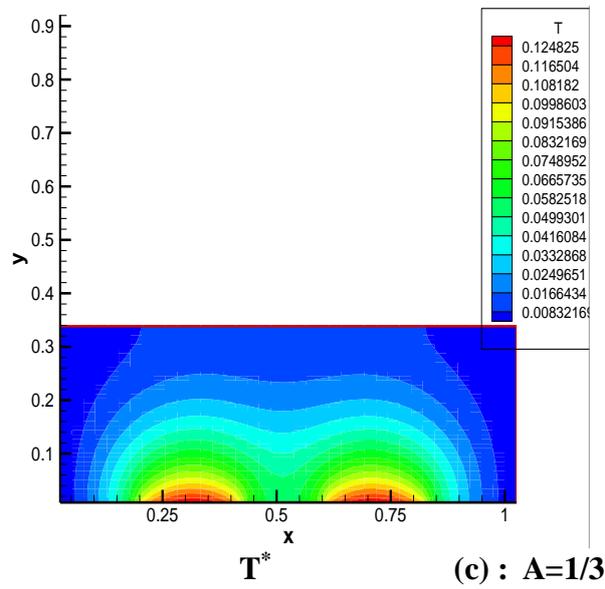
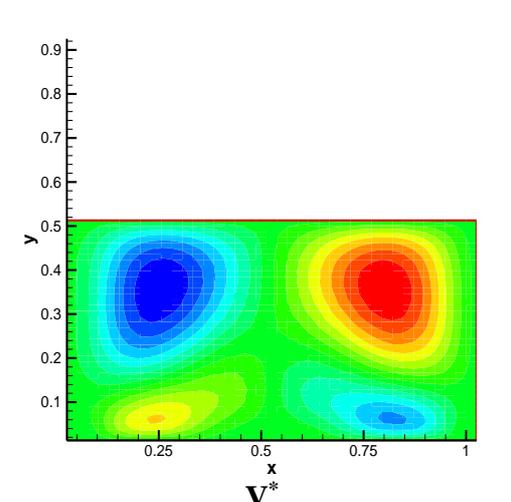
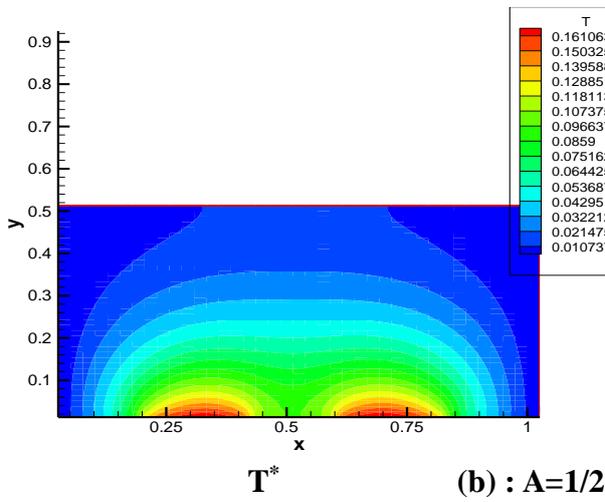
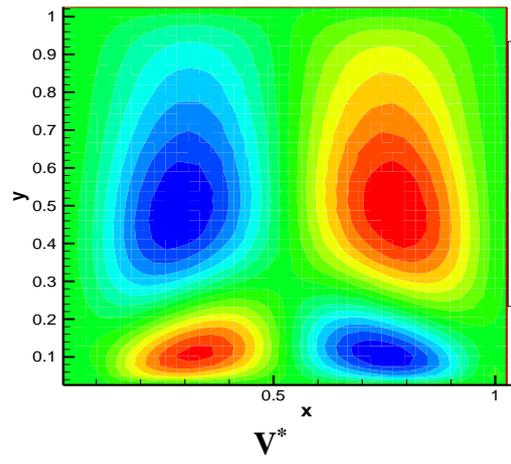
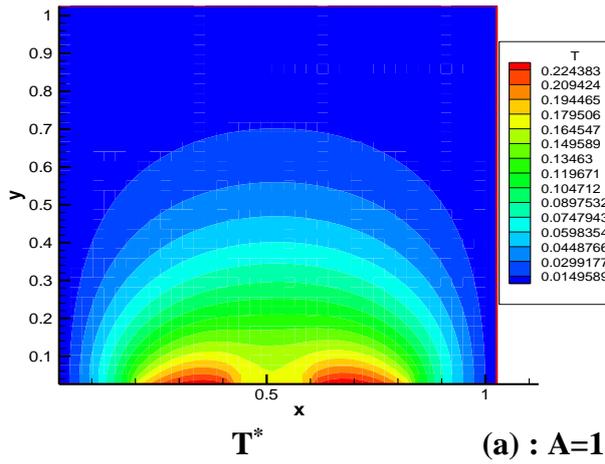


Figure III.10. : Température en fonction de (y) pour $x = 2,5$ cm et différents Ra.

III.3.1.2. Influence du rapport d'aspect :

Pour l'étude précédente on a gardé le même rapport d'aspect ($A=1$). L'influence de la variation du rapport d'aspect sur l'écoulement et le transfert de chaleur, est étudiée dans ce qui suit.

Ainsi dans la figure (III.11), les champs de température et de vitesse, pour des valeurs du nombre d'aspect allant de ($A = 1$) (cavité carrée) à ($A = 1/4$) (cavité rectangulaire horizontale allongée), sont présentés.



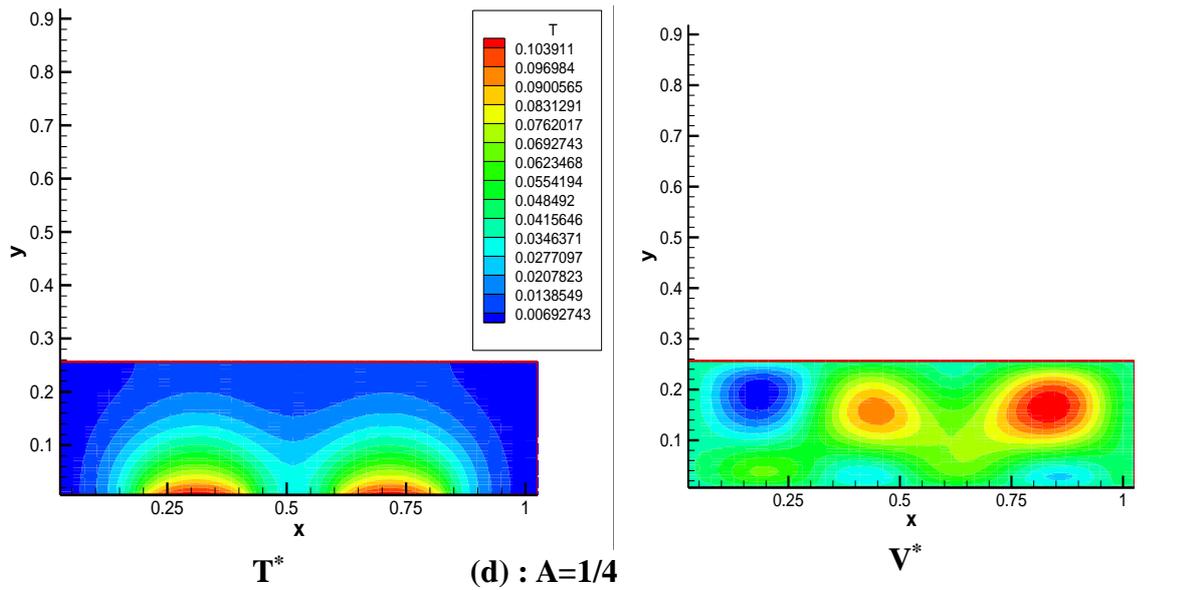


Figure III.11. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité horizontale) avec $Ra=10^3$ (a) : $A = 1$, (b) : $A = 1/2$, (c) : $A = 1/3$, (d) : $A = 1/4$.

La figure (III.12) représente le nombre de nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect, avec $\langle Nu \rangle$ allant de 4,60522133 à 10,874719. A partir de la courbe de la figure (III.12), on déduit l'équation (III.6) qui représente la corrélation entre le nusselt moyen et le rapport d'aspect pour une cavité horizontale.

$$\langle Nu \rangle = 18,55A^2 - 31,287A + 17,354 \quad \text{avec : } R^2 = 0,9933 \quad \text{(III.6)}$$

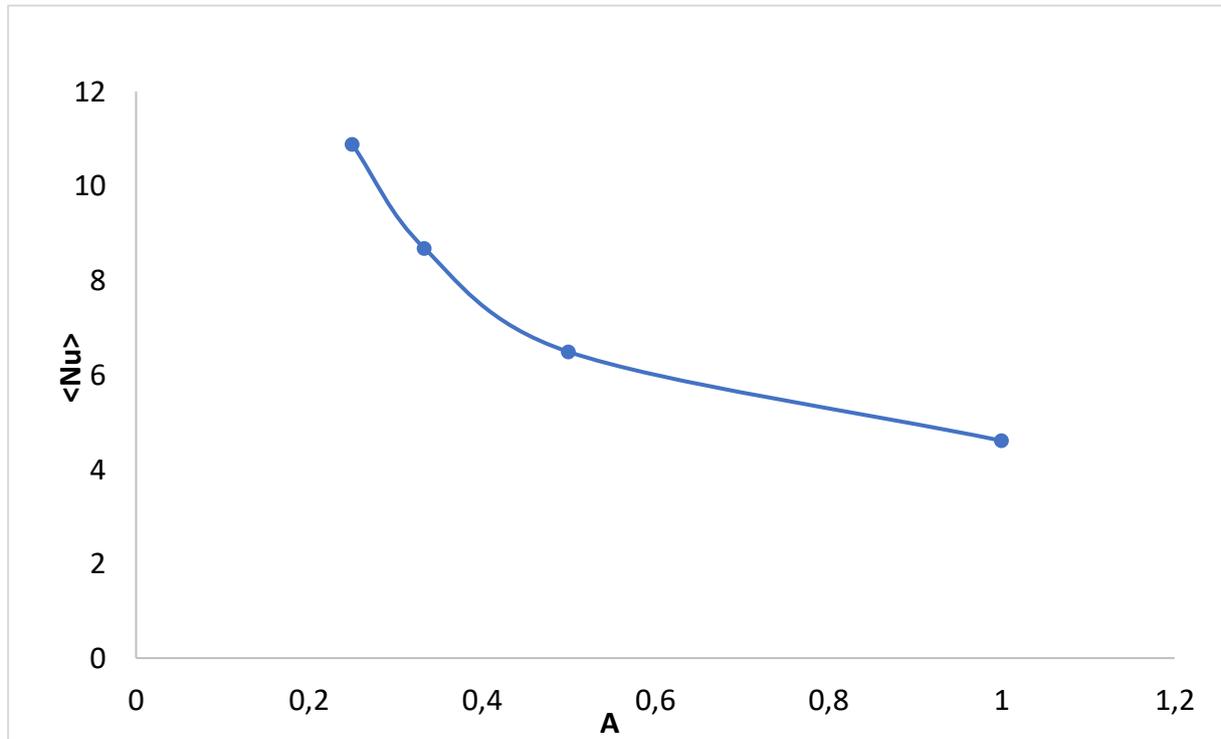
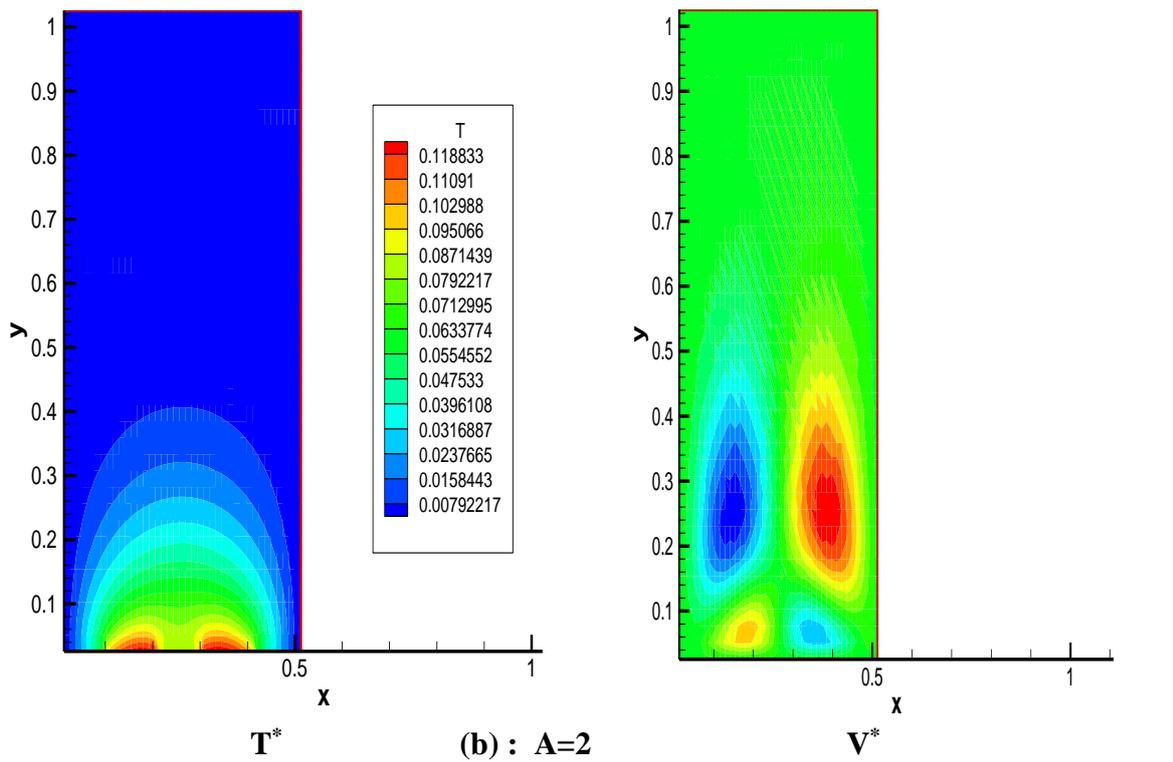
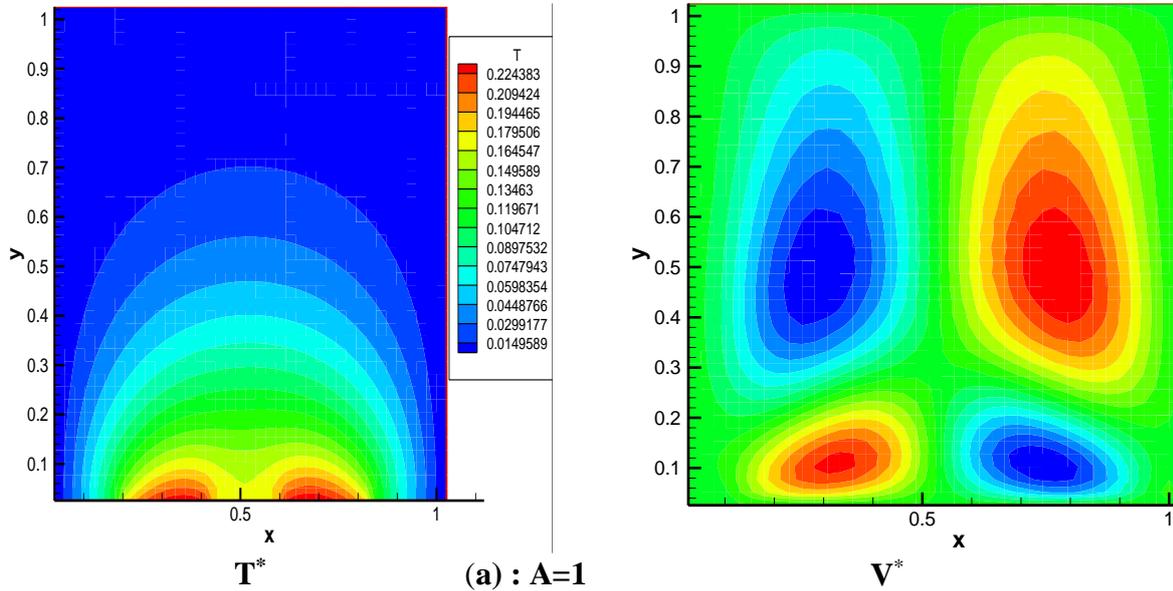


