

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie civil et d'Hydraulique  
Référence : ...../2020



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية و الري  
المرجع...../2020

## Mémoire de Master

**Filière :** Hydraulique

**Spécialité :** Hydraulique Urbaine

**Thème**

***LA RELATION ENTRE L'AMPLITUDE DU PHENOMENE DU  
COUP DE BELIER ET LE MATERIAU CONSTITUTIF  
DES CONDUITES EN CHARGE.***

Présenté par : **Midoun Mourad**

Devant le jury composé de :

**Mr Djedri Toufik**

**Mr Messameh Abdelhamid**

**Mr Abdessemed Fouzi**

**Président**

**Examineur**

**Promoteur**

**Année universitaire : 2019 - 2020**

## **REMERCIEMENTS**

*Premièrement louange à Dieu qui m'a donné de la patience  
au moment du besoin, de la force au moment de la faiblesse et  
de la volonté contre le désespoir, et aussi je le remercie car il  
m'a mis dans de bonnes mains.*

*Je tiens à exprimer également mes vifs remerciements et ma  
profonde gratitude à Monsieur Abdessemed, de m'avoir  
encadré dans ce mémoire de fin d'étude.*

*Je remercie également et profondément Monsieur Bouziane  
pour son aide précieuse et son orientation.*

*Tous mes professeurs du département hydraulique pour leurs  
disponibilité et conseils.*

*J'adresse mes remerciements les plus sincères à tous les  
membres de jury d'accepter d'examiner ce mémoire.*

*Tous mes compagnons de promotion 2019-2020 hydraulique.*

*Mes amis qui n'ont cessé de m'encourager.*

## Dédicaces

J'ai tout le plaisir de dédier ce mémoire à:

Mes chers parents : mon père Allah yarhmo et ma mère  
*Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma  
considération et mes profondssentiments envers eux*

Mes frères et sœurs.

Ma petite famille

Mes amis

# SOMMAIRE

<b>Remerciements</b> .....	2
<b>Sommaire</b> .....	4
Liste des figures.....	6
Liste des tableaux .....	8
<b>Introduction générale</b> .....	9
<b>Chapitre 1 : Description du phénomène transitoire</b> .....	11
I.1.INTRODUCTION.....	12
I.2. TYPES D'ECOULEMENT.....	12
I.2.1. Ecoulement permanent .....	12
I.2.2. Ecoulement non permanent.....	12
I.2.3. Ecoulement uniforme.....	12
I.2.4. Ecoulement non uniforme .....	12
I.2.5. Ecoulement transitoire.....	13
I.3. TYPES D'ONDES.....	13
I.3.1. Ondes linéaires.....	13
I.3.2. Ondes non linéaires.....	13
I.4. PHENOMENE DU COUP DE BELIER.....	13
I.4.1. Définition .....	13
I.4.2. Causes du coup de bélier.....	14
I.4.3. Risques dus aux coups de bélier .....	14
a. Cas de surpression.....	14
b. Cas de dépression.....	15
C. Fatigue de la canalisation.....	15
I.5. DESCRIPTION PHYSIQUES DU PHENOMENE TRANSITOIRE.....	15
I.5.1. présentation du phénomène transitoire .....	15
I.5.1-1. généralité.....	15
I.5.1-2-mise en équations.....	15
I.5.2 les équations aux caractéristiques.....	16
I.5.3 interprétations des équations aux caractéristiques.....	25
I.5.4 Les équations d'ALLIEVI.....	26
I.6. DESCRIPTION MATHEMATIQUE.....	30
I.6. 1. Introduction.....	30
I.6. 2. Equation de conservation de la masse ou équation de continuité Hypothèses.....	31
I.6.3.1.Type de conduites.....	41
I.6.3.2 Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite.....	42
I.6.4.Equations simplifiées.....	42
I.6. 5. Conclusion.....	47
I.7. VALEUR NUMERIQUE DU COUP DE BELIER.....	47
I.7.1. Manoeuvres rapides. Formule de JOUKOWSKY .....	47
I.8. PROCESSUS DE VARIATION DE LA PRESSION ET DE LA VITESSE DANS UNE TUYAUTERIE.....	49
I.8.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe .....	49
I.8.2. Cas de L'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite.....	49
I.9. EVOLUTION DES ONDES DE PRESSION ET DE VITESSE AUX POINTS CARACTERISTIQUE.....	51
I.10. EVOLUTION DES ONDES DE PRESSION LE LONG DE LA CONDUITE.....	52
I.11. CONCLUSION .....	52

## **Chapitre II : Phénomène du coup de bélier**

II.1- INTRODUCTION.....	54
II.2- NOTIONS GENERALES SUR LES TYPES D'ÉCOULEMENTS.....	54
II.2.1- Écoulement permanent.....	54
II.2.2. Écoulement non permanent ou transitoire.....	54
II.3- CAUSES DES ÉCOULEMENTS NON PERMANENTS EN CHARGE.....	54
II.4- EQUATIONS DIFFERENTIELLES REGISSANT L'ÉCOULEMENT NON PERMANENT EN CHARGE.....	55
II.4.1- Hypothèse de base - intervention de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité des canalisations.....	55
II.4.2- Equations fondamentales de l'écoulement non permanent en charge.....	55
II.4.2.1- Equation de la conservation de la quantité de mouvement.....	56
II.4.2.2- Equation de continuité.....	57
II.4.2.2.1- Compressibilité de l'eau.....	58
II.4.2.2.2- Dilatation de la conduite.....	58
II.5- ANALYSE PHYSIQUE DU PHENOMENE DU COUP DE BELIER.....	60
II.5.1- Cas d'une conduite d'adduction gravitaire.....	60
II.5.2- Cas d'une conduite de refoulement.....	61
II.6- METHODES DE SOLUTIONS DES EQUATIONS REGISSANTS.....	64
II.6.1- Méthode analytique d'ALLIEVI.....	64
II.6.2- Méthode graphique.....	71
II.6.3- Méthodes numériques.....	73
II.7- CRITIQUE ET CHOIX DE METHODE D'ANALYSE.....	82
II.7.1- Méthode analytique d'Allievi.....	82
II.7.2- Méthode graphique de Schnyder-Bergeron.....	82
II.7.3- Méthode numérique:.....	83
II.7.4- Conclusion.....	83
<b>CHAPITRE III : La relation entre l'amplitude du coup de bélier et les différents matériaux de construction des conduites</b>	
III.1. Calcul de la célérité d'onde dans les conduites non enterrée.....	85
III.2. Calcul de la célérité d'onde dans les conduites composites.....	85
III.3. APERÇU BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANCRAGE LONGITUDINAL.....	95
III.4. CALCUL DU COEFFICIENT DE DEFORMABILITE « F ».....	98
III.5. CELERITE D'ONDE DANS LES CONDUITES EN POLYETHYLENE.....	100
III.6- PROTECTION CONTRE LE COUP DE BELIER.....	102
II.6.1-Introduction.....	102
II.6.2- Moyens de protection contre le coup de belier.....	102
II.6.3- Protection des ouvrages contre le coup de bélier.....	102
III.7- APPLICATIONS D'UNE METHODE NUMERIQUE.....	110
III.8- CONCLUSION.....	130
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>132</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>133</b>

## Liste des figures

*Fig I.1: Forces et contraintes radiales dans un tuyau.*

*Fig I.2: Déplacement d'un élément liquide.*

*Fig I.3: Théorème des quantités de mouvement.*

*Fig I.4: Forces exercées sur une tranche liquide.*

*Fig I.5: Déplacement d'une onde dans le plan  $(x, t)$ .*

*Fig I.6: Conduite gravitaire.*

*Fig I.7: Forces et contraintes radiales dans un tuyau.*

*Fig I.8: Déplacement d'un élément liquide.*

*Fig I.9: Théorème des quantités de mouvement La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement.*

*Fig I.10: Forces exercées sur une tranche liquide*

*Fig I.11: Paroi de la conduite.*

*Fig I.12: Fermeture lente d'une vanne de sectionnement.*

*Fig I.13 : Les quatre étapes d'un cycle de variation de pression.*

*Fig I.14: Evolution de la pression et de la vitesse au cours du temps, aux points caractéristique.*

*Fig II.1: Elément élémentaire d'une conduite (Equation dynamique).*

*Fig II.2: Elément élémentaire d'une conduite (Equation de continuité).*

*Fig II-3: Dilatation de la conduite*

*Fig II.4: Evolution de l'écoulement en fonction du temps dans une conduite d'adduction gravitaire.*

*Fig II.5 : Evolution de l'écoulement en fonction du temps dans une conduite de refoulement.*

*Fig II.6 : Schéma de la conduite d'adduction.*

*Fig II.7: Diagramme de la pression pour  $T = 0$ .*

*Fig II.7': Diagramme de la pression pour  $0 < T < \frac{2L}{a}$*

*Fig II.8: Diagramme de la surpression pour la conduite d'adduction en cas de fermeture brusque.*

*Fig II.9: Diagramme de la dépression pour la conduite de refoulement en cas de fermeture brusque.*

*Fig II.10: Adduction gravitaire.*

*Fig II.11: Diagramme de la pression pour la conduite d'adduction en cas de fermeture lente.*

*Fig II.12: Diagramme de la pression pour la conduite de refoulement en cas de fermeture lente.*

*Fig II.13: Caractéristiques de la conduite dans le plan Oxt.*

*Fig II.14: Caractéristiques de la conduite dans le plan OQH.*

*Fig II.15: Schéma des caractéristiques.*

*Fig II.16: Discrétisation de la conduite.*

*Fig II.17: Condition aux frontières.*

*Fig II.18: Réservoir à charge constante.*

*Fig II.19: Conditions initiales.*

*Fig II.20: Conditions aux limites.*

*Fig II.21: Raccordement de deux conduites à caractéristiques différentes.*

*Fig III.1: coupe schématique d'une galerie en rocher revêtu.*

*Fig III.2: les forces appliquées sur les conduites enterrées.*

*Fig III.3: Une conduite ancrée d'un côté.*

*Fig III.4: Une conduite ancrée de deux côtés.*

*Fig III.5: Une conduite équipée de joint de dilatation.*

## *Liste des tableaux*

*Tableau I.1. Coefficient de rugosité  $k$  (mm) pour différents matériaux.*

*Tableau I.2. La viscosité cinématique par rapport à la température.*

*Tableau I.3. Relation entre la célérité et les propriétés du conduit.*

*Tableau III.1. Récapitulation et comparaison des formules de célérité d'onde.*

*Tableau III.2. Coefficient  $k$  pour divers matériaux.*

*Tableau III.3. Calcul des pressions maximales et minimales.*

# Introduction Générale

## **INTRODUCTION GENERALE**

*Dans le cadre de la protection des réseaux d'alimentation en eau potable les ingénieurs sont confrontés au problème du coup de bélier, mal maîtrisé, qui peut être provoqué par un mauvais dimensionnement du dispositif mécanique qui est l'anti bélier ou par une variation des performances de certaines machines hydrauliques attachées à la conduite mais aussi par une mauvaise manipulation (fermeture brusque d'une vanne, arrêt inattendu d'une pompe...).*

*Dans l'optique d'une meilleure compréhension du phénomène, on se propose, dans le cadre de ce mémoire, de faire une étude de la relation entre l'amplitude du phénomène du coup de bélier et le matériau de construction des conduites en charge.*

*Notre travail sera présenté sous trois principaux chapitres. Le premier chapitre représente l'état de l'art concernant l'analyse théorique puis physique du phénomène transitoire en tant que régime d'écoulement. Dans le chapitre qui suit nous allons voir en détail le phénomène du coup de bélier.*

*Enfin dans le 3<sup>ème</sup> et dernier chapitre on traitera la relation entre l'amplitude du coup de bélier et les différents matériaux de construction des conduites.*

# Chapitre I :

## Description détaillée du phénomène transitoire

## **I.1. INTRODUCTION**

*L'objet de ce chapitre porte sur l'analyse théorique puis physique du phénomène transitoire entant que régime d'écoulement.*

*Dans ce chapitre nous allons définir quelques types d'écoulements que l'on rencontrera au cours de notre travail, puis en se penchant sur l'analyse physique du coup de bélier avec une représentation graphique de deux cas à savoir:*

- 1-Le cas d'arrêt brusque de la pompe,*
- 2-Le cas de fermeture instantané de la vanne.*

## **I.2. TYPES D'ÉCOULEMENT**

### **I.2.1. Écoulement permanent**

*L'écoulement de liquide est dit permanent lorsque les propriétés du fluide et les caractéristiques hydrauliques de celui-ci restent invariables dans le temps*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

*U : vitesse d'écoulement*

*P : la pression,*

*$\rho$  : masse volumique.*

### **I.2.2. Écoulement non permanent**

*L'écoulement du liquide est dit non permanent si la vitesse et la pression varient dans le temps (t) en un point donné de l'espace (x) rempli de liquide en mouvement, les vitesses et les pressions en écoulement non permanent sont les fonctions de quatre variables indépendantes à savoir : coordonnées (x, y, z) du point examine et le temps (t).*

*On distingue un écoulement non permanent en charge et à surface libre, un écoulement non permanent unidimensionnel, bidimensionnel et tridimensionnel.*

### **I.2.3. Écoulement uniforme**

*Un écoulement est dit uniforme lorsque la vitesse du fluide à un instant donné, à une même direction et une même intensité en tout points de ce fluide c'est-à-dire :*

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0.$$

### **I.2.4. Écoulement non uniforme**

*Un écoulement est dit non uniforme si la vitesse du fluide varie d'une section à l'autre*

*c'est-à-dire:  $\frac{\partial U}{\partial X} \neq 0.$*

### ***1.2.5. Ecoulement transitoire***

*On appelle régime transitoire, un phénomène qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les paramètres hydrauliques changent :*

$$\frac{\partial U}{\partial X} \neq 0, \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0 \quad (1.4)$$

*Avec :*

*U : vitesse d'écoulement.*

*P : la pression.*

*Ce phénomène transitoire peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert ou bien dans une conduite en charge, par accroissement ou décroissement du débit.*

*On pourra citer quelques exemples d'écoulements transitoires dans le cas d'une conduite en charge :*

- Ecoulement dans les machines hydrauliques à puissance variable.*
- Phénomène du coup de bélier.*

*Donc l'écoulement transitoire est un écoulement non permanent, dans notre travail nous nous intéresserons uniquement au phénomène du coup de bélier.*

## ***1.3. TYPES D'ONDES***

### ***1.3.1. Ondes linéaires***

*Du point de vue physique, les ondes linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide sans modifier les propriétés physiques locales (compressibilité, masse spécifique, conductivité, viscosité.....). Voici quelques exemples de ces types d'ondes :*

- Les ondes du son,*
- Les ondes de lumières,*
- les ondes électromagnétiques.*

### ***1.3.2. Ondes non linéaires***

*Les ondes non linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide en provoquant des variations dans les propriétés de ce dernier [14]*

## ***1.4. PHENOMENE DU COUP DE BELIER***

### ***1.4.1. Définition***

*Le coup de bélier étant un cas particulier du régime transitoire, est un phénomène oscillatoire qui se manifeste dans les conduites en charge à écoulement gravitaire ou par refoulement.*

*On entend aussi sous le terme « coup de bélier » un écoulement non permanent du liquide accompagné des variations pratiquement sensibles de la pression qui peuvent devenir dangereuses pour la tuyauterie. Ces variations résultent d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement.*

*C'est le nom que l'on donne à une onde de choc hydraulique, lorsqu'un liquide non compressible comme l'eau, est stoppé net dans une canalisation. Autrement dit, c'est l'arrêt brutal de la circulation de l'eau lorsqu'un robinet (ou tout autre appareil) se ferme.*

*Parmi les auteurs, savants et ingénieurs qui ont contribué à l'étude de ce phénomène très complexe, on peut citer : MM. Boussinesq, Korteweg, Resal, Joukowski, Rateau, MM. Allievi, de Sparre, M. Jouguet, M. Boulanger, C. Camichel, D. Eydoux, M. Gariel, L. Bergeron, Escande, Dubin, Marey, M. Michaud, Streeter, Chaudy, Vichnievsky, ... etc.*

#### **I.4.2. Causes du coup de bélier**

*Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire dont les causes les plus fréquentes sont les suivantes :*

- L'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites en charge à écoulement gravitaire.*
- La mise en marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.*
- Le remplissage ou la vidange d'un système d'AEP.*
- Modification de la vitesse d'une pompe.*
- Une variation du niveau d'un réservoir à une extrémité du réseau.*
- La disparition de l'alimentation électrique dans une station de pompage qui est la cause la plus répandue du coup de bélier.*
- La mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine.*
- Une modification de position de vanne*

#### **I.4.3. Risques dus aux coups de bélier**

*Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes elles deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variation de pressions et de débits dans le temps).*

*Ces phénomènes se produisant dans une conduite en charge, peuvent provoquer des risques à la suite d'une dépression ou surpression engendrée par les manoeuvres brusques.*

### **a. Cas de surpression**

*C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par une pression importante se produisant à la suite d'une fermeture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement ou bien à la suite d'une dépression causée par l'arrêt brusque d'une pompe. Si la pression totale c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des tuyaux il y a risques de rupture de ces derniers et déboîtement des joints (les anneaux d'étanchéité seront délogés).*

### **b. Cas de dépression**

*C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative, à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée d'une vanne de sectionnement. Si cette pression devient inférieure à 10m CE il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est déformable la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints peuvent être aspirés. Le phénomène de cavitation une fois apparu peut provoquer la détérioration de la couche d'enduit intérieur du tuyau.*

### **C. Fatigue de la canalisation**

*En régime transitoire les alternances des surpressions et dépressions qui sont une conséquence inévitable du phénomène provoquent la fatigue pour le matériau de la canalisation même si leur amplitude est faible*

## **I-5-DESCRIPTION PHYSIQUE :**

### **I-5-1-Présentation du phénomène transitoire :**

#### **I-5-1-1-Généralités :**

*On appelle régime transitoire, un phénomène qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les paramètres hydrauliques changent :*

$$\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial P}{\partial X} \neq 0, \frac{\partial U}{\partial X} \neq 0$$

*Il peut se produire soit dans un canal à ciel ouvert, soit dans une conduite à écoulement en charge par accroissement ou décroissement du débit.*

*L'écoulement du liquide s'appelle non permanent si la vitesse et la pression varient dans le temps  $t$  en point donné de l'espace rempli de liquide en mouvement.*

*Les vitesses et les pressions en mouvement non permanent sont les fonctions de quatre variables indépendantes ; coordonnées  $x, y, z$  du point examiné et le temps  $t$ .*

On distingue un écoulement non permanent en charge et à surface libre, un écoulement non permanent unidimensionnel, bidimensionnel et tridimensionnel.

Un exemple de l'écoulement non permanent unidimensionnel en charge du liquide est un écoulement non permanent apparaissant par suite de la variation du régime de service des dispositifs régulateurs installés sur les tuyauteries.

Un cas particulier d'un tel écoulement est désigné par le terme « **coup de bélier** » que nous définirons en détail.

### **I-5-1-2-Mise en équations :**

Nous allons établir les deux équations connues sous le nom d'équations de SAINT-VENANT à partir des équations générales qui sont l'équation de continuité et l'équation dynamique.

#### ❖ **A - Equation de continuité :**

Nous allons d'abord rappeler certains résultats de la mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous pression

Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  respectivement les contraintes longitudinale et radiale,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les déformations correspondantes,  $E$  le module d'élasticité de la conduite (module de YOUNG) et  $\nu$  le module de poisson.

La loi de HOOKE permet d'écrire :

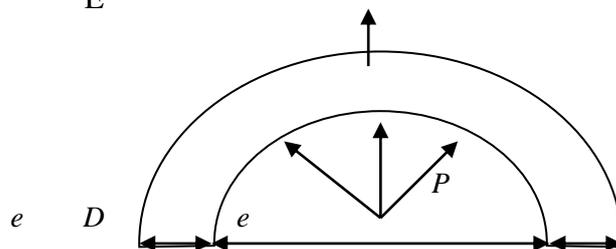
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

PD

Exprimons les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$

La contrainte  $\sigma_2$  :



**Fig I.1 :** Forces et contraintes radiales dans un tuyau.

Si  $D$  est le diamètre et  $e$  l'épaisseur du tuyau. La pression interne  $P$  exerce une force  $P.D$  sur une demi-circonférence.

La contrainte est donc :  $\sigma_2 = \frac{PD}{2e}$

Contrainte  $\sigma_1$  : on distingue deux cas :

**Premier cas :** si la conduite a suffisamment de joints, on peut considérer qu'il n'y a ni contraintes, ni déformations longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux (donc  $\nu = 0$ ). Dans ce cas, on a  $\nu_1 = \nu = 0$  ( $\nu$  n'est pas alors le module de poisson du matériau proprement dit mais son équivalent pour la canalisation globale).

**Deuxième cas :** la contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancré aux extrémités :

- **Tuyau ancré aux deux extrémités :** on a donc  $\varepsilon_1 = 0$  et par conséquent

$$\sigma_1 = \nu\sigma_2$$

- **Tuyau libre à une extrémité :** la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est égale  $\frac{P \cdot \pi \cdot D^2}{4}$ , cette pression peut être nulle dans le cas où la vanne d'extrémité serait grande ouverte. Cette force s'exerce sur le périmètre entier du tuyau  $\pi \cdot D$ , donc sur la surface  $\pi \cdot D \cdot e$ , la contrainte est donc  $\sigma_1 = \frac{P \cdot D}{4e}$  qu'on peut écrire  $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$

**Récapitulation :**

L'expression de la contrainte radiale :  $\sigma_2 = \frac{PD}{2e}$

L'expression de la contrainte longitudinale :  $\sigma_1 = k_c \sigma_2$

Avec  $k_c$  coefficient d'ancrage, on peut avoir trois cas :

**Cas A :** conduite sans joints, libre à une extrémité  $k_c = \frac{1}{2}$

**Cas B :** conduite sans joints, ancrées aux deux extrémités  $k_c = \nu$

**Cas C :** conduite avec de nombreux joints  $k_c = 0$

Nous allons exprimer l'équation de continuité en analysant les déformations à masse constante d'un volume de liquide entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Pour cela, nous allons exprimer que cette masse  $\rho v = \rho \cdot S \cdot \Delta L$  reste constante soit :

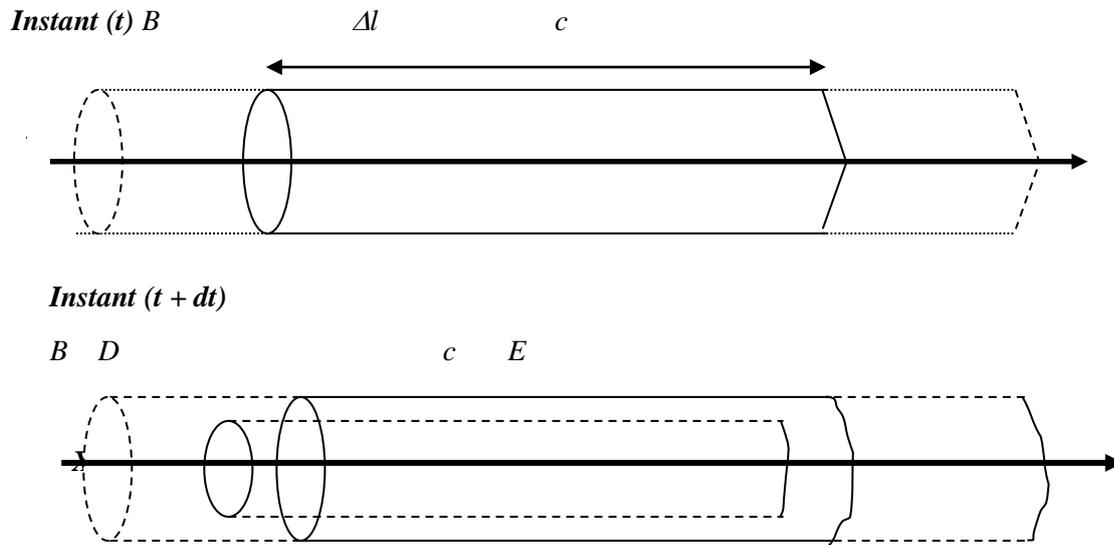
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = 0 \quad (I.1)$$

Avec :

$\rho$  : La masse volumique du liquide.

$S$  : La section radiale.

$\Delta L$  : la variation de longueur de l'élément liquide



**Fig1.2 :** Déplacement d'un élément liquide.

### **Variation de longueur de l'élément liquide**

Exprimons la variation  $\Delta L$ :

$$\Delta L (t) = x_c - x_B$$

$$\Delta L (t + dt) = x_E - x_D$$

$$d(\Delta L) = (x_E - x_c) - (x_D - x_B)$$

$$d(\Delta L) = U_c \cdot dt - U_B \cdot dt = (U_c - U_B)dt$$

$$d'où \quad d(\Delta L) = \frac{\partial U}{\partial X} \cdot \Delta L \cdot dt$$

$$et \quad \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = \frac{\partial U}{\partial X} dt \quad (I.2)$$

### **- Variation de la masse volumique de l'élément liquide :**

Par définition, le module d'élasticité du fluide  $\varepsilon$  est égal à  $dp/(d\rho/\rho)$ .

On en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\varepsilon} \quad (I.3)$$

### **-Variation de section de l'élément liquide :**

La section de l'écoulement liquide reste en permanence égale à celle de l'élément de tuyau qui l'entoure. On a donc:

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dr}{r} = 2d\varepsilon_2 = \frac{2}{E}(d\sigma_2 - \nu d\sigma_1)$$

On a vu précédemment que  $\sigma_1 = k_c \sigma_2$

Si on pose  $c = 1 - k_c \nu$ , on obtient :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2C}{E} d\sigma_2 = \frac{D}{E.e} . CdP \quad (1.4)$$

On remplace chaque terme de l'équation (I.1) par les expressions données dans les équations (I.2, I.3 et I.4), on obtient l'équation de continuité:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E.e} C \right) \frac{dP}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

On voit que le terme  $\left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E.e} C \right)$  dépend d'une part de la compressibilité de l'eau ( $\varepsilon$ ), d'autre part des caractéristiques du tuyau  $\left( \frac{D}{E.e} \right)$  et de la façon dont ce dernier est assemblé et ancré (c).

Ce terme est donc en général une caractéristique de l'installation sur laquelle on étudie le coup de bélier. On pose donc :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E.e} . C \right) \quad (1.6)$$

Ce qui donne comme nouvelle expression de l'équation de continuité :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad (1.7)$$

La relation (I.7) représente la première équation de SAINT-VENANT

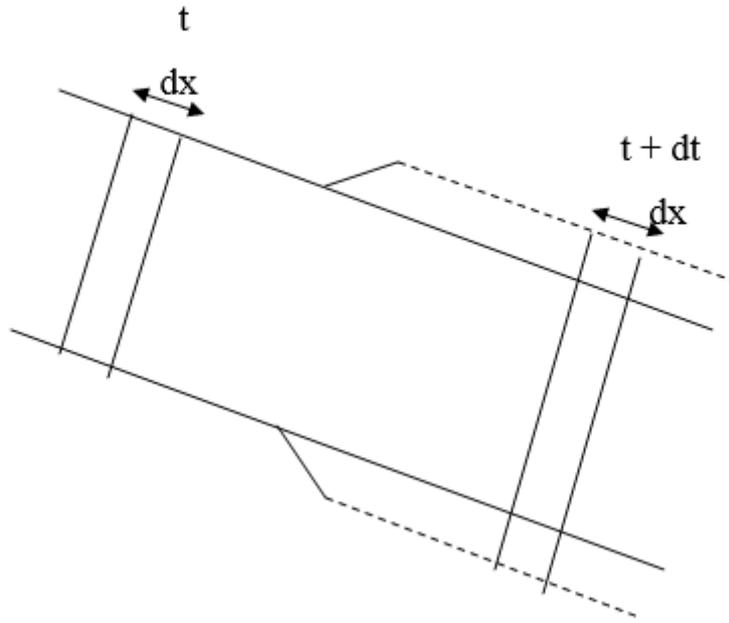
#### ❖ Equation dynamique :

On va suivre un petit élément de volume dans son mouvement et lui appliquer le théorème des quantités de mouvement :

$$\frac{d(mU)}{dt} = \sum F_{ex} \quad (1.8)$$

Qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mU)}{dt} = \frac{dm}{dt} U + m \frac{dU}{dt}$$



**FigI.3 :** Théorème des quantités de mouvement.

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement.

On a donc : 
$$\frac{dm}{dt} = 0$$

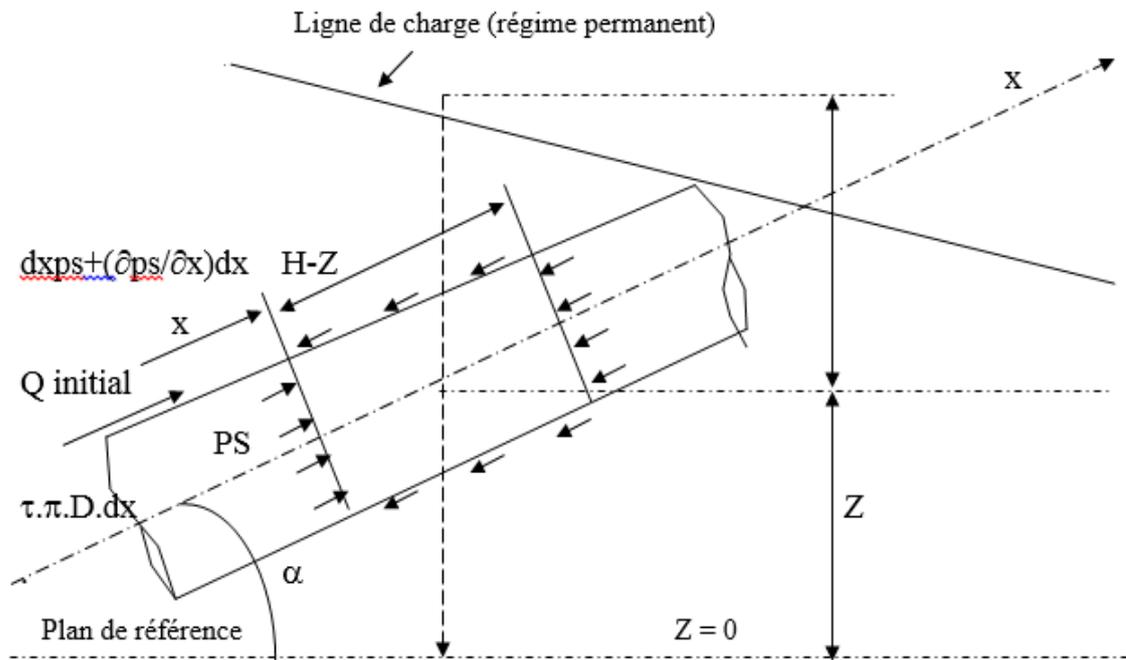
Donc 
$$\frac{d(mU)}{dt} = m \frac{dU}{dt} = \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{dU}{dt} \quad (I.9)$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite pour une couche d'eau d'épaisseur  $dX$ , Fig(I.4) sont :

- ❖ La pression sur une face de la tranche  $dX$  :  $PS$
- ❖ La pression sur l'autre face :  $-\left(PS + \frac{\partial P}{\partial X} dX\right)S$

**N.B** : la section  $S$  est supposée constante sur toute la longueur de la conduite donc nous négligeons le terme  $\frac{\partial S}{\partial X}$ .

- ❖ La composante du poids :  $-\rho g S dx \sin \alpha$
- ❖ Les frottements du liquide avec les parois de la conduite :  $\tau \cdot \pi \cdot D \cdot dX$



**FigI.4 :** Forces exercées sur une tranche liquide.

On signale que :  $\frac{dZ}{dX} = \sin \alpha$

Et  $P = \rho g (H-Z)$

A partir de la figure (I.4) on aura :

$$\Sigma F_{ex} = PS - \left( PS - SdX \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \rho g S dX \sin \alpha - \tau \pi D \cdot dX \quad (I.10)$$

On détermine d'abord le terme  $\tau \cdot \pi \cdot D$

Les pertes de charge étant représentées par  $\Delta P$  données par la formule :

$$\Delta P = \rho g \lambda \frac{L U^2}{\Delta 2g}$$

On peut écrire alors que la force de frottement  $Fr$  se calcule par l'une des deux formules suivantes :

$$Fr = \tau \pi D L \text{ ou } Fr = \Delta P \pi \frac{D^2}{4}$$

D'où l'on déduit :

$$\tau \pi D = \frac{\pi D^2}{4} \rho g \frac{\lambda U^2}{D 2g} = j \rho g S \quad (I.11)$$

Avec  $j = \frac{\lambda U^2}{D 2g}$  gradient hydraulique

On injecte l'expression  $\tau \cdot \pi \cdot D$  dans l'équation (I.10)

On aura :

$$\sum F_{ex} = -\frac{\partial P}{\partial X} S dX - \rho g S \sin \alpha dX - j \rho g S dX \quad (I.12)$$

En portant l'équation (I.12) dans l'équation (I.9) on obtient après simplification par  $\rho \cdot s \cdot dx$ :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - g(\sin \alpha + j)$$

Ou bien :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad (I.13)$$

L'expression (I.13) est la seconde équation de SAINT-VENANT.

On sait que :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial X}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X}$$

D'où on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad (I.14)$$

L'équation (I.14) représente la 2<sup>ème</sup> équation de SAINT-VENANT

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad (I.15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j)$$

Par conséquent les équations (I.7) et (I.14) représentent le système (I.15) des équations de SAINT-VENANT.

### I-5-2-Les équations aux caractéristiques :

A partir du système (I.15) on a :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad (a)$$

(I.16)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad (b)$$

En multipliant (a) par  $\frac{a}{\rho}$  on obtient :

$$a \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho a} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0$$

(I.17)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j)$$

Ajoutons-les d'abord puis retranchons la première de la deuxième. On obtient le système suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (a + U) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho a} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (a + U) \frac{\partial P}{\partial X} \right) = -g(\sin \alpha + j)$$

(I.18)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{\rho a} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial P}{\partial X} \right) = g(i - j)$$

La première équation du système (I.18) montre que si on se place sur un trajet tel que  $\frac{dX}{dt} = U + a$ , la quantité  $\frac{\partial U}{\partial t} + (a + U) \frac{\partial U}{\partial X}$  exprime sur ce trajet la dérivée totale par rapport

au temps de la vitesse  $\frac{dU}{dt}$  de même pour la pression, on aura donc :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin \alpha + j)$$

(I.19)

$$\frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin \alpha + j)$$

En utilisant les expressions suivantes :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dt} \sin \alpha \left( \text{car } \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \right)$$

$P = \rho g(H - Z)$  il vient donc :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d[\rho g(H - Z)]}{dt} = \rho g \left[ \frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right]$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho g \left[ \frac{dH}{dt} - \frac{dX}{dt} \sin \alpha \right]$$

D'où les équations du système (I.16) et leurs conditions respectives s'écrivent :

$$\frac{dX}{dt} = U + a \tag{I.20}$$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -\frac{g}{a} (U + a) \sin \alpha - g(\sin \alpha + j)$$

$$\frac{dX}{dt} = U - a \tag{I.21}$$

$$\frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -\frac{g}{a} (U - a) \sin \alpha - g(\sin \alpha + j)$$

Les équations aux caractéristiques sont représentées par les deux premières équations des systèmes (I.20), et (I.21) quant aux deux dernières équations des mêmes systèmes, elles sont dites de compatibilité.

En général, on a toujours  $a \gg U$  d'où il vient :

1°/ pour  $\frac{dX}{dt} = U + a \approx +a$

on a :  $\frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -gj$

2°/ pour  $\frac{dX}{dt} = -a$

$$\text{On a : } \frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -gj$$

Ou autrement écrites :

$$\frac{dX}{dt} = \pm a$$

$$\frac{g}{a} \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{g} U \pm H \right) + gj = 0$$

On introduit le débit  $Q = U.S$  dans cette dernière expression tout en la multipliant par  $\frac{a}{g}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{gS} Q \pm H \right) + aj = 0$$

Comme  $dX = \pm a dt$  on aura donc le système suivant :

$$\frac{dX}{dt} = \pm a \tag{I.22}$$

$$d \left( \frac{a}{gS} Q \pm H \right) + j dX = 0$$

Rappelons que le signe (+) doit être pris si  $dX = + a dt$  et le signe (-) n'est valable que dans le cas où  $dX = - a dt$

### I-5-3-Interprétation des équations aux caractéristiques :

Le système (I.22) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dX}{dt} = \pm a$$

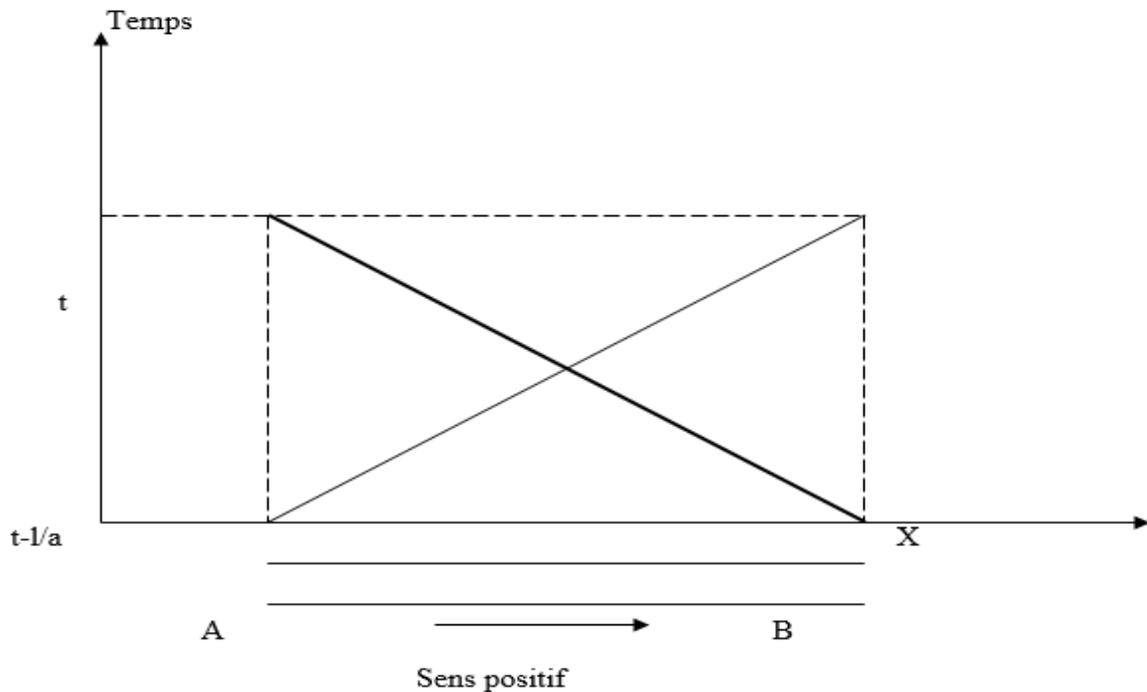
$$(I.23) \quad dH \pm \frac{a}{gS} dQ = -j dX$$

La figure (I.5) explique bien la première équation du système (I.23) qui représente deux droites sous la forme  $dX = \pm a dt$ .

