



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département: Génie Mécanique

# MÉMOIRE DE MASTER

**Domaine : Sciences et Techniques**

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : Mécanique énergétique**

Réf. :

---

Présenté et soutenu par :

**Nour el Houda Zidi**

Le : jeudi 10 septembre 2020

# Écoulement potentiel sur une plaque plane mince inclinée

---

**Jury :**

Dr. Labeled Adnane	MCA	Université de Biskra	Président
Dr. Chawki Mahboub	MCB	Université de Biskra	Rapporteur
Dr. Foud Chabane	MCA	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2019 – 2020.

# Remerciement

---

*Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la santé, le courage, la force et la patience pour accomplir ce modeste travail. En second lieu, je remercie ma famille pour le soutien morale et physique et encouragement tout au long de mes études.*

*Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur Dr. CHAWKI MAHBOB pour m'avoir fait confiance et m'avoir donné la possibilité de travailler dans ce sujet. Je tiens à le remercier également de m'avoir orienté, aidé et conseillé durant la réalisation de ce travail.*

*Mes remerciements vont aussi aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner et évaluer mon travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de l'enrichir par leur propositions.*

*Je remercie également Dr .M. SADEK ZIDI, de l'université de Jijel, pour ses efforts, encouragement, conseils et de m'avoir aidé tout au long de mes études universitaires.*

*Je voudrais remercier Prof. N. Moumami pour son aide et les informations qu'il m'a fournies.*

*Je voudrais adresser mes remerciements et exprimer ma profonde gratitude à tous mes enseignants, mes amis de la promotion et les étudiants du département de Génie mécanique de l'université Mohamed Khaider de Biskra et sans oublier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à notre formation dans ce département.*

*Au terme des années de préparation de mémoire master, je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.*

*Merci...*

*Je Dédie ce modeste Travail :*

*A mes parents.*

*A mes frères et mes sœurs (surtout mon grand frère*

*Mohamed Sadek).*

*A toute ma famille et à mes amis (surtout ma*

*meilleure amie. Anouar) et Nour el Houda, Manel,*

*Ikram, Aicha, Kinza.*

أمي و أبي

منكم تعلمنا أن للنجاح قيمة ومعنى ومنكم تعلمنا كيف يكون التفاني والإخلاص في العمل

ومعكم آمنا أن لا مستحيل في سبيل الإبداع والرقى لذا فرض علينا تكريمكم بأكاليل

الزهور الجورية.

اني مدينة لكم بكل ما وصلت إليه وما أرجو أن أصل إليه من الرفعة.

ZIDI NOUR EL HOUDA

## ملخص:

يتضمن هذا العمل دراسة جريان كوني ثنائي الأبعاد غير قابل للضغط حول صفيحة مسطحة رقيقة ذات ميل عشوائي لتحديد موضع نقطة التوقف و كذا توزيع السرعة على سطح هذه اللوحة. تم حل معادلة 'لابلاس-Laplace' التي تحكم الجريان بطريقة الفروق المحدودة وتمت مقارنة النتائج العددية مع النتائج التحليلية للإسقاط التشكيلي وكذلك مع نظرية 'هيس-Hess'. اظهرت النتائج ان الإسقاط التشكيلي يتنبأ بدقة بموضع نقطة التوقف. الا ان توزيع السرعة على سطح اللوحة يمكن حسابه من علاقة بسيطة تمت صياغتها في هذا العمل.

**كلمات مفتاحية:** جريان كوني؛ صفيحة مسطحة رقيقة و مائلة؛ توزيع السرعة؛ نقطة التوقف؛ الإسقاط التشكيلي؛ نظرية هيس.

---

## Résumé :

Ce travail consiste à étudier l'écoulement potentiel incompressible bidimensionnel autour d'une plaque plane mince d'une inclinaison arbitraire afin de déterminer la position du point de stagnation et la distribution de la vitesse sur la surface de cette plaque. L'équation de Laplace régissant le problème a été résolue avec la méthode des différences finies et les résultats numériques ont été comparés avec les résultats analytiques de la transformation conforme et également de la théorie de Hess. Les résultats montrent que la transformation conforme prédit la position du point de stagnation avec précision. La distribution de la vitesse sur la surface de la plaque peut cependant être calculée à partir d'une corrélation simple établie dans ce travail.

**Mots clés :** Ecoulement potentiel; Plaque plane mince inclinée; distribution de vitesse; point de stagnation; transformation conforme; théorie de Hess.

---

## **Abstract:**

This work consists in studying the two-dimensional incompressible potential flow around a thin flat plate of an arbitrary inclination in order to determine the position of the stagnation point and the velocity distribution on this plate's surface. The Laplace equation governing the problem was solved with the finite difference method and the numerical results were compared with the analytical results of the conformal mapping and also of the Hess theory. The results show that the conformal mapping predicts the position of the stagnation point accurately. The velocity distribution over the plate's surface can however be calculated from a simple correlation established in this work. **Keywords:** Potential flow; inclined thin flat plate; velocity distribution; stagnation point; conformal mapping; Hess theory.

# TABLE DES MATIÈRES

## Table des matières

Remerciement.....	II
Dédicaces.....	III
Résumé.....	IV
Table des matières.....	VI
Listes des figures.....	IX
Liste des tableaux.....	X
Nomenclature.....	XI
Introduction générale .....	1

## Chapitre I :Etat de l'art

I.1.Introduction.....	3
I.2.Définitions.....	3
I.2.1.Fluide idéal.....	3
I.2.2. Ecoulement permanent et non permanent.....	4
I.2.3. Fluides incompressible non-visqueux.....	4
I.2.4. Ecoulement bidimensionnel.....	4
I.3Equations de mouvement.....	4
I.3.1. Equation de continuité.....	4
I.3.2. Equation de Navier-stokes.....	5
I.4.Théorie des écoulements potentiels.....	5
I.4.1. Définition.....	5
I.4.2. Circulation de vitesse.....	6
I.4.3. Fonction de courant.....	6
I.4.3.1. Equation d'une ligne de courant et lien avec le débit.....	6
I.4.4. Equations des écoulements potentiels.....	7

# TABLE DES MATIÈRES

I.4.5. Fonction potentiel complexe.....	8
I.4.5.1. Ecoulements élémentaires.....	8
I.5. Ecoulement autour d'un corps rigide.....	9
I.5.1. Ecoulement autour d'un cylindre.....	9
I.5.2. Ecoulement autour d'un dièdre et coin.....	11
I.6. Transformation conforme.....	12
I.6.1. Définition.....	12
I.6.2. Propriété d'une transformation conforme.....	13
I.6.3. Les transformations de Joukovski.....	14
I.7. Théorie de Hess.....	15
I.7. Vitesse potentielle tangente à une plaque plane inclinée.....	18
I.8. Simulation numérique.....	19
I.8.1. Méthode de différences finies.....	19
I.8.2. Méthodes itératives.....	20
<b>Chapitre II : Simulation numérique</b>	
II.1. Introduction.....	22
II.2. Description du problème et hypothèses.....	22
II.3. Modèle mathématique.....	23
II.4. Formulation en différences finies.....	25
II.4.1. Maillage.....	25
II.4.2. Approximation en différences finies.....	26
II.5. Algorithme de résolution.....	27

# TABLE DES MATIÈRES

## Chapitre III : Résultat et discussion

III.1.Introduction.....	29
III.2.Résultats et interprétation.....	29
III.3.Conclusion.....	35
Conclusion générale.....	36
Référence.....	37

# LISTE DES FIGURES

## Listes des figures

<b>Fig. I. 1.</b> Circulation de la vectrice vitesse.....	5
<b>Fig. I. 2.</b> Débit volume entre deux lignes de courant.....	7
<b>Fig. I. 3.</b> Ecoulement autour d'un cylindre sans circulation et avec circulation $\Gamma = 4\pi a U_{\infty} \sin \alpha$ .....	10
<b>Fig. I. 4.</b> Ecoulement un coin et autour d'un dièdre d'angle quelconqu.....	11
<b>Fig. I. 5.</b> Schéma de la correspondance entre domaines des plans $z$ et $Z$ .....	11
<b>Fig. I. 6.</b> La transformation Joukovski d'un cercle centré.....	14
<b>Fig. I. 7.</b> Génération des solutions en utilisant une densité de sources pour un corps partiel.....	15
<b>Fig. II. 1.</b> Modèle physique du problème.....	23
<b>Fig. III. 1.</b> Contour des lignes de courant pour angles d'incidence $0^\circ$ et $15^\circ$ de la plaque..	29
<b>Fig. III. 2.</b> Contour des lignes de courant pour angles d'incidence $30^\circ$ et $45^\circ$ de la plaque.....	30
<b>Fig. III. 3.</b> Contour des lignes de courant pour angles d'incidence $60^\circ$ et $75^\circ$ de la plaque.....	30
<b>Fig. III. 4.</b> Contour des lignes de courant pour angle d'incidence $90^\circ$ de la plaque.....	31
<b>Fig. III. 5.</b> Distribution de la vitesse pour différents angles d'incidence de la plaque.....	32
<b>Fig. III. 6.</b> Distribution de la fonction $f(x/a)$ .....	33

# LISTE DES TABLEAUX

## Liste des tableaux

<b>Tableau I- 1</b> Ecoulements élémentaires.....	8
<b>Tableau III. 1:</b> Comparaison de la solution numérique et les solutions analytiques de $f(x/a)$ .....	34
<b>Tableau III. 2:</b> Comparaison de la solution numérique et les solutions analytiques de $x_{psa}$ .....	35

# Nomenclature

## Nomenclature

### Lettres latines

$V$  ou  $q$  : Vitesse (m/s).

$u, v, w$  : Composantes du champ de vitesse (m/s).

$m$  : Masse (kg).

$p$  : La pression (N/m<sup>2</sup>)

$t$  : temps (s).

$Q_v$  : Débit volumique (m<sup>3</sup>/s).

$U_\infty$  : Vitesse de l'écoulement uniforme.

$r$  et  $a$  : Rayons de cercle (m).

$V_T$  : Vitesse tangentielle

$A$  : Matrice

$h$  : Epaisseur.

$a$  : Demi-longueur de la plaque

### Lettres grecques

$\rho$  : Masse volumique (kg/m<sup>3</sup>).

$\nu$  : Viscosité cinématique (m<sup>2</sup>/s).

$\sigma$  et  $\tau$  : Contraintes normales et tangentielles.

$\bar{\tau}$  : La contrainte de cisaillement

$\nabla$  : Opérateur de dérivation (nabla).

$\mu$  : Viscosité dynamique (pa. s).

$\phi$  : Potentiel des vitesses.

# Nomenclature

$\psi$  : Fonction de courant.

$\Gamma$  : Circulation.

$\zeta$  : Fonction de transformation conforme.

$\xi, \eta$  : Coordonnées dans le plan  $\zeta$ .

$\alpha$  : Angle d'incidence de la plaque (deg).

## Nombres adimensionnels

$\Psi$  : Fonction de courant sans dimension.

$x_{ps}$  : Point de stagnation.

## Indice

$\partial$  : Dérivée partielle.

(i, j, k) : Direction de projection

(x, y, z) : Coordonnées cartésiennes.

(r  $\theta$  z) : Coordonnées cylindriques.

# Introduction générale

# Introduction générale

## 1. Introduction générale

La mécanique des fluides est un outil essentiel pour l'ingénieur dans l'étude, la conception et le dimensionnement des systèmes fluides rencontrés aussi bien dans les écoulements naturels que dans les procédés industriels. D'un point de vue pratique, le champ des applications mettant en jeu des écoulements fluides est très vaste. Il couvre des domaines très diversifiés qui s'étalent du domaine du vivant comme dans les applications médicales ou biologiques aux domaines industriels et environnementaux comme les applications dans l'aéronautique, l'énergétique, l'hydraulique, etc. [1].