Figure III.12. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect ($A = H/L$) (cavité horizontale allongée) avec $Ra=10^3$.

Dans la figure (III.13), les champs de température et de vitesse, pour des valeurs du nombre d'aspect allant de 1 à 4 correspondant à des cavités rectangulaires verticales, sont présentés.



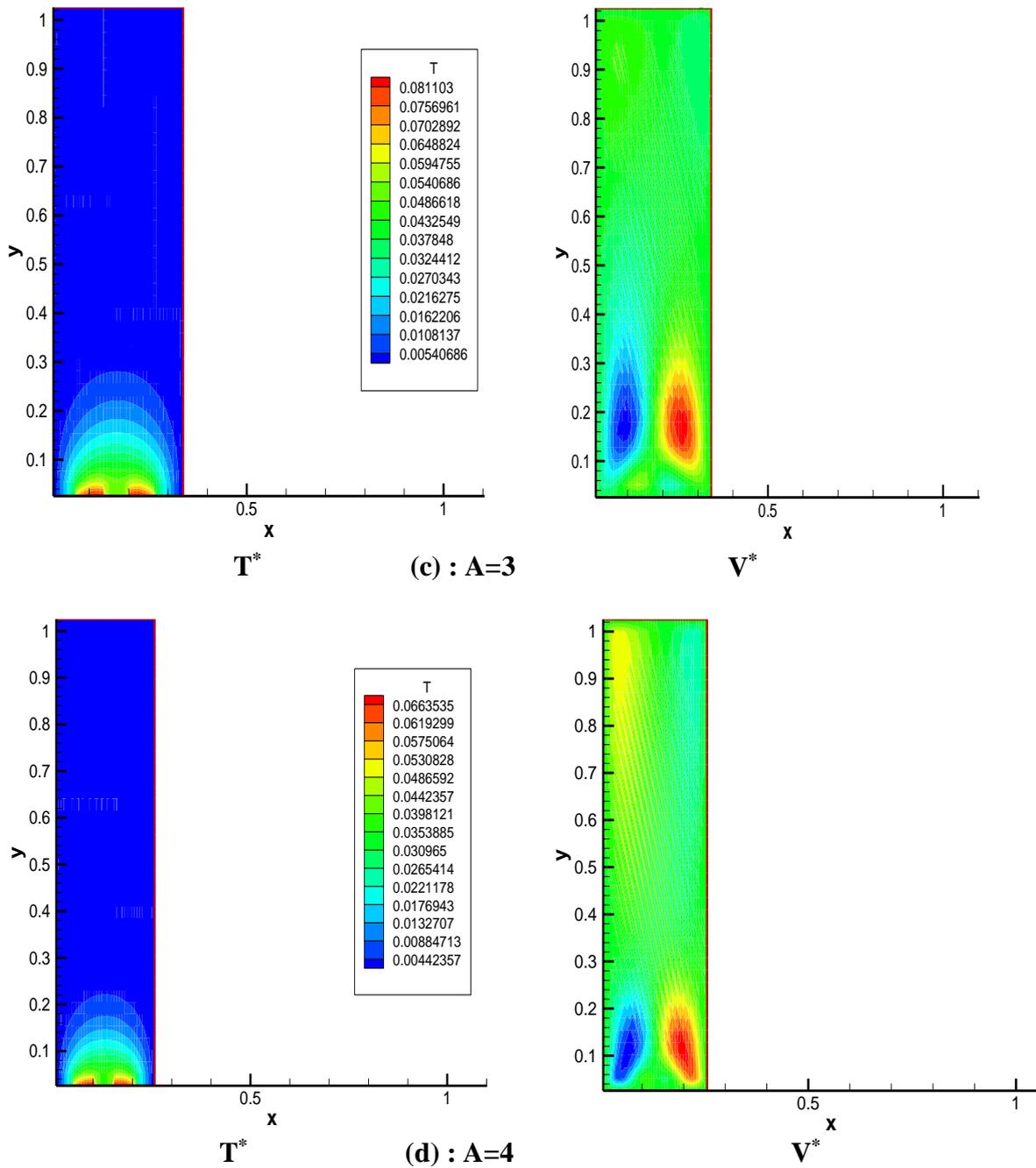


Figure III.13. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité verticale) avec $Ra=10^3$ (a) : $A = 1$, (b) : $A = 2$, (c) : $A = 3$, (d) : $A = 4$.

La figure (III.14) représente le nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect, $\langle Nu \rangle$ allant de 4,60522133 à 15,9687 variations qui est très faible. A partir de cette courbe, on peut néanmoins déduire l'équation (III.7) qui représente une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le rapport d'aspect pour une cavité verticale.

$$\langle Nu \rangle = -0,2439A^2 + 5,033A - 0,2222 \quad \text{avec : } R^2 = 0,9996 \quad \text{(III.7)}$$

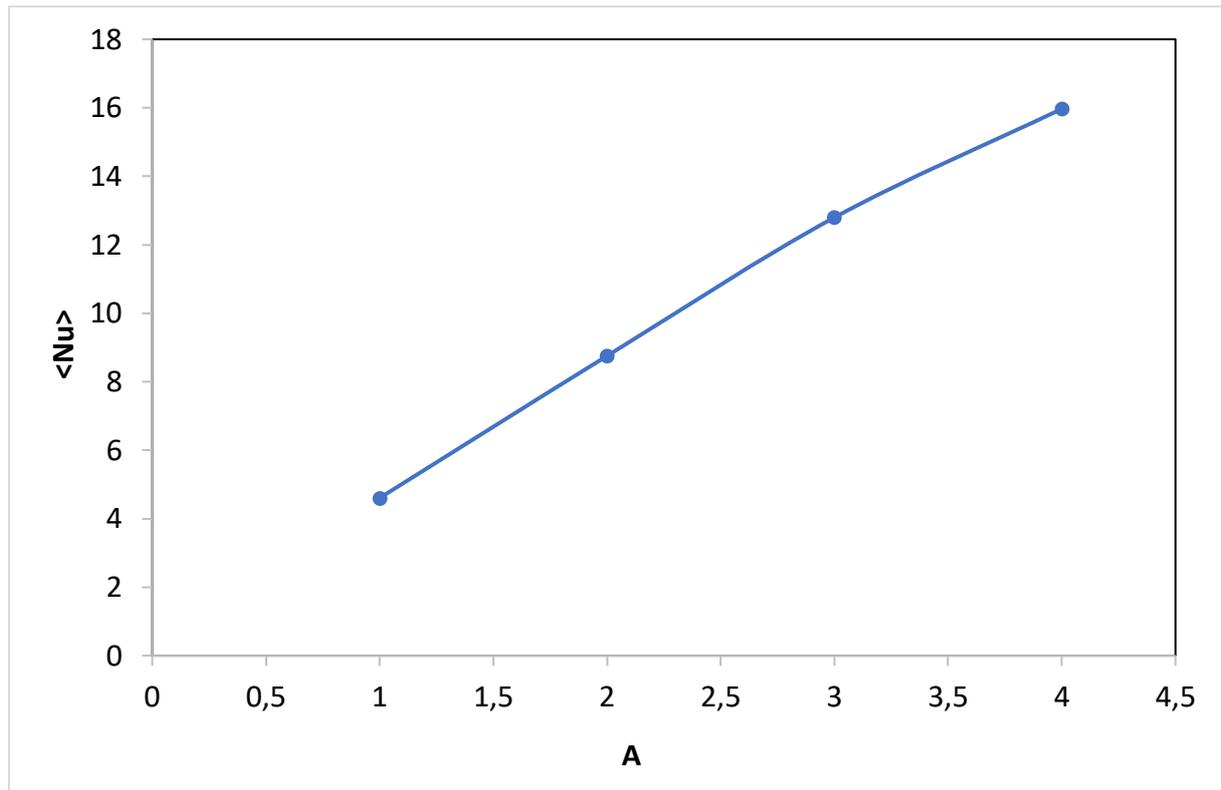


Figure III.14. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect ($A = H/L$) (cavité verticale) avec $Ra=10^3$.

III.3.1.3. Influence de la distance (d) séparant les deux sources :

Les champs de température obtenus sont montrés dans la figure (III.15) pour un nombre de Ra égal à 10^3 et pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur. Elles vont converger l'une à l'autre. La figure (III.16) représente les champs de vitesse pour les mêmes conditions.