D'autre part, on constate que pour une onde se déplaçant le long d'un trajet vérifiant  $dX = \pm a dt$ , il y a conservation de la deuxième équation ; la pression se transforme donc en débit (et vice-versa) suivant l'expression :

$$H(B, t) + \frac{a}{gS} Q(B, t) = H(A, t - \frac{L}{a}) + \frac{a}{gS} Q(A, t - \frac{L}{a}) - \int_{A(t - \frac{L}{a})}^{B(t)} j dx$$

En d'autres termes, un observateur se déplaçant à la vitesse  $a$  selon le sens positif adopté voit se conserver le long de son déplacement la quantité  $H + \frac{a}{gS} Q$  aux pertes de charge près



**Fig1.5 :** Déplacement d'une onde dans le plan  $(x, t)$ .

#### **I-5-4-Les équations d'ALLIEVI :**

Les équations (I.16a) et (I.16b) de SAINT-VENANT sont générales et traduisent tous les mouvements transitoires. On peut donc les simplifier en rétrécissant le champ de leur validité. Négligeons par exemple les pertes de charge et admettons qu'on ne s'intéresse qu'aux

variations telles que  $U \cdot \frac{\partial U}{\partial X}$  soit négligeable devant  $\frac{\partial U}{\partial t}$ . Ceci est souvent vrai en hydraulique

sous pression puisqu'en front d'onde  $\frac{\partial U}{\partial t}$  est égal à  $(-a \cdot \frac{\partial U}{\partial X})$  et que  $U$  est faible devant  $a$  ;

on peut également négliger  $U \frac{\partial P}{\partial X}$  devant  $\frac{\partial P}{\partial t}$ .

Le système des équations (I.16) devient alors :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

(I.24)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g \sin \alpha$$

Comme :  $\sin \alpha = \frac{\partial Z}{\partial X}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$  et  $P^* = P + \rho g Z$

On peut écrire :  $\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial P^*}{\partial t} = 0$

(I.25)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial X} = 0$$

Ces deux équations s'intègrent pour donner le système de solutions :

$$P^* = P^*_o + F' \left( t - \frac{X}{a} \right) + f' \left( t + \frac{X}{a} \right)$$

(I.26)

$$U = U_o + \frac{1}{a} \left( F' \left( t - \frac{X}{a} \right) - f' \left( t + \frac{X}{a} \right) \right)$$

Où  $F'$  et  $f'$  représentent des fonctions quelconques des variables  $\left( t - \frac{X}{a} \right)$  et  $\left( t + \frac{X}{a} \right)$ . C'est à partir de ces équations que sont établies les solutions analytiques pour les cas simples, en faisant intervenir les conditions aux limites.

On peut écrire le système (I.26) sous forme :

$$P^* - P^*_o = F' + f'$$

$$U - U_o = \frac{1}{Pa} (F' - f')$$

Effectuons les opérations suivantes :

1°/ Divisons la première équation par  $\rho g$ .

2°/ Multiplions le terme de droite de la deuxième équation par  $(\rho g)$ , puis divisons  $(F' - f')$  de ce même terme par  $(\rho g)$ .

3°/ Faisons sortir le signe moins (-) du terme  $(F' - f')$ .

Le système devient alors :

$$\frac{P^*}{\rho g} - \frac{P^*_o}{\rho g} = \frac{F'}{\rho g} + \frac{f'}{\rho g}$$

$$U - U_o = -\frac{g}{a} \left( \frac{f'}{\rho g} - \frac{F'}{\rho g} \right)$$

En développant les termes :  $\frac{P^*}{\rho g}$  et  $\frac{P^*_o}{\rho g}$

Nous retrouvons :  $H = \frac{P^*}{\rho g}$  et  $H_o = \frac{P^*_o}{\rho g}$

Posons ensuite :  $F = f'/\rho g$  et  $f = \frac{F'}{\rho g}$

Il vient alors :

$$H - H_o = F + f$$

(I.27)

$$U - U_o = -\frac{g}{a} (F - f)$$

Enfin nous aurons :

$$b = H - H_o = F\left(t - \frac{X}{a}\right) + f\left(t + \frac{X}{a}\right) \quad (I.28)$$

$$U - U_o = -\frac{a}{g} \left[ F\left(t - \frac{X}{a}\right) - f\left(t + \frac{X}{a}\right) \right]$$

Le système (I.28) représente les équations d'ALLIEVI.

Avec  $b = |H - H_o|$  : valeur du coup de bélier

$F$  et  $f$  : sont des signes fonctionnels qui dépendent des conditions aux limites.

**Interprétation :**

Imaginons un observateur mobile, se déplaçant à la vitesse constante «  $a$  »  
[3],[15]selon la loi :

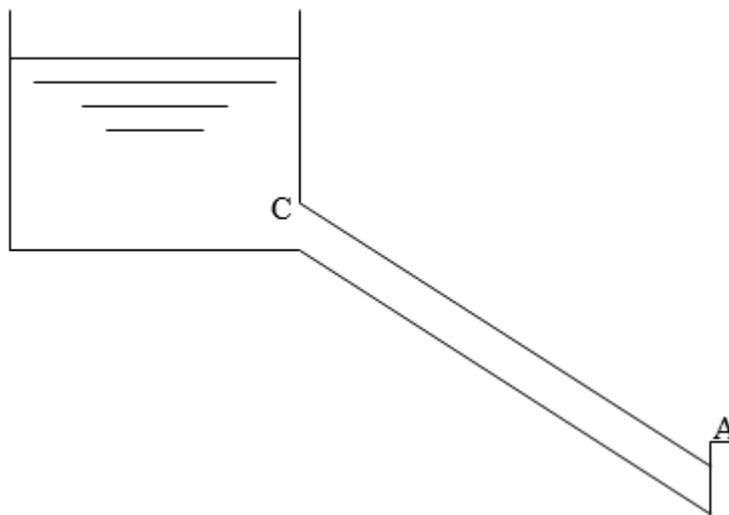
$$X = at + X_o$$

D'après les expressions ci-dessus,  $X$  étant positif dans le sens contraire à l'écoulement, l'observateur remonte le courant. L'équation ci-dessus devient alors :

$$\left(t - \frac{X}{a}\right) = Cts$$

En conséquence, pour cet observateur mobile, la fonction  $F\left(t - \frac{X}{a}\right)$  représente toujours la même valeur, où qu'il se trouve.  $F$  caractérise donc une onde qui se propagerait dans la conduite avec une vitesse  $a$ . On verrait de même que la fonction  $f\left(t + \frac{X}{a}\right)$  représente une onde se propageant avec une vitesse  $-a$ , c'est à dire dans le sens du courant. Finalement la surpression  $b$  en chaque point, résulte de la superposition des deux ondes  $F$  et  $f$ .

Si nous tenons compte maintenant des conditions aux limites, les équations d'ALLIEVI se transformeront de la manière suivante :



**Fig1.6 :** Conduite gravitaire.

A l'extrémité amont  $C$ , où le niveau du plan d'eau du réservoir est supposé invariable, la pression reste constante ; donc on a  $X = L$ , la surpression  $b$  reste constamment nulle ; on a donc la quantité suivante (par rapport au temps  $t$ ).

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0$$

$$f\left(t + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right)$$

Ainsi, l'onde de retour  $f$  est, en  $C$ , à tout instant, égale et opposée à l'onde incidente  $F$ . On en conclut qu'en  $C$  où la pression d'un réservoir à niveau fixe maintient une pression constante. L'onde  $F$  se réfléchit totalement avec changement de signe.

Observons d'autre part, qu'une onde incidente  $F$ , émise en  $A$  au temps  $t = 0$ , se réfléchit en  $C$  au temps  $\frac{L}{a}$  et revient en  $A$ , changée de signe au bout du temps :

$$\theta = \frac{2L}{a}$$

On a donc :  $F(\theta) = -F(0)$

D'une manière générale :  $f(t) = -F(t - \theta)$

En faisant  $t$  égale à  $(t - \frac{L}{a})$ . On peut conclure que l'onde  $f$  qui passe, au temps  $t$ , en un point  $X$  quelconque avec la vitesse  $(-a)$  est égale à l'onde  $F$  qui y est passée (avec la vitesse  $+a$ ) au temps  $(t - \theta)$  mais changée de signe.

$$\text{Finalement } f\left(t + \frac{X}{a}\right) = -F\left(t - \theta + \frac{X}{a}\right)$$

Les équations d'ALLIEVI s'écrivent définitivement :

$$b = F\left(t - \frac{X}{a}\right) - F\left(t - \theta + \frac{X}{a}\right)$$

$$U = U_o - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{X}{a}\right) + F\left(t - \theta + \frac{X}{a}\right) \right]$$

Comme on le voit la fonction  $f$  a disparu et le problème se ramène à la détermination de la seule fonction  $F$ .

## **I.6. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE**

### **I.6.1. Introduction**

Les équations qui permettent d'étudier tous les phénomènes transitoires que l'on rencontre en écoulement monophasique sous pression ont été établis par Saint Venant et par conséquent portent son nom. Ces équations dérivent par l'application de deux lois principales à savoir :

- La loi de la conservation de la masse (équation de continuité).
- La loi de la conservation de la quantité de mouvement (l'équation dynamique).

Précisions que, bien que l'eau soit souvent modélisée comme étant un fluide incompressible, les modèles mis en oeuvre pour des calculs hydrauliques transitoires, devront tenir compte de la faible compressibilité de l'eau, ainsi que de la

souplesse des conduites ; en effet, ce sont ces deux propriétés qui sont à l'origine des ondes de chocs dans les conduites, appelées coups de bélier [10].

### I.6.2. Equation de conservation de la masse ou équation de continuité

#### Hypothèses :

- La conduite étudiée est considérée monodimensionnelle, ce qui est justifiée si les grandeurs qui caractérisent l'écoulement sont constantes dans une section donnée.
- On considère également que l'écoulement est parallèle à l'axe de la conduite.
- On suppose que la pression  $p$  du fluide ainsi que le diamètre  $D$  de la conduite augmentent selon l'axe  $x$ .

#### I.6.2.1. Equation de continuité

Nous allons d'abord rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous pression.

Appelons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes longitudinale et radiale,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  les déformations correspondantes,  $E$  le module d'élasticité de la conduite (module de YOUNG) et le module de poisson. [7],

La loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \zeta_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)\end{aligned}\quad (I.29)$$

Essayons d'exprimer les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

#### Contrainte $\sigma_2$ :

Si " $D$ " est le diamètre et " $e$ " l'épaisseur du tuyau. La pression interne exerce une force " $P.D$ " sur une demi-circonférence.

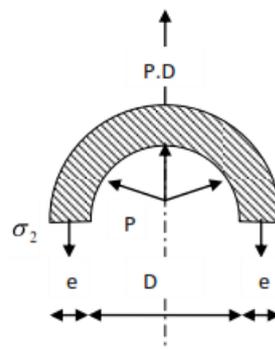


Fig I.7 : Forces et contraintes radiales dans un tuyau.

$$\sigma_2 = \frac{PD}{2e} \quad (\text{II.30})$$

La contrainte est donc :

**Contrainte  $\sigma_1$  :**

On distingue deux cas :

**Premier cas :** Si la conduite a suffisamment de joints, on peut considérer qu'il n'y a ni contraintes, ni déformations longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux (donc  $\nu = 0$ ). Dans ce cas, on a  $\nu_1 = \nu = 0$

( $\nu$  n'est pas alors le module de poisson du matériau proprement dit mais son équivalent pour la canalisation globale)

**Deuxième cas :** La contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancré aux extrémités :

Tuyau ancré aux deux extrémités : on a donc  $\zeta_1 = 0$  et par conséquent  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Tuyau libre à une extrémité : la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est égale :

$$\frac{P \cdot \pi \cdot D^2}{4}$$

Cette pression peut être nulle dans le cas où la vanne d'extrémité serait grande ouverte. Cette

force  $\sigma_1 = \frac{P \cdot D}{4e}$  s'exerce sur le périmètre entier du tuyau  $\pi \cdot D$ , donc sur la surface  $\pi \cdot D \cdot e$ , la

contrainte est donc qu'on peut écrire  $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$ .

Nous allons exprimer l'équation de continuité en analysant les déformations à masse constante d'un volume de liquide entre les instants ( $t$ ) et ( $t+dt$ ) Pour cela, nous allons exprimer que cette masse  $\rho v = \rho \cdot A \cdot \Delta L$  reste constante

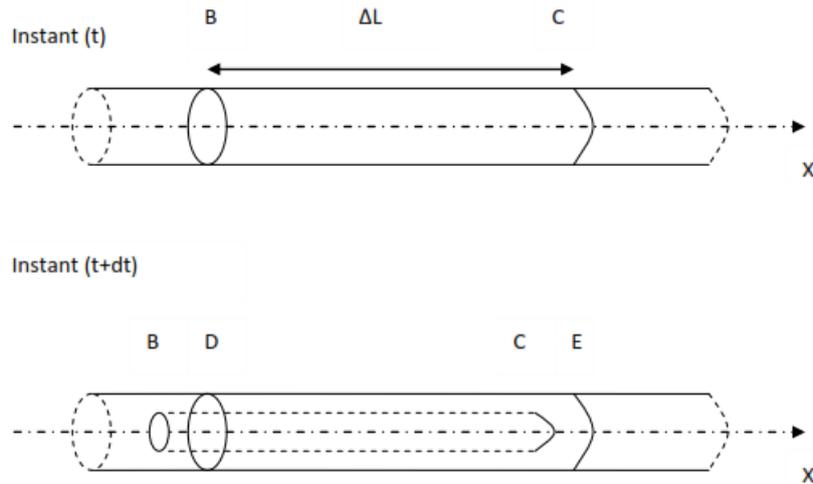
$$\text{Soit : } \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = 0 \quad (\text{I.31})$$

Avec :

$\rho$ : la masse volumique du liquide.

$A$ : la section radiale.

$\Delta L$ : la variation de longueur de l'élément liquide.



**Fig I.8 : Déplacement d'un élément liquide.**

**Variation de longueur de l'élément liquide**

Expriment la variation  $\Delta L$  :

$$\Delta L (t) = XC - XB$$

$$\Delta L (t + dt) = XE - XD$$

$$d(\Delta L) = (XE - XC) - (XD - XB)$$

$$d(\Delta L) = UC \cdot dt - UB \cdot dt = (UC - UB) dt$$

$$D'où : \quad d(\Delta L) = \frac{\partial U}{\partial X} \cdot \Delta L \cdot dt \quad (II.4) \quad \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = \frac{\partial U}{\partial X} \cdot dt$$

**Variation de la masse volumique de l'élément liquide :**

Par définition, le module d'élasticité du fluide  $E_{eau}$  est égal à  $dP / (d\rho/\rho)$ . On en déduit

$$L'égalité suivante : \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E_{eau}} \quad (I.32)$$

**Variation de section de l'élément liquide :**

La section de l'écoulement liquide reste en permanence égale à celle de l'élément de tuyau

$$qui l'entoure. On a donc : \quad \frac{dA}{A} = 2 \frac{dr}{r} = 2d\zeta_2 = \frac{2}{E} (d\sigma_2 - \nu d\sigma_1)$$

On a vu précédemment que  $\sigma_1 = K_c \sigma_2$ . Si on pose  $f = 1 - K_c \nu$ , on obtient :

$$\frac{dA}{A} = \frac{2f}{E} d\sigma_2 = \frac{D}{E \cdot e} f dP \quad (I.33)$$

Avec :

$A$  : La section de la conduite,

$E$  : Module de Young du matériau,

$e$  : Epaisseur de la conduite,

$D$  : Diamètre de la conduite.

On remplace chaque terme de l'équation (II.1) par les expressions données dans les équations (I.28, I.29 et I.30), on obtient l'équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \left( \frac{1}{E_{eau}} + \frac{D}{E \cdot e} f \right) \frac{dP}{dt} = 0 \quad (I.34)$$

On voit que le terme dépend d'une part de la compressibilité de l'eau ( $E_{eau}$ ), d'autre part des caractéristiques du tuyau  $\left( \frac{D}{E \cdot e} \right)$  et de la façon dont ce dernier est assemblé et ancré ( $f$ ).

Ce terme est donc en général une caractéristique de l'installation sur laquelle on étudie

le coup de bélier. On pose donc : 
$$\frac{1}{C^2} = \rho \left( \frac{1}{E_{eau}} + \frac{D}{E \cdot e} f \right) \quad (I.35)$$

Comme : 
$$\frac{1}{C^2} = \rho \left( \frac{1}{E_{eau}} + \frac{D}{E \cdot e} f \right) \quad (I.35)$$

Comme : 
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X}$$

Ce qui donne :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{C^2} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad (I.36)$$

L'équation (I.34) représente la première équation de SAINT-VENANT

### I.6.2.2. Equation dynamique

On va suivre un petit élément de volume dans son mouvement et lui appliquer le théorème des quantités de mouvement :

$$\frac{d(mU)}{dt} = \sum F_{ex} \quad (I.37)$$

Avec :

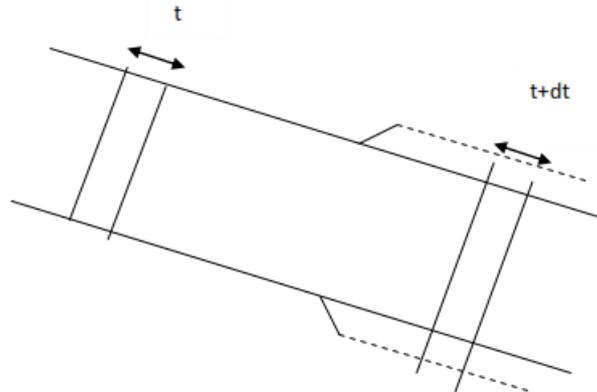
$\Sigma F_{ex}$  : La somme des forces extérieures.

$m$  : La masse de la tranchée.

$U$  : La vitesse d'écoulement.

Qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mU)}{dt} = \frac{dm}{dt}U + m \frac{dU}{dt}$$



**FigI.9** : Théorème des quantités de mouvement.

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement.

On a donc

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

On a donc :

$$\frac{d(mU)}{dt} = m \frac{dU}{dt} = \rho \cdot A \cdot dX \cdot \frac{dU}{dt} \quad (I.38)$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite pour une couche d'eau d'épaisseur  $dX$ , (figure I.10) sont :

➤ La pression sur une face de la tranche  $dX$  :  $PA$

➤ La pression sur l'autre face :  $- \left( P + \frac{\partial P}{\partial X} dX \right) A$

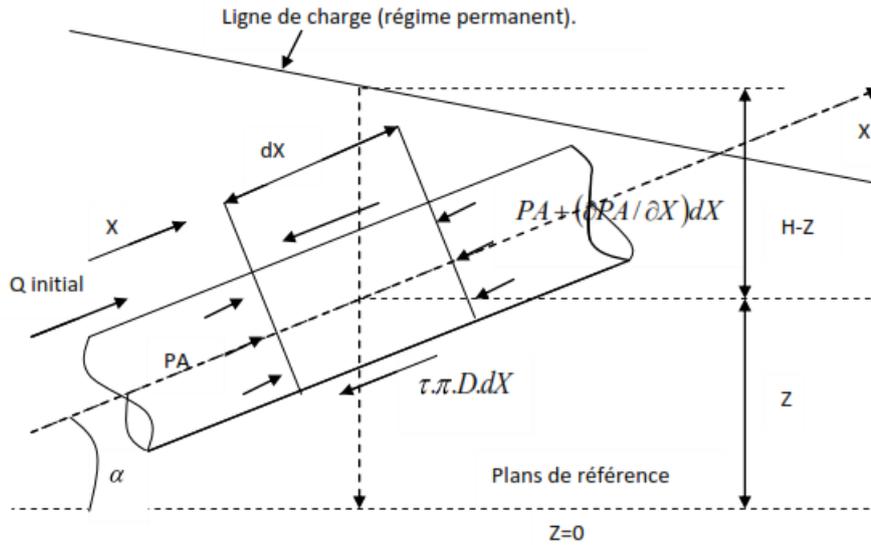
**N.B** : la section  $A$  est supposée constante sur toute la longueur de la conduite donc nous négligeons le terme :

➤ La composante  $-\rho g A dX \sin \alpha$  du poids

Où,

$\alpha$  : l'angle entre l'axe de la conduite et l'horizontal.

➤ Les frottements du liquide avec les parois de la conduite  $\tau \cdot \pi \cdot D \cdot dX$



**FigI.10** : Forces exercées sur une tranche liquide.

A partir de la figure (I.10) on aura :

$$\sum F_{ex} = PA - \left( PA + AdX \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \rho g AdX \sin \alpha - \tau \pi D \cdot dX \quad (I.39)$$

On détermine d'abord le terme  $\tau \cdot \pi \cdot D$

Les pertes de charge étant représentées par  $\Delta P$  donnée par la formule

$$\Delta P = \rho g \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

On peut écrire alors que la force de frottement "Fr" se calcule par l'une des deux formules suivantes

$$Fr = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L \quad \text{ou} \quad Fr = \Delta P \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

D'où l'on déduit :

$$\tau \cdot \pi \cdot D = \frac{\pi D^2}{4} \rho g \frac{\lambda U^2}{2gD} = j \rho g A \quad (I.40)$$

Avec  $j = \frac{\lambda U |U|}{2gD}$  (gradient hydraulique).

La valeur absolue garanti que le dernier terme est bien dissipatif et pour préciser que les forces de frottement sont opposées au sens de l'écoulement.

On injecte  $\tau \cdot \pi \cdot D$  l'expression dans l'équation (I.38), on aura :

$$\sum F_{ex} = -\frac{\partial P}{\partial X} AdX - \rho g A \sin \alpha dX - j \rho g AdX \quad (I.41)$$

En portant l'équation (I.39) dans l'équation (I.36) on obtient après simplification par  $A.dX$  :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin \alpha + j) \quad (I.42)$$

L'expression (I.40) est la seconde équation de SAINT-VENANT.

La vitesse est une fonction de l'abscisse  $X$  et du temps  $t$ , ce qui donne

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X}$$

D'où on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + g(\sin \alpha + j) = 0 \quad (I.43)$$

L'équation (I.41) représente la 2eme equation de SAINT-VENANT.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{C^2} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial X} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + g(\sin \alpha + j) = 0 \end{cases} \quad (III.15)$$

Par conséquent les équations (I.36) et (I.43) représentent le système (I.42) des équations de SAINT-VENANT

### I.6.2.3. Analyse des paramètres

Les équations de continuité et de quantité de mouvement établies précédemment, décrivent l'écoulement d'un fluide en régime transitoire dans les conduites à parois élastiques.

Dans ces équations figurent différents paramètres et variables dont deux indépendantes

$X$  et  $t$  et deux dépendantes  $P$  et  $U$ . les autres paramètres  $D$ ,  $\rho$ ,  $C$ , représentent les caractéristiques du système et sont habituellement considérés indépendants du temps.

- **Paramètre  $D$  :**

Il représente le diamètre de la conduite, il n'est fonction que de la distance  $X$  (variation de la section de conduite suivant la longueur).

- **Paramètre  $\rho$  :**

Il représente la masse volumique du fluide, qui est généralement supposée constante pour la durée du régime transitoire.

**- Paramètre C :**

*Il représente la vitesse de propagation de l'onde en régime transitoire, elle dépend des caractéristiques du système et des propriétés du fluide.*

*Elle peut être déterminée par l'expression suivante : (I.43)*

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho \left( \frac{1}{E_{eau}} + \frac{D \cdot f}{E \cdot e} \right)}}$$

*Avec :*

*C : célérité de l'onde de pression (ou onde élastique en m/s).*

*$\rho$  : la masse volumique de l'eau (1000 kg/m<sup>3</sup>).*

*E eau: module d'élasticité du liquide ou compressibilité de l'eau (2070 MPa).*

*D : diamètre intérieur de la conduite (m).*

*e : épaisseur de la paroi (m).*

*E : Module de Young du matériau ou module d'élasticité du matériau constituant la conduite (MPa)*

$$f = 1 - K_c \nu$$

*Avec :*

*kc : coefficient d'ancrage.*

*$\nu$ : le module de poisson.*

*Dans notre cas on suppose que la conduite est construite avec des joints de dilatation ce qui permet une déformation longitudinale libre.*

*On a:  $kc = 0$*

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho \left( \frac{1}{E_{eau}} + \frac{D}{E \cdot e} \right)}}$$

*D'où:  $f = 1$*

*Les deux facteurs essentiels qui interviennent dans la vitesse de propagation de l'onde de pression sont surtout la compressibilité de l'eau E et l'élasticité du matériau constituant la conduite E.*

**- Paramètre  $\lambda$  :**

Il représente le coefficient de frottement, est généralement considéré comme celui d'un écoulement turbulent permanent uniforme.

Pour tous les tuyaux, on ne considère que l'équation de Colebrook comme étant la plus acceptable pour calculer le coefficient de frottement

Cette équation ou, est calculée :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad (I.44)$$

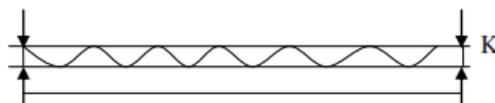
Du fait que l'équation est difficile à résoudre, puisque la formule est implicite en on dispose de diagrammes permettant de lire la relation entre le coefficient de frottement, le nombre de Reynolds  $Re$  et la rugosité relative  $k/D$ .

Une approximation explicite de cette équation est donnée par la formule de Colebrook White :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{k}{3.7D} + \frac{5.1268}{\text{Re}^{0.89}} \right) \quad (I.45)$$

Le rapport " $k/D$ " représente la rugosité relative avec :

$K$  : appelé coefficient de rugosité absolu qui représente la hauteur moyenne des aspérités des incrustations des dépôts et autres irrégularités présentes sur la surface interne des Conduits



**FigI.11** : Paroi de la conduite.

Le tableau I.1 ci-après présente quelques coefficients de rugosité  $k$  que l'on peut appliquer dans la famille des formules de Colebrook. (Conduites récentes : jusqu'à 30 ans. Conduites anciennes : après 50 ans [12])

**Tableau I.1.** Coefficient de rugosité  $k$  (mm) pour différents matériaux.

Matériaux	Conduites récentes	Conduites anciennes
Acier	0.015 – 0.1	0.06 – 0.1
Acier revêtement plastique	0.03	0.15
Acier revêtement lisse non poreux	0.03	0.15
Fonte	0.1-1.0	0.3 – 0.6
Fonte revêtement bitume	0.03 - 0.2	0.15 – 0.3
Fonte revêtement ciment	0.03 - 0.2	0.15 – 0.3
Plastiques	0.03 - 0.1	0.01 – 1.5
Laiton- Cuivres- Plomb	0.003	0.01
Aluminium	0.003 - 0.15	0.06

*Re* : le nombre de Reynolds qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie de l'écoulement et les forces de viscosité. Il est plus important nombre sans dimension en dynamique des fluides, il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds.

Défini par la relation suivante

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (I.46)$$

Sachant que la relation (II.16) ou (II.17) est valable pour les valeurs de  $R > 2300$  (où les forces d'inertie sont si importantes que l'écoulement devient turbulent).

$\nu$  : représente la viscosité cinématique du fluide ( $m^2/s$ ) qui est égal à :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Avec :

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide ( $kg/m.s$ ).

$\rho$  : Masse volumique du fluide ( $kg/m$ ).

Cette viscosité cinématique de l'eau varie avec la température avec une diminution de la viscosité lorsque la température monte selon le tableau (I.2). Mais il n'existe pas une relation vraiment rigoureuse liant et la température. En générale pour l'eau la viscosité cinématique est égale à  $10^{-6} m^2/s$

**Tableau I.2.** La viscosité cinématique par rapport à la température.

Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)	Température (°C)	Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)	Température (°C)
1,520	5	0,963	22
1,308	10	0,941	23
1,275	11	0,919	24
1,241	12	0,896	25
1,208	13	0,878	26
1,174	14	0,856	27
1,141	15	0,841	28
1,115	16	0,823	29
1,088	17	0,804	30
1,061	18	0,727	35
1,034	19	0,661	40
1,005	20	0,556	50
0,985	21	0,442	65

### I.6.3.1. Type de conduites

Dans l'étude de la propagation des ondes, on est confronté à deux types de conduites : certaines ont sur toute leur longueur la même épaisseur, le même diamètre et la même nature du matériau, ce sont des conduites à caractéristique unique ; c'est la théorie de MM. Allievi et Joukowski où l'étude des coups de bélier se ramène à l'équation de d'Alembert des cordes vibrantes .

Mais on sait que le plus souvent, les conditions industrielles sont plus épaisses à leur extrémité aval et plus mince à leur extrémité amont. Elles constituées par des tronçons d'épaisseurs différentes et parfois de diamètres différents. De pareilles conduites sont dites à caractéristiques variables ou multiples. M de Sparre a étudié de façon complète ces types de conduites.

Considérons par exemple une conduite à caractéristiques variables, pour chaque tronçon de longueur  $L_i$  on peut déterminer la vitesse de propagation  $C_i$  en appliquant la formule (I.43) de M. Allievi, on obtient ainsi  $t_{ca} = \theta_i = \frac{L_i}{C_i}$  temps que met l'onde pour parcourir

la longueur  $L_i$  de ce tronçon. Si l'on  $\theta = \sum \theta_i = \sum \frac{L_i}{C_i}$  désigne par  $T$  le temps mis par

l'onde pour aller de la vanne jusqu'au réservoir on obtient  $\theta = \sum \theta_i = \sum \frac{L_i}{C_i}$  et en posant

$L = \sum L_i$  alors la vitesse moyenne  $C$  pour une conduite à caractéristiques variables ou multiples sera calculée par la formule :

$$C = \frac{L}{\theta} = \frac{\sum L_i}{\sum \frac{L_i}{C_i}}$$

D'après M. de Sparre, on peut assimiler une conduite à caractéristiques variables à une conduite formée de deux ou trois tronçons.

### I.6.3.3 Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite

En ce qui concerne la célérité et le type de matériau constituant la conduite, elle peut aller de 15 m/s pour le caoutchouc à 180 m/s pour les matières plastiques, jusqu'à 1000 m/s pour l'acier et la fonte et le maximum qu'elle pourrait atteindre correspondrait à la vitesse de propagation du son dans l'eau soit 1430 m/s pour eau incompressible et conduite indéformable ou très rigide ( $E = 0, E = \infty$ ).

Exemple pour les matières courantes :

Pour PVC :  $E = 2,76 \times 10^3$  Mpa.

Pour fonte ductile :  $E = 1,03 \times 10^5$  MPa.

Pour acier :  $E = 2 \times 10^5$  MPa.

Voici à titre d'exemple le tableau (I.3) qui indique la relation entre cette célérité et les propriétés de la conduite (les unités des modules d'élasticité sont en Mpa, le module d'élasticité de l'eau est pris égal à 2070 MPa).

**Tableau I.3.** Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite.

Matériau	Module d'élasticité E (MPa)	Vitesse en m/s								
		D/c								
		0	5	10	20	30	40	50	75	100
ACIER	200000	1438.7	1402.9	1369.6	1309.6	1256.8	1209.9	1167.9	1079.5	1008.5
CUIVRE	110000	1438.7	1375.5	1319.9	4226.4	1150.2	1086.7	1032.7	926.5	847.5
PVC	2500	438.71	34.66	72.37	343.3	283	246.3	221	181.1	157.2

### I.6.4. Equations simplifiées

Comme il s'agit d'un modèle uniquement propagatif, les équations de continuité et de quantité de mouvement établies précédemment peuvent être simplifiées en éliminant les termes

d'inertie convective du type  $U \frac{\partial P}{\partial X}$  et  $U \frac{\partial U}{\partial X}$  et, ainsi en les éliminant et en multipliant l'équation (I.34) par C2 on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C^2 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + g \sin \alpha + \frac{\lambda U |U|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (I.47)$$

Pour introduire dans ces équations, à la place de  $P$  et  $U$  des variables d'utilisation plus courante  $H$  et  $Q$ , on peut écrire les relations suivantes :

La pression au sein du fluide peut être donnée par :

$$P = wh = \rho gh = \rho g(H - Z)$$

Avec :

$w$  : poids spécifique [kg/m.s<sup>2</sup>].

$H$  : Hauteur piézométrique [m].

$Z$  : Altitude du point considéré [m].

On considère une conduite ne subissant pas de déplacements verticaux (conduit horizontale):

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dX} = \sin \alpha = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial X} = \rho g \frac{\partial H}{\partial X}$$

En tenant compte des points précédents on aura le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C^2 \frac{\partial U}{\partial X} + \rho g \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\lambda U |U|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (I.48)$$

Or :  $Q = A.V$

Avec :

$Q$  : le débit volumique [m<sup>3</sup>/s].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial X}$$

En remplaçant les dérivées partielles par leurs expressions dans les équations

Simplifiées on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\lambda Q |Q|}{2DA} = 0 \end{array} \right. \quad (I.49)$$

Avec :  $\frac{\lambda Q |Q|}{2DA}$  Le terme de frottement

Le système d'équations (I.49) constitue la base de calcul pour les écoulements non stationnaire dans les conduites en charge, et représente un système d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) quasi-linéaire de type hyperbolique.

Quand on pose l'hypothèse simplificatrice suivante : écoulement dont la perte de charge unitaire peut être négligé.

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (I.50)$$

On dérive la première équation du système (I.50) par rapport au temps  $t$  et la deuxième par rapport à la variable de l'espace  $X$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{C^2}{gA} \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial t} + gA \frac{\partial^2 H}{\partial^2 X} = 0 \end{cases} \quad (I.51)$$

On multiplie la première équation  $\frac{gA}{C^2}$  par

$$\begin{cases} \frac{gA}{C^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial t} + gA \frac{\partial^2 H}{\partial^2 X} = 0 \end{cases} \quad (I.52)$$

$$\text{Il vient : } \frac{gA}{C^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = gA \frac{\partial^2 H}{\partial^2 X} \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 H}{\partial^2 X} \quad (I.53)$$

On prend les mêmes équations du système (I.50) : la (1) on le dérive par rapport  $X$  et la (2) on

le multiplie par  $\frac{1}{gA}$

et on le dérive par rapport à "t" on obtient

$$\begin{cases} \frac{gA}{C^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial t} + gA \frac{\partial^2 H}{\partial^2 X} = 0 \end{cases} \quad (I.52)$$

Il vient :

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{C^2}{gA} \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} \quad (I.55)$$

Donc le système à résoudre se réduit aux deux équations (I.53) et (I.55) qui représentent deux EDP hyperboliques d'ordre 2 avec deux inconnus  $Q$  et  $H$  liées aux variables  $X$  et  $t$  par une même équation différentielle qui est l'équation des ondes ou bien équation des cordes vibrantes ou équation d'Alembert qui a la forme générale :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}$$

Mais la plupart des cas pratiques ne peuvent pas être analysée de manière satisfaisante, par ce type de modèle analytique simple puisqu'on a négligé les pertes de charge, donc il ne reflète pas la réalité. Les méthodes analytiques de calcul du coup de bélier et les formules auxquelles elles aboutissent n'ont, en définitive, qu'un champ d'application assez restreint.

Notamment, elles ne tiennent pas compte de l'influence des pertes de charge (comme on a vu précédemment) ni des caractéristiques très variées des conduites industrielles et des conditions très variables des manoeuvres de fermeture ou d'ouverture.

En particulier en cas de fermeture lente, la seule formule utilisée pratiquement et dont l'expression analytique soit simple est celle de Michaud qui repose sur l'hypothèse de la variation linéaire du débit en fonction du temps, hypothèse qui n'est jamais réalisée pratiquement.

Il faut donc recourir à des méthodes graphiques vu que la méthode graphique permet d'aboutir d'une manière très élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes qui, à première vue paraissent les plus compliqués.

Othmar Schnyder a proposé, en 1929, une méthode graphique de calcul des coups de bélier dans les conduites de refoulements des pompes qu'il a ensuite étendue aux systèmes en charges quelconques en particulier aux conduites forcées (1932).

Indépendamment de Schnyder, Louis Bergeron a proposé en 1931 la même méthode qui est connue en France sous le nom de « méthode Bergeron » ; elle est largement développée dans son ouvrage « Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité » (Dunod 1949).

Les méthodes graphiques (comme celle de Schnyder-Bergeron) permettent de suivre les phénomènes pas à pas en introduisant les pertes de charges mais dans les cas les plus complexes comme l'existence de plusieurs conduites ou les singularités

hydrauliques situées aux extrémités de la conduite (les conditions aux limites) l'épure de Bergeron devient plus difficile à réaliser et on met plus de temps pour aboutir au résultats.

Les méthodes graphiques (comme celle de Schnyder-Bergeron) permettent de suivre les phénomènes pas à pas en introduisant les pertes de charges mais dans les cas les plus complexes comme l'existence de plusieurs conduites ou les singularités hydrauliques situées aux extrémités de la conduite (les conditions aux limites) l'épure de Bergeron devient plus difficile à réaliser et on met plus de temps pour aboutir au résultats.

L'événement du calcul numérique vers la moitié de ce siècle a déroute dans des perspectives nouvelles. Une procédure numérique s'appuyant sur la méthode des caractéristiques a été élaborée par la contribution de PARMARKIAN (1963), de WILIE et STREETER (1967). Cette procédure n'a cessé d'être élargie et consolidée pour rendre compte des divers phénomènes qui accompagnent le passage des ondes de coup de bélier dans les tuyauteries. PARMARKIAN a étudié l'influence des efforts longitudinaux sur la célérité de propagation dans les conduites à parois minces uniquement, mais il a considéré l'influence des contraintes et déformations longitudinales de la conduite.

En 1936, HALLIWEL élargit les travaux de PARMARKIAN pour inclure la conduite à parois épaisses tout en prenant en compte les contraintes et les déformations de la conduite, mais il exprime la célérité de la même façon que PARMARKIAN.

En 1977, E. HADJ TAYEB a montré l'influence de la déformabilité des parois et de la compressibilité du fluide sur la propagation des ondes de pression dans le domaine diaphanique.

Il a montré que la propagation des ondes de pression est étroitement liée à l'élasticité des parois et la compressibilité du fluide.

