

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Kheider-Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique
Référence :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الهندسة الميكانيكية
المرجع :.....

Mémoire de Fin d'Etudes
En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : Construction Mécanique

Thème

**Contrôle actif d'une plaque isotrope par
éléments piézoélectriques**

Présenté par :

CHERIF MOUAKI ABDESSATTAR

Soutenu publiquement le 17/09/2020

Devant le jury composé de :

Pr : Boumerzoug Zakaria	Président	Université de Biskra
Pr : Amrane Mohamed Nadir	Encadreur	Université de Biskra
Dr : Nine Brahim	Examineur	Université de Biskra

إهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى جميع أفراد أسرتي وأصدقائي

إلى أمي

منازة الدرب وسر النجاح ومنبع العنان

إلى إخوتي

عزوتي وسندي في الحياة

إلى عائلتي

أمل الحياة

إلى أصدقائي

رفقاء الدرب

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu tout puissant Qui m'a donné de la force et du courage pour terminer mes études dans de bonnes conditions, Malgré la propagation du **Virus Corona (Covid 19)**.

Je remercie mon Encadreur **Pr. Mohamed Nadir Amrane** qui m'a proposé ce sujet et qui m'a bien guidé tout le long de ce travail.

Je remercie les membres du jury : le président Pr. **Boumerzoug Zakaria** et l'examineur Dr. **Nine Brahim** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie **docteur Mohamed Latrache** pour son aide.

Je remercie tous les enseignants du département de génie mécanique.

Aussi, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

Résumé

Le contrôle des vibrations est désormais l'un des domaines les plus importants de l'ingénierie, tant dans le secteur industriel que dans le domaine de la recherche.

Cette étude concerne le contrôle actif de vibration utilisant des matériaux piézoélectriques, l'utilisation de ces matériaux est l'un des moyens les plus importants pour contrôler les vibrations dans les systèmes mécaniques, en raison de leurs propriétés uniques de convertissement électromécaniques.

La méthode des éléments finis est utilisée pour l'analyse modale, la dynamique du système couplé et aussi programmée sous MATLAB et simulée avec le code ANSYS apdl. La bibliothèque de ce dernier disposant plusieurs d'éléments solides (SOLID5, SOLID226...) pour modéliser les effets piézoélectriques, un maillage spécial doit être utilisé pour bien quantifier les problèmes d'interaction mécanique-électrique. La modélisation du problème d'interaction électrique / mécanique, permet de définir les matrices de système d'état utilisé dans le contrôle actif.

La méthode de modélisation appliquée pour déterminer les matrices de systèmes d'état pour les plaques en matériaux isotropes est basé sur les modes et les fréquences naturelles.

Le contrôleur LQR est implémenté sous MATLAB, pour développer un prototype de contrôle actif des vibrations de la plaque isotrope intégrant l'actionneur et le capteur piézoélectriques.

Les résultats obtenus en utilisant cette stratégie de contrôle pour le cas de la plaque isotrope sont satisfaisants.

ملخص

إن التحكم في الاهتزازات الميكانيكية سيكون من أهم المجالات المهمة في مجال الهندسة، لاسيما في قطاع الصناعة أو في مجال البحث العلمي.

هذه الدراسة تعني التحكم النشط في الاهتزاز باستعمال المواد الكهرو ضغطية. إن هذه المواد واحدة من أهم الوسائل المستخدمة في التحكم النشط في الأنظمة الميكانيكية، بسبب خصائصها الفريدة في التحول الكهروميكانيكي.

إن طريقة العناصر المتناهية استعملت في التحليل النمطي التحركي للنظام المزوج، وقد تمت البرمجة في برنامج MATLAB. والمحاكاة في برنامج انسيس ANSYS وإن مكتبة هذا الأخير تحتوي على عناصر صلبة ك SOLID5 من أجل نمذجة التأثير الكهرو ضغطي، التقسيم الخاص يمكنه استخدامه في مشاكل التداخل الميكانيكي. إن المحاكاة الرقمية لمسائل التزاوج الإلكتروني ميكانيكي، تسمح بتحديد مصفوفات نظام الحالة المستخدم في التحكم النشط.

يتم تطبيق طريقة النمذجة لتحديد مصفوفات أنظمة الحالة، للصفحة المتجانسة التي تعتمد على الأنماط والترددات الطبيعية، المنظم الخطي الترابعي LQR يثبت من أجل تطوير نموذج للتحكم النشط للصفحة المتجانسة مزودة بمنشط الحركة ولاقط كهروضغطية.

النتائج المتحصل عليها في الاستراتيجية المعنية بالصفحة المتجانسة جيدة.

Abstract

Vibration control is now one of the most important areas of engineering, both in the industrial sector and in the field of research.

This study deals with active vibration control using piezoelectric materials, the use of these materials is one of the most important ways to control vibrations in mechanical systems, and because of the unique electromechanical converting properties.

The finite element method is used for the modal and dynamic analysis of the coupled system, also programmed under MATLAB and simulated with the ANSYS code apdl. The library of the latter has several solid elements (SOLID5, SOLID226 ...) to take into the piezoelectric effects, a special mesh must be used to properly quantify the problems of electrical / mechanical interaction. The modeling of the electrical / mechanical interaction problem, allows to define the state system matrices used in the active control.

The modeling method are applied to determine the state system matrices for the plates of isotropic materials is based on natural modes and frequencies.

The LQR controller is implemented under MATLAB, to develop a prototype of active vibration control of an isotropic plate integrating actuator and piezoelectric sensor.

The results obtained in the strategy concerning the isotropic plate are good.

Sommaire

Liste des tableaux	
Liste des figures	
Nomenclatures	
Introduction générale.....	1

Chapitre I

Piézoélectricité et contrôle des vibrations

I.1 Historique.....	5
I.2 Définition piézoélectricité.....	6
I.3 Classes cristallines	8
I.4 Coefficient de couplage électromécanique	9
I.5 Applications	10
I.5.1 Capteurs	10
I.5.2 Actionneurs	11
I.6 Modes de Vibration piézoélectrique	14
I.7 Contrôle des vibrations	15
I.7.1 Contrôle passif	16
I.7.2 Contrôle actif des vibrations (ACV)	17
I.7.2.1 Définition	17
I.7.2.2 Principe du contrôle actif	17
I.7.2.3 Feedback contrôle	19
I.7.2.4 Feedforward contrôle	19
I.7.2.5 Régulateur quadratique linéaire (LQR)	21

Chapitre II

Formulation dynamique d'une plaque isotrope équipée par patches PZT

II.1 Lois de comportement d'un matériau isotrope	24
II.1.1 Champs de déplacement	24
II.1.2 Champs de déformation.....	25
II.2 Formulation fondamentale du phénomène piézoélectrique.....	28
II.3 Principe d'Hamilton	30

II.4 Obtention des matrices élémentaires	31
II.5 Intégration numérique.....	33
II.5.1 Intégration de la matrice de rigidité suivant l'axe (z).....	33
II.5.2 Intégration de la matrice de masse suivant l'axe (z).....	33
II.5.3 Intégration de matrice de couplage électromécanique et la matrice de rigidité diélectrique suivant l'axe (z)	33
II.6 Obtention des matrices globales (assemblage)	34

Chapitre III

Modélisation numérique du contrôle actif d'une plaque isotrope

III.1 Modélisation d'une plaque d'Aluminium équipée par patchs piézoélectriques.....	37
III.1.1 Description du système étudié.....	37
III.1.2 Modélisation par le code ANSYS apdl	37
III.1.3 Vérification des fréquences naturelles	41
III.2 Simulation dynamique de la plaque intelligente pour différentes localisations.....	42
A) La localisation 2	44
B) La localisation 3	45
C) La localisation 4	46
D) Comparaison les quatre localisations	47
III.3 Contrôle actif.....	47
III.3.1 Réponse de la plaque pour la première localisation.....	49
III.3.2 Comparaison entre les réponses des quatre localisations des patchs piézoélectriques dans les cas contrôlés	50
Conclusion Générale	53
Références bibliographiques.	55

Liste des tableaux

Tableau	Titre	Page
Tableau I.1	Différents modes de vibration associés à la forme géométrique.	15
Tableau I.2	Comparaison entre le feedback et le feedforwar contrôle.	20
Tableau III.1	Propriétés des matériaux de la plaque et PZT.	38
Tableau III.2	Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre.	40
Tableau III.3	Fréquences naturelles de la plaque d'aluminium et la plaque intelligentes.	42
Tableau III.4	Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre de localisation 2	44
Tableau III.5	Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre de localisation 3	45
Tableau III.6	Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre de localisation 4	46
Tableau III.7	Fréquences naturelles de la plaque intelligentes pour localisations différente.	47

Liste des figures

Figure	Titre	Page
Figure I.1	Effet piézoélectrique direct : apparition d'une polarisation électrique en réponse à une contrainte mécanique de compression.	7
Figure I.2	Effet piézoélectrique inverse : déformation d'un cube piézoélectrique soumis à un champ électrique.	7
Figure I.3	Les classes cristallines.	9
Figure I.4	(A) Maille pérovskite cubique du BaTiO ₃ , (B) Maille pérovskite cubique du PZT.	9
Figure I.5	Disque piézoélectrique utilisé comme un microphone de contact sur une guitare classique.	10
Figure I.6	(a) Poutre mince avec des patches piézoélectriques collés sur ses faces supérieure et inférieure. (b) Moment de flexion généré par l'application de deux tensions électriques opposés sur les patches.	11
Figure I.7	(a) Actionneur de forme spirale (b) Réponse fréquentielle du déplacement tangentiel de l'actionneur spirale montrant un déplacement maximal de 700µm autour de la fréquence de résonance.	12
Figure I.8	Actionneur hélicoïdal.	12
Figure I.9	Actionneur bimorphe.	14
Figure I.10	Actionneur multicouche.	14
Figure I.11	Actionneur CRESCENT.	14
Figure I.12	Configuration de contrôle passif et actif	16
Figure I.13	Amortissement avec une couche viscoélastique collée à une plaque.	16
Figure I.14	Diagramme de contrôle actif.	18
Figure I.15	Principe de feedback.	19
Figure I.16	Principe de Feedforward.	20
Figure I.17	Principe d'état feedback.	21
Figure II.1	Système de coordonnées d'un élément fini stratifié avec un matériau piézoélectrique intégré.	24
Figure I.2	Courbure d'une plaque produite par l'expansion d'une couche piézoélectrique et contraction de l'autre.	29

