



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques
Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Energétique Mécanique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
Mohamed Berbas

Le : 2020

Couche limite dynamique sur une surface plane, contrôle de l'épaisseur et de frottement pariétal

Jury :

Mr : MOUMMI Nouredine	Pr	Université de Biskra	Président
Mr : ATHMANI Rachid	Pr	Université de Biskra	Rapporteur
Mr : BENMACHICHE Abdelmoumene	MC	Université de Biskra	Examination

Année universitaire : 2019 - 2020

DÉDICACE

Merci mon dieu de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail :

A mes très chers parents.

Mon père, ce grand homme, toujours près à me tendre la main lorsqu'e j'en ai besoin, ce repère toujours présent pour guider mes pas, ce merveilleux père qui n'a jamais hésité à tout sacrifier pour ces enfants.

Maman, cette amie qui m'a donné la vie, cette déesse de douceur toujours prête à dire que tout ira bien, cette maman, qui partage avec nous les joies et les peines avec tout son cœur, aujourd'hui et du fond de mon cœur, je te dis 'MERCI Mama'.

A mes enseignants depuis ma première année scolaire

A mon encadreur, pour son soutien et son investissement dans mes recherches.

REMERCIEMENTSM

Je tiens tout d'abord à remercier « Dieu » le tout puissant.

Mes plus sincères remerciements vont également à mon Monsieur ATHMANI Rachid pour la qualité de son encadrement et ses encouragement qui ont été indispensables pour garder le moral dans les moments les plus compliqués, pour ses brillantes intuitions et pour l'optimisme qu'il a su me transmettre.

Je souhaite également remercier les membres du jury BENMACHICHE Abdelmoumene-Hakim et MOUMMI Nouredine qui ont bien voulu consacrer une partie de leur temps à ma mémoire.

Un grand merci à toute ma famille, et surtout à mes parents, mes frères et à mes sœurs, merci pour votre soutien inconditionnel.

Mohamed Berbas

Dédicaces	<i>i</i>
Remerciements	<i>ii</i>
Sommaire	<i>iii</i>
Nomenclature	<i>iv</i>
Introduction Générale	1

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS

I.1 CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS	2
I.1.1 Critères géométriques et cinématiques	2
I.1.1.1 Ecoulements internes et externes	2
I.1.1.2 Ecoulement permanent et transitoire	2
I.1.1.3 Ecoulement bidimensionnel et unidimensionnel	2
I.1.1.4. Ecoulement rotationnels et irrotationnels	3
I.1.2 Critères physiques	3
I.1.2.1 Ecoulement parfaits	3
I.1.2.2 Ecoulement compressible et incompressible	4
I.1.2.3 Ecoulement laminaire et turbulent	4
I.2 Dynamique des fluides	5
I.2.1 Viscosité	5
I.2.2 Le frottement	6
I.2.2.1 définition	6
I.2.2.2 les différents types de frottement	6
I.2.2.3 frottement statique et cinétique	7
I.2.2.4 coefficients de frottement	7

I.3 Couche limite	7
I.3.1 Concept de la couche limite	7
I.3.2 Définition de la couche limite	8
I.3.3 Description de la couche limite	9
I.3.4 Paramètres caractéristiques de couche limite	10
I.3.4.1 Epaisseur de la couche limite	10
I.3.4.2 Epaisseur de déplacement de la couche limite	11
I.3.4.3 Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite	12
I.3.4.4 Facteur de forme (H)	12
I.3.4.5 Epaisseur d'énergie cinétique de la couche limite	12
CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME	
II.1 Définition du problème	13
II.2 Mise en équations	13
II.2.1 Equation de la continuité	13
II.2.2 Equation de quantité de mouvement	13
II.2.3 Développement de l'équation de continuité	14
II.2.4 Développement de l'équation de quantité de mouvement	14
II.3 Conditions aux limites	19
CHAPITRE III : PROGRAMMATION ET RESOLUTION DU PROBLÈME	
III.1 Solution exacte des équations de la couche limite	21
III.2 Les paramètres et grandeur caractéristiques du problème	24
III.3 Méthode de Runge –Kutta	25

III.3.1 Formules de type Runge –Kutta	25
III.3.1.1. Formule d'ordre 2	25
III.3.1.2 Formule d'ordre 4	26
III.4 Application de la méthode de Runge –Kutta dans notre cas	26
III.5 les Conditions aux limites	29
III.6 Présentation de l'organigramme de calcul	30
III.7 Couche limite sur une plaque plane avec contrôle	31
III.7.1 Aspiration et soufflage avec un profil de vitesse Parabolique	31
 CHAPITRE IV : Résultats et discussions	
IV.1 INTRODUCTION	35
IV.2 INTREPRETATION DES RESULTATS	35
CONCLUTION GENERALEAL	55

*N*OMENCLATURE

	Lettre Latine	Unité
p	Pression	N/m^2
t	Temps	S
$U.V$	Composantes de vitesse	m/s
L	Longueur de la plaque	M
ν	Viscosité cinématique	m^2/S
μ	Viscosité dynamique	Kg/ms
ρ	Masse volumique	kg/m^3
δ	Epaisseur de la couche limite	M
δ_1	Epaisseur de d'énergie	$/$
F	Fonction de Blasius	
δ_2	Epaisseur de quantité de mouvement	$/$
δ_3	Epaisseur de d' entalpie	$/$
H	Facteur de forme	$/$
Ψ	Fonction de courant	m^2/S
Φ	Fonction potentielle des vitesses	m^2/S
Opérateurs		
Δ	Opérateur différentiel	$/$
$\partial/\partial t$	Dérivée partielle par rapport au temps	$/$
d/dt	Dérivée totale	$/$
Nombres sans dimensions		
Re	Nombre de Reynolds	$/$
Eu	Nombre d' Euler	$/$
C_f	Coefficient de frottement local	$/$

INTRODUCTION GENERALE

La mécanique des fluides est intéressante comme science fondamentale mais elle donne aussi lieu à de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénieur. Il importe, très souvent, de comprendre la structure de l'écoulement et la masse volumique dans le milieu fluides. Dans les applications technologiques, le fluides 'écoule autour des corps solides et la connaissance des distributions de pression et de vitesse au voisinage des parois est particulièrement utile.

La mécanique des fluides peut être divisée en deux grandes catégories : la statique des fluides ou hydrostatique, qui modélise les fluides au repos, et la dynamique des fluides, qui étudie les fluides en mouvement.

Le concept de la couche limite est introduit par Prandtl qui montre que les écoulements visqueux, pour la plupart, peuvent être découpés en deux zones :

- Une zone proche à la paroi où les forces visqueuses et d'inertie sont du même ordre de grandeur ; appelée couche limite.
- La région extérieure où les forces visqueuses sont négligeables devant les forces d'inerties appelée écoulement extérieur.

L'objectif de notre travail est d'étudier numériquement la couche limite dynamique sur une surface plane, contrôle de l'épaisseur et de frottement pariétal. Le problème considéré est bidimensionnel, et que le fluide est incompressible.

Pour arriver à l'objectif suscité on propose d'entamer cette étude suivant le plan de travail ci – dessous :

- ❖ Dans le premier chapitre on présente des généralités sur écoulements et quelques propriétés puis la notion de la couche limite.
- ❖ Le deuxième chapitre comprend la définition du problème et le développement d'équation gouverne le phénomène.
- ❖ Le troisième chapitre est réservé à la formulation mathématique du problème ainsi que méthode de résolution adopté.

Les résultats obtenus à partir du programme de calcul et leurs interprétations dans le Quatrième chapitre.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS

I.1 CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS

Dans cette section, nous allons définir les différents types d'écoulements, pour les classer, il nous faut adopter des critères qui vont être de nature physique, géométrique et cinématique.

I.1.1 Critères géométriques et cinématiques

Selon ces deux critères, on classe les écoulements comme suit :

I.1.1.1 Ecoulements internes et externes

Les écoulements externes représentent tous les écoulements autour des objets, par exemple : ailes, hélices, pales ... etc.

Les écoulements internes se font à l'intérieur d'un conduit et sont limités par des parois fixes ou mobiles.

I.1.1.2 Ecoulement permanent et transitoire

On dit qu'un écoulement est permanent (ou stationnaire) si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps, comme la pression, la masse volumique la vitesse,...etc.

On dit qu'un écoulement transitoire (ou instationnaire) si les variables décrivant le mouvement sont dépendant du temps.

I.1.1.3 Ecoulement bidimensionnel et unidimensionnel

Dans certains cas particuliers intéressants, le problème réel tridimensionnel peut ramener à l'étude d'un écoulement théorique bidimensionnel ou unidimensionnel. C'est pour ça, on peut considérer l'écoulement de grande étendue suivant l'axe des (Z) comme un écoulement bidimensionnel suivant les axes des (X) et des (Y), et toutes les grandeurs cinématiques ne dépend alors que de deux variables d'espace .[1]

I.1.1.4 Ecoulements rotationnels et irrotationnels

On dit de l'écoulement d'un fluide qu'il est irrotationnel si les vitesses angulaires des particules sont nulles. Dans ce type d'écoulement, toute particule de fluide se déplace en une succession de mouvements translation pure.

Dans un écoulement irrotationnel, la vitesse \vec{v} dérive d'un potentiel des vitesses φ :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{I.1})$$

En coordonnées cartésiennes, on écrit encore la vitesse \vec{v} comme :

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (\text{I.2})$$

Suivant la définition de l'écoulement irrotationnel, on peut écrire :

$$\vec{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.3})$$

D'où

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{I.4})$$

On dit que l'écoulement d'un fluide est rotationnel lorsque les particules fluides subissent une vitesse angulaire de rotation pure :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \quad (\text{I.5})$$

I.1.2 Critères physiques

I.1.2.1 Ecoulement parfaits

Les écoulements relatifs à des fluides non visqueux que nous appellerons écoulement telle étude n'est qu'une vue de l'esprit. Cependant, dans certaines régions d'un écoulement réel, il est possible de modéliser le comportement du fluide réel par celui d'un fluide parfait.

I.1.2.2 Ecoulement compressible et incompressible

Ce qui différencie un écoulement compressible d'un écoulement incompressible, c'est le fait que des petites variations de masse volumique, de pression et de vitesse se propagent à l'intérieur du fluide à une certaine vitesse qui est la célérité du son. [2]

I.1.2.3 Ecoulement laminaire et turbulent

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. L'une des premières analyses de la transition d'un régime laminaire vers la turbulence basée sur des observations d'écoulements en conduite cylindrique effectuées par Reynolds en 1883. Une étude systématique du régime d'écoulement a été réalisée en fonction des différents paramètres intervenant dans le problème : la masse volumique du fluide, la viscosité, la géométrie de la conduite,....etc. Reynolds a montré que la transition du régime laminaire au régime turbulent ne dépend pas séparément de chacun des paramètres mais d'une seule grandeur les regroupant tous : le nombre de Reynolds. [3]

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad (\text{L.6})$$

Où:

V : La vitesse moyenne de l'écoulement; [V] en (m/s).

L : La longueur caractéristique; [L] en (m).

Le nombre de Reynolds est une grandeur sans dimension représente le rapport entrées forces d'inertie et les forces de la viscosité, et caractérise l'apparition de la turbulence. [4]

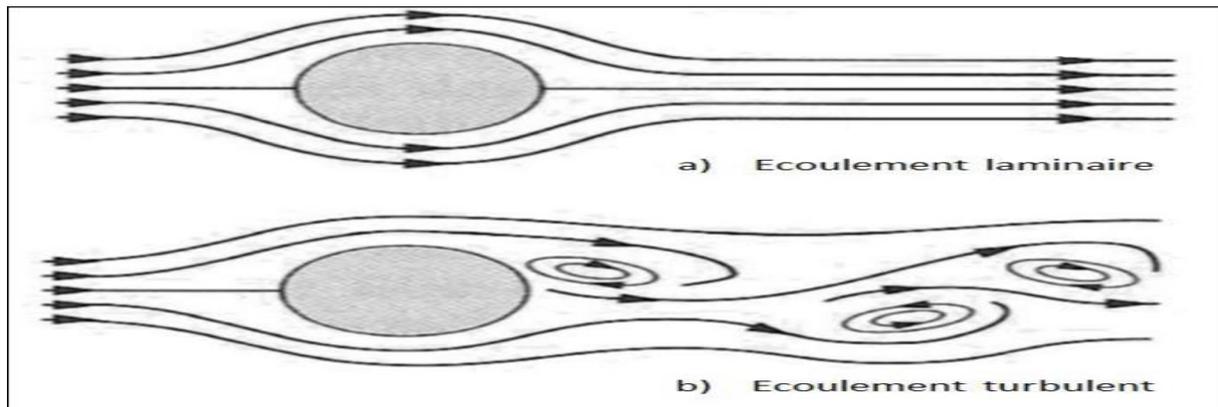


Fig I.1 : a/ Ecoulement laminaire b/ Ecoulement turbulent.

I.2 Dynamique des fluides

I.2.1 Viscosité

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Pour préciser cette propriété de façon plus quantitative, nous considérons l'expérience de "Couette" en écoulement plan. Telle qu'elle est schématisée à la **figure (1.1)**, cette expérience concerne un fluide visqueux disposé entre deux plans parallèles distants d'une hauteur S . Elle consiste à déplacer relativement à l'autre, l'une des deux parois d'un mouvement permanent de translation rectiligne dans son propre plan. Pour simplifier, on suppose la paroi inférieure fixe et la paroi supérieure mobile à la vitesse U_0 .

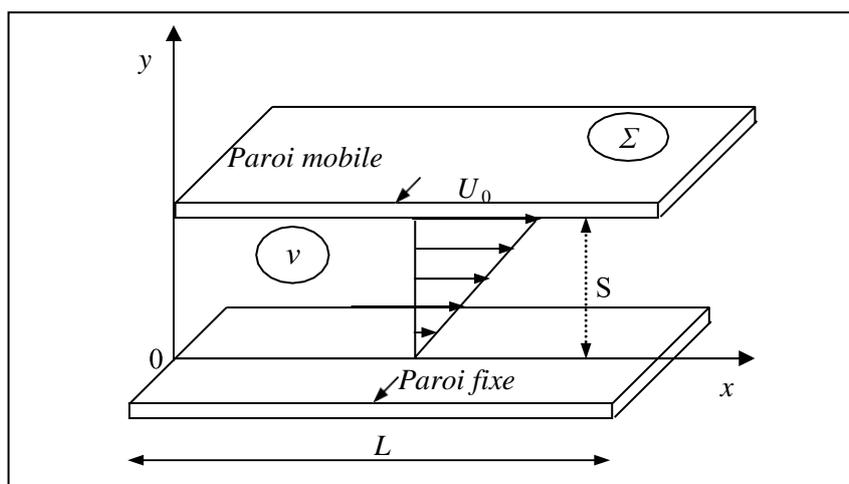


Fig I.2 : schéma de l'écoulement de couette plan.

En l'absence de toute autre force extérieure (gravité, pression), le mouvement du fluide résulte exclusivement du déplacement du plan mobile. [5]

En régime permanent, l'expérience révèle, pour certains fluides, que le profil de vitesses qui s'établit entre les deux plaques est linéaire. En outre pour maintenir le mouvement uniforme de la paroi supérieure, il faut exercer sur une aire Σ de celle-ci une force tangentielle dont le module F est tel que :

$$F/\Sigma \propto u_{\infty}/S$$

En désignant par μ le coefficient de proportionnalité appelé viscosité dynamique du fluide, on écrira :

$$\frac{F}{\Sigma} = \mu \frac{u_0}{S}$$

Cette relation s'applique bien aux fluides usuels. Elle est à l'origine d'un comportement rhéologique que nous qualifierons de newtonien. On introduit également le coefficient de viscosité cinématique :

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

I.2.2 Le frottement

I.2.2.1 définition

Le frottement est un phénomène qui produit à la surface de deux corps en contact et en interaction ou en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Le frottement provient des interactions entre les aspérités microscopiques existant à la surface des corps en contact. Dans tous les cas, il engendre une résistance au mouvement, provoquant la création de contraintes mécaniques superficielles et la dissipation de chaleur. En général, il entraîne l'usure plus ou moins rapide des corps en contact, et par conséquent la modification de leurs surfaces.

I.2.2.2 les différents types de frottement

Lorsque deux solides A et B sont en contact, peut distinguer deux types de frottement : si A et B glissent l'un par rapport à l'autre, il apparaît un frottement de glissement ; lorsque A et B on parle de frottement de roulement. [6]

Quand un corps se déplace dans un fluide, on parle de frottement visqueux. On peut parler aussi du frottement des particules fluides entre elles.

I.2.2.3 frottement statique et cinétique

Le coefficient de frottement, noté f , est une grandeur exprimant l'intensité de l'interaction entre deux corps en contact. Lorsque deux corps sont en contact, mais pas en mouvement relatif, le frottement est dit statique. Le coefficient de frottement est alors caractéristique de l'état des surfaces en interaction, mais pratiquement indépendant de l'air de la surface de contact entre les deux solides lorsque les deux corps sont mis en mouvement, le frottement est dit cinétique.

I.2.2.4 coefficients de frottement

Dans une couche limite bidimensionnelle de fluide « Newtonien » la cession en un point de la paroi est donnée par $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$.

Pour définir un coefficient sans dimensions caractérisant le frottement à la paroi on divise la cession par la pression dynamique dans l'écoulement libre. on définit ainsi le coefficient de frottement $C_f = \frac{\tau_p}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}}$, encore appelé coefficient de « DARCY ». [7]

Comme $\frac{\partial u}{\partial y}$ varie le long de la paroi, on est conduit à définir un coefficient de frottement moyen C_f Sur une plaque. l'épaisseur de la couche limite augmente progressivement le long de la plaque ce qui entraîne une diminution de coefficient de frottement local quand on se déplace vers l'aval.

I.3 Couche limite

I.3.1 Concept de la couche limite

Le concept d'une couche limite est introduit par Prandtl, un aérodynamicien allemand en 1904. Avant Prandtl, la science de la mécanique des fluides est développée en deux directions différentes. Hydrodynamique théorique représentée par équations d'Euler (publiées par Leonhardt Euler en 1755) qui sont établies pour étudier le mouvement des fluides supposés non visqueux. Mais ces résultats donnent des contradictions avec plusieurs observations

Expérimentales. Ce qui a obligé les spécialistes dans ce domaine de développer des nouvelles approches basées sur les résultats expérimentaux.

Les résultats de ces travaux ont donné des nouvelles équations qui décrivent le Mouvement d'un fluide visqueux (les équations de Navier Stokes, développées par Navier, 1827, et indépendamment par Stokes, 1845).