En 1979, F. MASSOUH traitant les équations de continuité et dynamique par la méthode d'ALLIVI ou par la méthode des caractéristiques et détermine une nouvelle expression de la célérité de propagation qui tient compte des efforts longitudinaux dans les conduites à parois minces et épaisses.

Dans le même domaine, B. BAHRAR, H. RIEUTORD, et R. MOREL, ont mené une étude avec le minimum d'hypothèse tant sur l'écoulement que sur le comportement de la paroi, ou sont également prises en compte les déformations de flexion et de cisaillement ainsi que les effets dynamiques liés à l'inertie de la paroi

Actuellement, B. SALAH analyse tous les travaux de JEAGER et HALLIWEL et développe un modèle mathématique permettant le calcul de la célérité d'onde dans les

conduites enterrées, en tenant compte des caractéristiques mécaniques du sol et de la conduite.

Le développement de l'outil informatique et l'accroissement constant de sa puissance ont permis de traiter des problèmes beaucoup plus complexes et d'améliorer la précision de calcul.

### **I.6. 5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation mathématique des phénomènes des écoulements transitoires en charge qui décrivent fidèlement le comportement des différents éléments rencontrés sur les réseaux hydrauliques, en s'appuyant sur les équations de base hyperboliques établies par Saint-Venant

### **I.7. Valeur numérique du coup de bélier**

#### **I.7.1. Manœuvres rapides. Formule de JOUKOWSKY**

Nous avons considéré, jusqu'à présent, une manœuvre instantanée, c'est-à-dire, d'une durée  $T=0$ , ce qui est physiquement impossible.

Dans la réalité, la variation de débit, provoquée par l'arrêt d'une pompe par exemple, se fait en un temps  $T \neq 0$  et des ondes élémentaires sont engendrées, au fur et à mesure que s'opère l'arrêt.

$$\Delta h = \pm \frac{C \cdot \Delta U}{g} \quad \text{Loi de JOUKOWSKY}$$

Dans le cas d'une variation de débit rapide, temps d'annulation du débit inférieur au temps correspondant à l'allée et venue d'une onde élastique, on montre que la valeur maximale du coup de bélier était de

$$\Delta h_{\max} = \frac{C \cdot U}{g} .$$

Avec :

$U$  : vitesse moyenne de l'écoulement (m/s),

$C$  : vitesse de propagation (m/s),

$g$  : accélération terrestre (m/s)

Considérons une conduite horizontale  $ab$ , de diamètre intérieur  $D$  de longueur  $L$ , alimentée en "a" par un réservoir à niveau constant (Figure I.1).

Soit " $Q_0$ " le débit au temps  $t = 0$  et supposons qu'il passe encore après un temps

$\frac{2L}{C}$   
Un débit " $q$ ".

La valeur de la surpression et de la dépression due au coup de bélier est

$$h = \frac{C}{gA} (Q_0 - q)$$

Où, A : la section de la conduite (m<sup>2</sup>).

Supposons que le temps de fermeture de la vanne soit  $T = n \frac{2L}{C}$  et que pendant ce temps le débit varie linéairement.

Nous avons :

$$Q_0 - q = \frac{Q_0}{n}$$

$$Q_0 - q = Q_0 \frac{2L}{CT}$$

Donc : 
$$h = \frac{C}{gA} Q_0 \frac{2L}{CT} = \frac{2LQ_0}{gAT}$$

Finalemment : 
$$h = \frac{2LU}{gT}$$
 c'est la formule dite de Michaud.

La formule de Joukowsky ne s'applique que dans le cas de manoeuvres rapides

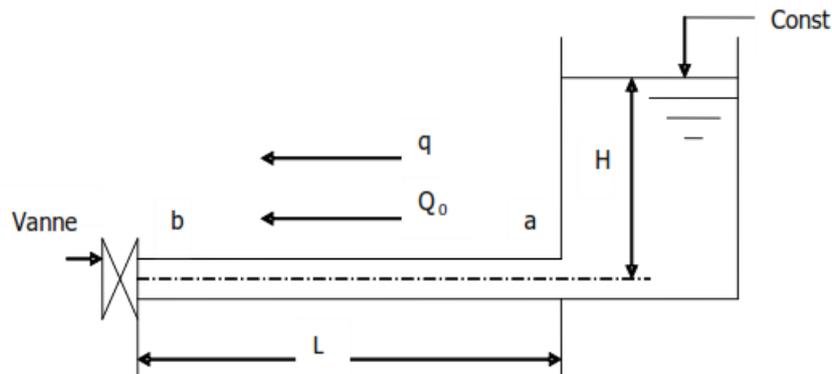


Fig I.12 : Fermeture lente d'une vanne de sectionnement.

Remarquons que si, dans cette formule, on remplace par, on retrouve la valeur de coup de bélier par fermeture brusque. En conclusion

- Si  $T < \frac{2L}{C}$ , le coup de bélier a pour valeur maximale  $h = \frac{CU}{g}$ .
- Si  $T > \frac{2L}{C}$ , le coup de bélier est moins important et a pour valeur maximale  $h = \frac{2LU}{gT}$ .

## ***I.8. Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie***

### ***I.8.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe***

*Considérons donc un système, analogue à une situation de refoulement, où l'eau coule à une vitesse  $U$  pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant. Le phénomène, illustré à la figure I.2, peut être décrit en quatre phases.*

*1) Au temps  $t = 0$ , le débit à travers la pompe est brusquement interrompu. La vanne clapet située à l'amont du système est fermée, immédiatement et à proximité de la vanne, la vitesse d'écoulement s'annule, donc l'énergie cinétique fait de même et doit être compensée par un gain d'énergie potentielle sous forme d'une de pression puisque le mouvement initial de l'eau a tendance à tirer sur la partie de la colonne d'eau qui est immobile. Cette énergie de dépression se traduit mécaniquement par une énergie de déformation qui tend à réduire le diamètre de la conduite. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la conduite soit mise en compression, ce qui prend un temps égal au rapport de la longueur ' $L$ ' sur la célérité de l'onde de déformation'.*

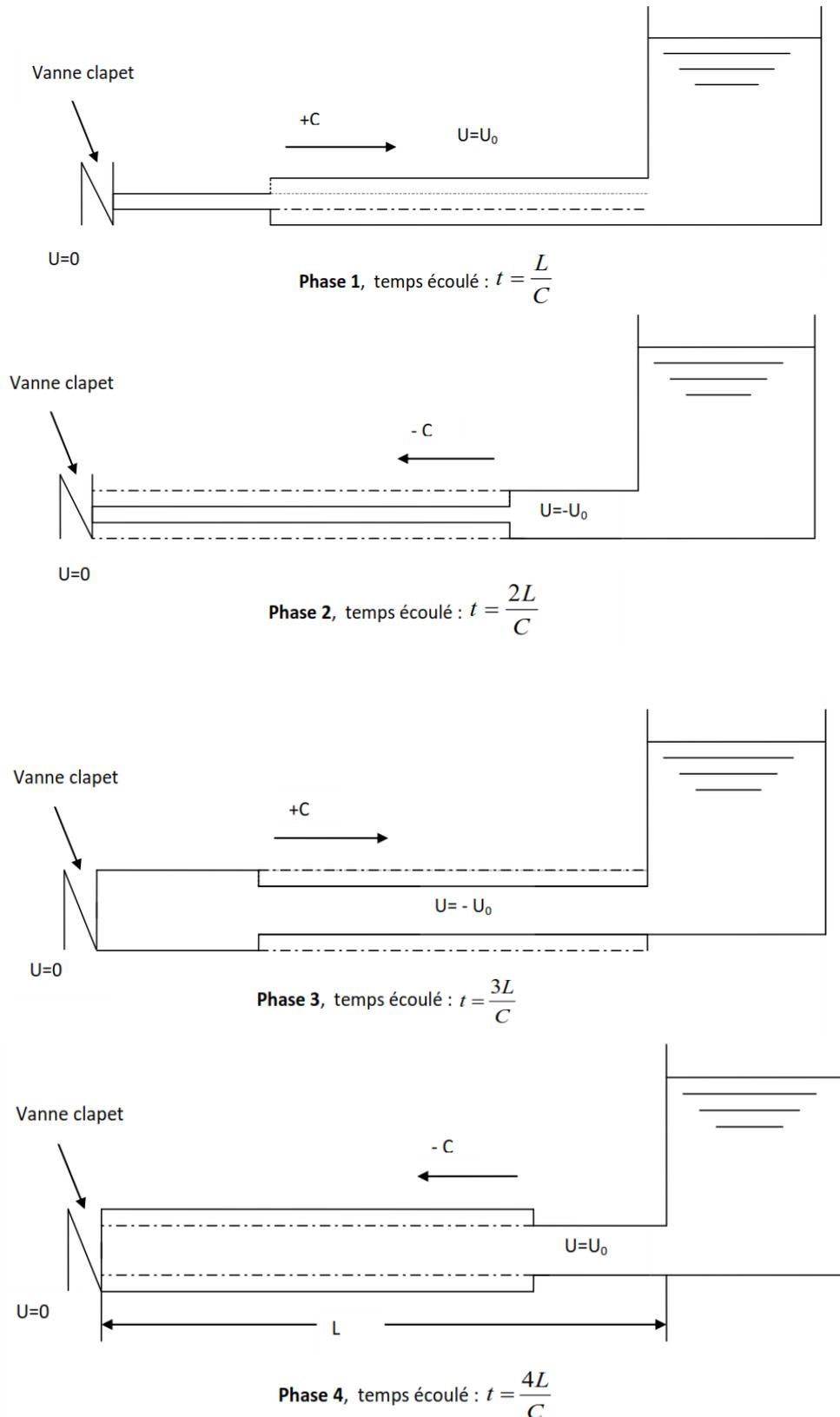
*2) Lorsque que l'onde de dépression atteint le réservoir, celle-ci se dissipe puisqu'il règne à cet endroit une pression constante. A ce moment précis, plus rien ne retient la mise en compression de la conduite et elle commence à reprendre sa forme à proximité du réservoir. L'augmentation de volume ainsi créée, entraîne le remplissage de la conduite à une vitesse équivalente à la vitesse initiale du fluide puisque la déformation initiale de la conduite est directement liée à cette dernière. Ce phénomène a la même durée que celle de l'étape précédente.*

*3) Au moment où toute la conduite a repris sa forme, la vitesse de l'eau doit s'annuler en frappant la vanne fermée. Encore une fois, on doit avoir transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle par contre, cette fois, l'énergie de pression est positive puisque l'inertie de l'eau tend à comprimer la partie immobile de la colonne d'eau.*

*Cette surpression met en tension la conduite qui se dilate. La vitesse de l'onde de déformation ' $C$ ' étant constante, la durée de cette étape est identique à celle des précédentes.*

*4) Le surplus d'eau dû à l'augmentation du volume de la conduite commence à s'évacuer près du réservoir à une vitesse  $U_0$  de façon à ce que la conduite reprenne son diamètre initial. A la fin de cette étape, toute la conduite aura retrouvé les conditions initiales et l'étape 1 pourra recommencer.*

Ce cycle de période  $T = 4L/C$  se répéterait indéfiniment, s'il n'y avait pas de frottement. Les effets du frottement agissent essentiellement sur l'amortissement de l'amplitude de la variation de pression.



FigI.13 : Les quatre étapes d'un cycle de variation de pression.

### **I.8.2. Cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite**

Dans le cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite, la manoeuvre d'une vanne à l'aval du système entraîne une surpression au voisinage de la vanne semblable à celle observée à l'étape 3 du cas précédent.

Le phénomène suit alors les étapes 4, 1, et 2.

Au bout du temps  $t = L/C$  serait engendrée dans le réservoir une onde d'équilibre qui se propagerait jusqu'à la vanne, où elle arriverait dans le temps  $t = 2L/C$  (Phase 4).

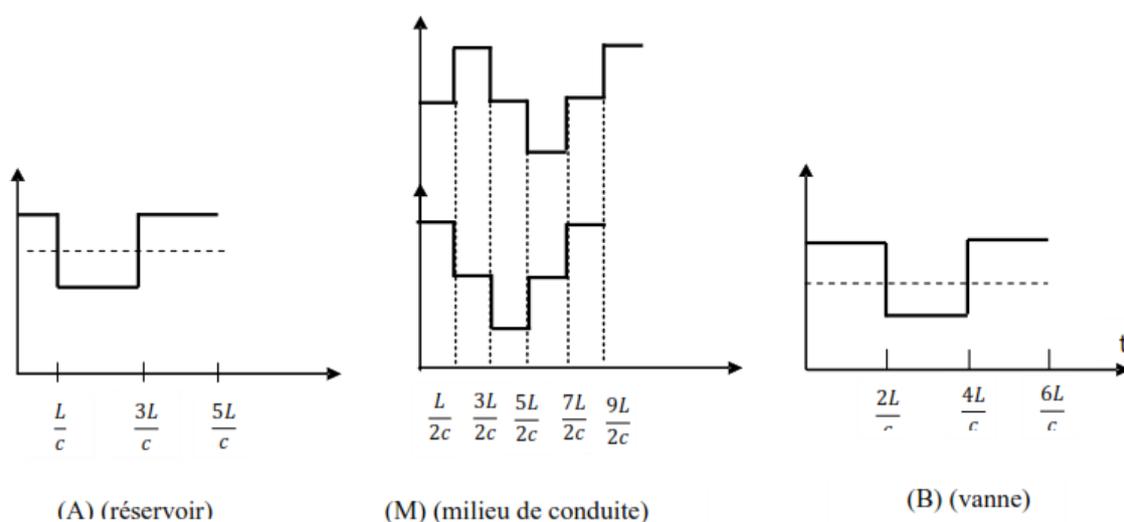
A ce moment-là prendrait naissance une onde de dépression, qui atteindrait le réservoir dans le temps  $t = 3L/C$  (phase 1), suivie d'une onde d'équilibre, qui attendrait la vanne dans le temps  $t = 4L/C$  semblable à la phase 2, et le phénomène recommencerait s'il n'y n'avait pas de frottement.

#### **En conclusion :**

Ces deux cas sont considérés dans le cas d'un arrêt ou d'une décélération, cependant, ils peuvent aussi être soumis à des départs ou accélérations plus ou moins rapides qui entraîneront des variations importantes de pression.

### **I.9 Evolution des ondes de pression et de vitesse aux points caractéristiques**

Les variations de pression et de vitesse affectant au cours du temps les points A et B ainsi que le milieu M de la conduite sont représentées respectivement sur les diagrammes de la figure I.14.



**FigI.14 :** Evolution de la pression et de la vitesse au cours du temps, aux points caractéristiques.

### ***I.10. Evolution des ondes de pression le long de la conduite***

*De la même façon, on peut également tracer le diagramme permettant de déterminer l'évolution*

*De la pression au cours du temps en chaque point de la conduite, on peut conclure que le temps pendant lequel un point quelconque de la conduite est en surpression (dépression) et d'autant plus petit qu'il se trouve plus près du réservoir.*

### ***I.11. Conclusion***

*A travers ce chapitre, nous avons vu comment évolue un régime transitoire après une manoeuvre, ainsi que la description physique du phénomène du coup de bélier, et en fin les causes qui produisent le problème.*

Chapitre II :  
**Chapitre II :**  
Amplitude du phénomène du coup de bélier  
**Amplitude du phénomène du coup de bélier**

## **II.1- Introduction :**

Les changements des conditions des écoulements permanents entraînent souvent de brusques variations de pression. Cette perturbation donne naissance à ce qu'on appelle les ondes du coup de bélier, qui sont caractérisées par une variation des pressions et des débits et peuvent causer d'énormes dommages matériels. On appelle **coups de bélier** les variations de pression provoquées par une prompt modification du régime permanent d'un liquide s'écoulant à l'intérieur d'une canalisation telles que le démarrage ou de l'arrêt d'une installation hydraulique, par exemple, une prompt fermeture de vanne ou un arrêt rapide de pompe.

## **II.2- NOTIONS GENERALES SUR LES TYPES D'ÉCOULEMENTS :**

### **II.2.1- Ecoulement permanent:**

L'écoulement du liquide est dit permanent si en tout point les paramètres hydrauliques ( $Q$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $p$ ,.....) dans une section donnée ne changent pas en fonction du temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0; \frac{\partial V}{\partial t} = 0; \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots \text{etc.}$$

### **II.2-2. Ecoulement non permanent ou transitoire:**

L'écoulement du liquide est dit non permanent ou transitoire si les grandeurs physiques ( $Q$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $p$ ,.....) dans chaque point de l'espace varient dans le temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0, \dots \dots \dots \text{etc.}$$

$$\text{Où : } V = f_1(x, y, z, t) ; p = f_2(x, y, z, t) \dots \dots \dots \text{etc.}$$

L'écoulement non permanent est dit **unidimensionnel (filaire)** si les composantes verticale et transversale de la vitesse sont négligeables par rapport à la composante longitudinale, autrement dit :  $V = f_1(x, t) ; p = f_2(x, t) \dots \dots \dots \text{etc.}$

## **II.3- CAUSES DES ÉCOULEMENTS NON PERMANENTS EN CHARGE:**

Lorsque, dans une installation hydraulique, les conditions de l'écoulement permanent sont perturbées, il en résulte une variation importante et très rapide des pressions locales due à l'inertie de la masse de liquide contenu dans le réseau.

A titre d'exemple, dans une conduite d'adduction gravitaire de nature donnée, de longueur  $L$  et de diamètre  $D$ , reliée à l'extrémité amont à un réservoir et équipée à l'extrémité aval d'une vanne; si on ferme cette vanne, une variation de la pression et de la vitesse en fonction de temps sera provoquée, c'est-à-dire qu'un régime variable se substituera au régime permanent initial. Ceci aura pour effet à l'endroit de la vanne :

- Annulation de la vitesse,

- *Augmentation de la pression,*
- *Dilatation (éventuellement allongement) de la conduite dans les limites élastiques,*
- *Compressibilité du liquide.*

*Il est de même pour une conduite de refoulement alimentant un réservoir par un groupe électropompe, si le débit ne soit plus fourni, suite à une disjonction du moteur électrique de la pompe, on constatera :*

- *La diminution de la pression du débit de la conduite de refoulement.*
- *L'eau se déprime et la conduite se contracte.*

*Dans les deux cas (conduite d'adduction gravitaire ou conduite de refoulement), les surpressions ou les dépressions peuvent atteindre des grandeurs assez considérables si la manœuvre de la vanne ou l'arrêt des pompes sont suffisamment rapides et brusques et il peut en résulter de ces chocs des accidents de rupture des conduites et des installations. Ce phénomène d'oscillations de pressions, surpressions et dépressions est appelé "coup de bélier".*

*Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire, dont les causes les plus fréquentes sont les suivantes :*

- *La mise en marche ou l'arrêt des pompes sur une conduite de refoulement,*
- *L'ouverture ou la fermeture des vannes sur une conduite d'adduction gravitaire,*
- *Le remplissage ou la vidange d'un système hydraulique,*
- *Appel ou refus de débit durant l'exploitation des réseaux d'irrigation,*
- *Une variation du niveau d'un réservoir à une extrémité du réseau, .....etc.*

## **II.4- EQUATIONS DIFFERENTIELLES REGISSANT L'ECOULEMENT NON PERMANENT EN CHARGE**

### **II.4.1- Hypothèse de base - intervention de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité des Canalisations :**

*Il est démontré expérimentalement que dans ce cas spécial, caractérisé par de rapides accroissements de pression, la compressibilité du liquide et l'élasticité des parois de la canalisation ne peuvent être négligées. Il n'est plus question d'oscillations de masse, mais d'un régime transitoire, où la pression, la vitesse et le débit varient à la fois dans le temps et en chaque point de la conduite.*

## II.4.2- Equations fondamentales de l'écoulement non permanent en charge :

Les équations différentielles définissant l'écoulement non permanent en charge ont été établies en 1901 par l'italien LORENZO ALLIEVI. Elles seront obtenues en appliquant à une tranche de la canalisation :

- Le théorème de la quantité de mouvement,
- L'équation de la continuité.

### II.4.2.1- Equation de la conservation de la quantité de mouvement :

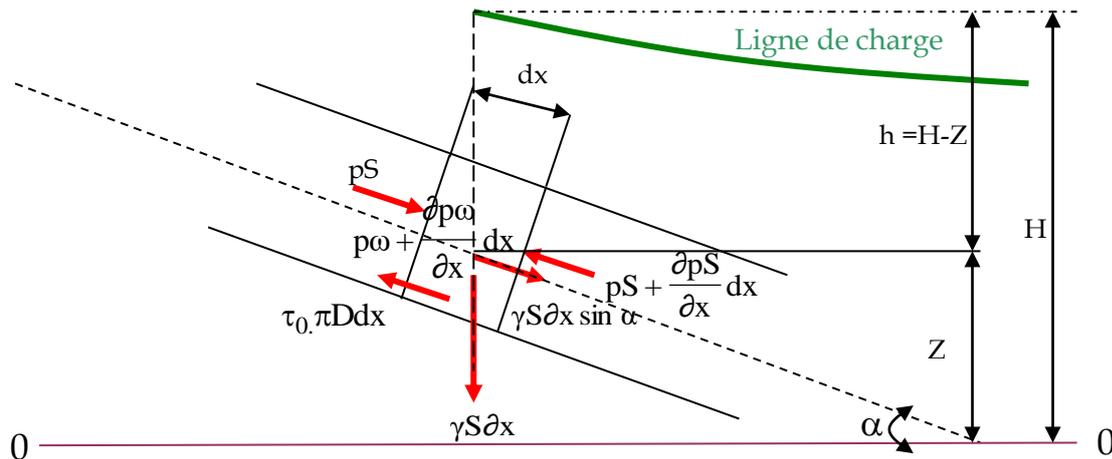


Fig II.1: Élément élémentaire d'une conduite (Equation dynamique).

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement à une tranche de la conduite comprise entre deux sections  $S$  et  $S'$  d'abscisse  $x$  et  $x + dx$  en projection sur un axe de la canalisation orientée positivement de l'amont vers l'aval [5], [19],[16]. Les projections des forces extérieures sur cet axe sont le poids, la force de pression et les forces de frottement.

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = \rho S dx \frac{dv}{dt} = \sum F_{\text{ext}} \quad (\text{VI-1})$$

$$\sum F_{\text{ext}} = pS - \left( pS + \frac{\partial p S}{\partial x} dx \right) + \rho g S dx \sin \alpha - \tau_0 \pi D dx$$

$$- p \frac{\partial S}{\partial x} dx - S \frac{\partial p}{\partial x} dx + \rho g S dx \sin \alpha - \tau_0 \pi D dx = \rho S dx \frac{dv}{dt}$$

En négligeant le terme contenant  $\frac{\partial S}{\partial x}$  et en divisant par  $\rho S dx$ , on obtient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha - \frac{\tau_0 \pi D}{\rho S} = \frac{dv}{dt}$$

On détermine d'abord le terme  $\tau_0 \pi D$ . Les pertes de charge étant représentées par  $\Delta p$  donnée par la formule suivante :  $\Delta p = \rho g \lambda \frac{L v^2}{D 2g}$

On peut écrire alors que la force de frottement  $F_r$  se calcule par l'une des deux formules suivantes :  $F_r = \tau_0 \pi D L$  ou  $F_r = \Delta p \frac{\pi D^2}{4}$

D'où l'on déduit facilement :  $\tau_0 \pi D = \rho g \frac{\lambda v^2}{D 2g} \frac{\pi D^2}{4} = \rho g j S$ ; avec  $j = \frac{\lambda v^2}{D 2g}$ , qui représente le gradient hydraulique.

Ainsi, on aura:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \alpha + g j = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(\sin \alpha - j) \quad (VI-2)$$

Comme  $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$  et  $\frac{dZ}{dx} = -\sin \alpha$ , [14], [16], [19], donc :

$$\frac{dv}{dt} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g j = 0, \text{ ou:}$$

$$\frac{dv}{dt} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V^2}{2D} = 0 \quad (VI-3)$$

#### II.4.2.2- Equation de continuité :

A travers la section 1-1, la vitesse est  $V$  et à travers la section 2-2, la vitesse est  $V + \frac{\partial V}{\partial x} dx$ . Pendant le temps  $dt$ , il entre par la face amont de la tranche considérée un volume  $S V dt$  et sort par la face aval un volume  $S \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dt$ .

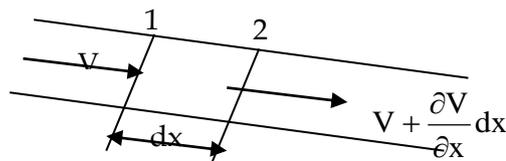


Fig II.2: Élément élémentaire d'une conduite (Equation de continuité).

La quantité d'eau emmagasinée est donc:

$$\Delta W = -S \frac{\partial v}{\partial x} dx dt \quad (II-4)$$

Cet accroissement du volume est dû à la compressibilité de l'eau et l'élasticité de la canalisation.

#### II.4.2.2.1- Compressibilité de l'eau :

Conformément à la loi de Hooke, la variation de pression  $p$  entraîne la variation du volume  $dW$  de la masse d'eau dans la conduite tel que:

$$dp = -K \frac{dW}{W}, \quad K \text{ - étant la compressibilité volumique de l'eau ; ou: } dW = -W \frac{dp}{K},$$

$$dW = -\frac{1}{K} S dx \gamma \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

Cette diminution du volume  $dW$  correspond au volume supplémentaire d'eau qui a remplacé l'espace correspondant et qui donc s'est introduit dans la tranche considérée du fait de la compressibilité du liquide. Soit  $dW_1$  ce volume supplémentaire, il est évidemment égal et opposé à  $dW$ , soit:

$$dW_1 = \frac{1}{K} S dx \gamma \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (VI-5)$$

#### II.4.2.2.2- Dilatation de la conduite :

Sous l'action de la pression  $p$ , la matière de la canalisation est soumise à une contrainte  $\sigma$ . Soit une conduite de longueur  $L$  et d'épaisseur  $e$  soumise à la pression  $p$ .

L'équilibre de la moitié de la conduite (voir fig. VI-3)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p L r \cos \alpha d\alpha - 2\sigma L e = 0$$

$$D'où: \sigma = \frac{pD}{2e}; \quad D \text{ - diamètre intérieur}$$

de la conduite,  $e$ - épaisseur de la paroi.

$$d\sigma = \frac{D}{2e} dp$$

L'augmentation de la contrainte entraîne un accroissement du diamètre  $dD$  donné par la formule de Hooke:  $d\sigma = E \frac{dD}{D}$ , OÙ:  $E$  - module d'Young.

Des relations précédentes, on déduit:  $\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{Ddp}{2Ee}$ .

L'accroissement du diamètre  $dD$  entraîne un accroissement de la section  $dS$  tel que:

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dD}{D}, \quad \text{donc: } dS = 2S \frac{dD}{D} = \frac{SDdp}{Ee}.$$

La tranche considérée emmagasine de ce fait un volume supplémentaire:

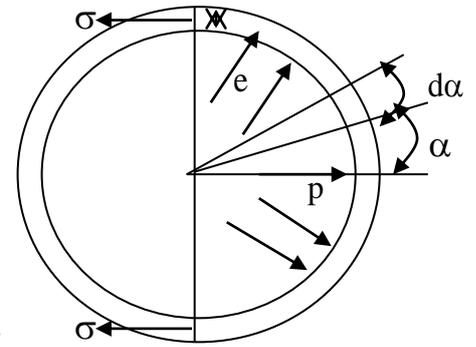
$$dW_2 = dSdx = \frac{SDdp}{Ee} dx = \frac{SD}{Ee} dx \gamma \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (II-6)$$

L'équation de continuité s'obtiendra en écrivant que:  $\Delta W = dW_1 + dW_2$

$$-S \frac{\partial V}{\partial x} dxdt = \frac{1}{K} S dx \gamma \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{SD}{Ee} dx \gamma \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

Ou:  $\frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} \right) \frac{\partial h}{\partial t}$ ;      Posons:  $\frac{1}{a^2} = \frac{\gamma}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} \right) = \rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} \right)$ ;

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} \right)}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho}}}{\sqrt{\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee}}}$$



La constante "a" a les dimensions d'une vitesse et représente la vitesse de propagation de l'onde de pression dans le liquide.

L'équation de continuité s'écrit donc :

Fig II.3: Dilatation de la conduite.

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad \text{sachant que: } \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dt}, \quad \text{donc:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} = 0; \quad \text{ou: } \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Etant donné que la variation de  $p$  en fonction de  $x$  est négligeable par rapport aux variations avec  $t$ .

En exprimant  $\frac{dp}{dt}$  en fonction de ses dérivées partielles, on obtient:

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right] + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (II-7)$$

Les relations (II-2) et (II-7) sont les équations de l'écoulement transitoire monophasique sous pression, elles ont été établies par Saint Venant et pour cette cause qu'elles portent son nom.

Donc le système de Saint Venant régissant les écoulements transitoires en charge est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(\sin \alpha - j) \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right] + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (II-8)$$

Allievi a trouvé la formule suivante :  $a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + k \frac{D}{e}}}$

$k$  : Coefficient dépendant du matériau de la canalisation.  $k = \frac{1}{E} 10^{10}$ , si les unités de mesures sont Kgf, m et s.

$D$  : Diamètre intérieur de la conduite ;

$E$  : épaisseur de la paroi de la conduite

A titre indicatif, on indique ci après quelques valeurs du coefficient "k" et de la célérité "a" pour certains matériaux:

Matériaux	Coefficient $k$	Célérité $a$ (m/s)
Acier	0.5	1000-1250
Fonte grise	1	900-1300
Font ductile	0.59	1000-1350
PVC	33	300-500
PEHD	83	250-400
Amiante ciment	5	900-1200
Béton	5	1100-1300

## II.5- ANALYSE PHYSIQUE DU PHENOMENE DU COUP DE BELIER

### II.5.1- Cas d'une conduite d'adduction gravitaire:

Considérons une conduite en charge AB de longueur L, alimentée en A par un réservoir R et munie à son extrémité aval d'une vanne. Pour simplifier l'analyse, on suppose que la conduite est horizontale et que les pertes de charges sont négligeables et que l'écoulement initial est permanent avec une vitesse moyenne de  $V_0$  et une pression de  $p_0$ .

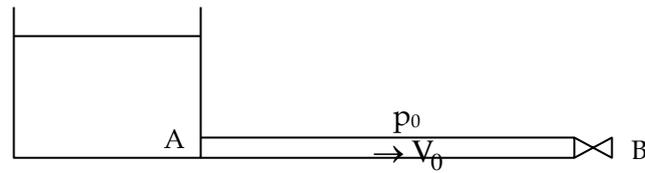
**Etat initial :** l'écoulement initial est caractérisé par  $V_0$  et  $p_0$  (Fig.II-4-a)

**Phase 1 :** La fermeture complète de la vanne, entraîne l'annulation de la vitesse et provoque une onde de surpression à l'endroit de la vanne, alors que la vitesse et la pression dans le reste de la conduite restent  $V_0$  et  $p_0$ . L'onde de surpression se propage vers l'amont avec la célérité " $a$ ". Après un temps  $t = \frac{L}{a}$ , toute la conduite sera soumise à une surpression  $\Delta p$  et sera dilatée et le liquide sera comprimé. Dans la conduite, on aura :  $V=0$  et  $p = p_0 + \Delta p$  (Fig. II-4-b).

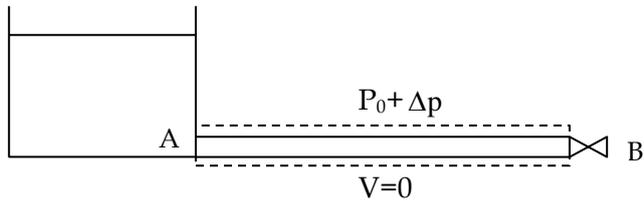
**Phase 2 :** Sous l'effet de la surpression dans la conduite, alors que la pression dans le réservoir est constante, l'eau commence à s'écouler de la conduite vers le réservoir avec une vitesse " $-V_0$ "; la conduite, par suite de son élasticité, va reprendre son état initial et une onde de dépression va naître au niveau du réservoir et se propagera vers la vanne avec une célérité " $a$ ". Après un temps  $t = \frac{2L}{a}$ , la conduite va reprendre son état initial avec les caractéristique  $V = -V_0$  et  $p = p_0$ . (Fig. II-4-c).

**Phase 3 :** Le liquide continue à s'écouler vers le réservoir. Au niveau de la vanne, le liquide tend à se détacher d'elle et l'onde de dépression se réfléchit sans changement de signe et le liquide sera déprimé et la conduite contractée. Après un temps  $t = \frac{3L}{a}$ , toute la conduite sera soumise en dépression avec :  $V = 0$  et  $p = p_0 - \Delta p$  (Fig.II-4-d).

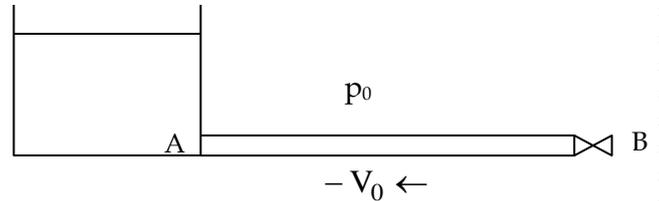
**Phase 4 :** Comme la pression dans la conduite est inférieure à celle du réservoir qui est maintenue constante et égale à  $p_0$ , le liquide s'écoulera alors du réservoir vers la vanne avec  $V_0$ , ce qui donne la réflexion de l'onde de dépression sur la surface libre du réservoir en une onde de surpression qui se dirigera vers la vanne. La conduite va reprendre son état initial. Au temps  $t = \frac{4L}{a}$ , la dépression est complètement supprimée et la conduite se trouvera donc dans les mêmes conditions que celles existaient juste à la fermeture de la vanne et le phénomène va se répéter (Fig.II-4-e).



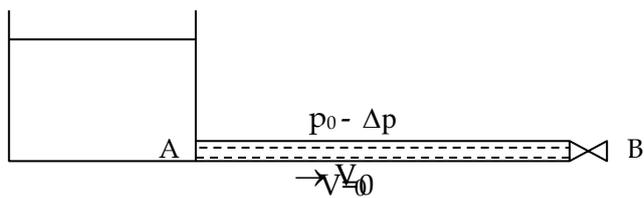
**Fig II.4-a:** Etat initial.



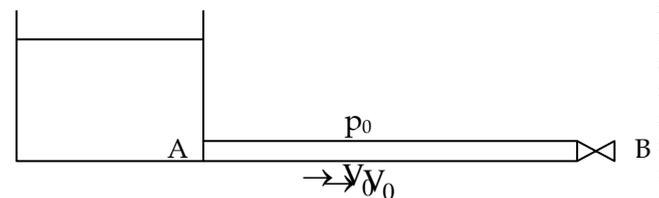
**Fig II.4-b:** Phase 1 :  $t = \frac{L}{a}$



**Fig II.4-c:** Phase 2 :  $t = \frac{2L}{a}$



**Fig II.4-d:** Phase 3 :  $t = \frac{3L}{a}$



**Fig II.4-e:** Phase 4 :  $t = \frac{4L}{a}$

**Fig II.4 :** Evolution de l'écoulement en fonction du temps dans une conduite d'adduction gravitaire.

### II.5.2- Cas d'une conduite de refoulement:

Après l'arrêt brusque ou instantané des groupes électropompes, quatre phases peuvent être envisagées :

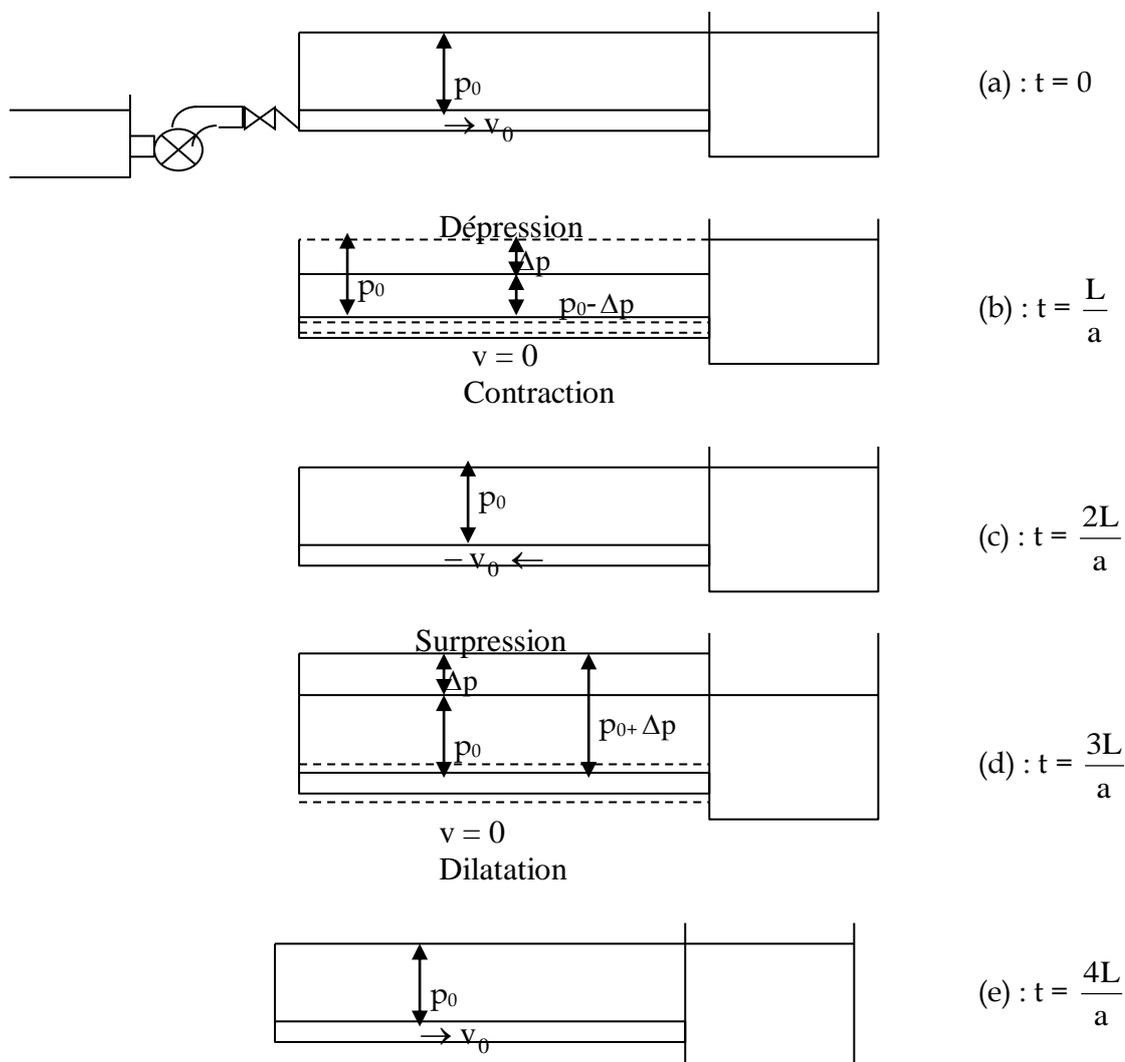
**Phase 01 :** Une onde de dépression prend naissance au départ de la pompe et se propage jusqu'au réservoir à une vitesse ou célérité désignée par  $a$ . Si la distance entre la pompe et le réservoir est  $L$ , le temps mis par cette onde pour atteindre le réservoir est  $\frac{L}{a}$ . Au bout de ce temps, la conduite est en dépression sur toute la longueur.