Figure III.1	Géométrie de la plaque équipée par patch piézoélectriques.	37
Figure III.2	Géométrie de l'élément SOLID5 (Ansys Inc. 2018).	38
Figure III.3	Maillage et conditions aux limites	39
Figure III.4	Couplage électromécanique.	39
Figure III.5	Modes de vibration de la plaque équipée par actionneur et capteur.	41
Figure III.6	Les localisations de patches piézoélectriques en la plaque	42
Figure III.7	Maillage et conditions aux limites pour différentes localisations.	43
Figure III.8	Modes de vibration de la plaque équipée par (actionneur/capteur) pour localisation 2	44
Figure III.9	Modes de vibration de la plaque équipée par (actionneur/capteur) pour localisation 3	45
Figure III.10	Modes de vibration de la plaque équipée par (actionneur/capteur) pour localisation 4	46
Figure III.11	Réponse en fréquences de la plaque en boucle-ouverte et fermée.	49
Figure III.12	Réponse en première fréquence de la plaque.	49
Figure III.13	Réponse en deuxième fréquence de la plaque.	49
Figure III.14	Réponse en troisième fréquence de la plaque.	49
Figure III.15	Réponse en fréquences de la plaque en boucle-ouverte et fermée pour quatre localisations différente.	50
Figure III.16	Réponse en première fréquence de la plaque pour quatre localisations différente.	51
Figure III.17	Réponse en deuxième fréquence de la plaque pour quatre localisations différente.	51
Figure III.18	Réponse en troisième fréquence de la plaque pour quatre localisations différente.	51

Nomenclatures

E_m	L'énergie élastique.
E_e	L'énergie diélectrique.
E_d	L'énergie d'interaction, ou mutuelle, élasto-diélectrique.
K_{15}	Coefficients de couplage pour la vibration en cisaillement.
K_{31}	Coefficients de couplage pour la vibration longitudinale.
K_{33}	Coefficients de couplage pour la vibration transversale.
K_p	Coefficients de couplage pour la vibration radiale d'un disque mince.
$\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$	Deux rotations autour des axes (x) et (y) respectivement.
u, v, et w	Champ de déplacement.
ϵ_x, ϵ_y et ϵ_z	Champ de déformation.
σ_x, σ_y et σ_z	Champ de contrainte.
$\{\epsilon\}$	Matrice de déformation.
$\{\sigma\}$	Matrice de contrainte.
[D]	Vecteur de déplacement électrique.
E_p	Module de Young de la plaque.
ν	Facteur de poisson.
\bar{w}	Déplacement selon l'axe (z).
[N _w]	Matrice de la fonction de la forme.
[C ^E]	Constantes élastiques à champ électrique constant.
[e]	Coefficients de contraintes piézoélectriques.
{E}	Champ électrique.
{D}	Vecteur de déplacement électrique.
[ξ^S]	Matrice diélectrique à contrainte mécanique constante.
Φ_z	Potentiel électrique appliqué ou détecté à travers l'actionneur ou élément capteur.
$h_{piézo}$	Epaisseur d'élément piézoélectrique.
h_p	l'épaisseur de la plaque.
h_s	l'épaisseur de la capture (sensor).
h_a	l'épaisseur de l'actionneur.

Φ	Potentiel électrique maximum à la surface externe de l'élément piézoélectrique correspondant (actionneur et capteur).
T	L'énergie cinétique.
U	L'énergie potentielle.
W _e	Le travail effectué par les forces électriques.
W _m	Le travail effectué par les forces magnétique.
f _A	Force de surface.
f _b	Force du corps.
σ_q	Contrainte électrique de surface.
$[M_{qq}^e]$	La matrice de masse élémentaire.
$[K_{qq}^e]$	La matrice de rigidité des éléments.
$[K_{q\Phi}^e]$	La matrice de couplage électromécanique.
$[K_{\Phi\Phi}^e]$	La matrice de rigidité diélectrique.
[M]	Matrice de masse globale.
[K]	Matrice de rigidité globale.
F ₀	Forces mécaniques.
{G}	Le vecteur de déplacement nodal de la structure globale.
{ Φ_a }	La tension qui est détectée par l'actionneur.
{ Φ_s }	La tension qui est détectée par le capteur.
{ Φ_{app} }	La tension appliquée.
{F _{el} }	La force électrique.
[K _{el}]	La matrice de rigidité électrique.

Introduction générale

Introduction générale

Les dernières avancées dans la science des matériaux ont permis de produire une classe de systèmes qualifiés d'intelligents ou adaptatifs. Ils ont généralement un comportement dynamique dont il est possible de contrôler ou modifier par un ensemble de capteurs et d'actionneurs en conformité avec une loi de commande intégrée. Des choix spécifiques des actionneurs et des capteurs sont dictés par les exigences de conception des systèmes intelligents. Pour les applications aéronautiques et aérospatiales, par exemple, les transducteurs de contrôle doivent être légers pour qu'ils aient un effet minimal sur la dynamique du système. De plus, les actionneurs doivent fournir l'effort nécessaire en utilisant la source d'alimentation disponible. Les restrictions sur la taille et le poids exigent également que les transducteurs puissent être capables de jouer plusieurs rôles dans la structure. Par exemple, les transducteurs qui surveillent et contrôlent les vibrations dans un fuselage d'avion peuvent être utilisés aussi comme actionneurs et capteurs pour surveiller l'état global de la structure (tests non destructifs) en temps réel.

La nouveauté apportée par les matériaux intelligents réside dans leurs capacités intrinsèques et extrinsèques qui leurs permettent dans un premier temps de répondre à des stimuli intérieurs ou extérieurs, puis d'activer en conséquence leurs fonctions correspondantes. La science des matériaux a donc évolué de l'usage des matériaux structurels inertes (comme l'acier et le béton) à celui de matériaux actifs ou adaptatifs qui ont des capacités de reconnaissance et/ou de réaction. Les matériaux actifs d'actionnement sont ceux qui permettent de convertir l'énergie électrique, magnétique ou thermique en énergie mécanique tandis que les effets de détection sont fournis par la conversion inverse de l'énergie.

Les matériaux piézoélectriques produisent une tension électrique quand ils sont soumis à une contrainte mécanique et, inversement, se déforment sous l'effet d'un champ électrique. Ce type de matériaux est largement considéré dans la conception des structures intelligentes grâce au fait qu'ils sont légers et compacts, relativement bon marché, et présentent un comportement électromécanique linéaire lorsqu'ils sont soumis à un chargement de faible intensité. Cette classe de matériaux comprend principalement des céramiques comme le titanate de barium et récemment des polymères.

Les matériaux piézoélectriques sont généralement considérés pour l'amortissement des vibrations, la réduction du bruit et le contrôle non destructif

des structures. L'ensemble de ces applications exploite le comportement linéaire de ces matériaux piézoélectriques

Les effets piézoélectriques direct et inverse favorisent l'utilisation de ces matériaux dans les applications de type capteur et actionneur. Par conséquent, le besoin de modélisation des matériaux piézoélectriques (comme pour les autres classes de matériaux intelligents) est important. La spécificité tient ici dans le couplage électromécanique, mais également dans les phénomènes non linéaires qui apparaissent à cause de la nature noncentrosymétrique de ce type de matériaux.

Cette non linéarité du comportement est parfois utile dans quelques applications telles que les mémoires FRAM (Ferroelectric Random Access Memory) qui utilisent les propriétés non linéaires des céramiques piézoélectriques pour stocker les données informatiques. La direction de polarisation de la céramique piézoélectrique (PZT en général) peut être inversée par un fort champ électrique : il s'agit du comportement ferroélectrique. Dans d'autres cas, ces effets non linéaires ne sont pas désirés car ils limitent ou dégradent les performances des composants piézoélectriques. Le comportement ferroélastique, qui se caractérise par la réorientation de la polarisation électrique sous l'effet d'une contrainte mécanique (de compression en général), peut dégrader les performances des actionneurs piézoélectriques et induit des fissures.

Le premier chapitre qui se compose de deux parties : la première partie la piézoélectricité ; dans la seconde partie est présentée les différents types de contrôle des structures.

Dans le deuxième chapitre, une formulation dynamique d'une plaque isotrope équipée par de capteur et actionneur piézoélectriques a été développée.

Le troisième chapitre décrit les différentes étapes de modélisation numérique de la plaque intelligente par le code ANSYS apdl ainsi que le contrôle actif par le code MATLAB.

Chapitre I

Piézoélectricité et contrôle des vibrations

I.1 Historique

La piézoélectricité a été découverte en 1880 par Pierre et Jacques Curie quand ils ont voulu examiner la relation entre la pyroélectricité et certaines symétries cristallines [1]. Dans des études initialement focalisées sur des cristaux de tourmaline et après étendues au quartz, sucre de canne et le sel de Rochelle, les frères Curie ont montré la génération de charges électriques en réponse aux pressions et contraintes appliquées. Ceci est l'effet piézoélectrique direct qui, pour ce type de cristaux, peut produire des tensions électriques pouvant atteindre des milliers de volts. L'effet piézoélectrique inverse a été découvert par la suite sur la base de calculs thermodynamiques, et immédiatement vérifié par les frères Curie.

Une première caractérisation linéaire des propriétés électromécaniques des matériaux piézoélectriques a été publiée en 1910 par Woldemar Voigt dans *Lehrbuch der Kristallphysik* (manuel sur la physique des cristaux) [2] et a établi la notation toujours utilisée dans les modèles piézoélectriques linéaires. En 1916, Paul Langenin a développé un transducteur piézoélectrique, constitué par un cristal de quartz pris en sandwich entre deux plaques de métal, qui fonctionne comme un détecteur sous-marin ultrasonique [3]. Les ondes sonores ont été produites par oscillation des deux plaques quand le cristal de quartz est soumis à une différence de potentiel (effet piézoélectrique inverse). Un capteur de quartz a été utilisé, cette fois, pour recevoir les échos des ondes sonores. Le temps écoulé entre l'émission d'une onde acoustique et la réception de son écho permet de calculer la distance qui sépare la source d'émission et l'objet de réflexion. Ce transducteur ultrasonique représente le précurseur des sonars modernes et illustre l'utilisation duale des matériaux piézoélectriques comme actionneurs et capteurs dans le même système.

