

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

**Khelfa Widad**

Titre :

# APPROXIMATION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>KABOUL HANANE</b>	UMKB	Président
Dr. <b>DAKHIA GHANIA</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>REZKI IBRAHIM</b>	UMKB	Examinateur

juin 2021

## Dédicace

*Je dédie ce humble travail À : ma mère "**AICHA**" chère et chère , mon père "**ACHOUR**" très cher, pour leurs encouragement , leur amour, leur affection, leur soutien tout au long de mon cours et à ma tante, que Dieu la bénisse que vous avez voulu que je partage ma joie et ma chère tante et mon frère.*

*À mes soeurs : "**Saida, Samira, Ahlam, Safa, Ikram**".*

*À mes frères : "**Islam, Zaki**".*

*À mon mari : "**Mohamed Amin**".*

*À tout ceux qui me sont chérés*

*À Je dédie ce travail.*

## REMERCIEMENTS

*Je tiens* à remercier sincèrement mon encadreur "**Dr.DAKHIA GHANIA**" pour ses précieux conseils et ses orientations tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie infiniment les membres de jury **KABOUL HANANE** et

**REZKI IBRAHIM**, qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Tous mes reconnaissances et remerciements distingués s'adressent à notre chef de département "**Dr.Lakhdary Imad El Din.**" et à tous les enseignants de département de mathématiques de l'université Mohamed Khider Biskra.

Merci à Tous

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	ii
<b>Table des matières</b>	iii
<b>Introduction</b>	1
<b>1 Classification et genèse des équations intégrales</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Introduction</b> . . . . .	3
<b>1.2 Classification des équations intégrales</b> . . . . .	6
<b>1.2.1 Equations intégrales linéaires</b> . . . . .	6
<b>1.2.2 Equations intégrales non linéaires</b> . . . . .	9
<b>1.2.3 Equations intégrales singulieres</b> . . . . .	11
<b>1.3 Reduction d'une équation différentielle linéaire à une équation inté-</b> <b>grale de Volterra</b> . . . . .	13
<b>1.4 Théorie d'existence et d'unicité</b> . . . . .	15
<b>1.4.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale li-</b> <b>néaire de Volterra</b> . . . . .	15
<b>1.4.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non</b> <b>linéaire de Volterra</b> . . . . .	17

1.4.3	Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm	19
<b>2</b>	<b>Résolution numérique des équations intégrales</b>	<b>23</b>
2.1	Équation intégrale de Volterra	23
2.1.1	Méthode des approximations successives	23
2.1.2	Méthode de la solution en série	27
2.1.3	Méthode de quadrature	32
2.2	Équation intégrale de Fredholm	34
2.2.1	Méthodes du noyau dégénéré	34
2.2.2	Méthode d'interpolation de Newton	43
2.2.3	Méthodes de projection	47
2.2.4	Méthode spectrale de Tchebychev	53
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>
	<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>58</b>

# Introduction

Les équations intégrales apparaissent naturellement dans plusieurs phénomènes scientifiques en mathématiques et physique, comme les équations différentielles ordinaires (EDO) et certaines équations aux dérivées partielles (EDP), la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique...etc.

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Volterra et de Fredholm, constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique.

Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales du deuxième espèce.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et de l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations où nous avons divisé cette recherche en deux chapitres :

**Dans le premier chapitre** : nous l'avons divisé en deux parties :

Section 1 : nous intéressons à deux types principaux des équations intégrales, de Fredholm et ceux de Volterra et leurs classifications par linéarité (linéaire et non li-

néaire), ainsi qu'une liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra .

Section 2 : nous avons commencé par donner la théorie de l'existence et de l'unicité de la solution de ces équations intégrales.

**Dans le deuxième chapitre :** nous présentons différentes méthodes de résolution numérique des équations intégrales.

# Chapitre 1

## Classification et génèse des équations intégrales

### 1.1 Introduction

On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégrations  $\int$ . C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue  $\varphi$  de la forme

$$\int_E K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x) \quad , x \in E \quad (1.1)$$

où  $E$  est un espace mesuré,  $f(x)$  une fonction mesurable donn e sur  $E$ ,  $\lambda$  un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et  $K$  une fonction mesurable sur  $E^3$  appel e noyau de l'équation intégrale. Avec toutes ces donn es, notre problème est de chercher la fonction  $\varphi$  qui satisfait l'équation (1.1)

#### Remarque 1.1.1

i) Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t)$$

l'équation (1.1) devient linéaire, est sinon devient équation intégrale non linéaire.

ii) Le type le plus général d'une équation intégrale est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, t, \varphi(t))dt,$$

La fonction  $h(x)$  détermine le type de l'équation.

iii) Notons que l'équation peut ˆetre écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f$$

où l'opérateur  $T$  s'ecrit comme

$$T\varphi(x) = \int_E K(x, t, \varphi(t))dt,$$

### Lemme 1.1.1

Soit  $K$  une fonction de l'espace  $L^2(]a, b[ \times ]a, b[)$ , alors l'opérateur  $T$  défini par

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in ]a, b[$$

est bien défini en tant qu'opérateur de  $L^2(]a, b[)$  dans lui-mˆeme.

### Lemme 1.1.2

Soit  $K \in L^2(]a, b[ \times ]a, b[)$ . L'opérateur intégral  $T$  de noyau  $K$  est compact de  $L^2(]a, b[)$  dans lui-mˆeme.

**Proposition 1.1.1**

On définit la norme du noyau  $K(x, y)$  pour  $p$  et  $q$  conjugués, avec  $1 \leq p, q \leq \infty$  par

$$\| K \|_p = \begin{cases} \left[ \int_E \left( \int_E |K(x, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 < p < \infty \\ \int_E \operatorname{esssup}_t |K(x, t)| dx & \text{pour } p = 1 \\ \operatorname{esssup}_x \int_E |K(x, t)| dt & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

si on suppose que cette norme est finie

$$\| K \|_p < \infty \tag{1.2}$$

Alors, l'opérateur intégral  $T$  de noyau  $K(x, y)$  envoie  $L_p(E)$  dans  $L_p(E)$  de plus, on a

$$\| T\varphi \|_p \leq \| K \|_p \| \varphi \|_p$$

**Preuve**

·Cas où  $1 < p < \infty$ , l'inégalité de Hölder, nous donne

$$\int_E \left( \int_E |K(x, t)| |\varphi(t)| dt \right)^p dx \leq \int_E \left[ \left( \int_E |K(x, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} \| \varphi \|_p^p \right] dx = \| K \|_p^p \| \varphi \|_p^p$$

ce qui implique que l'opérateur  $T\varphi(x) = \int_E K(x, t)\varphi(t)dt$ , existe presque partout, avec

$$\| T\varphi \|_p \leq \| K \|_p \| \varphi \|_p$$

·Cas où  $p = 1$ , on a

$$\int_E \int_E |K(x, t)\varphi(t)| dt dx \leq \int_E \operatorname{esssup}_t |K(x, t)| dx \int_E |\varphi(t)| dt$$

d'où

$$\| T\varphi \|_1 \leq \| K \|_1 \| \varphi \|_1$$

Cas où  $p = \infty$ , on a

$$\begin{aligned} \operatorname{esssup}_x | T\varphi(x) | &= \operatorname{esssup}_x \left| \int_E K(x,t)\varphi(t)dt \right| \\ &\leq \operatorname{esssup}_t | \varphi(t) | \operatorname{esssup}_x \left| \int_E K(x,t)dt \right| \end{aligned}$$

d'où

$$\| T\varphi \|_\infty \leq \| K \|_\infty \| \varphi \|_\infty$$

### Remarque 1.1.2

Pour  $p = 2$ , la condition (1.2) devient

$$\int_E \int_E | K(x,t) |^2 dxdt < \infty$$

## 1.2 Classification des équations intégrales

### 1.2.1 Equations intégrales linéaires

**Définition 1.2.1** (*Equation intégrale de Fredholm*)

On appelle équation intégrale de Fredholm une équation, à une inconnue  $\varphi(x)$  de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \quad (1.3)$$

où  $f(x), K(x,t)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction  $h(x)$  détermine le type de l'équation intégrale :

i) si  $h(x) = 0$ , l'équation (1.3) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (1.4)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) si  $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$ , l'équation (1.3) s'écrit :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (1.5)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) si  $h(x) \neq 0$ , donc la formule (1.3) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce

1. Si  $f(x) = 0$ , l'équation (1.3) est dite homogène.

2. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.3) est dite non homogène.