**Phase 02 :** Par suite de son élasticité, la conduite reprend son diamètre primitif et cela de proche en proche, l'eau revient alors dans la conduite et au bout d'un nouveau temps  $\frac{L}{a}$  c'est-à-dire à  $\frac{2L}{a}$  depuis l'origine du phénomène, toute l'eau est redescendue, mais va se trouver arrêtée par le clapet de la pompe qui entre temps s'est fermé.

**Phase 03 :** La première tranche en contact avec le clapet va se trouver comprimée, entraînant une dilatation de la conduite. Au bout d'un nouveau temps  $\frac{L}{a}$  c'est-à-dire à  $\frac{3L}{a}$  depuis l'origine, toute la conduite sera dilatée avec une eau sur pressée immobile.

**Phase 04 :** Grâce à l'élasticité de la conduite, celle-ci agissant à la manière d'un ressort, reprend de proche en proche à partir du réservoir et en allant vers la pompe, son diamètre primitif. Les tranches d'eau successives reprenant leurs dimensions premières, au bout d'un nouveau temps  $\frac{L}{a}$  c'est-à-dire à  $\frac{4L}{a}$  depuis l'origine, nous nous retrouvons dans la même situation qu'au moment de l'arrêt brusque de la pompe.

Dans les deux cas, le phénomène se reproduira théoriquement à l'infini. Mais en réalité, l'amortissement du phénomène est dû aux pertes de charge par frottement et à la dissipation d'une partie de l'énergie du liquide dans le réservoir. On peut donc conclure que le phénomène du coup de bélier est périodique de période  $T = \frac{4L}{a}$ .



**Fig II.5 :** Evolution de l'écoulement en fonction du temps dans une conduite de refoulement.

## II.6- METHODES DE SOLUTIONS DES EQUATIONS REGISSANT

### Ecoulement non permanent en charge

De nombreux problèmes en physique et en hydraulique se réduisent à des problèmes aux limites qui peuvent être résolus avec des résultats satisfaisant en faisant recours à l'une des méthodes suivantes :

- Méthode analytique,
- Méthode graphique,
- Une des méthodes numériques, nécessitant l'utilisation de l'ordinateur.

#### II.6.1- Méthode analytique d'ALLIEVI :

##### II.6.1.1- Solution générale :

La vitesse  $V$  et la pression  $H$  vérifient donc le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre suivant :

- Equation dynamique (Equation de quantité de mouvement) :

$$\frac{dV}{dt} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V^2}{2D} = 0, \quad \text{ou :} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V^2}{2D} = 0 \quad (II-9)$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \text{ou :} \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (II-10)$$

Si en néglige le terme du second ordre  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  et les pertes de charge ( $j = 0$ ), le problème devient à résoudre le système suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \quad (II-11)$$

Dérivons la première équation par rapport à  $x$  et la deuxième par rapport à  $t$  :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + g \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (II-12)$$

Dérivons maintenant la première équation par rapport à  $t$  et la deuxième par rapport à  $x$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} &= 0 \\ a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (II-13)$$

Les inconnues  $V$  et  $H$  sont liées aux variables  $x$  et  $t$  par une même équation différentielle qui est l'équation classique des cordes vibrantes ou équation d'Alembert.

La méthode d'intégration consiste à procéder au changement de variables :

$$\left. \begin{aligned} \eta &= t - \frac{x}{a} \\ \xi &= t + \frac{x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (II-14)$$

$\eta$  et  $\xi$  sont dites variables de Riemann.

Considérons d'abord l'équation (VI-12) et calculons les différentes dérivées de  $H$  en fonction de nouvelles variables  $\eta$  et  $\zeta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (II-15)$$

De même pour :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} \right) \quad (II-16)$$

Reportons (VI-15) et (VI-16) dans (VI-12) nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \zeta} = 0, \text{ ou : } \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (II-17)$$

C'est-à-dire que  $\frac{\partial H}{\partial \eta}$  ne dépend pas de  $\zeta$  et qu'elle n'est fonction que de  $\eta$ .

En supposant que :  $\frac{\partial H}{\partial \eta} = G(\eta)$ , on obtient en intégrant :

$\int \partial H = \int G(\eta) + \text{Cte}$ , où : la constante est dans le cas général une fonction uniquement de  $\zeta$  ; donc, on peut écrire :  $H = F(\eta) + f(\zeta) + \text{Cte}$ .

En revenant aux variables  $x$  et  $t$ , on obtient :  $H = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) + Cte$

La constante s'obtient en considérant la pression  $H_0$  au point quelconque avant la manœuvre de la vanne, c'est-à-dire à l'instant  $t = 0$ , par conséquent :

$$H = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (II-18)$$

De manière analogue, on obtient :

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (II-19)$$

$V_0$  représente la vitesse dans la canalisation avant le début du coup de bélier.

Remarquons que la surpression ou la dépression correspondant à la valeur du coup de bélier en un point  $M$  sera  $H - H_0$ , soit :  $b = H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ .

En définitive, les solutions du système des deux équations différentielles s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} b &= F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ V - V_0 &= -\frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (II-20)$$

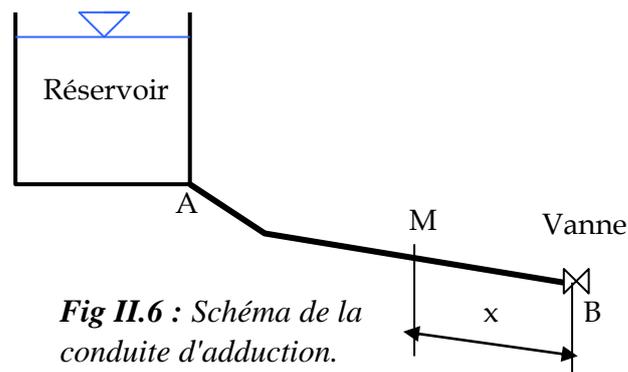
Ce sont les équations D'ALLIEVI.

### II.6.1.2- Interprétation des équations d'Alliévi :

Supposons un observateur (qu'on appelle parfois le bonhomme de Bergeron) se déplaçant le long de la conduite à la vitesse "a" selon la loi :  $t - \frac{x}{a} = Cte$

C'est-à-dire :  $x = at + Cte$

Autrement dit l'observateur se déplace avec un mouvement uniforme de vitesse "a" en sens inverse de la vitesse d'écoulement  $V$ .



**Fig II.6 :** Schéma de la conduite d'adduction.

Au temps  $t_1$ , cet observateur sera en un point d'abscisse :  $x_1 = at_1 + Cte$ .

Au temps  $t = t_1 + \Delta t$ , il se trouve en un point d'abscisse :

$$x = a(t_1 + \Delta t) + Cte = at_1 + a\Delta t + Cte = x_1 + a\Delta t$$

$$F\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = F\left(t - \Delta t - \frac{x}{a} + \Delta t\right) = F\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Remarquons que pour cet observateur  $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$  est une constante en chaque point.

En conséquence, pour lui,  $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$  présente toujours la même valeur où il se trouve. La fonction  $F$  caractérise donc une onde qui se propagerait dans la conduite avec la vitesse "a" en sens inverse de  $V$ .

De manière analogue, un second observateur se déplaçant le long de la conduite dans le sens du courant avec la vitesse "a" dans le même sens que  $V$  observerait que la fonction  $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$  reste constante en chaque point. Cette fonction représente donc une onde se propageant dans le même sens du courant. Donc, la surpression ou la dépression  $b$  en chaque point de la conduite résulte de la superposition en ce point des deux ondes  $F$  et  $f$  se propagent dans la conduite en sens inverse avec la même vitesse  $a$ .

### II.6.1.3- Simplification des équations d'Allievi :

Les dimensions du réservoir sont suffisamment grands par rapport à celle de la conduite, c'est pourquoi, le coup de bélier ne modifie pas la cote du plan d'eau dans le réservoir, par conséquent, la pression au départ du réservoir, c'est-à-dire au point A d'abscisse  $L$ , reste constamment égale à la pression statique et  $b = 0$ .

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(t + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right)$$

Au point A, l'onde de retour  $f$  est donc constamment égale et opposée à l'onde  $F$ , autrement dit, les ondes se réfléchissent au niveau de la surface libre à pression constante avec changement de signe.

$$\text{A l'instant } t - \frac{L}{a}, \text{ on aura : } f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$$

A l'instant  $t + \frac{x}{a}$ , on aura :  $f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right)$  et les équations d'Allievi deviennent :

$$\begin{aligned} b &= H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right) \\ V &= V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (II-21)$$

#### II.6.1.4- Valeurs numériques du coup de bélier :

##### II.6.1.4.1- Cas général :

La solution générale des équations d'Allievi donne les résultats suivants :

$$H_{i-1} + H_i - 2H_0 = \frac{a}{g}(V_{i-1} - V_i) \quad (II-22)$$

Donc, en tenant compte des conditions aux limites, le problème est ramené à résoudre une série d'équations qui ne contiennent que les pressions  $H_i$  et les vitesses correspondantes  $V_i$  à l'organe de fermeture. Ces expressions simplifiées de la solution générale sont appelées "les équations enchaînées d'Allievi".

##### II.6.1.4.2- Cas de la fermeture brusque ( $T < \frac{2L}{a}$ ) [05] :

###### II.6.1.4.2.1- Fermeture instantanée ( $T=0$ ) :

Examinons comment va varier la pression à l'amont de la vanne B, c'est-à-dire au point d'abscisse  $x=0$ , on trouve:  $b_1 = \frac{aV_0}{g}$  (II-23)

On peut démontrer que :

$$\text{A l'instant } t_2 = \frac{2L}{a}, \text{ on obtient : } b_2 = -\frac{aV_0}{g} \quad (II-24)$$

A l'instant  $t_3 = \frac{4L}{a}$ , on obtient :  $b_3 = \frac{aV_0}{g}$  et ainsi de suite.

On constate donc que les résultats se déduisent les uns des autres à partir de la surpression  $b_1$  à l'instant  $t_1 = 0$ . Pour cette raison, les équations (VI-21) sont parfois appelées "équations enchaînées d'Allievi". Le diagramme de la pression enregistrée prend l'allure présentée par la figure II-7

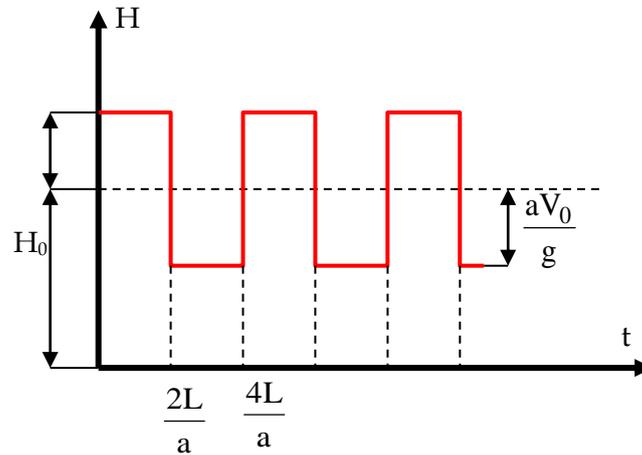


Fig II.7: Diagramme de la pression pour  $T = 0$ .

Le phénomène de pression qui accompagne une fermeture brusque d'une vanne est donc un phénomène périodique

II.6.1.4.2.2-0 < T <  $\frac{2L}{a}$  :

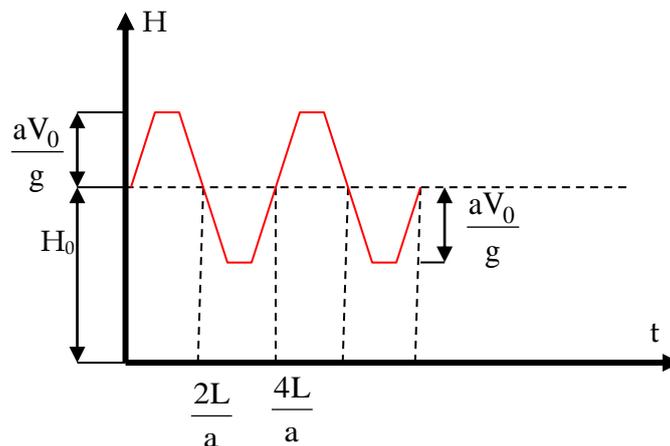
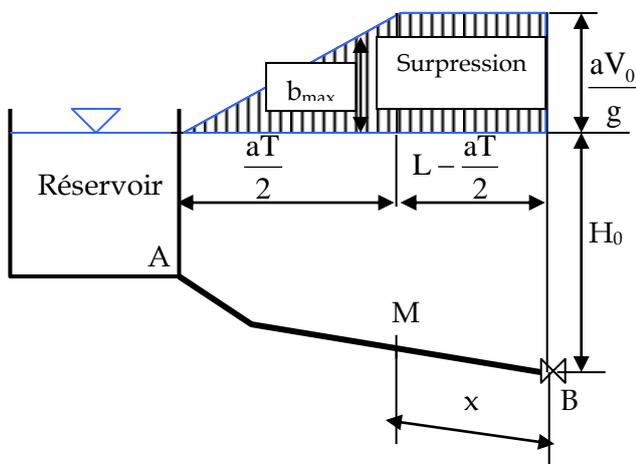


Fig II-7': Diagramme de la pression pour  $0 < T < \frac{2L}{a}$

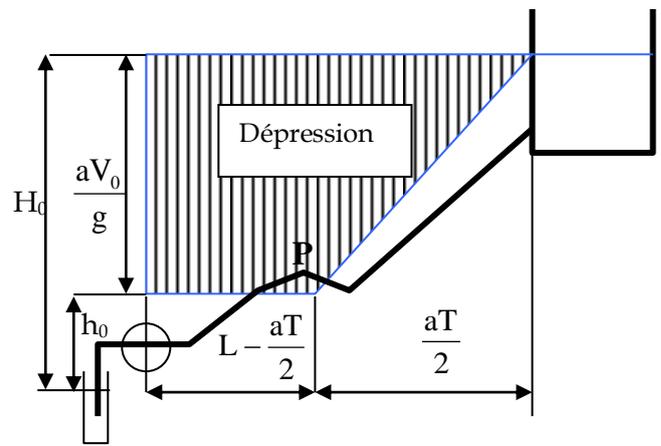
### II.6-1-4-2-3. Propagation de la surpression le long de la conduite:

Au point  $M$  d'abscisse  $x$  mesuré à partir de la vanne  $B$  (Fig.II-1), la valeur maximale du coup de bélier sera de  $\frac{aV_0}{g}$  si  $x < L - \frac{aT}{2}$ . Les points d'abscisses  $L > x > L - \frac{aT}{2}$ , M. De Sparre [CARLIER 80], [DUPONT 74] a montré que la répartition du coup de bélier est linéaire.

$$\text{Pour tous les points pour lesquels } L > x > L - \frac{aT}{2}, b_{\max} = \frac{2V_0}{gT}(L - x) \quad (\text{II-24})$$



**Fig II.8:** Diagramme de la surpression pour la conduite d'adduction en cas de fermeture brusque.



**Fig II.9:** Diagramme de la dépression pour la conduite de refoulement en cas de fermeture brusque.

### II-1-4-3. Fermeture lente: $T > \frac{2L}{a}$ :

Supposons pour simplifier que la fermeture de la vanne est linéaire de la forme:

$Q = Q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ ; dans ce cas, la valeur maximale du coup de bélier sera de:

$$b_{\max} = \frac{2V_0L}{gT} \quad (\text{Formule de Michaud}) \quad (\text{II-25})$$

M.De Sparre a montré que dans le cas d'une fermeture lente correspondant à une loi linéaire, le coup de bélier décroît linéairement depuis la valeur maximale  $\frac{2V_0L}{gT}$  jusqu'à zéro à l'autre extrémité (Figures II-11 et II-12)

### II.6.2- Méthode graphique:

La méthode graphique permet d'aboutir d'une manière élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes qui, à une première vue, paraissent les plus compliqués. Cette méthode a été mise au point à peu près simultanément par Schnyder (1929) et par Bergeron (1931).

Dans les équations d'Allievi:

$$b = H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$$-\frac{a}{g}(V - V_0) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$F$  et  $f$  sont des ondes de vitesse absolue " $a$ " et se dirigeant respectivement en sens inverse de la vitesse d'écoulement pour  $F$  et dans le même sens que la vitesse d'écoulement pour  $f$ . En introduisant le débit  $Q = SV$  et en additionnant et en retranchant membre à membre les équations, on obtient:

$$H - H_0 - \frac{a}{g\omega}(Q - Q_0) = 2F \quad (II-26)$$

$$H - H_0 + \frac{a}{g\omega}(Q - Q_0) = 2f \quad (VI-27)$$

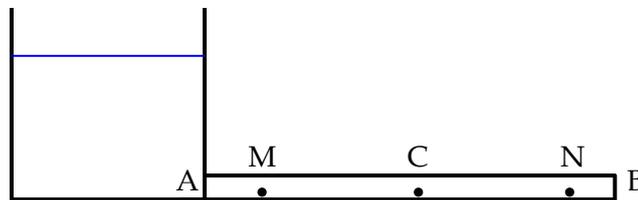


Fig II.10 : Adduction gravitaire.

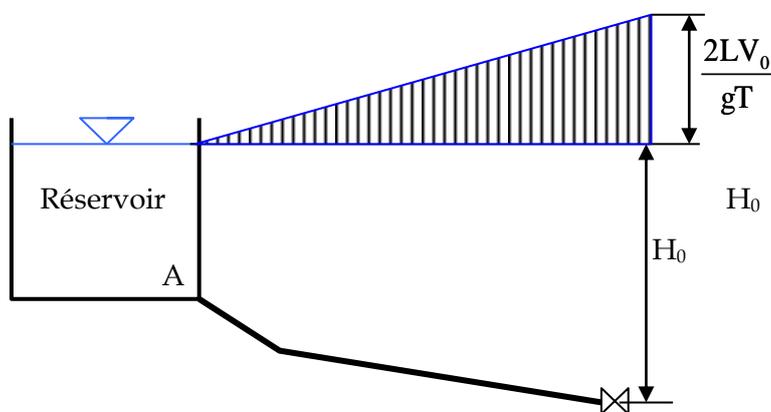


Fig II-11: Diagramme de la pression pour la conduite d'adduction en cas de fermeture lente.

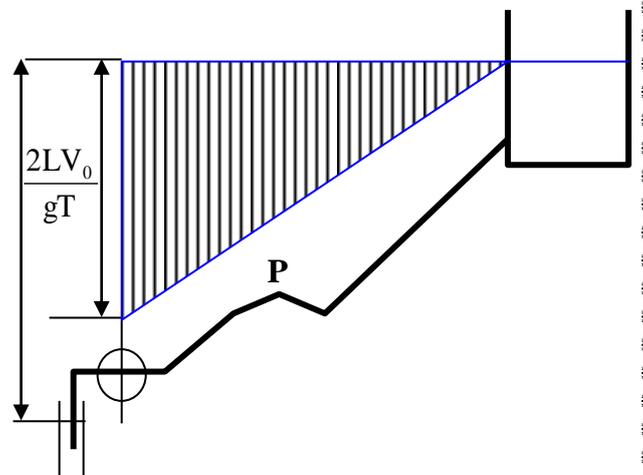


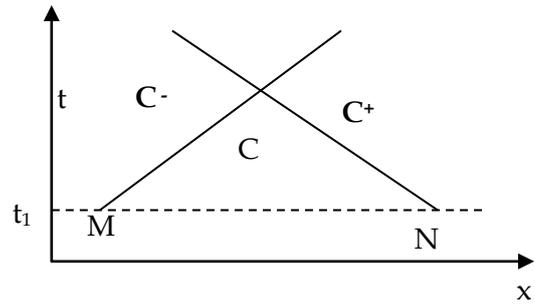
Fig II-12: Diagramme de la pression pour la conduite de refoulement en cas de fermeture lente.

Imaginons un observateur (bonhomme de Bergeron) se déplaçant à vitesse "a" dans le sens inverse d'écoulement (caractéristique C<sup>-</sup>).

Supposons qu'à l'instant t<sub>1</sub>, cet observateur se trouve au point N de la conduite et à l'instant t = t<sub>1</sub> + Δt, cet observateur se trouve en un point C (Fig. II-13 et II-14). Si on applique à l'expression (VI-26) pour les deux instants t et t<sub>1</sub>, on obtient:

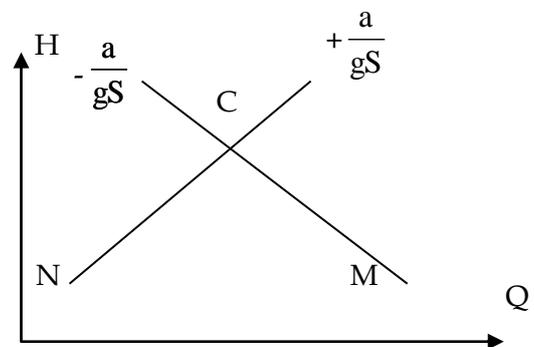
$$H - H_0 - \frac{a}{g\omega}(Q - Q_0) = 2F$$

$$H_1 - H_0 - \frac{a}{g\omega}(Q_1 - Q_0) = 2F$$



**Fig II.13 :** Caractéristiques de la conduite dans le plan Oxt.

D'où:  $H - H_1 = \frac{a}{g\omega}(Q - Q_1)$  (II-28)



**Fig II.14 :** Caractéristiques de la conduite dans le plan OQH.

L'équation (II-28) est une droite de pente  $\frac{a}{g\omega}$  dans le plan OQH (Fig. II-14)

Cette droite passe par un point de coordonnées (Q<sub>1</sub>, H<sub>1</sub>) qui n'est autre que le point représentatif de N dans le plan OQH.(Fig. II-14).

Dans le plan Oxt, l'observateur même se déplaçant à la même vitesse "a" dans le sens contraire d'écoulement parcourra une droite dite caractéristique moins C<sup>-</sup> de pente "-a".

Si l'on imagine un autre observateur qui descend dans le sens du courant suivant une droite dite caractéristique plus C<sup>+</sup> de pente "a", pour cet observateur partant du point M au temps t<sub>1</sub>, la fonction f reste constante.

En conséquence, si l'on applique à l'expression (II-27) pour les deux instants t et t<sub>1</sub>, on obtient

$$H - H_0 + \frac{a}{g\omega}(Q - Q_0) = 2f$$

$$D'où: H - H_2 = -\frac{a}{g\omega}(Q - Q_2) \quad (II-29)$$

$$H_2 - H_0 + \frac{a}{g\omega}(Q_2 - Q_0) = 2f$$

L'équation (II-29) a pour représentation dans le plan OQH une droite de pente  $\frac{a}{gS}$ .

Cette droite passe le point de coordonnées  $(Q_2, H_2)$ , qui n'est autre que le point M.

Ainsi, on a obtenu deux équations (II-28) et (II-29) avec deux inconnues  $Q$  et  $H$ . Pour résoudre ce système, il suffit de tracer les deux droites représentatives et aux points d'intersection de ces deux droites seront définies les inconnues  $Q$  et  $H$  - coordonnées du point C dans le plan OQH. Ce point d'intersection traduit en réalité le fait que les deux bonhommes de Bergeron constateront exactement les mêmes paramètres  $Q$  et  $H$  à leur point d'intersection. C'est le principe fondamental de la construction graphique de Bergeron.

### II.6.3- Méthodes numériques:

Parmi un grand nombre de méthodes numériques utilisées, on examinera succinctement la méthode des caractéristiques, du fait qu'elle convienne mieux au traitement des équations hyperboliques et interprète parfaitement leur sens physique.

#### II.6.3.1- Equations aux caractéristiques:

Reprenons le système (II-8)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(\sin \alpha - j) \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right] + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations suivantes :

- Multiplions la deuxième équation du système par  $\frac{1}{a}$  ;
- Ajoutons et puis retranchons après cela membres à membres les deux équations ;  
Le système à résoudre prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v+a) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{v+a}{\rho a} \right) \frac{\partial p}{\partial x} &= g(\sin \alpha - j) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v-a) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} - \left( \frac{v-a}{\rho a} \right) \frac{\partial p}{\partial x} &= g(\sin \alpha - j) \end{aligned} \quad (II-30)$$

On pose  $\frac{dx}{dt} = v + a$ , alors la première équation du système peut s'écrire sous la forme :  $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = g(\sin \alpha - j)$ ; Car dans ce cas :  $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt}$

Si  $\frac{dx}{dt} = v - a$ , alors la seconde équation du même système d'équations s'écrit sous la forme :  $\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = g(\sin \alpha - j)$ . Comme  $p = \rho g(H - Z)$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial x} = -\sin \alpha$  et  $\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dt} \sin \alpha, \text{ il vient :}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\rho g(H - Z))}{dt} = \rho g \left[ \frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right] = \rho g \left[ \frac{dH}{dt} + \frac{dx}{dt} \sin \alpha \right]$$

D'où le système (II-30) donne les deux systèmes d'équations suivants:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v + a \\ \frac{dv}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= -\frac{g}{a}(v + a)\sin \alpha + g(\sin \alpha - j) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-31)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v + a \\ \frac{dv}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= -\frac{g}{a}(v + a)\sin \alpha + g(\sin \alpha - j) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-32)}$$

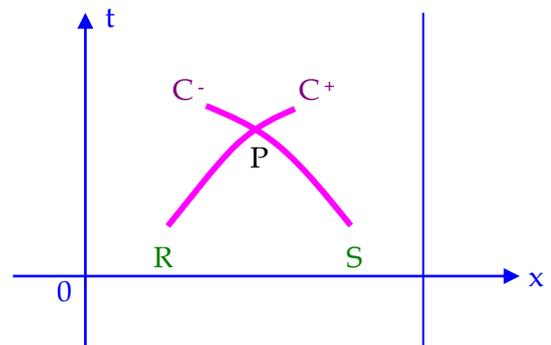
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v - a \\ \frac{dv}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= \frac{g}{a}(v - a)\sin \alpha + g(\sin \alpha - j) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-33)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v - a \\ \frac{dv}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= \frac{g}{a}(v - a)\sin \alpha + g(\sin \alpha - j) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-34)}$$

Pour comprendre la signification de ces quatre équations, il est plus commode de les présenter sur la figure ci-dessous (Fig.II-15)

Considérons que  $V$  et  $H$  sont connus en deux Points  $R$  et  $S$ .

La courbe  $C^+$  représentant l'équation (II-31) est appelée courbe caractéristique plus, elle définit la propagation d'onde dans le sens d'écoulement. L'équation (VI-32) n'est valable que pour  $C^+$ .



FigII.15: Schéma des caractéristiques.

La courbe  $C^-$  représentant l'équation (II-33) est appelée courbe caractéristique moins, elle définit la propagation d'onde dans le sens contraire d'écoulement. L'équation (II-34) est valable seulement pour la caractéristique  $C^-$ . Les équations (II-32) et (II-34) sont appelées équations de compatibilité.

Dans le cas du coup de bélier, la vitesse d'écoulement  $V$  est très petite par rapport à la célérité « $a$ » ;  $V \ll a$  ; donc  $V$  peut être négligée et les courbes caractéristiques deviennent des droites  $\frac{dx}{dt} = \pm a$ .

### II.6.3.2- Intégration du système différentielle:

Pour intégrer les deux équations de compatibilité (II-32) et (II-34) successivement le long des caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$ , on procède à la discrétisation la conduite en un certain nombre de points. La canalisation est considérée comme constituée de  $N$  intervalles égaux (Fig. II-16) et  $H$  et  $V$  sont initialement connus à chaque intervalle.

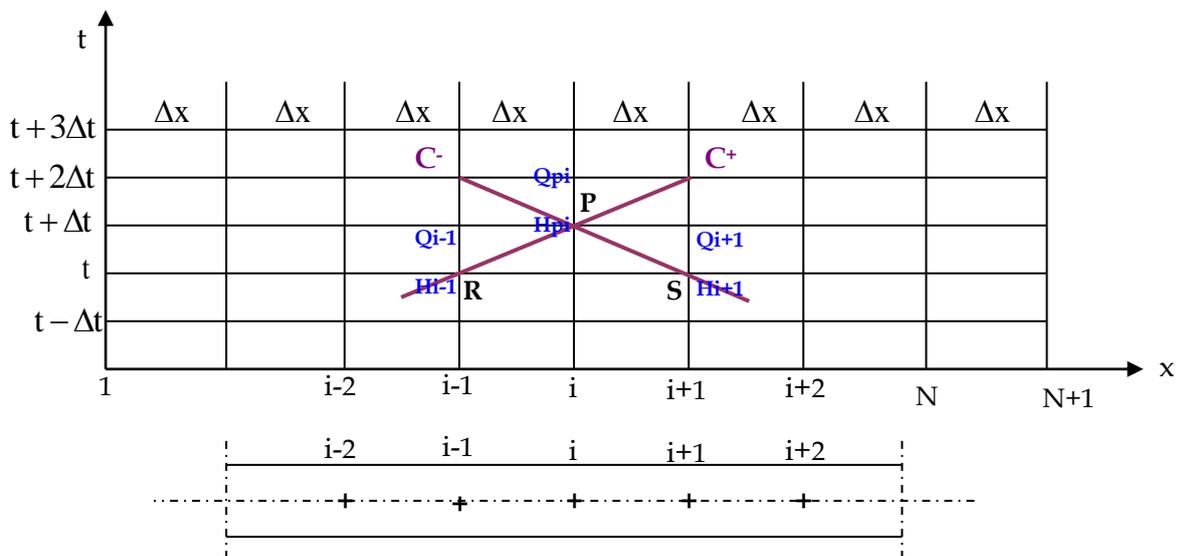


Fig II.16: Discrétisation de la conduite [19],[16].

De la figure, on voit que le pas de temps  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a} = \tau$ . La condition de stabilité du réseau choisi est dite condition de Courant- Freidrich-Levy est la suivante :  $Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq 1$

On procède à l'intégration des équations de compatibilité (II-32) et (II-34) en écrivant les équations aux caractéristiques comme suit:

- le long de la caractéristique  $C^+$  :

$$d\left[H + \frac{a}{gS} Q\right] + j dx = 0 \quad (II-35)$$

Ici, on a considéré la conduite horizontale.

- Le long de la caractéristique  $C^-$  :

$$d\left[H - \frac{a}{gS} Q\right] - j dx = 0 \quad (II-36)$$

Soit connues l'ensemble des grandeurs  $H$  et  $Q$  le long de la conduite au temps  $t$  et on intègre l'équation (II-35) le long de la caractéristique  $C^+$ , passant par le point  $R$  de coordonnées  $(i-1)$  et  $t$ , entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  (donc on passe du point  $(i-1)$  au temps  $t$  ; au point  $(i)$  au temps  $t + \Delta t$ ) :

$$\int dH + \frac{a}{gS} \int dQ + \int j dx = 0 \quad (II-37)$$

En pratique, on admet couramment que les pertes de charge dues au frottement visqueux peuvent être calculées à l'aide d'équations développées pour les écoulements en régime permanent

$$\text{Soit : } j = \frac{\lambda}{2gDS^2} Q|Q| = BQ|Q| ; \text{ où : } B = \frac{\lambda}{2gDS^2} ; \text{ en posant } R = \frac{a}{gS}, \text{ la relation}$$

$$(II-37) \text{ s'écrit alors : } \int dH + R \int dQ + B \int Q|Q| dx = 0 \quad (II-38)$$

En intégrant (II-38) par rapport à  $H$  et  $Q$ , on aura :

$$H_{Pi} - H_{i-1} + R(Q_{Pi} - Q_{i-1}) + B \int Q|Q| dx = 0 \quad (II-39)$$

Comme on ne dispose pas de la fonction  $Q(x)$ , la dernière intégrale sera calculée par voie explicite ou en d'autres termes on supposera que le débit  $Q$  est constant entre  $t$  et  $t + \Delta t$  et il est égale à  $Q(i-1)$ . Ce qui donne :

$$[H_{Pi} - H_{i-1}] + R[Q_{Pi} - Q_{i-1}] + T Q_{i-1} |Q_{i-1}| = 0 \quad (II-40)$$

$$\text{Avec } T = B(x_i - x_{i-1}) = B \Delta x$$

En regroupant les termes correspondants au point  $P(i)$ , d'une part et ceux correspondants au point  $R(i-1)$  d'autre part, on aura :

$$H_{Pi} + RQ_{pi} = H_{i-1} + Q_{i-1} [R - T |Q_{i-1}|] \quad (II-41)$$

$$\text{Ou : } H_{P_i} + RQ_{P_i} = CP \quad (\text{II-42})$$

Avec bien sur :

$$H_{i-1} + Q_{i-1} [R - T | Q_{i-1} ] = CP \quad (\text{II-42})'$$

On procèdera de la même manière pour intégrer l'équation (VI-36), on trouve le long de la caractéristique moins  $C^-$  :

$$H_{P_i} - R[Q_{P_i}] = CM \quad (\text{II-43})$$

$$\text{Avec : } CM = H_{i+1} - Q_{i+1} [R - T | Q_{i+1} ] \quad (\text{II-43})'$$

Pour déterminer les deux inconnues  $H_{P_i}$  et  $Q_{P_i}$ , il suffit de résoudre les deux équations (II-42) et (II-43) ; ainsi :

$$H_{P_i} = \frac{CP + CM}{2} \quad (\text{II-44})$$

$$Q_{P_i} = \frac{CP - H_{P_i}}{R} \quad (\text{II-45})$$

$$\text{Ou : } Q_{P_i} = \frac{H_{P_i} - CM}{R} \quad (\text{II-46})$$

Les intégrations faites ont pour base les conditions suivantes :

- L'intégration a été effectuée pour une conduite à caractéristique unique.
- Le point  $i$  est encadré de part et d'autre par les points  $i-1$  et  $i+1$ .
- Dans le cas où le point  $i$  est situé à la limite de la conduite, ( $x = 0$  ou  $x = L$ ), on ne dispose alors que d'une seule équation (le long  $C^-$  ou le long  $C^+$ ) et la détermination des inconnues  $Q_{P_i}$  et  $H_{P_i}$  se fait en faisant recours à une équation spéciale adaptée à la condition limite considérée.

Ainsi, si on divise la canalisation en  $N$  tronçons, on aura  $N+1$  sections (Fig. II-16), les inconnues  $H_{P_i}$  et  $Q_{P_i}$  sont déterminées à chaque nœud des points intérieurs de 2 à  $N$  en utilisant l'équation (II-44) et l'une des équations (II-45) ou (II-46). Les inconnues des deux extrémités de la canalisation sont déterminées en utilisant l'équation appropriée parmi les équations (II-41) pour l'extrémité droite ou (II-43) pour l'extrémité gauche ensemble avec l'équation définissant la condition à la limite droite ou à la limite gauche.

Les équations (II-42) et (II-43) ont été obtenues moyennant un schéma aux différences explicite qui permet de calculer  $H$ ,  $Q$  en chaque point de maillage au fur et à mesure que l'onde arrive aux nœuds. La précision dans les calculs est généralement satisfaisante, mais la méthode présente l'inconvénient de lier le pas d'espace au pas du temps. Afin de saisir cela, on prend comme exemple le cas d'une conduite composée de deux tronçons de caractéristiques  $L$ ,  $D$ ,  $e$ , ....etc complètement différentes. Dans le tronçon de longueur  $L_1$ , on dispose la condition suivante :

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = a_1$$

Telle que :  $L_1 = (N_1 - 1)\Delta x_1$

Dans ce cas le premier point aura pour numéro 1 et le dernier point aura le numéro  $N_1$  et par conséquent nous aurons discrétisé le tronçon de longueur  $L_1$  en  $(N_1 - 1)$  tronçons élémentaires de longueur  $\Delta x_1$ . Au point de raccordement, l'intégration correspondant au tronçon de longueur  $L_2$  doit être effectué avec le même pas de temps  $\Delta t$ . Or la célérité de l'onde dans ce tronçon est  $a_2$ , donc on impose :  $\Delta x_2 = a_2 \Delta t$ .

On voit donc que ce tronçon doit avoir une longueur  $L_2$  divisible par  $\Delta x_2$  et par conséquent ne peut être quelconque. Cela se fait avec approximations successives tout en optant pour une certaine précision acceptable.

### II.6.3.3- Conditions aux limites

Par conditions aux limites, on entend l'ensemble des conditions initiales et des conditions aux frontières gauche et droite.

#### II.6.3.3.1- Conditions initiales :

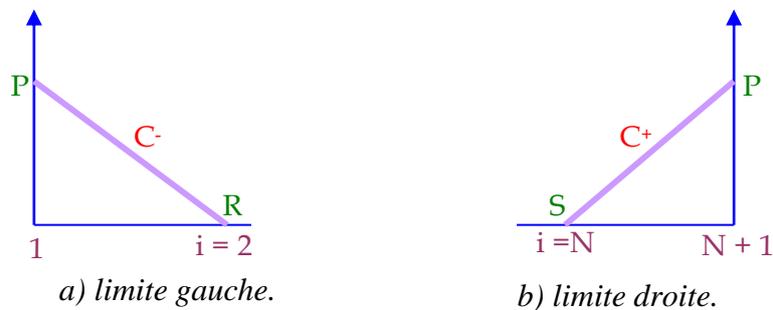
Ces conditions expriment l'état des fonctions  $H$  et  $Q$  à l'instant initial ( $t=0$ ). Ils peuvent être données sous forme :  $H = H(x, 0) = H(x)$  et  $Q = Q(x, 0) = Q(x)$ .

#### II.6.3.3.2- Conditions aux frontières :

A la limite gauche de la canalisation, l'équation (II-43) pour la caractéristique  $C^-$  donne une expression avec deux inconnues  $Q_{Pi}$  et  $H_{Pi}$  (Fig. 4-13-a). Pour résoudre cette équation, il est nécessaire de donner une autre équation exprimant l'une des inconnues  $Q$  ou  $H$  à l'extrémité gauche de la canalisation en fonction de temps.

A l'extrémité avale de la canalisation, l'équation (II-41) pour la caractéristique  $C^+$  donne une équation à deux variables inconnues  $H_{P_{N+1}}$  et  $Q_{P_{N+1}}$  (Fig. II-17-b). Une condition

à la limite droite doit être donnée pour pouvoir calculer les valeurs des deux inconnues. La condition aux limites la plus simple est celle où l'une des variables est donnée en fonction du temps, exemple :  $Q = f(L, t) = f(t)$ .