L'une des premières théories en mécanique des fluides est celle décrivant les écoulements irrotationnels d'un fluide parfait, homogène, incompressible, en présence de forces de volume conservatives, que l'on appelle écoulements potentiels. La description mathématique de cette classe d'écoulements se ramène à une équation aux dérivées partielles linéaire. Cette simplification permet d'avoir recours aux techniques analytiques développées pour résoudre l'équation de Laplace [2]. Mais contrairement à la connaissance établie que les corps rigides sont bien évidemment soumis à une force de résistance ou traînée non nulle lorsqu'ils se déplacent à vitesse constante dans un fluide réel, l'hypothèse d'écoulement potentiel nous amène à conclure que la traînée est nulle, résultat connu sous le nom de "paradoxe de d'Alembert" [2]. Le problème de l'écoulement potentiel incompressible autour d'un corps solide a longtemps été d'un intérêt pratique en mécanique des fluides en raison de l'accord surprenant entre cet écoulement simple et un écoulement réel à faible vitesse sans séparation de couche limite. Il pourrait donc être utilisé pour mener des études approximatives rapides afin d'établir la faisabilité d'une procédure de conception proposée. Pour des corps de forme générale, même le problème de l'écoulement potentiel n'est pas aussi facile et il faut recourir à des techniques numériques [3]; cependant l'effort numérique dans ce cas est largement réduit par rapport à l'écoulement réel (visqueux).

### Objectif du sujet

Dans ce travail, nous étudierons l'écoulement potentiel autour d'une plaque plane mince inclinée (qui peut être un panneau solaire, aile, toit de bâtiment, filtre fibreux, etc.) afin de déterminer la distribution de la vitesse de l'écoulement potentiel immédiatement sur la

# Introduction générale

surface de cette plaque et également de déterminer la position du point de stagnation. Les résultats peuvent servir de conditions aux limites dans un écoulement de couche limite se développant sur cette plaque. A cause des singularités présentées dans les solutions analytiques de ce problème disponibles dans la littérature, nous choisissons dans ce travail la simulation numérique.

## **Organisation du mémoire**

Pour atteindre l'objectif visé, nous avons organisé notre travail en trois chapitres : dans le premier on présente des généralités sur la mécanique des fluides, la théorie des écoulements potentiels, et aussi une recherche bibliographique sur les solutions analytiques du problème en question; le deuxième est réservé pour une description générale du problème et pour la simulation numérique; le dernier chapitre est dédié à la présentation des résultats de la simulation numérique et à leur interprétation; finalement et à la lumière de ces résultats l'étude se termine par une conclusion générale.

# chapitr. I

## I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques définitions, propriétés et équations fondamentales de la mécanique des fluides. Conformément au thème de ce mémoire, nous allons donner une attention particulière aux écoulements potentiels bidimensionnels et à la théorie de Hess.

## I.2 Définitions

### I.2.1. Fluide idéal

Un fluide est dit parfait ou idéal si sa viscosité est négligeable donc c'est un fluide non-visqueux. Lorsque ce fluide est en mouvement la résistance au mouvement ou les contraintes de frottement sont négligeables. Ces fluides peuvent être incompressible ou compressible lorsqu'ils sont en mouvement irrotationnel ils sont aussi appelés écoulement potentiels [4].

### I.2.2. Ecoulement permanent et non permanent

La classe des écoulements permanents ou stationnaire est telle que toute fonction  $f(M, t)$  du champ de l'écoulement vérifie en tout point la condition [5] :

$$\forall M, \frac{\partial f(M, t)}{\partial t} = 0$$

Par contre, l'écoulement non permanent ou instationnaire, est celui dont les propriétés varient dans le temps.

### I.2.3. Fluides incompressible non-visqueux

C'est des fluides pour lesquels la viscosité est négligeable et la variation de la masse volumique est faible (l'eau et les gaz à faibles vitesses).

Ces fluides lorsqu'ils sont en mouvement sont appelés écoulement potentiels. Ces fluides sont étudiés par l'hydrodynamique.

- Ecoulement non-visqueux : c'est un écoulement d'un fluide de viscosité négligeable et pour lequel les contraintes de frottement sont nulles [4].

## I.2.4. Ecoulement bidimensionnel

Si un écoulement est considéré bidimensionnel, par exemple dans le plan  $(x, y)$ , alors le vecteur vitesse dans ce cas s'écrit :  $\vec{q} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$

## I.3 Equations de mouvement

La mécanique des fluides est un domaine généralement complexe régi par un ensemble d'équations non-linéaires, dont une solution analytique ne peut être existée que lorsqu'on prend en considération des hypothèses permettant de simplifier ces équations.

### I.3.1. Equation de continuité

L'équation de continuité décrit mathématiquement le principe de conservation de masse dans un volume occupé par un fluide en écoulement. Dans le cas général d'un écoulement compressible instationnaire, elle s'écrit sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{I.1})$$

### I.3.2. Equation de Navier-stokes [6]

L'équation de Navier-Stokes issue du principe fondamental de la dynamique (ou la seconde loi de Newton) qui décrit la conservation de quantité de mouvement :

$$\sum F = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{I.2})$$

Cette équation s'exprime sous la forme locale :

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \rho (\vec{q} \cdot \vec{\nabla}) \vec{q} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \bar{\tau} + \rho \vec{f} \quad (\text{I.3})$$

En considérant l'hypothèse d'un fluide newtonien dont le tenseur de contraintes de cisaillement (visqueuses) est lié au tenseur de déformation par une relation linéaire, avec la viscosité dynamique comme coefficient de proportionnalité, et aussi l'hypothèse de Stokes reliant la viscosité dynamique et la seconde viscosité, la projection sur les trois axes d'un repère cartésien de l'équation (I.3) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div} \vec{q}) + g_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div} \vec{q}) + g_y \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div} \vec{q}) + g_z$$

### I.4 Théorie des écoulements potentiels

#### I.4.1. Définition

Un écoulement potentiel est une propriété intéressante d'un fluide parfait, c'est-à-dire le fluide est incompressible, sans viscosité et initialement irrotationnel [7]. Un écoulement irrotationnel est également appelé écoulement potentiel, lorsque le rotationnel de son champ de vitesse est égal au vecteur nul [8] :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = 0 \tag{I.5}$$

On a alors existence d'un potentiel des vitesses  $\phi$  tel que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{I.6}$$

#### I.4.2. Circulation de vitesse [9]

La circulation élémentaire de vitesse le long d'un élément d'arc orienté  $\vec{ds}$  vaut, par définition :

$$d\Gamma = \vec{q} \cdot \vec{n} dl = \overrightarrow{\text{grad} \phi} \cdot \vec{n} dl = d\phi \tag{I.7}$$

Avec:  $\vec{n} dl = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$

La variation de la fonction est prise le long de l'élément de courbe, sous forme intégrale :

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{q} \cdot \vec{n} dl = \int_A^B d\phi \Rightarrow \Gamma_{AB} = \phi_B - \phi_A \tag{I.8}$$

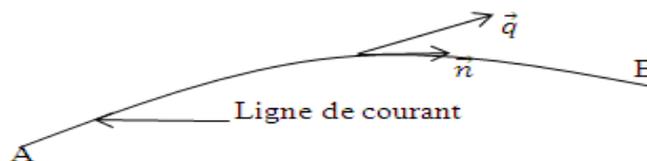


Fig. I. 1. Circulation de la vectrice vitesse [9].

#### I.4.3. Fonction de courant [8]

Pour un écoulement incompressible rotationnel ou irrotationnel bidimensionnel, la fonction de courant  $\psi$  est définie dans le plan  $(x, y)$  par :

$$\vec{q} = \vec{v}\psi \cdot \vec{k} \quad (\text{I.9})$$

Où  $\vec{k}$  désigne le vecteur unitaire dans la direction d'invariance géométrique. Donc :

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (\text{I.10})$$

### I.4.3.1. Equation d'une ligne de courant et lien avec le débit [10]

Dans un écoulement plan incompressible et bidimensionnel, on peut écrire la variation élémentaire de  $\psi$  et de  $\phi$  entre deux points sous la forme :

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = udy - vdx \quad (\text{I.11})$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = udx + vdy \quad (\text{I.12})$$

Dans la même ligne de courant ( $\psi = C^{te}$ ) nous avons  $d\psi = 0$ , donc d'après (I.10) :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

De même, dans la même ligne équipotentielle ( $\phi = C^{te}$ ) nous avons  $d\phi = 0$ , et donc d'après (I.11) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{u} = -\frac{dx}{v} \quad (\text{I.13})$$

En écoulement incompressible le débit volumique entre ces deux lignes de courant (Fig. I.2) s'exprime simplement par la différence entre deux valeurs de la fonction de courant  $\psi$  :

$$Q_v = \int_A^B \vec{q} \cdot \vec{n} dl \quad (\text{I.14})$$

$$\text{Avec : } \vec{n} dl = dy\vec{i} - dx\vec{j}$$

A partir de la relation (I.14), le débit volumique est donné par :

$$Q_v = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (\text{I.15})$$

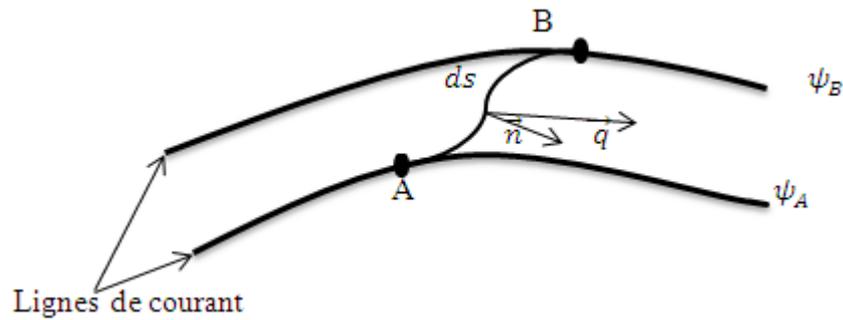


Fig. I. 2. Débit volume entre deux lignes de courant [10].

### I.4.4. Equations des écoulements potentiels

Dans le cas d'un écoulement potentiel, le problème peut être considérablement simplifié, en remplaçant par (I.5) dans l'équation de continuité, ou par (I.9) dans l'expression du rotationnel de vitesse, ce qui conduit à deux équations de Laplace (une pour le potentiel de vitesse  $\phi$  et l'autre pour la fonction de courant  $\psi$ ) :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{I.16}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{I.17}$$

Le champ de vitesse peut être obtenu en résolvant seulement l'une de ces équations.

### I.4.5. Fonction potentiel complexe [10]

Le potentiel complexe est défini comme étant une fonction de la variable complexe  $z = x + iy$ , telle que :

$$F(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \tag{I.18}$$

Cette fonction est alors dérivable par rapport aux directions  $x$  ou  $iy$  et on peut ainsi en déduire les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{I.19}$$

Dont la vitesse complexe  $w(z)$  est définie par :

$$w(z) = \frac{dF(z)}{dz} = u(x, y) - i v(x, y) \tag{I.20}$$

## I.4.5.1. Ecoulements élémentaires [11]

Type d'écoulement	Potentiel complexe	Champs de vitesse	$\phi(x, y), \psi(x, y)$
Uniforme	$F(z) = U_{\infty} \cdot z \cdot e^{-i\alpha}$	$u = U_{\infty} \cos\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ $v = U_{\infty} \sin\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial y}$	$\phi = U_{\infty} X$ $\psi = -U_{\infty} Y$
Source-puits <sup>1</sup>	$F(z) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z$	$v_r = \frac{Q}{2\pi r}$ $v_{\theta} = 0$	$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$ $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$
Doublet-dipôle <sup>2</sup>	$F(z) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{z}$	$v_r = -\frac{\mu}{2\pi r^2} \cos(\theta - \alpha)$ $v_{\theta} = -\frac{\mu}{2\pi r^2} \sin(\theta - \alpha)$	$\phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x \cos\alpha + y \sin\alpha}{x^2 + y^2}$ $\psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x \sin\alpha - y \cos\alpha}{x^2 + y^2}$
Tourbillon vortex <sup>3</sup>	$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$	$v_r = 0$ $v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$	$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

**Tableau I- 1** Ecoulements élémentaires.

<sup>1</sup>  $Q$  est le débit de la source; <sup>2</sup>  $\mu$  est l'intensité du doublet; <sup>3</sup>  $\Gamma$  est la circulation du tourbillon.