De 1916 à 1950, la recherche a été focalisée sur le développement de nouveaux matériaux piézoélectriques et leur utilisation dans des nouvelles technologies avec des contributions intéressantes de Walter Cady qui a mis au point le premier oscillateur à quartz au début des années 1920 ouvrant ainsi la voie au contrôle de fréquence [1]. Durant cette période, la famille du KDP (phosphate monopotassique) a été découverte en 1940 et le premier matériau piézoélectrique à base de la céramique ferroélectrique BaTiO₃ (titanate de baryum) a été produit [1]. BaTiO₃ a été la première céramique ferroélectrique à être utilisée dans les applications piézoélectriques à la place des premiers matériaux naturels et a servi de précurseur au titanate-zirconate de plomb (PZT) et magnésium niobate de plomb (PMN) découverts dans les années 50 et qui sont actuellement parmi les composés ferroélectriques les plus utilisés grâce

à leurs hautes constantes diélectriques et piézoélectriques, coût de fabrication relativement modéré et large gamme de température de fonctionnement [1].

Durant les années 60 et 70, la recherche a été focalisée sur le développement de nouvelles technologies utilisant les céramiques ferroélectriques BaTiO₃, PZT et PMN, et le développement de nouveaux composés piézoélectriques qui peuvent éliminer les limitations liées à la nature rigide des piézocéramiques. Ce dernier but a été atteint en 1969 lorsque Kawai a découvert que le polyfluorure de vinylidène (PVDF) présente des coefficients piézoélectriques presque 10 fois plus importants que ceux des polymères découverts auparavant [4]. Depuis sa découverte, le PVDF est largement utilisé dans les applications de type capteur et actionneur et il est jusqu'à présent le polymère piézoélectrique le plus utilisé [1].

Depuis les années 80, la recherche a concerné le développement de nouveaux matériaux et le développement des applications industrielles, biomédicales, aéronautiques et aérospatiales de haute performance à base de composés piézoélectriques et ferroélectriques. La recherche sur les matériaux a été focalisée sur le développement de matériaux monocristallins qui présentent des déformations de l'ordre de 1% tandis que la recherche extensive sur les polymères a conduit à la production des polyimides [5], polymères élastomériques [6], et les polymères biologiques [7]. Les applications utilisant l'effet piézoélectrique direct comprennent les allumeurs de gaz, les accéléromètres utilisant des disques de PZT qui jouent un rôle central dans les systèmes d'airbag, et les capteurs basés sur des films minces de PVDF. Les applications commerciales de type actionneur comprennent les têtes d'imprimantes matricielles, les mécanismes de fermeture des caméras, et la suspension à commande électrique de Toyota (TEMS : Toyota Electronic Modulated Suspension) produite en 1989 à base de céramiques de PZT pour augmenter l'absorption des chocs [1]. Les actionneurs piézoélectriques ont joué aussi un rôle important en nanotechnologie à commencer par leur utilisation comme éléments de positionnement dans les microscopes à effet tunnel (STM : Scanning Tunnelling Microscopes) en 1982 et les microscopes à force atomique (AFM : Atomic Force Microscopes) en 1985 et leur emploi jusqu'à présent essentiellement dans toutes les applications de nanopositionnement [1].

I.2 Définition piézoélectricité

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains matériaux de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique [8]. Si le matériau n'est pas court-circuité, la charge mécanique appliquée induit une différence de potentiel à travers le matériau

(Figure I.1). Cet effet est appelé l'effet piézoélectrique direct. D'autre part, cette famille de matériaux présente également l'effet piézoélectrique inverse : ils se déforment quand ils sont soumis à un champ électrique (Figure I.2). Cette propriété trouve un très grand nombre d'applications dans l'industrie et la vie quotidienne. Une application parmi les plus familières est l'allume-gaz. Dans un allume-gaz, la pression exercée produit une tension électrique qui se décharge brutalement sous forme d'étincelles : c'est une application de l'effet piézoélectrique direct. De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation des capteurs (capteur de pression, microbalance, etc..) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur, etc..) [8].

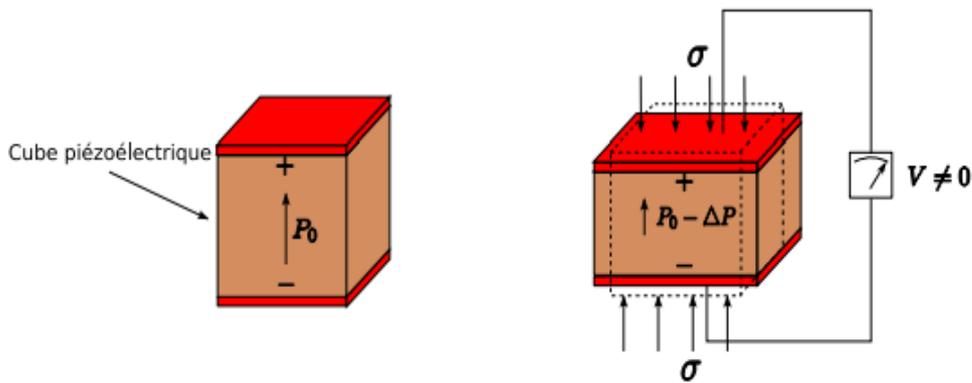


Figure I.1 : Effet piézoélectrique direct : apparition d'une polarisation électrique en réponse à une contrainte mécanique de compression.

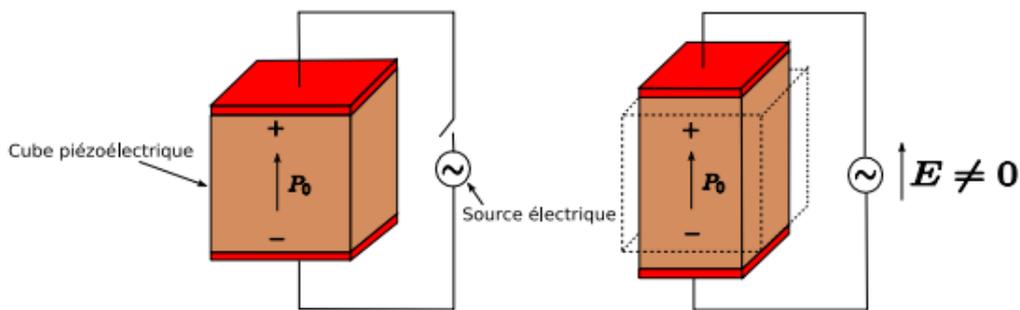


Figure I.2 : Effet piézoélectrique inverse : déformation d'un cube piézoélectrique soumis à un champ électrique

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui dans les montres pour créer des impulsions d'horloge [9]. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT, qui sont largement utilisées actuellement dans l'industrie grâce à leur coût de fabrication raisonnable et leurs constantes diélectriques et piézoélectriques intéressantes [8].

I.3 Classes cristallines

L'existence de la piézoélectricité dans un cristal est liée aux symétries de la maille cristalline. En particulier, un cristal ne peut pas être piézoélectrique si sa maille possède un centre de symétrie (maille dite centrosymétrique : les centres de gravité des charges positives et négatives coïncident avec le centre de la maille élémentaire. De manière générale, nous pouvons classer les cristaux suivant leurs symétries en 230 groupes d'espace regroupés en 32 classes cristallines [10]. Il existe 21 classes non centrosymétriques, dont 20 sont piézoélectriques.

Parmi ces classes piézoélectriques, 10 possèdent une polarisation électrique spontanée et sont dites polaires. Ces derniers cristaux sont pyroélectriques car leur polarisation spontanée varie avec la température.

Parmi les cristaux pyroélectriques, on peut distinguer les ferroélectriques pour lesquels l'axe polaire, support d'un dipôle permanent, est mobile dans le réseau cristallin sous l'influence d'un champ électrique extérieur [11].

La décomposition des 32 classes cristallines suivant ces différentes dénominations est résumée sur la (Figure I.3) [12,13].

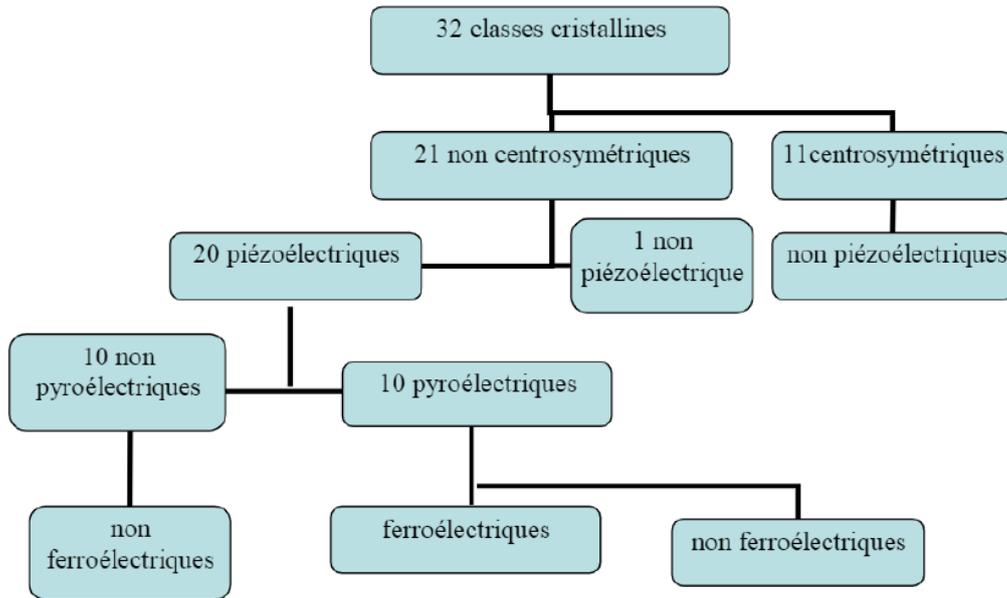


Figure I.3 : Les classes cristallines [14,15].