### Définition 1.2.2 (*Equation intégrale de Volterra*)

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.6)$$

i) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si  $h(x) = 0$ , donc l'équation (1.6) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (1.7)$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si  $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$ , donc l'équation (1.6) s'écrit :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.8)$$

iii) Si  $h(x) \neq 0$ , donc la formule (1.6) est appel e équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

**Remarque 1.2.1**

- 1. Si  $f(x) = 0$ , l'équation (1.6) est dite homogène.
- 2. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.6) est dite non homogène.

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le

noyau  $K$  vérifie la condition

$$K(x, t) = 0 \quad , \text{ pour } x < t.$$

**Définition 1.2.3 (Equation intégrale de Wiener-Hopf)**

On appelle équation intégrale de Wiener-Hopf une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^\infty K(x - t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (1.9)$$

**Définition 1.2.4 (Equation intégrale d'Abel)**

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x). \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est une constante,  $0 < \alpha < 1$ .

## 1.2.2  quations intégrales non linéaires

### Définition 1.2.5 (*Equation intégrale de Fredholm*)

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = 0 \quad (1.11)$$

est appel e équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.12)$$

où  $u = \text{constante} \neq 0$ .

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.13)$$

### Définition 1.2.6 (*Equation intégrale de Volterra*)

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = 0 \quad (1.14)$$

est appel e équation intégrale de Volterra de seconde espèce, de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt. \quad (1.15)$$

et troisième espèce, de la forme  $h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt$ .

**Remarque 1.2.2**

1. Si  $f(x) = 0$ , l'équation est dite homogène.
2. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation est dite non homogène.

**Définition 1.2.7 (*Equation intégrale de Hammerstein*)**

On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (1.16)$$

**Définition 1.2.8 (*Equation intégrale de Hammerstein-Volterra*)**

On appelle équation intégrale de Hammerstein-Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)F(t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (1.17)$$

**Définition 1.2.9 (*Equation intégrale d'Abel*)**

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x - t)^{\alpha-t}g(\varphi(t))dt \quad (1.18)$$

où  $0 < \alpha < 1$  et  $g : [0, \infty) \longmapsto [0, \infty)$  tel que :  $g(0) = 0$  et  $g(x) > 0$ .

**Définition 1.2.10** (*Equation intégrale de Lalesco*)

On appelle équation intégrale de Lalesco une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x [K_1(x, t)\varphi(t) + K_1(x, t)\varphi^2(t) + \dots + K_n(x, t)\varphi^n(x)] dt. \quad (1.19)$$

**Définition 1.2.11** (*Equation intégrale de Bratu*)

L'équation intégrale non linéaire de Bratu prendre la forme :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, t)e^{\varphi(t)} dt. \quad (1.20)$$

$b$  est un nombre positif donn e et  $G(x, t)$  désigne la fonction de Green

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(b-x)(a-x)}{b-a} & , t \leq x \\ \frac{(b-t)(x-a)}{b-a} & , t \geq x \end{cases}$$

**1.2.3 Equations intégrales singulieres**

**Définition 1.2.12**

On dit qu'une équation intégrale est singuliere si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, par exemple :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty \sin(xt)\varphi(t)dt,$$

ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale, par exemple si le noyau  $K(x, t)$  de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est de la forme :

$$K(x, t) = \frac{H(x, t)}{|x-t|^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 ,$$

avec  $H(x, t)$  une fonction born e sur  $[a, b] \times [a, b]$ .

Si  $\alpha = 1$  dans l'exemple pr c dent alors  $K(x, t)$  est appelé noyau de cauchy.

**Proposition 1.2.1** *L'équation intégrale linéaire de Winer-Hopf et l'équation intégrale non linéaire d'Abel sont des équations intégrales singulières.*

### Singularité de type Volterra ou Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad , a \leq x < \infty. \quad (1.21)$$

où  $K(x, y)$  est faiblement singulier, en général

$$K(x, y) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha} & , 0 < \alpha < 1 \\ \log |x - t| & \end{cases}$$

Alors

- i) L'équation (1.21) est de Volterra.
- ii) Si  $x = b$ , l'équation (1.21) Fredholm.
- iii) Le cas où  $K(x, y) = |x - t|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , s'appelle singularité algébrique.
- iv) Le cas où  $K(x, y) = \log |x - t|$ , s'appelle singularité logarithmique.

### Définition 1.2.13 (*Equation intégrale de Carleman*)

On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme

$$p(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{q(t)}{t - x} \varphi(t) dt = f(x). \quad (1.22)$$

où  $p$  et  $q$  sont des fonctions continues.([6])

**Définition 1.2.14** (*Singularité de type de Cauchy*)

Soit  $D$  un domaine borné et connexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy est donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = f(x) \quad , t \in \mathbb{C}. \tag{1.23}$$

**Définition 1.2.15**

On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme

$$a(x)\varphi(x) + b(x) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{x-t} dt + \int_{\Gamma} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{1.24}$$

telle que  $\Gamma = \partial D$

### 1.3 Reduction d'une équation différentielle linéaire à une équation intégrale de Volterra

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation in grale. La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{d^n x} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x).$$

  coefficient continus  $a_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$  avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{n-1}(0) = C_{n-1}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \dots + a_2(x)y = F(x)$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1.$$

posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x).$$

D'où, vu les conditions initiales, on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1x + C_0$$

Nous avons utilis e la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x}_{n} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Compte tenu de mettons l'équation différentielle sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + C_1xa_2(x) + C_0a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x)a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x)$$

posant

$$K(x, t) = - [a_1(x)a_2(x)(x - t)], f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x)$$

nous ramenons l'équation à la forme suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

i.e. nous obtenous une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

## 1.4 Théorie d'existence et d'unicité

### 1.4.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra

Soit l'équation intégrale de Volterra de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.25)$$

où  $k(x, y)$  est une fonction continue sur  $[0, a] \times [0, a]$  et  $f(x)$  est continue sur  $[0, a]$  .

#### Définition 1.4.1

On appelle résolvante de l'équation intégrale, toute fonction  $R(x, t, \lambda)$  donn e par :

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, t),$$

où les  $k_n$  sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante :

$$k_1(x, t) = k(x, t), \quad k_n(x, t) = \int_t^x k_n(x, s)k_{n-1}(s, t)ds.$$

**Lemme 1.4.1**

La résolvante vérifie l'équation suivante :

$$R(x, t, \lambda) = k(x, t) + \lambda \int_t^x k_n(x, t)R(x, t, \lambda)ds.$$

**Théorème 1.4.1**

Soit  $k(x, t)$  une fonction continue pour  $[0, a] \times [0, a]$  et  $f(x)$  est continue pour  $0 \leq x \leq a$ .

L'équation (1.25) admet une solution unique et continue donn e par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda)f(t)dt.$$

**Théorème 1.4.2**

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce :

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.26}$$

où  $f, k$  sont fonctions continues, et dérivables sur  $[a, b]$

$$k(x, t) \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dxdt < \infty,$$

alors, il existe une solution unique et continue de l'équation (1.26)

**Preuve. ■**

On remarque d'abord que :

$$f(x) = \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = 0.$$

En utilisant la règle de Leibniz sur l'équation (1.26) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = k(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} k(x, t)\varphi(t)dt = f'(x),$$

comme  $k(x, x) \neq 0$  alors :

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x, x)} - \int_a^x \frac{k'_x(x, t)}{k(x, x)}\varphi(t)dt,$$

qui est une équation de Volterra de second espèce, et le théorème (1.4.1) donne l'existence et l'unicité de solution.

### 1.4.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi(t))dt \quad 0 \leq x \leq +\infty \quad (1.27)$$

Si les conditions suivantes sont v rifi es :

- i)  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.
- ii)  $F : [0, +\infty[ \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue qui satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$|F(x, t, \mu) - F(x, t, \nu)| \leq L |u - v| \text{ tel que : } x, t \in [0, +\infty[ \text{ et } u, v \in \mathbb{R},$$

alors l'équation (1.27) admet une solution unique  $\varphi \in C([0, +\infty[, R)$ .