Prandtl a trouvé que dans plusieurs écoulements visqueux on peut diviser l'écoulement en deux régions. L'une, loin de la paroi, est contrôlée par les forces d'inertie et l'autre, près de la paroi, est dominée par la viscosité. Dans la région loin de la paroi, le fluide peut être traité comme un fluide non visqueux car la viscosité est presque négligeable. Donc ces résultats ont donné la naissance du concept d'une couche limite, qui a permis de faciliter la résolution des équations de Navier-Stokes, enfin le concept d'une couche limite donne la naissance à la mécanique des fluides moderne.

Près de la paroi les forces de viscosité sont très importantes par contre loin de la paroi on trouve que les forces d'inertie qui sont très importantes. Par conséquent le nombre de Reynolds (qui représente le rapport entre les forces d'inertie et de viscosité) a un rôle très important pour caractériser la couche limite.

I.3.2 Définition de la couche limite

La couche limite est la zone d'interface entre un corps et le fluide environnant lors d'un mouvement relatif entre les deux, conséquence de sa viscosité. Elle est un élément important en mécanique des fluides, (aérodynamique, hydrodynamique), en météorologie, en océanographie, etc.

La définition même de la couche limite réside dans le fait qu'elle représente la région de l'écoulement où les effets visqueux sont aussi importants que les effets inertiels (en termes d'ordre de grandeur). Ce n'est en effet pas le cas loin de la paroi, où l'écoulement est alors dit « d'Euler », et où les effets visqueux ne se font pratiquement pas ressentir. Un fluide parfait est par définition non conducteur et à ses coefficients de Lamé nuls (c'est-à-dire pas de viscosité). On définit en général l'épaisseur de la couche limite telle que :

$$U(\delta(x)) = 0.99 u_e$$

Avec :

u_e : La vitesse uniforme de l'écoulement sans obstacle.

$\delta(x)$: L'épaisseur de la couche limite en fonction de x .

Le profil de vitesse au sein de la couche limite dépend de sa nature laminaire ou turbulente (**figure I.3**). L'endroit où se produit la transition entre l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent dépend du nombre de Reynolds et de la géométrie de l'écoulement (profil) [8].

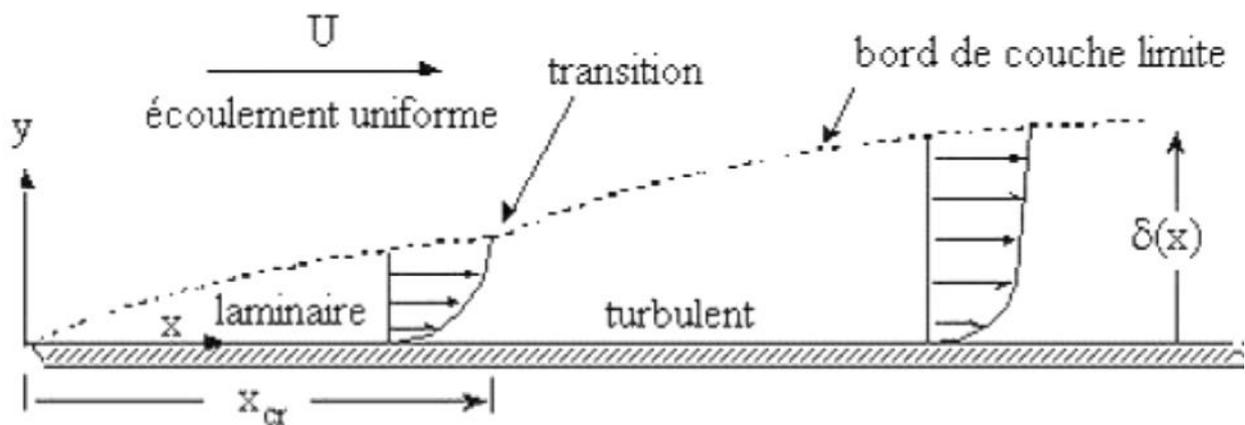


Fig I.3 : Écoulement de couche limite sur une plaque plane

I.3.3 Description de la couche limite

Lorsqu'un fluide réel s'écoule le long d'une paroi supposée fixe, les vitesses sur la paroi sont nulles ; à l'infini, loin de l'obstacle, elles sont égales à la vitesse de l'écoulement non perturbé. Sur une normale à la paroi la vitesse doit donc dans tous les cas varier entre 0 et un maximum. La loi de variation dépend de la viscosité du fluide qui induit un frottement entre les couches voisines : la couche la plus lente tend à freiner la couche la plus rapide qui, en retour, tend à l'accélérer.

Dans ces conditions, une forte viscosité égalise au maximum les vitesses. Au contraire, si le fluide est peu visqueux, les différentes couches sont beaucoup plus indépendantes : la vitesse à l'infini se maintient jusqu'à une courte distance de l'obstacle et il y a une variation plus forte des vitesses dans la petite épaisseur de la couche limite.

Dans le premier cas, il faut utiliser les équations générales du fluide visqueux. Dans le second, on peut utiliser dans la couche limite des équations simplifiées complétées par des résultats expérimentaux. Les équations, également plus simples, du fluide parfait appliquées au-delà de la paroi « engraisée » par la couche limite fournissent les conditions aux limites pour le calcul. En fait, ce n'est pas la viscosité elle-même qui intervient. Comme toujours en mécanique des fluides, c'est un nombre sans dimension qui caractérise le phénomène : le nombre de Reynolds. Celui-ci décrit le rapport des forces liées à la vitesse aux forces de frottement. Ainsi, au lieu d'augmenter la viscosité, on peut obtenir un phénomène semblable en diminuant la vitesse ou les dimensions de l'obstacle. [9]

I.3.4 Paramètres caractéristiques de couche limite

I.3.4.1 Epaisseur de la couche limite

La couche limite est une région à la surface du solide étudié dans laquelle les forces de viscosité sont très importantes. La distribution de l'épaisseur de la couche limite, δ est définie comme étant la distance entre la surface et le point dans lequel la vitesse est égale à 99% de la vitesse initiale, c'est difficile de mesurer l'épaisseur de la couche limite, mais théoriquement elle est donnée par l'équation :

$$\delta = x \sqrt{\frac{1}{Re_x}} \quad (I.7)$$

Avec :

$$Re_x = \frac{\rho u x}{\mu} \quad (I.8)$$

Donc δ est proportionnelle à \sqrt{x} : la forme de la couche limite est parabolique.

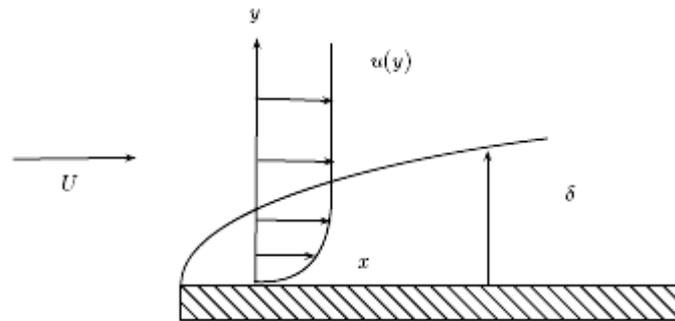


Fig I.4 : couche limite le long d'une placée dans un champ de vitesse uniforme.

I.3.4.2 Epaisseur de déplacement de la couche limite

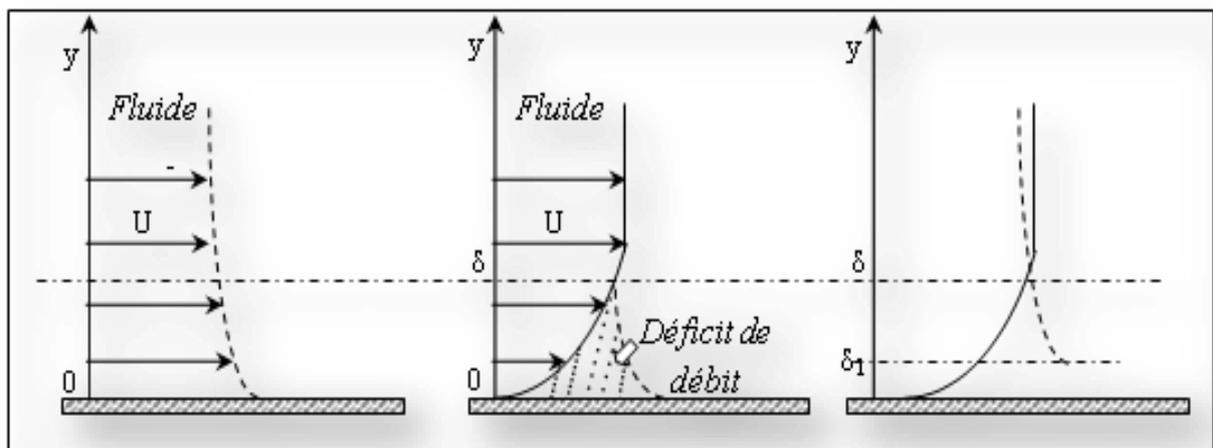


Fig I.5 : Déficit de débit et épaisseur de déplacement. [10]

L'influence retardatrice de la couche limite crée un défaut de débit masse, comparé à celui qui existerait dans l'écoulement libre, et qui correspond à l'aire hachurée sur la fig (I.5).

Le débit volumique qui manque par unité de profondeur est :

$$q_v = \int_0^{\delta} (u_{\infty} - u)dy \tag{I.9}$$

Ce défaut est équivalent à celui qu'on obtiendrait en écoulement non visqueux en déplaçant la paroi dans la direction du fluide d'une quantité δ_1 telle que $q_v = u_{\infty}\delta_1$. De façon que les aires hachurées sur la fig (I.5) soient égales.

On a donc :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \text{épaisseur de déplacement}$$

Cette épaisseur pourrait aussi être appelée. L'écoulement sain en fluide non visqueux peut être calculé à partir de l'obstacle de cette épaisseur.

I.3.4.3 Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite

La perte de quantité de mouvement dans la couche limite, par rapport à l'écoulement potentiel, est traduite par (δ_2) qu'est définie comme :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy \quad (\text{I.10})$$

I.3.4.4 Facteur de forme (H)

Le facteur de forme caractérise la forme du profil de vitesse dans la couche limite et il intervient dans l'équation intégrale de « Von karman » et dans l'analyse de l'écoulement séparé, **H** est définie comme suit :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (\text{I.11})$$

I.3.4.5 Epaisseur d'énergie cinétique de la couche limite

Par analogie aux définitions précédentes cette épaisseur est définie à partir de la réduction de débit d'énergie cinétique par unité de profondeur créée par la couche limite cette réduction est :

$$\int_0^\delta \rho \left(\frac{u_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right) u dy = \rho \frac{u_\infty^3}{2} \delta_3 \quad (\text{I.12})$$

D' où :

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left[1 - \left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2\right] dy = \text{épaisseur d'énergie cinétique}$$

Cette épaisseur est fonction du taux de dissipation d'énergie provoquée par les forces de viscosité dans la couche limite.

CHAPITRE II
FORMULATION MATHÉMATIQUE
DU PROBLÈME

II.1 Définition du problème

Notre travail consiste à l'étude de la couche limite laminaire dans un écoulement bidimensionnel stationnaire sans gradient de pression autour d'une plaque plane, le but de cette étude est de déterminer les caractéristiques dynamiques de l'écoulement à savoir : les composantes de vecteur vitesse (u, v), le coefficient de frottement Pariétal, la épaisseur.

II.2 Mise en équations

Les équations qui vont gouverner le phénomène de la couche limite se déduits des équations de « Navier-Stokes » avec l'introduction des hypothèses de « Prandtl », ainsi que le gradient de pression longitudinal nul.

Comme il est indiqué à plusieurs reprises, la vitesse du fluide s'annule à la paroi solide et de passage de cette vitesse nulle à la vitesse de l'écoulement externe (U_∞) s'effectue sur une petite distance (δ) à l'intérieur de la couche limite.

Les équations qui gouvernent ce type de problème sous leur forme différentielle sont :

II.2.1 Equation de la continuité

Elle a la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{q}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

II.2.2 Equation de quantité de mouvement

Elle s'écrit sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.2})$$

Avac :

ρ : La masse volumique du fluide. [Kg/m³]

μ : La viscosité dynamique du fluide. [Kg/ms]

\vec{q} : Le vecteur de la vitesse locale des particules en écoulement [m/s]

P : la pression. [Pa]

II.2.3 Développement de l'équation de continuité

Pour un régime stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). L'équation (II.1) devient :

$$\nabla(\rho\vec{q}) = 0 \quad (\text{II.3})$$

Pour l'écoulement bidimensionnel, L'équation (II.3) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Le fluide est incompressible ($\rho = Cste$)

$$\rho \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II.5})$$

(II.5) est la forme de l'équation de continuité forme différentielle adaptée à notre cas.

II.2.4 Développement de l'équation de quantité de mouvement

Le régime stationnaire induit que ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et L'équation (II.2) s'écrit :

$$\rho \left(u \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.6})$$

Projetons cette équation sur les axes des coordonnées on aura :

❖ Sur (ox) :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II.7})$$

❖ Sur (oy) :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (\text{II.8})$$

Nous allons maintenant effectuer une estimation a priori des termes qui apparaissent dans les équations du mouvement. Pour cette estimation, nous utiliserons deux échelles caractéristiques de l'écoulement :

✚ δ : l'épaisseur de la couche limite.

✚ L : une longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement.

Nous supposons, en outre, que la couche limite est mince et telle que :

$\frac{\delta}{L} \ll 1$. Considérons à présent l'équation de continuité. Si (\mathbf{u}) désigne une vitesse axiale typique et (\mathbf{v}) une vitesse transversale typique, les gradients $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ peuvent être estimés par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u}{L}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{V}{\delta} \quad (\text{II.9})$$

Pour que l'équation de continuité soit satisfaite, ces deux termes doivent être du même ordre :

$$\frac{V}{\delta} \approx \frac{u}{L} \quad (\text{II.10})$$

Et dans ces conditions l'ordre de grandeur de la vitesse transversale est donnée par :

$$v \approx u \frac{\delta}{L} \quad (\text{II.11})$$

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction (X)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II.12})$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont respectivement :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{U^2}{L} & \left(\frac{U\delta}{L}\right) \frac{U}{\delta} & \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} & \nu \frac{U}{L^2} & \nu \frac{U}{\delta^2} \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array}$$

Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur $\left(\frac{U^2}{L}\right)$. Le quatrième terme est beaucoup plus petit que le cinquième.

$$\frac{(4)}{(5)} \approx \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{II.13})$$

On peut donc raisonnablement négliger le quatrième terme, mais il faut garder le cinquième terme (sinon les effets de viscosité seraient totalement absents de l'équation simplifiée et auraient à nouveau une équation d'Euler décrivant le mouvement d'un fluide idéal). Les deux premiers termes et le cinquième terme doivent donc avoir le même ordre de grandeur : (1) et (2) \sim (5), soit :

$$\frac{U^2}{L} \approx \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (\text{II.14})$$

Cette condition fixe le rapport de l'épaisseur (δ) à la longueur L :

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \approx \frac{v}{UL} = \frac{1}{Re_L} \quad (\text{II.15})$$

Soit :

$$\delta = \frac{L}{(Re_L)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{II.16})$$

Ainsi pour que le rapport $\left(\frac{\delta}{L}\right)$ soit petit devant (1), il faut que le nombre de Reynolds basé sur la distance (L) soit suffisamment grand : $\left(\frac{\delta}{L} \ll 1\right)$ si $Re_L \gg 1$.

Une conséquence de la relation (II.16) est que les équations de la couche limite ne sont pas strictement valables près de bord d'attaque. En toute rigueur, il faudrait utiliser dans cette région les équations de « Navier-Stokes » complètes.

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction transversale :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (\text{II.17})$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont ici :

$$\left(u \left(\frac{\delta}{L^2}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{U\delta}{L}\right)^2 \frac{L}{\delta}\right) \quad \left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta Y}\right) \quad \left(\nu \frac{U\delta}{L^3}\right) \quad \left(\nu \frac{U\delta}{L\delta^2}\right)$$

Pour que l'équilibre des termes qui composent cette équation puisse être réalisé, le gradient de pression transverse doit avoir comme ordre de grandeur :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta Y}\right) \approx \left(u^2 \frac{\delta}{L^2}\right) \quad (\text{II.18})$$

Alors que le gradient de pression longitudinal a comme ordre de grandeur :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} \right) \approx \left(\frac{u^2}{L} \right) \quad (\text{II.19})$$

Le gradient de pression dans la direction transversale est inférieur d'un ordre de grandeur à celui qui existe dans la direction axiale :

$$\frac{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta Y} \right)}{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} \right)} \approx \left(\frac{\delta}{L} \right) \ll 1 \quad (\text{II.20})$$

Dans une couche limite, la pression ne varie pratiquement pas dans la direction transversale, et l'équation de quantité de mouvement suivant (y) peut être remplacée par :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow P = P(x) \quad (\text{II.21})$$

Considérons à présent l'écoulement externe (l'écoulement à l'extérieur de la couche limite)

Dans cette région, il n'y a pas de gradient important dans la direction transversale et l'équation de conservation de quantité de mouvement projetée suivant la direction des (x) devient :

$$u_{\alpha} = \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{II.22})$$

D'après (II.10) la pression ne dépend que de (x) et les dérivées partielles sont remplacées par des dérivées ordinaires :

$$u_{\infty} = \left(\frac{du_{\alpha}}{dx} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \right) \quad (\text{II.23})$$

L'intégration de (II.12) indique simplement que la pression et la vitesse sont liées, à l'extérieur de la couche limite, par l'équation de « Bernoulli » :

$$P + \frac{\rho q^2}{2} = \text{Cste} \quad (\text{II.24})$$

En définitive la couche limite peut être décrite par le système d'équation suivant :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{array} \right) \quad (\text{II.25})$$

II.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour la situation envisagée ont pour forme :

$$U(x, 0) = 0, V(x, 0) = 0, U(x, \infty) = U_\infty(x) = C^{te}$$

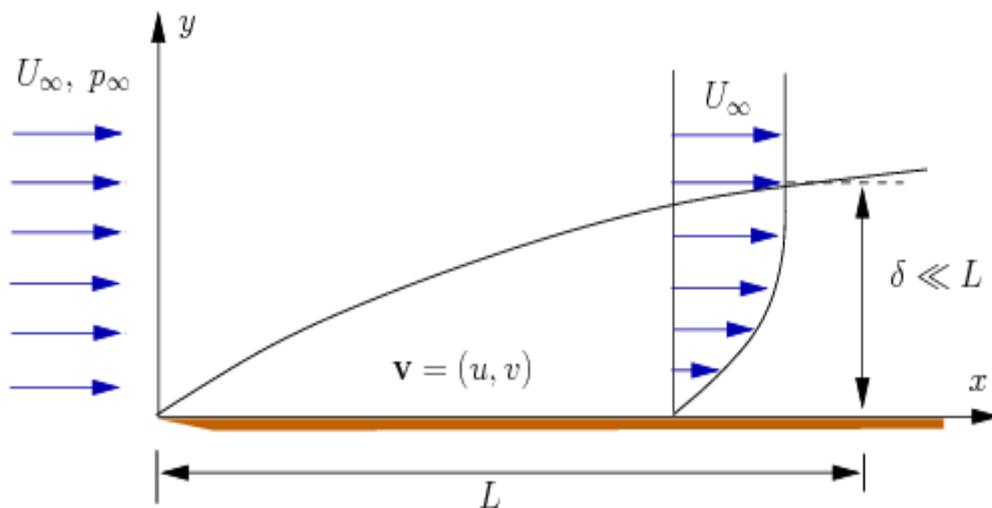


Fig II.1 : Ecoulement de couche limite sur une plaque plane.