## I.5 Ecoulement autour d'un corps rigide [8]

### I.5.1. Ecoulement autour d'un cylindre

• Sans circulation : l'écoulement autour d'un cylindre est obtenu par la superposition d'un doublet plan et un écoulement uniforme avec  $\alpha = 0$  (voir Tableau I.1), donc le potentiel complexe s'écrit :

$$F(z) = U_{\infty} \cdot z + \frac{\mu}{2\pi z} \tag{I.21}$$

La fonction de courant et potentiel d'après (I.21) s'écrivent respectivement :

$$\psi = \left( U_\infty r - \frac{\mu}{2\pi r} \right) \sin \theta \quad \phi = \left( U_\infty r + \frac{\mu}{2\pi r} \right) \cos \theta$$

Pour la condition aux limites  $\psi(a, \theta) = 0$ , avec  $a$  est le rayon du cylindre, on aura :

$$\psi(r, \theta) = U_\infty \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad \phi = U_\infty \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (\text{I.22})$$

Et le champ de vitesse est exprimé par :

$$\begin{cases} v_r(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

• Avec circulation : l'écoulement autour d'un cylindre est obtenu par la superposition un écoulement autour d'un cylindre sans circulation et le tourbillon d'intensité  $\Gamma$  (voir le Tableau I.1), donc le potentiel complexe s'écrit :

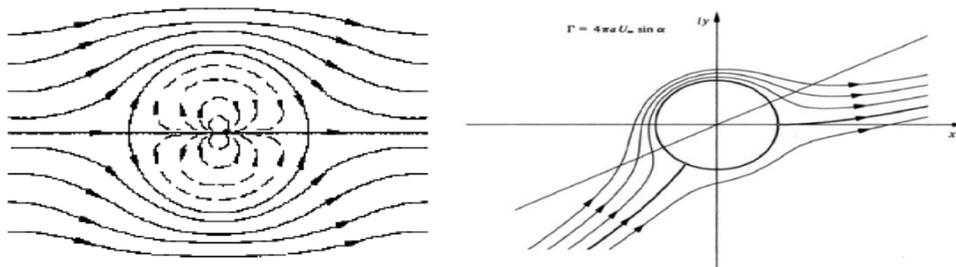
$$F(z) = U_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z + iC \quad (\text{I.24})$$

Où  $C$  est une constante ajoutée pour vérifier la condition aux limites  $\psi(a, \theta) = 0$ . La fonction de courant et le potentiel de vitesse d'après (I.22) :

$$\psi(r, \theta) = U_\infty \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{a} \right) \quad \phi(r, \theta) = U_\infty \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{I.25})$$

Le champ de vitesse est alors exprimé par :

$$\begin{cases} v_r(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ v_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (\text{I.26})$$



**Fig. I. 3.** Écoulement autour d'un cylindre sans circulation et avec circulation  $\Gamma = 4\pi a U_\infty \sin \alpha$  [11].

## I.5.2. Ecoulement autour d'un dièdre et coin [12]

On Considère un écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = mz^{n+1} \quad \text{Où } m \text{ et } n \text{ sont deux réels } n \geq -\frac{1}{2}$$

En coordonnées cylindrique :  $f(z) = mr^{n+1}[\cos[(n+1)\theta] + i \sin[(n+1)\theta]] = \phi + i\psi$

$$\text{On a alors } \begin{cases} \phi(r, \theta) = mr^{n+1} \cos[(n+1)\theta] \\ \psi(r, \theta) = mr^{n+1} \sin[(n+1)\theta] \end{cases}$$

Le champ de vitesses s'obtenant par :

$$\vec{V} \begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = m(n+1)r^n \cos[(n+1)\theta] \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -m(n+1)r^n \sin[(n+1)\theta] \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

Les lignes de courant passant par l'origine vérifient :

$$\psi(r, \theta) = C^{te} =$$

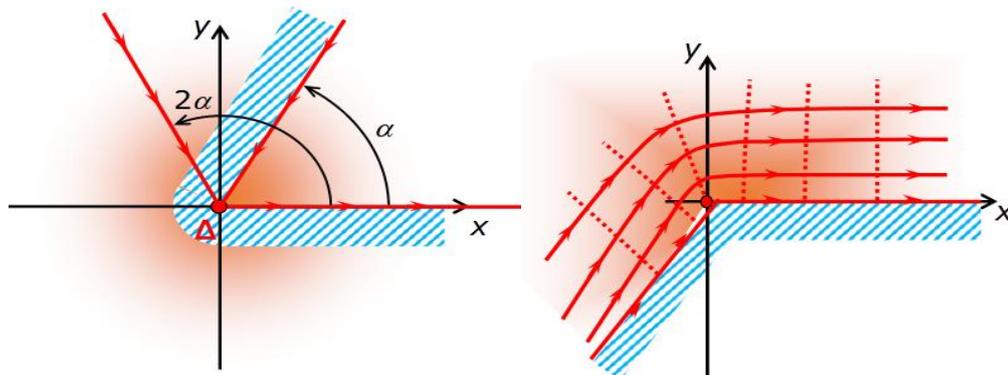
$$mr^{n+1} \sin[(n+1)\theta] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \sin[(n+1)\theta] = 0 \Rightarrow \theta = \frac{k}{(n+1)}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Si  $k = 0$  :  $\theta = 0 \Rightarrow$  demi-droite  $(Ox)$ .

Si  $k = 1$  :  $\theta = \frac{\pi}{(n+1)} = \alpha \Rightarrow$  demi-droite d'angle  $\alpha$  avec  $(Ox)$ .

Si  $k = 2$  :  $\theta = \frac{2\pi}{(n+1)} = 2\alpha \Rightarrow$  demi-droite d'angle  $2\alpha$  avec  $(Ox)$ .

Les lignes de courant pouvant être assimilées à des barrières infranchissables, celles passant par le point d'arrêt forment des «coins» : ce sont les coins d'arrêt.



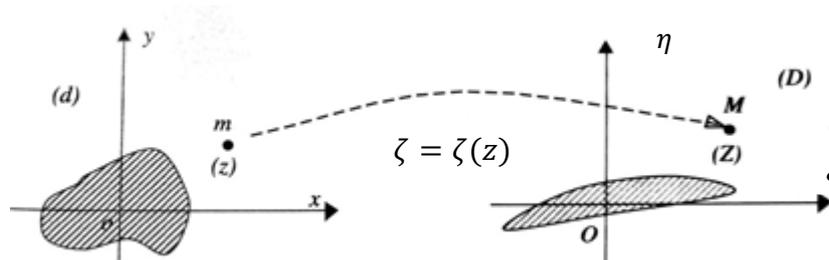
**Fig. I. 4.** Ecoulement un coin et autour d'un dièdre d'angle quelconque [12].

**I.6 Transformation conforme**

L'idée est de générer, à partir d'une fonction potentiel complexe d'un écoulement connu, une autre fonction représentative d'un écoulement nouveau, en procédant par une transformation de coordonnées notée symboliquement  $z \rightarrow \zeta$ . Cette transformation doit avoir certaines propriétés; on parle alors de transformation ou représentation conforme [5].

**I.6.1. Définition**

La transformation est dite conforme puisqu'un petit triangle dans le plan  $\zeta$  correspond à un triangle semblable dans le plan  $z$  [11]. Soit  $\zeta = \zeta(z)$  une fonction définie sur un domaine  $(d)$  du plan  $(x, y)$  auquel elle fait correspondre un domaine  $(D)$  du plan  $(\xi, \eta)$ .



**Fig. I. 5.** Schéma de la correspondance entre domaines des plans  $z$  et  $Z$  [5].

Telle qu'elle est schématisée à la figure (I.10), la représentation du domaine  $(d)$  en le domaine  $(D)$  sera dite conforme si et seulement si la fonction  $\zeta(z)$  est :

- Définie et continue dans  $(d)$ .
- Bijective.
- Holomorphe et à dérivée non nulle dans tout le domaine  $(d)$ .

Cet ensemble d'hypothèses assure l'existence d'une correspondance inverse de  $(D)$  sur  $(d)$ , qui est holomorphe dans tout le domaine  $(D)$  [5].

**I.6.2. Propriété d'une transformation conforme [11]**

Nous considérons deux variables complexes  $\zeta = \xi + i\eta$  et  $z = x + iy$  et leurs plans complexes correspondants  $\zeta$  et  $\eta$ .

Le développement d'une fonction  $\zeta = \zeta(z)$  en série de Taylor au voisinage d'un point  $z = z_0$  où  $\zeta = \zeta(z_0) \equiv \zeta_0$  s'écrit :

$$d\zeta = \zeta - \zeta_0 = (z - z_0) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{2!} \frac{d^2\zeta}{dz^2} \Big|_{z=z_0} \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} \frac{d^n\zeta}{dz^n} \Big|_{z=z_0}$$

Pour les coordonnées polaires  $r_\theta$  et  $s_\theta$  dans les plans  $z$  et  $\zeta$  respectivement, l'équation de  $d\zeta$  s'écrit sous la forme :  $se^{i\theta} = re^{i\theta}\zeta'(z_0)$

Supposons qu'un écoulement est donné dans le plan  $z$ , défini par son potentiel complexe  $F(z)$ . Par la transformation  $\zeta(z)$ ,  $z$  est défini comme une fonction inverse de  $\zeta$ , et nous pouvons écrire :

$$F(z) = F(z(\zeta)) \equiv G(\zeta) \tag{I.28}$$

Où  $G(\zeta)$  la fonction potentielle complexe dans le plan  $\zeta$ . Les lignes équipotentiels et les lignes de courant de l'écoulement original dans le plan  $z$  sont transformées et prennent des formes différentes dans le plan  $\zeta$ . Cela découle directement de l'équation (I.34) et de la définition (I.16) du potentiel  $F(z)$  :

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = G(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta) \tag{I.29}$$

La vitesse complexe dans le plan  $\zeta$  est obtenue comme suit :

$$w_\zeta = G'(\zeta) = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{w(z)}{\zeta'(z)} \tag{I.30}$$

La circulation complexe demeure invariable par la transformation :

$$(\Gamma + iQ)_\zeta = \int_{C_\zeta} G'(\zeta) d\zeta = \int_{C_z} \frac{w(z)}{\zeta'(z)} \frac{d\zeta}{dz} dz = (\Gamma + iQ)_z \tag{I.31}$$

Où  $C_\zeta$  représente, la transformée de la courbe fermée  $C_z$ .