**Preuve.** ■

On choisit la norme suivante :

$$|g| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \{ |g(x)| \exp(-Lx) \}.$$

On définit l'opérateur  $T$  comme suit :

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi(t)) dt.$$

On va montrer que l'opérateur  $T$  est contractant.

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\Psi(x)| &\leq \sup_{x \in [0, +\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |F(x, t, \varphi(t)) - F(x, t, \Psi(t))| dt \right\} \\ &\leq L \sup_{x \in [0, +\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |\varphi(t) - \Psi(t)| dt \right\} \\ &\leq L |\varphi - \Psi| \sup_{x \in [0, +\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \right\} \\ &\leq (1 - \exp(-Lx))(\varphi - \Psi). \end{aligned}$$

Comme :

$$(1 - \exp(-Lx)) < 1,$$

l'opérateur,  $T$  est contractant, d'après le principe de Banach l'opérateur  $T$  admet un point fixe unique  $\varphi \in C([0, +\infty])$ , qui est une solution unique de l'équation intégrale

(1.27)

### 1.4.3 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm du second espèce :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

où  $\Omega$  est un ensemble compact inclu dans  $\mathbb{R}^N$ .

On associe l'espace  $C(\Omega)$  le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

et la norme uniforme :

$$\| f \|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} | f(x) | .$$

#### Théorème de la série géométrique de Neumann

##### Théorème 1.4.3

Soit  $V$  un espace de Banach,  $L$  un opérateur linéaire borné,  $L \in \mathcal{L}(V)$  et  $I$  l'opérateur identique. Supposons que :

$$\| L \| < 1,$$

alors l'opérateur  $(I - L)$  est inversible dans  $V$  et  $(I - L)^{-1}$  est borné. De plus :

$$\| (I - L)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| L \|}, \tag{1.28}$$

**Preuve. ■**

Soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$M_n = \sum_{i=0}^n L^i \quad n \geq 0$$

On a :

$$\| M_{n+p} - M_n \| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} L^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \| L^i \| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \| L \|^i,$$

d'où

$$\| M_{n+p} - M_n \| \leq \frac{\| L \|^{n+1}}{1 - \| L \|},$$

et :

$$\sup_{p \geq 1} \| M_{n+p} - M_n \| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

donc la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans l'espace complet  $\mathcal{L}(V)$ , donc il existe  $M \in \mathcal{L}(V)$  tel que :

$$\| M_n - M \| \rightarrow 0$$

On remarque aussi :

$$(I - L)M_n = M_n(I - L) = I - L^{n+1}.$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$(I - L)M = M(I - L) = I.$$

Ce qui permet de dire que l'opérateur  $(I - L)$  est inversible et on a :

$$M = (I - L)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n L^i = \sum_{i=0}^{\infty} L^i.$$

Ici  $M = (I - L)^{-1}$  est la somme de la série de Neumann  $\sum L^i$ , Il reste à montrer

(1.28) puisque :

$$\| M_n \| = \left\| \sum_{i=0}^n L^i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \| L \|^i \leq \frac{1}{1 - \| L \|},$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \| M_n \| &= \| M \| \leq \frac{1}{1 - \| L \|} \\ \| (I - L)^{-1} \| &\leq \frac{1}{1 - \| L \|} \end{aligned}$$

**Résultat :** Sous les hypothèses du théorème ( 1.4.3 ) pour tout  $f \in V$  l'équation :  $(I - L)\varphi = f$  admet une solution unique dans  $V$  telle que :

$$\varphi = (I - L)^{-1} f, f \in V.$$

### Approximation successive

Il est à remarquer que la somme partielle

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^n A^k f,$$

de la serie de Neumann vérifie l'équation :

$$\vartheta_{n+1} = A\vartheta_n + f, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où la relation directe entre la série de Neumann et la théorie des approximations successives .

Soit  $A$  un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach  $E$  dans lui-même avec  $\| A \| < 1$ , et soit  $I$  l'opérateur identique dans  $E$  pour tout  $f \in E$  l'approximation successive :

$$\vartheta_{n+1} = A\vartheta_n + f,$$

avec  $\vartheta_0$  un vecteur arbitraire de  $E$  converge vers une unique solution  $\vartheta$  de l'équation :

$$\vartheta - A\vartheta = f.$$

**Preuve.** Il est aisé de voir que de la relation précedente, on a :

$$\vartheta_0 = f.$$

$$\vartheta_1 = A\vartheta_0 + f = Af + f.$$

$$\vartheta_2 = A\vartheta_1 + f = A^2f + Af + f.$$

.

.

.

$$\vartheta_{n+1} = A\vartheta_n + f = A \sum_{k=0}^n A^k f + f = A^{n+1}f + \sum_{k=0}^n A^k f.$$

■

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A^{n+1}f + \sum_{k=0}^{\infty} A^k f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f \\ &= (I - A)^{-1}f. \end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Résolution numérique des équations intégrales

### 2.1 Équation intégrale de Volterra

#### 2.1.1 Méthode des approximations successives

La méthode d'approximations successives, également appelée méthode d'itération de Picard, fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeurs initiales ou des équations intégrales. Cette méthode résout tout problème en trouvant approximations successives à la solution en commençant par une approximation initiale, appelée approximation zéro.

#### Cas de l'équation intégrale linéaire

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra du second type :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.1)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $f(x)$  est une fonction donnée,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x, t)$  est un noyau. La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-1}(t)dt \quad , n \geq 1, \quad (2.2)$$

où l'approximation en zéro  $u_0(x)$  peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour  $u_0(x)$ , la plupart du temps nous choisissons 0, 1,  $x$  pour  $u_0(x)$ , et en utilisant (2.2), plusieurs approximations successives  $u_k, k \geq 1$  seront déterminées comme :

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_0(t)dt \quad (2.3)$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_1(t)dt$$

$$u_3(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_2(t)dt$$

.

.

.

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-1}(t)dt$$

**Exemple 2.1.1**

Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode des approximations successives

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x - t)u(t)dt, \quad (2.4)$$

Pour l'approximation zéro  $u_0(x)$ , on peut choisir

$$u_0(x) = 1$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$u_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_n(t)dt \quad , n \geq 0.$$

En remplaçant  $u_0(x)$  par  $u_{n+1}(x)$  on obtient

$$u_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_0(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

$$u_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_1(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{1}{2!}t^2\right)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$u_3(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_2(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4\right)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

⋮  
⋮  
⋮

$$u_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_n(t)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$u_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

La solution  $u(x)$  de (2.4) est :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \cos x.$$

### Cas de l'équation intégrale non linéaire

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra du second type :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt, \quad (2.5)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $K(x, t)$  est un noyau. La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_n(t))dt \quad , n \geq 0 \quad (2.6)$$

où l'approximation en zéro  $u_0(x)$  peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour  $u_0(x)$ , la plupart du temps nous choisissons  $0, 1, x$  pour  $u_0(x)$ , et en utilisant (2.6), plusieurs approximations successives  $u_k, k \geq 1$  seront déterminées comme

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_0(t))dt & (2.7) \\ u_2(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_1(t))dt \\ u_3(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_2(t))dt \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_{n+1}(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_n(t))dt \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution  $u(x)$  est obtenue en utilisant

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x). \quad (2.8)$$

**Exemple 2.1.2** Utiliser la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale de Volterra non linéaire

$$u(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x xu^3(t)dt. \quad (2.9)$$

Pour l'approximation zéro  $u_0(x)$ , on peut choisir

$$u_0(x) = 1 \quad (2.10)$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$u_{n+1}(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x xu_n^3(t)dt. \quad (2.11)$$

En remplaçant (2.10) par (2.11) on obtient les approximations

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x xu_0^3(t)dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\ u_2(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x xu_1^3(t)dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\ u_3(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x xu_2^3(t)dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution  $u(x)$  de (2.9) est donnée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = e^x.$$

### 2.1.2 Méthode de la solution en série

Cas de l'équation intégrale linéaire :