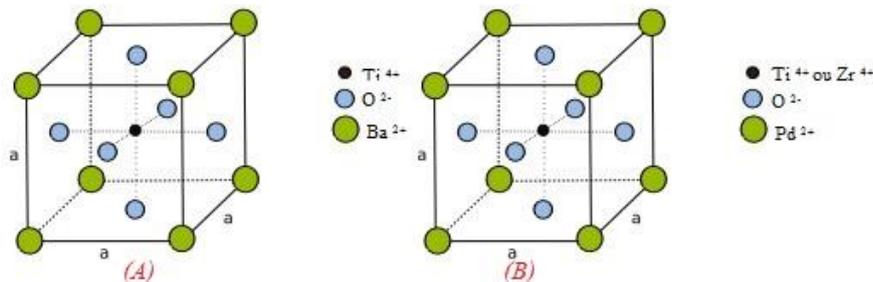


Figure I.4 : (A) Maille pérovskite cubique du BaTiO₃ , (B) Maille pérovskite cubique du PZT.

Pour les cristaux polaires, qui sont caractérisés par une polarisation spontanée initiale, les effets piézoélectriques se manifestent quand le module de la polarisation électrique change. Pour les cristaux piézoélectriques non polaires, une polarisation électrique différente de zéro apparaît seulement en appliquant une charge mécanique.

I.4 Coefficient de couplage électromécanique

Les coefficients de couplage électromécanique mesurent la capacité d'un matériau piézoélectrique à convertir l'énergie électrique emmagasinée en énergie mécanique et réciproquement [16]. Ils sont généralement notés k et sont compris en 0 et 1. Un matériau piézoélectrique idéal à un coefficient de couplage unitaire ($k=1$), au contraire un matériau passif

(non piézoélectrique) a un coefficient de couplage nul ($k=0$). La définition du coefficient de couplage en accord avec les normes IRE est donnée par :

$$K = \frac{E_m}{\sqrt{E_e E_d}} \quad (I.1)$$

Avec :

E_m : L'énergie élastique

E_e : L'énergie diélectrique

E_d : L'énergie d'interaction, ou mutuelle, élasto-diélectrique

I.5 Applications

Les matériaux piézoélectriques sont largement considérés dans plusieurs applications en raison du fait qu'ils sont légers et compacts, peu coûteux, et présentent un comportement électromécanique relativement linéaire pour des chargements de faible amplitude. Grâce aux effets piézoélectriques direct et inverse, ces matériaux peuvent être utilisés dans les applications de type capteur et actionneur. Cependant, les actionneurs piézoélectriques sont parfois délaissés à cause des faibles déplacements qu'ils génèrent. Cette limitation est une conséquence directe du caractère rigide des céramiques ferroélectriques.

Dans cette section, nous présentons quelques applications à base de matériaux piézoélectriques

I.5.1 Capteurs

Une force ou une pression exercée sur un matériau piézoélectrique génère des champs électriques et donc une tension électrique mesurable. Ceci constitue le principe de fonctionnement des capteurs piézoélectriques [8].



Figure I.5 : Disque piézoélectrique utilisé comme un microphone de contact sur une guitare classique.

Les matériaux piézoélectriques permettent de convertir des ondes acoustiques en signaux électriques comme dans le cas des microphones piézoélectriques où les ondes sonores fléchissent le matériau piézoélectrique créant un changement de la tension électrique (**Figure I.5**).

Dans plusieurs techniques de détection, le capteur piézoélectrique peut avoir la fonction duale capteur/actionneur.

Dans ce cas, il est préférable d'utiliser le terme transducteur piézoélectrique.

Les transducteurs ultrasoniques piézoélectriques peuvent émettre des ondes ultrasonores dans le corps, reçoivent les ondes réfléchies, et les convertissent en signaux électriques. Ces transducteurs sont utilisés principalement dans l'imagerie médicale et les essais industriels non destructifs (NDT).



Figure I.6 : (a) Poutre mince avec des patches piézoélectriques collés sur ses faces supérieure et inférieure. (b) Moment de flexion généré par l'application de deux tensions électriques opposées sur les patches.

D'autres applications de type capteur comprennent aussi [8,9] :

- Le contrôle des structures
- Les sonars utilisés dans la marine
- Les microbalances piézoélectriques
- Les capteurs de pression utilisés notamment dans l'automobile (pression des pneus), l'aéronautique (pression dans les tuyères)
- Les machines d'essai mécaniques (cellule de force)

I.5.2 Actionneurs

Les actionneurs piézoélectriques directs, généralement constitués d'une seule couche piézoélectrique, sont caractérisés par un déplacement mécanique faible inférieur à 100 micromètres. Ceci est dû essentiellement à la nature rigide des céramiques ferroélectriques.

Pour amplifier le déplacement mécanique généré par les actionneurs piézoélectriques directs, des solutions de forme complexe ont été proposées ces dernières années. Parmi lesquelles des actionneurs de forme spirale (**Figure I.7**) ayant une géométrie compactent proposées dans [17]. L'application d'un champ électrique radial permet d'avoir un déplacement tangential pouvant atteindre des valeurs de l'ordre de $700\mu\text{ m}$ autour de la fréquence de résonance (**Figure I.7(b)**). Des actionneurs de forme hélicoïdale (**Figure I.8**) [18]. La géométrie de l'actionneur hélicoïdal permet d'obtenir un déplacement rotationnel Δl dans la direction de la circonférence et aussi un déplacement radial ΔR dans la direction radiale quand l'actionneur est soumis à un champ électrique radial. En utilisant un actionneur hélicoïdal de longueur totale $L = 45,76\text{ mm}$, de diamètre extérieur $D_{\text{ext}} = 4.09\text{ mm}$, d'épaisseur totale $h = 0.55\text{ mm}$, formé de quatre tours et soumis à une différence de potentiel de 100 volts, il est montré dans [18] que les déplacements rotationnel et radial sont de 43 et $9\mu\text{ m}$, respectivement.

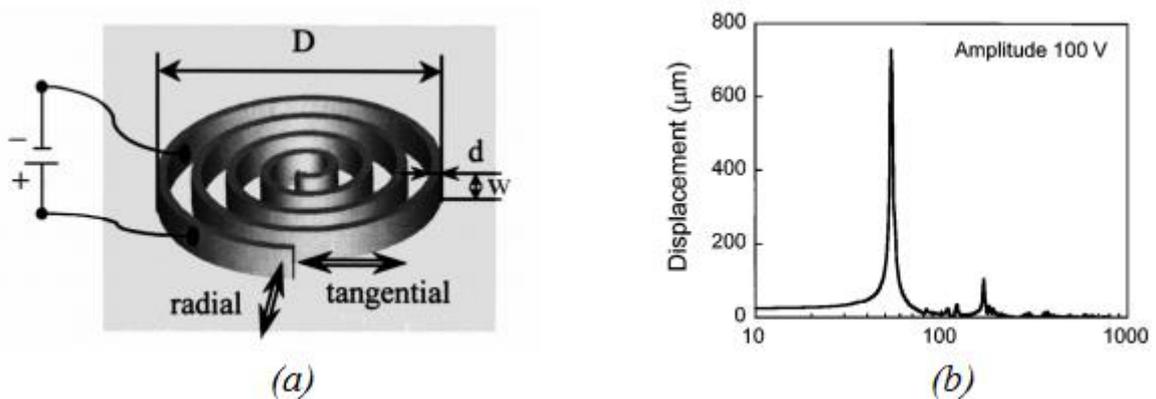


Figure I.7 : (a) Actionneur de forme spirale (b) Réponse fréquentiel le du déplacement tangential de l'actionneur spirale montrant un déplacement maximal de $700\mu\text{m}$ autour de la fréquence de résonance [17].

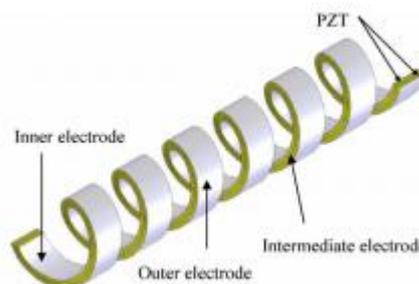


Figure I.8 : Actionneur hélicoïdal [3].

Des actionneurs amplifiés, généralement constitués de plusieurs couches, ont été également proposés. L'actionneur bimorphe (**Figure I.9**) est constitué par deux couches piézoélectriques dont l'une travaille en traction et l'autre en compression pour obtenir un déplacement transversal amplifié. L'actionneur multicouche (**Figure I.10**) est utilisé aussi pour obtenir un déplacement mécanique proportionnel au nombre de couches utilisées. Il existe également des actionneurs piézoélectriques précontraints comme l'actionneur CRESCENT (**Figure I.11**) introduit en 1997 par Chandran et al [19].

La céramique piézoélectrique et les plaques métalliques sont collées ensemble, par un agent polymérique, à une haute température voisine de la température de Curie de la céramique piézoélectrique. La technologie de cet actionneur consiste à l'utilisation de la différence de contraction thermique entre la piézocéramique et les plaques métalliques quand l'ensemble est refroidi jusqu'à la température ambiante. Cette différence de propriétés thermiques induit des précontraintes et une structure courbée [19] ce qui permet d'augmenter considérablement le déplacement mécanique et la force de blocage de l'actionneur.

Aujourd'hui, les actionneurs piézoélectriques sont utilisés dans plusieurs domaines :

- Dans les microscopes à sonde locale. Le microscope à force atomique et le microscope à effet tunnel emploient la piézoélectricité pour réaliser les petits déplacements nécessaires au balayage de la surface sondée [8,9].
- Le contrôle de vibrations (**la Figure I.6** montre deux patches piézoélectriques collés sur une poutre mince et qui peuvent être utilisés pour contrôler la vibration de cette poutre).
- La commande de certains injecteurs en automobile est réalisée grâce à des actionneurs piézoélectriques. Cette technologie permet notamment de gagner en rapidité d'injection et en consommation. De même, certaines imprimantes à jet d'encre utilisent des actionneurs piézoélectriques pour produire les fines gouttelettes qui sont propulsées sur le papier.
- Dans les applications opto-acoustique : par micro-positionnement piézoélectrique de miroir, l'ajustement de la longueur de la cavité laser peut être piloté pour optimiser la longueur d'onde du faisceau [9].