Les deux premières conditions expriment que la vitesse s'annule à la paroi c'est –à-dire que les particules fluide adhèrent à la paroi. La troisième condition indique que la vitesse à grande distance de la paroi est égale à la vitesse à l'extérieure de la couche limite. (vitesse de l'écoulement extérieur ou les effets visqueux sont négligeables).

CHAPITRE III
PROGRAMMATION ET RESOLUTION
DU PROBLEME

III.1 Solution exacte des équations de la couche limite

Nous considérons ici le problème d'une plaque plane placée dans un écoulement uniforme de vitesse constant. Dans cette situation, le gradient de pression axial est nul et les équations de la couche limite deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III.2})$$

Il est très commode de rechercher une solution de la forme :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{III.3})$$

L'équation de continuité est ainsi automatiquement satisfaite, mais l'équation de la quantité de mouvement fait apparaître des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (\text{III.4})$$

Les trois conditions aux limites écrites pour Ψ sont :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \infty) = u_\infty$$

La deuxième condition peut être transformée en notant que :

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, 0) dx = \Psi(x, 0) - \Psi(0, 0) = 0 \quad (\text{III.5})$$

Si l'on choisit $\Psi(x, y) = 0$, on déduit la nouvelle condition $\Psi(x, 0) = 0$; (le choix $\Psi(0, 0) = 0$ ne diminue pas le degré de généralité, car Ψ est définie à un constant près).

Le problème considéré ici ne possède pas d'échelle propre et il est donc naturel de rechercher des solutions auto-similaires pour les profils de vitesse dans chaque section ne deviennent pas identiques lorsqu'on rapporte l'ordonnée à l'épaisseur locale de la couche limite. Il s'agit donc de chercher s'il est possible d'écrire :

$$\frac{u(x, y)}{u_\infty} = \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (\text{III.6})$$

Où ϕ serait la même fonction « universelle » pour toutes les abscisses x .

Nous savons déjà que $\delta \approx \left(\frac{vx}{u_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$ et on peut donc utiliser comme variable de similitude :

$$\eta = y \left(\frac{u_\infty}{vx}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.7})$$

D'autre part, si la vitesse axiale est telle que : $u = u_\infty \phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$ alors la fonction de courant devra avoir pour forme : $\Psi(x, y) = u_\infty \delta f(\eta)$ la fonction f qui apparaît dans cette expression doit être telle que $f'(\eta) = \phi$.

En définitive, la recherche des profils de similitude revient donc à chercher Ψ sous la forme :

$$\Psi(x, y) = (u_\infty vx)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad (\text{III.8})$$

Pour résoudre l'équation (II.4), nous devons maintenant déterminer les dérivées successives de Ψ par rapport à x, y . notons d'abord que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} y \left(\frac{u_\infty}{vx^3}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{u_\infty}{vx}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{y}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\infty} v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} f + (u_{\infty} v x)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial x} f' = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\infty} v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (f - \eta f')$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = (u_{\infty} v x)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial y} f' = u_{\infty} f'$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = u_{\infty} f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} u_{\infty} f''$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = u_{\infty} f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\infty} f'' \left(\frac{u_{\infty}}{v x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = u_{\infty} f''' \left(\frac{u_{\infty}}{v x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\infty} f''' \frac{u_{\infty}}{v x}$$

Substituons maintenant ces expressions dans l'équation (II.4) reproduite ci-dessous pour plus de commodité :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

On obtient :

$$u_{\infty} f' \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{u_{\infty} \eta}{x} f'' - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\infty} v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (f - \eta f') u_{\infty} f'' \left(\frac{u_{\infty}}{v x} \right)^{\frac{1}{2}} = v \frac{u_{\infty}^2}{v x} f''' \quad (\text{III.9})$$

Après simplification, on obtient l'équation cherchée de « Blasius » :

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (\text{III.10})$$

III.2 Les paramètres et grandeur caractéristiques du problème

Le champ de vitesse est donné par :

$$U(x, y) = u_{\infty} f'(\eta)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\infty} \nu}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta f' - f)$$

On peut définir aussi :

- ❖ L'épaisseur de la couche limite pour une plaque plane :

$$\delta = 5 \cdot \left(\frac{\nu x}{u_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- ❖ La contrainte tangentielle :

$$\tau = \mu u_{\infty} \left(\frac{u_{\infty}}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} f''(\eta)$$

- ❖ Le coefficient de frottement :

$$c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2}$$

III.3 Méthode de Runge –Kutta

Pour résoudre ce problème on utilise la méthode de Runge –Kutta

III.3.1 Formules de type Runge –Kutta

Les formules de type Runge –Kutta sont parmi les plus utilisées puisque :

- ✚ Elles sont faciles à programmer
- ✚ Elles sont en général stables
- ✚ La largeur du pas peut être modifiée sans difficulté
- ✚ La connaissance de la valeur initiale suffit à intégrer l'équation différentielle.

Mais cette méthode demande plus de temps calcul que l'autre méthode de précision comparable.

III.3.1.1. Formule d'ordre 2

L'une des relations du type Runge –Kutta les plus simples, est obtenue en prenant les différences centrées au 1er ordre, donne :

$$y_{i+1} - y_i = \Delta t \cdot F(y_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

Mais $y_{i+1/2} = y(t_{i+1/2})$ est inconnue, aussi n'utilise – on pas la formule ci – dessus, mais la formule suivante, où $y_{i+1/2}$ exacte est remplacée par sa valeur estimée $\hat{y}_{i+1/2}$

$$\left(\begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \Delta t F(\hat{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \\ \hat{y}_{i+1/2} = y_i + \frac{\Delta t}{2} F(y_i, t_i) \\ t_{i+1/2} = t_i + \frac{\Delta t}{2} \end{array} \right)$$

C'est une formule d'ordre 2. Notons que pour évaluer y_{i+1} , f doit être calculée deux fois : une fois pour obtenir $\hat{y}_{i+1/2}$, puis une seconde fois pour obtenir y_{i+1} .

III.3.1.2 Formule d'ordre 4

La Formule du type Runge –Kutta la plus utilisée est celle d'ordre 4, appelée généralement formule de Runge –Kutta :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} \left[F(y_i, t_i) + 2F(\hat{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) + 2F(y''_{i+1/2}, t_{i+1/2}) + F(\hat{y}_{i+1}, t_{i+1}) \right] \\ \hat{y}_{i+1/2} = y_i + \frac{\Delta t}{2} F(y_i, t_i) \\ y''_{i+1/2} = y_i + \frac{\Delta t}{2} F(\hat{y}_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \\ \hat{y}_{i+1} = y_i + \Delta t F(y''_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \end{array} \right.$$

Par suite, cette formule nécessite 4 évaluations de F , ce qui prend du temps pour les fonctions compliquées.

III.4 Application de la méthode de Runge –Kutta dans notre cas

La résolution de l'équation (II.45) dans le cas d'une plaque plane où l'axe de symétrie est parallèle à l'écoulement était obtenue avec la condition à : $\eta=0$ et $\eta \rightarrow \infty$, à l'aide d'une approche numérique.

Si f , f' , et f''' sont tous connues dans une certaine ordonnée (η_i) la formule de Runge –Kutta du quatrième ordre est préférable à utiliser pour obtenir la solution à ($\eta_{i+1} = \eta_i + h$), en plus de ça, l'intégration numérique et ainsi de suite pour l'autre position.

Pour se préparer à l'utilisation de cette méthode, l'équation (II.45) doit être écrite en trois équations de premier ordre à savoir :

$$(III.11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dn} = P \\ \frac{dp}{dn} = q \\ \frac{dp}{dn} = -\frac{1}{2}fq \end{array} \right\}$$

Puis on applique les formules de Runge –Kutta pour chacune des équations précédentes, en obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 f_i = hp_i \\ \Delta_1 p_i = hq_i \\ \Delta_1 q_i = -\frac{1}{2}hf_i q_i \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_1 p_i) \\ \Delta_2 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_1 q_i) \\ \Delta_2 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_1 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_1 q_i) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_2 p_i) \\ \Delta_3 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_2 q_i) \\ \Delta_3 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_2 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_2 q_i) \end{array} \right\} \quad (III.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_4 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_3 p_i) \\ \Delta_4 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_3 q_i) \\ \Delta_4 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_3 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_3 q_i) \end{array} \right\}$$

En fin, les valeurs de f , f' , et f'' sont calculées pour (η_i) par analogie avec formules de Runge –Kutta

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 f_i + 2\Delta_2 f_i + 2\Delta_3 f_i + \Delta_4 f_i) \\ p_{i+1} = p_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 p_i + 2\Delta_2 p_i + 2\Delta_3 p_i + \Delta_4 p_i) \\ q_{i+1} = q_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 q_i + 2\Delta_2 q_i + 2\Delta_3 q_i + \Delta_4 q_i) \end{array} \right\} \quad (\text{III.13})$$

En plus de ça, l'intégration numérique de l'équation (III.1) ne peut pas démarrer pour la valeur de (η) nulle parce que q (f'') est inconnue pour cette station. Les conditions aux limites de la couche limite concernent seulement les valeurs de (f) et (f') pour $\eta=0$,

Mais une troisième condition pour (η) tend vers l'infini est inapplicable selon Runge –Kutta.

Premièrement, la condition à l'infini nous permis de limiter notre ordre d'intégration numérique à une valeur maximale (η_{\max})

La condition $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1$ devient :

$$(1 - p \leq \varepsilon) \text{ Pour : } \eta = \eta_{\max} \quad (\text{III.14})$$

Ou : ε est une valeur positive infiniment petite devant l'unité.

Au début de notre calcul on choisit une valeur arbitraire de q_0 avec une incrémentation positive $\Delta_1 q_0$ pour : $f = p = 0$ pour $\eta = 0$. L'équation (III.1) sont intégrées à l'aide des formules de Runge –Kutta jusqu' à η approche à η_{\max} . La dernière valeur calculée de p est notée p_{\max} .

Si ce point est inférieur à 1, on remplace q_0 par $q_0 + \Delta_1 q_0$ et on répète l'intégration à partir de $\eta = 0$, maintenant si le point est supérieur à 1, pour inverser la direction on prend :

$(\Delta_2 q_0 = -\Delta_1 \frac{q_0}{2})$ et on remplace q_0 par $(q_0 + \Delta_2 q_0)$. On répète avec cette valeur négative jusqu' à que ce point sera inférieur à la ligne 1. Voir fig (III.1).

Puis on inverse la direction, par : $(\Delta_3 q_0 = \Delta_2 \frac{q_0}{2})$

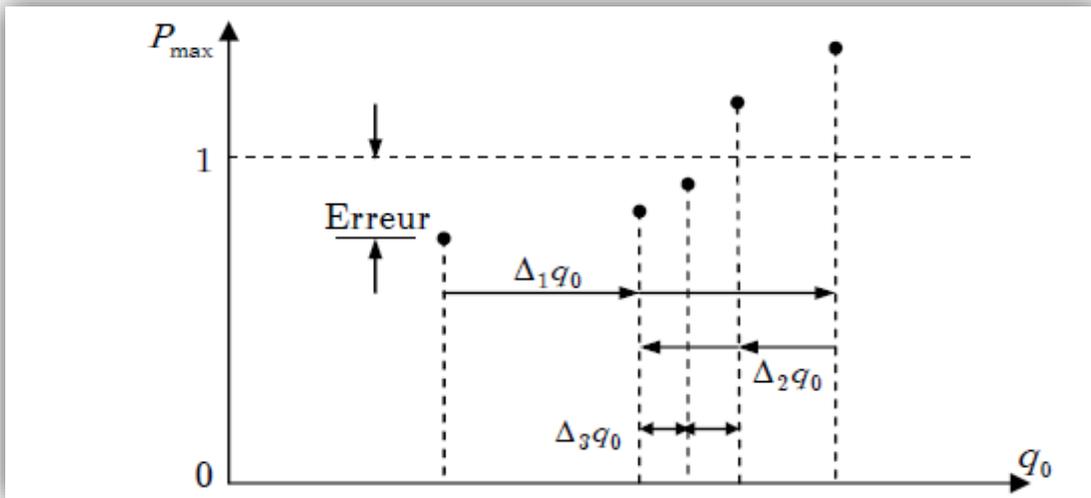


Fig III.1 : l'intervalle de variation de ΔQ_0 lors de l'itération.

On remplace q_0 par $(q_0 + \Delta_3 q_0)$ jusqu' à ce que la valeur de p_{max} sera supérieure à tant que q_0 est positive , ou p_{max} sera inférieure à 1 lorsque q_0 est négative .

A la fin de chaque itération on calcul $(1-p_{max})$ comme l'erreur indiquée sur la figure (III.1) et on vérifie si l'erreur est positive et aussi si elle est inférieure ou égale à l'estime.

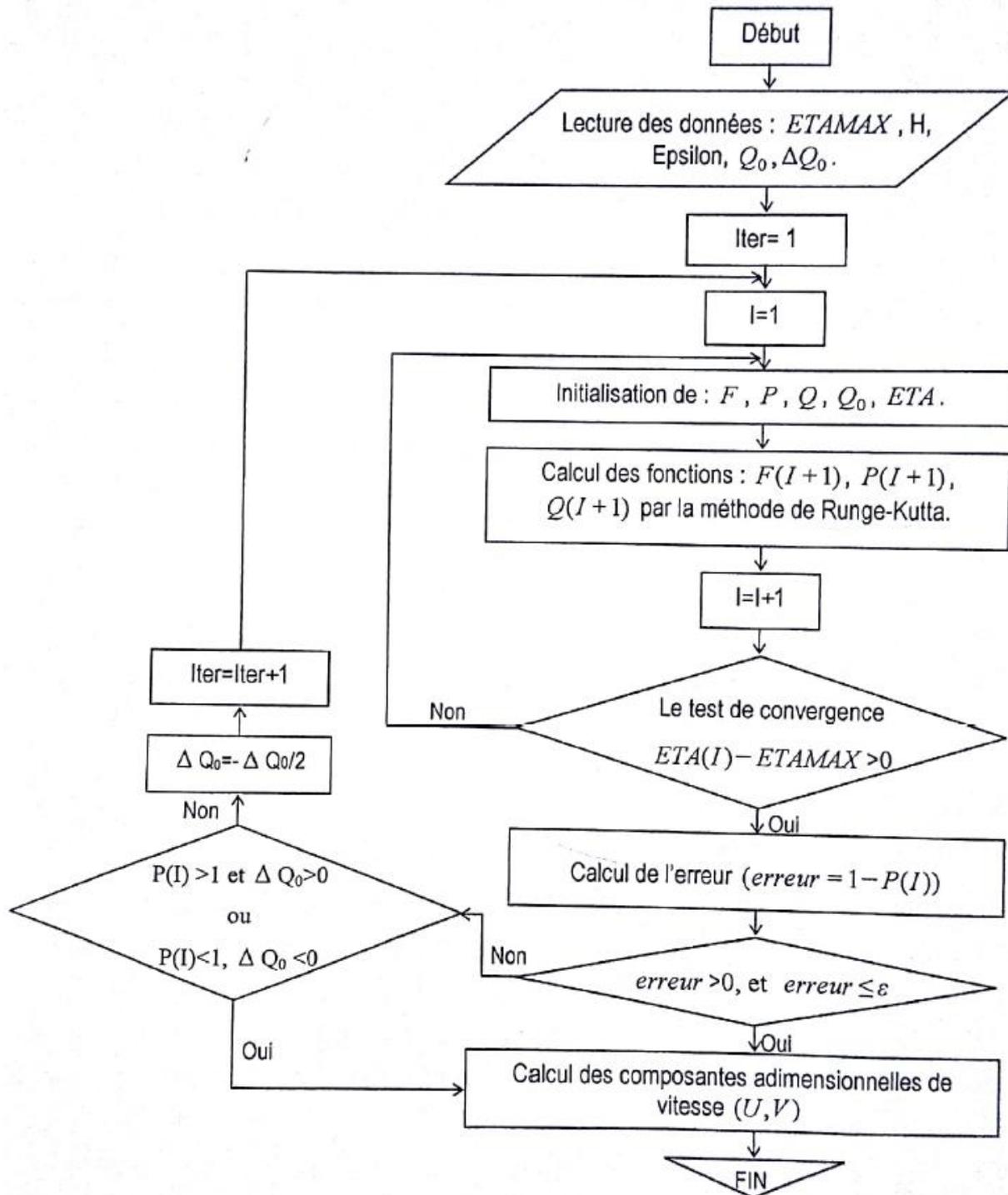
Quand les deux conditions présidentes sont correctes, les conditions aux limites sont vérifiées, et l'itération est terminée. Comme ça on obtient f et ces dérivées comme des fonctions de η .

III.5 les Conditions aux limites

On peut passer de l'écriture des conditions aux limites en de la variable y en une écriture en fonction de la variable adimensionnelle η .

$$\begin{cases} u = 0 , v = 0 & \text{à } y = 0 \\ u = u_\infty & \text{à } y = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 0 , f' = 0 , \eta = 0 \\ f' = 1 & \text{à } \eta \rightarrow \infty \end{cases}$$

III.6 Présentation de l'organigramme de calcul



III.7 Couche limite sur une plaque plane avec contrôle

Plusieurs techniques, qui ont été développées, pour le contrôle artificiel du comportement de la couche limite le long d'un corps. Parmi ces techniques le soufflage ou l'aspiration d'un fluide par la surface du corps qui conduit au changement de la structure de la couche limite.