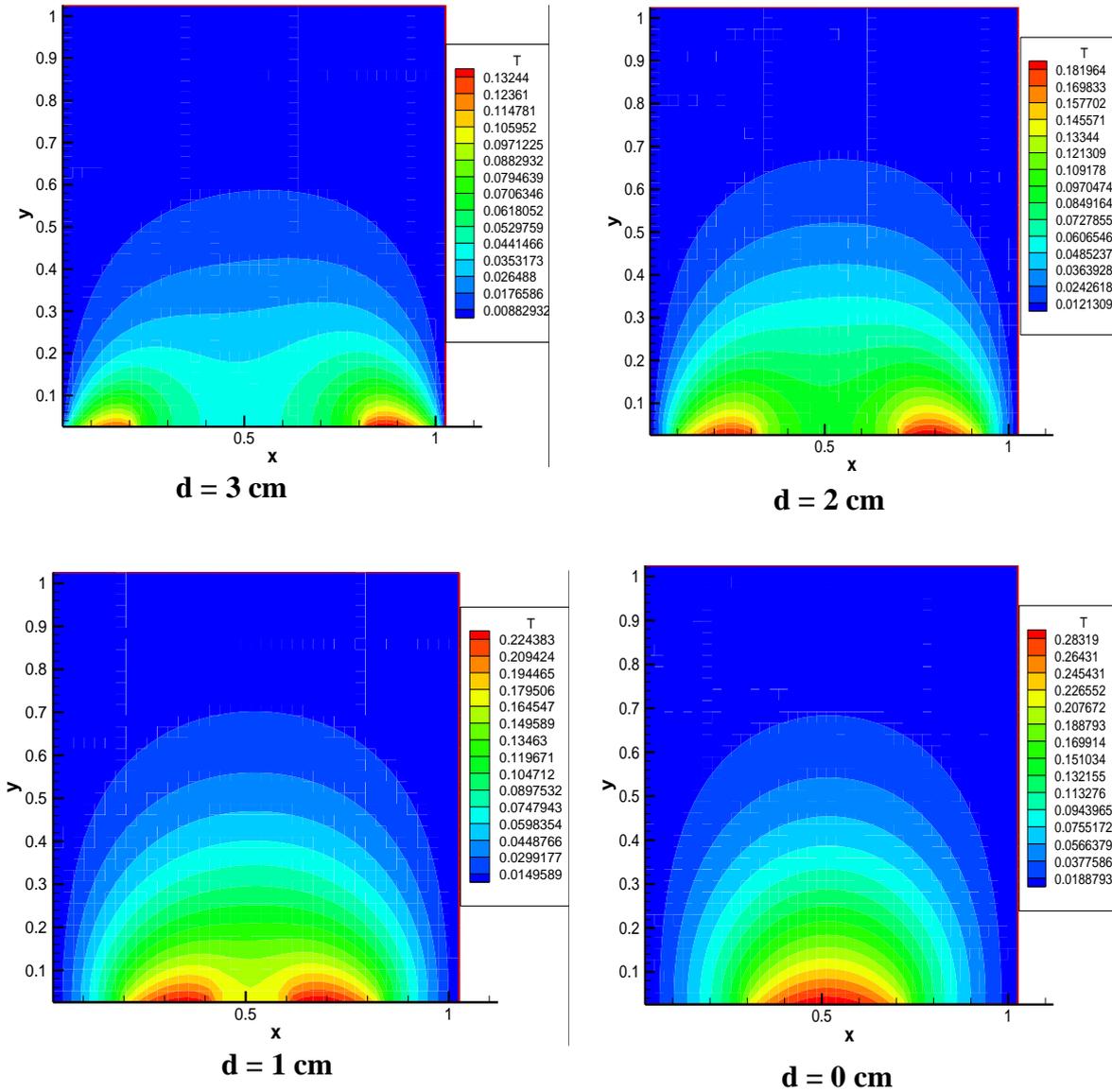


Figure III.15. : champs de température pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour $Ra = 10^3$

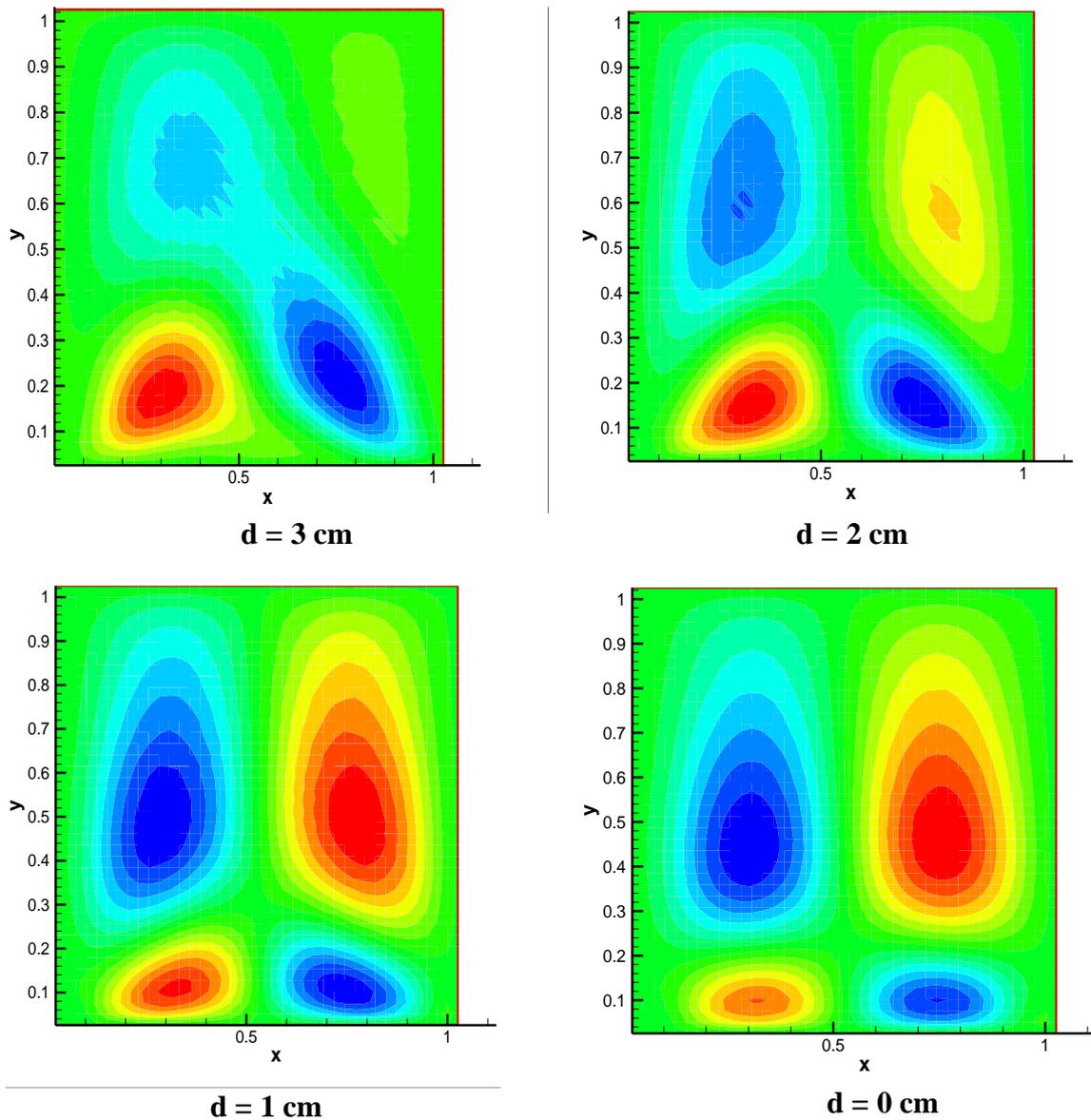


Figure III.16. : Champs de vitesse pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour $Ra = 10^3$

Le nombre de nusselt moyen est tracé en fonction de la distance entre les deux sources (d) dans la figure (III.17) pour un nombre de Ra égal à 10^3 . On peut remarquer que le nusselt moyen atteint sa valeur la plus élevée pour $d = 3$ cm a lorsque sa valeur la plus basse correspond à $d = 0$ cm. A partir de la courbe de la figure (III.17).

On déduit l'équation (III.8) qui représente une corrélation entre le nombre de nusselt moyen et la distance entre les deux sources.

$$\langle Nu \rangle = 0,471 d^2 + 0,3654 d + 3,6096 \quad \text{avec: } R^2 = 0,9966 \quad \text{(III.8)}$$

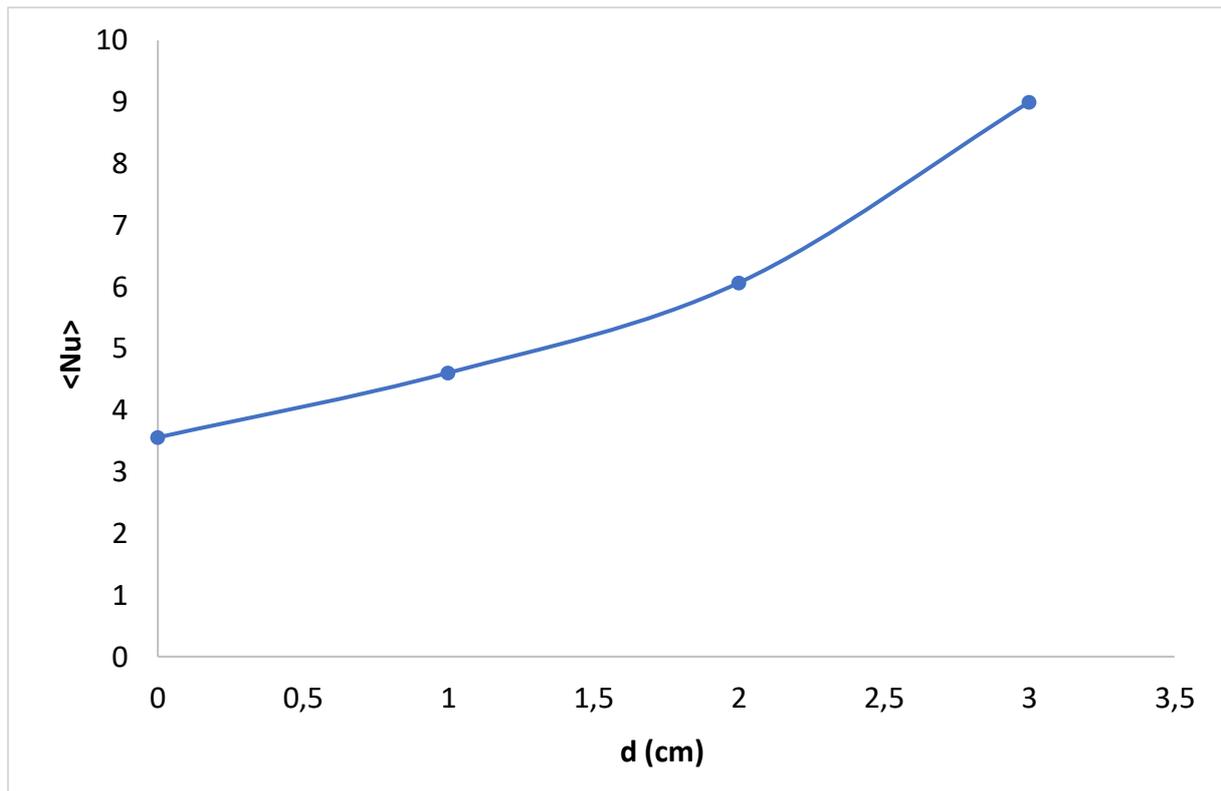
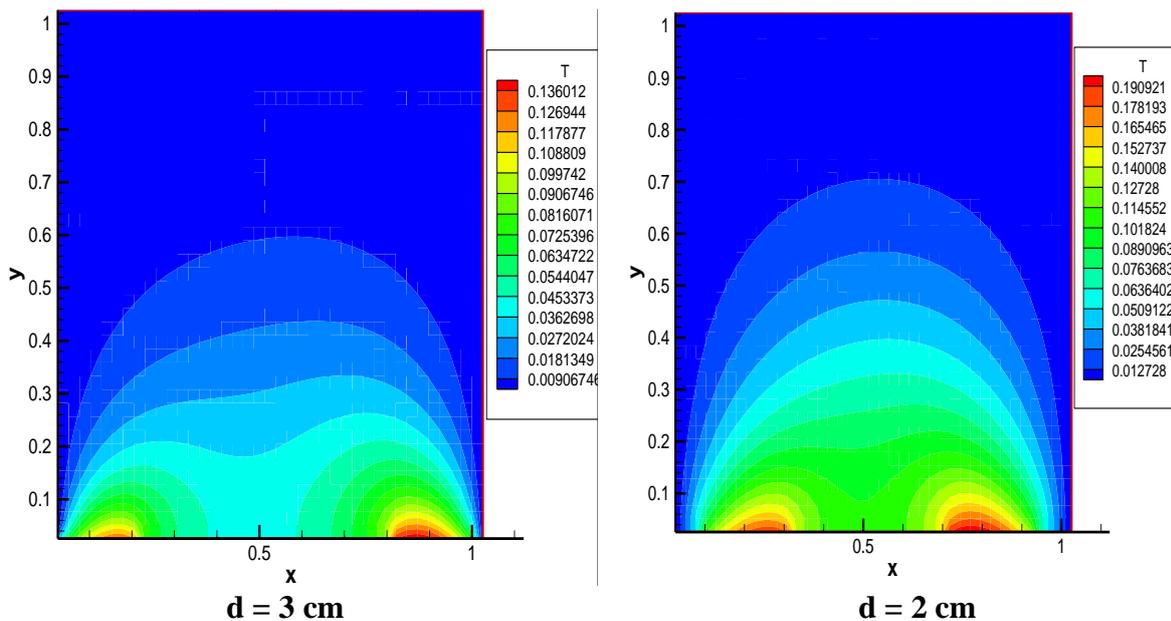


Figure III.17. : nombre de nusselt moyen en fonction de la distance séparant les deux sources pour $Ra = 10^3$

Les champs de température obtenus sont montrés dans la figure (III.18) pour un nombre de Ra égal à 10^4 et pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur. Elles vont converger l'une à l'autre. La figure (III.19) représente les champs de vitesse pour les mêmes conditions.