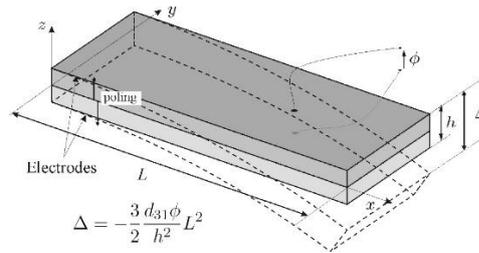


Figure I.9 : Actionneur bimorphe.

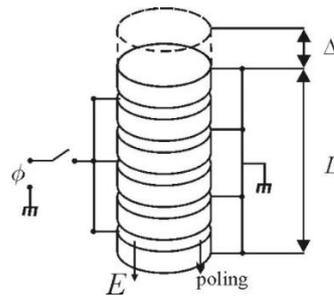


Figure I.10 : Actionneur multicouche.

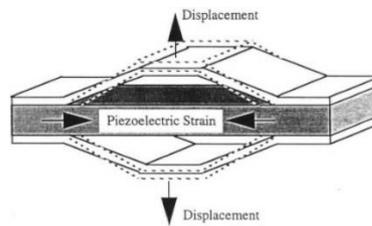


Figure I.11 : Actionneur CRESCENT.

I.6 Modes de Vibration piézoélectrique

Les céramiques piézoélectriques peuvent présenter plusieurs modes de vibration (de résonance) selon leur forme géométrique, la direction de polarisation et de la direction du champ électrique appliqué. Le (tableau 1.1) présente selon le mode de vibration l'expression des constantes piézoélectriques, diélectriques et mécaniques pouvant être mesurées [20].

mode de vibration	forme géométrique		coefficients de couplage K
mode transversal		$H, l < L/5$	$K_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}}$
mode longitudinal		$D < L/2.5$	$K_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{11}^E \epsilon_{11}^T}}$
mode cisaillement		$L > 3.5 (H, l)$	$K_{15} = \frac{d_{15}}{\sqrt{s_{11}^E \epsilon_{11}^T}}$
mode radail		$D < 10H$	$K_p = K_{31} = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{s_{11}^E}{s_{12}^E}}}$

Tableau I.1 : Différents modes de vibration associés à la forme géométrique [14,15].

L : Longueur, l : Largeur, H : Epaisseur, D : Diamètre

I.7 Contrôle des vibrations

Les vibrations mécaniques couvrent une gamme d'amplitudes allant des mètres (génie civil) à des nanomètres (mécanique de précision). Afin de réduire les problèmes causés par les vibrations et d'améliorer l'efficacité et la fiabilité des structures, un amortissement et un contrôle des vibrations indésirables sont nécessaires. Dans la littérature, des dispositifs et des moyens sont proposés pour l'amortissement des vibrations.

Ces moyens de contrôle sont classés en deux grandes catégories, à savoir : les contrôles passifs et les contrôles actifs (voir Figure 1.12) ci-dessous [21].



Figure I.12 : Configuration de contrôle passif et actif [22].

- Le contrôle passif se fait par combinaison (superposition) de couches élastiques et de couches viscoélastiques (origine visqueuse).
- Le contrôle actif est obtenu par combinaison de couches élastiques, de couches piézoélectriques ainsi que par l'application d'une loi de contrôle électrique.

I.7.1 Contrôle passif

Le contrôle passif des vibrations provient des propriétés dissipatives dû à l'intégration ou à l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes est présenté par [23,24] Cet ajout de masse peut entraîner une augmentation significative du poids des structures ce qui en fait une contrainte supplémentaire, en les rendant plus lourds et donc contraignant dans certaines applications telles que les applications aéronautiques et aérospatiales [25,26]. Ces systèmes additionnels sont couplés aux structures d'origine de telle façon que les vibrations des structures résultantes soient amorties passivement, c'est-à-dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire. Les revêtements composés de matériaux polymères viscoélastiques constituent des solutions très efficaces pour réduire les amplitudes de résonance de structures vibrantes [21].



Figure I.13 : Amortissement avec une couche viscoélastique collée à une plaque [21].

Ces matériaux ont la propriété de passer d'un état peu rigide (caoutchouteux) pour des températures élevées et des fréquences de vibration basses, à un autre rigidifié (vitreux) pour la situation opposée. De plus, dans la région de transition entre ces deux états, où leurs propriétés élastiques varient rapidement, ces matériaux sont capables de transformer l'énergie de déformation due à des contraintes extérieures en une énergie thermique, dissipant ainsi, sous forme de chaleur, l'énergie vibratoire de la structure sur laquelle ils sont collés. Par ailleurs, il a été constaté que ces revêtements viscoélastiques sont beaucoup plus efficaces quand ils sont recouverts d'une couche élastique permettant de les faire déformer en cisaillement (**Figure I.13**). Ce traitement est dénommé Revêtement Contraint Passif (RCP) [21].

I.7.2 Contrôle actif des vibrations (ACV)

I.7.2.1 Définition

Un autre moyen d'amortir les vibrations des structures, appelé contrôle actif des vibrations, a été introduit par [27,28] pour pallier la faiblesse du contrôle passif des vibrations. Le contrôle actif des vibrations repose sur trois points essentiels : actionneurs, capteurs et conception de la commande.

Un système de contrôle des vibrations est appelé actif, s'il utilise une alimentation externe pour exécuter sa fonction. Il est constitué d'un servomécanisme avec un actionneur, un capteur et un système à microprocesseur. L'actionneur applique une force à la masse dont la vibration doit être réduite. Le capteur mesure le mouvement de la masse en matière de déplacement, de vitesse ou d'accélération, selon l'application est la forme la plus simple de mouvement périodique grâce à laquelle le mouvement réel ou observé [29].

I.7.2.2 Principe du contrôle actif

Un système de contrôle est dit « actif » si un ou plusieurs actionneurs appliquent des forces sur une structure selon une loi de contrôle en utilisant une source d'énergie externe pour leur fonctionnement. Ces forces peuvent être utilisées pour ajouter ou dissiper l'énergie de la structure à contrôler. Afin de construire un tel système [21], il existe deux approches radicalement différentes :

La première consiste à identifier la perturbation qui crée les vibrations pour l'annuler en lui superposant une excitation "inverse". Cette stratégie de contrôle actif est appelée contrôle

par anticipation (feedforward). Elle est surtout développée en acoustique, mais elle est aussi très utile pour le contrôle des vibrations des structures.

- La deuxième consiste à identifier la réponse de la structure plutôt que l'excitation qui la fait vibrer. Elle nécessite donc, la modélisation du comportement dynamique de la structure. Le travail de contrôle des vibrations qui porte sur ce type de stratégie est appelé contrôle par boucle de rétroaction (feedback). Un système de contrôle actif des structures a une configuration de base comme indiqué sur la **figure (1.14) [21]**.

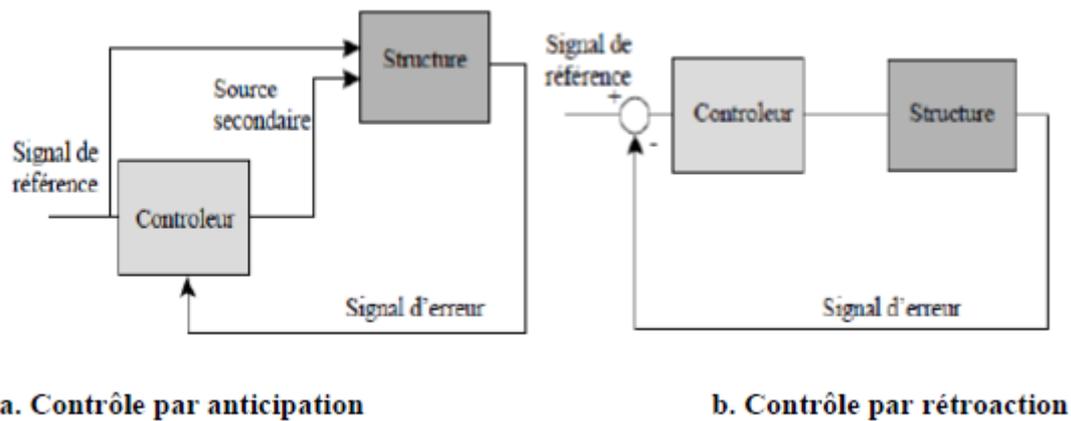


Figure I.14 : Diagramme de contrôle actif [30].

Ce système consiste premièrement, à placer les capteurs sur la structure pour identifier, à chaque instant, la réponse ou l'excitation. Lorsque seulement la réponse de la structure est mesurée, la configuration de contrôle est connue sous le nom du contrôle à boucle fermée : la réponse est mesurée à chaque instant et cette information est utilisée pour la correction de la force de contrôle appliquée instantanément.

Mais, lorsque seulement l'excitation est mesurée, le contrôle prend le nom de boucle ouverte. Par contre, si la réponse et l'excitation sont mesurées ensemble le terme utilisé dans la littérature est le contrôle à boucle fermée-ouverte. En deuxième étape, le système consiste à choisir une loi de contrôle convenable qui permet, à chaque instant, à l'actionneur, en apportant de l'énergie de l'extérieur, de produire une force de contrôle. Par suite, lors de la conception d'un système de contrôle actif des vibrations par rétroaction, on commence par étudier le comportement dynamique de la structure à contrôler, puis on choisit une loi de contrôle de rétroaction qui répond au mieux à la problématique [21].

1.7.2.3 Feedback contrôle

Le principe de feedback est représenté à la **figure I.15** ; la sortie y du système est comparée à l'entrée de référence r et le signal d'erreur $e = r - y$ passe dans un compensateur $H(s)$ et est appliqué au système $G(s)$. Le problème de conception consiste à trouver le compensateur $H(s)$ approprié (s) de sorte que le système à boucle fermée soit stable et se comporte de la manière appropriée [31].