III.7.1 Aspiration et soufflage avec un profil de vitesse Parabolique

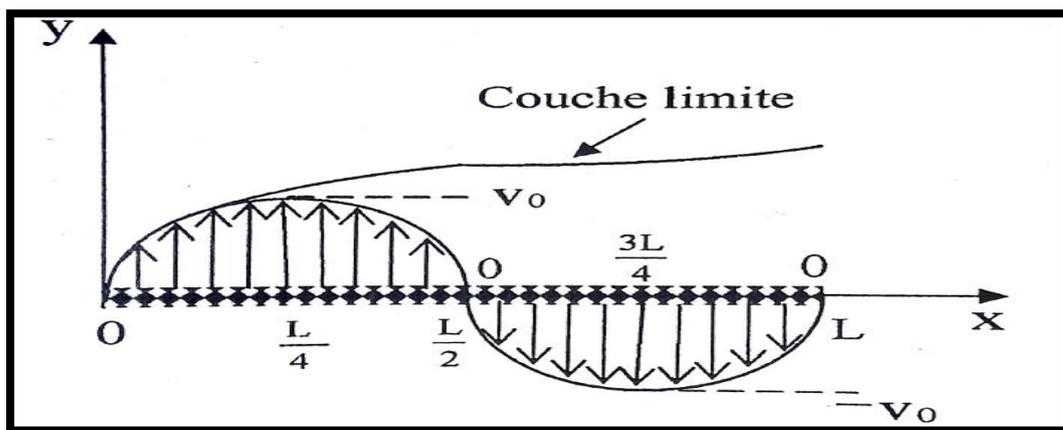


Fig.III.2 : Soufflage et aspiration avec un profil de vitesse Parabolique d'une couche limite dynamique sur une plaque plane.

Le profil représenté sur la figure (III.2) peut être assimilé à une fonction de type :

$$V(x) = ax^2 + bx + c$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{cases} V(0) = 0 \\ V\left(\frac{L}{4}\right) = V_0 \\ V\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases} \right\} \text{ Si } 0 \leq X \leq \frac{L}{2} \quad \left. \begin{cases} V\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \\ V\left(\frac{3L}{4}\right) = -V_0 \\ V(L) = 0 \end{cases} \right\} \text{ Si } \frac{L}{2} \leq X \leq L$$

❖ Si $0 \leq X \leq \frac{L}{2}$

$$V(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$V\left(\frac{L}{4}\right) = a\left(\frac{L}{4}\right)^2 + b\left(\frac{L}{4}\right) = V_0$$

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a = -b \frac{2}{L}$$

$$\Rightarrow -b \frac{2}{L} \frac{L^2}{16} + b \frac{L}{4} = V_0 \Rightarrow b = 8 \frac{V_0}{L} ; \quad a = -16 \frac{V_0}{L^2}$$

Donc:

$$V(x) = -16 \frac{V_0}{L^2} x^2 + 8 \frac{V_0}{L} x$$

❖ Si $\frac{L}{2} \leq X \leq L$

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) + c = 0$$

$$V\left(\frac{3L}{4}\right) = a\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + b\left(\frac{3L}{4}\right) + c = -V_0$$

$$V(L) = a(L)^2 + b(L) + c = 0$$

Résolvons le système d'équations ci-dessus on aura :

$$\Rightarrow a = \frac{-b(L)-c}{L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(-b(L)-c)}{L^2} \left(\frac{L^2}{4}\right) + b\left(\frac{L}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow b = \frac{-3c}{L}$$

$$\frac{\frac{3c}{L}L - c}{L^2} \frac{9L^2}{16} - \frac{9Lc}{4L} + c = -V_0 \Rightarrow c = 8V_0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -16 \frac{V_0}{L^2} \\ b = -24 \frac{V_0}{L} \\ c = 8V_0 \end{array} \right\}$$

Donc :

$$V(x) = 16 \frac{V_0}{L^2} x^2 + -24 \frac{V_0}{L} x + 8 V_0$$

On a:

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v u_\infty}{x}} (\eta f' - f)$$

Puisque la composante u de vitesse est nulle à la paroi :

$$U = 0 \Rightarrow \frac{u}{u_\infty} = f' = 0$$

On obtient :

$$\Rightarrow \frac{v}{u_\infty} = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{v u_\infty}{x}} \frac{1}{u_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u_\infty} = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{v}{x}} u_\infty^{1/2} u_\infty^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u_\infty} = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{v}{x u_\infty}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u_\infty} = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{1}{R_e}}$$

$$\Rightarrow f = -2 \frac{v}{u_\infty} \sqrt{R_e}$$

$$\frac{v}{u_\infty} = -16 \frac{V_0}{L^2 u_\infty} x^2 + 8 \frac{V_0}{L u_\infty} x \Rightarrow \frac{v}{u_\infty} = \frac{V_0}{u_\infty} \left(\frac{-16}{L^2} x^2 + \frac{8}{L} x \right)$$

$$f = -2 \frac{v_0}{u_\infty} \left(\frac{-16}{L^2} x^2 + \frac{8}{L} x \right) \sqrt{R_e}$$

Avec $\frac{v_0}{u_\infty} = 0.0001$ estimée d'après [11]

$$f = -2.0,0001 \left(\frac{-16}{L^2} x^2 + \frac{8}{L} x \right) \sqrt{R_e}$$

$$\frac{v}{u_{\infty}} = -16 \frac{V_0}{L^2 u_{\infty}} x^2 - 24 \frac{V_0}{L u_{\infty}} x + 8 \frac{v_0}{u_{\infty}} \Rightarrow \frac{v}{u_{\infty}} = \frac{v_0}{u_{\infty}} \left(\frac{16}{L^2} x^2 - \frac{24}{L} x + 8 \right)$$

$$f = -2 \frac{v_0}{u_{\infty}} \left(\frac{16}{L^2} x^2 - \frac{24}{L} x + 8 \right) \sqrt{Re}$$

$$f = -2.0,0001 \left(\frac{16}{L^2} x^2 - \frac{24}{L} x + 8 \right) \sqrt{Re}$$

Ensuite, on calcule la fonction f et ses deux dérivées, f' et f'' pour les deux procédés de contrôle en fonction de la variable (η).

CHAPITRE IV

Résultats et discussions

IV.1 INTRODUCTION

La résolution numérique de l'équation gouvernant notre problème nous a fourni des informations concernant le comportement de l'écoulement dans une couche limite laminaire.

IV.2 INTREPRETATION DES RESULTATS

La détermination des fonctions f , f' et f'' permet le calcul de l'épaisseur de la couche limite dynamique, le frottement.

Pour mieux comprendre le comportement de l'écoulement dans la couche limite, on a représenté sur la **fig (IV.1.3)** son épaisseur δ qui délimite le volume des effets visqueux importants, on remarque que l'épaisseur augmente dans la section de soufflage par contre dans la partie d'aspiration l'épaisseur diminue par rapport au cas lisse.

Pour expliquer l'effet résistant traduit par le coefficient de frottement local le long d'une plaque plane, il est nécessaire d'utiliser l'équation $C_f = 2 \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{\frac{1}{2}} f''(\eta)$, afin de représenter la variation du coefficient de frottement le long du corps solide.

Le frottement est une fonction décroissante de l'abscisse x ceci explique l'effet important de la dissipation visqueuse au début de la plaque contrairement à celui manifestant vers l'aval de la bordure d'attaque. On remarque d'après la courbe représentée sur la **fig (IV.2.1)** que le frottement pariétal est important sur la surface solide par contre son intensité se dégrade plus qu'on s'éloigne vers les plus grandes valeurs de η , ceci est aussi illustré sur les **fig (IV.2.2....IV.2.16)** cette diminution de l'intensité du frottement s'explique par l'entrée progressive dans la zone de l'écoulement extérieur, ce comportement est comparable à celui représenté par [12]

L'introduction d'un modèle de contrôle suivant une distribution parabolique a permis de changer les valeurs des fonctions f , f' et f'' ce qui permettra de dire que le soufflage localisé au début de la plaque a diminué le frottement près de la paroi relativement à sa valeur sans contrôle voir **fig (IV.2.1....IV.2.6)**.

En l'absence de paroi le frottement augmente par rapport au cas sans contrôle ceci est aussi illustré aussi sur les **fig (IV.2.10....IV.2.16)**, par contre on peut dire que l'aspiration localisée au niveau de la deuxième moitié de la plaque fait augmenter le frottement près de la paroi

Relativement à sa valeur sans contrôle loin de la paroi le frottement est diminué par rapport au cas sans contrôle ceci est montré sur les **fig (IV.2.10.....IV.2.16)**.

En générale, le frottement prend une valeur maximale près de la paroi solide et commence progressivement à diminuer dans le sens perpendiculaire de l'écoulement pour une abscisse quelconque jusque à ce qu'il tend vers une valeur nulle dans la zone de l'écoulement extérieure ce ci illustré par les **fig (IV.3.1.....IV.3.16)**.

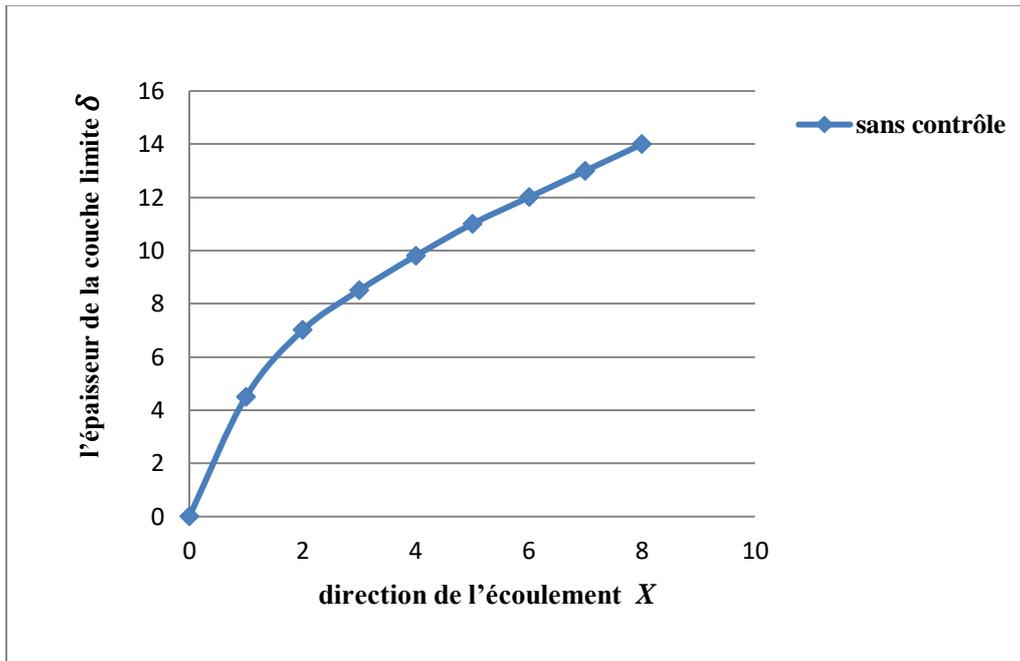


Fig IV.1.1 : Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement.

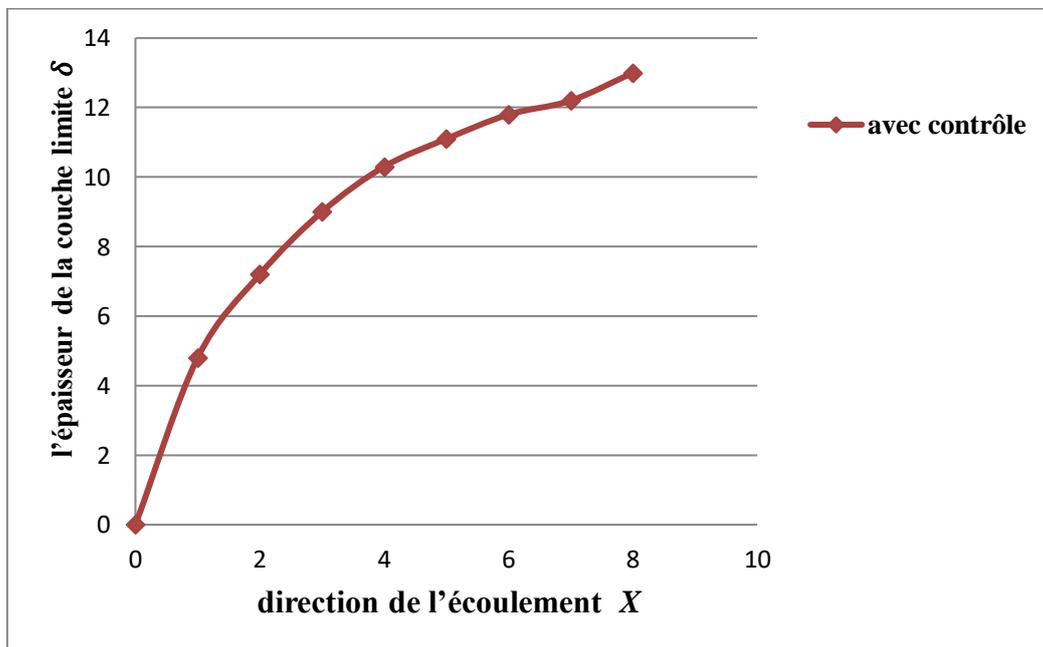


Fig IV.1.2 : Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement.

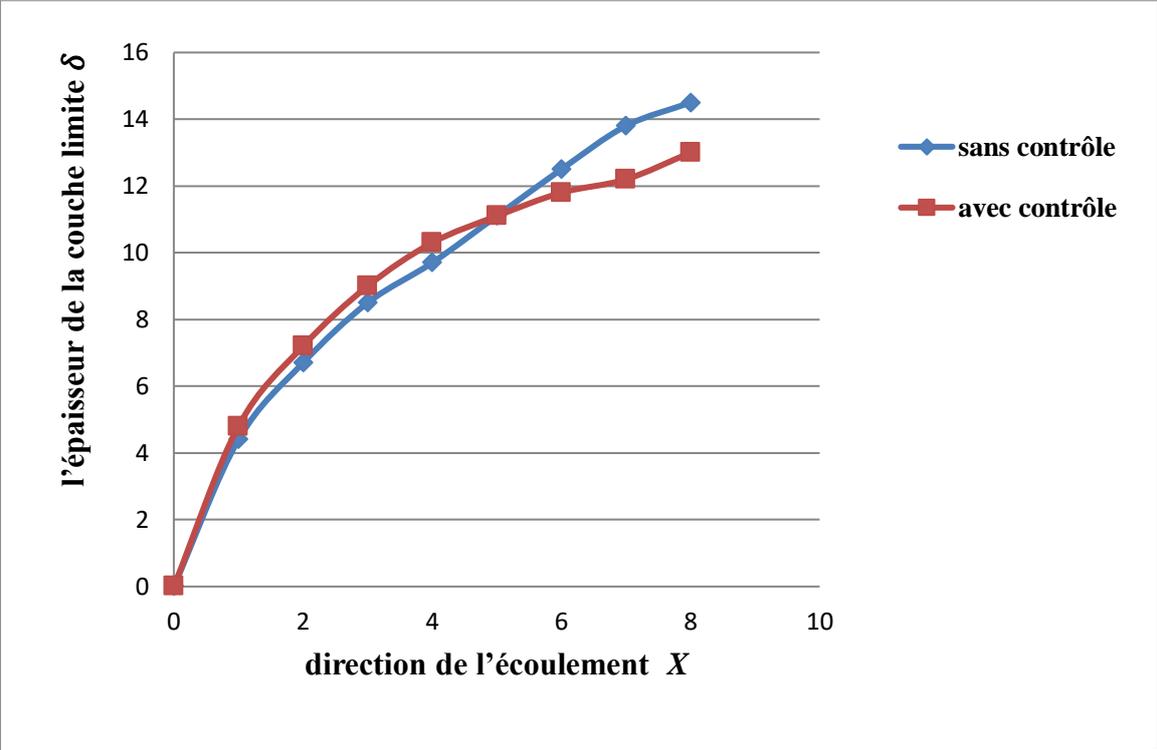


Fig IV.1.3 : Variation de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement.