**FigII.17:** Condition aux frontières.

### II.6.3.3- Prise en compte des cas limites

#### II.6.3.3.1- Cas où le débit est imposé :

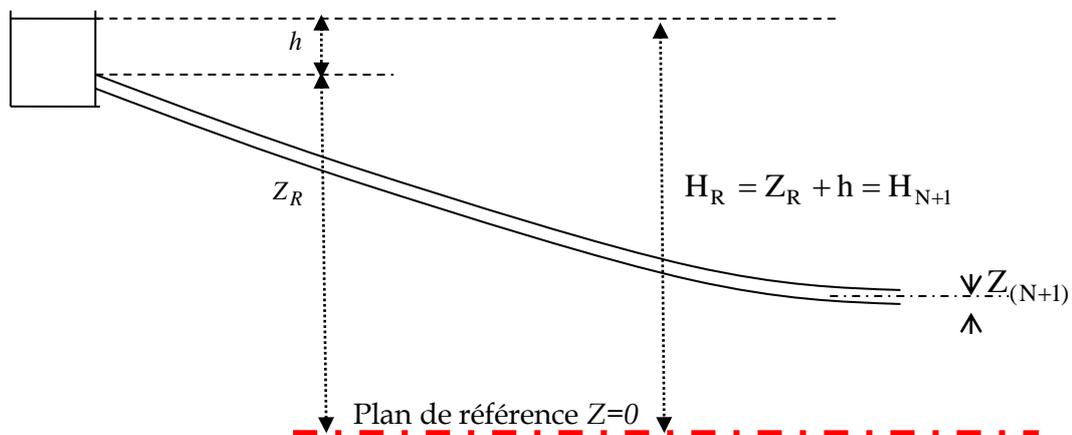
Ce cas peut se manifester lors d'une fermeture totale d'une vanne commandant l'une des extrémités de la conduite.

#### II.6.3.3.2- Cas limite où la hauteur piézométrique est imposée :

Ce cas se rencontre par exemple, lorsqu'on dispose, à l'une des extrémités de la conduite d'un réservoir à surface libre. Dans ce cas on a :  $H_1$  ou  $H_R = Z_R + h$

- D'après (VI-42) :  $Q_{N+1} = \frac{CP - H_R}{R}$  (II-47)

- D'après (II-43) :  $Q_1 = \frac{H_R - CM}{R}$  (II-48)



**Fig II.18 :** Réservoir à charge constante [16].

Lorsqu'en point a lieu la cavitation: dans ce cas la charge  $H$  en ce point ne peut descendre en deçà de la pression de vapeur. Comme exemple, on peut citer les cas suivants: à l'aspiration d'une pompe, points hauts et vanne fermée. On pose alors comme condition

$$H(i) \geq H_v + Z(i)$$

Où:  $H_v$  est la tension de vapeur en mce et  $Z(i)$  est la côte du point (i).

Pour expliquer les conditions initiales et aux limites, on examine l'exemple suivant:

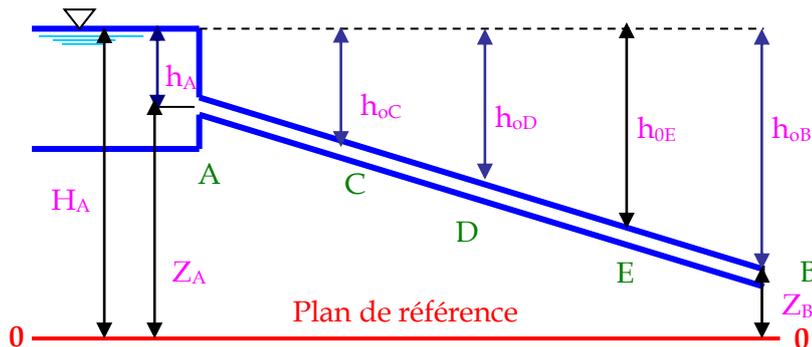


Fig II.19 : Conditions initiales.

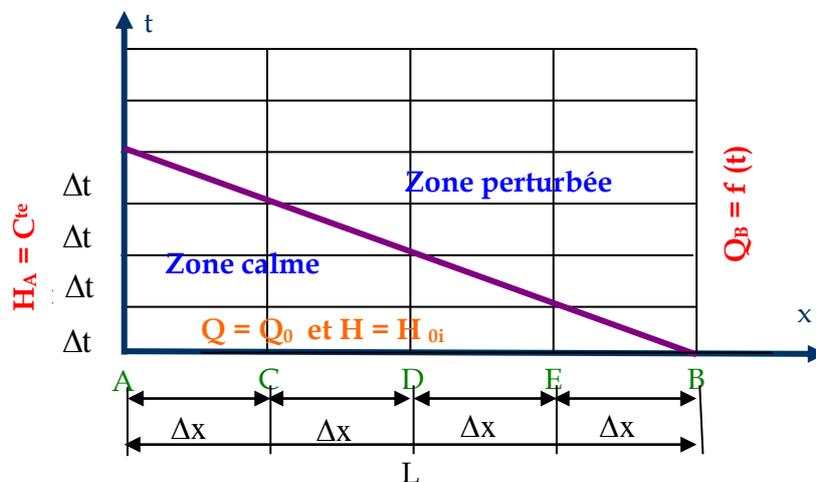


Fig II.20 : Conditions aux limites.

Au temps  $t = 0$ , (Fig. II-19), le régime dans la conduite est normale ( $V = V_0$  et  $Q = Q_0$ ). Dans chaque point, la valeur de  $H$  est égale à  $H_{0i}$  – C'est la condition initiale.

A la section A (Fig. II-19), c'est-à-dire au réservoir, le niveau de la surface libre peut être considéré comme constant, donc la pression ou la hauteur  $h$  reste constante – C'est la condition à la limite amont.

A la section B, la fermeture ou l'ouverture de la vanne peut être donnée sous la forme suivante :  $Q_B = f(t) - C$  c'est la condition à la limite aval;

Pour les points intermédiaires (ou les points intérieurs) :

- ✓ Au temps  $t = 0 + \varepsilon$ , la vanne commence à se former, l'onde du coup de bélier va se propager de B à A avec une vitesse  $a$  (Fig. II-20).
- ✓ Au temps  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$ , l'onde du coup de bélier va parcourir une distance  $\Delta x$  c'est-à-dire de B à E. Avant cet instant, le régime au point E est normal ( $Q = Q_0$  et  $H = H_0$ ).
- ✓ Au temps  $t = 2\Delta t$ , l'onde arrive au point D pour lequel le régime était normal avant cet instant.
- ✓ Au temps  $t = 3\Delta t$ , l'onde atteindra le point C, puis au temps  $t = 4\Delta t$ , l'onde arrivera au point A.

#### II.6.3.3.3- Cas de raccordement de deux conduites [16]:

Soient deux conduites raccordées au point (i) (Fig. II-21). On suppose que les caractéristiques Charges – débits aux points (i-1) et (i+1) sont connues au temps  $t$  et on détermine celles du point  $i$  au temps  $t + \Delta t$ . Dans la 1<sup>ère</sup> conduite, on calcule  $a_1$ ,  $T_1$  et  $R_1$ . On calcule de même  $a_2$ ,  $T_2$  et  $R_2$  dans la 2<sup>ème</sup> conduite. Le calcul des grandeurs  $H_i$  et  $Q_i$ , en utilisant les expressions (II-42) et (II-43) adaptées aux tronçons 1 et 2, s'effectue comme suit :

$$\text{- Tronçon 01 : } H_{P(i)} + R_1 [Q_{P(i)}] = CP \quad (II-49)$$

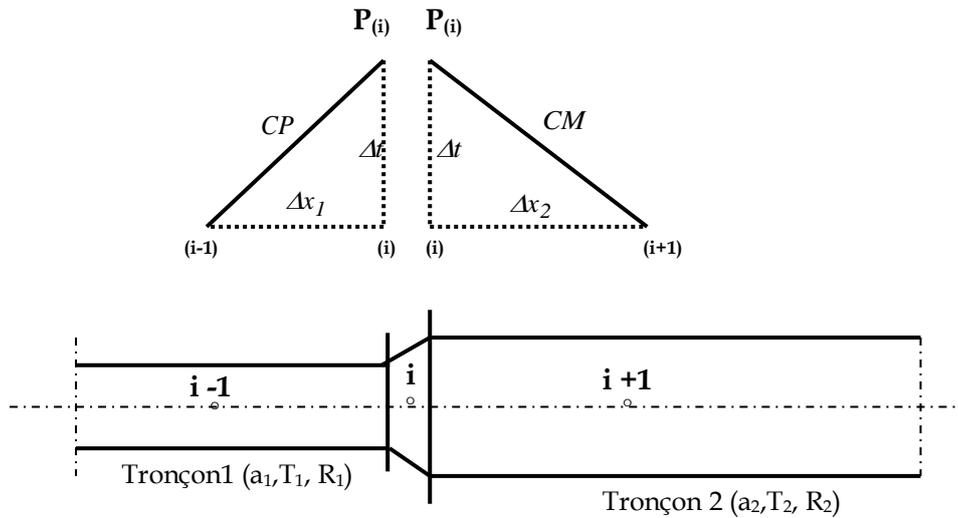
$$\text{Avec : } CP = H_{(i-1)} + Q_{(i-1)} [R_1 - T_1 | Q_{(i-1)} |] \quad (II-49)'$$

$$\text{- Tronçon 02 : } H_{P(i)} - R_2 [Q_{P(i)}] = CM \quad (II-50)$$

$$\text{Avec : } CM = H_{(i+1)} - Q_{(i+1)} [R_2 - T_2 | Q_{(i+1)} |] \quad (II-50)'$$

$$\text{Par conséquent } Q_{P(i)} = \frac{CP - CM}{R_1 + R_2} \quad (II-51)$$

En remplaçant  $Q_{P(i)}$  par sa valeur dans l'une des expressions (II-49) ou (II-50), on obtient la valeur de  $H_{P(i)}$



**Fig II.21 : Raccordement de deux conduites**  
à caractéristiques différentes.

## II.7- CRITIQUE ET CHOIX DE METHODE D'ANALYSE :

En tenant compte des nombreux exemples numériques résolus par différents auteurs sur l'utilisation des méthodes citées plus haut, on essaiera ci après de donner les avantages et les inconvénients de ces méthodes ainsi que les limites de leur application.

### II.7.1-. Méthode analytique d'Alliévi:

L'application de cette méthode dans les calculs des ondes du coup de bélier en hydrodynamique est assez restreinte. En fait, on se heurte rapidement à de grandes difficultés de calcul, surtout si la conduite présente des embranchements, des variations de sections, ...etc.[08], [18] De plus, les méthodes analytiques ne tiennent pas compte des pertes de charge .[08], [10].

### II.7.2- Méthode graphique de Schnyder-Bergeron:

La méthode graphique permet d'aboutir d'une manière élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes qui, à première vue, paraissent les plus compliqués. En effet, elle permet de résoudre les problèmes aussi complexes que ce soit, mais au détriment d'un travail long et délicat, parce que dès que le réseau devient complexe (présence de plusieurs équipements hydrauliques, de branchements ou de maillage de réseau), la construction graphique devient difficile et peu maniable. C'est pourquoi, cette méthode n'est utilisée actuellement que pour des cas simples ou pour la compréhension physique du phénomène, surtout qu'elle est supplantée par l'ordinateur

### **II.7.3- Méthode numérique:**

*Les méthodes numériques programmées sur ordinateur permettent de tester un grand nombre de cas de fonctionnement. Elles permettent également de calculer les paramètres recherchés (débits, pressions) en fonction du temps aux divers points du réseau si compliqué que ce soit.*

*De plus elles présentent les avantages suivants:*

- *La prise en compte de la répartition des pertes de charge le long de la conduite,*
- *La prise en compte du profil en long de la conduite,*
- *L'introduction de plusieurs conditions aux limites en même temps.*
- *La présentation des résultats avec la précision voulue sous forme tabulaire ou graphique.*

### **II.7.4- Conclusion:**

*Du fait que la méthode analytique se limite à l'examen des cas simples tout en négligeant les pertes de charge et que la méthode graphique devienne confuse lorsque les installations hydrauliques sont complexes d'une part, et que les méthodes numériques présentent des avantages de traiter le phénomène étudié avec des précisions voulues quelques soient la complexité du réseau, d'autre part, on opte pour les méthodes numériques (méthode des caractéristiques) dans l'examen des exemples numériques traités plus loin.*

## Chapitre III :

La relation entre l'amplitude du coup de bélier

**Chapitre III :**  
**La relation entre l'amplitude du coup de bélier**  
**et**  
**les différents matériaux**  
**de construction des conduites.**

### **III.1. Généralités**

*Au cours d'un régime transitoire, et à la suite d'une fermeture brusque d'une vanne, ou d'un clapet anti-retour, on remarque la compression des premières tranches liquides se trouvent juste à l'amont de l'organe de fermeture. Ces derniers se trouvent plus à l'amont, continuent à avancer jusqu'à ce qu'elles se trouvent stoppées elles mêmes par les tranches liquides d'aval. On remarque qu'au cours de ce phénomène et de proche en proche, chaque tranche liquide va s'arrêter et provoquer à la suite le stoppage des tranches d'amont (mouvement d'accordéon).*

*Ce mouvement se propage donc de l'organe de fermeture, jusqu'à l'amont avec une certaine célérité, engendrant ainsi le long de la canalisation, et au cours de son passage, l'arrêt de liquide (la vitesse d'écoulement s'annule, la diminution du volume du fait de la compressibilité, la dilatation de la conduite, et en conséquence la compression). De même on considère que le phénomène se propage à la même célérité en cas de contraction. De cette description, on peut d'ailleurs déduire que la vitesse de propagation sera plus grande même que pour les canalisations plastiques. La détermination de la célérité d'onde est donc nécessaire pour le calcul des surpressions et des dépressions dans une conduite forcée.*

*L'objet de cette partie du travail porte sur l'estimation théorique de la célérité de propagation des ondes dans les conduites. Cette célérité dépend du comportement mécanique (élasticité, viscosité, plasticité) de la conduite.*

*Nous avons estimé que la variation maximale de pression lors d'un coup de bélier est égale à  $\pm \frac{CU_0}{g}$  ; où  $U_0$  est la vitesse du fluide au lieu et au moment de la manœuvre,  $C$  est la célérité des ondes du coup de bélier. Cette variation de pression est proportionnelle à la célérité dont la connaissance est donc fondamentale pour quantifier correctement par des calculs théoriques le phénomène du coup de bélier.*

### **III.2. Détermination de la célérité d'onde de coup de bélier dans les conduites**

*Il existe plusieurs formules pour le calcul de la célérité de l'onde de coup de bélier dans les conduites sous pression. Cependant, la majorité de ces formules sont développées avec l'hypothèse d'une conduite à paroi simple non soumise à la pression externe.*

Dans tous les cas, pour calculer la célérité d'onde dans les conduites libres, et enterrées on utilisera la formule qui a été établie par ALLIEVI [7] tout en se référant sur la forme originale qui donne la célérité.

$$\frac{1}{C^2} = \rho \left( \frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \quad (III.1)$$

Où :  $\frac{d\rho}{\rho dP}$  et  $\frac{dS}{S dP}$  représentent respectivement la compressibilité du liquide et la déformabilité de la conduite.

Avec :

$C$  : Célérité d'onde,

$\rho$  : La masse volumique de l'eau,

$S$  : la section du liquide au régime transitoire.

On peut développer l'expression (III-1) pour un fluide peu compressible et une conduite élastique à paroi mince pour obtenir l'expression suivante :

$$\frac{1}{C^2} = \rho \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E.e} f \right) \quad (III.2)$$

Avec :

$\varepsilon$  : Elasticité du fluide,

$D$  : Diamètre intérieur du tuyau,

$E$  : Module de YOUNG du tuyau,

$e$  : Epaisseur du tuyau,

$f$  : Traduit l'influence de la contrainte longitudinale.

### III.2.1. Calcul de la célérité d'onde dans les conduites non enterrée [7]

On peut exprimer la célérité  $c$  par l'expression :

$$C = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E} \frac{D}{e} f}} \quad (III.3)$$

On voit alors que pour l'eau, pour laquelle on a,  $\varepsilon = 2,07.10^9$  Pascal et

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , la célérité prend la forme suivante :

$$C = \frac{1430}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10^9}{E} \frac{D}{e} f}} \quad (\text{III.4})$$

Où  $E$  est exprimé en pascal. La célérité ne peut donc dépasser 1430 m/sec, célérité du son dans l'eau, et s'en rapproche pour les matériaux très rigides ( $E$  très grand).

En fait elle ne dépend plus que :

- Du rapport  $\frac{f}{E}$  donc du matériau qui compose le tuyau,
- Du rapport  $\frac{D}{e}$  donc des dimensions du tuyau,
- Du terme  $f$  qui traduit l'influence de la contrainte longitudinale du tuyau.

Et on conclut pour l'eau, que la célérité se trouve aussi souvent sous la forme suivante :

$$C = \frac{9900}{\sqrt{50 + k \frac{D}{e}}} \quad (\text{III.5})$$

Avec :

$D$  : diamètre de la conduite,

$e$  : épaisseur de la conduite.

Dans cette expression le coefficient «  $k$  » tient compte de la nature du matériau formant la canalisation. On note que :

$k = 0.5$  pour l'acier et le fer.

$k = 1$  pour la fonte.

$k = 5$  pour le plomb.

$k = 33$  pour le PVC.

$k = 83$  pour le polyéthylène haute densité.

$k = 500$  pour le polyéthylène basse densité.

La relation (III.5) exprime l'ancien système (M.U.S), et suppose certaines hypothèses à savoir :

- ❖ Conduites à parois minces et élastique obéissent à la loi d'HOOKE,
- ❖ Conduites comportant plusieurs joints, avec effort longitudinal nul,
- ❖ Température de l'eau est supposé constante.

### III.2.2. Calcul de la célérité d'onde dans les conduites composites [7]

Dans le calcul de la célérité d'onde de coup de bélier dans les conduites composites, on considère trois cas à savoir :

#### III.2.2.1. Galerie en rocher brut

L'expression de la célérité telle qu'elle est donnée par l'équation (III.2) ne peut être utilisée telle quelle en faisant tendre  $e$  vers l'infini. Il faut alors revenir aux définitions des termes qui figurent dans la célérité, notamment utiliser la déformabilité de l'enveloppe sous la forme  $\frac{dS}{SdP}$  et non  $\frac{D}{E.e} f$ .

On obtient alors comme expression de la célérité :

$$\frac{1}{C^2} = \rho \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2(1+\nu)}{E} \right) \quad (III.6)$$

Avec :

$\nu$  : Coefficient de Poisson du rocher,

$\varepsilon$  : Elasticité du fluide.

#### III.2.2.2. Galerie en rocher revêtue

On distingue deux types de galeries en rocher revêtues :

##### A. Galerie avec deux revêtements

Selon JAEGER et tenant compte de la théorie des cylindres épais en résistances des matériaux, la célérité d'onde a été déterminée par considération de la déformabilité de la conduite en négligeant le coefficient de Poisson.

Les efforts ont été négligés dans le sens longitudinal de la conduite. En rejoignant l'idée d'ALLIEVI, JAEGER propose pour les conduites épaisses la relation suivante :

$$C = \left[ \rho \left( \frac{1}{k_e} + \frac{2}{E} \frac{r^2 + R^2}{R^2 - r^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (III.7)$$

Avec :

$R, r$  : respectivement les rayons intérieur et extérieur de la canalisation,

Donnons le résultat fourni par HALLIWELL pour une galerie ayant deux revêtements : le premier, interne, est une tôle d'épaisseur « e » et de module d'YOUNG « E », le deuxième est un revêtement en béton, de module d'YOUNG « E<sub>b</sub> », qu'on considère cylindrique de rayons intérieur et extérieur « r » et « R ». Enfin du rocher, d'épaisseur supposée infinie et de module d'YOUNG « E<sub>r</sub> ».

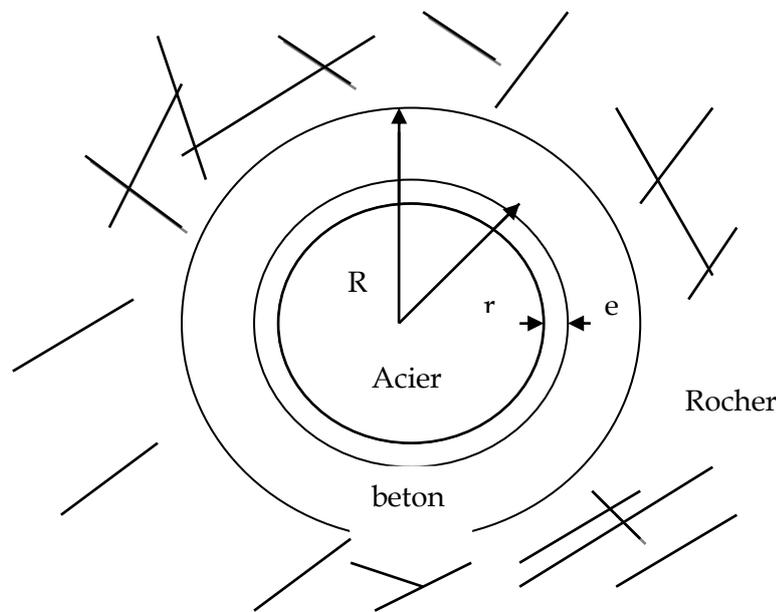


Fig III.1: coupe schématique d'une galerie en rocher revêtue.

La célérité peut alors être mise sous la forme générale :

$$C = \left[ \rho \left( \frac{1}{k_e} + \frac{2r}{E \cdot e} f \right) \right]^{-1/2} \quad (III.8)$$

Avec :

$$f = (1 - \nu^2)(1 - \lambda)$$

Et

$$\lambda = \frac{(1 - \nu)r}{(1 - \nu)r + \frac{Ee}{E_B} \left[ \frac{E_B(R^2 + r^2(1 - 2\nu)) + E_r(1 - 2\nu)(R^2 - r^2)}{E_B(R^2 - r^2) + E_r(r^2 + R^2(1 - 2\nu))} \right]} \quad (III.9)$$

Avec,  $\nu$  : coefficient de poisson du rocher.

On voit qu'il y a seul module de Poisson dans cette expression. C'est en effet l'hypothèse faite par HALLIWELL pour établir ce résultat. JAEGGER lui n'a tenu compte que du module d'YOUNG du rocher, alors que HALLIWELL a introduit celui du béton.

### **B. Galerie avec un seul revêtement.**

- **Revêtement en acier :**

Il suffit de faire  $R = r$  dans l'équation (III.9) pour obtenir la valeur du terme correctif  $\lambda$  d'où on déduit :

$$f = \frac{(1 - \nu^2) + E.e}{E_r(1 - \nu)r + E.e} \quad (III.10)$$

Si on adopte pour  $E_r$  la valeur de  $E_b$  ce qui suppose le rocher amélioré par injections.

- **Revêtement en béton :**

Le même raisonnement que celui effectué dans le cas de deux revêtements conduit à l'expression suivante du terme correctif  $f$  :

$$f = \frac{(1 + \nu)(R - r)}{r} \frac{E_b(R^2 + r^2(1 - 2\nu)) + E_r(1 - 2\nu)(R^2 - r^2)}{E_b(R^2 - r^2) + E_r(r_2 + R^2(1 - 2\nu))} \quad (III.11)$$

Ce terme intervient dans l'expression suivante de la célérité :

$$\frac{1}{C^2} = \rho \frac{1}{k_e} + \frac{2r}{E_b(R - r)} f \quad (III.12)$$

### **III.2.2.3. Célérité d'onde dans les conduites en béton armé :**

#### **A/ méthode de l'épaisseur équivalent :**

Cette méthode sert à prendre une conduite simple équivalente en béton armé ou en acier à la place de la conduite de béton armé.

L'expression de la célérité est celui d'une conduite simple.

L'hypothèse considère que le béton et l'acier ont la même déformation.

La force «  $F$  » provoquant une déformation  $\zeta$  d'un élément de béton armé soumis à l'équilibre de la largeur unitaire et de section  $(e_b + e_m)$  sera donnée par :

$$F = e_b \sigma_b + e_a \sigma_a \quad (III.13)$$

Avec :

$e_b$  : est l'épaisseur du béton,

$e_m$  : est l'épaisseur du métal suppose uniformément répartie sur la longueur,

$\sigma_a, \sigma_b$  : sont respectivement les contraintes dans le béton et dans l'armature.

Selon la loi de HOOKE, on peut écrire :

$$F = \varepsilon . E_a (e_b + \eta . e_a) = \sigma_b e_{eq}^b \quad (III.14)$$

Où bien :

$$F = \varepsilon . E_a \left( e_a + \frac{e_b}{\eta} \right) = \sigma_a e_{eq}^a \quad (III.15)$$

$\eta$  : Rapport entre les modules d'élasticité du métal et du béton, variant entre 8 et 15,

$E_a$  : module d'élasticité du métal.

On propose une solution approchée par détermination d'une épaisseur équivalente, puisqu'on a une conduite en béton avec des couches d'armatures.

- **Epaisseur équivalente en béton :**

$$E_{eq.b} = e_b + \eta e_a \quad (III.16)$$

- **Epaisseur équivalente en armature :**

$$E_{eq.a} = e_a + \frac{e_b}{\eta} \quad (III.17)$$

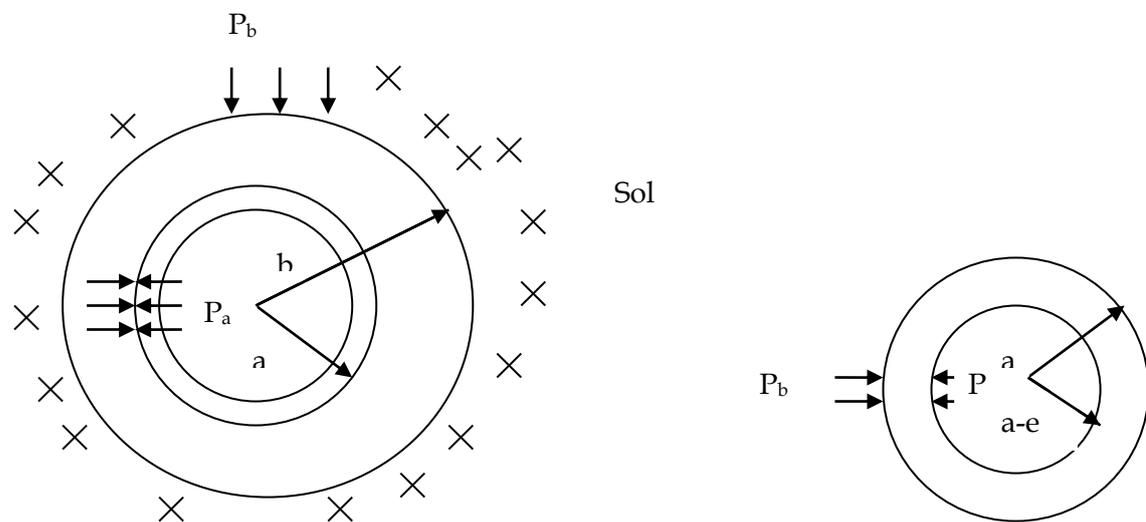
### III.2.3. Calcul de la célérité d'onde dans les conduites enterrées

La source la plus disponible d'information est le travail de B.SALAH qui a étudié les divers cas complexes qu'on rencontre en pratique. Nous allons ici donner simplement les

résultats obtenus par ce dernier en se basant sur deux hypothèses, hypothèse de la raideur du sol et hypothèse de la charge de la précontrainte.

### III.2.3.1. Hypothèse de la raideur du sol

En analysant tous ces travaux, notamment ceux de JAEGER et HALLIWELL, B.SALAH [10] a mis au point un modèle mathématique permettant le calcul de la célérité d'onde dans les conduites enterrées avec cette hypothèse, en tenant compte des caractéristiques mécaniques du sol environnement. Ce modèle est à la fois valable pour les conduites simples et les conduites blindées.



**Fig III.2 :** les forces appliquées sur les conduites enterrées.

Avec :

- $P$  : la pression hydrostatique ( $P_a$ ),
- $P_a$  : la charge engendrer par la raideur du sol ( $P_a$ ),
- $P_b$  : la charge extérieure des terres de remblai ( $P_a$ ).

Les résultats obtenus par l'auteur mettant en évidence l'effet du sol sur l'augmentation de la célérité de l'onde du coup de bélier, d'où le sol impose une raideur supplémentaire réduisant la déformabilité de la conduite et augmentant ainsi la célérité. Le modèle présente l'avantage de la prise en compte du module de poisson des différents matériaux (blindage,

conduite, sol) ce qui n'est pas le cas dans les formules déjà existantes de JAEGER et HALLIWELL.

L'auteur a donné une expression de la célérité d'onde d'ordre général qui est la suivante :

$$C = \left[ \frac{\rho}{k_e} \left( 1 + K_e \frac{2a(1-\nu_m^2)G}{(1+\nu_m)aE_c + E_m e_m G} \right) \right]^{-1/2} \quad (III.18)$$

D'où :

$$G = \frac{E_c(1-\nu_c)(1-\nu_s)(b^2 + a^2(1-2\nu_c)) + E_s(1-\nu_c)^2(1-2\nu_c)(b^2 - a^2)}{E_c(b^2 - a^2)(1-\nu_m)(1-\nu_s) + E_s(1-\nu_c)(1-\nu_m)(a^2 + b^2(1-2\nu_c))} \quad (III.19)$$

L'expression (III.18) est générale, elle permet de déterminer la célérité de l'onde dans les conditions enterrées et les galeries rocheuses.

Il y a deux cas qui peuvent se présenter :

- Dans le cas d'une conduite simple enterrée et à paroi mince, il suffit de faire tendre  $b$  vers  $a$  dans l'expression précédente :

$$C = \left[ \frac{\rho}{k_e} \left( 1 + k_e \frac{2a(1-\nu_m^2)(1-\nu_s)}{(1-\nu_m^2).a.E_s + E_m.e_m(1-\nu_s)} \right) \right]^{-1/2} \quad (III.20)$$

Avec :

- $E_s, E_c$  : module de YOUNG du sol et du béton (Pa),

- $E_m$  : module de YOUNG du blindage (Pa),

- $\nu_s, \nu_c, \nu_m$  : coefficients de POISSON du sol, de l'anneau en béton et du métal,

- $e_m$  : épaisseur du blindage (m),

- $k_e$  : module d'élasticité de l'eau [Pa],

- $\rho$  : masse volumique de l'eau [ $\text{kg/m}^3$ ],

- $a$  : rayon de la conduite (m).

Dans le cas d'une conduite en PVC, il suffit de remplacer les caractéristiques du métal par celles du PVC dans l'expression (III.20).

- Dans le cas d'une conduite simple enterrée, mais à paroi épaisse, il suffit de mettre  $e_m=0$  et  $\nu_m=0$  dans les expressions (II.18) et (II.19), et on aboutit à :

$$C = \left[ \frac{\rho}{K_e} \left[ 1 + K_e \frac{2G}{E_c} \right] \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (III.21)$$

Avec :

$$G = \frac{E_c(1-\nu_s)(1-\nu_c)[b^2 + a^2(1-2\nu_c)] + E_s(1-\nu_c)^2(1-2\nu_c)(b^2 - a^2)}{E_c(1-\nu_s)(b^2 - a^2) + E_s(1-\nu_c)[a^2 + b^2(1-2\nu_c)]} \quad (III.22)$$

Il est à signaler que l'expression (II.18) est également applicable au cas des galeries rocheuses blindées ou non, ceci à condition de remplacer les propriétés du sol par celles du rocher. Cette expression est en principe plus précise que les formules existantes déjà proposées par JAEGER et HALLIWELL. Comparativement aux hypothèses considérées par ces derniers, l'expression présente l'avantage de tenir compte du module de poisson, le milieu externe et des différents matériaux constituant la paroi. Rappelons que JAEGER considère uniquement le module de poisson du milieu externe et néglige ceux de la conduite et du blindage. Aussi HALLIWELL simplifie la formulation en prenant une valeur unique pour le coefficient de poisson pour les différents matériaux :  $\nu = \nu_m = \nu_c = \nu_s$ .

### III.2.3.2. Hypothèse de la charge de la précontrainte

Nous avons élaboré dans le chapitre (V) cette hypothèse. Tenant compte de cette dernière B.SALAH a déterminé l'expression de la célérité d'onde dans les conduites enterrées qui est la suivante :

$$\frac{1}{C_1^2} = \frac{\rho}{k_e} \left[ 1 + k_e \left( 1 - \nu_m^2 \right) \frac{2a}{E_m \cdot e_m} \left[ 1 + B(P - P_a) \right] \right] \quad (III.23)$$

D'où :

$$B = \frac{(1 + \nu_m^2) a^2}{E_m \cdot e_m^2} (1 - 2\nu_m) \quad (\text{III.24})$$

Avec :

- $c_1$  : la célérité d'onde (m/s),
- $E_m$  : le module de YOUNG du métal (Pa),
- $\nu_m$  : le coefficient de POISSON du métal,
- $e_m$  : l'épaisseur du blindage (m),
- $K_e$  : le module d'élasticité de l'eau [Pa],
- $\rho$  : la masse volumique de l'eau [kg/m<sup>3</sup>],
- $a$  : le rayon de la conduite (m),
- $P$  : la pression hydrostatique (Pa),
- $P_a$  : la charge des terres de remblai (Pa).

### **III.3. Aperçu bibliographique sur l'ancrage longitudinal**

On sait déjà qu'au cours d'un régime transitoire et plus précisément lors d'un phénomène de propagation d'onde, il en résulte des déformations de la canalisation qui est beaucoup plus radiales que longitudinales.

On montre comment prendre en compte les déformations et l'ancrage longitudinaux au niveau de la conduite, question sur laquelle les avis des auteurs suivants sont partagés.

En pratique, on a fait le plus souvent à des conduites avec des épaisseurs différentes et soumises à différents efforts qui influent sur la forme géométrique de la conduite et par conséquent la célérité d'onde.

ALLIEVI considère dans sa formule, l'hypothèse du fait que la conduite est à paroi mince, élastique et ne subissant aucun effort longitudinal. Ce qui n'est pas toujours le cas rencontré en pratique notamment dans les adductions d'eau potable et les réseaux de distribution où le régime transitoire est couramment engendré.

En s'inspirant sur les travaux d'ALLIEVI, une généralisation a été faite sur la détermination de la célérité d'onde. Ainsi JAEGER s'intéresse dans le cas d'une conduite

*épaisse en négligeant le coefficient de POISSON et par conséquent les efforts longitudinaux de la conduite.*

*En se basant sur les mêmes travaux ci-dessus, PARMAKIAN [10] étudie seulement le cas d'une conduite à paroi mince, en introduisant un terme qui tient compte de l'allongement de la conduite.*

*Par un point de vue élargique celui de PARMAKIAN, HALLIWELL s'intéressé par le cas d'une conduite à paroi épaisse avec prise en compte de l'allongement. Néon moins la divergence entre les deux auteurs réside dans le cas des conduites équipées de joins de dilatation.*

*En prenant en considération l'allongement et malgré la confusion explicative, STREETER, WYLI et HALLIWELL convergent vers le même point de vue quant à la détermination de la célérité d'onde.*

*En analysant tous ces travaux, notamment les points de divergence entre les auteurs, MASSOUH s'intéresse sur les conduites minces et épaisses, avec une prise en compte de l'allongement, et trouve une expression assez appréciable caractérisant l'ancrage de ces types de conduites.*

*Dans ces travaux de recherche DJEMILI a analysé, à travers de la déformation longitudinale liée au coefficient de POISSON, l'influence de l'ancrage de la conduite.*

*Certains auteurs, en analysant les modes d'ancrage, ont proposé diverses formules donnant la célérité d'onde. Néon moins certains d'entre eux, comme le montre le tableau suivant, présentent des avis divergent sur les modes d'ancrage et par conséquent les paramètres composant la formule donnant la célérité d'onde.*

**Tableau III.1.** Récapitulation et comparaison des formules de célérité d'onde.

<i>Auteurs</i>	<i>Conduites considérées</i>	<i>Considération de l'ancrage</i>	<i>Formules donnant la célérité d'onde</i>
<i>ALLIEVI</i>	<i>Paroi mince</i>	<i>Non considéré</i>	$C = \left[ \rho \left( \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-1/2}$
<i>JAEGER</i>	<i>Paroi mince et épaisse</i>	<i>Non considéré</i>	$C = \left[ \rho \left( \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-1/2}$
<i>PARMAKIAN</i>	<i>Paroi mince</i>	<i>Considééré</i>	$C = \left[ \rho \left( \frac{dP}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} + \frac{dL}{L dP} \right) \right]^{-1/2}$
<i>HALLIWELL</i>	<i>Paroi mince et épaisse</i>	<i>Considééré</i>	$C = \left[ \rho \left( \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta p} + \frac{\Delta L}{L \Delta P} \right) \right]^{-1/2}$
<i>MASSOUH</i>	<i>Paroi mince et épaisse</i>	<i>Considééré</i>	$C = \left[ \rho \left( \frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-1/2}$
<i>B.SALAH</i>	<i>Paroi mince et épaisse</i>	<i>Considééré</i>	$C = \left[ \rho \left( \frac{d\rho}{\rho dP} + \chi \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-1/2}$

**Commentaire :**

A partir de ce tableau, on remarque que certains auteurs ont travaillé avec le terme  $dS/SdP$  comme expression qui tient compte d'ancrage et les autres auteurs ont utilisés  $dL/LdP$  pour le même but. Cependant il est à signalé que ALLIEVI, PARMAKIAN et MASSOUH considèrent que la déformabilité de la conduite se fait librement. Ce qui ne reflète pas la réalité.

JAEGER, HALLIWELL et B.SALAH considèrent que la déformabilité radiale de la conduite se fait sous l'action de la poussée externe due au rocher tenant compte de l'ancrage. Les points de vue de ces derniers auteurs divergent quant à la considération ou non du coefficient de Poisson, afin de s'approcher de la réalité, B.SALAH considère les différents coefficients de Poisson et confirme la courbe expérimentale donnée par M.MEUNIER

traduisant ainsi l'augmentation de la célérité d'onde du coup de bélier dans les conduites enterrées.

### III.4. Calcul du coefficient de déformabilité « f »

L'établissement de l'équation de continuité qui nous a permis de déterminer l'expression de la célérité et de dégager celle du terme  $f$  qui traduit l'influence de la contrainte longitudinale pour les tuyaux minces.

A partir de notre recherche bibliographique, HALLIWELL envisage trois cas pour le calcul du coefficient de déformabilité :

Pour une conduite élastique, ce coefficient est en fonction du type d'ancrage.