### I.6.3. Les transformations de Joukowski

La transformation de Joukowski est l'une des transformations les plus importantes de la mécanique des fluides. Selon cette transformation et les solutions des écoulements potentiels élémentaires déjà vus précédemment, il est possible d'obtenir des solutions pour l'écoulement autour de l'ellipse et d'une famille d'ailerons. La transformation de Joukowski est définie par [13] :

$$\zeta(z) = z + \frac{a^2}{z}; \forall z \neq 0 \tag{I.32}$$

Où  $a$  nombre réel

Posons  $z = re^{i\theta}$ ; pour le point-image dans le plan  $\zeta$  on obtient :

$$\zeta = r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} = s e^{i\vartheta} \tag{I.33}$$

Le point infini n'est pas changé par la transformation puisque

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a^2}{z} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \zeta(z) = z$$

Par conséquent l'écoulement à grande distance de l'origine est identique dans les deux plans. La transformation change un cercle centré à l'origine dans le plan  $z$  en une ellipse dans le plan  $\zeta$  (voir la Fig. I. 12). Soit donc un cercle donné par  $z = r_0 e^{i\theta}$ , selon (I.36) on obtient [11] :

$$\zeta = r_0 e^{i\theta} + \frac{a^2}{r_0} e^{-i\theta} = \left(r_0 + \frac{a^2}{r_0}\right) \cos \theta + i \left(r_0 - \frac{a^2}{r_0}\right) \sin \theta = \xi + i\eta \tag{I.34}$$

Après l'élimination de  $\theta$  il résulte :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \frac{\xi^2}{\left(r_0 + \frac{a^2}{r_0}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(r_0 - \frac{a^2}{r_0}\right)^2}$$

Ce qui représente une ellipse dans le plan  $\zeta$ . Les deux foyers sont situés sur l'axe  $\xi$  en  $\xi = \pm 2a$  [13].

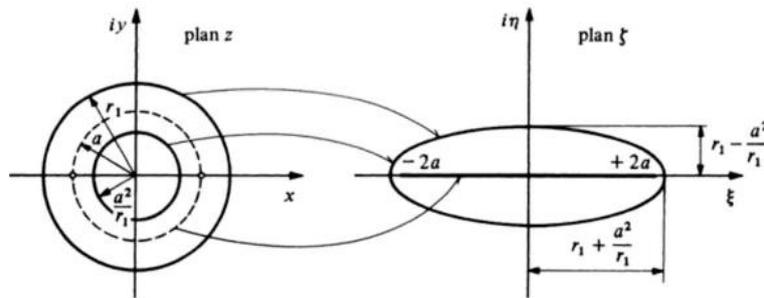


Fig. I. 6. La transformation Joukowski d'un cercle centré [11].

### I.7 Théorie de Hess

Dans l'article de Hess [3], il a présenté une nouvelle classe de solutions analytiques au problème de l'écoulement potentiel bidimensionnel. Il existe deux méthodes de solutions : direct et indirecte. Dans le premier cas, le corps est spécifié au départ puis le champ d'écoulement doit être calculé. On note que ce problème est résolu numériquement pour des corps arbitraires. Par contre, il existe des solutions analytiques, pour peu de cas,

basées principalement sur la séparation des variables ou *la transformation conforme*. En ce qui concerne la solution indirecte, elle est basée sur l'utilisation des singularités d'écoulement, telles que les sources, les tourbillons et les dipôles. Chaque singularité donne naissance à un champ de vitesse qui satisfait les équations de base de l'écoulement potentiel sauf à la singularité elle-même.

Les solutions de la méthode indirecte sont basées sur la superposition des sources. On rappelle que cette méthode possède plusieurs points en commun avec la méthode introduite par Rankine (1871). La vitesse au point  $(x, y)$  associée à une source au point  $(\xi, \eta)$  d'intensité égale à 1 est donnée par :

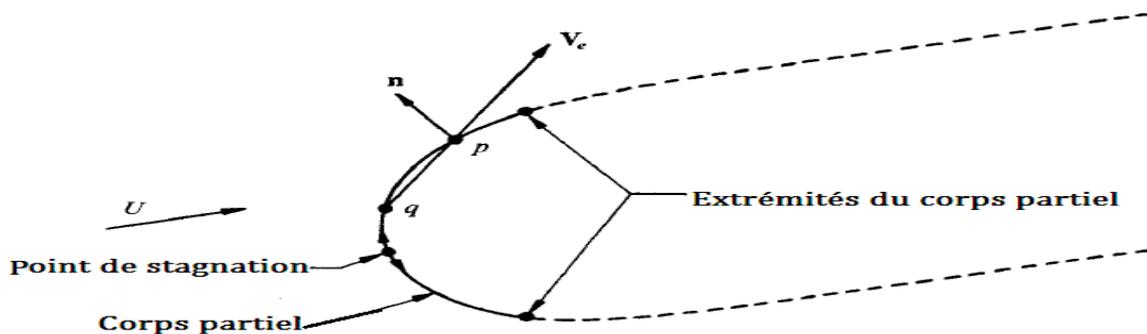
$$V_e = \left(\frac{2}{r^2}\right) [(x - \xi)i + (y - \eta)j] \quad (\text{I.35})$$

Avec :

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

Où  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont des vecteurs unitaires le long des axes x et y.

L'écoulement de Rankine le plus simple est obtenu à partir d'un écoulement uniforme de vitesse U parallèle à l'axe x.



**Fig. I. 7.** Génération des solutions en utilisant une densité de sources pour un corps partiel [3].

Le champ de vitesse est donnée par :

$$V = \left(U \frac{2Kx}{x^2+y^2}\right) i + \frac{2Ky}{x^2+y^2} j \quad (\text{I.36})$$

Où K est l'intensité de la source. On peut montrer que les coordonnées  $(x, y)$  sont liées l'une à l'autre par la formule :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \tan\left(\frac{\pi y}{h}\right)$$

Où h est l'épaisseur définie par :

$$h = \frac{2\pi}{U} K$$

On exprime les champs de vitesse V par :  $V = \oint V_e \sigma ds + U$

Où  $\sigma$  est la distribution de source liées au corps et s la longueur infinitésimale de l'arc.

La condition de vitesse minimale nulle sur les frontières est :

$$2\pi\sigma(p) + \oint (V_e \cdot n) \sigma(q) ds = -n \cdot U \quad (\text{I.37})$$

Où p est le point  $(x, y)$  (c'est un point sur le corps), et q les point  $(\xi, \eta)$ , et le vecteur n est la normale au point p.

- Solution spécifique : **nez-plat (Flat-nosed body)**

Dans ce cas, on suppose que le produit scalaire  $V_e \cdot n = 0$ . La solution générale est donnée

$$\text{par : } \begin{cases} V_x = U \cos \alpha \left\{ \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{d-y}{x} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{d+y}{x} \right) \right] + 1 \right\} \\ V_y = U \left[ \frac{\cos \alpha}{2\pi} \log \left( \frac{(d+y)^2 + x^2}{(d-y)^2 + x^2} \right) + \sin \alpha \right] \end{cases}$$

$$\text{Si } (x = 0) \text{ et } V_x = 0 \Rightarrow V_y = U \left[ \frac{\cos \alpha}{\pi} \log \left( \frac{1+\frac{y}{d}}{1-\frac{y}{d}} \right) + \sin \alpha \right]$$

- Solution spécifique : **arc circulaire concave (concave circular arc)**

Dans ce cas, on suppose que le produit scalaire  $V_e \cdot n = -\frac{1}{a}$ , avec :

$$n = -\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}$$

$$V_e = \left( \frac{2a}{r^2} \right) [(\cos\theta - \cos\phi) \vec{i} + (\sin\theta - \sin\phi) \vec{j}]$$

$$r^2 = 2a^2 [1 - \cos(\theta - \phi)]$$

On montre que la vitesse tangente est donnée par :

$$\frac{V_T}{U} = \frac{1}{\pi} \left[ \cos(\theta - \alpha) + \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\pi - \beta} \right] \log \left( \frac{\tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\theta}{2}} \right) + \left( \frac{\beta}{\pi} - 1 \right) \quad (\text{I.38})$$

Où  $V_T$  est définie par le produit scalaire de V avec  $t = -\sin\theta i + \cos\theta j$ .

- Solution spécifique : **arc circulaire convexe (convex circular arc)**

Dans ce cas, on suppose que le produit scalaire  $V_e \cdot n = \frac{1}{a}$ . La vitesse tangentielle est donnée

$$\frac{v_T}{U} = \frac{1}{\pi} \left[ \cos(\theta + \alpha) - \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\pi - \beta} \right] \log \left( \frac{\tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\theta}{2}} \right) + \left( \frac{\beta}{\pi} + 1 \right) \sin(\theta + \alpha) + \pi^{-1} \sin\beta \sin\alpha$$

- Un cas spécial pour  $\theta = \beta$ , on peut montrer que  $\sigma$  est donnée par :  $\sigma(\beta) = \frac{U}{2\pi} \left[ \cos\beta - \frac{\sin\beta}{\pi + \beta} \right]$

La plus grande valeur de l'angle  $\beta$  qui donne un écoulement physique pour le cas symétrique

( $\alpha = 0$ ) est définie par :

$$\tan\beta_m = \pi + \beta_m \text{ Donc } \beta = 77.45^\circ. \quad (\text{I.39})$$

## I.8 Vitesse potentielle tangente à une plaque plane inclinée [14]

L'expression du composant de vitesse local parallèle à la surface de la plaque ( $y = 0$ ) face à l'écoulement entrant uniforme peut être dérivée de la transformation conforme de la solution d'écoulement potentielle après un cylindre circulaire ou de la théorie de Hess comme :

$$\frac{u}{U_\infty} = \cos \alpha + f \left( \frac{x}{a} \right) \sin \alpha \quad (\text{I.40})$$

• Relation entre la distribution de vitesse et la transformation conforme :

On peut montrer que ;

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{\sin \alpha - \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta} \quad (\text{I.41})$$

On utilise les relations trigonométriques pour réécrire (I.41) sous la forme :

$$\frac{u}{U_\infty} = \cos \alpha - \sin \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Avec :

$$\cos \theta = \frac{x}{a} \text{ et } \sin \theta = \mp \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2}$$

Donc, la forme finale de la distribution de vitesse s'écrit :

$$\frac{u}{U_\infty} = \cos \alpha - \sin \alpha \frac{\frac{x}{a}}{\mp \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2}} \Rightarrow \frac{u}{U_\infty} = \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{\left( \frac{x}{a} \right)^2}{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2}}$$

Avec  $f\left(\frac{x}{a}\right)$  est la distribution sans dimension de la vitesse pour l'écoulement normal de la plaque plate ( $\alpha = \pi/2$ ). Elle est donnée par :

$$f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \quad (\text{I.42})$$

• Vitesse de la théorie de Hess :

La vitesse dans la théorie de Hess est donnée par :

$$u = U_\infty \left[ \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \right) \sin \alpha \right] \Rightarrow u = U_\infty \left[ \cos \alpha + \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1+x/a}{1-x/a} \right) \sin \alpha \right]$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{u}{U_\infty} = \cos \alpha + \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1+x/a}{1-x/a} \right) \sin \alpha$$

Donc,

$$f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1+x/a}{1-x/a} \right) \quad (\text{I.43})$$

## I.9 Simulation numérique [15]

La simulation numérique est utilisée dans de nombreux domaines de recherche et développement : mécanique, mécanique des fluides, science des matériaux et science humaines. La simulation numérique désigne le procédé selon lequel on exécute des programmes sur des ordinateurs en vue de représenter un phénomène physique.

Les simulations numériques scientifiques reposent sur la mise en œuvre de modèles théoriques. Elles sont donc une adaptation aux moyens numérique des modèles mathématiques. Elles servent à étudier le fonctionnement et les propriétés d'un système et à en prédire l'évolution.

### I.9.1. Discrétisation des EDP (méthode de différences finies)

En mathématique, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines condition concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante ( $u$  dans les suivants) des variables indépendantes  $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$  et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme [16] :

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0 \quad (\text{I.44})$$

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles des méthodes (différences finies, volumes finies et éléments finies) [17].