Une fonction réelle  $u(x)$  est appelée analytique si elle a des dérivées de tous les ordres tels que la série de Taylor en tout point  $b$  dans son domaine

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(b)}{k!} (x - b)^k, \quad (2.12)$$

converge vers  $f(x)$  dans un voisinage de  $b$ . Pour simplifier, la forme générique de la série de Taylor à  $x = 0$  peut être écrite comme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.13)$$

Dans cette section nous présenterons une méthode utile, qui provient principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrales de Volterra. Supposons que la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt, \quad (2.14)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.13), où les coefficients  $a_n$  seront déterminés de façon récurrente. La substitution (2.13) des deux côtés de (2.14) donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt. \quad (2.15)$$

ou pour simplifier, nous utilisons

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) dt \quad (2.16)$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor pour  $f(x)$ . L'équation intégrale (2.14) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.15) ou (2.16) où au lieu d'intégrer la fonction

inconnue  $u(x)$ , des termes de la forme  $t^n$ ,  $n \geq 0$  seront intégrés. Notons que parce que nous cherchons une solution en série, si  $f(x)$  comprend des fonctions élémentaires telles que des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles,.. etc, il faut utiliser des extensions de Taylor pour des fonctions impliquées dans  $f(x)$ .

**Exemple 2.1.3** Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de la solution en série

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(t) dt. \quad (2.17)$$

En remplaçant  $u(x)$  par la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^n a_n x^n. \quad (2.18)$$

Dans les deux côtés de l'équation (2.17) conduit à

$$\sum_{k=0}^n a_n x^n = 1 + \lambda \int_0^x \left( \sum_{k=0}^n a_n t^n \right)$$

L'évaluation de l'intégrale à droite donne

$$\sum_{k=0}^n a_n x^n = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

qui peut être réécrit comme

$$a_0 + \sum_{k=1}^n a_n x^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} a_{n-1} x^n.$$

De sorte que :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots = 1 + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 \dots \quad (2.19)$$

ce qui implique que l'on a :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= a_0 \\
 a_2 &= \frac{1}{2}a_1 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 a_n &= \frac{1}{n}a_{n-1}, n \geq 1.
 \end{aligned}$$

D'où ce résultat donne  $a_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0$ .

La substitution de ce résultat en (2.18) donne la solution en série :

$$u(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} x^n$$

qui converge vers la solution exacte  $u(x) = e^x$ .

Il est intéressant de souligner que ce résultat peut être obtenu en égalisant des coefficients de termes semblables dans les deux côtés de (2.19), où l'on trouve

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1, a_1 = a_0 = 1 \\
 a_2 &= \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2!} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 a_n &= \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n!}, n \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ceci conduit au même résultat obtenu avant en résolvant la relation de récurrence.

### Cas de l'équation intégrale non linéaire

La forme générique de la série de Taylor à  $x = 0$  peut être écrite comme

$$u(x) = \sum_{k=0}^n a_n x^n. \quad (2.20)$$

Nous supposons que la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Volterra non linéaire

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) F(u(t)) dt, \quad (2.21)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.20), où les coefficients seront déterminés de façon récurrente. La substitution (2.20) des deux côtés de (2.21) donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left( F \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n \right) \right) dt, \quad (2.22)$$

ou

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \quad (2.23)$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor pour  $f(x)$ . L'équation intégrale (2.22) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.22) ou (2.23) où au lieu d'intégrer le terme non linéaire  $F(u(x))$ , des termes de la forme  $t^n$ ,  $n \geq 0$  seront intégrés. Notons que parce que nous cherchons une solution en série, si  $f(x)$  comprend des fonctions élémentaires telles que des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles,.. etc, il faut utiliser des extensions de Taylor pour des fonctions impliquées dans  $f(x)$ .

**Exemple 2.1.4**     *Résoudre l'équation intégrale de Volterra non linéaire suivante*

en utilisant la méthode de la solution en série

$$u(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt. \quad (2.24)$$

L'utilisation de la forme de série (2.20) dans les deux côtés de (2.24) donne

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)^2 dt.$$

En intégrant l'intégrale sur le côté droit, et en recueillant des puissances semblables de  $x$  on obtient

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = 1 + x + \frac{1}{2}(a_0^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}(a_0a_1 - 1)x^3 + \frac{1}{12}(a_1^2 + 2a_0a_2 - 1)x^4 + \dots$$

Equation des coefficients de puissances identiques de  $x$  dans les deux côtés rendements

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 2.$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x) = x + 1,$$

### 2.1.3 Méthode de quadrature

#### Schéma générale

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), a \leq x \leq b \quad (2.25)$$

où  $k(x,y)$  et  $f(x)$  sont des fonctions continues.

De l'équation (2.25) on obtient

$$\varphi(a) = f(a).$$

Choisissons une constante d'intégration  $h$  (le pas de la discrétisation) et considérons l'ensemble discret de point

$$x_i = a + h(i - 1), i = 1, 2, \dots, n$$

pour  $x = x_i$ , l'équation (2.25) s'écrit

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} k(x_i, y)\varphi(y)dy = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

En appliquant la méthode de quadrature à l'intégrale en (2.26) et posons  $y = x_j, j = 1, \dots, i$ , il vient

$$\varphi(x_i) - \sum_{j=1}^i A_{ij}k(x_i, x_j)\varphi(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i(\varphi), i = 2, \dots, n \quad (2.27)$$

où  $\varepsilon_i(\varphi)$  est l'erreur et  $A_{ij}$  sont les coefficients de la méthode de quadrature sur l'intervalle  $[a, x_i]$

Supposons que  $\varepsilon_i(\varphi)$  sont petits et les négligent, alors on obtient un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\varphi_1 = f_1, \varphi_i - \sum_{j=1}^i A_{ij}k_{ij}\varphi_j = f_i, i = 2, \dots, n \quad (2.28)$$

où  $k_{ij} = k(x_i, x_j), f_i = f(x_i), \varphi_i = \varphi(x_i)$ .

De (2.28) il vient

$$\varphi_1 = f_1, \varphi_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} k_{ij} \varphi_j}{1 - A_{ii} k_{ii}}, i = 2, \dots, n \quad (2.29)$$

avec la condition  $1 - A_{ii} k_{ii} \neq 0$ .

Ce qui peut toujours être assuré par un choix approprié des nœuds et en garantissant cela les coefficients  $A_{ii}$  sont suffisamment petits.

### Application de la méthode du Trapèze

Selon la méthode du trapèze nous avons

$$A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2}h, A_{i2} = \dots = A_{i,i-1} = h, i = 2, \dots, n$$

et le système (2.29) s'écrit comme suit

$$\varphi_1 = f_1, \varphi_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} k_{ij} \varphi_j}{1 - \frac{1}{2}h k_{ii}} \quad i = 2, \dots, n$$

$$x_i = a + h(i - 1), n = \frac{b - a}{h} + 1, \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si } j > 1 \end{cases}$$

## 2.2 Équation intégrale de Fredholm

### 2.2.1 Méthodes du noyau dégénéré

On considère l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \int_G K(x, t) \varphi(t) dt \quad , x \in G. \quad (2.30)$$

avec  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 1$  un ensemble mesurable au sens de Jordan.