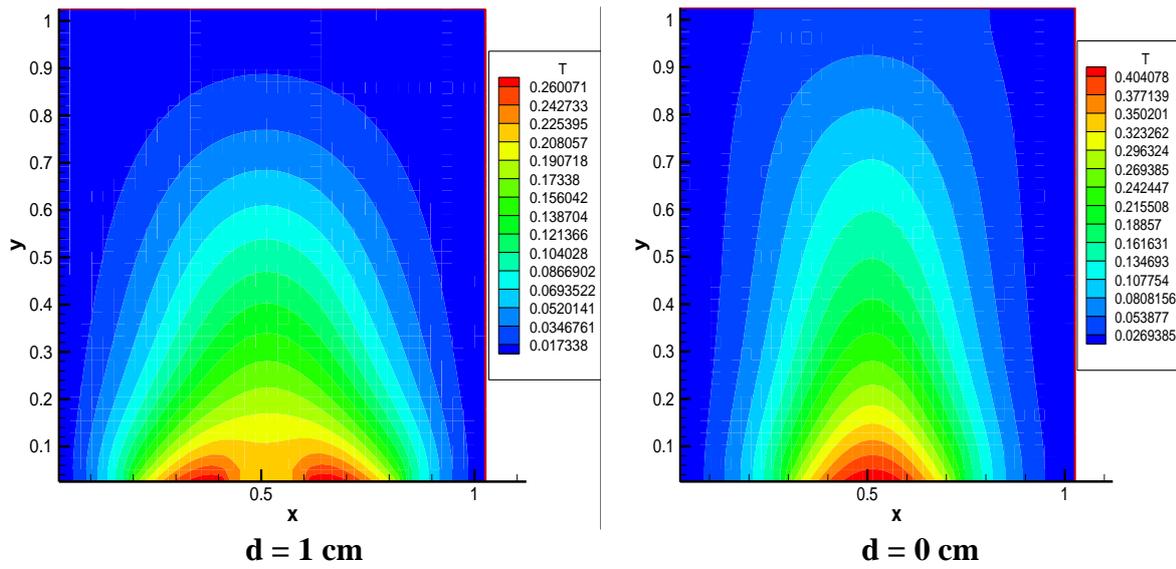
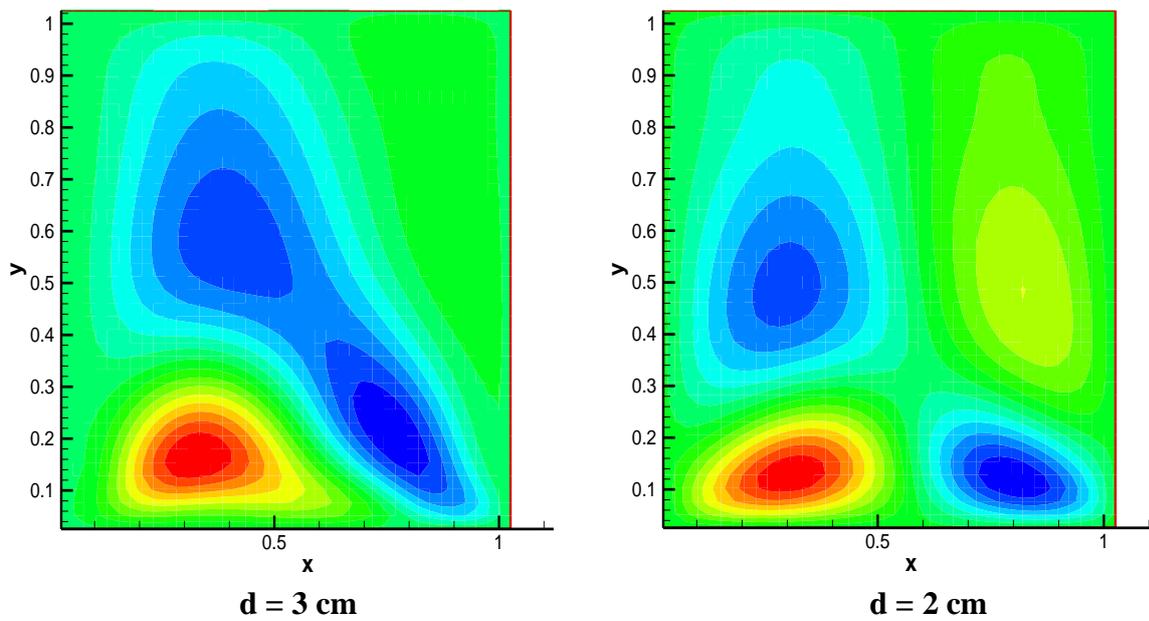


Figure III.18. : champs de température pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour $Ra = 10^4$



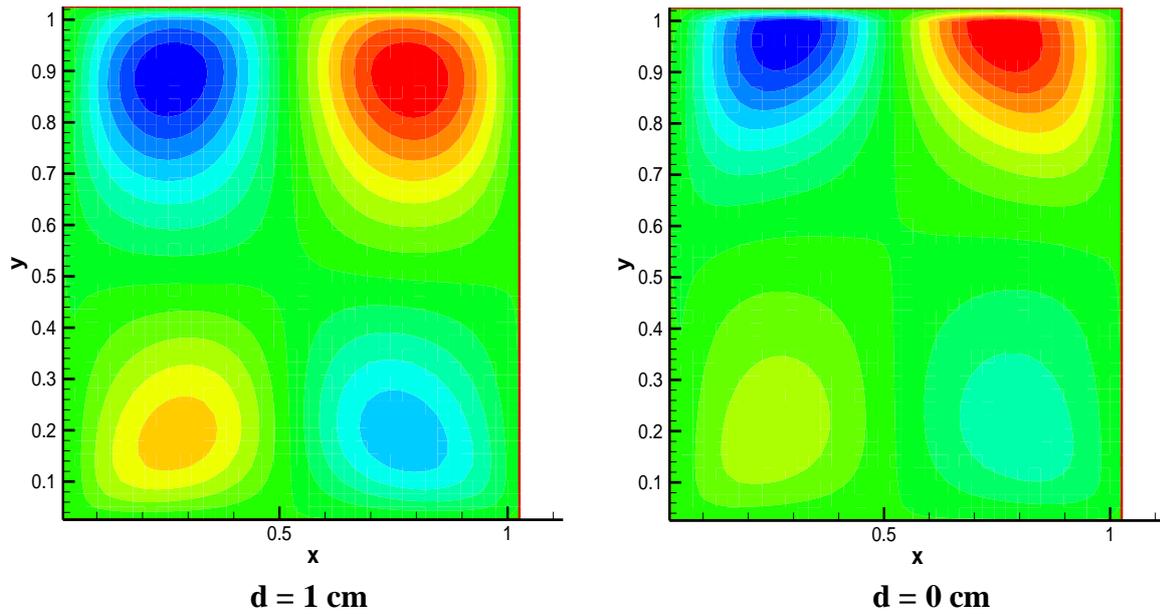


Figure III.19. : Champs de vitesse pour différentes distances (d) séparant les deux sources de chaleur et pour $Ra = 10^4$

Le nombre de nusselt moyen est tracé en fonction de la distance entre les deux sources (d) dans la figure (III.20) pour un nombre de Ra égal à 10^4 . On peut remarquer que le nusselt moyen atteint sa valeur la plus élevée pour $d = 3$ cm a lorsque sa valeur la plus basse correspond à $d = 0$ cm. A partir de la courbe de la figure (III.20).

On déduit l'équation (III.9) qui représente une corrélation entre le nombre de nusselt moyen et la distance entre les deux sources.

$$\langle Nu \rangle = 0,3641 d^2 + 1,0166 d + 2,6435 \quad \text{avec : } R^2 = 0,9992 \quad (\text{III.9})$$

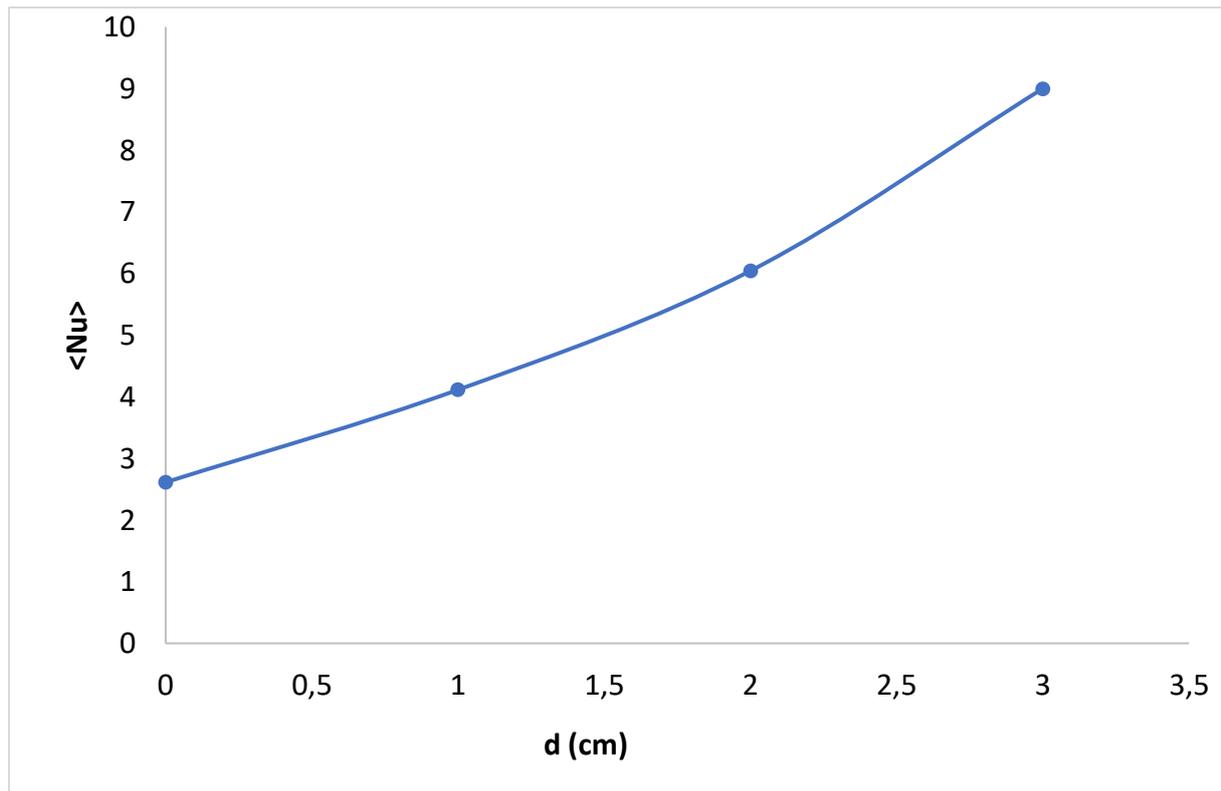


Figure III.20. : nombre de nusselt moyen en fonction de la distance séparant les deux sources pour $Ra = 10^4$

III.3.2. Cas d'une quatre sources de chaleur :

Dans cette configuration, la paroi horizontale inférieure est chauffée par quatre sources de chaleur (**Figure. III.21**). Les quatre sources sont à flux de chaleur constants. La paroi supérieure de la cavité est considérée comme adiabatique alors que les parois latérales sont maintenues à des températures constantes (T_f).

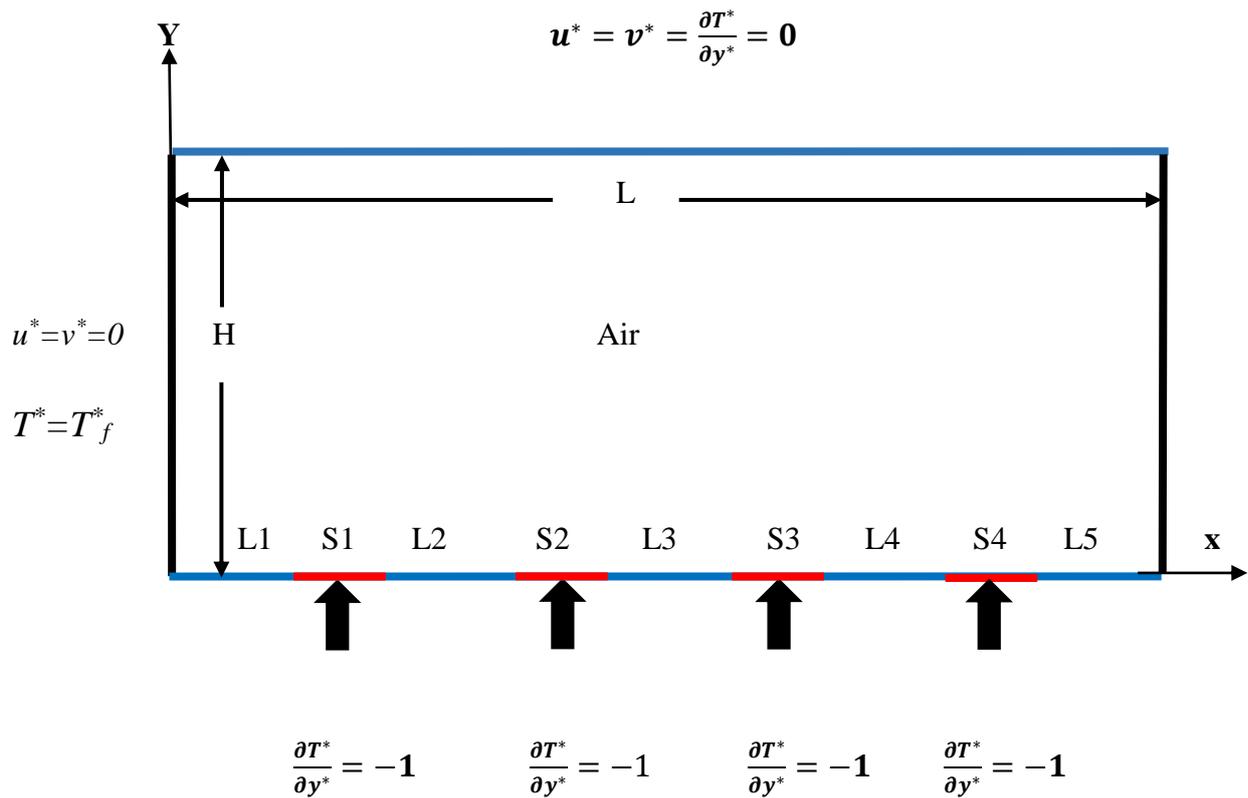


Figure III.21. : Schéma représentant la forme de la configuration étudiée et les conditions aux limites. Cas de quatre sources de chaleur.