### I.9.1.1. Méthode de différences finies

Le principe fondamental de cette méthode consiste à appliquer au domaine d'étude un maillage en nœuds dont la finesse permet de donner une bonne approximation des contours du domaine. Ensuite, en appliquant le développement limité en série de Taylor de la fonction à déterminer dans chaque nœud du maillage, ce qui permet d'obtenir un nombre d'équation algébrique égale au nombre des valeurs d'inconnues des grandeurs étudiées.

Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée.

Soit  $f(x, y)$  une fonction continue et dérivable de classe  $C^\infty$ , alors la dérivée partielle première de  $f$  par rapport à  $x$  est calculée par la formule [18] :

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x+h_x, y) - f(x, y)}{h_x} \quad (\text{I.45})$$

Le développement de Taylor par rapport à  $x$

$$f(x + h_x, y) = f(x, y) + h_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + O(h^2) \quad (\text{I.46})$$

Où  $O(h^2)$  l'erreur.

#### • Schémas aux différences finies

Le principe des schémas aux différences finies repose sur la formule de Taylor, permettant d'approcher les dérivées de la fonction inconnue par des (dérivées discrètes).

Si  $f$  est une fonction régulière de  $x$  et  $h_x > 0$  est un pas d'espace (destiné à tendre vers 0), on peut discrétiser de plusieurs manières différentes sa dérivée [19] :

- Différence décentrée avant :  $f'_x(x, y) \approx \frac{f(x+h_x, y) - f(x, y)}{h_x}$
- Différence décentrée arrière :  $f'_x(x, y) \approx \frac{f(x, y) - f(x-h_x, y)}{h_x}$  (I.47)
- Différence décentrée centrée :  $f'_x(x, y) \approx \frac{f(x+h_x, y) - f(x-h_x, y)}{2h_x}$

La dérivée seconde  $f_x''$  de  $f(x, y)$  sera alors de la forme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_i)}{h_x} - \frac{f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_i)}{h_x}}{h_x} \simeq \frac{f(x_{i+1}, y_i) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_i)}{h_x^2} \quad (\text{I.48})$$

## I.9.2. Méthodes itératives

Les méthodes itératives donnent en théorie la solution  $X$  d'un système linéaire après un nombre infini d'itération. A chaque pas, elles nécessitent le calcul du résidu du système [20].

Etant donné une matrice inversible  $A$  et un vecteur  $b$ , on souhaite calculer la solution du système linéaire :

$$Au = b \quad (\text{I.49})$$

Les méthodes que nous allons décrire sont des cas particuliers de la méthode suivante : supposons que l'on puisse écrire la matrice inversible  $A$  sous la forme d'une décomposition :  $A = M - N$  (I.50)

Où  $M$  est une matrice inversible et 'facile à inverser' c'est-à-dire pratiquement diagonale ou triangulaire. On a donc les équivalences :

$$Au = b \Leftrightarrow Mu = Nu + b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b \quad (\text{I.51})$$

La dernière équation étant de la forme  $u = Bu + c$ , on lui associe la méthode itérative :

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b \quad k \geq 0 \quad (\text{I.52})$$

Il y'a deux formes de la méthode itérative tell que :

- Méthode de Jacobi et Gauss-Seidel.
- Méthode de relaxation [21].

# chapitr. II

## II.1 Introduction

Dans ce chapitre on va décrire les différentes étapes de la simulation numérique qui nous permet éventuellement de déterminer le champ de vitesse d'un écoulement potentiel autour d'une plaque plane inclinée. On commence tout d'abord par la définition du modèle géométrique représentant le domaine physique sur lequel la solution numérique devra être effectuée, ainsi que les conditions aux limites associées. Par la suite, on définit quelques hypothèses permettant de simplifier le traitement mathématique du problème physique, et on écrit les équations régissant ce problème sous une forme générale, puis sous une forme adaptée à la géométrie du cas étudié. On procède ensuite à la construction du maillage du domaine physique, puis à la discrétisation du modèle mathématique en utilisant la méthode des différences finies.

## II.2 Description du problème et hypothèses

La théorie de la couche limite de Prandtl implique que dans les écoulements à un nombre élevé de Reynolds, la vitesse dans la couche limite varie rapidement de zéro directement sur une surface solide jusqu'à une valeur finie (ou une fonction de  $x$ , la coordonnée le long de cette surface) qui correspond à la solution asymptotique de l'écoulement non-visqueux  $Re \rightarrow \infty$  [11]. Cette dernière peut être obtenue en utilisant l'approximation d'écoulement potentiel bidimensionnel.

Si nous considérons la couche limite qui se développe sur une plaque plane de largeur infinie alignée avec un écoulement parallèle et homogène. Ce dernier n'est pas perturbé par la présence de cette plaque, et donc la vitesse de l'écoulement extérieur non-visqueux est  $U_e = U_\infty = C^{te}$  et le gradient de pression le long de la plaque vaut  $\frac{dp_e}{dx} = 0$  [22].

Pour ce travail, le domaine physique du problème est un espace bidimensionnelle dans lequel une plaque plane mince de longueur  $2a$  (qui peut représenter un panneau solaire) est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à un écoulement uniforme de vitesse  $U_\infty$  comme la Figure II.1 le montre ( $x, y$  est un repère cartésien qui tourne avec la plaque). La vitesse parallèle à la surface de la plaque (à  $y = 0$ ) n'est plus constante car il apparaît un gradient de pression dans le calcul. Le but de notre travail est de déterminer la distribution de cette vitesse pour une inclinaison arbitraire, c'est-à-dire de trouver  $U_e = fn(x, \alpha)$ . Cela va permettre à ceux qui sont intéressés par la théorie de la couche limite d'utiliser cette distribution comme condition aux limites afin de résoudre les équations de Prandtl.

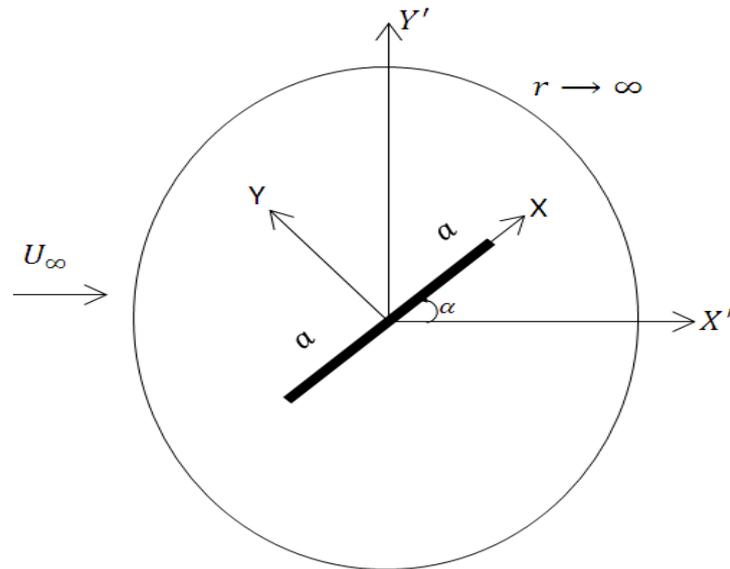


Fig. II. 1. Modèle physique du problème.

Les hypothèses simplificatrices proposées pour résoudre ce problème sont les suivantes :

1. L'écoulement est potentiel c'est-à-dire idéal et irrotationnel;
2. L'écoulement est bidimensionnel permanent et incompressible;

### II.3 Modèle mathématique

Les hypothèses que nous avons mentionnées précédemment nous permet de déduire que le problème en question est régi par l'équation de Laplace dont la variable dépendante peut être le potentiel de vitesse  $\phi$  ou bien la fonction de courant  $\psi$ . Etant donné que la fonction de courant  $\psi$  est connue dans les limites du domaine physique (condition aux limites de type Dirichlet), on choisit cette fonction comme variable dépendante dans ce qui suit. Il est évident à partir de la figure II.1 que l'implémentation des conditions aux limites est plus facile si l'équation de Laplace est exprimée en coordonnées polaires, telle que :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{II.1}$$

Loin de la plaque inclinée (soit à  $r$  tend vers l'infini), l'écoulement uniforme n'est pas perturbé par cette plaque, et par conséquent, on peut montrer que la fonction de courant dans ce cas peut s'exprimer par :

$$\psi = U_\infty r \sin \theta \quad \text{pour } r \rightarrow \infty \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{II.2}$$

Sur la plaque inclinée, on doit imposer la condition qui stipule que la surface de la plaque représente une ligne de courant de l'écoulement (c'est-à-dire  $\psi$  est égale à une constante arbitraire, soit 0), et donc :

$$\psi = 0 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a \text{ et } \theta = \alpha \quad (\text{II.3})$$

$$\psi = 0 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a \text{ et } \theta = \alpha + \pi \quad (\text{II.4})$$

Une fois les équations (II.1)-(II.4) sont résolues, la distribution de vitesse peut être facilement déduite à partir des équations de Cauchy-Riemann. Puisque nous ne sommes intéressés qu'à la vitesse tangentielle à la surface de la plaque  $v_r$  (puisque la vitesse normale est égale à zéro selon (II.3) et (II.4),  $v_\theta = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{\text{plaque}} = 0$ ), on aura :

$$v_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\text{plaque}} \quad (\text{II.5})$$

La condition aux limites (II.2) qui permet de calculer la fonction de courant à l'infini peut poser des problèmes lors de la résolution numérique du modèle mathématique puisque la solution numérique doit être déterminée dans un domaine fini. Pour résoudre ce problème, nous introduisons des nouvelles variables adimensionnelles dont celle associée à  $r$  transforme l'infini en zéro, telles que :

$$\xi = \theta \quad \eta = \frac{a}{r+a} \quad \Psi = \frac{\psi}{U_\infty a} \quad (\text{II.6})$$

Après la transformation des variables, l'équation de Laplace (II.1) et les conditions aux limites (II.2)-(II.4) deviennent respectivement :

$$\eta^2(1-\eta)^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} + \eta(1-\eta)(1-2\eta) \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\Psi = \frac{1-\eta}{\eta} \sin\xi \quad \text{pour } \eta \rightarrow 0 \text{ et } 0 \leq \xi \leq 2\pi \quad (\text{II.8})$$

$$\Psi = 0 \quad \text{pour } \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1 \text{ et } \xi = \alpha \quad (\text{II.9})$$

$$\Psi = 0 \quad \text{pour } \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1 \text{ et } \xi = \alpha + \pi \quad (\text{II.10})$$

Et l'équation (II.5) devient :

$$\frac{v_r}{U_\infty} = \left(\frac{\eta}{1-\eta} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)_{\text{plaque}} \quad (\text{II.11})$$

Après avoir déterminé la fonction de courant, la vitesse tangentielle à la surface de la plaque face à l'écoulement uniforme peut être déduite à partir de l'équation (II.5), en notant que  $x \equiv \pm r$  et  $u \equiv \pm v_r$ , on obtient ainsi :

$$\frac{u}{U_\infty} = \pm \left( \frac{\eta}{1-\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\text{plaque}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{a} = \pm \frac{1-\eta}{\eta} \tag{II.12}$$

Où le signe moins (plus) correspond à la première (deuxième) demi-longueur de la plaque.

### II.4 Formulation en différences finies

La méthode de différences finies consiste à approximer en un nombre fini de points (nœuds de maillage) les termes aux dérivées partielles parues dans l'équation (II.7) en utilisant le développement en série de Taylor.