La méthode du noyau dégénéré est une méthode classique bien connue pour résoudre numériquement les équations intégrales de second type, et elle est l'une des méthodes numériques les plus simple à définir et analyser. L'idée principale consiste à remplacer le noyau de l'équation intégrale par un noyau dégénéré, précisément on approxime le noyau  $K(x, t)$  de l'équation (2.30) par une suite de noyaux dégénéré,

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t) \quad , n \geq 1 \quad (2.31)$$

où  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$  sont des éléments de  $X$ , tels que  $a_1, \dots, a_n$  sont linéairement indépendants. En tenant compte appliqué aux opérateurs  $I - A$  et  $I - A_n$  ,, cette approximation devient plus efficace en terme de convergence, si elle est réalisée de sorte que l'opérateur intégral associé  $A_n(\varphi) = X \rightarrow X$  défini par

$$A_n(\varphi) = \sum_{i=1}^n \langle \varphi, b_i \rangle a_i$$

satisfait la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| A_n - A \| = 0.$$

Sur  $C(G)$ , muni de la norme de la convergence uniforme, cela signifie exactement

$$\max_{x \in G} \int_G | K_n(x, t) - K(x, t) | dt \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Généralement, nous voulons que cette convergence soit rapide pour obtenir une convergence rapide de  $\varphi_n$  vers la solution  $\varphi$  où  $\varphi_n$  est la solution approchée de l'équation approximante

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_G K_n(x, t)\varphi_n(t)dt$$

**Théorème 2.2.1** *Toute solution de l'équation*

$$\varphi_n = f + \sum_{i=1}^n \langle \varphi, b_i \rangle a_i$$

s'écrit sous la forme

$$\varphi_n = f + \sum_{j=1}^n c_j a_j$$

où les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  sont solutions du système

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \langle a_j, b_i \rangle = \langle f, b_i \rangle \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

**Preuve.**

[4] ■

### Approximation par la série de Taylor

On considère l'équation intégrale unidimensionnelle

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f'(x) \quad a \leq x \leq b.$$

Supposons que le noyau  $K$  admet un développement en série entière par rapport à la première variable  $x$

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x)(t - a)^i, \quad (2.33)$$

ou par rapport à  $t$

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x)(x - a)^i,$$

Soit  $K_n$  la somme partielle des  $n$  premiers termes de la série (,,)

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^n K_i(x)(t - a)^i,$$

En utilisant la notation (2.31), est une suite de noyaux dégénérés

$$a_i(x) = K_{i-1}(x), \quad b_i(t) = (t - a)^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

Le système linéaire (2.32) devient

$$c_i - \sum c_j \int_a^b (t - a)^{i-1} K_{j-1}(t) dt = \int_a^b f(t) (t - a)^{i-1} dt \quad i = 1, \dots, n$$

et la solution  $\varphi_n$  est donnée par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} K_i(x).$$

### Interpolation du noyau

L'interpolation, est l'une des méthodes d'approximation de la fonction noyau par un noyau dégénéré. Il existe différents types d'interpolation, mais nous allons présenter ici l'interpolation en utilisant seulement les valeurs de  $K(x, t)$ . Notons aussi qu'il existe plusieurs fonctions d'interpolation,  $y$  compris les polynômes, les polynômes trigonométriques, les fonctions splines, et autres. Nous allons décrire le cadre général de cette approche, et nous illustrons ces idées par des cas particuliers.

Soit  $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$  une base pour l'espace des fonctions d'interpolation. Par exemple, pour l'espace des polynômes de degrés  $< n$ , on utilise la base

$$\psi_i(x) = x^{i-1} \quad , 1 \leq i \leq n.$$

Soit  $x_1, \dots, x_n$  un système de noeuds (points d'interpolation) de l'ensemble  $G$ , et  $g$  une fonction arbitraire dans  $C(G)$ . Le problème d'interpolation peut être énoncé comme suit :

Soit  $g_1, \dots, g_n$ ,  $n$  points distincts, trouver une fonction

$$P(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x), \quad (2.34)$$

telle que  $P(x_i) = g_i, i = 1, \dots, n$ . Ainsi, nous allons déterminer les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  solutions du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) = g_i, i = 1, \dots, n.$$

**Exemple 2.2.1** Soit  $x_1, \dots, x_n$  un système de noeuds. Alors

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (2.35)$$

est appelé le  $i$ -ème polynôme de Lagrange. C'est un polynôme de degré  $n$ , il s'annule en tout  $x_j$ , sauf en  $x_i$  où la valeur 1. On écrit ceci, à l'aide de delta de Kronecker

$$l_i(x) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Donc, pour la donnée d'une fonction arbitraire  $g$

$$P(x) = \sum_{j=1}^n g(x_j) l_j(x),$$

est une solution du problème d'interpolation énoncé ci-dessus

Si on se donne un système de noeuds  $x_1, \dots, x_n$ , et les données  $g(x_1), \dots, g(x_n)$ , alors il existe un polynôme unique, noté  $P$ , satisfait  $P(x_i) = g(x_i), i = 1, \dots, n$ . Ce

polynôme s'écrit dans la base de Lagrange

$$P(x) = \sum_{j=1}^n g(x_j) L_j(x)$$

où  $L_i(x)$  est donné par (2.35)

### Interpolation gauche du noyau

Soit :

$$K_n(x, t) = \sum_{j=1}^n L_j(x) K(x_j, t),$$

alors  $K_n(x_i, t) = K(x_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pour tout  $t \in G$ .

Le système linéaire associé à la méthode du noyau dégénéré est  $(I - A_n)\varphi_n = f$  est

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_G L_j(x) K(x_j, t) dt = \int_G K(x_i, t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

La solution  $\varphi_n$  est donnée par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n c_j L_j(x)$$

### Interpolation droite du noyau

Soit :

$$K_n(x, t) = \sum_{j=1}^n K(x, x_j) L_j(t).$$

Alors  $K_n(x, x_i) = K(x, x_i)$ , pour tout  $x \in G$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La méthode du noyau dégénéré est donnée par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n c_j K(x, x_j),$$

avec  $c_j$  sont solutions du système

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_G L_i(x) K(x, x_j) dt = \int_G L_i(x) f(x) dx \quad i = 1, \dots, n.$$

### Interpolation linéaire par morceaux :

Soit  $G = [a, b]$ ,  $n \geq 1$ ,  $h = (b - a)/n$ , et  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$  Étant donné une fonction  $g \in C[a, b]$ . Nous allons interpoler cette fonction aux points  $(x_i)$  en utilisant l'interpolation linéaire par morceaux. Pour  $i = 1, \dots, n$ , on définit un opérateur de projection  $P_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  par :

$$P_n g(x) = \frac{(x_i - x)g(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})g(x_i)}{h} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (2.36)$$

En introduisant ce qu'on appelle les fonctions chapeaux, dite aussi fonctions cardinales, qui définissent une base de Lagrange

$$L_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad i \geq 1 \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad i \leq n - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'opérateur de projection (2.36) s'écrit

$$P_n g(x) = \sum g(x_i) L_i(x). \quad (2.37)$$

Il est linéaire et borné avec  $\| P_n \|_\infty = 1$ . En effet, de (2.37) nous avons

$$\| P_n \|_\infty \leq \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n | L_i(x) |.$$

Choisissons maintenant  $x \in G$  tel que

$$\sum_{i=1}^n |L_i(x)| = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|,$$

et une fonction  $f \in C(G)$  avec  $\|f\|_\infty = 1$  et

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=1}^n |L_i(x)|,$$

Alors

$$\|P_n\|_\infty \geq \|P_n f\|_\infty \geq |P_n f(x)| = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|$$

donc on a l'égalité

$$\|P_n\|_\infty = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|$$

Et comme  $L_i \geq 0$ , pour tout  $i = 0, \dots, n$ , on a  $\sum_{i=0}^n |L_i(x)| = \sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

D'où  $\|P_n\|_\infty = 1$ .

**Théorème 2.2.2** Soit  $g \in C^2[a, b]$ . Alors, pour l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux nous avons l'estimation suivante

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|g''\|_\infty.$$

**Preuve.** Evidemment, le maximum de  $|P_n g - g|$  dans  $[x_i, x_{i+1}]$  est atteint en un point intérieur  $\zeta$  tel que  $g'(\zeta) = (P_n g)'(\zeta) = [g(x_{i+1}) - g(x_i)]/h$ . Sans perte de généralité nous pouvons supposer que  $\zeta - x_i \leq \frac{h}{2}$ . Puis, en utilisant la formule de

Taylor, on trouve

$$\begin{aligned}(P_n g)(\zeta) - g(\zeta) &= g(x_i) + (P_n g)'(\zeta)(\zeta - x_i) - g(\zeta) \\ &= g(x_i) - g(\zeta) - (x_i - \zeta)g'(\zeta) = \frac{1}{2}(x_i - \zeta)^2 g''(\eta),\end{aligned}$$

■

avec  $\eta \in ]x_i, \zeta[$ . Par conséquent

$$\max | (P_n g)(x) - g(x) | \leq \frac{1}{8} h^2 \| g'' \|_\infty$$

En interpolant  $K(x, t)$  par rapport à  $x$ , on a :

$$K_n(x, t) = \frac{(x_i - x)K(x_{i-1}, t) + (x - x_{i-1})K(x_i, t)}{h} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (2.38)$$

pour  $i = 1, \dots, n, a \leq t \leq b$ . Les coefficients de la matrice associée au système (2.38) sont donnés par

$$\langle a_i, b_i \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_i(t) K(x_i, t) dt.$$

Pour calculer ces intégrales, nous essayons de choisir une méthode numérique d'intégration qui exigera seulement quelques points de quadrature sur l'intervalle d'intégration, avec une erreur d'intégration de même ordre que l'erreur commise sur la solution approchée  $\varphi_n(x)$ .