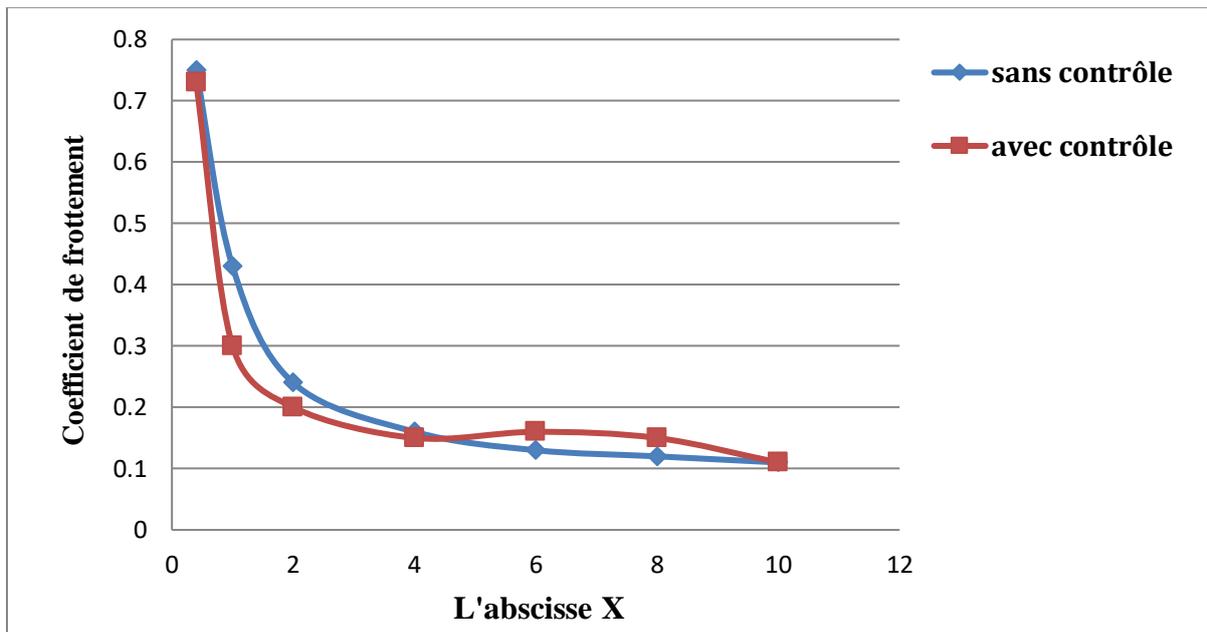


Fig IV.2.1 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 0$

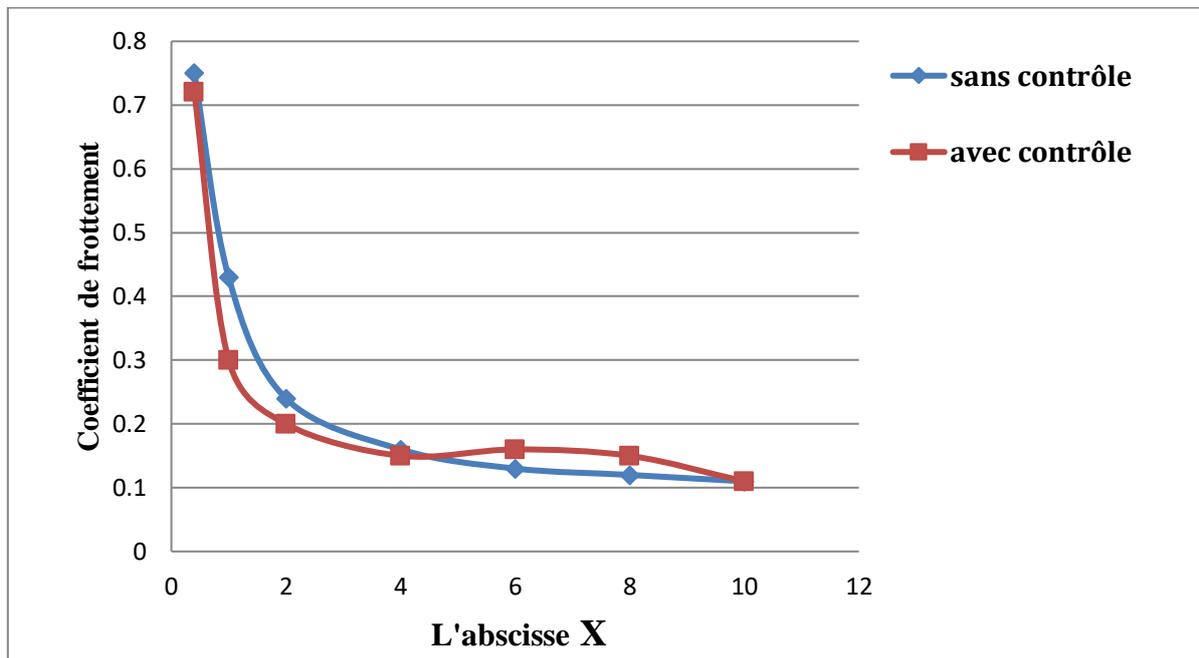


Fig IV.2.2: Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 0.2$

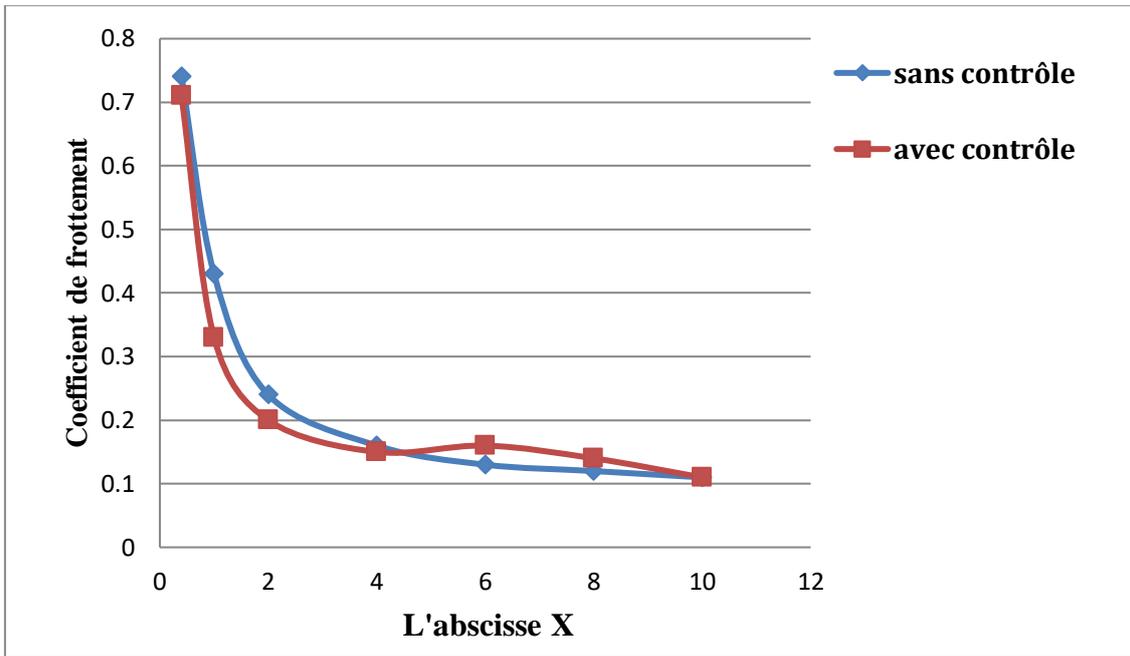


Fig IV.2.3 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 0.4$

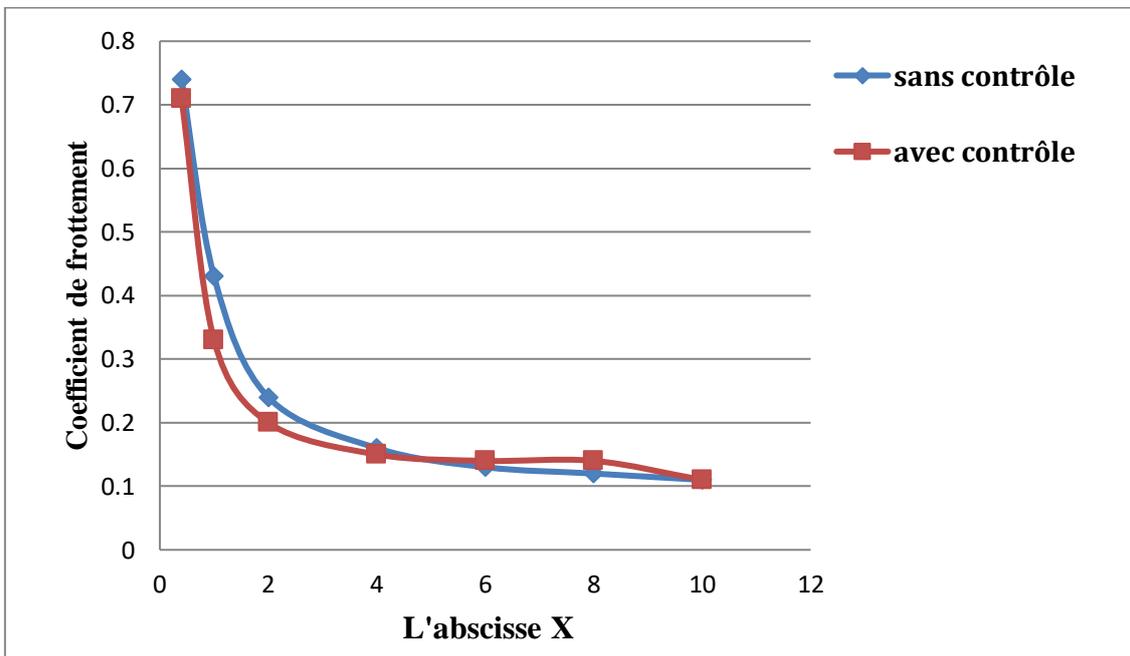


Fig IV.2.4: Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 0.6$

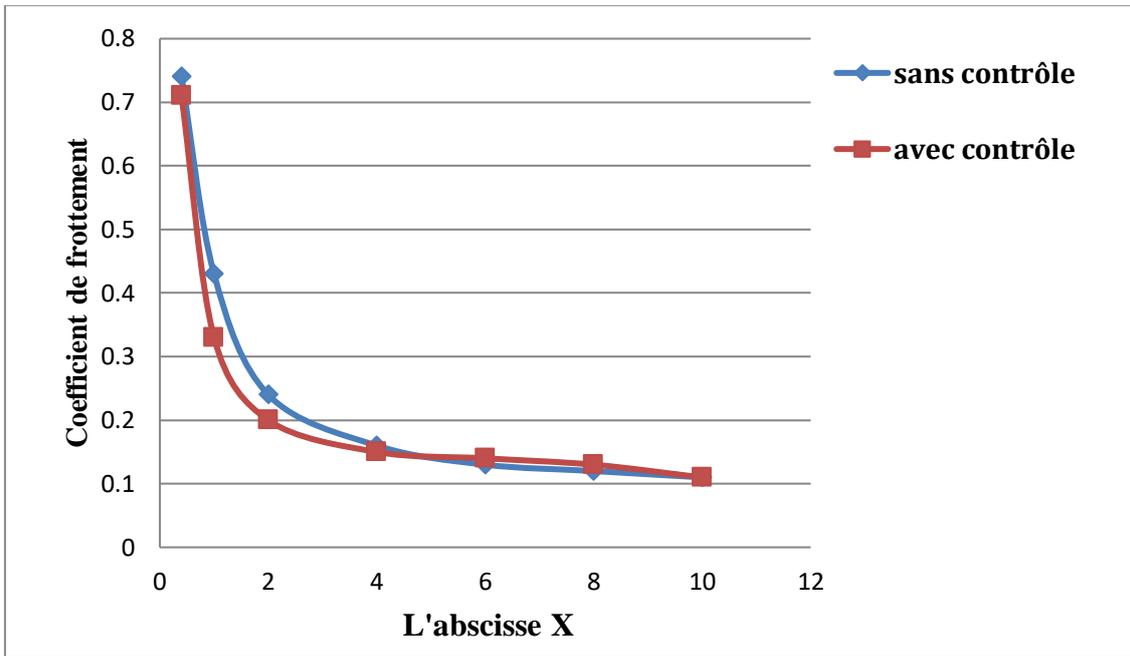


Fig IV.2.5 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 0.8$

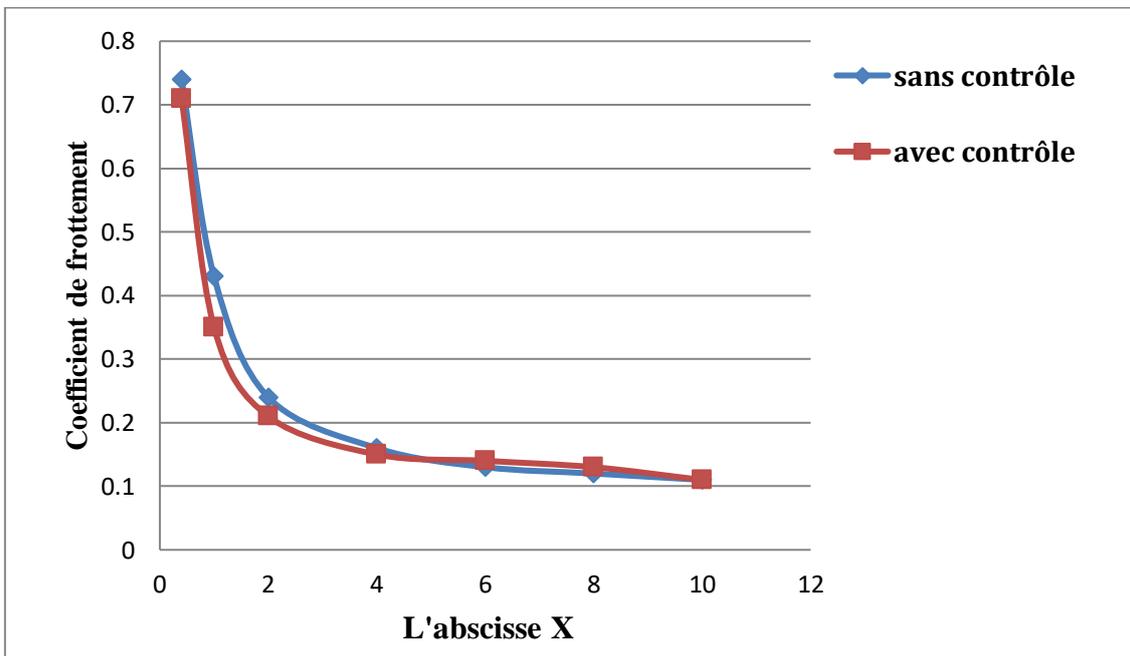


Fig IV.2.6 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 1$

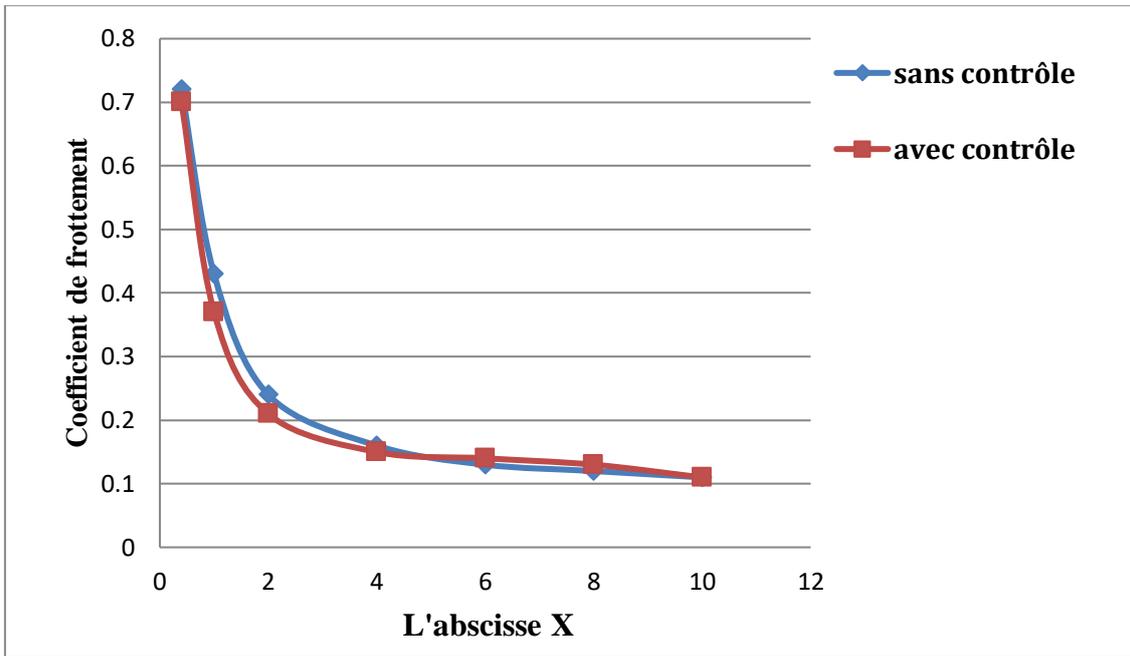


Fig IV.2.7 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 1.2$

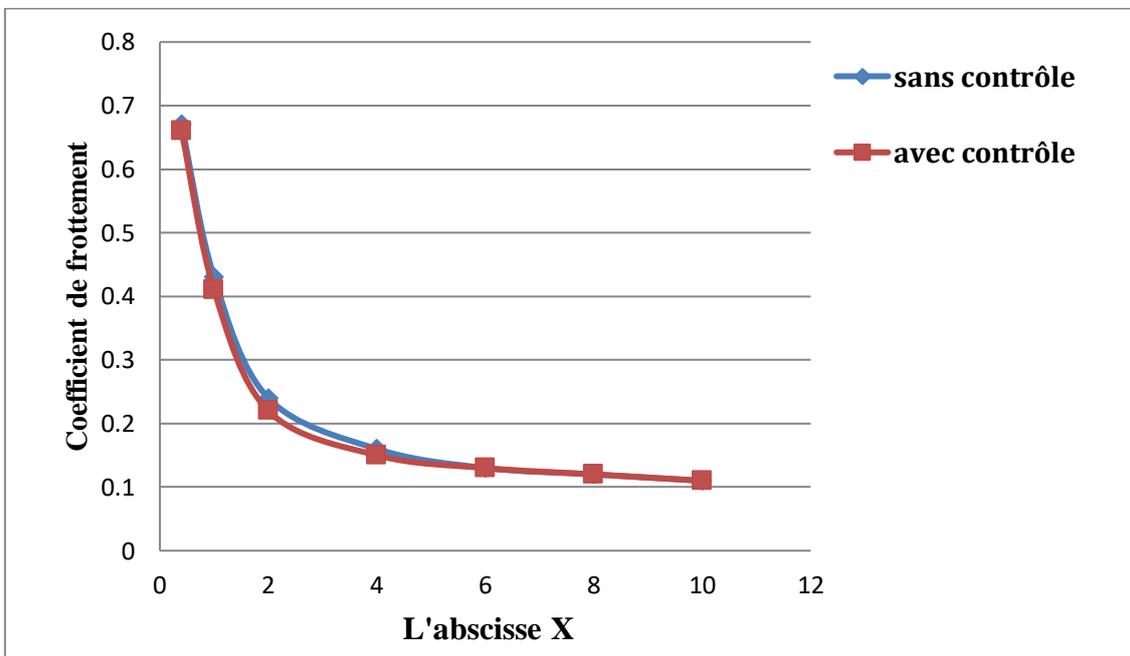


Fig IV.2.8 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 1.6$