#### II.4.1. Maillage

La spécification du maillage dépend de complexité de la géométrie. Si cette dernière est cylindrique, comme c'est le cas de notre problème, il est recommandé d'utiliser un maillage rectangulaire (Fig. II.2) dont :  $\xi \rightarrow i$ ,  $\eta \rightarrow j$  et  $\Psi(\xi, \eta) \rightarrow \Psi_{i,j}$ . Donc, les conditions aux limites (II.8)-(II.10) lues comme :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,M} = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{i,1} = \frac{1-\eta_0}{\eta_0} \sin \xi_i \quad & \text{pour } i = 1 \rightarrow N \\ \Psi_{n_1,i} = \Psi_{n_2,j} = 0 \quad & \text{pour } j = m \rightarrow M \\ \Psi_{i,1} = \Psi_{N,j} \quad & \text{pour } j = 1 \rightarrow M \end{aligned} \tag{II.13}$$

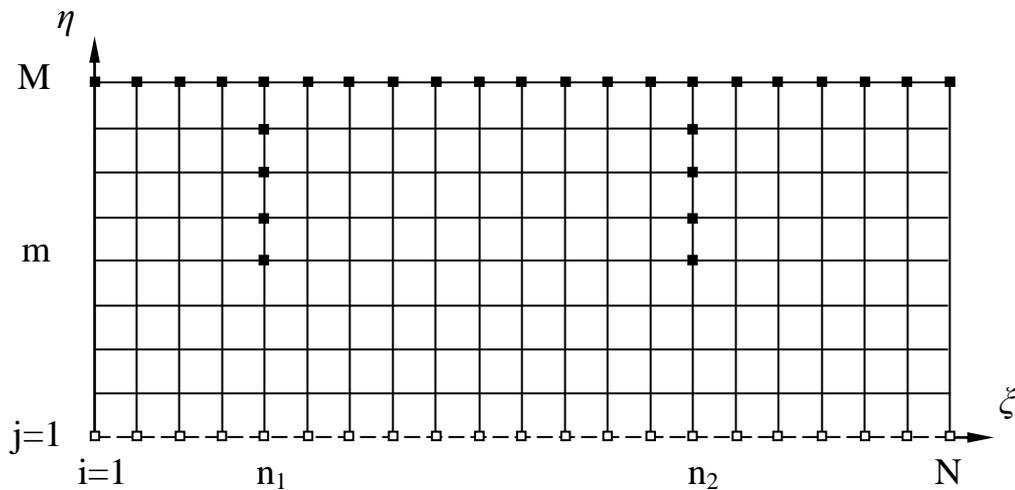


Fig. II.2. Représentation géométrique du domaine numérique d'étude.

La plaque inclinée est représentée dans le domaine de calcul avec les nœuds du maillage (carrés noirs) identifiés par  $(i = n_1, j = m \rightarrow M)$ ,  $(i = n_2, j = m \rightarrow M)$  et  $(i = 1 \rightarrow N, j = M)$ ; alors que l'infini est représenté avec les nœuds (carrés blancs) identifiés par  $(i = 1 \rightarrow N, j = 1)$ . Les calculs ont été effectués pour  $\eta_0 = 0.1$  (ce qui correspond à  $r_\infty/a = 9$ ) et pour différents maillages uniforme de points  $N \times M$  dans les directions  $(\xi, \eta)$  et de pas  $\Delta\xi$  et  $\Delta\eta$  respectivement, jusqu'à ce que les résultats deviennent moins sensibles au raffinement du maillage.

### II.4.2. Approximation en différences finies

Afin de transformer l'équation aux dérivées partielles (II.7) en un système d'équations algébriques, nous utilisons l'approximation de la dérivée seconde pour le premier et le troisième terme, et l'approximation de différences centrées de la dérivée première pour le second terme de l'équation (II.7), tous en même nœud du maillage  $(i, j)$  :

$$\left( \eta^2 (1 - \eta)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right)_{i,j} \equiv \eta_j^2 (1 - \eta_j)^2 \left( \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \right)$$

$$\left( \eta(1 - \eta)(1 - 2\eta) \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \equiv \eta_j(1 - \eta_j)(1 - 2\eta_j) \left( \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} \equiv \left( \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} \right)$$

En substituant ces expressions dans l'équation (II.7), et après réarrangement, elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 2 \left( \left( \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \eta_j(1 - \eta_j) \right)^2 + 1 \right) \Psi_{i,j} &= \left( \left( \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \eta_j(1 - \eta_j) \right)^2 + \frac{\Delta\xi^2}{2\Delta\eta} \eta_j(1 - \eta_j)(1 - 2\eta_j) \right) \Psi_{i,j+1} \\ &+ \left( \left( \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \eta_j(1 - \eta_j) \right)^2 - \frac{\Delta\xi^2}{2\Delta\eta} \eta_j(1 - \eta_j)(1 - 2\eta_j) \right) \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Les équations (II.12) s'expriment en différences finies comme suit :

$$\frac{u}{U_\infty} = \begin{cases} \frac{\eta_j}{1 - \eta_j} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta\xi} & \text{pour } \frac{x_j}{a} = \frac{1 - \eta_j}{\eta_j} \\ -\frac{\eta_j}{1 - \eta_j} \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta\xi} & \text{pour } \frac{x_j}{a} = -\frac{1 - \eta_j}{\eta_j} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Le choix des schémas de différence avant et arrière dans (II.15) n'est pas arbitraire mais il est imposé par la surface de la plaque face à l'écoulement uniforme sur laquelle nous devons déterminer la distribution de vitesse.

## II.5 Algorithme de résolution

Afin d'obtenir la solution du système d'équations (II.13)-(II.14), il est commode d'utiliser l'une des méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel et SOR...) si ce système est de taille large. L'algorithme de résolution numérique utilisé dans notre simulation peut être résumé de la façon suivante :

1. Déclaration des données et des conditions aux limites;
2. Estimation initiale de la solution;
3. Résolution de l'équation (II.14);
4. Calcul de l'erreur  $e = |\Psi_{i,j}^k - \Psi_{i,j}^{k-1}| / |\Psi_{i,j}^k|$
5. Vérification de la convergence de l'algorithme ( $e < \varepsilon = 10^{-10}$ ) sinon répéter les étapes de 3 à 5;
6. Détermination de la distribution de vitesse sur la plaque, l'équation (II.13).

# chapitre. III

III.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différents résultats obtenus et leurs interprétations. Ces résultats concernent essentiellement la distribution de la vitesse potentielle le long de la plaque plane et la position du point de stagnation. Tous ces résultats ont été obtenus à l'aide d'un programme de calcul itératif développé sous Matlab. Tout d'abord, on présente le contour des lignes de courant près de la plaque plane, et ensuite la distribution de la vitesse longitudinale adimensionnelle le long de la plaque pour différents angles d'incidence ainsi que l'emplacement du point de stagnation.

III.2 Résultats et interprétation

Après avoir effectué une expérimentation numérique sur la sensibilité des résultats au raffinement de maillage, nous avons choisi le nombre de nœuds  $N \times M = 361 \times 910$ . La solution du problème est présentée dans la figure III.1 pour différents angles d'incidence. Il est évident que la présence d'une plaque plane sans incidence ( $\alpha = 0$ ) dans ce genre d'écoulement n'affecte pas les lignes de courant qui demeurent parfaitement parallèles à celle-ci. En augmentant l'angle d'incidence les lignes de courant commencent à se déformer autour de la plaque, mais en s'éloignant d'elle, les lignes de courant ne subissent aucune déformation (pour plus de clarté, seule la région de l'écoulement près de la plaque est représentée dans la figure III.1).

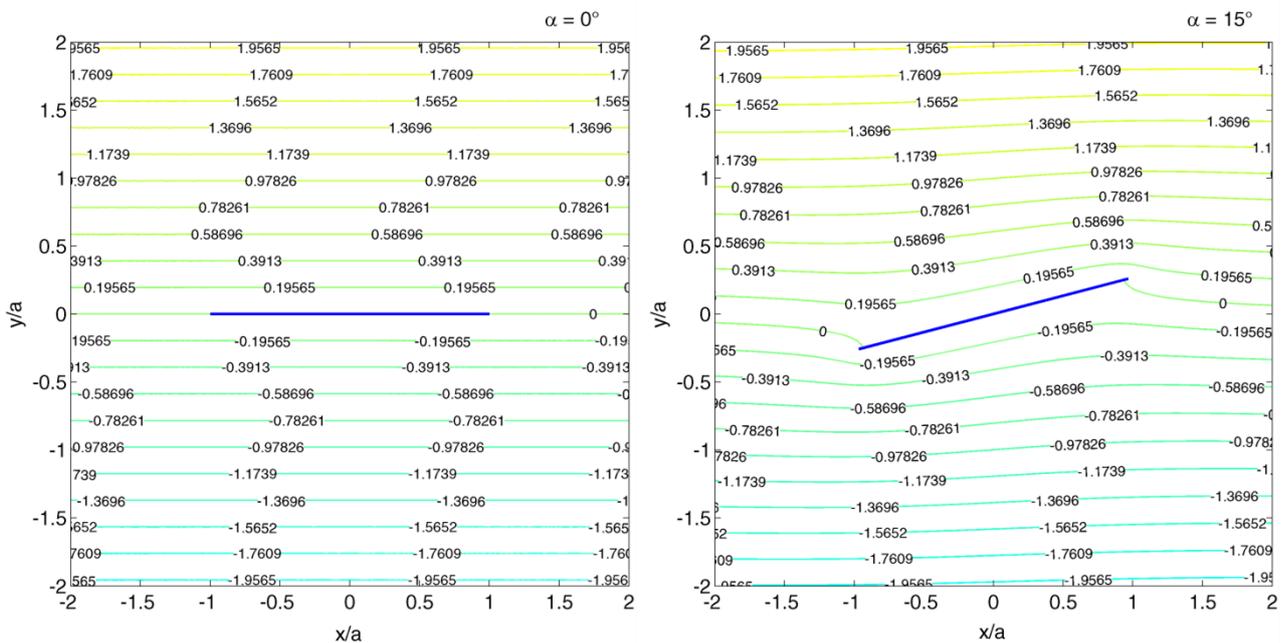


Fig. III. 1. Contour des lignes de courant pour angles d'incidence  $0^\circ$  et  $15^\circ$  de la plaque.

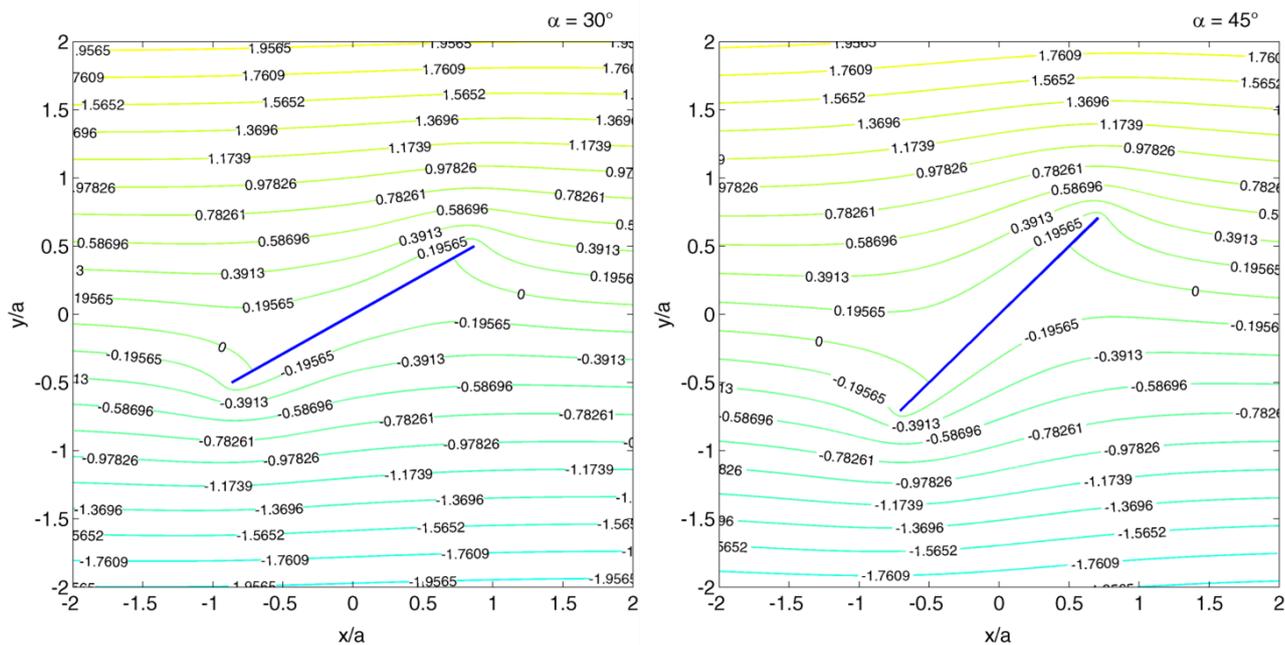


Fig. III. 2. Contour des lignes de courant pour angles d'incidence  $30^\circ$  et  $45^\circ$  de la plaque.