Dans notre cas, la formule de Gauss-Legendre à deux points

$$\int_0^h y(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[ y\left(\left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \frac{h}{2}\right) + y\left(\left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \frac{h}{2}\right) \right],$$

est tout à fait suffisante, une fois appliquée sur chaque sous intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ , Les

côtés droits de (2.38) sont donnés par

$$\langle f, b_i \rangle = \int_a^b f(t)K(x_i, t)dt.$$

Du théorème (2.2.2), il en résulte que l'estimation de l'erreur commise dans l'approximation

d'un opérateur intégral  $A$  à noyau deux fois continûment différentiable par un opérateur à

noyau dégénéré  $A_n$  en utilisant l'interpolation linéaire par morceaux est donnée par

$$\| A_n - A \|_{\infty} \leq \frac{1}{8} h^2 (b - a) \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right\|_{\infty}.$$

Donc, l'erreur d'approximation de la solution de l'équation intégrale correspondante est d'ordre  $O(h^2)$ .

## 2.2.2 Méthode d'interpolation de Newton

Dans cette partie, on considère l'équation intégrale de Fredholm de second type

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad , a \leq x \leq b . \quad (2.39)$$

Notre but est de chercher la solution approchée de cette équation, en approximant la fonction inconnue  $\varphi(x)$  par le polynôme d'interpolation de Newton en utilisant les différences divisées. Précisément, par la donnée des points  $(x_i, \varphi_i)$ , où  $x_i$  sont équirépartis dans  $[a, b]$  et  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , nous allons construire le polynôme d'interpolation de degré  $n$  qui passe par ces points. On note  $\Delta$  l'opérateur des

différences vers l'avant divisées définies par

$$\begin{aligned}
 \Delta^0 \varphi_0 &= \varphi_0, \\
 \Delta^1 \varphi_0 &= \Delta \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0 \\
 \Delta^2 \varphi_0 &= \Delta \Delta \varphi_0 = \Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0 = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0, \\
 \Delta^3 \varphi_0 &= \Delta \Delta^2 \varphi_0 = \Delta(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0) = \varphi_3 - 3\varphi_2 + 3\varphi_1 - \varphi_0, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \Delta^n \varphi_0 &= \Delta \Delta^{n-1} \varphi_0 = \dots
 \end{aligned}$$

Avec une écriture matricielle, nous avons

$$\Delta \Phi_0 = M \Phi, \tag{2.40}$$

où  $\Delta \Phi_0 = (\Delta^0 \varphi_0, \Delta^1 \varphi_0, \dots, \Delta^n \varphi_0)^t$ ,  $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^t$ , et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : \\ -1 & 1 & 0 & 0 & : \\ 1 & -2 & 1 & 0 & : \\ -1 & 3 & -3 & 1 & : \\ \dots & \dots & \dots & \dots & : \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

est une matrice triangulaire inférieure, telle que, pour  $0 \leq i, j \leq n$  on a :  $m_{i0} = (-1)^i$ ,  $m_{ii} = 1$ ,  $m_{ij} = m_{i-1,j-1} - m_{i-1,j}$ , pour tout  $i > j$ ,  $m_{ij} = 0$  ailleurs.

D'autre part, le polynôme de Newton est de la forme

$$P_n(x) = \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2\varphi_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n\varphi_0}{n!h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}).$$

En substituant  $P_n(x)$  dans l'équation (2.39), on obtient l'équation approximante suivante

$$P_n(x) - \int_a^b K(x, t)P_n(t)dt = f(x) \quad , a \leq x \leq b.$$

Comme  $P_n(x_j) = \varphi_n(x_j)$  pour tout  $j = 0, \dots, n$ , on obtient

$$\varphi_j = f_j + \varphi_0 \int_a^b K(x_j, t)dt + \frac{\Delta\varphi_0}{h} \int_a^b K(x_j, t)(t - x_0)dt + \dots + \frac{\Delta^n\varphi_0}{n!h^n} \int_a^b K(x_j, t)(t - x_0)(t - x_1)\dots(t - x_{n-1})dt \quad (2.42)$$

En posant

$$c_{lj} = \int_a^b K(x_j, t)dt, \quad \text{si } l = 0$$

$$c_{jl} = \frac{1}{l!h^l} \int_a^b K(x_j, t)(t - x_0)\dots(t - x_{l-1})dt \quad l = 1, \dots, n,$$

pour  $j = 0, \dots, n$ . Le système (2.42) devient

$$\varphi_j = f_j + \sum_{i=0}^n c_{ji}\Delta^i\varphi_0.$$

D'une autre manière, nous avons

$$\Phi = F + C\Delta\Phi_0.$$

En utilisant la relation (2.40), on obtient finalement le système

$$(1 - CM)\Phi = F,$$

où  $I$ , est la matrice identité,  $F = (f_0, \dots, f_n)^t$ ,  $C = (c_{ji})$  et  $M$  la matrice (2.41),  $\Phi$  est le vecteur des solution à déterminer .

**Calcul des coefficients  $c_{jl}$**

Pour évaluer numériquement les coefficient  $c_{jl}$  de la matrice  $C$ , il suffit d'appliquer la

méthode d'intégration de Simpson aux même noeuds  $x_i$ , abscisses des points d'interpolation.

Alors, Pour  $l = 0$

$$c_{j0} = \frac{h}{3} [(K(x_j, x_0) + 4K(x_j, x_1) + 2K(x_j, x_2) + \dots + K(x_j, x_n))].$$

Pour  $l$  impair, nous avons

$$c_{ij} = \frac{1}{l!h^l} \times \frac{h}{3} [4K(x_j, x_l)l(l-1)..1h^l + 2K(x_j, x_{l+1})(l+1)l...2h^l + .. + K(x_j, x_n)n(n-1)..(n-l+1)h^l],$$

d'où

$$c_{jl} = \frac{h}{3} \left[ 4K(x_j, x_l) + 2K(x_j, x_{l+1})\frac{(l+1)}{1!} + 4K(x_j, x_{l+2})\frac{(l+1)(l+1)}{2!} + .. + K(x_j, x_n)\frac{n(n-1)..(n-l)}{(n-l)!} \right]$$

ceci s'écrit aussi

$$c_{jl} = \frac{h}{3} [4K(x_j, x_l)C_l^0 + 2K(x_j, x_{l+1})C_{l+1}^l + 4K(x_j, x_{l+2})C_{l+2}^{2l} + .. + K(x_j, x_n)C_n^{n-l}]$$

De la même manière, pour  $l$  pair, on trouve

$$c_{jl} = \frac{h}{3} [2K(x_j, x_l)C_l^0 + 4K(x_j, x_{l+1})C_{l+1}^l + 2K(x_j, x_{l+2})C_{l+2}^{2l} + .. + K(x_j, x_n)C_n^{n-l}].$$

## Exemples numériques

**Exemple 2.2.2** On considère l'équation

$$\varphi(x) = e^x + e^{-x} - \int_0^1 e^{-x-t}\varphi(t)dt \quad 0 \leq x \leq 1 ,$$

dont la solution exacte est  $\varphi(t) = e^t$ . Les résultats numériques pour  $n = 4$  (i.e, 5 points équirépartis) sont donnée dans la tableau suivant :

$x$	solution exacte	solution approché	erreur absolue
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	$4.44089E - 16$
0.25	1.28402541668774	1.28402541668774	0
0.50	1.64872127070013	1.64872127070013	$2.22045E - 16$
0.75	2.11700001661267	2.11700001661267	0
1	2.71828182845905	2.71828182845905	0

**Tableau 2.2** Méthode d'interpolation de Newton

### 2.2.3 Méthodes de projection

**Définition 2.2.1** Soit  $X$  un espace de Banach, un opérateur  $P \in \mathcal{L}(X)$  tel que  $P^2 = P$  est appelé un opérateur de projection.