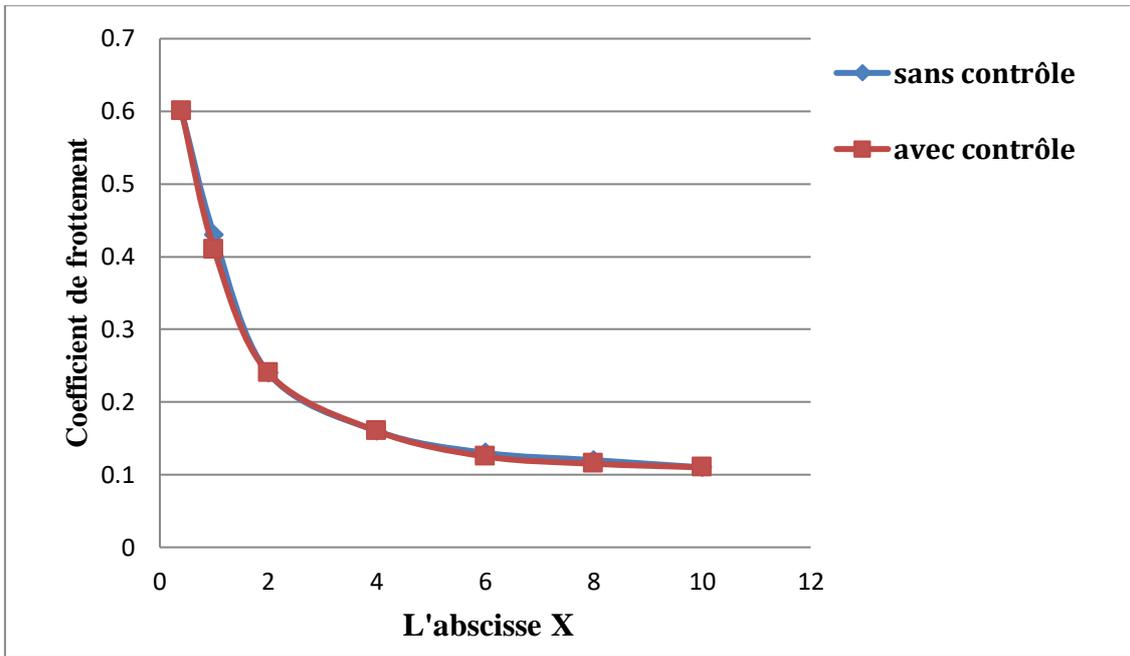


Fig IV.2.9 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 2$

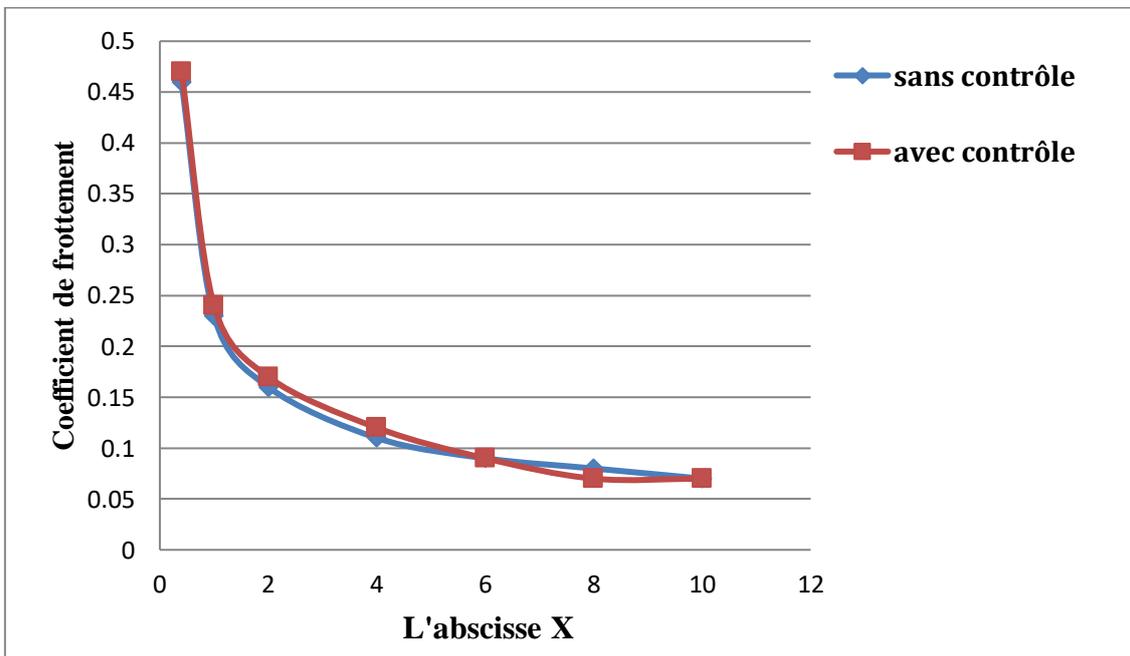


Fig IV.2.10 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 2.6$

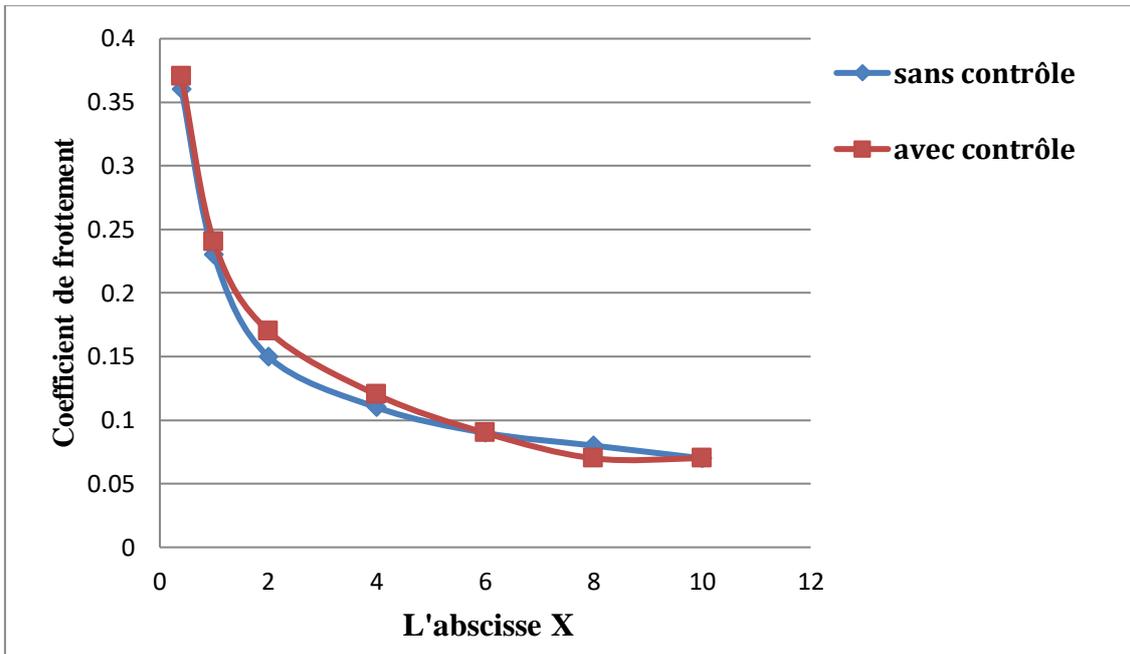


Fig IV.2.11 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 3$

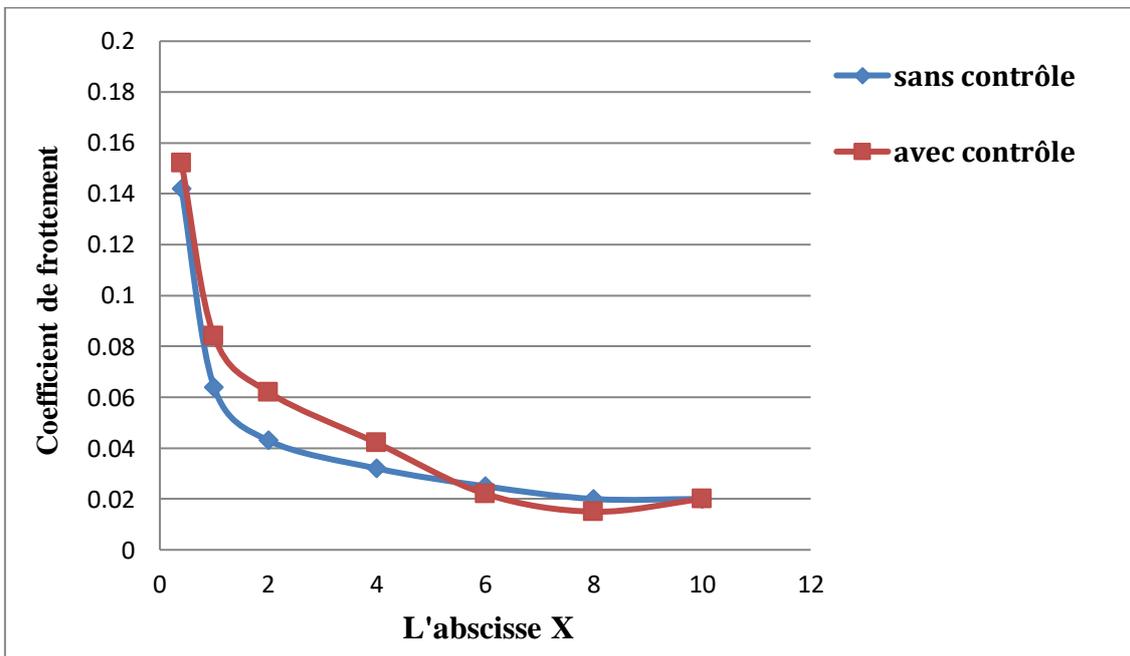


Fig IV.2.12 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 4$

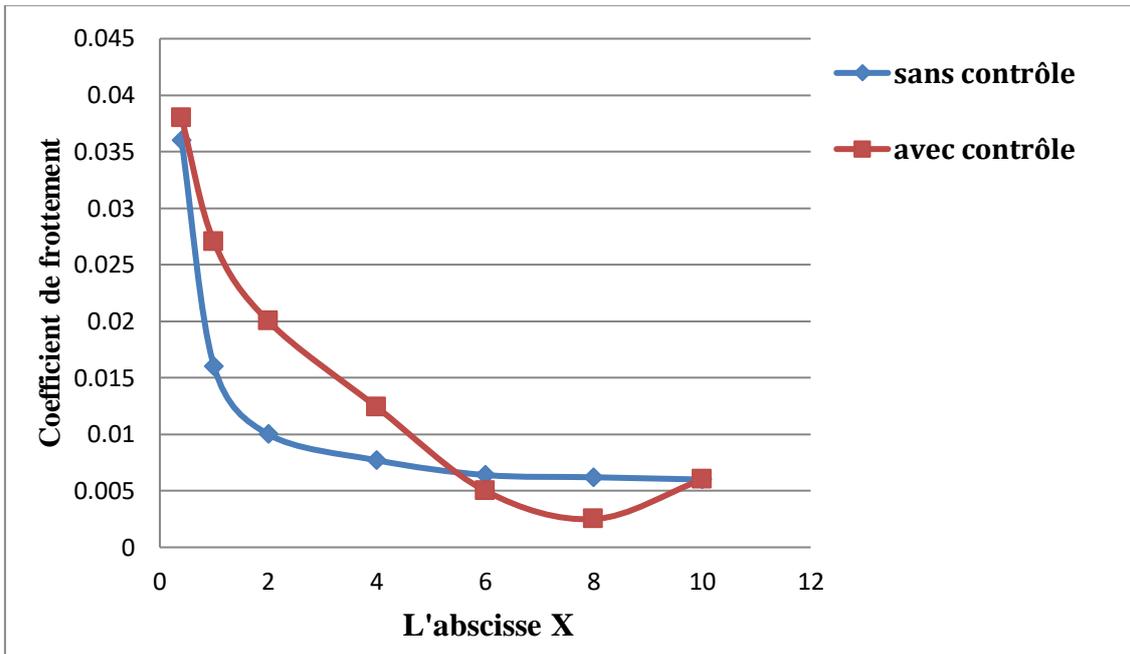


Fig IV.2.13 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 5$

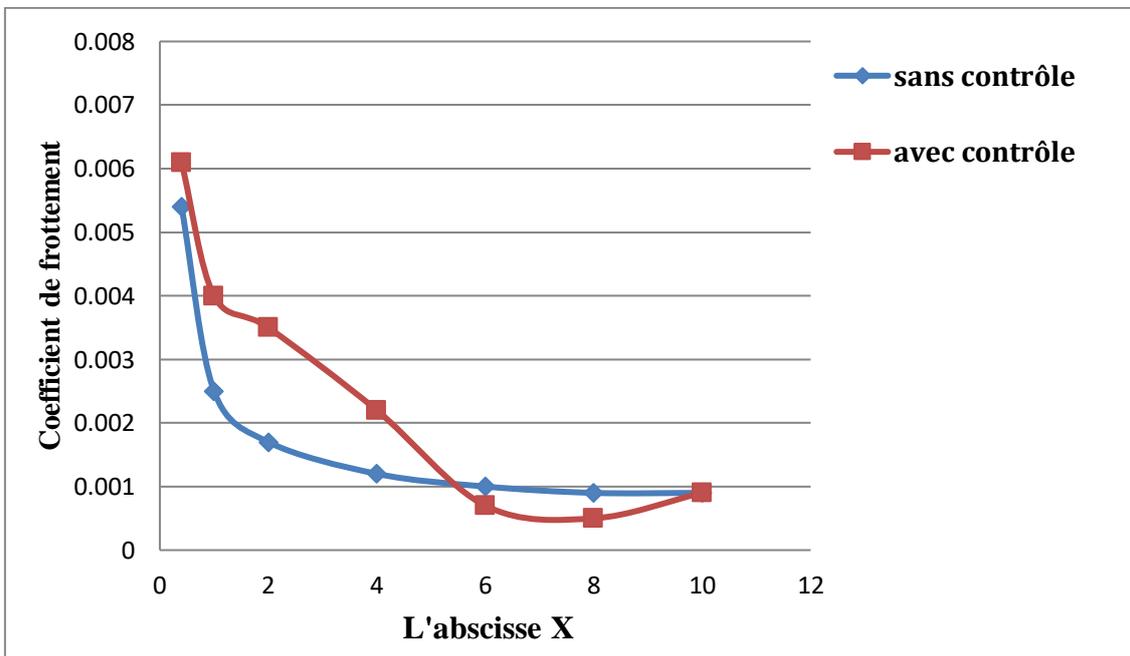


Fig IV.2.14 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 6$

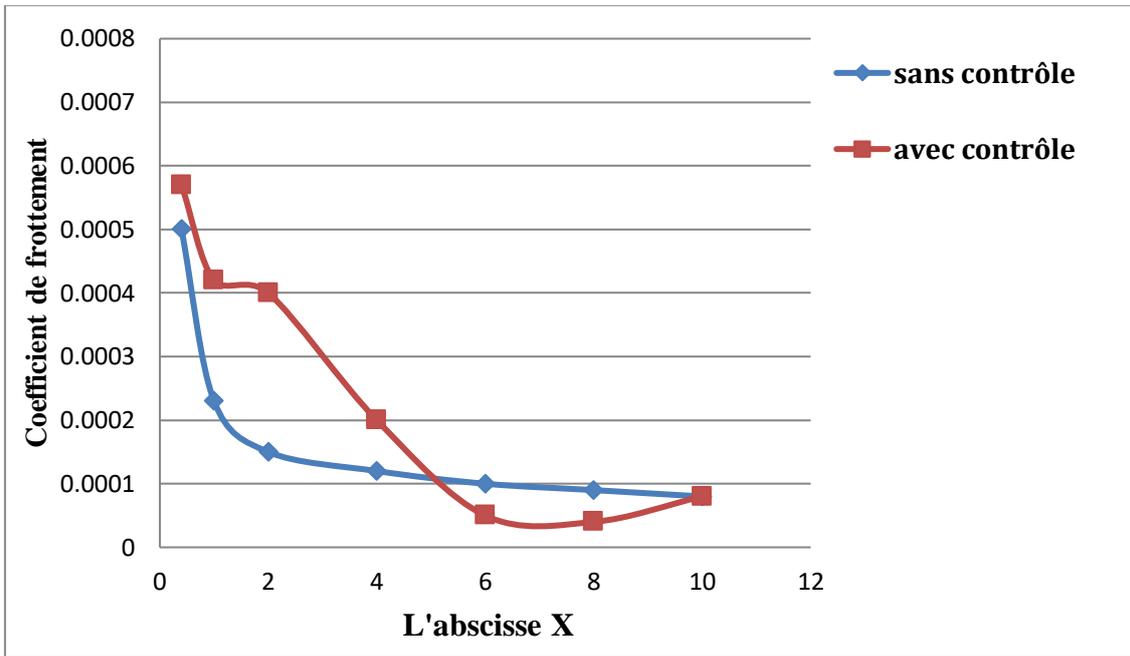


Fig IV.2.15 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 7$

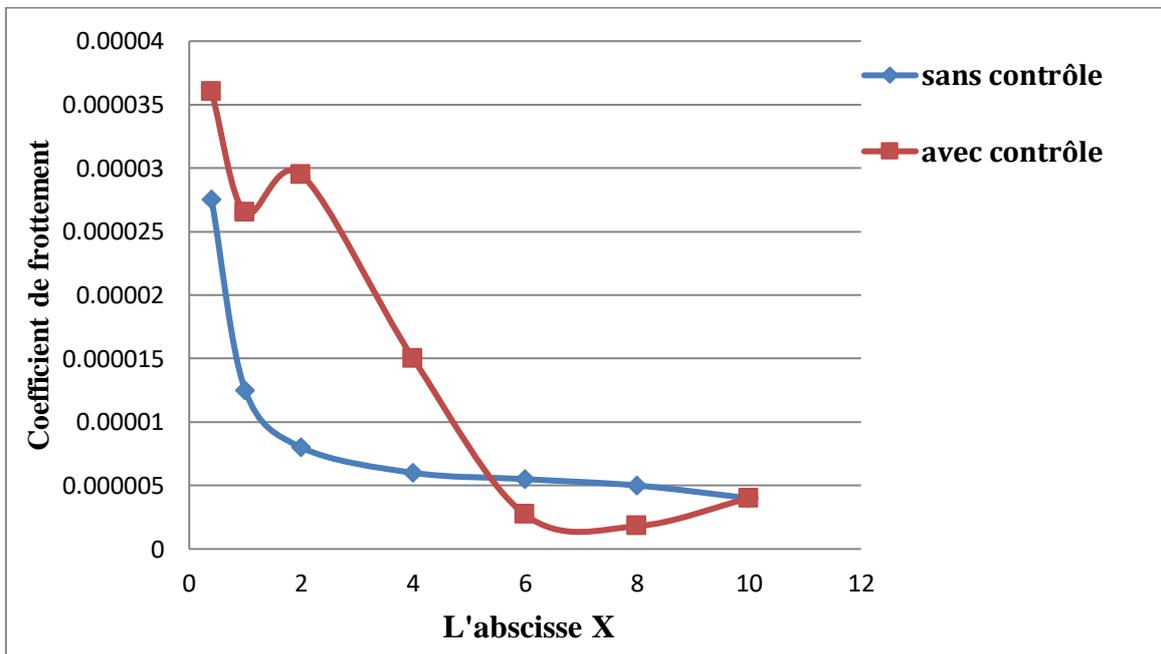


Fig IV.2.16 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de l'abscisse X à $\eta = 8$