III.3.2.1. Influence du nombre de Rayleigh :

Les champs de température obtenus dans une cavité carrée (de dimensions 0.05mx0.05m) et contenant de quatre sources de chaleur localisée à la paroi inférieure où chacun source 0,5 cm de longueur, sont montrés dans la figure (III.22) et ce pour un nombre de Ra allant de 10^3 à 10^5 . La figure (III.23) représente les champs de vitesse pour les mêmes conditions.

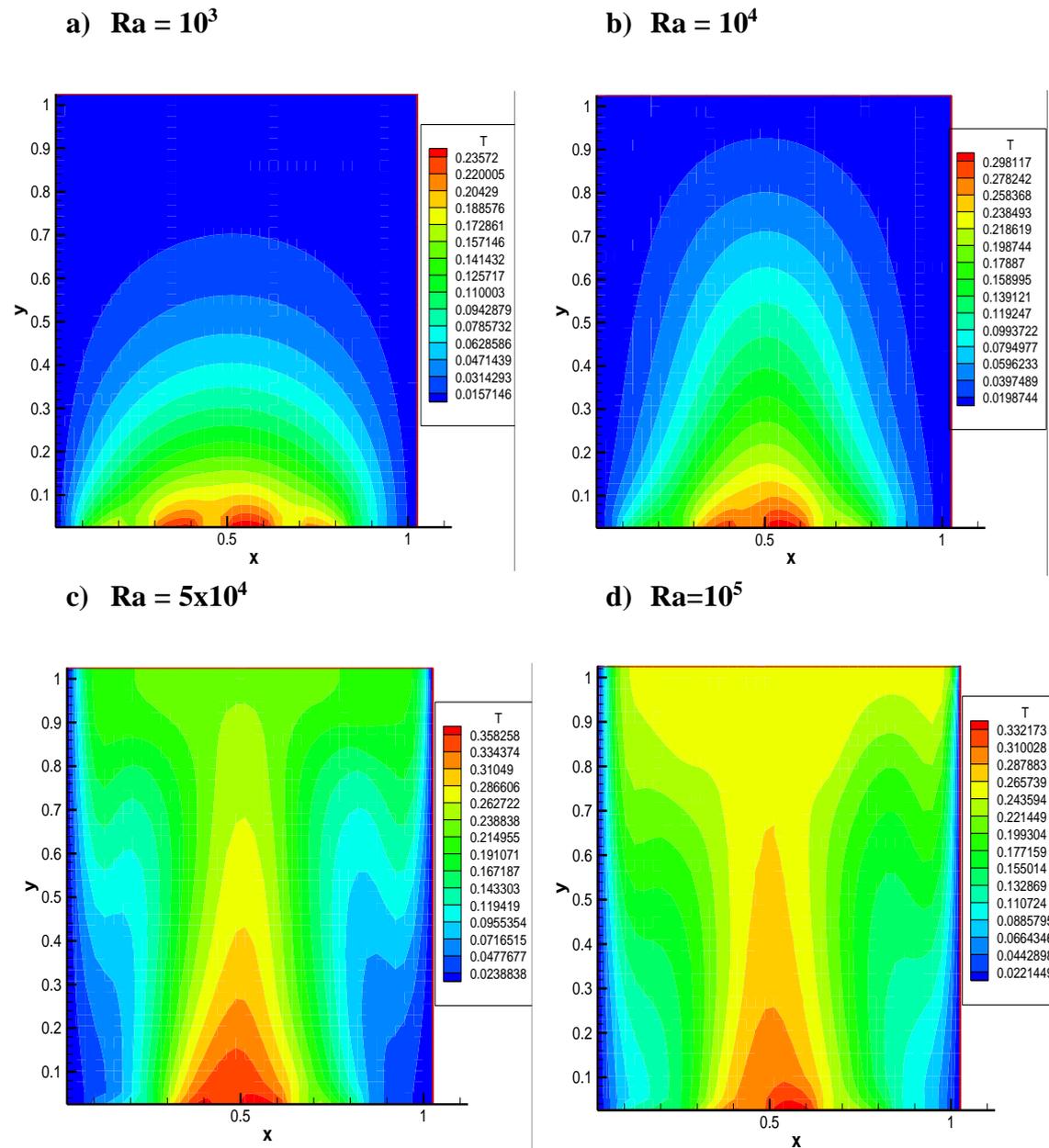


Figure III.22. : Champs de température pour différents Ra. (a) : $Ra = 10^3$, (b) : $Ra = 10^4$, (c) : $Ra = 5 \times 10^4$, (d) : $Ra = 10^5$.

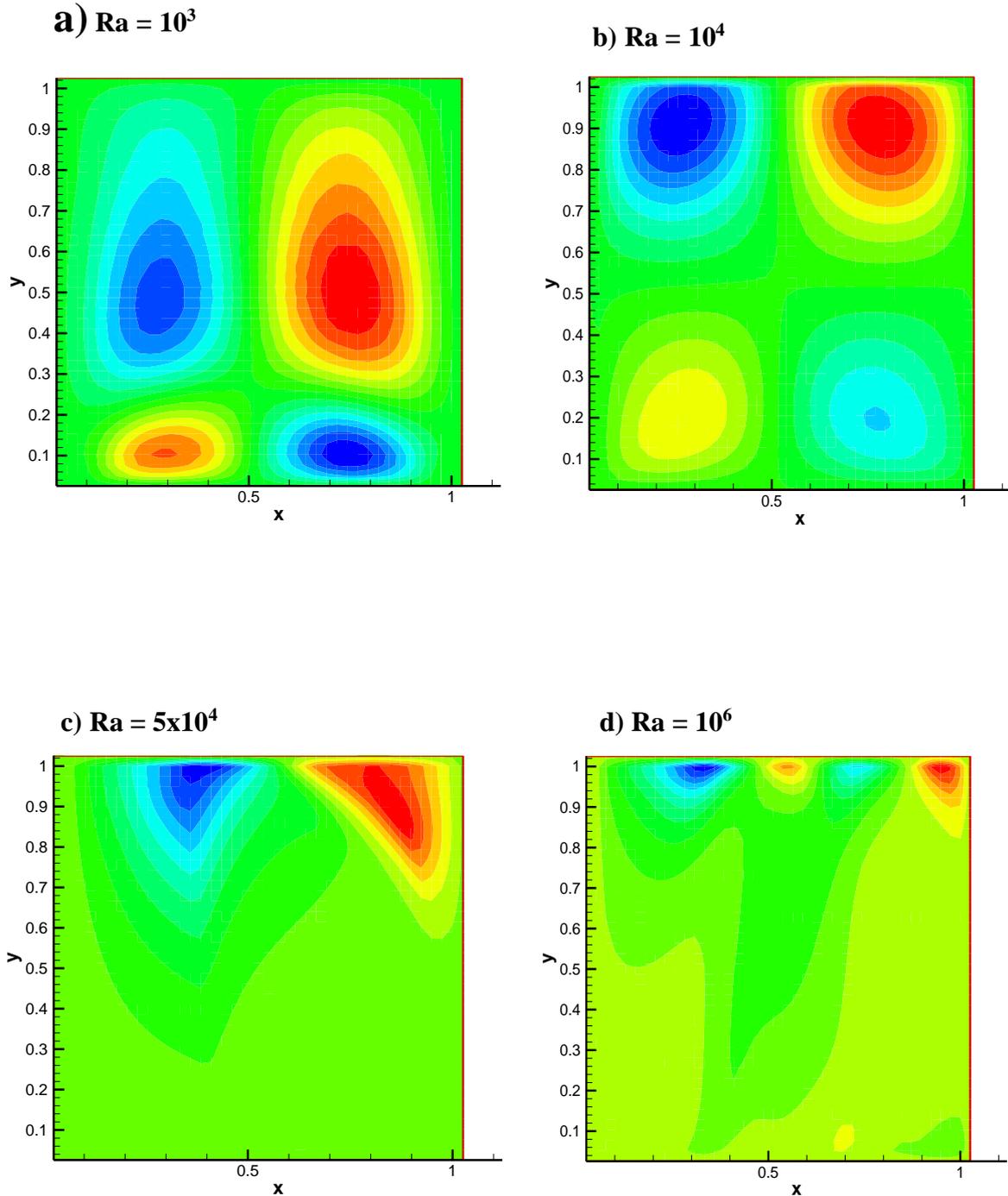


Figure III.23. : Champs de vitesse pour différents Ra. (a) : $Ra = 10^3$, (b) : $Ra = 10^4$, (c) : $Ra = 5 \times 10^4$, (d) : $Ra = 10^5$.

Le nombre de Nu local est tracé en fonction de x dans la figure (III.24) pour un nombre de Ra allant de 10^3 à 10^5 , et on peut remarquer que le nombre de Nu est à son minimum au niveau du centre de la cavité de la même manière que dans [23] et ce pour toutes les valeurs de

Ra considérées et cette valeur minimale croit lorsqu'on fait croître le nombre de Rayleigh. On déduit également les équations qui représentent des corrélations entre le nombre de Nusselt local et ce en fonction de x (pour Ra allant de 10^3 à 10^5) dans le cas de quatre sources.

$$\text{Pour Ra} = 10^3 \text{ Nu}_{\text{local}} = 17,554x^2 - 9,9188x + 6,982 \text{ avec : } R^2 = 0,9329 \quad (\text{III.10})$$

$$\text{Pour Ra} = 10^4 \text{ Nu}_{\text{local}} = 18,081x^2 - 12,022x + 7,8448 \text{ avec : } R^2 = 0,9686 \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Pour Ra} = 5 \times 10^4 \text{ Nu}_{\text{local}} = 15,781x^2 - 20,726x + 14,119 \text{ avec : } R^2 = 0,9337 \quad (\text{III.12})$$

$$\text{Pour Ra} = 10^5 \text{ Nu}_{\text{local}} = 11,194x^2 - 8,0381x + 8,3076 \text{ avec : } R^2 = 0,9251 \quad (\text{III.13})$$

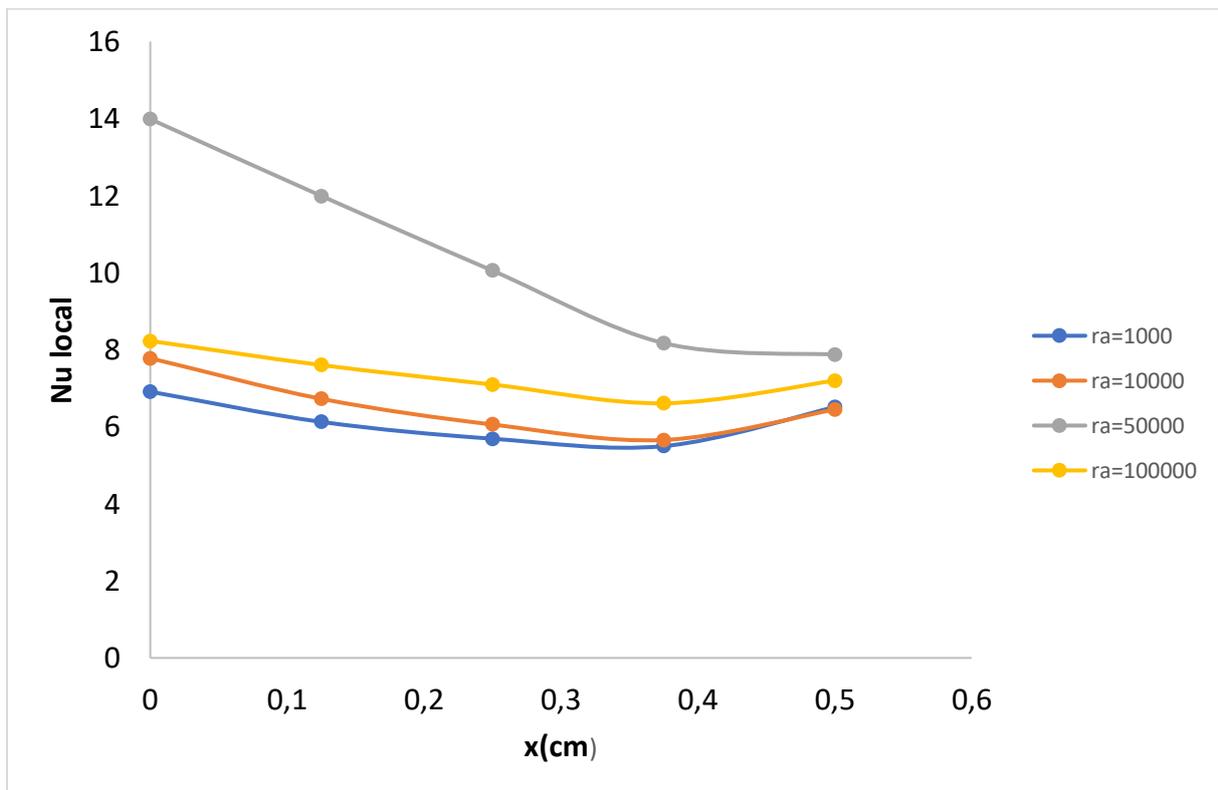


Figure II.24. : Nombre de Nusselt local au niveau de la source de chaleur en fonction de (x) pour différents Ra.