Si  $X$  est un espace de Hilbert l'opérateur  $P$  est un opérateur de projection orthogonal i.e  $\forall u, v \in X : \langle Pv, (I - P)u \rangle = 0$

**Proposition 2.2.1** Soit  $X$  un espace vectoriel,  $X = X_1 \oplus X_2$  si et seulement s'il existe un opérateur linéaire  $P : X \rightarrow X$  tel que  $P^2 = P$  avec  $v_1 = P(v)$  et  $v_2 = (I - P)(v)$  et aussi  $X_1 = P(X)$  et  $X_2 = (I - P)(X)$ .

#### Principe des méthodes de projection

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_D k(x, t)\varphi(t)dt = g(x) \quad (2.43)$$

Avec toutes les méthodes de projection, nous envisageons de résoudre (2.43)

Dans le cadre d'un espace de fonction complet, en général  $C(D)$  ou  $L^2(D)$  Nous choisissons une séquence de sous-espaces approximatifs dimensionnels finis  $X_n \subset X, n \geq 1$  : Avec  $X_n$  de dimension  $k_n$  finie Soit  $X_n$  de base  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k_n}\}$  donc le principe de la méthode de projection consiste a trouver une suite de fonction  $\varphi_n \in X_n$ . Ce qui peut être écrit comme

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x) \quad , x \in D \quad (2.44)$$

Pour déterminer les coefficients  $(c_j)$ , on substituant, cette fonction dans l'équation (2.43),

et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n &= \varphi_n(x) - \lambda \int_D k(x, t) \varphi_n(t) dt - g(x) \\ &= \sum c_j \left\{ \phi_j(x) - \lambda \int_D k(x, t) \phi_j(t) dt \right\} - g(x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pour  $x \in D$ . Ciest ce qu'on appelle le résidu dans l'approximation de l'équation

Lors de l'utilisation de  $\varphi \simeq \varphi_n$  Maintenant, nous écrivons (2.43) en notation d'opérateur comme

$$(I - \lambda k)\varphi = g \quad (2.46)$$

En suite, le résidu peut être écrit comme

$$r_n(x) = (I - \lambda k)\varphi_n - g$$

Les coefficients  $\{c_1, \dots, c_{k_n}\}$  sont choisis en forçant  $r_n(x)$  à être approximativement nul dans un certain sens. L'espoir et l'attente, c'est que la fonction résultante  $\varphi_n(x)$  sera une bonne approximation de solution exacte  $\varphi(x)$ .

Nous avons différents types de méthodes de projection. Les plus utilisées sont :

### Méthodes de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_D k(x, t)\varphi(t)dt = g(x) \quad (2.47)$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (2.47) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation  $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\} \in D$  telle que

$$r_n = 0 \quad n = 1, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients  $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$  comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \phi_j(x_i) - \lambda \int_D k(x_i, t)\phi_j(t)dt \right\} = g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n \quad (2.48)$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x_i, t)\phi_j(t)dt + g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

Nous introduisons un opérateur de projection  $P_n : X \longrightarrow X_n$ ,  $X = C(D)$  soit  $\varphi \in C(D)$  on définit  $P_n\varphi$  comme élément de  $X_n$  l'interpolation de  $\varphi$  aux points  $x_i$

$$P_n\varphi(x) = \varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x_i) \quad (2.49)$$

donc

$$P_n \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x_i, t) \phi_j(t) dt + g(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x_i)$$

Alors les coefficients  $c_j$  sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x_i) = \varphi(x_i) \quad (2.50)$$

Mais ce système admet une solution unique si

$$\det | \phi_j(x_i) | \neq 0$$

donc  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$  constituent un système linéairement indépendant.

**Exemple 2.2.3** Si par exemple  $\phi_j(x) = x^j$  alors

$$\det[\phi_j(x_i)] = \det[x^j] \neq 0$$

Ce déterminant est le déterminant Vandermonde il n'est pas nul.

Pour tout  $i$ , ( $1 \leq i \leq k_n$ ), soit  $l_i \in V_n$  avec

$$V_n = \text{vet} \{1, x, \dots, x^n\}$$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$P_n \varphi(x) = \sum a_j \phi_j(x) \quad x \in D,$$

le système  $(l_i)$  est le système de polynôme d'interpolation de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{k_n} \frac{x-x_j}{x-x_j} \quad i = 0, 1, \dots, k_n$$

### Méthode de Galerkin

Soit  $X = L^2(D)$  ou un autre espace de fonctions de Hilbert, et donne  $\langle . \rangle$  muni d'un produit scalaire pour. Exiger le résiduel  $r_n$  pour satisfaire

$$\langle r_n, \phi_i \rangle = 0 \tag{2.51}$$

Le côté gauche est le coefficient de Fourier de  $r_n$  associé à  $u_i$ . Si  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$  se compose des membres principaux d'une famille orthonormée  $s = (\phi_i)_{i \geq 1}$  qui s'étend sur  $X$ , alors (2.51) nécessite les termes avancés à être zéro dans l'expansion de Fourier de  $r_n$  par rapport à  $s$ .

Pour trouver  $\varphi_n$ , appliquer (2.51) à (2.47) écrit comme  $(\lambda - k)\varphi = g$ . Cela donne le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle - \lambda \langle k\phi_j, \phi_i \rangle - \langle g, \phi_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k_n \tag{2.52}$$

C'est la méthode de Galerkin. Pour obtenir une solution approximative à (2.47) ou (2.46). Le système a-t-il une solution? Si c'est le cas, est-ce unique? La suite résultante des solutions approximatives  $\varphi_n$  converge-t-elle en  $\varphi$  dans  $X$  La converge-t-elle en  $C(D)$ , c'est-à-dire que un converge uniformément en  $\varphi$ . Notez également que la formulation ci-dessus contient des intégrales doubles  $\langle k\phi_j, \phi_i \rangle$ , Ceux-ci doivent être calculés numériquement.

Rappeler que

$$P_n h = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \langle h, \varphi_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k_n \quad (2.53)$$

À l'aide de la projection orthogonale  $P_n$ , nous pouvons réécrire (2.51) comme

$$P_n r_n = 0$$

Ou équivalent

$$P_n(I - \lambda k)\varphi_n = P_n g \quad \varphi_n \in X_n \quad (2.54)$$

Les polynômes de Legendre sont utilisés comme fonctions d'essai dans la base. Pour cela, nous proposons une brève introduction des polynômes de Legendre d'abord. Ensuite, nous dérivons une formulation matricielle par la technique de la méthode Galerkin.

**Exemple 2.2.4** Soit l'équation Intégrale de seconde espèce

$$\varphi(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 - 1)\varphi(t)dt$$

Prenant pour système complet sur  $[1, -1]$  un système de polynômes de Legendre  $\{l_i(x)\}$

,  $i = 1, 2, 3$  avec  $l_1(x) = 1, l_2(x) = x, l_3(x) = \frac{3x^2-1}{2}$

On cherche la solution sous la forme

$$\varphi_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Le résidu est égale a

$$r_3(x) = \varphi_3(x) - 1 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 (xt^2 - 1)(c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2})$$

En calculant l'intégrale on obtient

$$r_3(x) = \frac{4}{3}x + 3c_1 - \frac{2}{3}xc_1 + xc_2 - \frac{4}{15}xc_3 + c_3\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - 1$$

d'après l'orthogonalité du résidu  $r_3$  au système  $\left\{1, x, \frac{3x^2-1}{2}\right\}$  on a

$$\begin{aligned} \langle r_3, 1 \rangle &= 6c_1 - 2 = 0 \\ \langle r_3, x \rangle &= \frac{8}{9} + \frac{2}{3}c_2 - \frac{8}{45}c_3 - \frac{4}{9}c_1 = 0 \\ \left\langle r_3, \frac{3x^2-1}{2} \right\rangle &= \frac{2}{5}c_3 = 0 \end{aligned}$$

On obtient

$$c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = -\frac{10}{9}, c_3 = 0$$

Donc la solution est

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x$$

## 2.2.4 Méthode spectrale de Tchebychev

L'une des méthodes numériques les plus importantes pour résoudre les équations intégrales est la méthode spectrale de Tchebychev, qui consiste à approcher la solution  $u(x)$  par une somme finie de la série de Tchebychev

où  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  sont les polynômes de Tchebychev de première espèce et les coefficients  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  sont inconnus. Une méthode spectrale est caractérisée par la manière de déterminer ces coefficients, elle peut être de Galerkin et Tau ou de collocation spectrale (pseudo-spectrale).