• **1<sup>er</sup> cas :**

Conduite ayant un déplacement libre dans le sens longitudinal fixé à l'extrémité opposée à celle où se produit l'onde.

$$f = (1 - \nu/2) \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (\text{III.25})$$

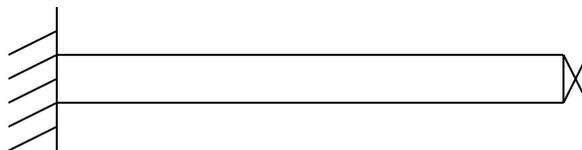
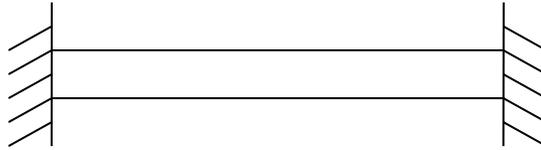


Fig III.3 : Une conduite ancrée d'un côté.

• **2<sup>eme</sup> cas :**

Conduite ancrée sur toute sa longueur empêchant tout déplacement longitudinal.

$$f = (1 - \nu^2) \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (\text{III.26})$$

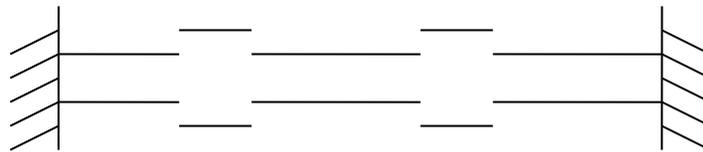


**Fig III.4 :** Une conduite ancrée de deux cotés.

• **3<sup>eme</sup>cas :**

Conduite libre de se déplacer dans le sens longitudinal et équipée de joint de dilatation.

$$f = \frac{D}{D + e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (\text{III.27})$$



**Fig III.5 :** Une conduite équipée de joint de dilatation.

D'où :

$D$  : diamètre intérieur de la conduite,

$\nu$  : Coefficient de Poisson,

$e$  : épaisseur de la conduite.

### III.4.1 Expressions particulières [7]

La déformabilité de la conduite prend deux formes particulières extrêmes :

**1. Pour la conduite à paroi mince ( $e \ll D$ )**

Le coefficient de déformabilité prend les valeurs suivantes :

1<sup>er</sup> cas d'ancrage:  $f = 1 - \nu / 2$

2<sup>eme</sup> cas d'ancrage:  $f = 1 - \nu^2$

3<sup>eme</sup> cas d'ancrage:  $f = 1$

Dans tous les cas, par rapport au cas général, on remarque que :

$$f = f_{\min e} \frac{1}{1 + \frac{e}{D}} + \frac{2e}{D}(1 + \nu) \quad (\text{III.28})$$

2. Pour la conduite à paroi très épaisse ( $e \gg D$ ), c'est le cas d'une galerie rocheuse :

$$\frac{\Delta S}{S \Delta P} = 2 \frac{1 + \nu}{E} \quad (\text{III.29})$$

Et la célérité d'onde sera :

$$C = \left[ \rho \left( \frac{1}{ke} + 2 \frac{1 + \nu}{E} \right) \right]^{-1/2} \quad (\text{III.30})$$

Et de là, on peut dire que la célérité de propagation ne dépend que des propriétés mécaniques du matériau de la conduite et de celles de fluide.

### **III.5. Célérité d'onde dans les conduites en polyéthylène**

Ces conduites sont plus utilisées car elles résistent bien à la corrosion, avec une gamme de diamètre disponible, et une perte de charge faible, comme elles peuvent être fabriquées en grandes longueurs et en roulées sous forme de couronnes.

L'étude de ces conduites dans le domaine de coup de bélier comporte des difficultés qui proviennent du comportement mécanique particulier de la section de ces conduites après leur stockage on aura une section ovalisée, de façon permanente, peu elliptique sous l'effet de la pression. D'autre part, la paroi manifeste un comportement mécanique complexe en raison de la viscoélasticité du polyéthylène.

#### **-Méthode de calcul de la célérité [7]**

Pour les conduites en polyéthylène, le calcul de la célérité de propagation d'onde devient compliqué et incertain.

Donc on est obligé de passer à l'utilisation de la méthode du gonflage pour mesurer la déformabilité de la conduite, la méthode du gonflage due à une idée de COMOLET expérimentée par MASSOUH pour le polyéthylène est donc très séduisante puisqu'elle ne nécessite qu'un simple manomètre.

On se basant sur la relation suivante :

$$C_0 = \left( \frac{SdP}{dPS} \right)^{1/2} = \left[ \rho \left( \frac{dP}{\rho dP} + \frac{dS}{SdP} \right) \right]^{-1/2} \quad (III.31)$$

On considère une conduite de longueur  $L$ , de section interne  $S$ , remplie d'eau sous pression  $P$  et fermée aux extrémités, la masse d'eau dans la conduite est donc :  $m = \rho SL$

Si l'on injecte ou on prélève une masse «  $\Delta m$  » supposée petite par rapport à «  $m$  » il se produit les variations suivantes :

$$\frac{\Delta m}{m\Delta P} = \frac{\Delta \rho}{\rho\Delta P} + \frac{\Delta L}{L\Delta P} \quad (III.32)$$

Pour les conduites ancrées on néglige le terme  $\frac{\Delta L}{L\Delta P}$  devant  $\frac{\Delta S}{S\Delta P}$ , dans ces conditions on peut écrire l'expression de la célérité sous la forme approchée :

$$C_0 = \left[ \frac{\rho\Delta m}{m\Delta p} \right]^{-1/2} \quad (III.33)$$

Pour connaître la célérité de propagation dans la conduite, il suffit donc de d'injecter ou de prélever des volumes d'eau de masses «  $\Delta m$  » connues et de mesurer la variation «  $\Delta P$  » de pression qui en résulte.

Sur le plan pratique on peut procéder de deux façons :

- Injection de la masse «  $\Delta m$  », appelée « méthode de gonflage »
- Prélèvement de la masse «  $\Delta m$  », appelée « méthode de dégonflage ».

Afin de réduire l'erreur expérimentale due à la détermination de «  $\Delta P$  » par différence entre deux valeurs mesurées, on construit la courbe ( $P, M$ ). La tangente de cette courbe permet de calculer «  $\Delta m/\Delta P$  » par conséquent, la célérité qui est donnée par l'expression (III.33).

Après l'injection de la masse «  $M$  », on enregistre par un capteur de pression placé aux extrémités du tube, l'onde de propagation pour pouvoir connaître la célérité réelle «  $C_r$  » ainsi déterminée pour vérifier la célérité «  $C_0$  » calculée à partir de la relation (III.33).

Cette méthode n'est bien sûr pas utilisable pour les conduites comme l'amiante ciment qui ont des capacités d'absorption non négligeables.

### **III.6- Protection contre le coup de belier:**

#### **III.6.1- Introduction:**

*Si pour une conduite d'adduction gravitaire; il suffit habituellement de manipuler un robinet de vanne en l'ouvrant ou en le fermant lentement pour limiter la surpression à des valeurs acceptables, ce n'est pas le cas pour une conduite de refoulement, car l'arrêt de la pompe peut survenir brutalement par disjonction du courant alimentant le moteur.*

*Dans le cas général, il est impossible de supprimer complètement les effets du coup de bélier, une fois créé, mais on recherche toujours à atténuer ses effets tels qu'ils ne puissent pas être dangereux pour les installations.*

*En conséquence, il faudra déterminer la valeur de la dépression à admettre de manière qu'avec un seul appareil anti-bélier, si possible, la pression totale dans la conduite puisse être tenue entre un maximum et un minimum convenables.*

#### **III.6.2- MOYENS DE PROTECTION CONTRE LE COUP DE BELIER :**

*Les appareils anti- bélier devront avoir pour effet de limiter la dépression et la surpression. Les appareils les plus utilisés sont les suivants :*

- *Les volants d'inertie qui interviennent dans la protection contre les dépressions.*
- *Les soupapes de décharge qui interviennent dans la protection contre les surpressions.*
- *Les réservoirs d'air et les cheminées d'équilibre qui interviennent à la fois dans la protection contre les dépressions et les surpressions.*

##### **III.6.2.1- Les volants d'inertie :**

*Le volant d'inertie, calé sur l'arbre du groupe constitue l'un de ces moyens de protection grâce à l'énergie qu'il accumule pendant la marche normale. Le volant d'inertie la restitue au moment de la disjonction et permet ainsi d'allonger le temps d'arrêt de l'ensemble, donc de diminuer l'intensité du coup de bélier. Néanmoins, l'utilisation de ce type d'appareil est très limitée. En effet, dès que la longueur de la conduite augmente, on arrive rapidement à des poids de volant énormes et le système n'est plus économique.*

### III.6.2.2- Soupapes de décharges :

Les soupapes de décharges sont des équipements mécaniques qui s'ouvrent pour réduire la surpression à une valeur acceptable.

Ces dispositifs sont généralement constitués d'une soupape maintenue par un ressort dont la pression est ajustée à une valeur légèrement supérieure à (5%) à la pression maximale admissible. L'ouverture de la soupape laisse passer un débit qui doit être évacué à l'extérieur.

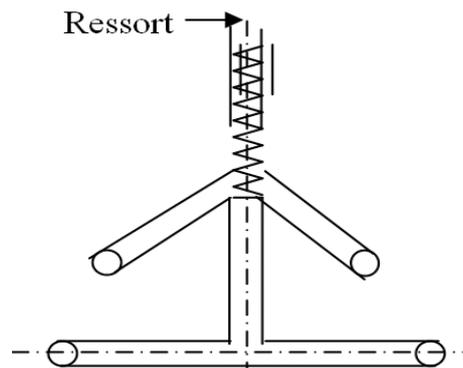


Fig. III.6 : Soupape de décharge.

### III.6.2.3-Soupapes d'aération ou de purge d'air ou ventouses:

Elles ne sont mises en œuvre que là où d'autres mesures ne sont plus possibles. Leurs inconvénients sont les suivants :

- Nécessité d'une maintenance régulière,
- En cas de disposition incorrecte et de montage non conforme, elles peuvent provoquer des coups de bélier aggravés,
- Dans certaines conditions, le mode de fonctionnement de l'installation peut être limité, car l'air aspiré doit ensuite être éliminé.

Les soupapes d'aération (Fig. III-7) doivent être dimensionnées avec soin. Avec des tuyauteries de diamètre important, les purgeurs doivent être placés sur des dômes afin que l'air aspiré puisse s'y rassembler.



**Fig. III-7 :** Soupape d'aération et de purge d'air avec soupape à une chambre actionnée par le liquide.

Les ventouses ont pour rôle d'évacuation de l'air des conduites et permettent en outre l'admission de l'air dans ces conduites lorsqu'on procède à sa vidange dans le cas général lorsqu'il y a apparition de la cavitation eu un point haut.

#### **III.6.2.4- Les cheminées d'équilibre :**

La cheminée d'équilibre ne peut être mise en œuvre que sur les points du système présentant de faibles hauteurs manométriques. En règle générale, elle ne saurait remplacer un réservoir d'eau sous pression d'air à la sortie de la pompe. Equipée d'un clapet anti-retour à battant dans le sens d'écoulement et d'un mécanisme de remplissage (brise-charge), elle est utilisée pour empêcher les dépressions aux points hauts des pipelines d'eau pure de grande longueur.

La sécurité d'exploitation des cheminées d'équilibre et des brise-charge est élevée, à condition que les points suivants soient respectés :

- Remplacement continu ou régulier de l'eau (hygiène),
- Filtrage de l'air d'amenée,
- Essai de fonctionnement du dispositif anti-retour des brise-charge,
- Surveillance du niveau de remplissage ou du dispositif de remplissage des brise-charge.

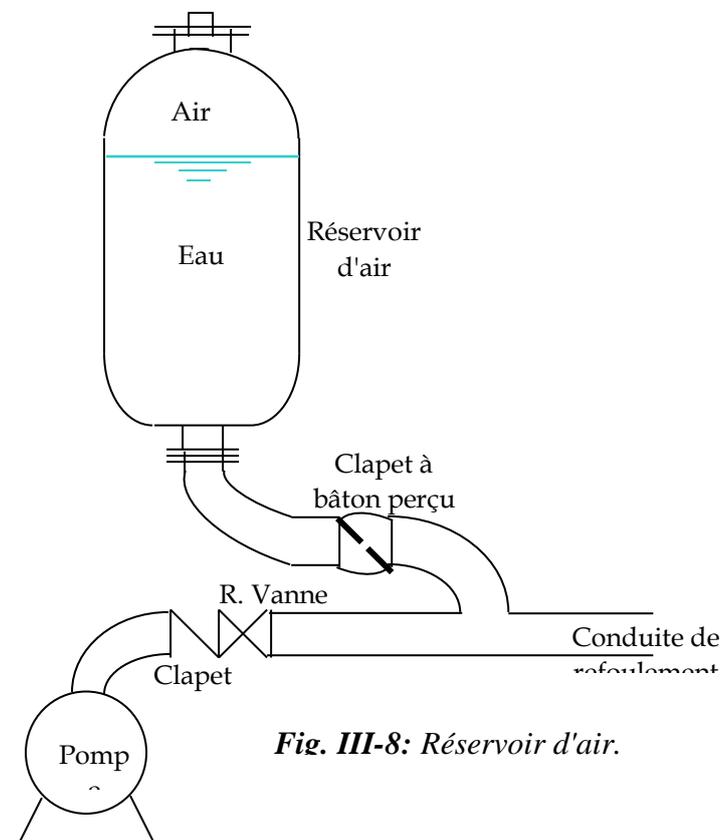
#### **III.6.2.5- Le réservoir d'air :**

##### **III.6.2.5.1- Principe de fonctionnement:**

On peut assurer une alimentation continue de la veine liquide après disjonction du groupe à l'aide d'une réserve d'eau accumulée sous pression dans une capacité métallique installée à la station de pompage et raccordée au refoulement immédiatement à l'aval du

clapet (Fig. III-8). On nomme aussi ces appareils par accumulateurs, cloches d'air, ballons d'air, réservoirs anti-bélier . Cette capacité contient de l'eau et de l'air et, en marche normale, la pression de cet air équilibre la pression dans la conduite au point considéré. A la disjonction, le clapet se ferme puisque la pompe ne fournit plus de pression

Pendant la première phase du phénomène, il se produit une dépression qui se propage de la pompe vers le réservoir de stockage. De ce fait, une partie de l'eau du réservoir anti-bélier est chassée dans la conduite. En effet, au moment de disjonction, la pression dans le réservoir d'air est supérieure à celle qui s'exerce à l'autre extrémité, au réservoir. La vitesse diminue, puis s'annule et l'eau revient en arrière et remonte dans le réservoir d'air, augmentant la pression dans la conduite de refoulement. La dissipation d'énergie de l'eau peut être obtenue par le passage de celle-ci à travers d'un organe d'étranglement disposé à la base du réservoir d'air.

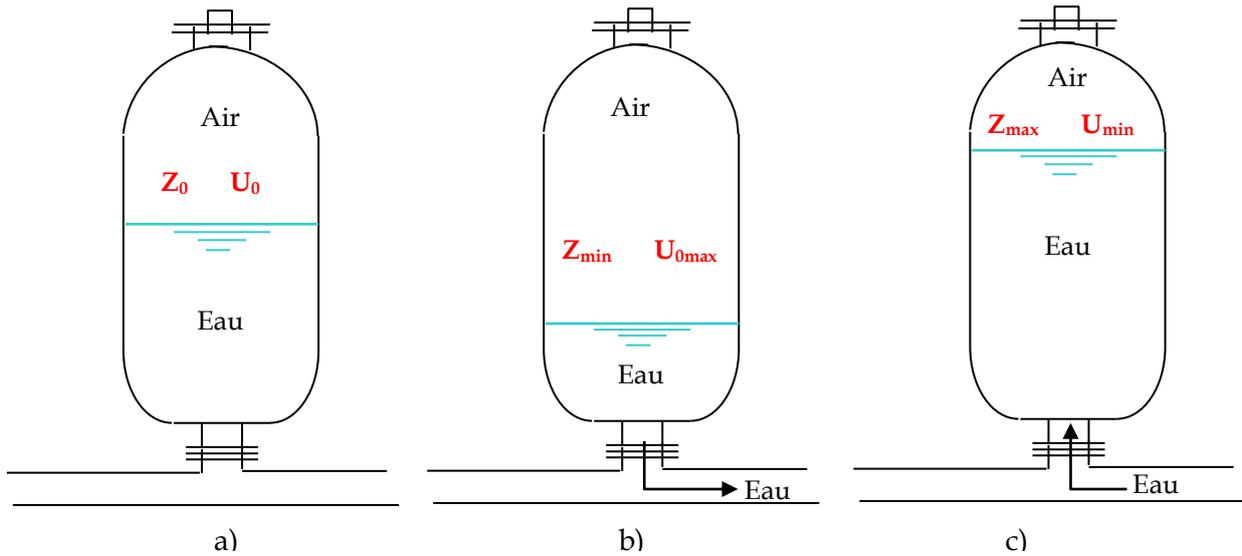


**Fig. III-8: Réservoir d'air.**

### **III.6.2.5.2-Calcul de la capacité du réservoir d'air:**

#### **III.6.2.5.2.1- Calcul simplifié d'un réservoir d'air**

En faisant abstraction des pertes de charge dans la conduite de refoulement et en considérant le phénomène comme une oscillation de masse, c'est-à-dire en négligeant l'élasticité de la conduite et la compressibilité de l'eau et en supposant l'absence d'un organe d'étranglement, on arrive à un calcul simplifié qui peut suffire pour des installations modestes (30 l/s environ ; 1000 à 1200 m de longueur de refoulement).

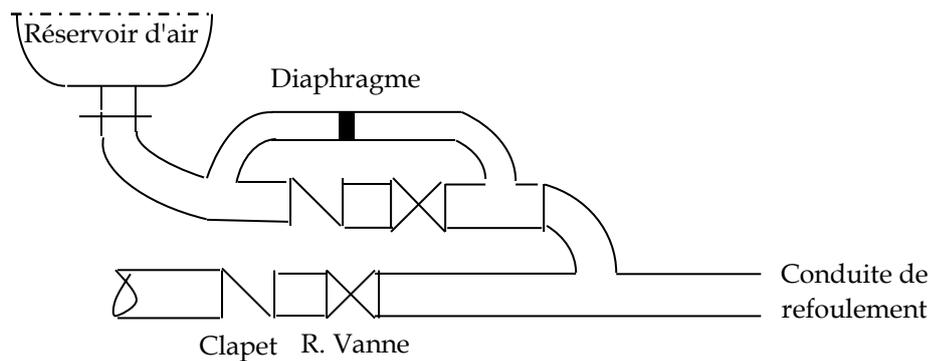


**Fig. III-9:** Calcul simplifié du réservoir d'air.

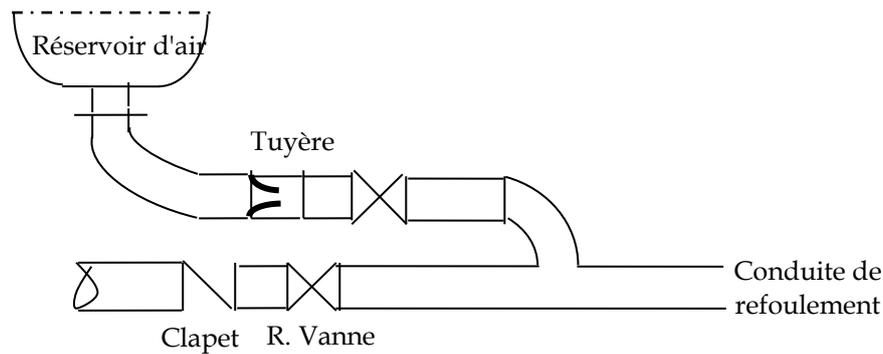
#### III.6.2.5.2.2- Calcul normal d'un réservoir d'air:

Afin de dissiper l'énergie due à la phase de surpression, il est nécessaire de disposer à la base du réservoir anti-bélier un organe d'étranglement qui amortira rapidement les oscillations et permettra aussi de réduire le volume de ce réservoir. Ce dispositif d'étranglement peut être :

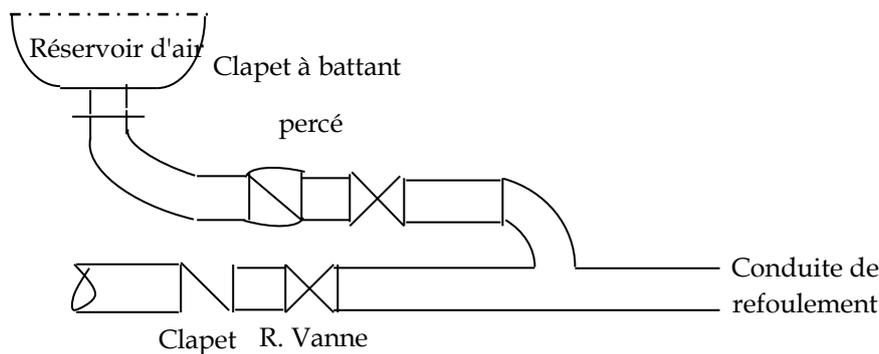
- Soit un diaphragme, (Fig. III-10)
- Soit une tuyère, (Fig. III-11)
- Soit un clapet à battant percé (Fig. III-12)



**Fig. III-10:** Etranglement au moyen d'un diaphragme.



**Fig. III-11:** Etranglement au moyen d'une tuyère.



**Fig. III-12:** Etranglement au moyen d'un clapet à battant percé.

L'expérience montre qu'il ya intérêt à avoir une plus grande perte de charge au retour de l'eau dans le réservoir d'air qu'à l'aller, dans le sens réservoir d'air-conduite. La tuyère, fonctionnant au retour de l'eau comme un ajutage rentrant de Bordant, permet, théoriquement, d'avoir une perte de charge quatre fois plus grande au retour qu'aller. Le clapet à battant percé laisse, à l'aller, passage à travers toute la section de la tubulure, tandis qu'au retour, le battant se fermant, l'eau ne peut passer que par le petit orifice de diamètre voulu qu'on ait aménagé.

**Principe de calcul :**

Pour dimensionner le réservoir d'air destiné à protéger les canalisations contre le coup de bélier, il existe des différentes méthodes. Les méthodes les plus utilisées sont la méthode graphique de Bergeron et la méthode PUECH – MEUNIER.

**III.6.3- Protection des ouvrages contre le coup de bélier :**

Vu le nombre important des ouvrages (conduites d'adduction) à protéger, on se limitera à vérifier le cas du coup de bélier pour les conduites à partir de la station de reprise

N°1 jusqu'au réservoir 1000 m<sup>3</sup> d'Oued El Ma et celles concernant les quatre forages d'Oued El Ma.

### III.6.3.1- Conduite de refoulement "Station de reprise 1 – Station de reprise 2"

La valeur maximale de coup de bélier en mètres d'eau est donnée par la relation:

$$b_{max} = \frac{a V_0}{g} \quad [\text{mce}] \quad (\text{III-34})$$

$a$  : Célérité de propagation d'onde du coup de bélier, calculée par la formule d'Alliévi :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + k \frac{D}{e}}} \quad (\text{III-35})$$

$k$  : coefficient dépendant du matériaux de la conduite. Ces valeurs sont données dans le tableau suivant.

**Tableau III.2.** Coefficient  $k$  pour divers matériaux.

Matériau	Acier	Fonte grise	Fonte ductile	Béton	Amiante-ciment	P.V.C	P.E.H.D
$K$	0,5	1	0,59	5	4	33	83

$D$  : diamètre intérieur de la conduite (mm),

$e$  : épaisseur de la conduite

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + 83 \frac{327,4}{36,3}}} = 350,70 \quad [\text{m/s}]$$

$V_0$ : Vitesse d'écoulement en régime permanent [m/s].

$$V_0 = \frac{4 Q_0}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0,09}{3,14 \times 0,3274^2} = 1,07 \quad \text{m/s.}$$

$$b_{max} = \frac{350,70 \times 1,07}{9,81} = 38,25 \quad \text{m.}$$

La pression aura comme valeur maximale:

$$H_{max} = H_g + b_{max} \quad (\text{III-36})$$

Donc le coup de bélier aura pour valeur maximale à l'instant de retour de l'onde:

$$H_{max} = 115,26 + 38,25 = 153,51 \quad \text{m} = 15,351 \quad \text{bars (cas de la surpression).}$$

La conduite choisie est en PEHD de haute pression PN 16 bars, avec une épaisseur des parois égale à 36,3 mm, on a :  $H_{max} = 15,351 \text{ bars} < 16 \text{ bars}$ ; la conduite ne nécessite pas une protection contre la surpression.

La pression minimale atteinte est de:

$$H_{min} = Hg - b_{max} \quad (III-37)$$

$$H_{min} = 115,26 - 38,25 = 77,01 \text{ m} = 7,7 \text{ bars (cas de la dépression)}$$

On a : (7,7 bars > 0 bars) ; la conduite ne nécessite pas une protection contre la dépression.

### III.6.3.2- Autres conduites de refoulement :

D'une manière analogue, les calculs sont menés pour les autres conduites de refoulement, dans le tableau suivant.

**Tableau III-3 : Calcul des pressions maximales et minimales.**

Conduite de refoulement	Diamètre intérieur (mm)	Epaisseur (mm)	Débit (l/s)	Vitesse (m/s)	Célérité (m/s)	Valeur maximale du coup de bélier $b_{max}(m)$	Hg (m)	Pression maximale $H_{max}=Hg + b_{max}(m)$	Pression minimale $H_{min}=Hg + b_{max}(m)$
Station reprise N°1 – Réservoir mise en charge	327,4	36,3	90	1,07	350,70	38,25	107,56	145,81	69,31
Station de reprise N°2 – Réservoir 1000 m <sup>3</sup>	204,6	22,7	30	0,91	350,81	32,54	106,83	139,37	74,29
Forage Oued El Ma 1 – Réservoir 500 m <sup>3</sup> existant	102,2	11,4	10	1,22	351,69	43,74	59,83	103,57	16,09
Forage Oued El Ma 2 – Réservoir 500 m <sup>3</sup> existant	102,2	11,4	10	1,22	351,69	43,74	75,83	119,57	32,09
Forage Oued El Ma 3 – Réservoir 500 m <sup>3</sup> existant	102,2	11,4	10	1,22	351,69	43,74	60,61	104,45	16,87
Forage Oued El Ma 4 – Réservoir 500 m <sup>3</sup> projeté	204,6	22,7	30	0,91	350,81	32,54	61,83	94,37	29,29

Du tableau, il ressort que les pressions maximales pour l'ensemble des conduites de refoulement examinées sont inférieures à 16 bars, par conséquent, leur protection contre la

*suppression n'est pas nécessaire. De même, pour les pressions minimales, elles sont positives, donc la protection des ouvrages contre la dépression n'est pas également nécessaire.*

### **III.7- APPLICATIONS D'UNE METHODE NUMERIQUE AU CALCUL DU COUP DE BELIER :**

#### **III.7.1- Introduction :**

*Afin d'apprécier l'importance et les avantages indiscutables des méthodes numériques et particulièrement la méthode des caractéristiques d'une part et du choix du matériau de la conduite d'autre part, dans le calcul des écoulements transitoires en charge, on examinera ci après trois exemples numériques. Le premier exemple concerne une conduite d'adduction gravitaire à caractère unique équipée d'une vanne à son aval. Les deux autres exemples concernent un cas pratique rencontré dans l'étude du système d'adduction d'eau potable de la ville d'Oued El Ma.*

*Pour illustrer ces exemples, on analysera la propagation des ondes du coup de bélier due à la perturbation des écoulements permanents initiaux dans une adduction gravitaire par une manœuvre de la vanne d'obturation située à la limite aval du système.*

*Ces exemples seront traités en résolvant le système d'équations dynamique et de continuité régissant les écoulements transitoires en charge, en employant la méthode des caractéristiques.*

*Chaque exemple sera traité en suivant les phases suivantes :*

- *Enoncé du problème,*
- *Elaboration des schémas d'adduction avec indication des annotations,*
- *Elaboration des étapes et du programme de résolution du problème posé,*
- *Mise en exécution du programme,*
- *Interprétation des résultats,*
- *Affichage des résultats sous forme graphique.*

#### **III.7.2- Hypothèses de calcul :**

*En admettant que les conditions initiales pour les différentes adductions sont simulées par des écoulements permanents, on examinera successivement les exemples énumérés ci-dessus par l'étude du phénomène des écoulements transitoires dus à une fermeture du robinet vanne installé à l'extrémité aval de la conduite, en prenant en considération:*

- *La loi de fermeture de la vanne,*
- *les pertes de charge dues au frottement,*

- L'hypothèse que les conduites soient horizontales pour simplifier les calculs, quoique ceci ne constitue aucune difficulté.

### III.7.3- Fermeture linéaire de la vanne:

#### III.7.3.1- Énoncé du problème :

En utilisant la figure III-13, et sachant que la perturbation de l'écoulement initial est due à la fermeture (instantanée ou brusque ou lente) d'une vanne située à l'aval d'une conduite d'adduction gravitaire alimentée à partir d'un réservoir à niveau constant, déterminer les paramètres  $H(I,J)$  et  $Q(I,J)$  en écoulement transitoire en tenant compte des conditions suivantes :

- Conditions initiales :  $H(I,1) = H_0 - \Delta H_i$  ;  $\Delta H_i = \frac{\lambda}{D} \frac{V_0^2}{2g} \sum_{i=1}^N \Delta x_i$  ;  $Q(I,1) = Q_0$ ;

- Condition à la limite gauche (Réservoir d'alimentation):  $H = H_0$ ;

- Conditions à la limite droite (La vanne)

$$\text{Si } t \leq T_f : Q(N+1,J) = Q_0 \left( 1 - \frac{t(N+1,J)}{T_f} \right) = Q_0 - Q_0 \frac{t(N+1,J)}{T_f};$$

Si  $t > T_f$  :  $Q(N+1,J) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Par ailleurs, il y'a lieu d'examiner les trois cas des fermetures (instantanée, brusque et lente).

#### III.7.3.2- Schéma d'adduction et notation :

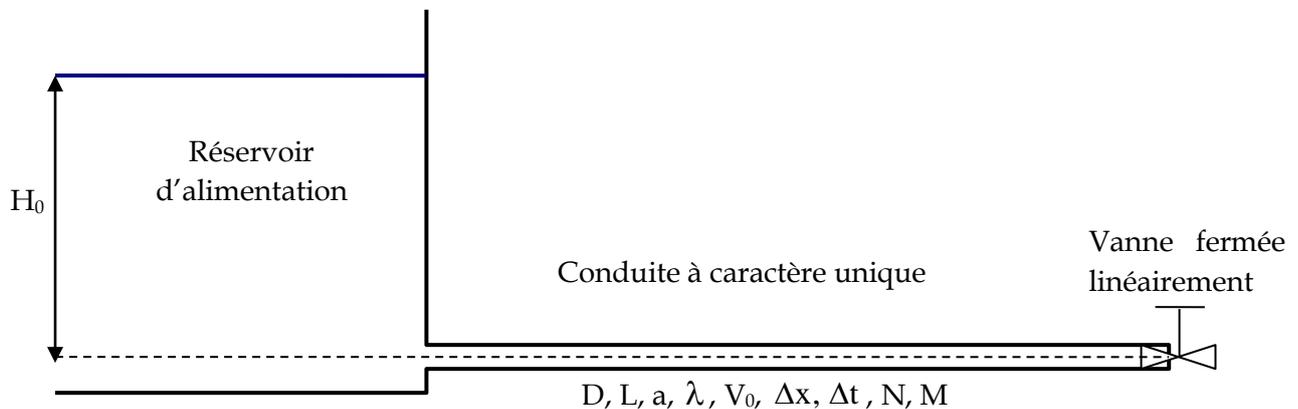


Fig.III-13: Schéma de l'adduction gravitaire à caractère unique [07].

#### Notations :

- $V_0$  (m/s) : Vitesse en régime d'écoulement permanent uniforme  
 $T_f$  : Temps de fermeture de la vanne  
 $H_0$  (mce) : Charge en régime d'écoulement permanent uniforme,  
 $D$  (mm) : Diamètre de la conduite  
 $L$  (m) : Longueur de la conduite

- $a$  (m/s) : Célérité de propagation de l'onde élastique  
 $\lambda$  : Coefficient de résistance due au frottement  
 $\Delta t$  : Pas de temps  
 $\Delta x$  : Pas de l'espace  
 $N$  : Nombre de pas en discrétisation spatiale  
 $M$  : Nombre de pas en discrétisation temporelle  
 $H(I,J)$  (mce) : Charge en régime transitoire au nœud  $I$  à l'instant  $T(J) = (J-1)*\Delta t$   
 $Q(I,J)$  (m<sup>3</sup>/s) : Débit en régime transitoire au nœud  $I$  à l'instant  $T(J) = (J-1)*\Delta t$

### **III.7.3.3- Etapes et programme de résolution du problème (fermeture linéaire de la vanne):**

Un programme en langage Fortran 90 a été établi pour résoudre le problème en suivant les étapes suivantes :

- Lecture des données et calcul de toutes les grandeurs invariables,
- Sachant les valeurs initiales de la charge et du débit en régime permanent, le programme définit les valeurs correspondant aux conditions initiales et à la zone calme,
- Les paramètres  $H(I,J)$  et  $Q(I,J)$  en écoulement transitoire sont calculés respectivement comme suit :
- A la limite amont au niveau du réservoir, en utilisant la condition à la limite gauche pour déterminer  $H(I,J)$  et l'équation (II-41) pour calculer  $Q(I,J)$ .
- Pour les points intérieurs de la conduite en utilisant les formules (II-43) et (II-44).
- A la limite aval au niveau de la vanne, en utilisant la condition à la limite droite pour déterminer  $Q(N+1,J)$  et l'expression (II-45) pour calculer  $H(N+1,J)$ .

Les calculs sont effectués suivant l'organigramme ci après :

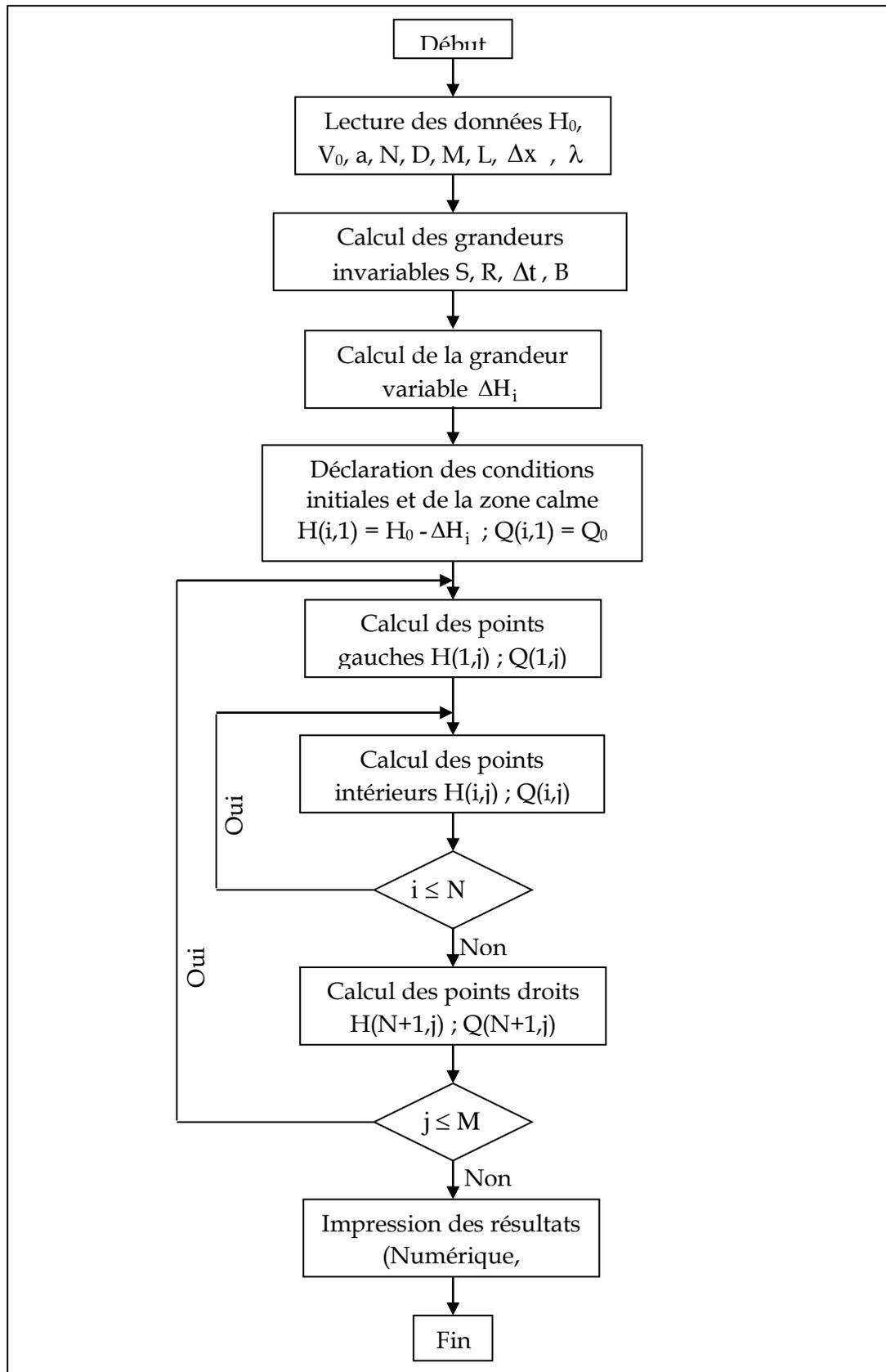


Fig. III-14: Organigramme de résolution d'une fermeture de la vanne [07].