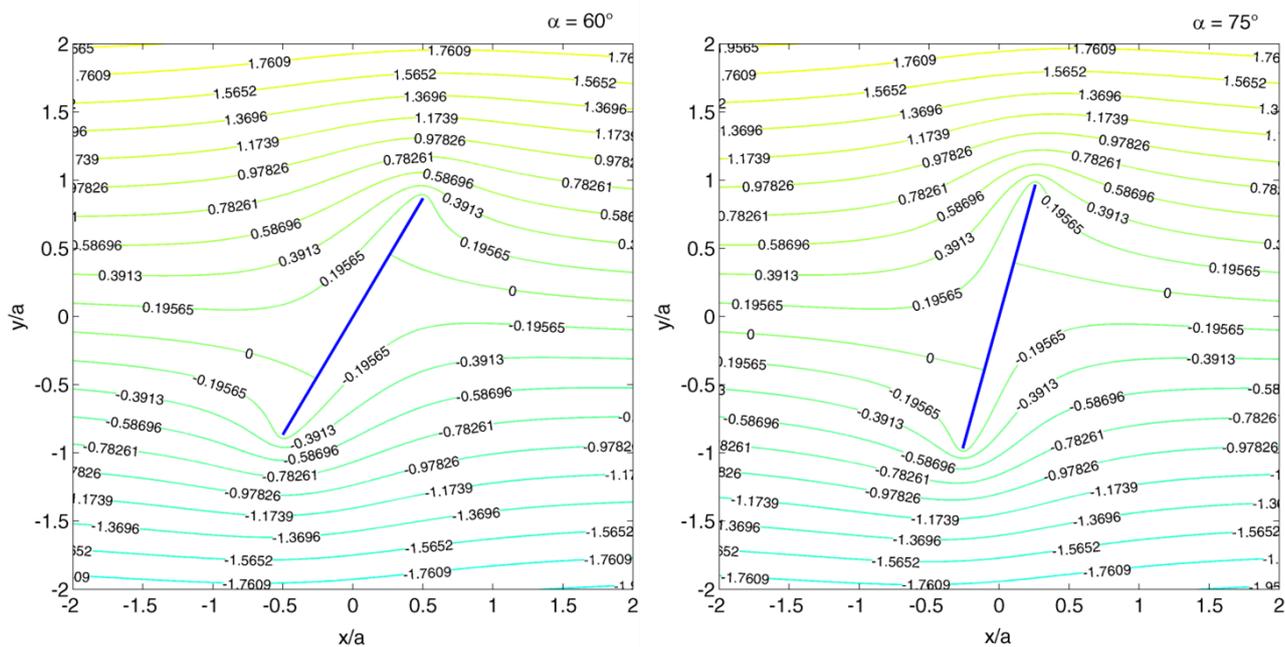
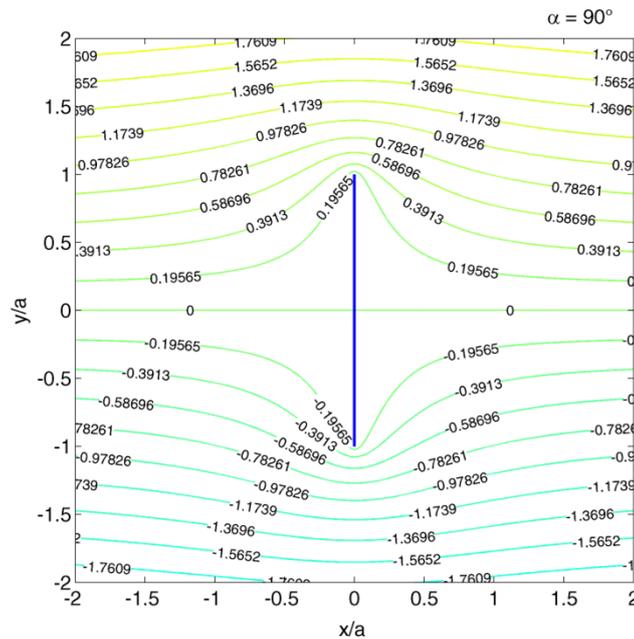


Fig. III. 3. Contour des lignes de courant pour angles d'incidence  $60^\circ$  et  $75^\circ$  de la plaque.



**Fig. III. 4.** Contour des lignes de courant pour angle d'incidence  $90^\circ$  de la plaque.

A partir des connaissances actuelles sur les écoulements autour des corps solides, nous pouvons affirmer que cette solution pourrait servir d'approximation pour l'écoulement en amont de la plaque. Cependant, en aval de la plaque, la réalité est complètement différente (apparition d'une région d'écoulement de recirculation immédiatement derrière la plaque causée par la viscosité, appelée phénomène de sillage). Etant donné que nous sommes intéressés à déterminer la répartition de la vitesse de l'écoulement sur la surface de la plaque faisant face à l'écoulement uniforme, la présente solution est jugée satisfaisante.

La figure III.2 montre la variation de la vitesse longitudinale adimensionnelle le long de la plaque plane pour un angle d'incidence de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$  respectivement. Pour un angle d'incidence nul, la vitesse est constante sur toute la longueur de la plaque (en réalité le point de stagnation se trouve au bord d'attaque). Plus l'angle d'incidence augmente, plus le point de stagnation est décalé vers le centre de la plaque, dont la vitesse est négative en amont et positive en aval de ce point selon le choix des axes (Figure II.1). On constate d'après cette figure que la distribution de la vitesse est quasi linéaire sur presque toute la longueur de la plaque sauf à proximité de ses bords où la vitesse augmente "exponentiellement" avec la distance.

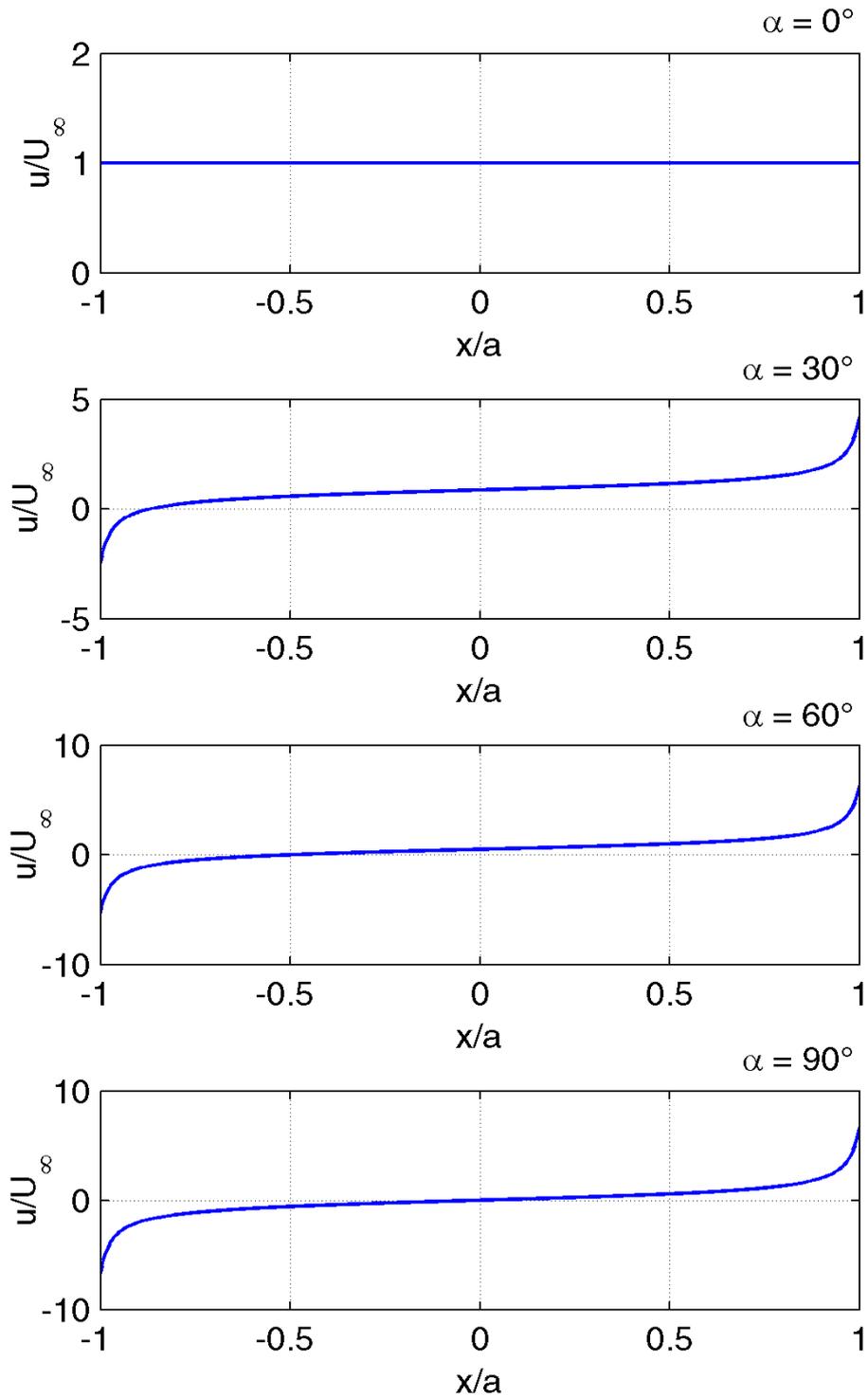


Fig. III. 5. Distribution de la vitesse pour différents angles d'incidence de la plaque.