**Théorème 2.2.3** *Soit  $u$  une fonction Lipschitzienne continue sur  $[-1, 1]$ . Alors  $u$  admet une représentation unique comme une série absolument et uniformément*

convergente

$$u(x) = \frac{c_0}{2}T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots, \quad (2.55)$$

et les coefficients sont donnés par la formule

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Soit  $u_{n-1}$  la série tronquée de Tchebychev,

$$u_{n-1}(x) = \frac{c_0}{2}T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_{n-1}T_{n-1}(x) \quad (2.56)$$

Notons que tout intervalle  $[a, b]$  peut être translaté et décalé à  $[-1, 1]$  en utilisant les polynômes de Tchebychev décalés

$$T_k^*(x) = T_k(\alpha x + \beta), \quad \alpha = \frac{2}{b-a}, \quad \beta = -\frac{b+a}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

### Interpolation

D'abord, il est utile de considérer un sous ensemble de  $n$  points de collocation  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'intervalle  $[-1, 1]$  afin de trouver une bonne transformation entre l'approximation spectrale (2.56) de  $u$  et sa représentation physique  $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ . Soit

$$p_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \dots + a_{n-1}T_{n-1}(x)$$

le polynôme d'interpolation de  $u(x)$  aux points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Théorème 2.2.4** Soit  $u \in C^n([-1, 1])$ . Alors,

$$u(x) - p_{n-1}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{n!} u^{(n)}(\zeta)$$

pour un certain  $\zeta$  élément d'un intervalle engendré par  $x$  et les points d'interpolation. Bien entendu, le choix optimal des points d'interpolation est donné par les zéros du polynôme de Tchebychev  $T_n(x)$ , qui sont

$$x_k = -\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.57)$$

Pour ces points  $x_k$ , les polynômes  $\{p_{n-1}\}$  sont généralement presque aussi de bonnes approximations de  $u$  tout comme les polynômes  $\{u_{n-1}\}$  et si  $u$  est une fonction analytique sur  $[-1, 1]$ , alors  $\|u - u_{n-1}\|$  et  $\|u - p_{n-1}\|$  décroissent géométriquement quand  $n \rightarrow \infty$ . C'est ce qu'on appelle convergence spectrale, i.e. la convergence vers zéro est plus rapide que  $n^{-p}$ ,  $p > 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

### Intégration

L'intégration numérique et l'interpolation de Lagrange sont très étroitement liées. Pour une fonction  $f$  continue sur  $[-1, 1]$ . Les formules standards de Newton-cotes sont de la forme

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \omega_k f(x_k), \quad (2.58)$$

où les  $w_k$  sont les poids de quadrature

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Les formules de quadrature de Gauss sont basées sur les points optimaux de Legendre  $x_k, k = 1, \dots, n$  et ces formules sont exactes pour les polynômes de degré inférieur ou égal  $2n - 1$ . L'idée de la formule de quadrature de Clenshaw-Curtis est d'utiliser les points de Tchebychev au lieu des nœuds optimaux. En utilisant les points de Tchebychev (2.57) (points de Tchebychev de premier ordre) on obtient la formule classique de Clenshaw Curtis. Cependant, si on utilise les zéros de la première dé-

rivé du polynôme de Tchebychev en ajoutant les points  $\pm 1$ , i.e. les extremums de Tchebychev

$$x_k = -\cos \frac{(k-1)\pi}{n-1}, \quad k = 1, \dots, n$$

dans  $[-1, 1]$  (points de Tchebychev de second ordre), on obtient la formule pratique de Clenshaw-Curtis. Les deux formules ont toutes les bonnes propriétés des formules de quadratures Gaussiennes.

### Discretisation de l'équation

On considère l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x) + Au(x). \quad (2.59)$$

On procède à la discretisation de l'opérateur intégral de Fredholm  $Au(x)$  en utilisant les polynômes décalés de Tchebychev,

$$\begin{aligned} Au(x) &= \int_a^b K(x, t) \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k^*(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_a^b K(x, t) T_k^*(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{j=0}^{n-1} k_{jk} T_j^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} c_k k_{jk} \right] T_j^*(x). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Par conséquent, si  $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$  sont les coefficients de  $u$ , alors  $Kc$  sont les coefficients de  $A(u)$ , où  $K = (k_{jk})_{k,j=0,\dots,n-1}$ . Le calcul de cette matrice peut s'effectuer à partir des valeurs physiques de la manière suivante

$$I_k(x_s) = \int_a^b K(x_s, t) T_k^*(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i k(x_s, x_i) T_k^*(x_i), \quad s, k = 0, \dots, n-1.$$

# Bibliographie

- [1] Dilmi, M. (2018). Sur la convergence des méthodes spectrales pour les équations intégrales (Doctoral dissertation, Université de M'sila).
- [2] Dilmi, N.(2018)Résolution numérique des integrales
- [3] Kern, M. (2003). Problemes inverses. cours de l'Ecole Supérieure d'Ingénierie Léonard de Vinci.
- [4] Kress, R.(1999), Linear Integral Equations, 2nd edition, Springer-Verlag, New York.
- [5] Kertiou, Y. (2017). Sur la Résolution numérique des équations intégrales.
- [6] Terbeche,M.(2002) . Constantin, Sacaliuc and Galina,Vornicescu, Solution of some singular integral equation, Bull. Sci. math. 126 p 379.
- [7] Rahmoune, A. (2018). équations intégrales linéaires et non linéaires. Analyse et techniques de résolution, p.44-46.

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

- $C[a, b]$  : Ensemble des fonctions continues sur  $[a, b]$ .
- $\Omega$  : un ouvert de  $R^2$ .
- $f$  : Terme libre dans l'équation intégrale
- $A$  : Opérateur intégral.
- $\mathbb{C}$  : Ensemble des nombres complexes.
- $\langle u, v \rangle$  : Produit scalaire de  $u$  et  $v$ .
- $f_n$  : Suite d'approximation de  $f$
- $I$  : Opérateur identité
- $G$  : Ensemble mesurable au sens de Jordan
- $\bar{G}$  : Fermé d'un ensemble  $G$  (adhérent).
- $\partial G$  : Frontière de  $G$ .
- $K(x, t)$  : Noyau de l'équation intégrale.
- $L^{-1}$  : Inverse de l'opérateur intégral  $= (I - A)^{-1}$ .
- $P, P_n$  : Opérateurs de projection.
- $\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels

## ملخص:

طرق الحلول العددية للمعادلات التكاملية تلعب دورا هاما في مختلف المجالات العلمية والغرض من هذه المذكرة رؤية بعض الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية في الفصل الاول قدمنا تصنيف المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية، ودرسنا وجود ووحداية حل المعادلات التكاملية وفي الفصل الثاني قدمنا مختلف أساليب الحل العددي للمعادلات التكاملية.

## Résumé :

Les méthodes des résolutions numériques des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Le but de ce mémoire voire quelques méthodes numériques de résolution des équations intégrales. Dans le premier chapitre, nous avons présenté la classification des équations intégrales linéaires et non linéaires, et nous avons étudié l'existence et la singularité de la solution des équations intégrales et dans le deuxième chapitre, nous avons introduit diverses méthodes de solution numérique d'équations intégrales.

## Abstract :

The methods of numerical resolutions of integral equations play a very important role in various scientific fields. The purpose of this thesis is to see some numerical methods for solving integral equations. In the first chapter, we have presented the classification of linear and non-linear integral equations, and we have studied the existence and singularity of the solution of integral equations and in the second chapter we have introduced various methods of numerical solution of integrative equations.