### III.7.3.4- Application numérique :

Soit une conduite d'adduction gravitaire en fonte ductile avec les données numériques suivantes :

$$H_0 = 50 \text{ m}; V_0 = 1,20 \text{ l/s}; D = 200 \text{ mm}; e = 6.4 \text{ mm}; a = 1212 \text{ m/s}; L = 1600 \text{ m}; \\ \lambda = 0,0185; \Delta x = 200 \text{ m}$$

On va traiter les cas de fermetures suivants:

- Premier cas: Fermeture instantané :  $T_f = 0$
- Deuxième cas: Fermeture brusque :  $0 < T_f < \frac{2L}{a}$  ( $T_f = 1,65 \text{ s}$ )
- Troisième cas: Fermeture lente :  $T_f > \frac{2L}{a}$  ( $T_f = 4,95 \text{ s}$ )

### III-7-3-5- Interprétation des résultats :

Les figures (II-8 à II-12) ci-après concernant les fermetures instantanée, brusque et lente confirment les connaissances théoriques et les résultats obtenus par la méthode analytique. En effet, les allures des graphes obtenus relatifs à la variation de la charge et du débit ainsi que leurs valeurs maximales correspondent à ceux trouvés par la méthode analytique tout en tenant compte cette fois ci des pertes de charge. Ces résultats affirment que les valeurs maximales de la surpression et de la dépression correspondent aux fermetures instantanée et brusque. Ces valeurs ne dépendent que de la vitesse d'écoulement  $V_0$  et la célérité d'onde "a". Pour la fermeture lente, la pression est minimale ; elle est inversement proportionnelle au temps de fermeture de la vanne. C'est pourquoi, lors de la projection des conduites d'adduction, il y'a lieu d'adopter des robinets vannes à fermeture lente, pour limiter les effets du coup de bélier.

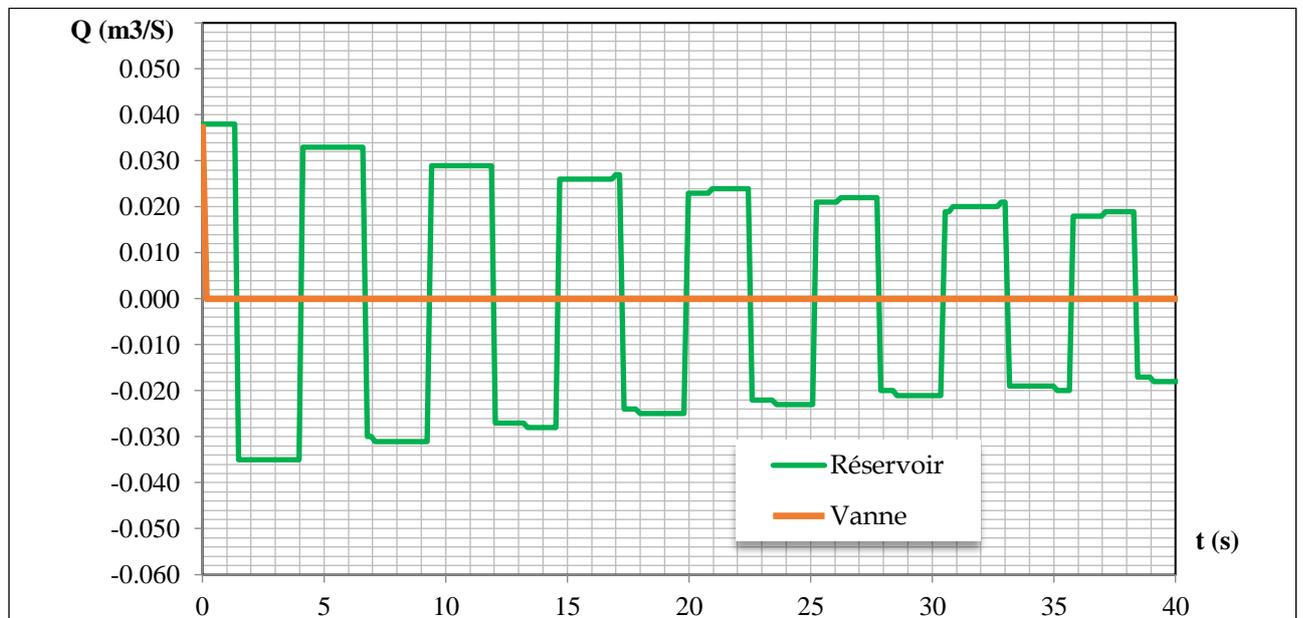
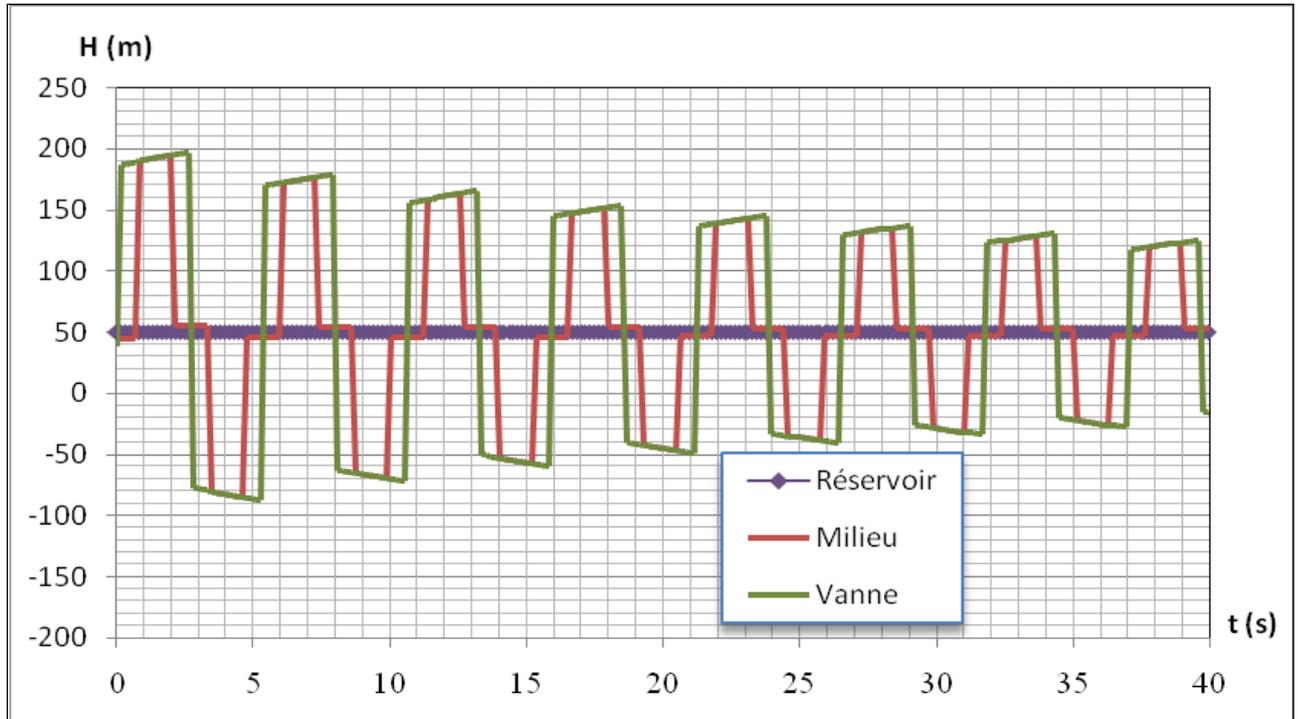
Par ailleurs, les figures (II-8 et II-9) montrent que le phénomène de surpression qui accompagne les fermetures instantanées et brusques est périodique de période  $T = 2\theta = \frac{4L}{a}$ .

Les figures II-8 et II-11 concernant respectivement la fermeture brusque et la fermeture lente confirment que les valeurs maximales de la surpression au niveau de la vanne correspondent au temps de fermeture de la vanne, soit 1,65 s pour le premier cas, et au temps  $\theta = \frac{2L}{a}$ , soit 2,64 s pour le deuxième cas, comme il a été démontré par la méthode analytique, avec un avantage cette fois ci de tenir compte des pertes de charge.

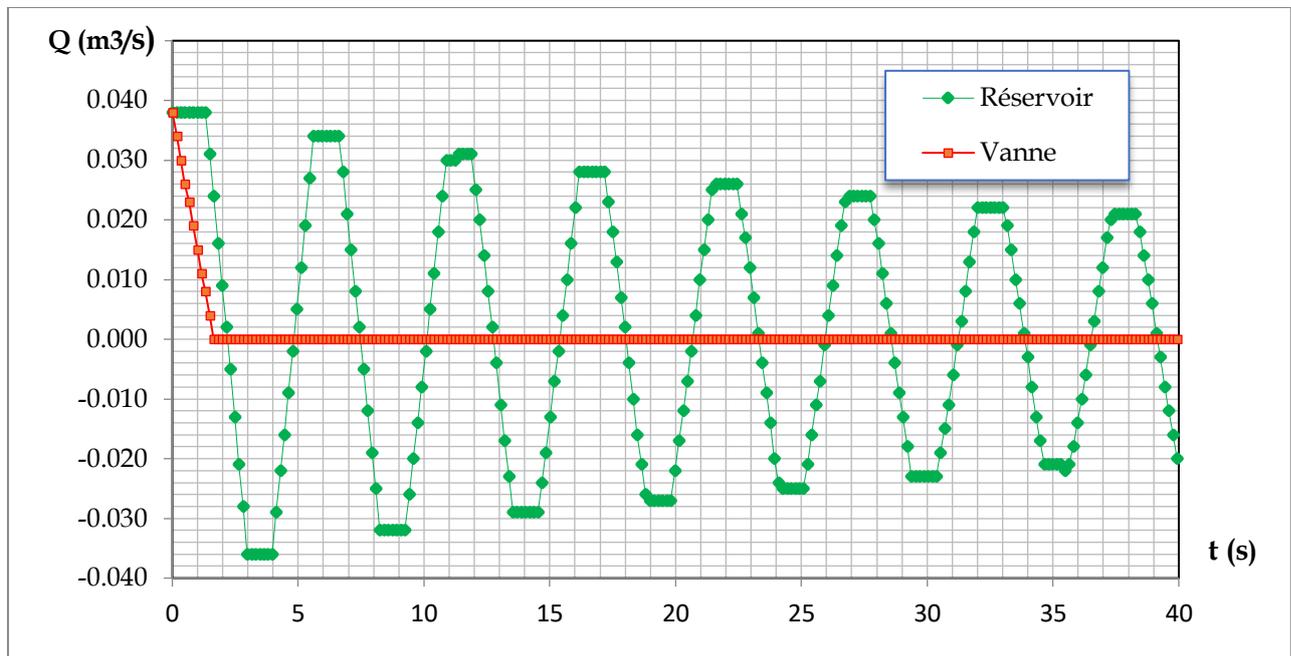
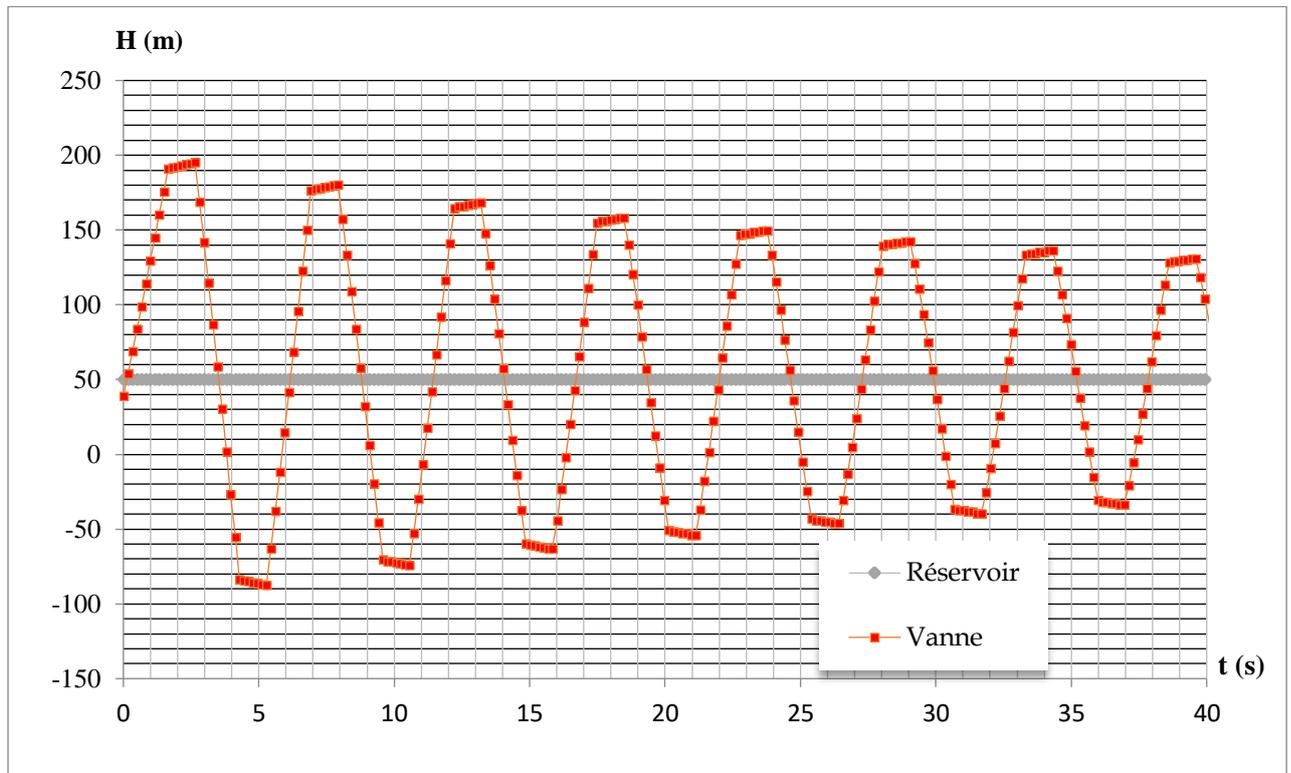
Ces résultats peuvent être considérés comme étant une validation parfaite du programme élaboré en utilisant la méthode des caractéristiques.

Les résultats graphiques sont les suivants :

### III.7-4- Résultats graphiques :

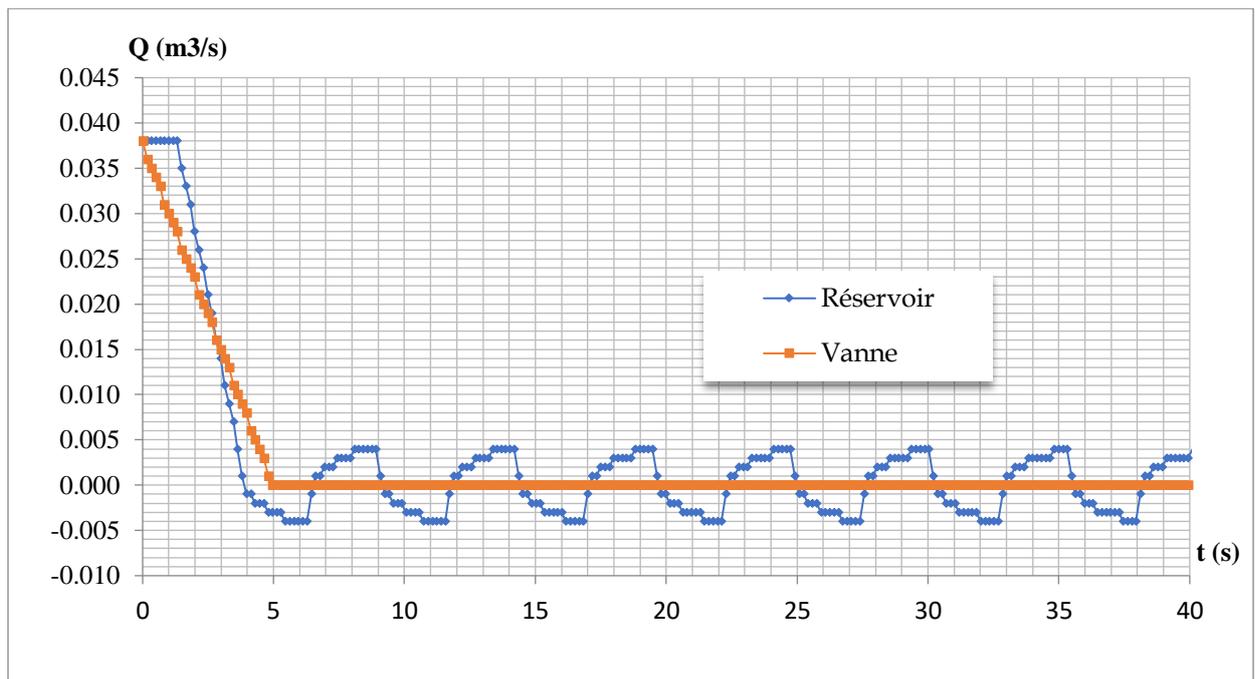
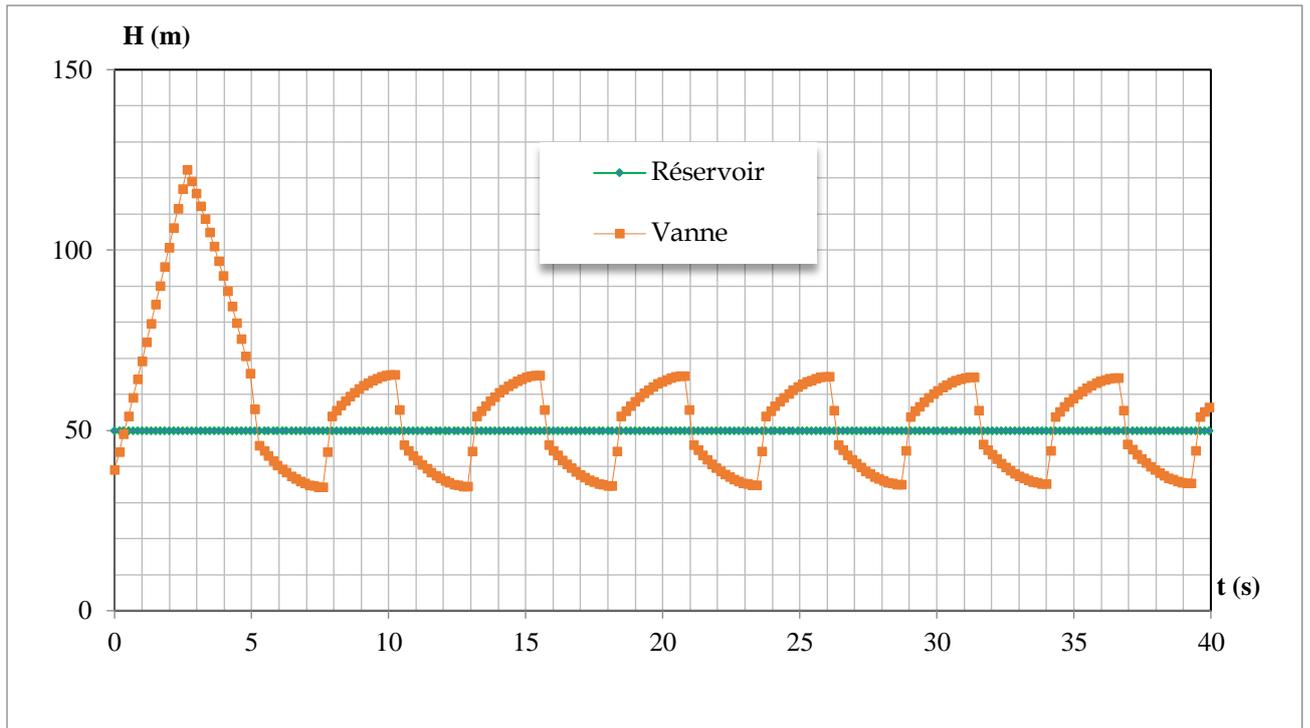


**Fig. III-15:** Fermeture instantanée: Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps ( $T = 40$  s)  $H_0 = 50$  m;  $V_0 = 1,2$  m/s;  $a = 1212$  m/s;  $D = 200$  m;  $L = 1600$  m;  $\lambda = 0,0185$ ;  $\Delta x = 200$  m;  $T_f = 0$  s.



**FigIII-16:** Fermeture brusque: Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps ( $T = 40$  s)  $H_0 = 50$  m;  $V_0 = 1,2$  m/s;  $a = 1212$  m/s;  $D = 200$  mm;  $L = 1600$  m;  $\Delta x = 200$  m;

$$\lambda = 0,0185; \quad 0 < T_f = 1,65s < \frac{2L}{a}$$



**Fig. III-17 :** Fermeture lente: Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction

du temps ( $T = 40$  s) ;  $H_0 = 50$  m ;  $V_0 = 1,2$  m/s ;  $a = 1212$  m/s ;  $D = 200$  m ;

$$L = 1600 \text{ m ; } \lambda = 0,0185 ; \Delta x = 200 \text{ m ; } T_f = 4,95 \text{ s} > \frac{2L}{a}$$

**III.7.5- Adduction gravitaire composée de deux conduites en série, reliant le réservoir de mise en charge à la station de reprise n°3 rentrant dans le cadre du système d'adduction d'eau potable de Oued El Ma :**

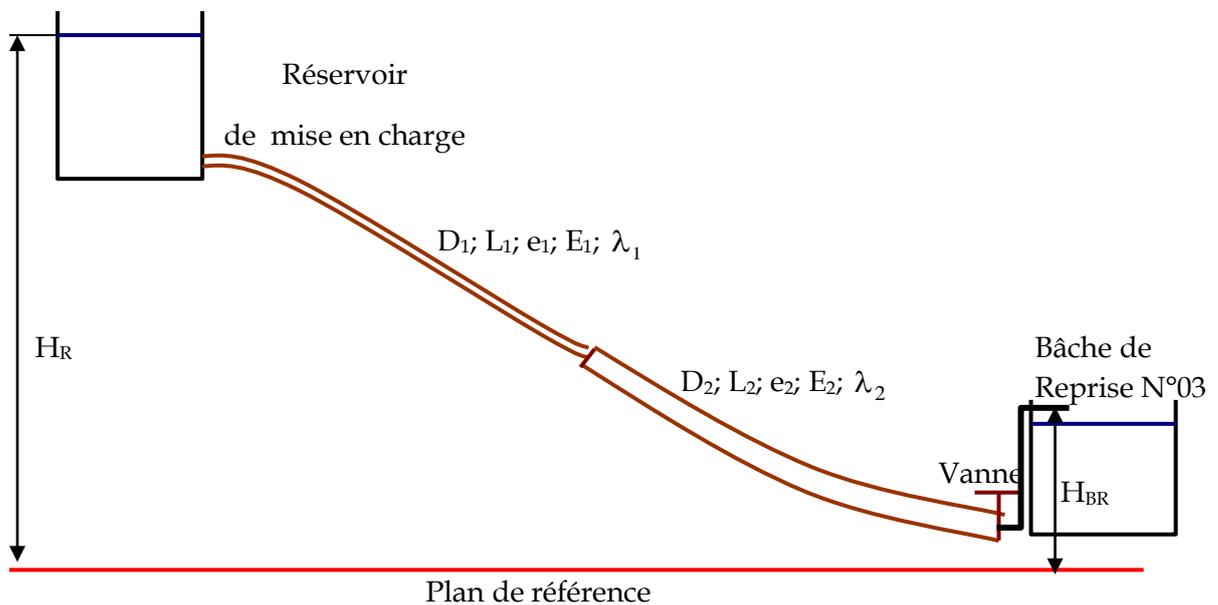
**III.7.5.1- Énoncé du problème:**

Soit une adduction gravitaire composée de deux conduites en série de différentes caractéristiques (Fig. III-18). Le réservoir est supposé à niveau constant avec une charge  $H_R$ . La vanne est de type simple et est ouverte. Calculer les paramètres d'état  $H(I,J)$  et  $Q(I,J)$  en écoulement transitoire satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

- Conditions initiales ( $t = 0$ ) :  $H(I,1) = H_0 - \Delta H_i$  ;  $\Delta H_i = \frac{\lambda}{D} \frac{v_0^2}{2g} \sum_{i=1}^N \Delta x_i$  ;  $Q(I,1) = Q_0$ .
- Condition à la limite gauche (Réservoir) :  $H(1,J) = H_R$ .
- Nœud commun :  $H_1 = H_2$  et  $Q_1 = Q_2$ .
- Conditions à la limite droite (Vanne) : fermeture instantanée.

Si  $t > 0$  :  $Q(NN,J) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $J > 1$ ).

**III.7.5.2- Schéma d'adduction:**



**Fig.III-18:** Schéma d'adduction reliant le réservoir de mise en charge et la station de reprise N°03.

**Notations :**

$H_R$  (m) : Charge au niveau du réservoir.

$H_V$  (m) : Charge au niveau de la vanne.

$Q_0$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) : Débit en régime d'écoulement permanent uniforme.

$D_1, D_2$ (mm)	: Diamètres des conduites.
$L_1, L_2$ (m)	: Longueurs des conduites.
$e_1, e_2$ (mm)	: Epaisseurs des conduites.
$E_1, E_2$ (N/m <sup>2</sup> )	: Module d'élasticité des matériaux des conduites.
$\lambda_1, \lambda_2$	: Coefficient de frottement.
$\Psi$	: Précision de discrétisation spatiale.
$K_{si}$	: Coefficient des pertes de charge locales au niveau de la vanne.
$T_{max}$ (s)	: Durée d'analyse.
$H(I,J)$ (mce)	: Charge en régime transitoire au nœud I à l'instant $T(J) = (J-1)*\Delta t$ .
$Q(I,J)$ (m <sup>3</sup> /s)	: Débit en régime transitoire au nœud I à l'instant $T(J) = (J-1)*\Delta t$ .

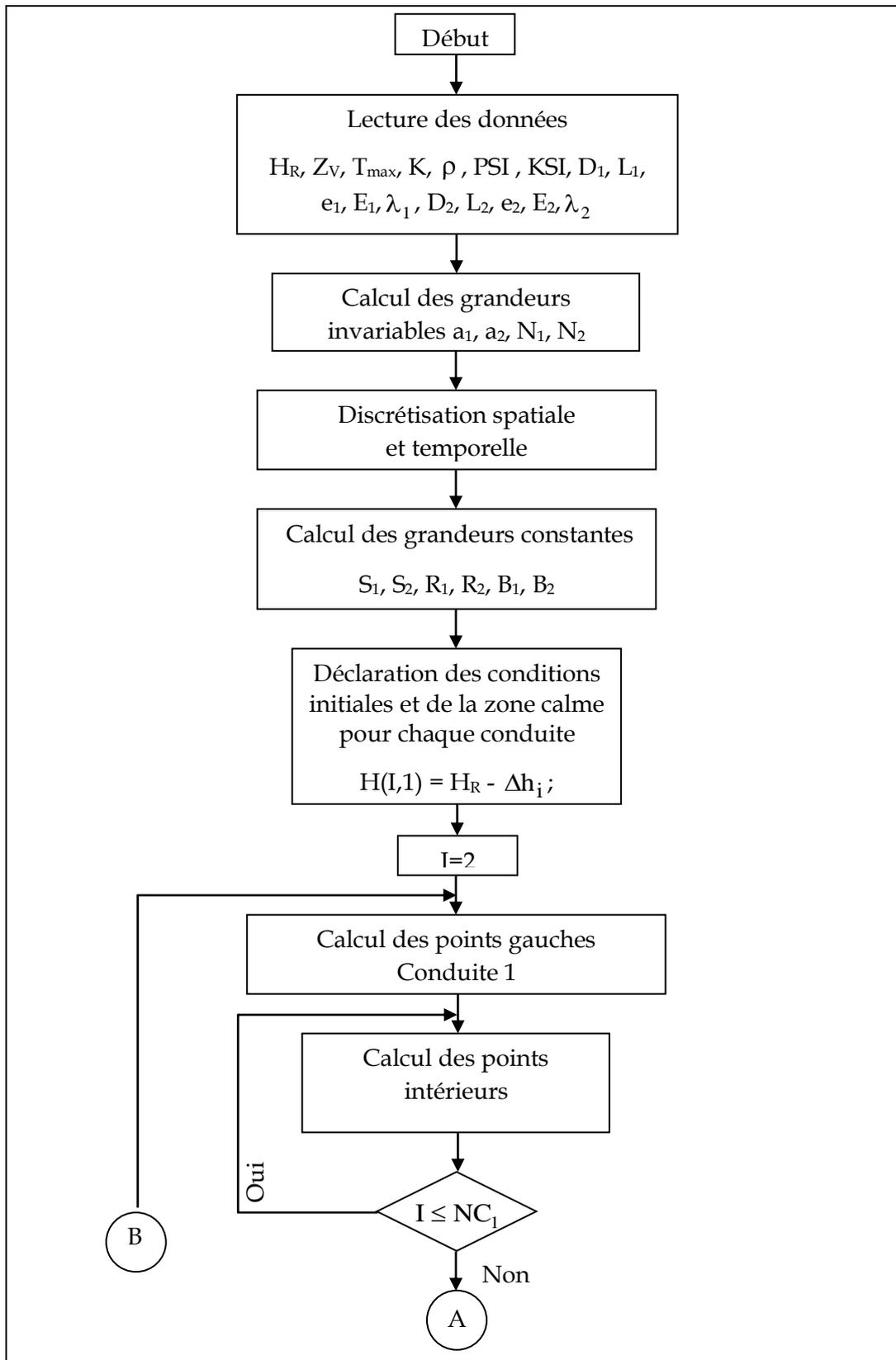
### **III.7.5.3- Etapes et programme de résolution du problème (Réseau d'adduction avec deux conduites en série):**

Un programme en langage Fortran 90 a été établi pour résoudre le problème en suivant les étapes suivantes :

- Lecture des données,
- Calcul de toutes les grandeurs invariables,
- Discrétisation spatiale et temporelle des deux conduites,
- Sachant les valeurs initiales de la charge et du débit en régime permanent, le programme définit les valeurs correspondant aux conditions initiales et à la zone calme,
- Les paramètres  $H(I,J)$  et  $Q(I,J)$  en écoulement transitoire sont calculés pour chaque intervalle de temps, conduite par conduite comme suit :
  - A la limite gauche:
    - ❖ Pour la conduite 1 à la sortie du réservoir, en utilisant la condition à la limite gauche pour déterminer  $H(1,J)$  et l'équation (II-48) pour calculer  $Q(1,J)$ ,
    - ❖ Pour la conduite 2, en utilisant les expressions relatives au point de raccordement, soient (II-50) et (II-51).
  - Pour les points intérieurs des conduites moyennant les formules (II-44) et (II-45).
  - A la limite droite des conduites, en utilisant les conditions aux limites correspondantes à savoir:
    - ❖ Pour la conduite 1, on utilise les données du point de raccordement,
    - ❖ Pour la conduite 2, on utilise les conditions aux niveau de la vanne pour calculer  $Q(NN, J)$  et l'expression (II-41) pour calculer  $H(NN,J)$ .

Les calculs sont effectués suivant l'organigramme ci après :

### DEUX CONDUITES EN SERIE



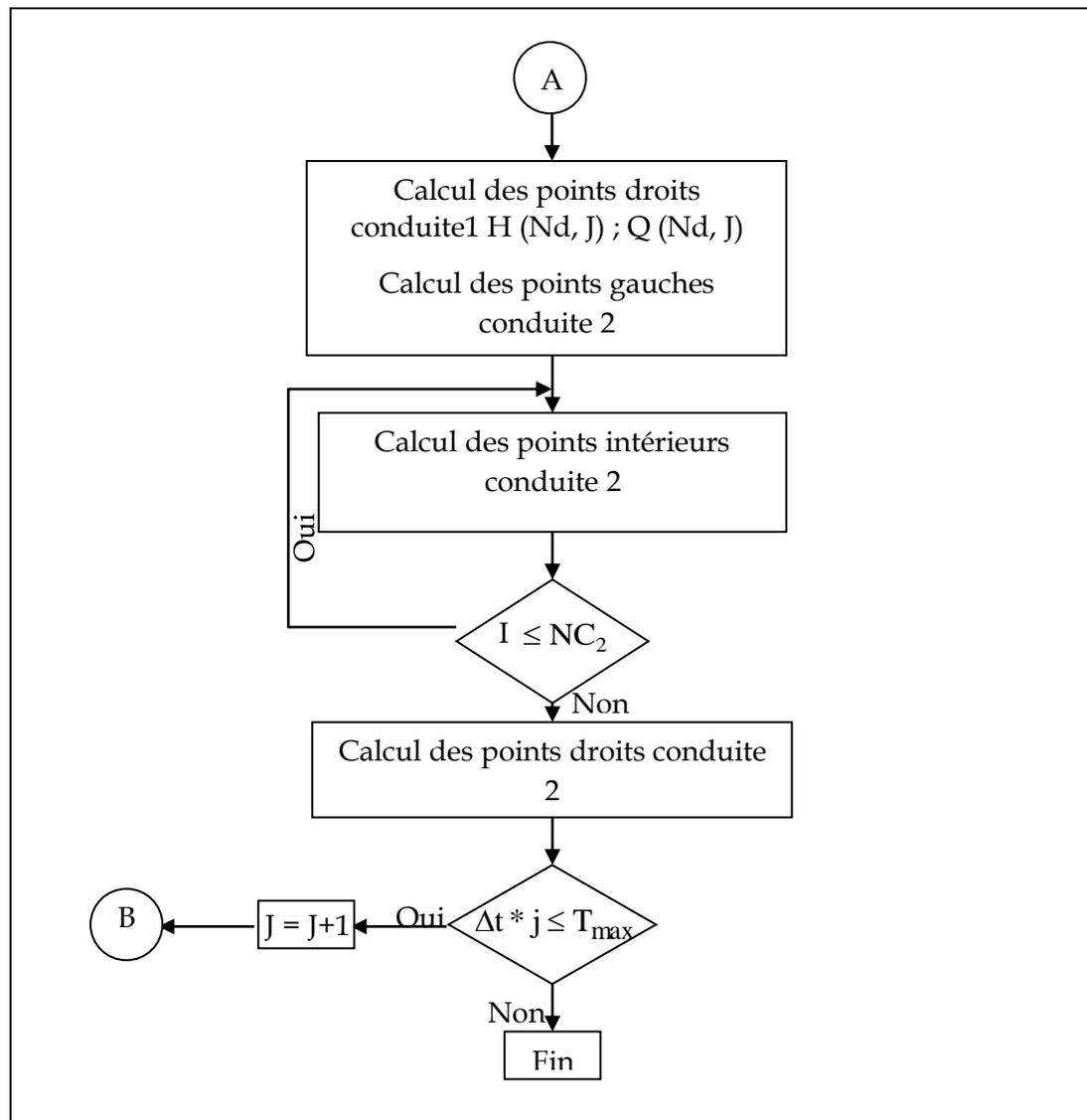


Fig. III-19 : Organigramme de résolution (Conduite en série).

#### III.7.5.4- Application numérique:

Afin de faire ressortir l'influence du choix du matériau de la conduite sur la valeur des pressions, on examinera l'adduction gravitaire en question pour deux cas :

- Cas de l'adduction en fonte ductile,
- Cas de l'adduction en PEHD

##### III.7.5.4.1- Conduites en fonte:

$$H_R = 84,67 \text{ m}; Z_V = 14,00 \text{ m}; \text{Psi} = 0,25; \text{Ksi} = 0,01; T_{\max} = 25 \text{ s}$$

$$D_1 = 200 \text{ mm}; L_1 = 804,74 \text{ m}; e_1 = 6,4 \text{ mm}; E_1 = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2; \lambda_1 = 0,025$$

$$D_2 = 250 \text{ mm}; L_2 = 1828,66 \text{ m}; e_2 = 6,8 \text{ mm}; E_2 = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2; \lambda_2 = 0,024$$

Pour tenir compte de la cavitation au niveau de la vanne, on prend  $H_V = -8,50$  m.

#### **III.7.5.4.2- Conduites en PEHD:**

$H_R = 84,67$  m;  $Z_V = 14,00$  m ;  $\Psi = 0,10$ ;  $K_{si} = 0,01$ ;  $T_{max} = 150$  s

$D_1 = 204,6$  mm ;  $L_1 = 2182,68$  m;  $e_1 = 22,7$  mm ;  $E_1 = 1,4 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup> ;  $\lambda_1 = 0,01613$

$D_2 = 257,8$  mm ;  $L_2 = 450,72$  m;  $e_2 = 6,8$  mm ;  $E_2 = 1,4 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>;  $\lambda_2 = 0,01652$

Pour tenir compte de la cavitation au niveau de la vanne, on prend  $H_V = -8,50$  m.

#### **III.7.5.5- Interprétation des résultats:**

L'exemple est très intéressant dans la pratique, soit pour l'écoulement permanent ou pour l'écoulement transitoire. En écoulement permanent, il nous permet de dimensionner la conduite d'adduction gravitaire en série reliant deux réservoirs pour véhiculer un débit donné avec une charge imposée. En cas de l'écoulement transitoire, il nous permet de permuter les diamètres de la conduite en série et de modifier leur longueur de telle manière à avoir des pressions acceptables le long de la conduite en tenant compte des pertes de charge.

L'analyse des résultats numériques et graphique nous permet de faire les observations suivantes:

Concernant le point amont au niveau du réservoir, la perturbation commence au moment de l'arrivée d'onde de surpression, soit après un temps  $\frac{L_2}{a_2} + \frac{L_1}{a_1}$ , provenant de la vanne (extrémité aval de la conduite d'adduction) qui a été fermée instantanément. Cette onde de surpression se réfléchit au niveau du réservoir avec changement de signe, ce qui provoque l'écoulement inverse de la conduite vers le réservoir. Cette situation dure jusqu'au temps nécessaire pour que l'onde de dépression atteigne la vanne et revienne au réservoir, soit après un temps  $3\left(\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}\right)$ , où on constate une valeur négative maximale du débit sortant du réservoir; après ce temps les valeurs absolues d'oscillation des débits diminuent au fur et à mesure.

Concernant le point de raccordement des deux conduites en série, l'écoulement permanent continue jusqu'au moment où l'onde de surpression, née au niveau de la vanne une fois fermée, atteint ce point caractéristique et engendre une surpression maximale très importante. Cette valeur excessive est due d'une part à la valeur maximale du coup de bélier qui dépend directement du matériau de la conduite (valeur de la célérité d'onde) et de son

diamètre (vitesse d'écoulement au régime permanent). La valeur maximale de la dépression est observée au moment juste avant que l'onde de dépression crée au moment  $2\left(\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}\right)$  au niveau de la vanne atteint le réservoir et revient au point de raccordement, soit approximativement après un temps de  $3\left(\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}\right) + \left(\frac{L_1}{a_1}\right)$  après la fermeture de la vanne.

Concernant l'extrémité aval de la conduite (au niveau de la vanne), la surpression commence juste après la fermeture de la vanne et dure jusqu'au temps  $2\left(\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}\right)$  où elle atteint sa valeur maximale. Puis, on constate, pendant la phase de dépression allant de  $2\left(\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}\right)$  jusqu'à  $4\left(\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2}\right)$  une diminution nette de la pression. Après cela, on observe le recommencement du phénomène oscillatoire qui durerait infiniment s'il n'y'avait pas les pertes de charge.

L'étude de cet exemple concret nous permet de confirmer l'intérêt que revêt la méthode numérique dans l'analyse de ce type de cas pratique. En effet, pour ce cas concret, il est possible d'examiner le cas d'une fermeture lente et chercher le temps nécessaire pour la fermeture d'organe d'obturation afin de tomber dans le cas des pressions compatibles avec les pressions optimales des conduites projetées.