Le nombre de Nusselt moyen, $\langle \text{Nu} \rangle$, est tracé en fonction de (Ra) dans la figure (III.25). A partir de la courbe de la figure (III.25) on déduit l'équation qui représente la corrélation (III.14) entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh (Ra allant de 10^3 à 10^5).

$$\langle \text{Nu} \rangle = 8.10^{-10} \text{ Ra}^2 + 9.10^{-5} \text{ Ra} + 3,0906 \text{ avec : } R^2 = 0,953 \quad (\text{III.14})$$

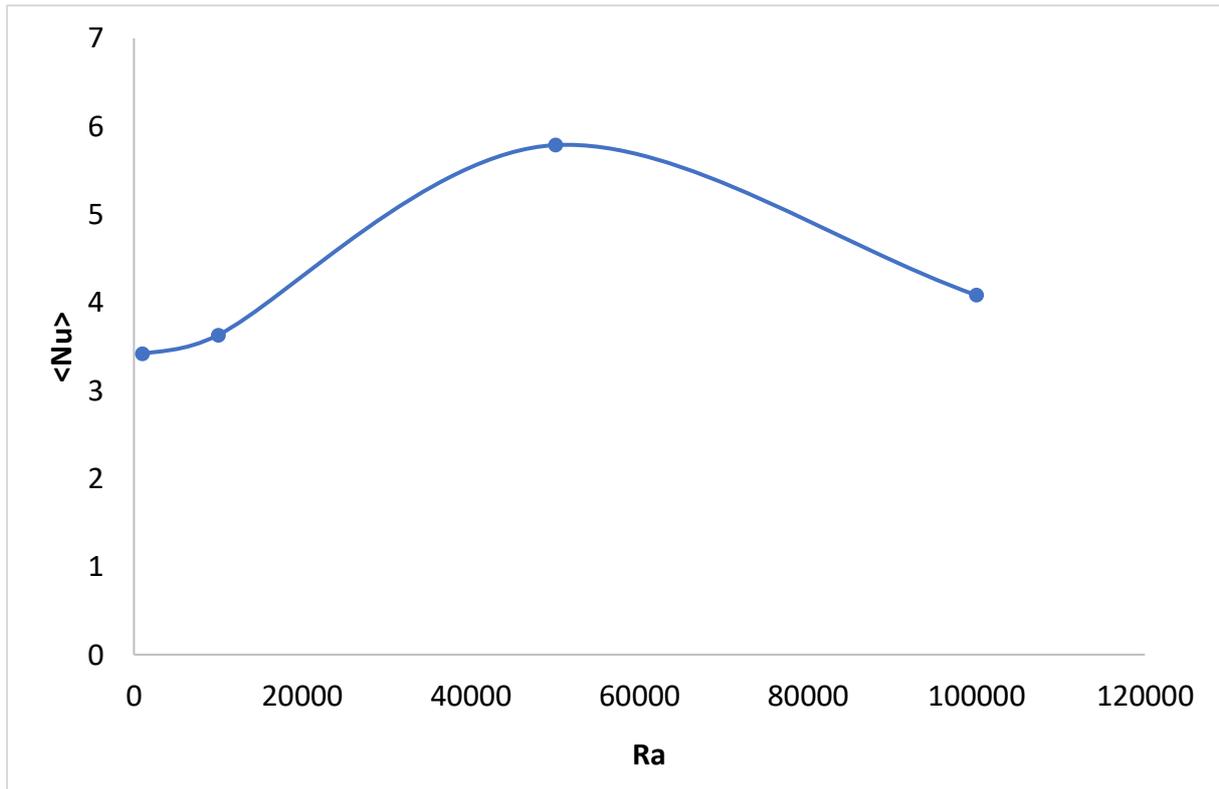


Figure III.25. : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra .

La figure (III.26) représente la variation de la température au sein de la cavité en fonction de la coordonnée (y) et ce pour le centre de la cavité ($x = 2,5$ cm) et différents Ra . La température est à sa plus grande valeur près de la limite inférieure de la cavité ($y = 0$) et elle diminue jusqu'à ce qu'elle atteigne sa valeur la plus faible au niveau de la limite supérieure de la cavité ($y = 5$ cm) dans le cas de quatre sources.

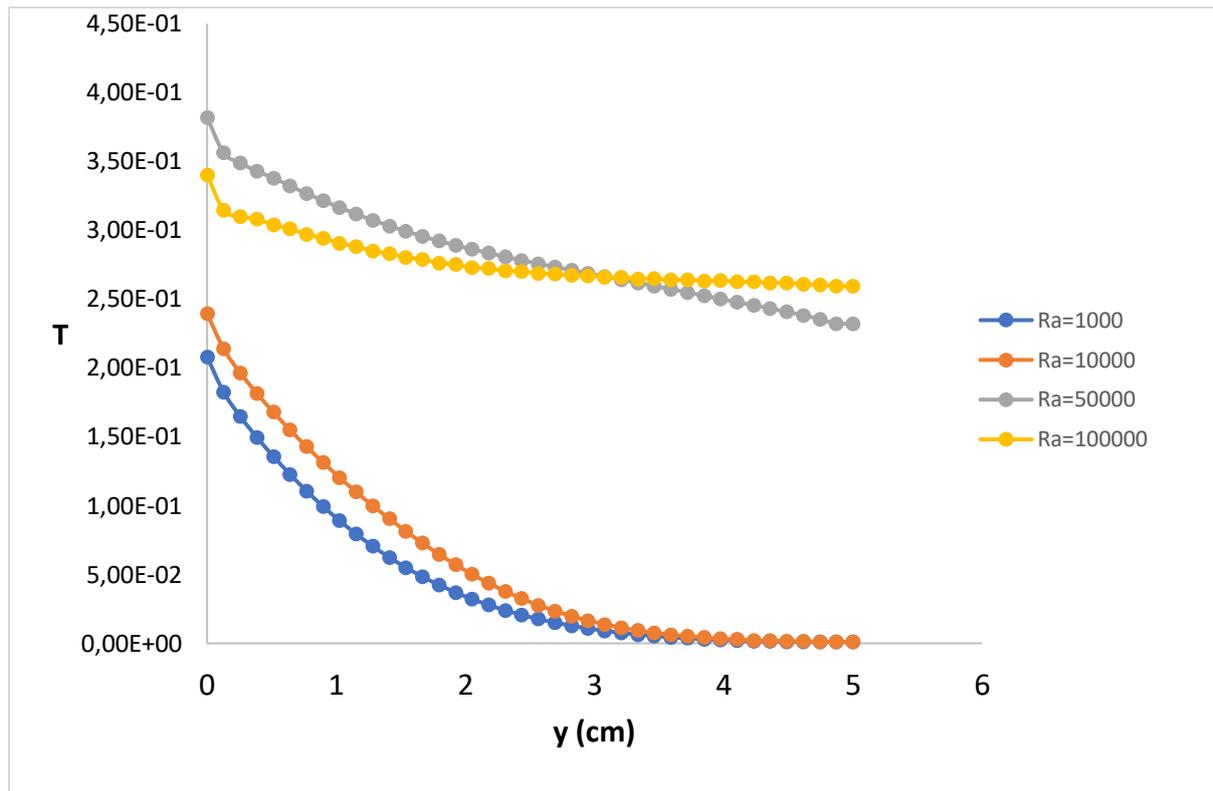
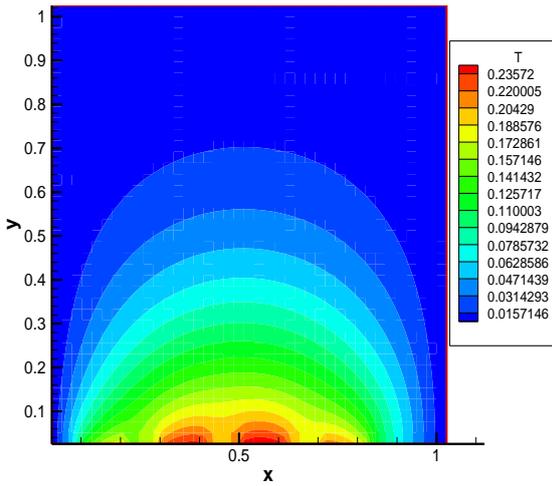


Figure III.26. : Température en fonction de (y) pour $x = 2,5$ cm et différents Ra.

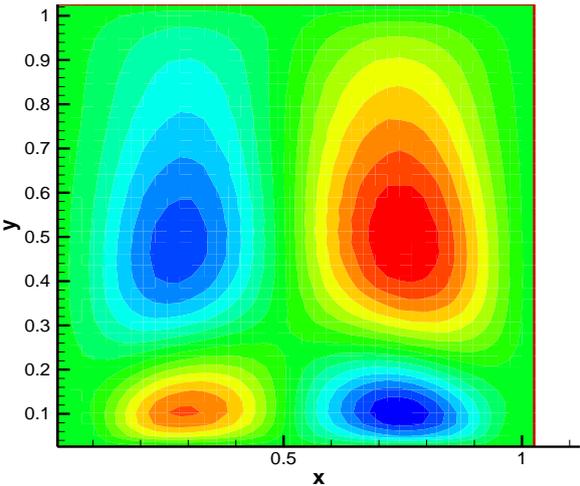
III.3.2.2. Influence du rapport d'aspect :

Pour l'étude précédente on a gardé le même rapport d'aspect ($A=1$). L'influence de la variation du rapport d'aspect sur l'écoulement et le transfert de chaleur, est étudiée dans ce qui suit.

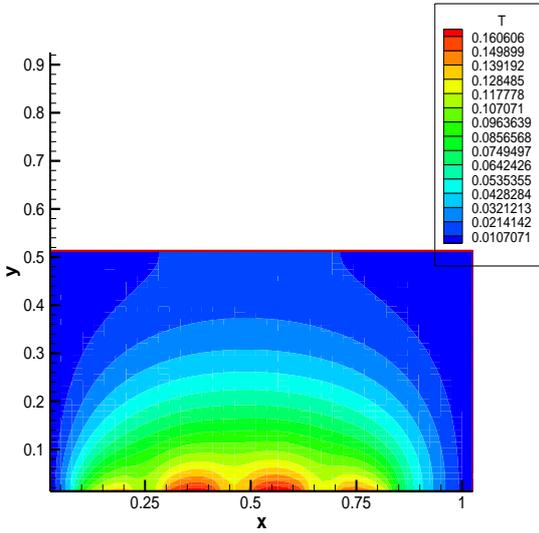
Ainsi dans la figure (III.27), les champs de température et de vitesse, pour des valeurs du nombre d'aspect allant de ($A = 1$) (cavité carrée) à ($A = 1/4$) (cavité rectangulaire horizontale allongée), dans le cas de quatre sources sont présentés.