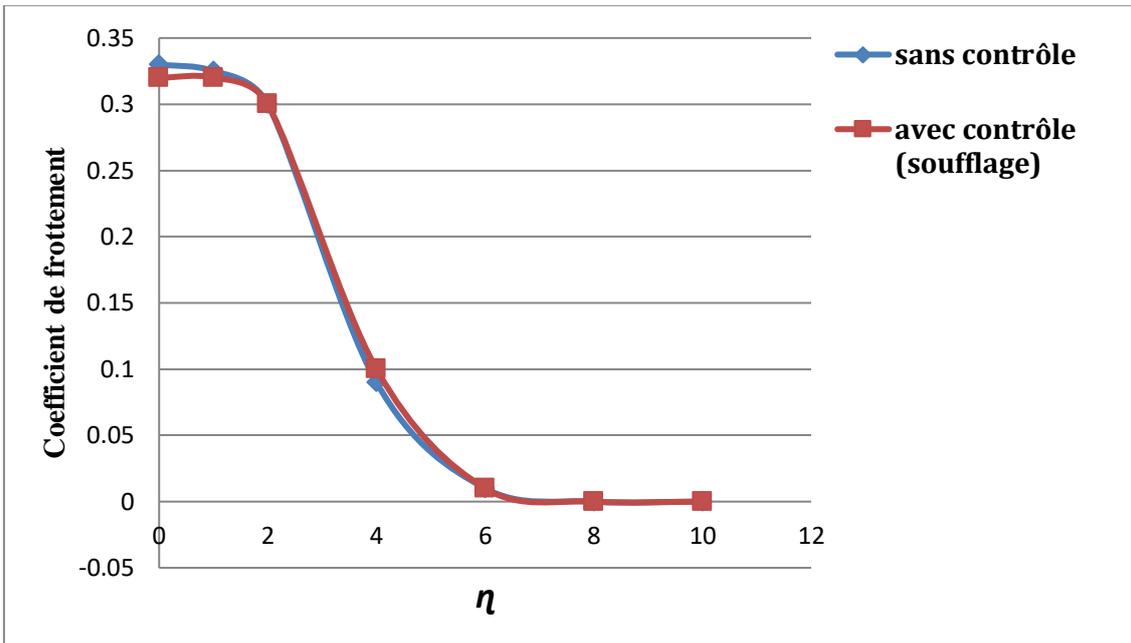


Fig IV.3.1 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=0.2$

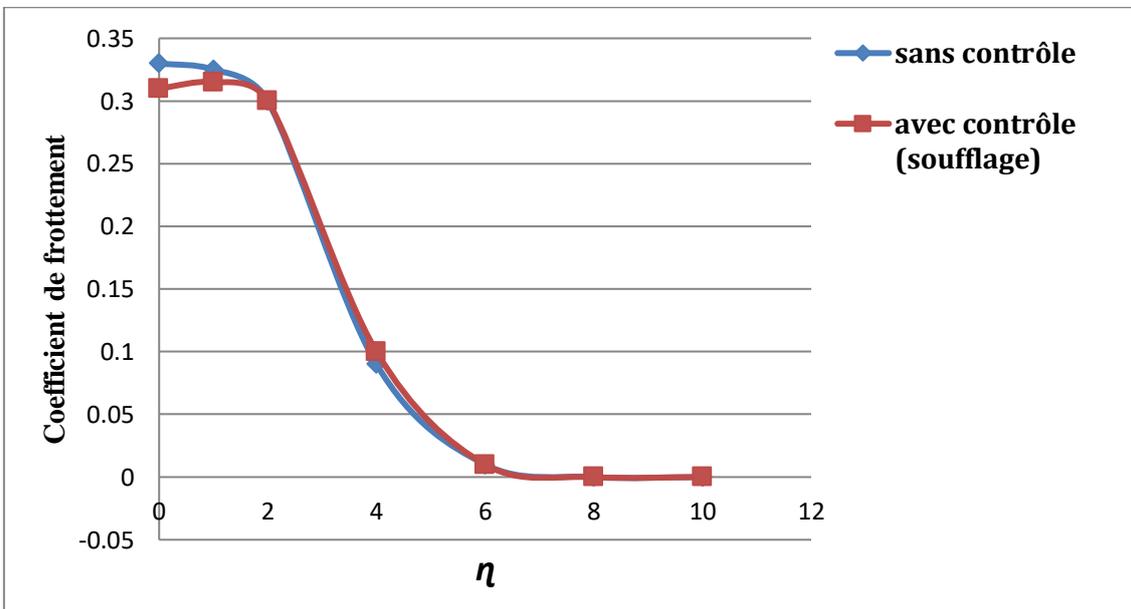


Fig IV.3.2: Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=0.4$

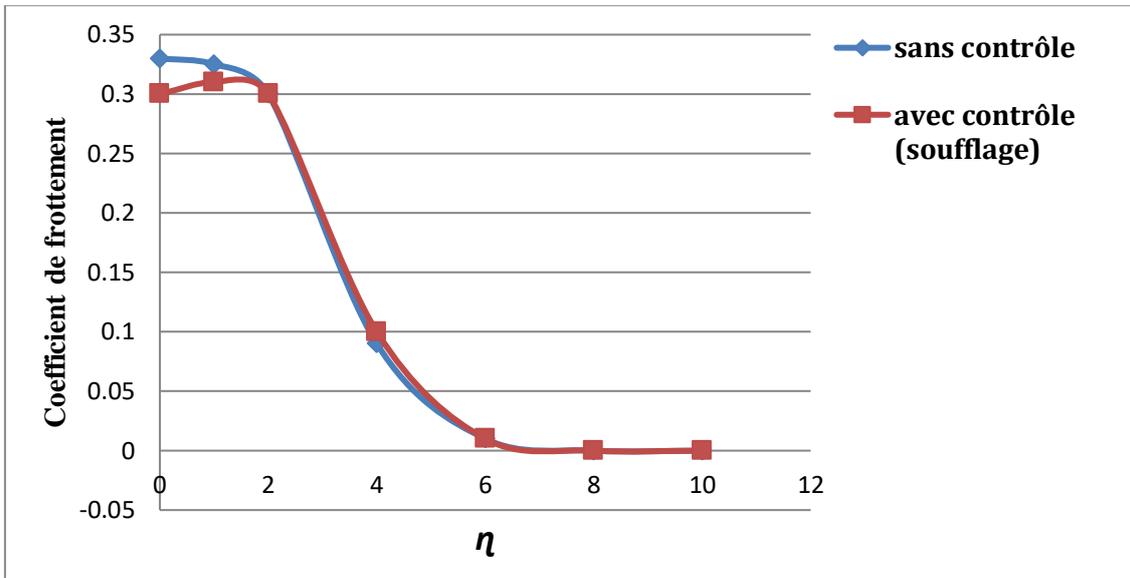


Fig IV.3.3 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=0.6$

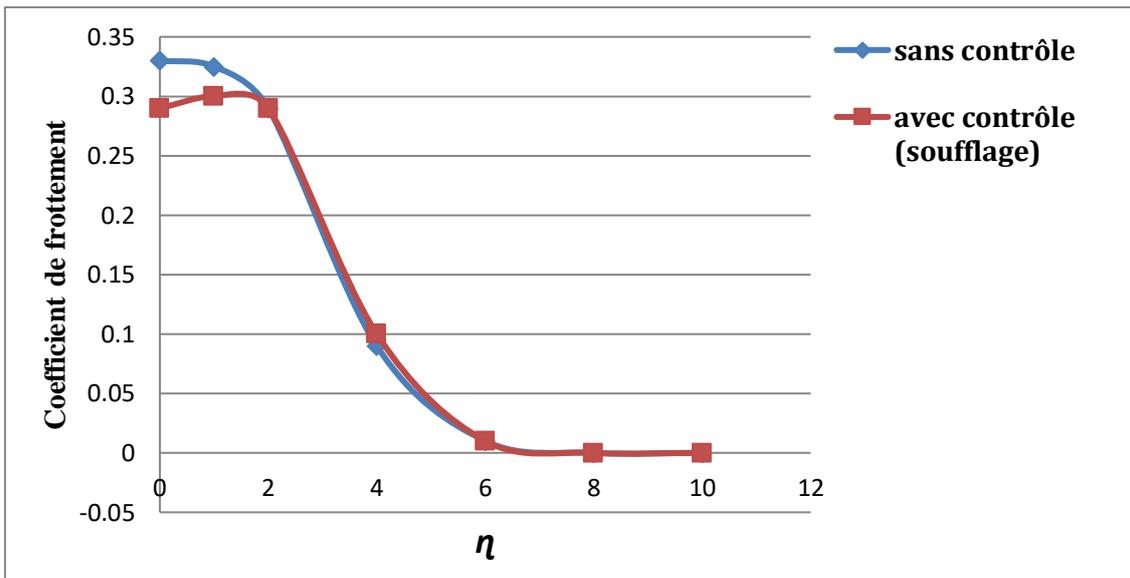


Fig IV.3.4 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=0.8$

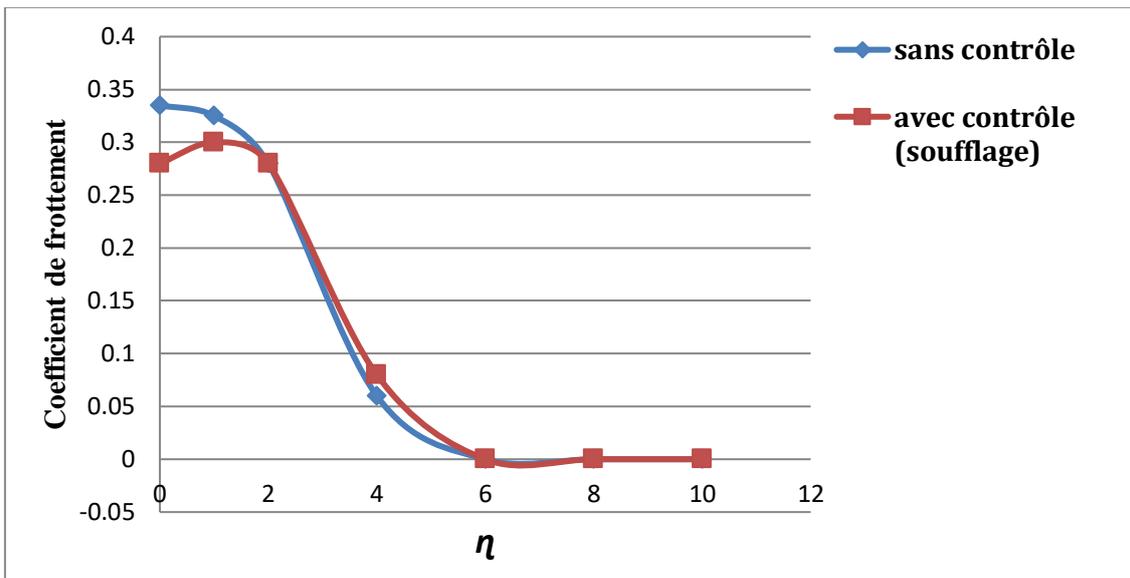


Fig IV.3.5 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=1$

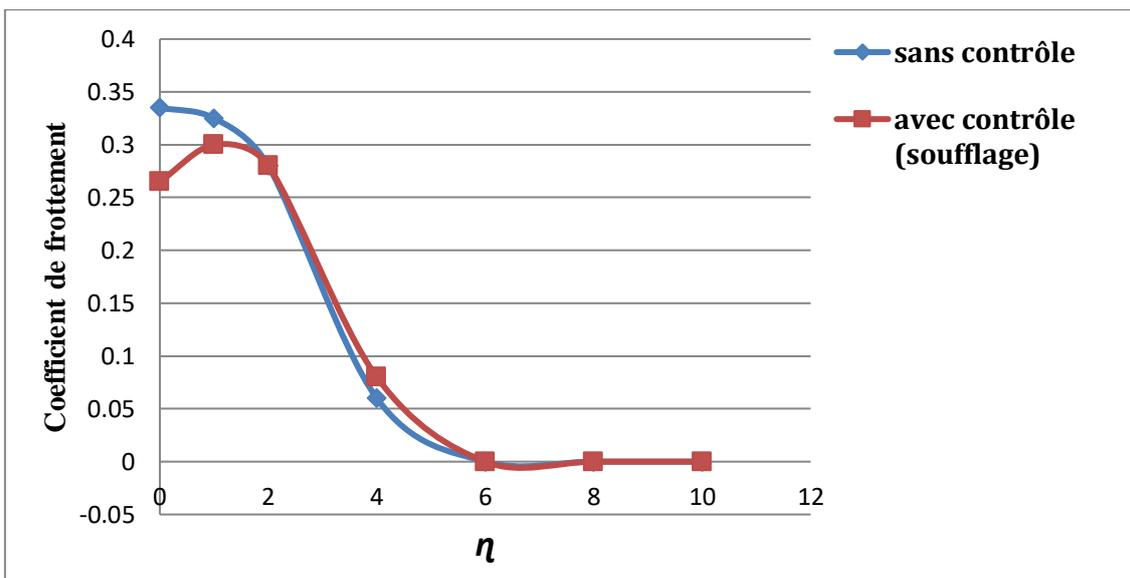


Fig IV.3.6 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=1.6$

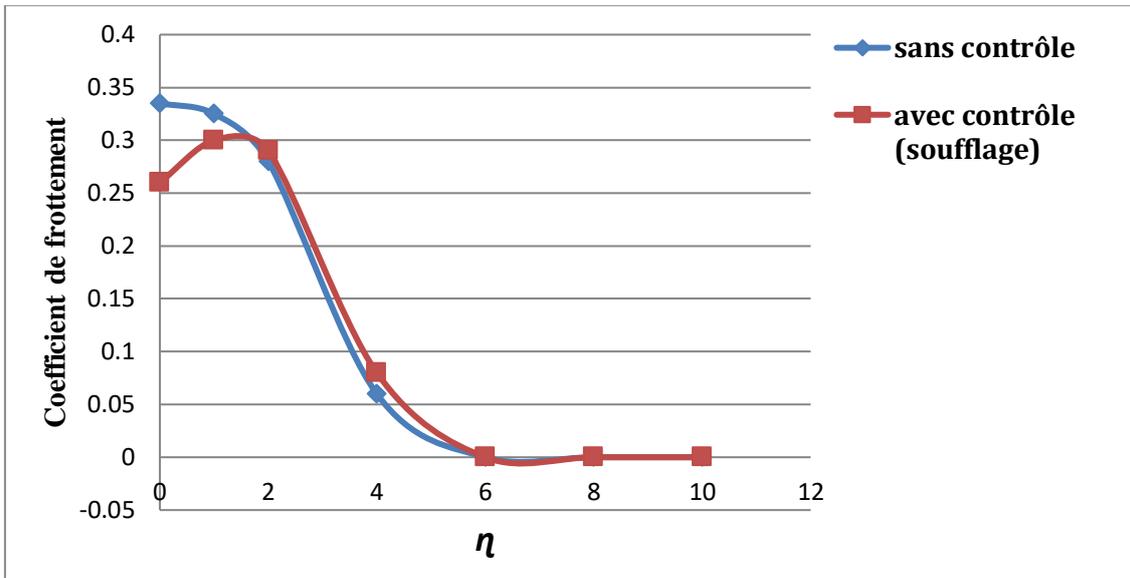


Fig IV.3.7 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à X=2

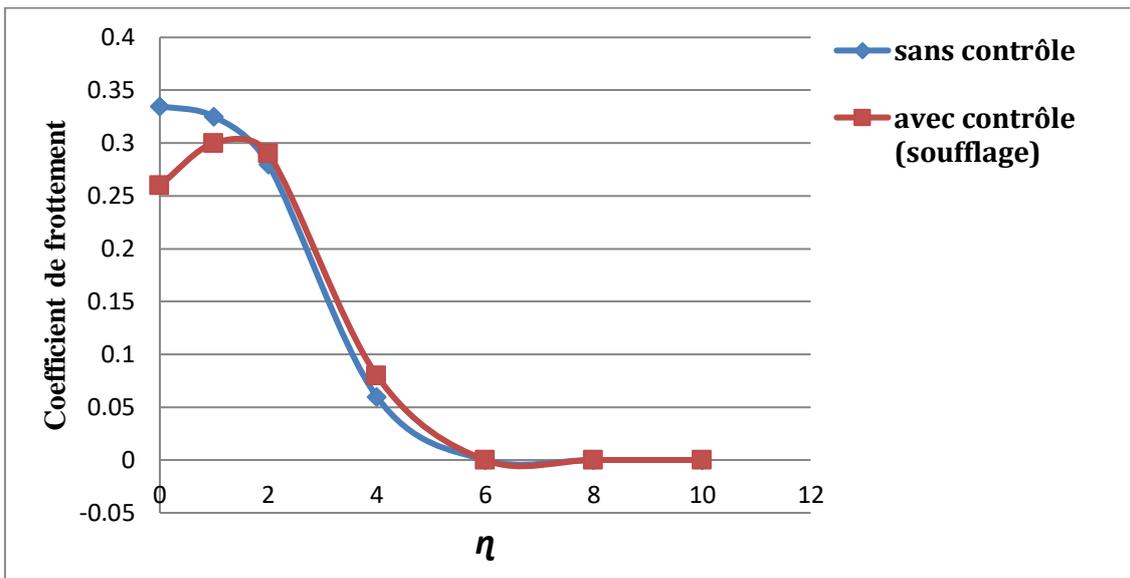


Fig IV.3.8 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à X=2.5

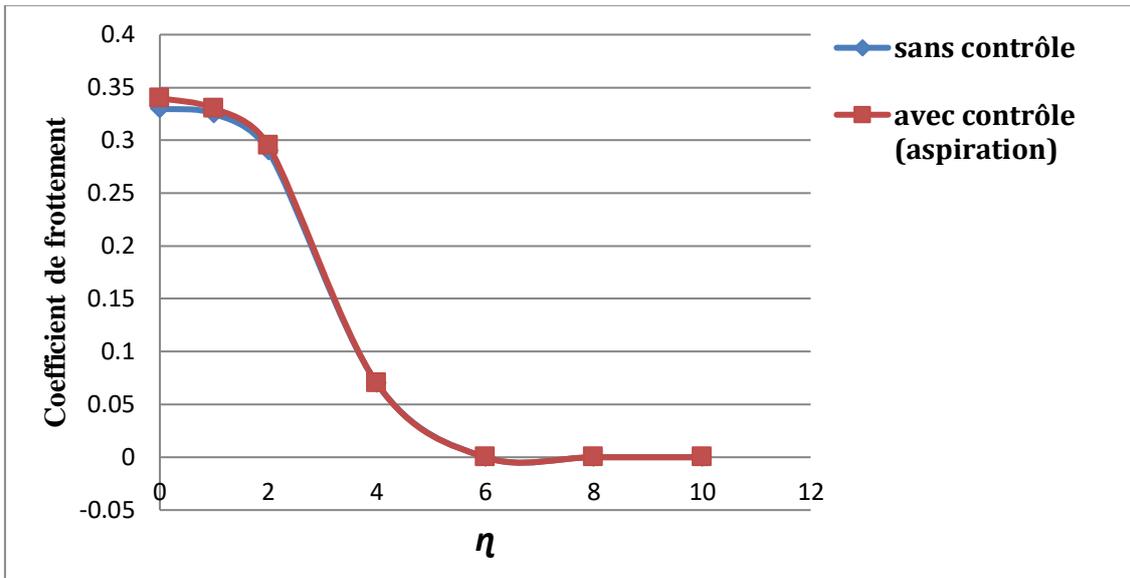


Fig IV.3.9 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=5.2$

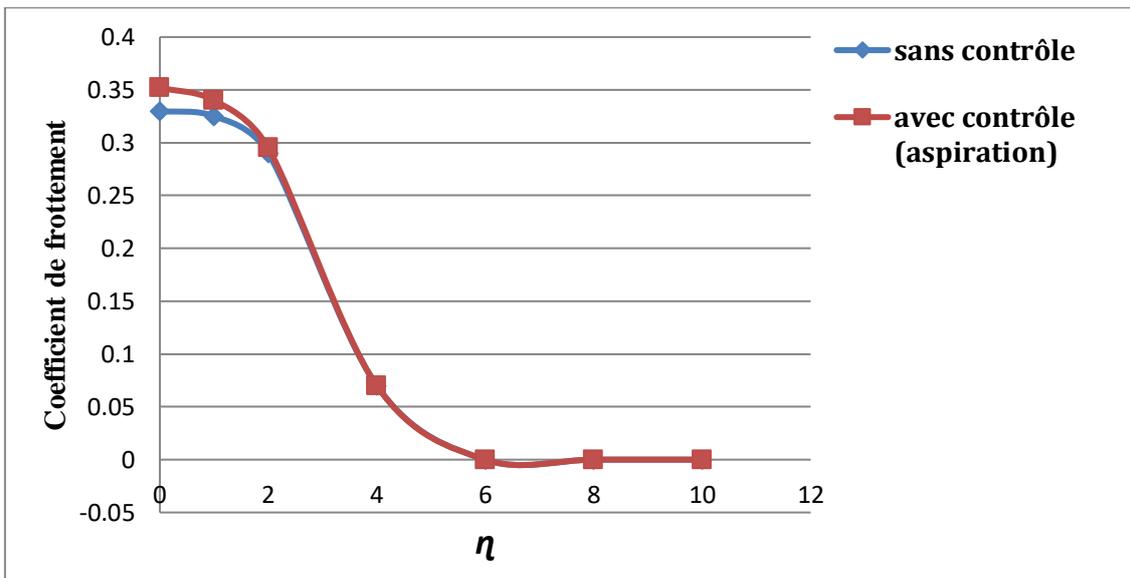


Fig IV.3.10 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=5.4$

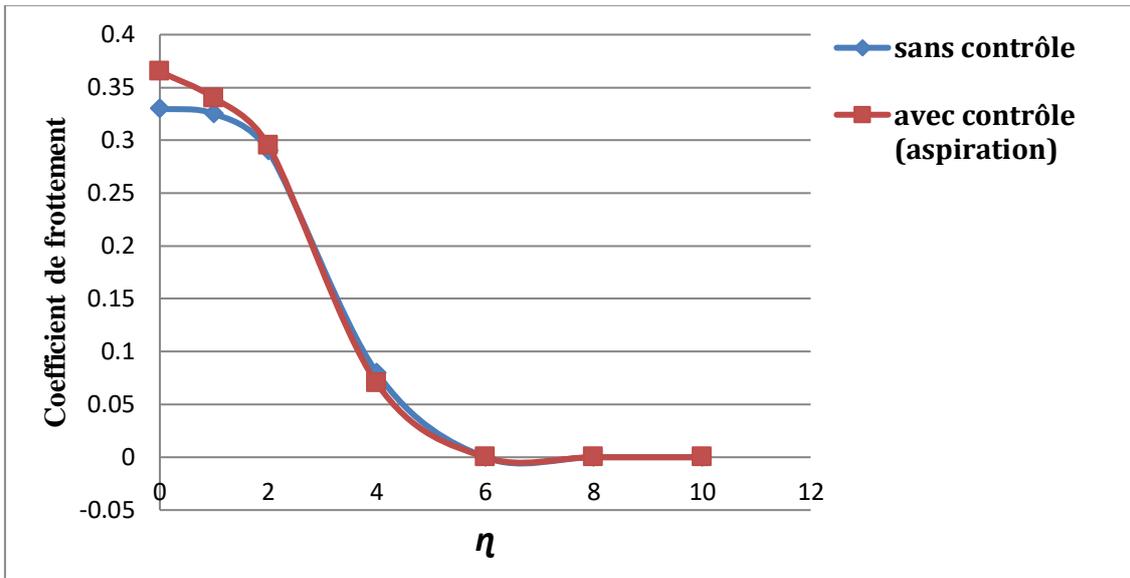


Fig IV.3.11 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=5.6$

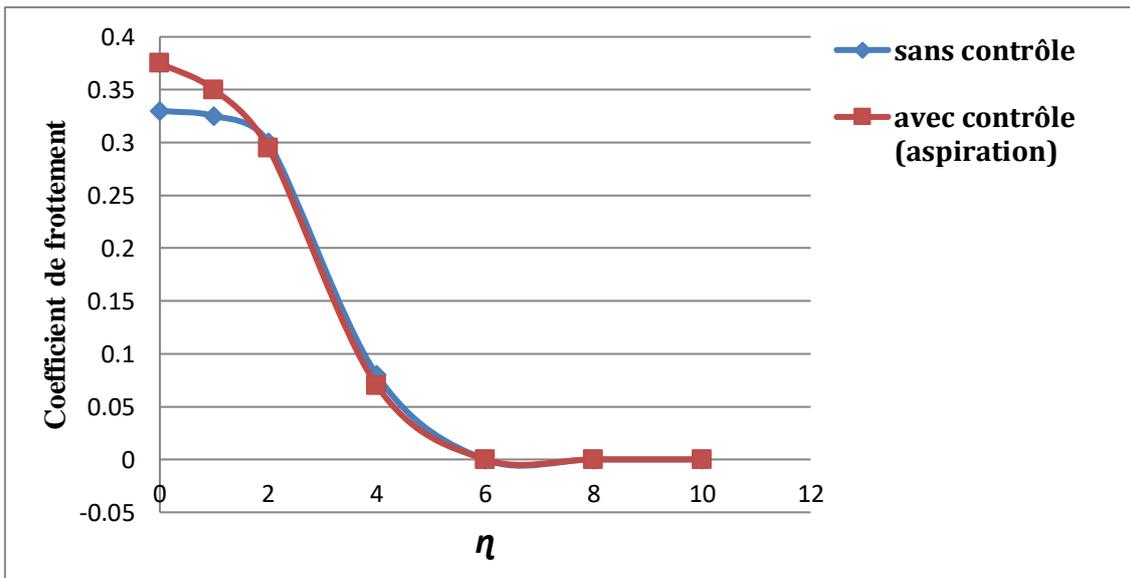


Fig IV.3.12 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=5.8$

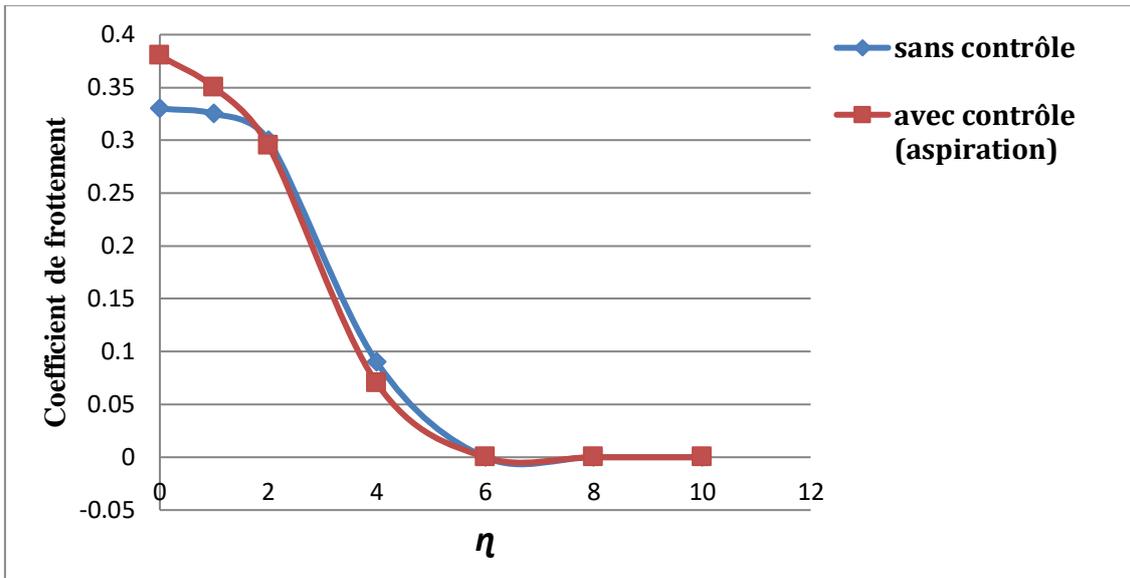


Fig IV.3.13: Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=6$

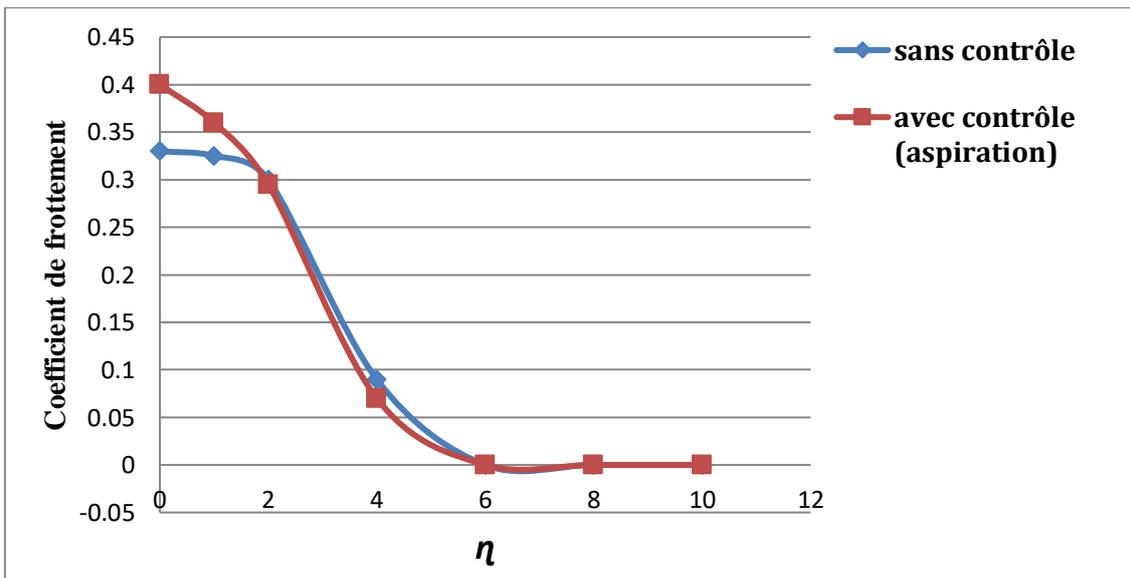


Fig IV.3.14 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=6.6$

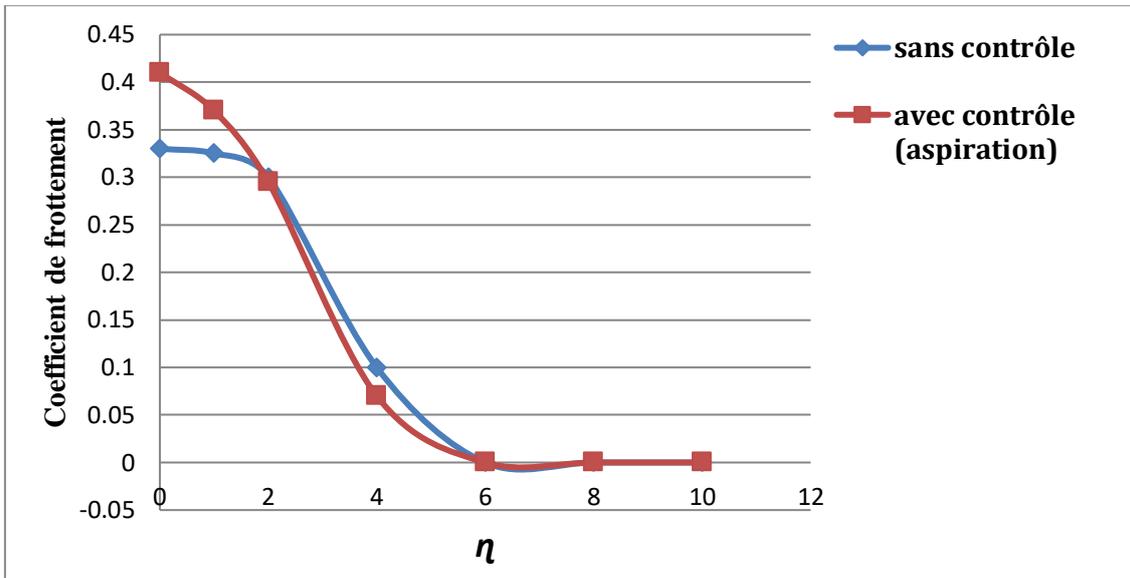


Fig IV.3.15 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=7$

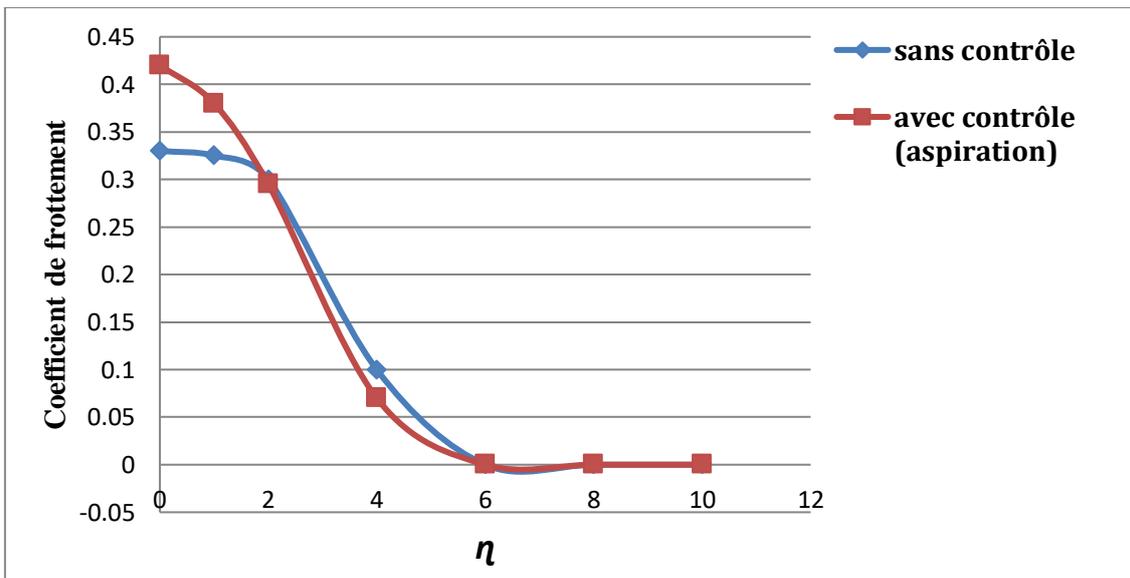


Fig IV.3.16 : Variation du coefficient de frottement local en fonction de η à $X=7.5$

CONCLUTION GENERALE

Après avoir étudié l'écoulement laminaire incompressible passant sur une plaque plane lisse. On peut une conclusion qui reprisant une synthèse du travail réalisé. Nous avons essayé de faire une bonne recherche bibliographique qui nous a permet de connaitre le comportement de l'écoulement du fluide en passant par des obstacles.

Après simplification de l'équation de Navier-stokes selon les hypothèses de Prandtl on a déduit les équations qui régissent votre problème.

La résolution du problème dynamique a permis la détermination de la loi de variation de l'épaisseur de la couche limite du frottement et des composent de la vectrice vitesse.

Les résultats obtenus par cette étude illustrent la dépendance des phénomènes physiques en couche limite laminaire sur une plaque plane.