Enfin, il y'a lieu de souligner l'importance du choix du matériau dans l'atténuation de l'effet du coupe de bélier. En fait, à titre d'exemple, dans le cas d'une conduite en fonte, pour l'adduction gravitaire reliant le réservoir de mise en charge à la station de reprise N°3, la valeur de la charge au niveau de la vanne est de l'ordre de 385 m (Fig. VI-37), alors que cette valeur est de l'ordre de 179 m seulement pour la conduite en PEHD (Fig. VI-40). Ceci nous permet de conclure que le choix du matériau des conduites a un rôle capital dans la protection contre le coup de bélier.

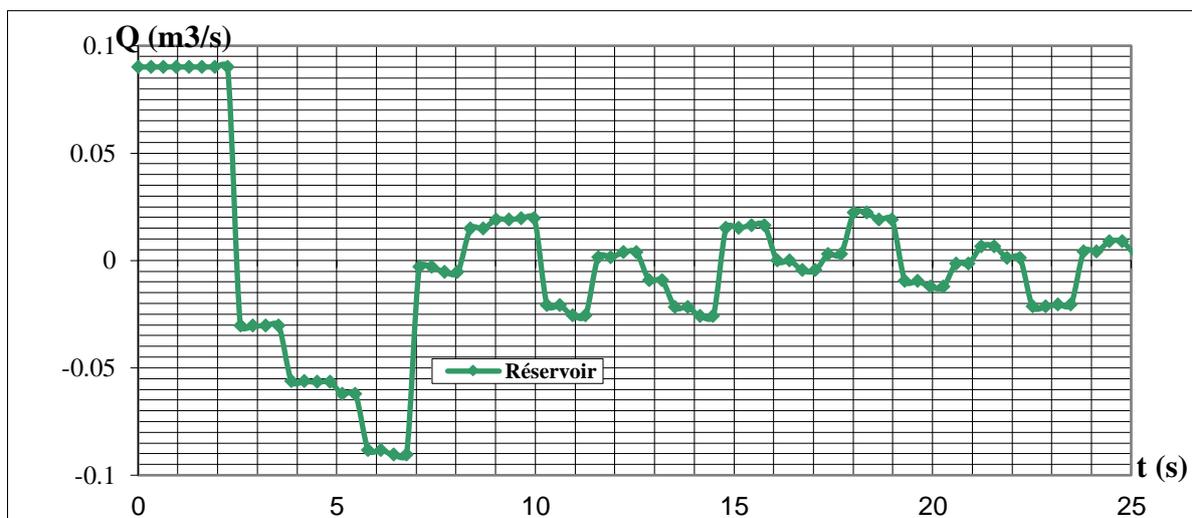
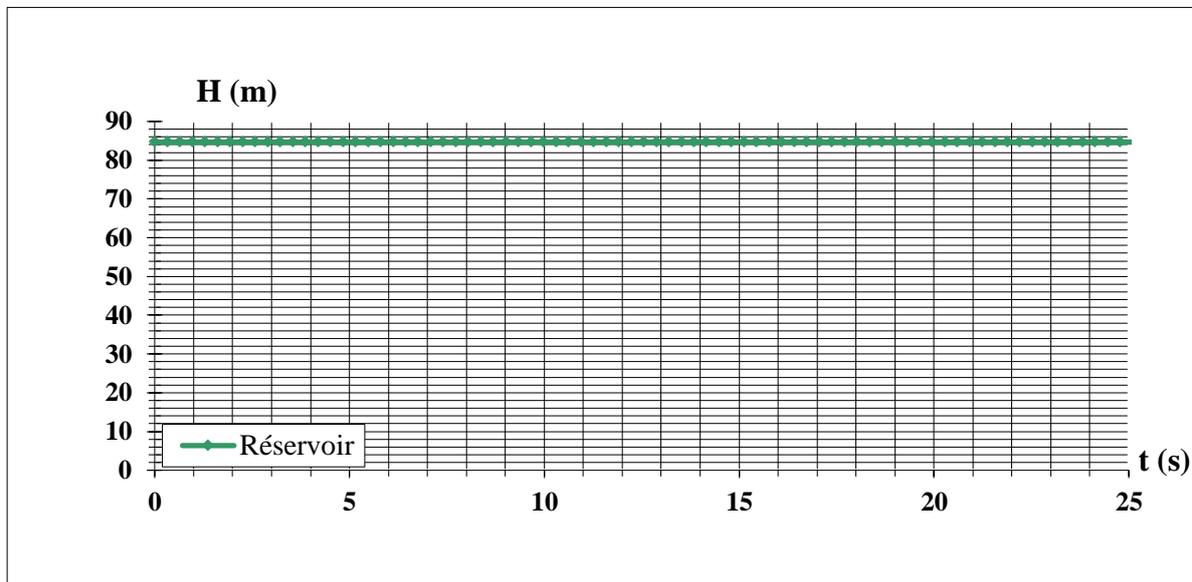
Dans notre cas, les conduites choisies sont en PEHD PN 16, donc, sachant que le plan de référence passe à 10 m au dessous de la côte de la vanne, on peut dire que, même avec une fermeture instantanée, la pression au niveau de la vanne dépasse légèrement la pression nominale des conduites projetées (dépassement de 0,9 bar), ce qui peut être réglée avec une fermeture lente de la vanne. Par contre, pour le cas des conduites en fonte, la valeur maximale de la charge au niveau de la vanne est excessive.

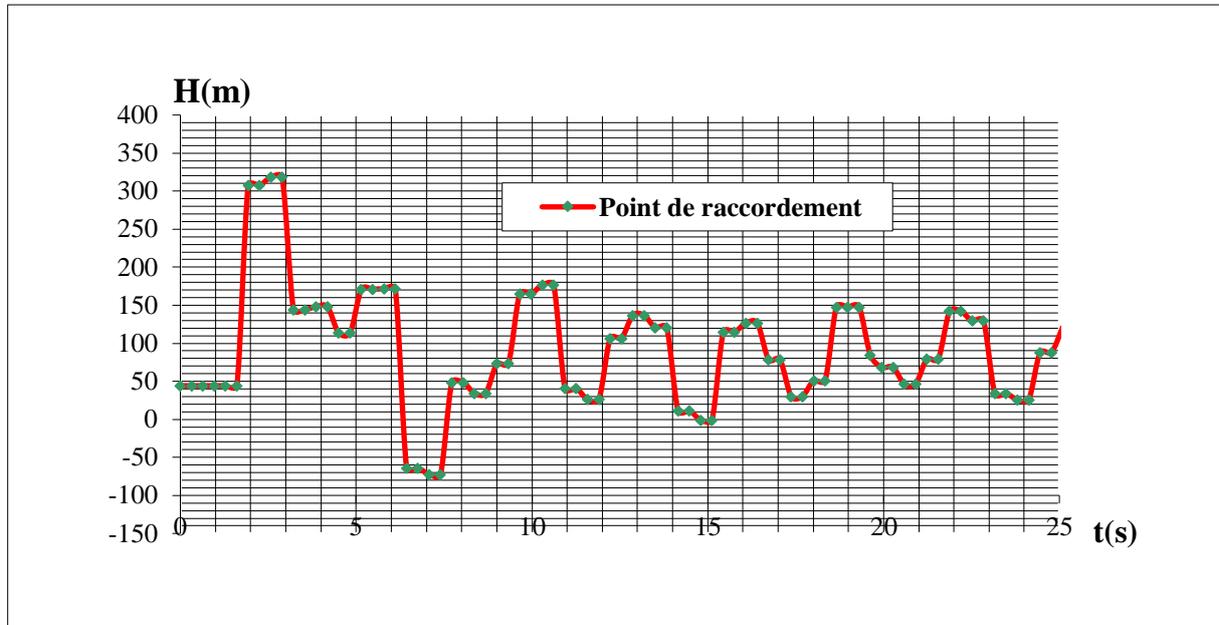
Pour les conduites de refoulement de ce projet, si les conduites projetées sont en fonte, elles nécessiteraient obligatoirement une protection contre le coup de bélier

Par ailleurs, les figures II-35 à II-37 pour les conduites en fonte et les figures II-38 à II-40 pour les conduites en PEHD, montrent que l'allure de variation des paramètres  $Q$  et  $H$  en fonction du temps est très lente pour les conduites en PEHD par rapport aux conduites en fonte, à cause de la célérité d'onde. En effet, la période d'oscillations de ces variables est très faible pour les conduites en fonte en comparaison avec les conduites en PEHD pour la même raison.

### III.7.5.6- Résultats graphiques :

#### III.7.5.6.1- Conduites en fonte ductile:



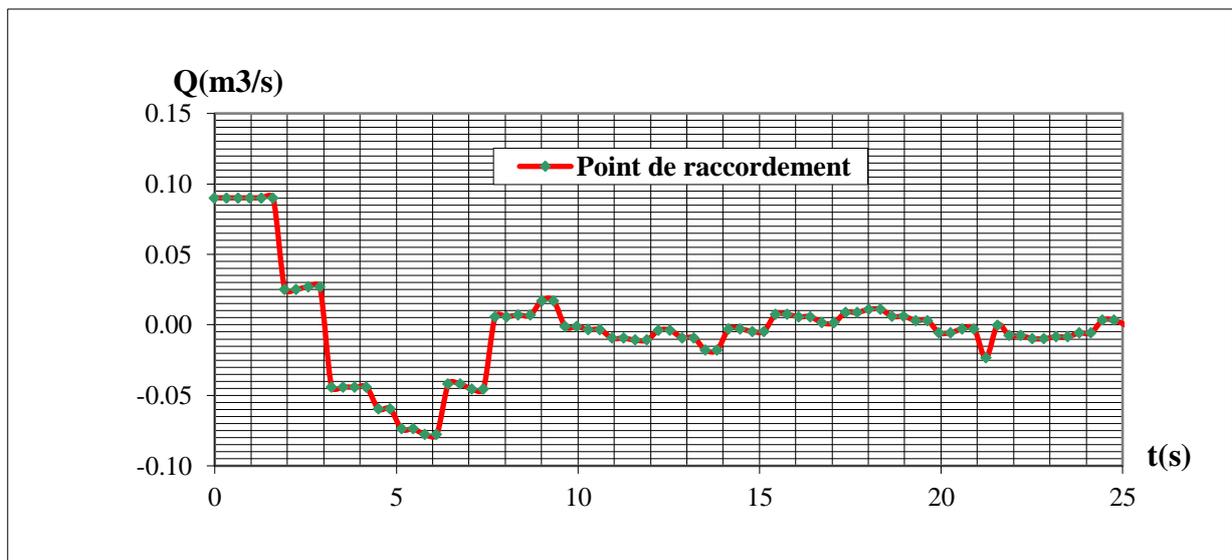


**Fig. III-20:** Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps au niveau du réservoir

$$H_R = 84.67 \text{ m}; Z_V = 14,00 \text{ m}; Psi = 0.25; K_{si} = 0.01; T_{max} = 25 \text{ s}$$

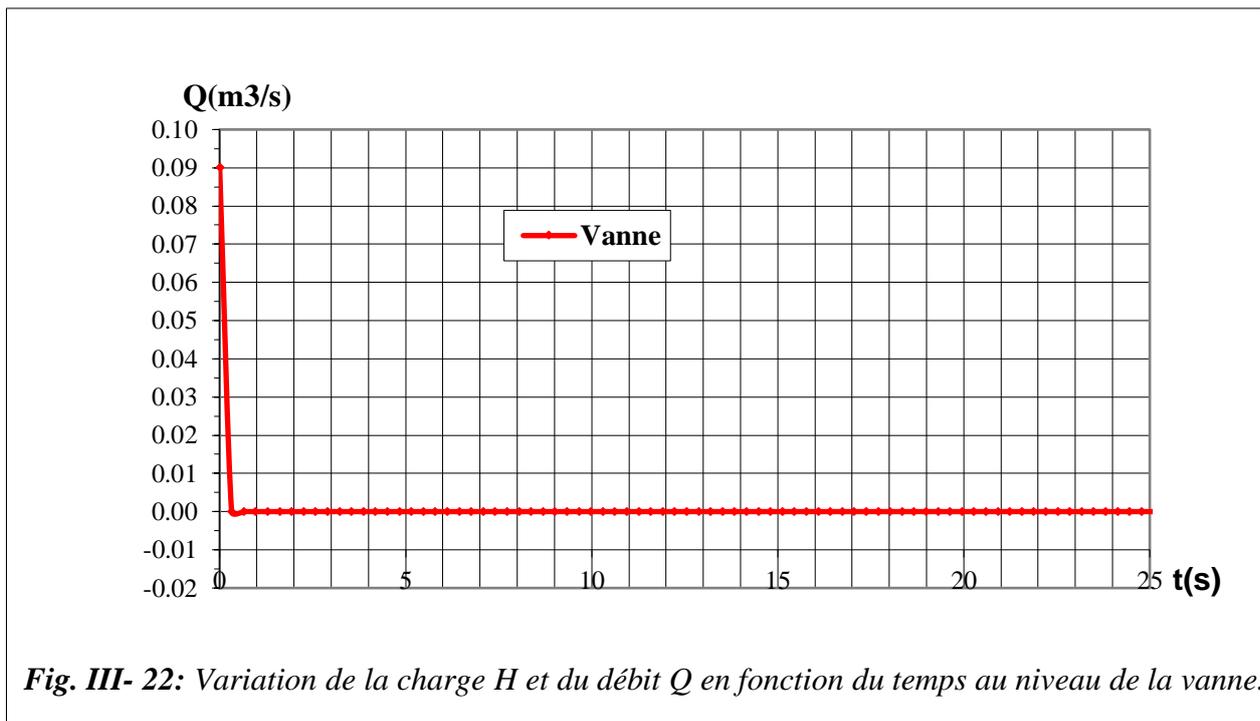
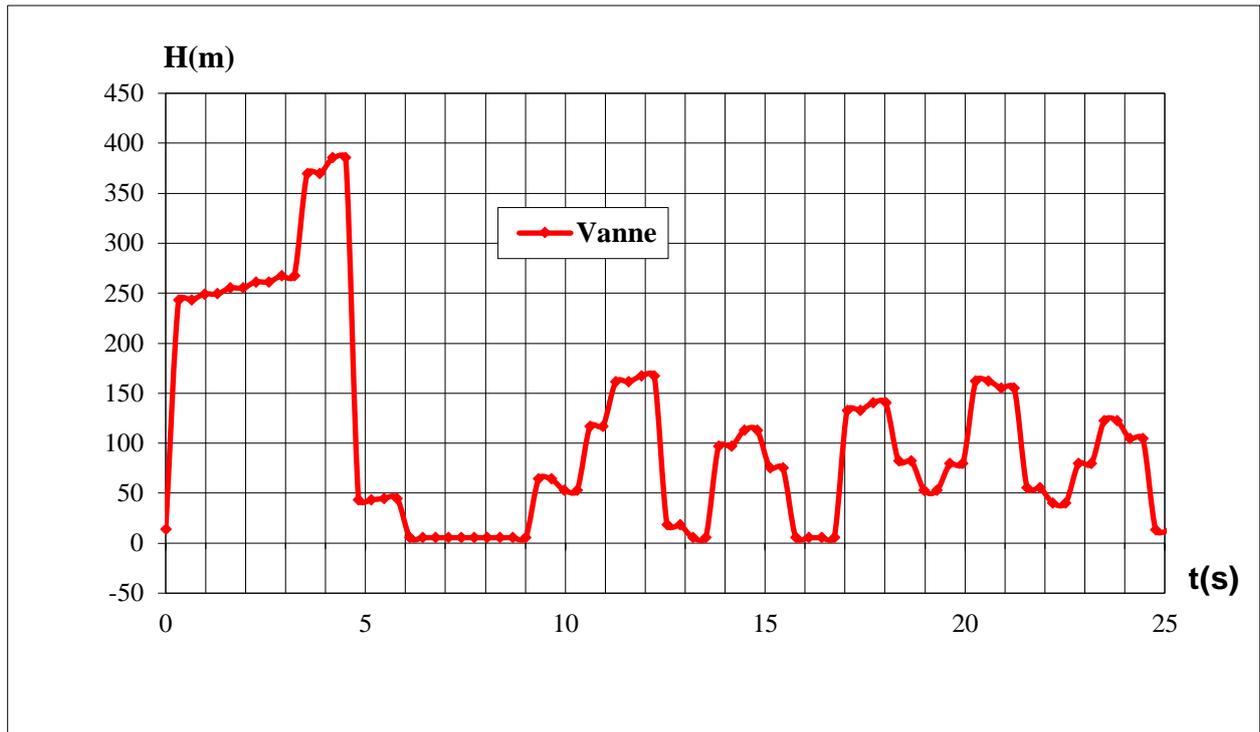
$$D_1 = 200 \text{ mm}; L_1 = 804,74 \text{ m}; e_1 = 6,4 \text{ mm}; E_1 = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2; \lambda_1 = 0,025$$

$$D_2 = 250 \text{ mm}; L_2 = 1828,66 \text{ m}; e_2 = 6,8 \text{ mm}; E_2 = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2; \lambda_2 = 0,024$$



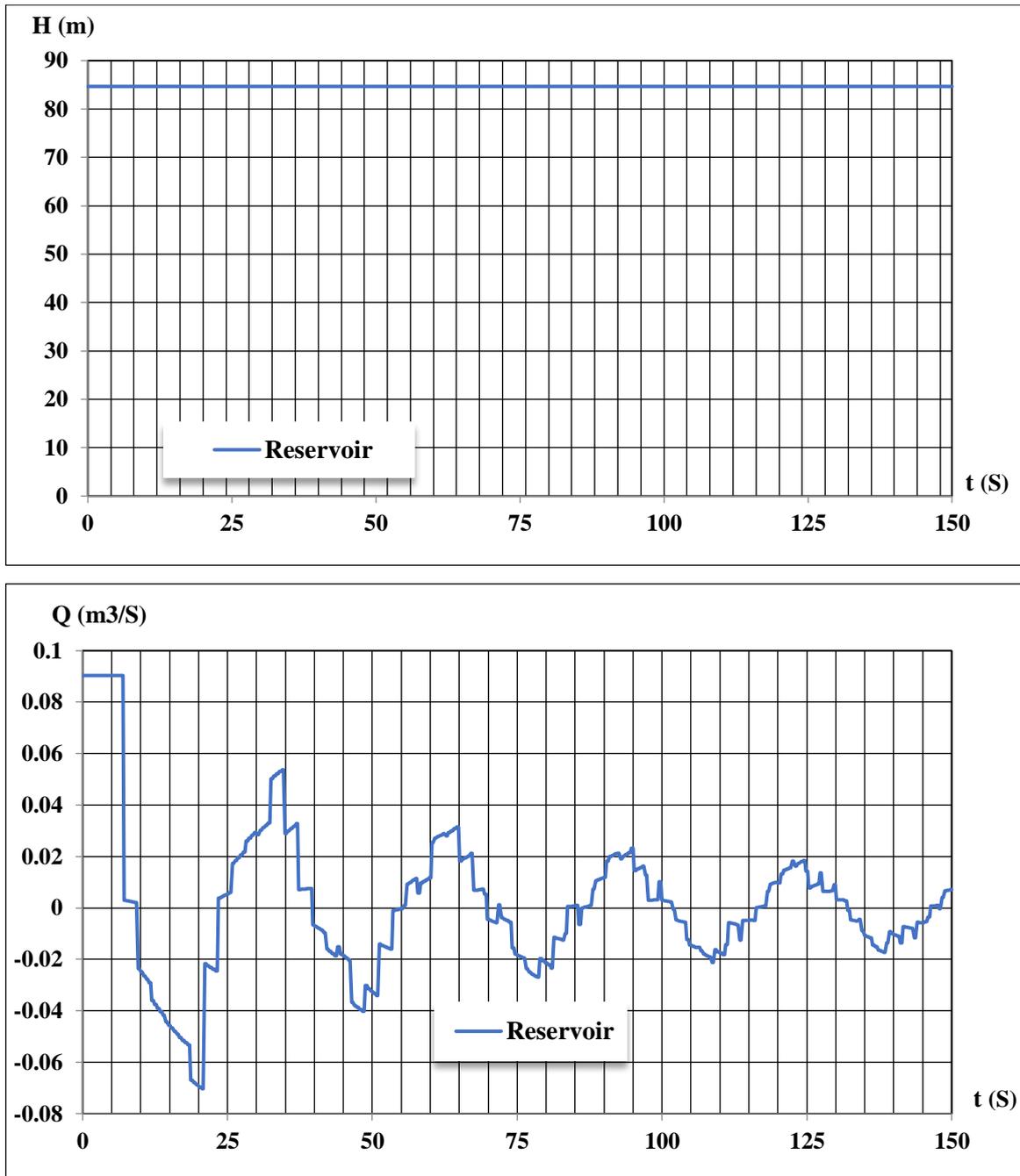
**Fig. III-21:** Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps au niveau

du point de raccordement.



*Fig. III- 22: Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps au niveau de la vanne.*

**III.7.5-6.2- Conduites en PEHD: Pour un temps de fermeture  $T= 150$  (S)**

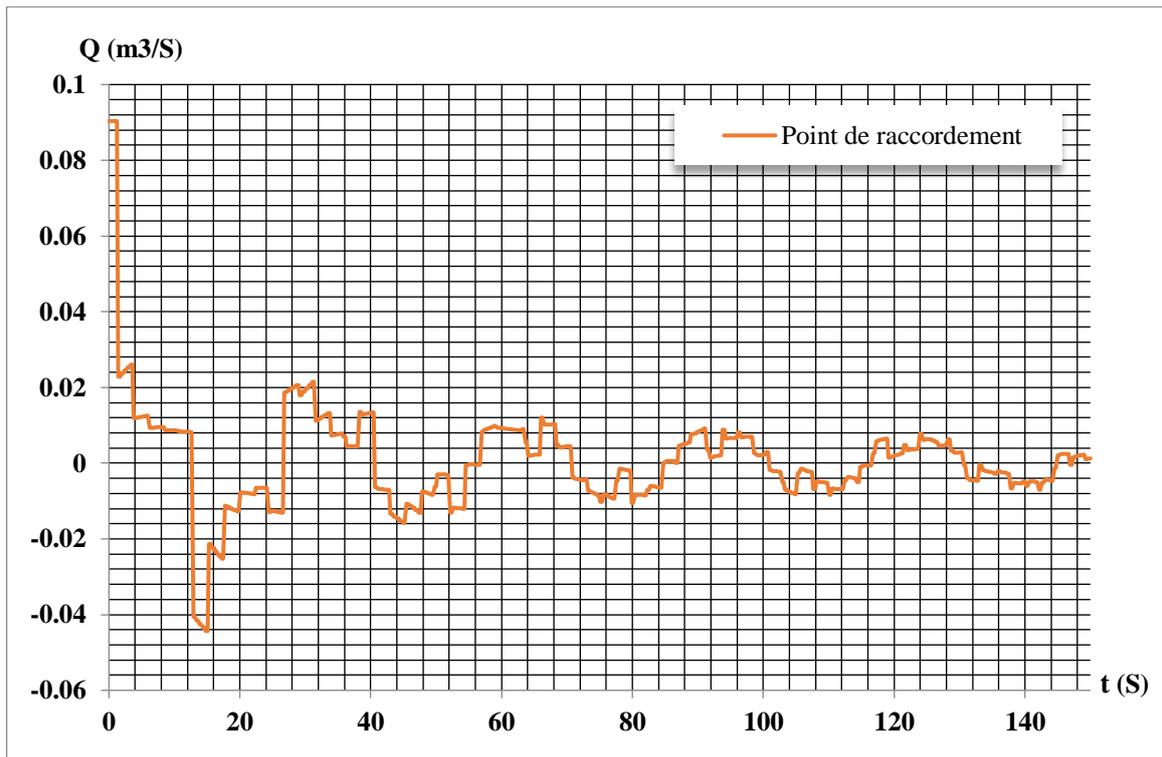
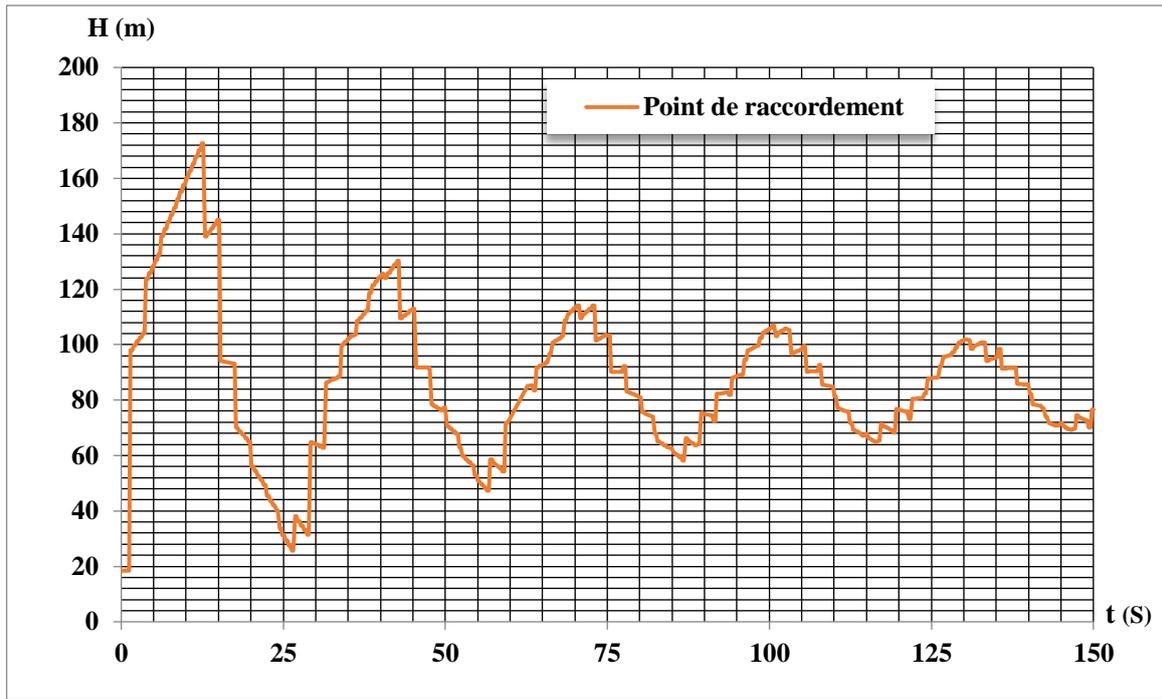


**Fig. III-23:** Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps au niveau du réservoir:

$$H_R = 84.67 \text{ m}; Z_V = 14,00 \text{ m}; T_{max} = 150 \text{ s}$$

$$D_1 = 204,6 \text{ mm}; L_1 = 2182,68 \text{ m}; e_1 = 22,7 \text{ mm}; E_1 = 1,4 \times 10^9 \text{ N/m}^2; \lambda_1 = 0,01613$$

$$D_2 = 257,8 \text{ mm}; L_2 = 450,72 \text{ m}; e_2 = 6,8 \text{ mm}; E_2 = 1,4 \times 10^9 \text{ N/m}^2; \lambda_2 = 0,0165$$



*Fig. III-24: Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps au niveau du point de raccordement.*

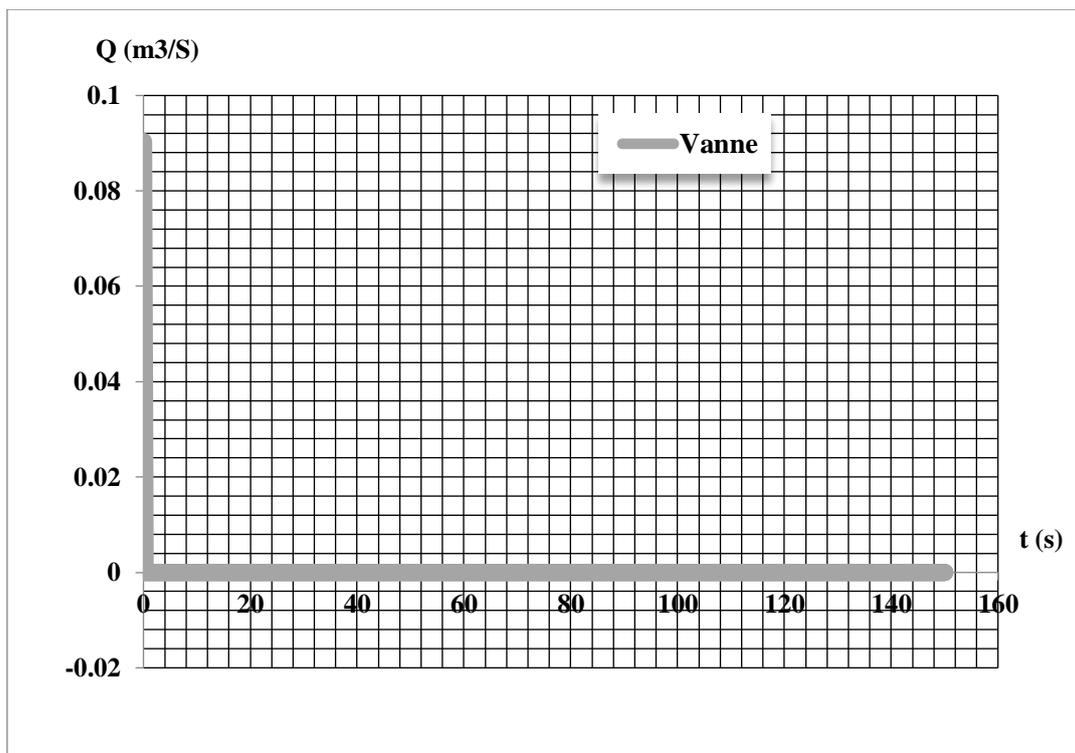
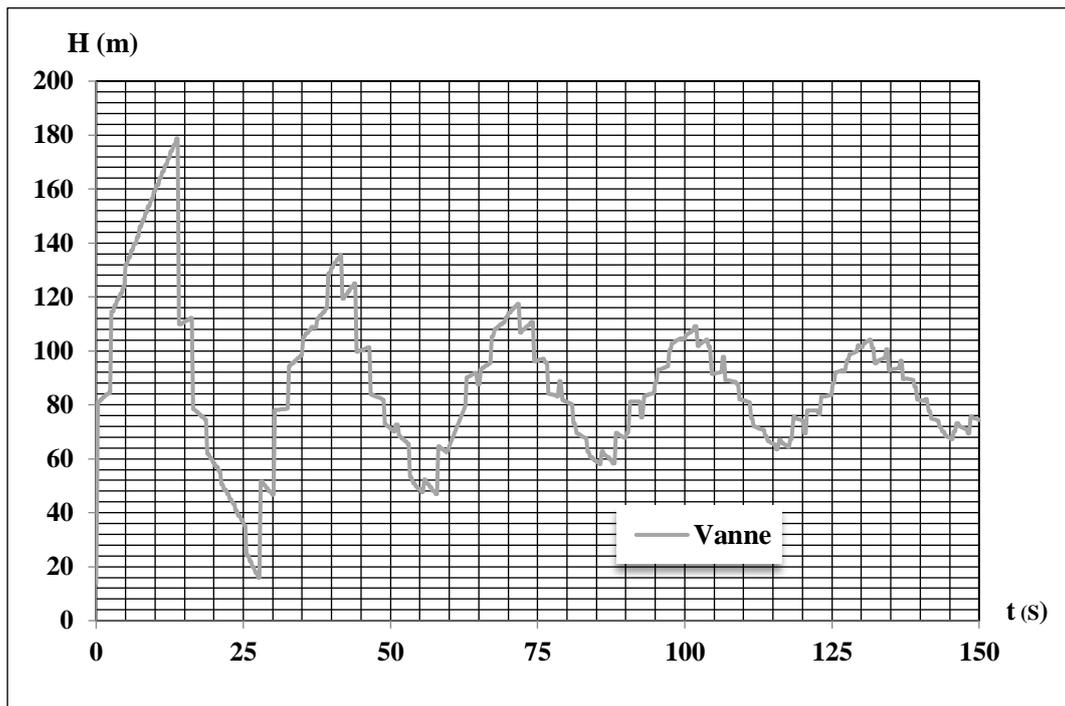


Fig. III- 25: Variation de la charge  $H$  et du débit  $Q$  en fonction du temps au niveau de la vanne.

### **III.8- CONCLUSION :**

*Nous concluons dans ce chapitre que l'expression générale de la célérité est donnée par l'expression (III.1) et que les autres formulations sont fonctions des facteurs mis en jeu (l'ancrage, déformabilité de la conduite etc....) ; et, pour une meilleure estimation de la célérité, on introduit le terme ( $dL/LdP$ ), qui représente la déformabilité longitudinale. Ce dernier fait augmenter le coefficient de déformabilité, ainsi que d'autres facteurs (effet du remblai, influence des pièces spéciales etc....).*

*Puis nous avons analysé brièvement le phénomène du coup de bélier et les méthodes utilisées pour résoudre les équations régissant les écoulements transitoires en charge.*

*Nous avons mis l'accent sur l'importance du choix du matériau des conduites plus élastiques pour atténuer les conséquences du coup de bélier.*

*En utilisant la méthode des caractéristiques, on a pu examiner un certain nombre de cas pratiques et étudier de diverses variantes en modifiant les caractéristiques des conduites, et ce dans le but de confirmer les connaissances théoriques et de choisir la solution la plus adéquate.*

*La méthode employée a permis de calculer les grandeurs physiques recherchées (Charge et débit) dans n'importe quelle section de la conduite en fonction du temps.*

*Les résultats numériques et graphiques obtenus ont un intérêt pratique incontestable. De ce fait, le modèle mathématique est le moyen le plus efficace permettant de suivre l'évolution des paramètres  $H$  et  $Q$  le long des conduites et de dimensionner correctement les ouvrages hydrauliques.*

# Conclusion Générale

## CONCLUSION GENERALE

*Dans ce travail, nous avons présenté une modélisation mathématique des phénomènes des écoulements transitoires en charge qui décrivent fidèlement le comportement des différents éléments rencontrés sur les réseaux hydrauliques, en s'appuyant sur les équations de base hyperboliques établies par Saint-Venant.*

*Nous avons vu comment évolue un régime transitoire après une manoeuvre, ainsi que la description physique du phénomène du coup de bélier, et enfin les causes qui produisent le problème.*

*Du fait que la méthode analytique se limite à l'examen des cas simples tout en négligeant les pertes de charge et que la méthode graphique devienne confuse lorsque les installations hydrauliques sont complexes d'une part, et que les méthodes numériques présentent des avantages de traiter le phénomène étudié avec des précisions voulues quelques soient la complexité du réseau, d'autre part, on opte pour les méthodes numériques (méthode des caractéristiques) dans l'examen des exemples numériques.*

*Puis nous avons analysé brièvement le phénomène du coup de bélier et les méthodes utilisées pour résoudre les équations régissant les écoulements transitoires en charge.*

*Nous avons mis l'accent sur l'importance du choix du matériau des conduites plus élastiques pour atténuer les conséquences du coup de bélier.*

*En utilisant la méthode des caractéristiques, on a pu examiner un certain nombre de cas pratiques et étudier de diverses variantes en modifiant les caractéristiques des conduites, et ce dans le but de confirmer les connaissances théoriques et de choisir la solution la plus adéquate.*

*La méthode employée a permis de calculer les grandeurs physiques recherchées (Charge et débit) dans n'importe quelle section de la conduite en fonction du temps.*

*Les résultats numériques et graphiques obtenus ont un intérêt pratique incontestable. De ce fait, le modèle mathématique est le moyen le plus efficace permettant de suivre l'évolution des paramètres  $H$  et  $Q$  le long des conduites et de dimensionner correctement les ouvrages hydrauliques.*

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] ANDRE.DUPONT "Hydraulique urbaine", Tome II Eyrolles, paris 1977.
- [2] G.BLOMMAERT "Etude du comportement dynamique des turbines francis "contrôle actif de leur stabilité de fonctionnement. Thèse de doctorat 2000.
- [3] A.LENCASTRE "Hydraulique générale", Edition Eyrolles, paris 1983.
- [4] M.ESCAND.L " Hydraulique générale", Tome II Edition, paris 1971.
- [5] VARLET.H "Usines de dérivation" Eyrolles, paris 1965.
- [6] M.BOUMARAH, A.GOURDIN " Méthodes numériques appliquées ", OPU, Edition1993.
- [7] M.MEUNIER "Les coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression", ENGREF, Paris 1980.
- [8] OURAGH.YOUCEF "Ecoulement forcé en Hydraulique" Tome II OP, 1986.
- [9] E. GONCALVES "Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO". Cours. INPG. Grenoble.57 pages.
- [10] B.GREIVELDINGER "Etude de la stabilité de réglage d'une centrale hydroélectrique en réseau séparé". Travail de diplôme, EPFL-LMH, Lausanne 2004. 122 pages
- [11] Y. VAILLANT "Simulation du comportement transitoire de turbine Kaplan". Travail pratique de Master, EPFL, Lausanne 2005. 85 pages.
- [12] INFEO. ADELIOR "Guide de modélisation Pico 2004". SAFEGE ingénieurs conseils.
- [13] C. CAMICHEL, D. EYDOUX, M. GARIEL "Etude théorique et expérimentale Des coups de bélier 1916. Essais Faits à l'Institut Electrotechnique de Toulouse et à l'Usine Hydroélectrique de Soulom. Annales de la faculté de science de Toulouse 3 série", tome 8. 251 pages.
- [14] AFCP / CETIM "Guide acoustique des installations de pompage. En collaboration avec EDF France". Publication CETIM 1997. 240 pages.
- [15] M. SEDILLE "Turbomachines hydrauliques", Tome 2, Edition Masson et Cie, Paris1966
- [16] B.SALAH, A.KETTAB, B.MASSOUH, B.MBANGANGOYE "Célérité de l'onde de coup de bélier dans les réseaux enterrés", revue la Houille Blanche, n°3/4,2001.
- [17] P.NONCLERCQ "Hydraulique urbaine appliquée" 3ème partie, Edition CEBEDEC, 1981.
- [18] B.SALAH, A.KETTAB, B.MASSOUH "Coups de bélier dans un réseau ramifié de rang 2, en refoulement", 2ème séminaire national sur l'Hydraulique, Biskara (Alger), Novembre 1996.

[19] MICHEL A.MOREL "Turbomachines - Constructions graphiques, Phénomènes transitoires", Tome II Chihab Eyrolles, 1994.

[20] ABDESSEMED.F "Simulation Numérique de la Propagation des ondes élastiques dans les conduites en Charge" Mémoire de Magister 2009.

[21] M. CARLIER "Hydraulique générale et appliquée". Edition Eyrolles – Paris 1990.

[22] BOUABDLI IMADE DINE" CONTRIBUTION A L'ETUDE DU PHENOMENE DU COUP DE BELIER " mémoire de fin d'étude 2014