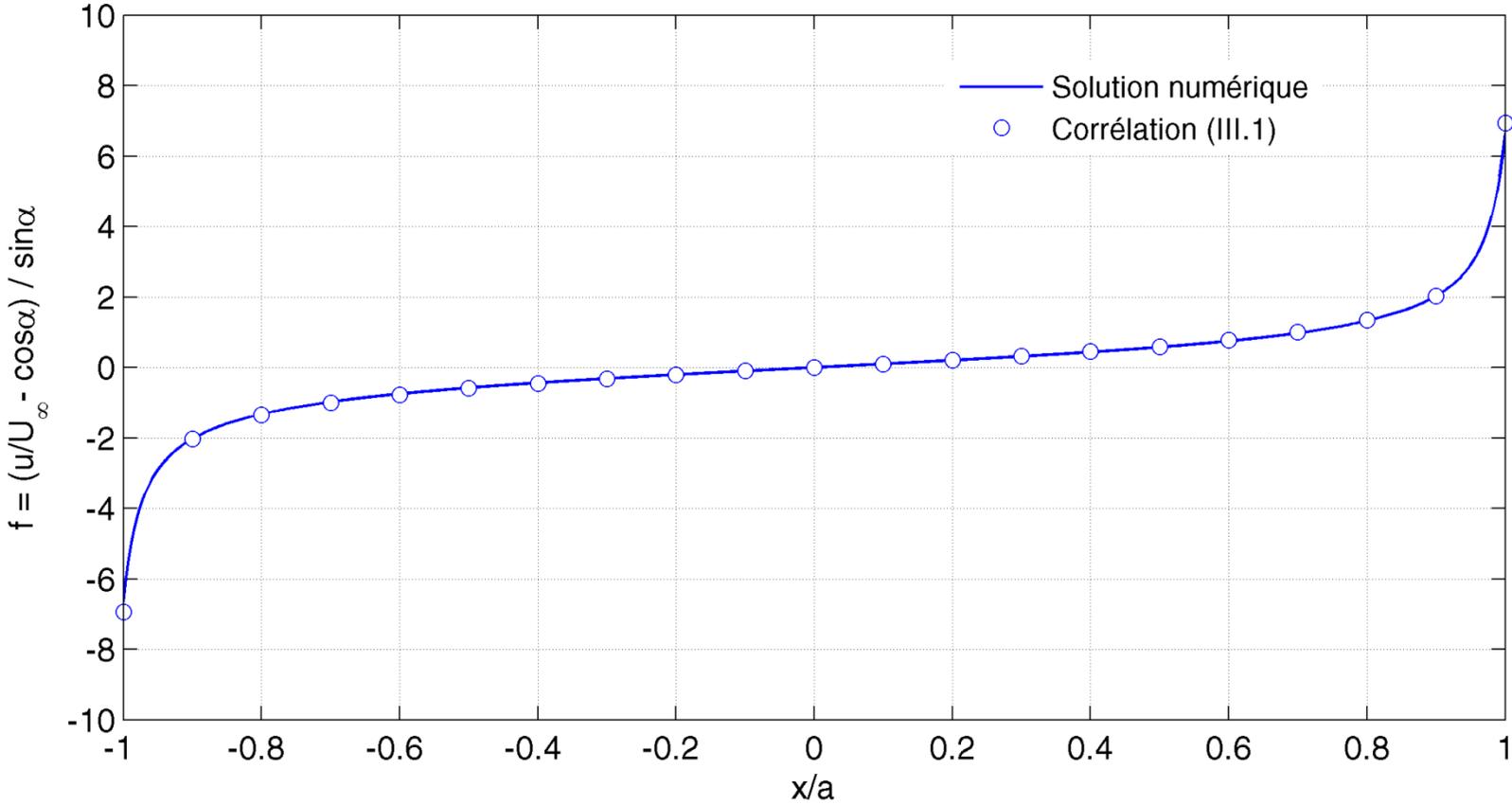


Fig. III. 6. Distribution de la fonction  $f(x/a)$ .

Tel que prévu par la théorie, éqt. (I.40), les résultats numériques de cette étude montrent que la fonction  $f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{u}{U_\infty} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{u}{U_\infty} \left(\frac{x}{a'} \frac{\pi}{2}\right)$  est indépendante de l'angle d'incidence. La figure III.3 montre que cette fonction est impaire et qu'elle augmente presque linéairement pour  $0 \leq \frac{x}{a} \leq 0.6$ , puis elle augmente plus rapidement en se rapprochant du bord de fuite. Contrairement aux formules analytiques (I.42) et (I.43) qui donnent  $f(1) \rightarrow \infty$ , la solution numérique prédit une valeur plus réaliste de  $f(1) = 6.6487$ . En se basant sur ces résultats numériques et en utilisant le logiciel OriginPro, la fonction  $f\left(\frac{x}{a}\right)$  peut être représentée avec une erreur relative inférieure à 5 % par la corrélation suivante :

$$f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1.03183 \left(\frac{x}{a}\right)}{\cos\left(\arcsin\left(0.98891\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right)} \tag{III.1}$$

La comparaison entre les résultats numériques et les solutions analytiques dans le tableau III.1 montre que l'équation (I.42) issue de la transformation conforme est en accord avec les résultats numériques sur la grande partie de la plaque sauf au voisinage du bord (qui correspond à  $\eta = 0.5$ ); alors que l'équation (1.43) issue de la théorie de Hess est en désaccord avec les résultats numériques sur toute la longueur de la plaque.

**Tableau III. 1 :** Comparaison de la solution numérique et les solutions analytiques de  $f\left(\frac{x}{a}\right)$

$\eta$	Solution numérique	Eq. (I.42)	Eq. (I.43)
0.5	6.1922	$\infty$	$\infty$
0.6	0.8908	0.8944	0.5123
0.7	0.4740	0.4743	0.2917
0.8	0.2583	0.2582	0.1626
0.9	0.1119	0.1118	0.0710
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

La détermination de la position du point de stagnation est également d'un grand intérêt; elle peut être exprimée en fonction de l'angle d'incidence en remplaçant par  $u = 0$  dans l'équation (I.40), ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$\frac{x_{ps}}{a} = - \left( \frac{(\cot \alpha)^2}{1+(\cot \alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Transformation conforme}) \tag{III.2}$$

$$\frac{x_{ps}}{a} = -\frac{1-e^{-\pi \cot \alpha}}{1+e^{-\pi \cot \alpha}} \quad (\text{Théorie de Hess}) \quad (\text{III.3})$$

Dans le tableau 2, nous présentons une comparaison entre les résultats numériques et les résultats obtenus à partir des relations (III.2) et (III.3) de la position du point de stagnation pour différents angles d'incidence. Comme c'était le cas pour la distribution de la vitesse, les résultats montrent un bon accord entre la simulation numérique et la relation (III.2) issue de la transformation conforme pour tout angle d'incidence; la relation (III.3) montre cependant un désaccord avec les autres résultats.

**Tableau III. 2 :** Comparaison de la solution numérique et les solutions analytiques de  $\frac{x_{ps}}{a}$

$\alpha$ (deg)	Solution numérique	Eq. (III.2)	Eq. (III.3)
15	-0.9714	-0.9659	-1.0000
30	-0.8688	-0.8660	-0.9914
45	-0.7081	-0.7071	-0.9172
60	-0.4999	-0.5000	-0.7196
75	-0.2585	-0.2588	-0.3977
90	0.0000	0.0000	0.0000

### III.3 Conclusion

La présente investigation, en termes de résultats présentés ci-dessus, est en faveur de la transformation conforme qui peut fournir de meilleures estimations pour l'emplacement du point de stagnation ainsi que la distribution de la vitesse potentielle sur la plaque plane sauf très près et sur ses bords.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié numériquement le problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible autour d'une plaque plane mince de longueur  $2a$  et inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'écoulement uniforme à l'infini (loin de la plaque). En résolvant l'équation de Laplace pour la fonction de courant dont il est plus facile d'imposer les conditions aux limites, le champ de vitesse est déduit à partir des équations de Cauchy-Riemann. En utilisant la méthode des différences finies et la méthode de Gauss-Seidel, la solution est fournie dans  $361 \times 910$  nœuds d'un maillage uniforme.

A travers cette étude nous avons pu établir des corrélations fiables qui vont permettre la détermination simple et rapide de la position du point de stagnation et la vitesse potentielle sur la surface de la plaque face à l'écoulement uniforme dans lequel est placée celle-ci.

La comparaison avec les résultats analytiques issus de la transformation conforme et de la théorie de Hess montre que les résultats numériques s'accordent très bien avec la première sauf aux bords de la plaque où cette théorie prédit une vitesse infinie; tandis que la théorie de Hess semble donner des prédictions erronées pour la vitesse aussi bien que pour la position du point de stagnation.

Si on s'intéresse à l'écoulement réel autour d'une plaque plane dont une mince couche limite visqueuse se développe sur sa surface et l'écoulement peut être considéré comme potentiel à l'extérieur d'elle, la vitesse au sein de la couche limite décroît de la valeur prédite par la corrélation proposée - dans ce travail - à zéro de façon à satisfaire la condition d'adhérence à la surface solide.

# Référence

- [1] G. Bellakhal. Mécanique des Fluides, une introduction à la dynamique des fluides réels incompressibles. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (2015).
- [2] P. Huerre. Mécanique des fluides - Tome I. Ecole polytechnique (1998).
- [3] J. L. Hess. Analytic solutions for potential flow over a class of semi-infinite two-dimensional bodies having circular-arc noses. J. Fluid Mech. (1973), vol. 60 (2), pp. 225-239.
- [4] A. Bekoune. Formules et équations définitions et terminologie. office des publications universitaires (2004).
- [5] P. Chassaing. Mécanique des fluides ; éléments d'un premier parcours 3<sup>e</sup> édition revue et augmentée. Cépadués France (2010), pp.159-234, [www.cepadaues.com](http://www.cepadaues.com).
- [6] K. Saad et T. Ouarda. Calcul de transfert d masse et de chaleur dans un fluide en écoulement dans un conduite coudée 90°. Mémoire Master. Université Mohamed Khider-Biskra (2003)
- [7] F. Moisy. Mécanique des fluides. Laboratoire FAST, Université Paris-sud, 2019.
- [8] C. Mahboub. Mécanique des fluides approfondie. Cours. Université Mohamed Khider Biskra (2019).
- [9] L. Massaoudi. Mécanique des fluides incompressibles. Cours. Université de Batna (2013).
- [10] A. Giovannini & C. Airiau. Aérodynamique fondamentale. Cépadués France (2016), pp. 10-49, [www.cepadaues.com](http://www.cepadaues.com).
- [11] I. L. Ryhming. Dynamique des fluides: un cours de base du deuxième cycle universitaire. Presses polytechniques et universitaires romandes Lausanne (2004).
- [12] L. Boukhris. Mécanique des fluides II. Cours. Université Oran Mohamed Boudiaf (2018)
- [13] I. G. Currie. Fundamental Mechanics of Fluids Third Edition University of Toronto. Liver (2002).
- [14] C. Mahboub \*, N. Moumami and A. Brima. Potential flow over an inclined thin flat-plate. Article. University of Biskra, Mohamed Khider, vol. 22 N°2 (2019) 251 – 256

# Référence

- [15] La simulation numérique de la recherche à l'industrie dans la logique de faire plus vite, mieux et moins cher la simulation numérique présente tous les atouts (2007). [www.cea.fr](http://www.cea.fr).
- [16] Équation aux dérivées partielles. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Equation\\_aux\\_d%C3%A9riv%C3%A9es\\_partielles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Equation_aux_d%C3%A9riv%C3%A9es_partielles) (25-02-2019)
- [17] E. Goncalves. Résolution Numérique Discrétisation des EDP EDO. Cours. Institut national polytechnique de Grenoble (2005).
- [18] A. Taik. Equation aux dérivées partielles méthodes des différences finies. Cours. FST-Mohammedia Maroc (2008).
- [19] Equation aux dérivées partielles. <http://math.univ-lyon1.fr/EDP.pdf> 20-02-2019.
- [20] A. M. Quarteroni, Riccardo Sacco. Fausto Saleri Méthodes numériques pour le calcul scientifique. Programmes en MATLAB. Springer-Verlag France (2000), pp.111-112.
- [21] Mr P. Micheau, Professeur et Directeur du L.M.L à l'D.S.T. de LILLE. Simulation numérique d'un écoulement visqueux incompressible dans une géométrie complexe par la méthode des matrices d'interpolation. L'université des sciences & technologies de Lille (1994).
- [22] Couches Limites [https://blog.espci.fr/cours08\\_7.pdf](https://blog.espci.fr/cours08_7.pdf) (17-03-2020).