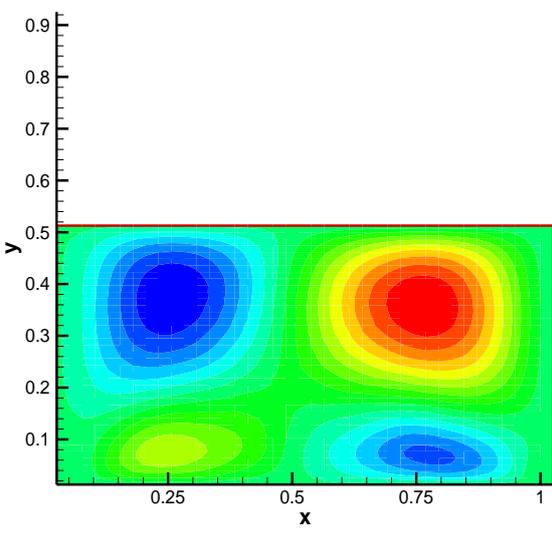
T* (a) : A=1



V*



T* (b) : A=1/2



V*

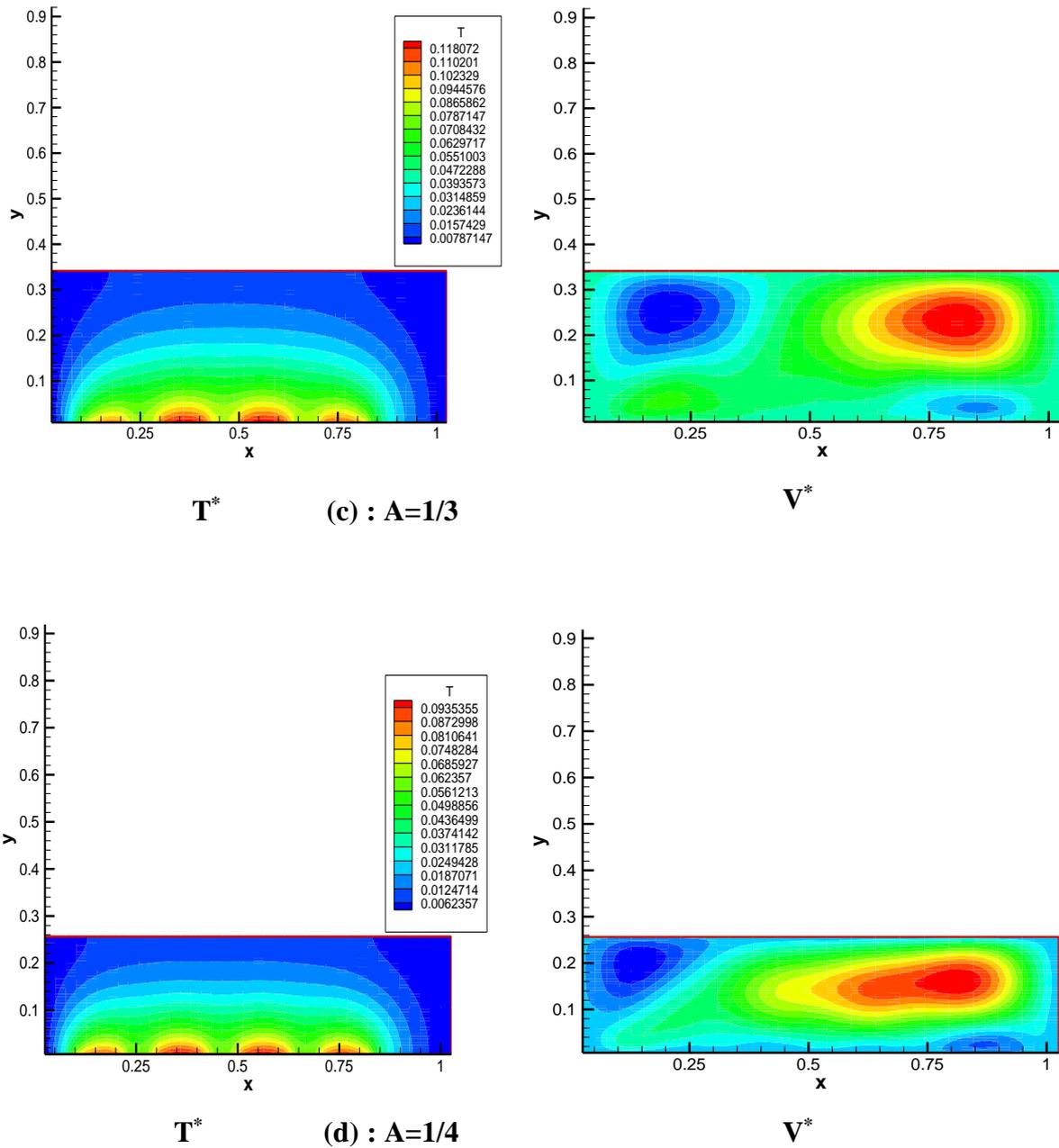


Figure III.27. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité verticale) avec $Ra=10^3$ (a) : $A = 1$, (b) : $A = 1/2$, (c) : $A = 1/3$, (d) : $A = 1/4$.

La figure (III.28) représente le nombre de nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect, avec $\langle Nu \rangle$ allant de 6,1479312 à 12,43608. A partir de la courbe de la figure (III.28), on déduit l'équation (III.15) qui représente la corrélation entre le nusselt moyen et le rapport d'aspect pour une cavité horizontale.

$$\langle Nu \rangle = 17,898 A^2 - 30,42 A + 18,684 \quad \text{avec : } R^2 = 0,9891 \quad \text{(III.15)}$$

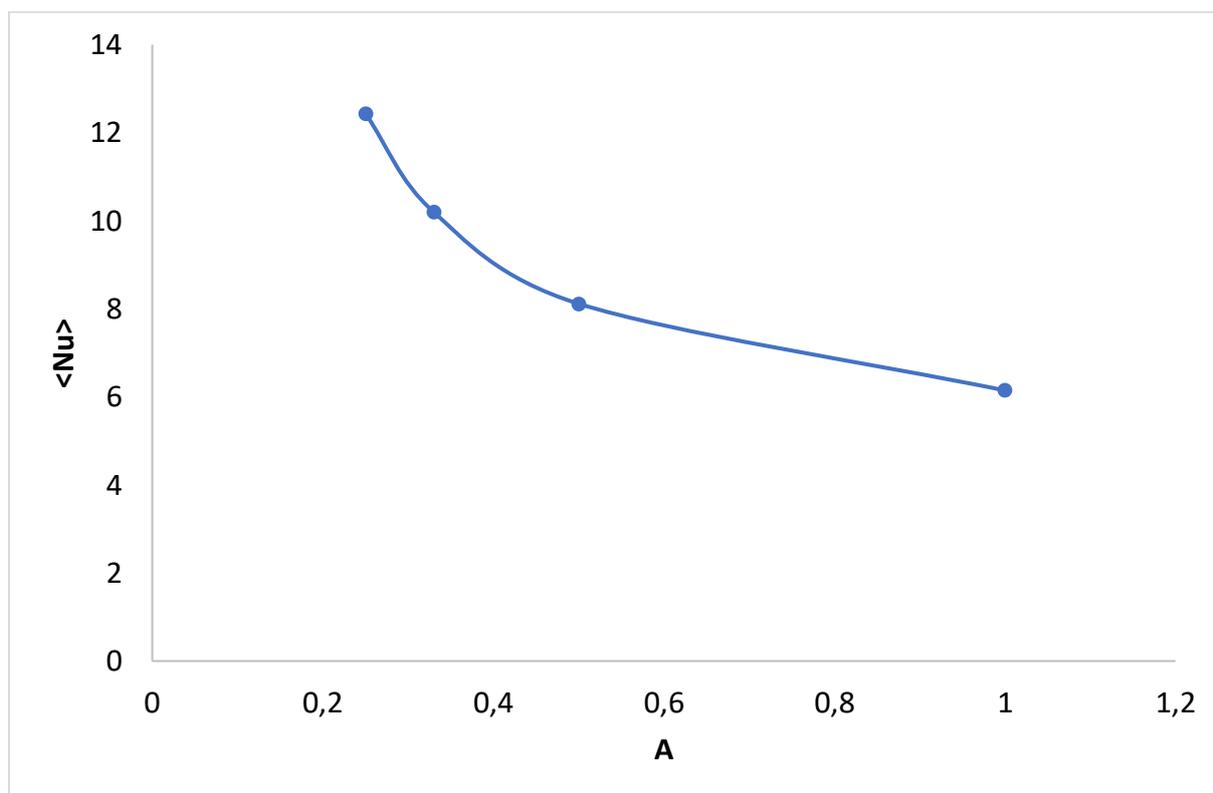
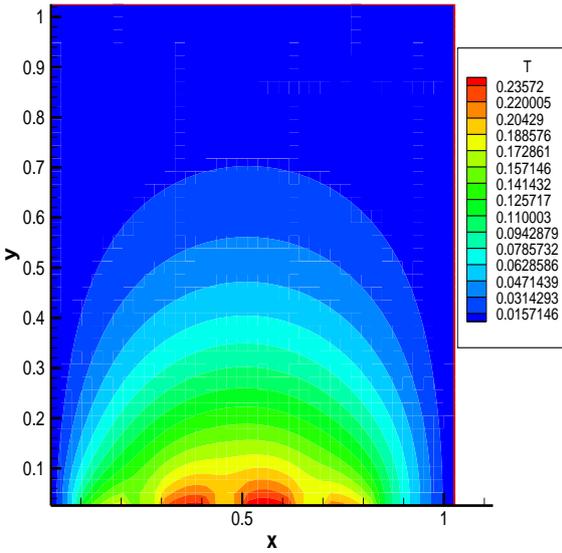
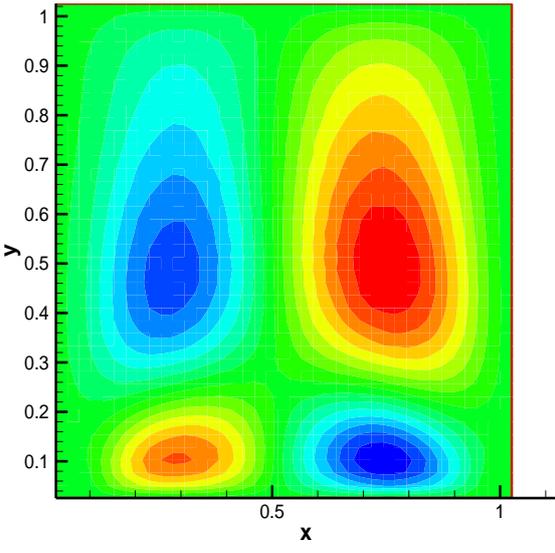


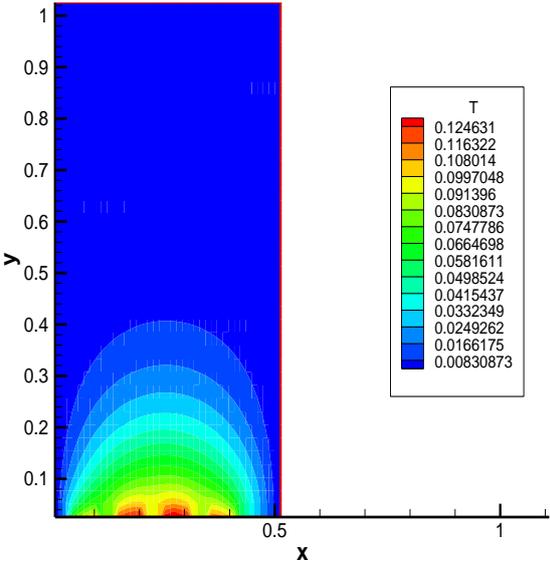
Figure III.28. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect ($A = H/L$) (cavité horizontale allongée) avec $Ra=10^3$.