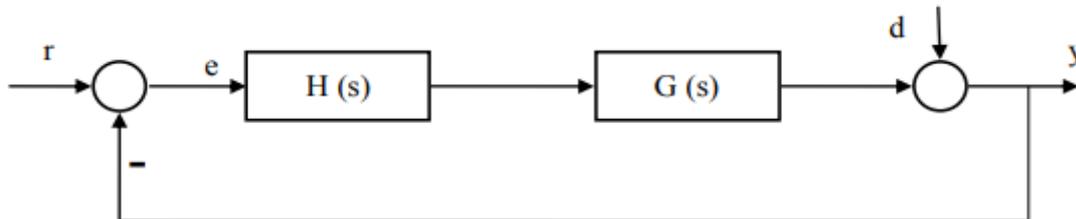


Figure I.15 : Principe de feedback.

Dans le contrôle de structures légèrement amorties, le contrôle par feedback est utilisé pour deux buts distincts et quelque peu complémentaires : l'amortissement actif et la rétroaction basée sur le modèle.

Les objectifs de contrôle peuvent être plus ambitieux et on peut souhaiter conserver une variable de commande y (une position ou le pointage d'une antenne) à une valeur r souhaitée malgré des perturbations externes d dans une certaine plage de fréquences. De la formule précédente et :

$$F(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1+GH} \quad (I.2)$$

1.7.2.4 Feedforward contrôle

Lorsqu'un signal corrélé à la perturbation est disponible, le filtrage adaptatif Feedforward constitue une alternative intéressante à la rétroaction pour le rejet de perturbation ; Il a été développé à l'origine pour le contrôle du bruit, mais il est très efficace pour le contrôle des vibrations aussi. Son principe est expliqué à la **figure I.16** [31].

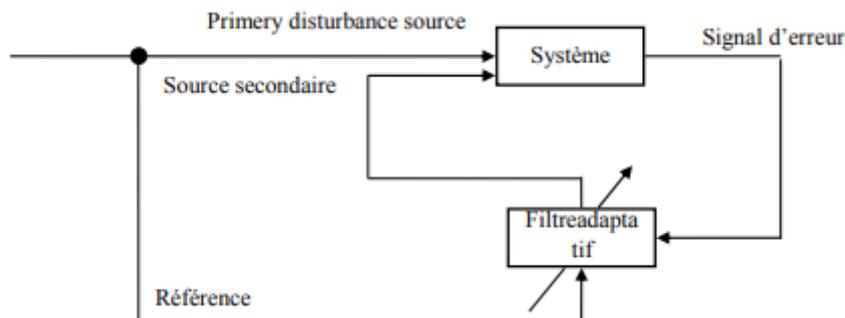


Figure I.16 : Principe de Feedforward.

La méthode repose sur la disponibilité d'un signal de référence corrélé à la perturbation primaire ; ce signal passe par un filtre adaptatif dont la sortie est appliquée au système par des sources secondaires.

Pour les perturbations induites par les machines tournantes, un train d'impulsions généré par la rotation de l'arbre principal peut être utilisé comme référence. Le tableau 1.2 [14], résume les principales caractéristiques des deux approches.

Type de contrôle	Avantages	Inconvénients
Feedback Amortissement active	<ul style="list-style-type: none"> Aucun modèle requis Stabilité garantie lors de la mise en place 	<ul style="list-style-type: none"> Efficace seulement près des résonances Bande passante limitée $\omega_c \ll \omega_s$
Feedback Modèle de bases	<ul style="list-style-type: none"> Méthode globale Atténue toutes les perturbations ω_c 	<ul style="list-style-type: none"> Les perturbations en dehors de ω_c sont amplifiées Débordement
Feedforward Filtrage adaptatif des références	<ul style="list-style-type: none"> Aucun modèle nécessaire $\omega_c \cong \omega_s/10$ Largeur de bande plus large Fonctionne mieux pour les bandes étroites 	<ul style="list-style-type: none"> Référence nécessaire Méthode locale (Réponse peut être amplifiée dans une partie du système) Grande quantité de calculs en temps réel

Tableau I.2 : Comparaison entre le feedback et le feedforward contrôle.

1.7.2.5 Régulateur quadratique linéaire (LQR)

L'approche d'état feedback (Figure I.17) peut fournir un modèle complet de la réponse globale du système sous contrôle. Ils sont particulièrement applicables au contrôle des premiers modes d'une structure. L'approche de retour d'état fournit les meilleures performances qui peuvent être obtenues sous un système idéal de contrôle par feedback.

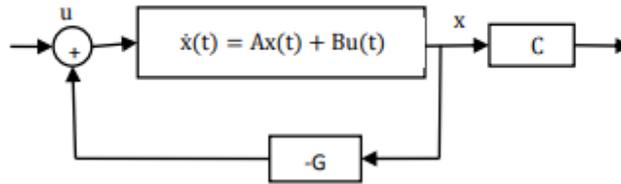


Figure I.17 : Principe d'état feedback.

Considérons l'équation d'espace d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (I.3)$$

Supposons que vecteur d'entrée $u(t)$ peut être rendu proportionnel au vecteur d'état $x(t)$:

$$u(t) = -Gx(t) \quad (I.4)$$

Où G est la matrice de gain de retour d'état :

$$\dot{x}(t) = (A - BG)x(t) \quad (I.5)$$

Où $(A - BG)$ est souvent appelée matrice de systèmes en boucle fermée. Ses valeurs propres sont les pôles à boucle fermée. Un moyen efficace de concevoir un système de contrôle à rétroaction à plein régime est d'utiliser le régulateur quadratique linéaire optimal (LQR) [32].

LQR fournit un moyen d'évaluer le contrôle optimal qui peut être atteint. Le problème LQR consiste à trouver le contrôleur d'état approprié qui minimise la fonction de coût suivante :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\{x\}^T [Q] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}] dt \quad (I.6)$$

Soumis à la dynamique de l'État :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (I.7)$$

$[Q]$: Est une matrice semi-définie positive symétrique.

$[R]$: Est une matrice symétrique positive définie, appelée matrice de pondération scalaire.

Dans la fonction de coût de l'équation I.6, on utilise le premier terme dans l'intégrale $\{x\}^T [Q] \{x\}$ pour minimiser l'erreur de fonction de coût, tandis que le deuxième terme dans l'intégrale $\{u\}^T [R] \{u\}$ est de maintenir l'entrée de commande aussi petite que possible. Normalement R est choisi comme matrice d'identité multipliée par un coefficient scalaire r .

Les valeurs élevées de r signifient que l'accent est davantage mis sur le coût de contrôle que sur la minimisation de la fonction de coût [33].

L'équation I.6 Peut-être réécrit comme :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\{y\}^T [Q] \{y\} + \{u\}^T [R] \{u\}] dt \quad (I.8)$$

Le contrôle optimal est obtenu par une feedback à l'état complet avec une loi de contrôle ; La loi est définie comme suit :

$$u(t) = -Gx(t) \quad (I.9)$$

$$G = R^{-1}BK \quad (I.10)$$

K est une matrice de coefficients symétriques, définis positifs et constants. K Est la solution de l'équation algébrique de Riccati (ARE) :

$$[A]^T [P] + [P][A] - [P][B][R]^{-1}[B]^T [P] + [Q] = 0 \quad (I.11)$$

Dans le code MATLAB, la commande **lqr** est utilisée pour calculer la matrice de gain optimal G :

$$\text{Syntaxe : } [G, K, e] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

G : est la matrice de gain optimal.

K : est la solution de l'équation de Riccati.

e : est les valeurs propres en boucle fermée, c.-à-d. ; $e = \text{eig}(A - BG)$ est la matrice d'état (avant contrôle).

B : est une matrice d'entrée due à la source de commande.

Q : est une matrice semi-définie positive symétrique.

R : est la matrice de pondération scalaire.

Chapitre II

Formulation dynamique d'une plaque isotrope équipée par patches PZT

II.1 Lois de comportement d'un matériau isotrope

Dans la présente formulation, les hypothèses suivantes [27,34-38] sont considérées.

- Le plan moyen est initialement parfaitement plan [27].
- les patches piézoélectriques sont parfaitement liés entre elles.
- La formulation est limitée au comportement de matériau élastique linéaire (petits déplacements et contraintes).
- Cette formulation utilise l'hypothèse de Kirchhoff (plaque mince) dans laquelle la normale transversale reste droite après déformation et elle tourne aussi de telle sorte qu'elle reste toujours perpendiculaire à la surface médiane.

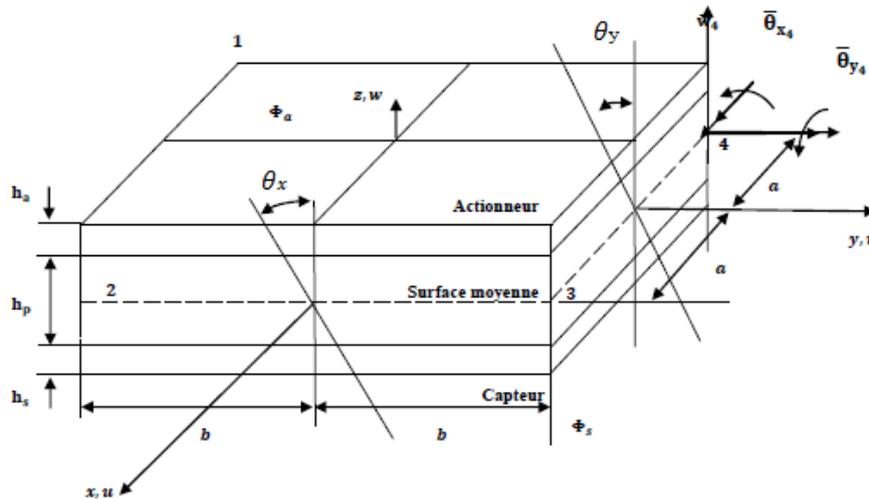


Figure II.1 : Système de coordonnées d'un élément fini stratifié avec un matériau piézoélectrique intégré [36].

II.1.1 Champs de déplacement

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{dw}{dx} \\ \theta_y = \frac{dw}{dy} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Par conséquent, comme le montre la figure II.1, le champ de déplacement u , v , et w peut être exprimé par les hypothèses de Kirchhoff [27,34].

$$u = -z \frac{dw}{dz} \quad (II.2)$$

$$v = -z \frac{dw}{dy} \quad (II.3)$$

$$w = w(x, y) \quad (II.4)$$

Où : x et y sont les axes du plan situés à la surface médiane de la plaque, et z est la direction de l'épaisseur de la plaque (Figure II.1).