Les résultats obtenus en présence du contrôle actif de la couche limite dynamique, montrent clairement l'influence de ce dernier sur l'épaisseur de la couche limite ainsi que le coefficient De frottement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ION Paraschivoiu, MICHEL Prud'homme, LUC Robillard et PARTICK Vasseur, « Mécanique des fluides », Presses internationales polytechnique, Ecole de Montréal, Canada, 2003.
- [2] PIERRE Louis, « Mécanique des fluides à masse volumique variable », Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1997.
- [3] RAYMOND Brun, « Manuel du Mécanicien et du Thermicien », Editions Techip, Paris, 1977.
- [4] ION Paraschivoiu, « Aérodynamique subsonique », Editions de l'école Polytechnique de Montréal (Québec), Canada, 1998.
- [5] BERKANE Houda, INFLUENCE DE L'EFFET THERMIQUE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE SUR UNE PAROI LISSE, L'Université Mohamed Khider Biskra, 2005.
- [6] ENCYCLOPEDIE ENCARTA ,2005.
- [7] R.OUZIAUX & J.PERRIER « Mécanique des fluides Appliquées » .dunod, paris, 1998.
- [8] Etienne GUYON-Jean-Pierre HULIN-Luc PETIT : Hydrodynamique physique Nouvelle Edition; Edition CNRS.
- [9] Arezki Smaili; Etude expérimentale de la couche limite turbulente qui se développe à l'aval d'une manipulation combinée utilisation des lamelles minces et paroi rainurée, Novembre 1991.
- [10] P.CHASSAING. "Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours". CÉPADÈUS, Paris, 2000.
- [11] H.SCHLISHTING. Boundary Layer theory .MC Graw-Hill, Newyork, 1968.
- [12] R.COMOLET .Mécanique Expérimentale des fluides. Tomes I et II, Masson, 1994.

Résumé

Nous avons mené une étude théorique et numérique d'une couche limite résultant d'un écoulement laminaire bidimensionnel d'un fluide incompressible passant sur une plaque plane. Cette couche limite est le domaine des forces de frottement importantes. Afin de résoudre les équations différentielles non linéaires contrôlant le phénomène physique, nous avons adopté la méthode RUNGE-KUTTA à résoudre car elle donne des résultats importants de précision, en plus de sa facilité de programmation. De plus, nous avons observé la couche limite théoriquement à l'aide d'une méthode (Le soufflage et l'aspiration) Comme nous l'avons noté, le processus de soufflage réduit l'adhérence des particules fluides sur la surface plane et cela prouve l'efficacité des techniques de contrôle dans ce type de problème.

ملخص

قمنا بدراسة نظرية وعددية لطبقة حدية ناتجة عن جريان صفائحي ثنائي الابعاد لمائع غير قابل للانضغاط يمر على صفيحة مستوية. هذه الطبقة الحدية تعتبر مجالا لقوى احتكاك كبيرة. ولحل المعادلات التفاضلية غير الخطية، المتحكمة في الظاهرة الفيزيائية اعتمدنا طريقة RUNGE-KUTTA للحل كونها تعطي نتائج ذات أهمية من الدقة، إضافة الى سهولة برمجتها. إضافة الى ذلك فقد قمنا بمراقبة الطبقة الحدية نظريا من خلال طريقة (le soufflage et l'aspiration) كما لا حضا ان عملية النفخ تقلل من التصاق جزيئات المائع مع السطح المستوي وهذا ما يثبت نجاعة تقنيات المراقبة في مثل هذا النوع من المسائل.