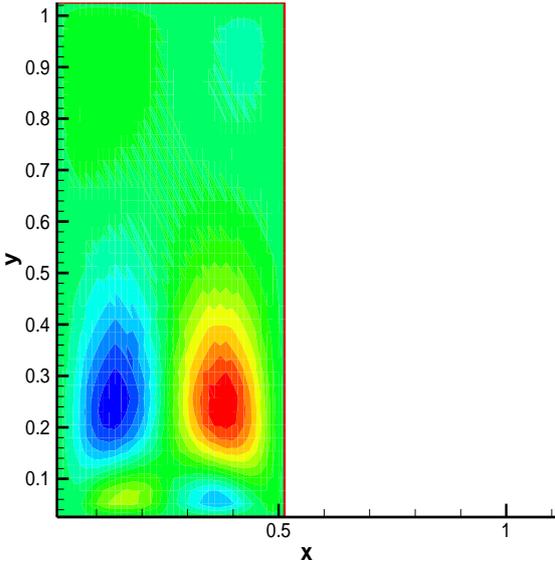
T^* (a) : $A=1$



V^*



T^* (b) : $A=2$



V^*

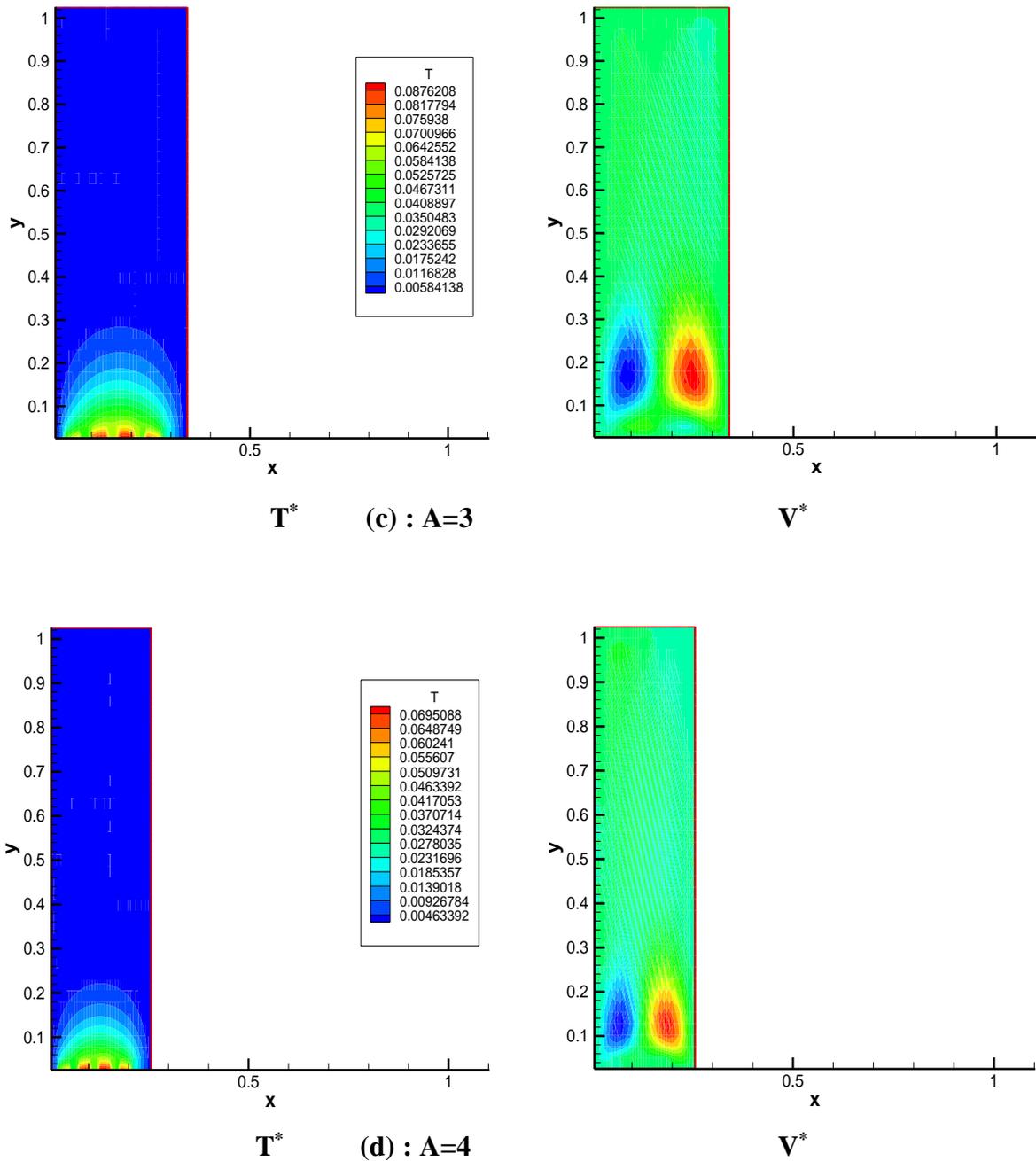


Figure III.29. : Champs de température et de vitesse pour différents rapports d'aspect (cavité verticale) avec $Ra=10^3$ (a) : $A = 1$, (b) : $A = 2$, (c) : $A = 3$, (d) : $A = 4$.

La figure (III.30) représente le nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect, $\langle Nu \rangle$ allant de 6,1479312 à 20,78567 variations qui est très faible. A partir de cette courbe, on peut néanmoins déduire l'équation (III.16) qui représente une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le rapport d'aspect pour une cavité verticale.

$$\langle Nu \rangle = -0,2609A^2 + 6,181A + 0,2317 \quad \text{avec : } R^2 = 1 \quad (\text{III.16})$$

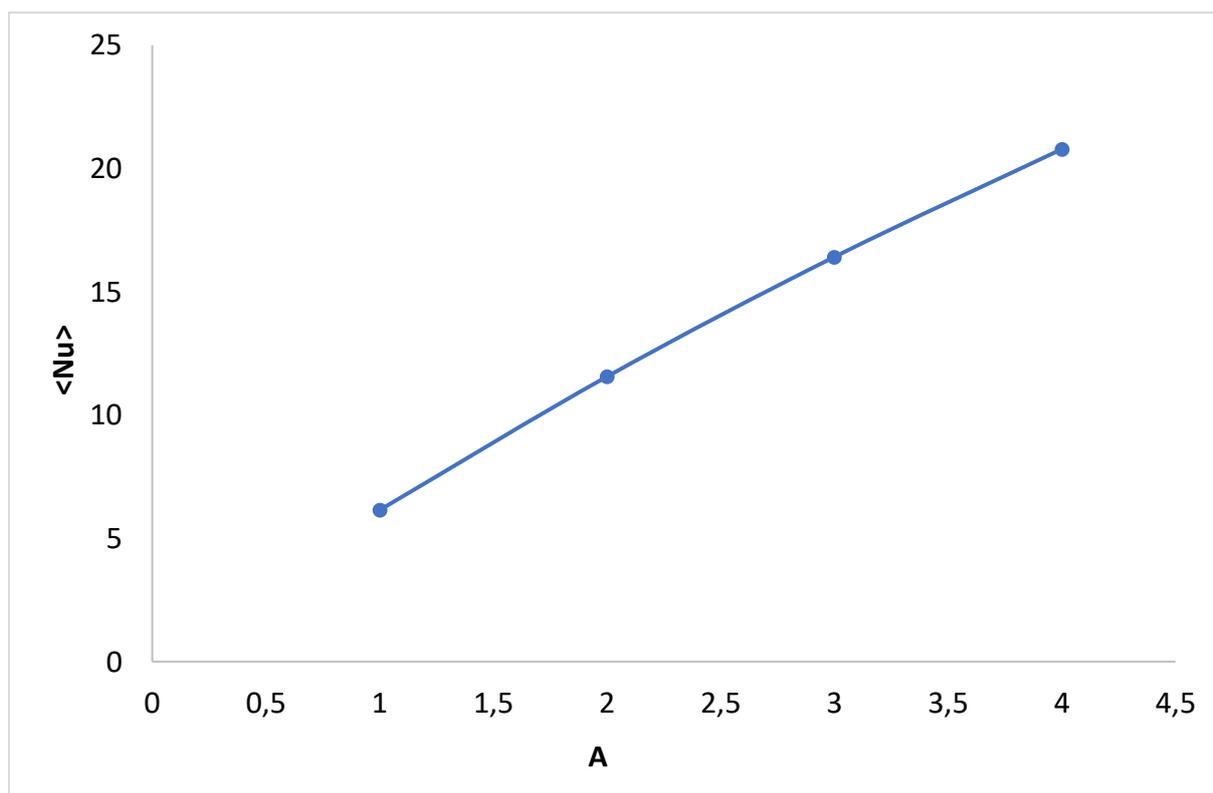


Figure III.30. : Nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect ($A = H/L$) (cavité verticale) avec $Ra=10^3$.

Conclusion générale

Conclusions générales

Dans ce mémoire, on a mené une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité contenant de l'air comme fluide et qui est discrètement chauffée par le bas. Les parois horizontales de la cavité sont considérées comme adiabatiques sauf au niveau des sources de chaleur. En effet, la paroi horizontale inférieure pouvant être chauffée localement par deux ou quatre sources de chaleur. Les parois verticales sont quant à elles maintenues à une température T_f , qui est constante. Pour montrer l'influence du fluide sur les écoulements convectifs, l'étude a consisté en premier lieu à développer notre propre programme de calcul en se basant sur la méthode des volumes finis avec un schéma hybride et l'algorithme Simpler.

Notre modélisation et procédure de simulation ont été validées en comparant les résultats qu'on obtient avec ceux d'autres auteurs. Par la suite une étude paramétrique a été menée et ce en considérant aussi bien le cas de deux sources de chaleur que celui de quatre sources en interaction.

L'étude a consisté à faire varier le nombre de Rayleigh, le rapport d'aspect de la cavité, les positions des sources de chaleur et de voir leurs influences sur les champs de température et de vitesses ainsi que sur le nombre de Nusselt, qui caractérise le flux de chaleur transféré au sein de la cavité. Des corrélations entre le nombre de Nusselt et les différents paramètres de contrôle ont été également obtenues.

Les résultats obtenus nous ont déjà permis d'avoir une idée sur l'influence des différents paramètres considérés sur les écoulements et transferts convectifs au sein d'une cavité contenant de l'air.

On espère que ce travail sera poursuivi dans le futur et permettra d'approfondir les résultats obtenus et de les appliquer directement dans des domaines du refroidissement des composants électroniques.

Références bibliographiques

- [1] F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman et A.S. Lavine, Fundamentals of heat and mass transfer sixième édition (2006).
- [2] A. Bejan et A. Krauss, Heat transfer handbook, chapter 7 natural convection, (2003)525-556
- [3] N. Ibrir, Etude la convection naturelle dans une cavité rectangulaire contenant du métal liquide, Mémoire de magistère en mécanique, Université de Batna, Algérie (2006).
- [4] J. H. Bae and J.M. Hyun, Time-dependent buoyant convection in an enclosure with discrete heat sources, International Journal of Thermal Sciences, 43, 3–11(2004).
- [5] N. Ibrir et S. Rahal, "Simulation numérique en 3D de la convection naturelle dans les fluides à bas nombres de Prandtl", Revue des Energies Renouvelables CISM'08 Oum El Bouaghi (2008), pp. 183 – 194.
- [6] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu <<Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow >> (2004) John Wiley & Sons. Ltd ISBNs : 0-470-84788-3 (HB) ; 0-470-84789-1 (PB)
- [7] M. Guestal. <<Modélisation de la convection naturelle laminaire dans une enceinte avec paroi chauffée partiellement>>. Mémoire de magister, option énergétique appliquée en engineering, Université MENTOURI constantine (2009).
- [8] S. Djimli. <<modélisation de la convection faible nombre de prandtl>>. Mémoire de magister, option thermo-fluides, université MENTOURI constantine (2004).
- [9] A. Abidi. <<convection naturelle laminaire conjuguée dans une enceinte avec bloc conducteur au milieu>>. Mémoire de magister, option procédés et énergétique, Université KASDI MERBEH Ouargla (2009).
- [10] P. Papet et al. "Pyramidal texturing of silicon solar cell with TMAH chemical anisotropic etching", Solar Energy Materials and Solar Cells, Volume 90, Issue 15, 22 2006, pp. 2319-2328.
- [11] Physique Chimie, Transferts thermiques, flux thermique, résistance thermique, <https://www.maxicours.com/se/cours/transferts-thermiques-flux-thermique-resistance-thermique/>, 23/03/2021

Références bibliographiques

- [12] Circulation de l'atmosphère , L'enveloppe gazeuse de la Terre couple atmosphère hydrosphère , <https://www.emse.fr/~bouchardon/enseignement/processus-naturels/up1/web/la-terre-est-ronde/terre-ronde-geodynamique-0504-atmosphere-cellule-coriolis.htm> ,23/03/2021
- [13] Sylvain Tollis, La convection thermique, à l'origine de la topographie de la surface de la terre, <https://tellmeyourscience.org/2014/01/27/breaking-news-un-nouvel-ocean-est-en-train-de-naitre/> ,23/03/2021
- [14] F. ZOUIRI, M.A. OULMANE, N. LABSI, Y.K. BENKAHLA, A. BOUTRA, "Convection naturelle au sein d'une cavité carrée munie d'une source chauffante placée sur sa paroi inférieure", 23ème Congrès Français de Mécanique, Lille Septembre 2017.
- [15] K. Shigeo and A. Bejan, Experimental study of natural convection in a cavity rectangular with different end temperatures, Int. J. Heat Mass Transfer, 23, 1117-1126(1980).
- [16] Chu H.H.-S., Churchill S.W. et Patterson C.V.S. "The effects of heater size, location, aspect ratio, and boundary conditions on two-dimensional, laminar, natural convection channels". J. Heat Transfer, Vol. 98, pp. 1194-201. (1976).
- [17] M. M. Ganzarolli et L. F. Milanez, Natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the sides, international journal of heat and mass transfer, 38(1995) 1063-1073.
- [18] B.L. Turner and R.D. Flack, The experimental measurement of natural convective heat transfer in rectangular enclosures with concentrated energy sources, J. Heat Transfer, 102, 237–241 (1980).
- [19] L.F. Jin, K.W. Tou and C. P. Tso, Effects of rotation on natural convection cooling from three rows of heat sources in a rectangular cavity, Int. J. Heat Mass Transfer, 48, 3982–3994 (2005).
- [20] S. V. Patankar and D. B. Spalding, A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum transfert in three-dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1787– 1790 (1972).
- [21] H. K. Versteeg and W. Malasekera, An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method, Editions John Wiley and Sons, (1995).

Références bibliographiques

- [22] I. Chtcherbatski, Analyse Numérique cours et problèmes, Office des publications universitaires, Algérie.
- [23] B. Calcagni, F. Marsili and M. Paroncini, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, Applied Thermal Engineering, 25, 2522–2531(2005).