En outre, u et v sont les déplacements dans les axes x et y, respectivement, w est le déplacement transversal suivant l'axe z.

III.1.2 Champs de déformation

D'après la définition du tenseur des déformations dans le cas d'une plaque mince, les équations des déformations sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = z \frac{d\theta_y}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \\ \varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = z \frac{d\theta_x}{dy} = -z \frac{d^2w}{dy^2} \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{d\theta_y}{dy} - \frac{d\theta_x}{dx} \right) = -2z \frac{d^2w}{dxdy} \end{array} \right. \quad (II.5)$$

Donc, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (II.6)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{d^2w}{dy^2} \quad (II.7)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{d^2w}{dxdy} \quad (II.8)$$

La déformation transversale du cisaillement est négligée, le champ de déformation peut être écrit comme :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = -z \left\{ \frac{d^2w}{dx^2} \quad \frac{d^2w}{dy^2} \quad 2 \frac{d^2w}{dxdy} \right\}^T \quad (II.9)$$

La relation entre la contrainte et la déformation plane pour les un matériau isotrope est donné par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (II.10)$$

Où :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\}^T \quad (II.11)$$

Et :

$$[D] = \frac{E_p}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\nu} \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

$\{\sigma\}$: Matrice de contrainte.

$\{\varepsilon\}$: Matrice de déformation.

$[D]$: Vecteur de déplacement électrique.

E_p : Module de Young de la plaque

ν : Facteur de poisson

Considérons un élément de plaque rectangulaire à quatre nœuds basés sur la théorie des plaques classique [39], et chaque nœud d'un élément possède trois degrés de libertés : \bar{w} Un déplacement selon l'axe (z) et deux rotations $\bar{\theta}_x$ et $\bar{\theta}_y$ autour des axes (x) et (y) respectivement (Figure II.1).

La fonction de déplacement est :

$$w(x_i, y_i) = c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i + c_4 x_i^2 + c_5 x_i y_i + c_6 y_i^2 + c_7 x_i^3 + c_8 x_i^2 y_i + c_9 x_i y_i^2 + c_{10} y_i^3 + c_{11} x_i^3 y_i + c_{12} x_i y_i^3 \quad (II.13)$$

Où :

$$\begin{cases} i = 1 \dots 4 \\ x_1 = -a & y_1 = -b & x_2 = a & y_2 = -b \\ x_3 = a & y_3 = b & x_4 = -a & y_4 = b \end{cases}$$

Pour un élément à quatre nœuds, le champ de déplacement transversal « w » peut être exprimé par la formule (II.14) ci-dessous

$$w = \{P\}^T \{c\} \quad (II.14)$$

Où les coefficients des vecteurs $\{c\}$ et $\{P\}$ sont représentés par les équations (II.15) et (II.16).

$$\{c\} = \{c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6 \quad c_7 \quad c_8 \quad c_9 \quad c_{10} \quad c_{11} \quad c_{12}\}^T \quad (II.15)$$

$$\{P\} = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3\}^T \quad (II.16)$$

Le vecteur $\{q_i\}$ est défini comme étant les champs des déplacements nodaux d'un élément et il est donné par l'équation (II.17) suivante :

$$\{q_i\} = \{\bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_{x1} \quad \bar{\theta}_{y1} \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\theta}_{x2} \quad \bar{\theta}_{y2} \quad \bar{w}_3 \quad \bar{\theta}_{x3} \quad \bar{\theta}_{y3} \quad \bar{w}_4 \quad \bar{\theta}_{x4} \quad \bar{\theta}_{y4}\} \quad (II.17)$$

Le déplacement global peut être exprimé par l'expression (II.18) suivante :

$$\begin{cases} \bar{w} = w \\ \bar{\theta}_x = \frac{dw}{dx} \\ \bar{\theta}_y = \frac{dw}{dy} \end{cases} \quad (II.18)$$

En combinant les équations. (II.13), (II.17) et (II.18) aux quatre points nodaux, on obtient l'expression de matrice suivante :

$$\{q_i\} = [X]\{c\} \quad (II.19)$$

Avec la matrice $[X]_{12 \times 12}$:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1^3y_1 & x_1y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & 2x_1y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2y_1 & -y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2^3y_2 & x_2y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & 2x_2y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2y_2 & -y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3^3y_3 & x_3y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & 2x_3y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2y_3 & -y_3^3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & y_4^3 & x_4^3y_4 & x_4y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & 2x_4y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (II.20)$$

Par conséquent, le vecteur de coefficient $\{c\}$ peut être calculé à partir de l'équation (II.19), comme suit :

$$\{c\} = [X]^{-1}\{q_i\} \quad (II.21)$$

En remplaçant l'équation (II.21) dans (II.14), on obtient :

$$w = [N_w]\{q_i\} \quad (II.22)$$

Où $[N_w]$ est la matrice de la fonction de la forme donnée par la relation :

$$[N_w] = \{P\}^T[X]^{-1} \quad (II.23)$$

En remplaçant l'équation (II.23) en (II.9) donne :

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \frac{d^2 w}{dy^2} \\ \frac{d^2 w}{dx dy} \end{Bmatrix} [X]^{-1} \{q_i\} \quad (II.24)$$

Donc :

$$\{\varepsilon\} = -z [L_k] [X]^{-1} \{q_i\} \quad (II.25)$$

Avec :

$$[L_k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (II.26)$$

Le champ de déplacement u, v et w est alors obtenu comme suit :

$$\{q\} = \{w \quad u \quad v\}^T \quad (II.27)$$

En remplaçant (II.2) (II.3) (II. 4) en (II.27) donne :

$$\{q\} = \left\{ w \quad -z \frac{dw}{dx} \quad -z \frac{dw}{dy} \right\}^T \quad (II.28)$$

En remplaçant (II.23) en (II.28) donne :

$$\{\varepsilon\} = [H] [L_m] [X]^{-1} \{q_i\} \quad (II.29)$$

Où les matrices [LM] et [H] sont donnés par les deux relations suivantes :

$$[L_m]^T = \left\{ \{P\}^T \quad \frac{d\{P\}^T}{dx} \quad \frac{d\{P\}^T}{dy} \right\}^T \quad (II.30)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \quad (II.30)$$

II.2 Formulation fondamentale du phénomène piézoélectrique

Les relations constitutives linéaires suivantes pour les matériaux piézoélectriques [40] :

$$\{\sigma\} = [C^E] \{\varepsilon\} - [e] \{E\} \quad (II.31)$$

$$\{D\} = [e]^T \{\varepsilon\} - [\xi^S] \{E\} \quad (II.32)$$

$\{\sigma\}$: La matrice de contrainte.

$[C^E]$: Les constantes élastiques à champ électrique constant.

$\{\varepsilon\}$: La matrice de déformation.

$[e]$: Les coefficients de contraintes piézoélectriques.

$\{E\}$: Le champ électrique.

$\{D\}$: Le vecteur de déplacement électrique.

$[\xi^S]$: La matrice diélectrique à contrainte mécanique constante.

La matrice des coefficients de la contrainte piézoélectrique est reliée à la matrice d'élasticité par l'équation. (II.33) ci-dessous

$$[e] = [C^E]\{d\} \quad (II.33)$$

$\{d\}$ étant une propriété du matériau exprimant un rapport entre les coefficients piézoélectriques et la matrice d'élasticité.

Sur la (figure II.2), la tension Φ_a appliquée sur la surface extérieure de l'élément le force à fléchir de la manière indiquée sur la figure. La tension force la couche inférieure du matériau piézoélectrique à se dilater, par contre elle engendre un rétrécissement de la couche supérieure.

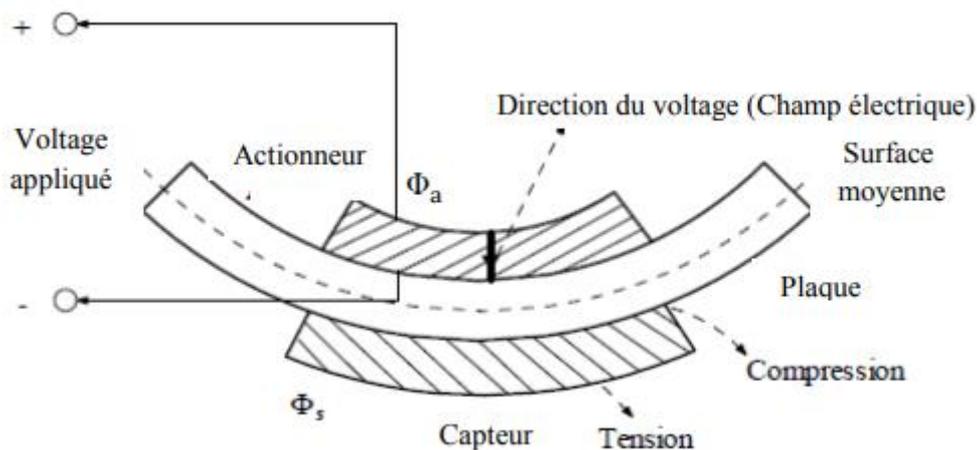


Figure II.2 : Courbure d'une plaque produite par l'expansion d'une couche piézoélectrique et contraction de l'autre [35].

La déformation du capteur produisait une charge à travers l'électrode de capteur, qui est collectée par la surface du capteur sous la forme d'une tension électrique Φ_s .

Lorsqu'on prend uniquement en compte la direction de polarisation, le potentiel électrique appliqué ou détecté à travers l'actionneur ou élément capteur est donné par l'équation suivante [41] :

$$\Phi_z = \left[\begin{array}{c} z - \frac{h_p}{2} \\ h_{piézo} \end{array} \right] \Phi \tag{II.34}$$

Où : $h_{piézo}$ et Φ Sont l'épaisseur et le potentiel électrique maximum à la surface externe de l'élément piézoélectrique correspondant (actionneur et capteur).

Dans la direction de Z, Z_a et Z_s sont définis sur les intervalles suivants :

$$\frac{h_p}{2} \leq Z_a \leq \frac{h_p}{2} + h_a \tag{II.35}$$

$$-\frac{h_p}{2} \leq Z_s \leq -\frac{h_p}{2} - h_s \tag{II.36}$$

h_p : l'épaisseur de la plaque.

h_s : l'épaisseur de la capture (sensor).

h_a : l'épaisseur de l'actionneur.

Le champ électrique (E) est constant à travers l'épaisseur des éléments d'actionneur et de capteur, les opérateurs de gradient sont :

$$E = -\frac{d\Phi_z}{dz} = -\frac{\Phi}{h_{piézo}} = -B_z \Phi \tag{II.37}$$

II.3 Principe d'Hamilton

Le principe d'Hamilton est basé sur la minimisation de la fonction appelée Lagrangien du système, définie comme étant la différence entre l'énergie cinétique T du système et son énergie potentielle U. Dans le cas des systèmes continus, cette dernière quantité est classiquement appelée énergie de déformation élastique.

Le principe d'Hamilton s'écrit entre deux instants t_1 et t_2 pour un système continu comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U + W_e - W_m) + \delta W] dt = 0 \tag{II.38}$$

T : L'énergie cinétique.

U : L'énergie potentielle.

W_e : Le travail effectué par les forces électriques.

W_m : Le travail effectué par les forces magnétique (Qui est négligeable pour les matériaux piézoélectriques).

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{q}\}^T \{\dot{q}\} dV \quad (II.39)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (II.40)$$

Où $\{\dot{q}\}$ est la dérivée de $\{q\}$ par rapport à t , $\{q\}$ et dV est défini par :

$$dV = dV_p + dV_a + dV_s \quad (II.41)$$

Les indices p , a et s se réfèrent respectivement aux éléments plaque, actionneur et capteur.

$$dV_p = \int_{-\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx dy dz \quad (II.42)$$

$$dV_a = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}+2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx dy dz \quad (II.43)$$

$$dV_p = \int_{-\frac{h_p}{2}}^{-\frac{h_p}{2}-h_s} \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx dy dz \quad (II.44)$$

La relation du travail effectué par les forces électriques :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \{E\}^T \{D\} dV \quad (II.45)$$

$$\delta W = \int_V \{\delta q\}^T \{f_b\} dV + \int_A \{\delta q\}^T \{f_A\} dA - \int_A \delta \Phi \sigma_q dA \quad (II.46)$$

D : Le vecteur de déplacement électrique.

f_A : La force de surface.

f_b : La force du corps.

σ_q : La contrainte électrique de surface.

II.4 Obtention des matrices élémentaires

En remplaçant (II.31) en (II.40) et en remplaçant (II.32) en (II.45) :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [C^E] \{\varepsilon\} - \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [e] \{E\} dV \quad (II.47)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \{E\}^T [e]^T \{\varepsilon\} + \frac{1}{2} \int_V \{E\}^T [\xi^s] \{E\} dV \quad (II.48)$$

En remplaçant (II.42), (II.46), (II.47) et (II.48) en (II.38) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \int_V \rho \{\delta q\}^T \{\ddot{q}\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [C^E] \{\varepsilon\} + \\ \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \int_V \{\delta E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV + \\ \int_V \{\delta E\}^T [\xi^S] \{E\} dV - \int_V \{\delta q\}^T [f_b] dV + \\ \int_A \{\delta q\}^T \{f_A\} dA - \int_A \delta \Phi \sigma_q dA \end{array} \right\} dt = 0 \quad (\text{II.49})$$

En remplaçant (II.25), (II.28) et (II.37) en(II.49) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \{\delta q_K\}^T \left[[M_{qq}^e] \{\ddot{q}_K\} + [K_{qq}^e] \{q_K\} + [K_{q\Phi}^e] \{\Phi\} - \{F_m\} \right] + \\ \{\delta \Phi\} \left[[K_{\Phi q}^e] \{q_K\} + [K_{\Phi\Phi}^e] \{\Phi\} + \{Q_a\} \right] \end{array} \right\} dt = 0 \quad (\text{II.50})$$

Et :

$$[M_{qq}^e] = \rho \int_V [X]^{-T} [L_M] [H]^T [H] [L_M]^{-1} dV \quad (\text{II.51})$$

$$[K_{qq}^e] = [X]^{-T} \int_V z^2 [L_K]^T [D] [L_K] [X]^{-1} dV \quad (\text{II.52})$$

$$[K_{q\Phi}^e] = \left[[K_{\Phi q}^e] \right]^T = -[X]^{-T} \int_V z [L_K]^T [e]^T B_z dV \quad (\text{II.53})$$

$$[K_{\Phi\Phi}^e] = \int_V B_z^T [\xi^T] B_z dV \quad (\text{II.54})$$

$$\{F_m\} = \int_V \{f_v\} dV + \int_A \{f_A\} dA \quad (\text{II.55})$$

$$\{Q_a\} = \int_A \sigma_q dA \quad (\text{II.56})$$

Et :

$$[M_{qq}^e] \{\ddot{q}_K\} + [K_{qq}^e] \{q_K\} + [K_{q\Phi}^e] \{\Phi\} - \{F_m\} = 0 \quad (\text{II.57})$$

$$[K_{\Phi q}^e] \{q_K\} + [K_{\Phi\Phi}^e] \{\Phi\} + \{Q_a\} = 0 \quad (\text{II.58})$$

$[M_{qq}^e]$: La matrice de masse élémentaire

$[K_{qq}^e]$: La matrice de rigidité des éléments

$[K_{q\Phi}^e]$: La matrice de couplage électromécanique

$[K_{\Phi\Phi}^e]$: La matrice de rigidité diélectrique

$\{F_m\}$: La force mécanique.

II.5 Intégration numérique

II.5.1 Intégration de la matrice de rigidité suivant l'axe (z)

$$[K_{qq}^e] = \sum_{i=1}^3 h_i [X]^{-T} \int_A [L_K]^T [D_i] [L_K] [X]^{-1} dA \quad (II.59)$$

Et h_i donnée par :

$$h_1 = h_a \left(\frac{h_p}{2} + \frac{h_a}{2} \right)^2 + \frac{h_a^3}{12} \quad (II.60)$$

$$h_2 = \frac{h_p^3}{12} \quad (II.61)$$

$$h_3 = h_s \left(\frac{h_p}{2} + \frac{h_s}{2} \right)^2 + \frac{h_s^3}{12} \quad (II.62)$$

$[D_i]$, $[D_a]$, $[D_s]$ et $[D_p]$ pour $i=1, 2, 3$ sont calculées par l'équation (II.12) pour la piézoélectrique et la plaque. La grandeur dA est égale à $dx dy$.

II.5.2 Intégration de la matrice de masse suivant l'axe (z)

$$[M_{qq}^e] = \sum_{i=1}^3 \rho_i \int_A [X]^{-T} [L_M]^T [H_i] [L_M] [X]^{-1} dA \quad (II.63)$$

Et : $\rho_a = \rho_1$, $\rho_p = \rho_2$, $\rho_s = \rho_3$, $[H_i]$ Pour $i=1, 2, 3$

$$[H_1] = [H_a] = \begin{bmatrix} H_a & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 \end{bmatrix} \quad (II.64)$$

$$[H_2] = [H_p] = \begin{bmatrix} H_p & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \quad (II.65)$$

$$[H_3] = [H_s] = \begin{bmatrix} H_s & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \quad (II.66)$$

II.5.3 Intégration de matrice de couplage électromécanique et la matrice de rigidité diélectrique suivant l'axe (z)

L'intégration par rapport à l'épaisseur de chaque couche piézoélectrique (où : $dV = dV_a$ et $dV = dV_s$) :

$$[K_{q\Phi}^e]_a = -\frac{1}{2} (h_a h_p + h_a^2) [X]^{-T} \int_A [L_K]^T [e]_a^T B_z dA \quad (II.67)$$

$$[K_{\Phi\Phi}^e]_a = \frac{4ab[\xi_a^T]}{h_a} \quad (II.68)$$

$$[K_{q\Phi}^e]_s = -\frac{1}{2}(h_s h_p + h_s^2)[X]^{-T} \int_A [L_K]^T [e]_s^T B_z dA \quad (II.69)$$

$$[K_{\Phi\Phi}^e]_s = \frac{4ab[\xi_s^T]}{h_s} \quad (II.70)$$

Les équations (II.59), (II.63), (II.67) et (II.69) sont intégrées par la méthode numérique de Gauss-quadrature.

$$[K_{qq}^e] = \sum_{i=1}^3 h_i [X]^{-T} \sum_{\eta} \sum_{\xi} [L_K] [D_i] [L_K]^T W_{\eta} W_{\xi} [X]^{-1} \quad (II.71)$$

$$[M_{qq}^e] = \sum_{i=1}^3 \rho_i [X]^{-T} \sum_{\eta} \sum_{\xi} [L_M] [H_i] [L_M]^T W_{\eta} W_{\xi} [X]^{-1} \quad (II.72)$$

$$[K_{q\Phi}^e]_a = -\frac{1}{2}(h_a h_p + h_a^2)[X]^{-T} \sum_{\eta} \sum_{\xi} [L_K]^T [e]_a^T W_{\eta} W_{\xi} B_z \quad (II.73)$$

$$[K_{q\Phi}^e]_s = -\frac{1}{2}(h_s h_p + h_s^2)[X]^{-T} \sum_{\eta} \sum_{\xi} [L_K]^T [e]_s^T W_{\eta} W_{\xi} B_z \quad (II.74)$$

II.6 Obtention des matrices globales (assemblage)

Chacune de ces matrices d'éléments peut être assemblée en matrices globales.

Le processus d'assemblage pour obtenir les matrices globales est écrit comme suit :

$$[M] = \sum_{K=1}^N [T_K]^T [M_{qq}^e] [T_K] \quad (II.75)$$

$$[K] = \sum_{K=1}^N [T_K]^T [K_{qq}^e] [T_K] \quad (II.76)$$

N : Le nombre des éléments finis

$[T_K]$: La matrice de distribution est définie par :

$$T_K = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq m_K \\ 1 & \text{if } j = m_K \end{cases} \quad (II.77)$$

pour $i = 1, 2, \dots, 12$ et $j = 1, 2, \dots, n_{ddl}$

Ou : n_{ddl} est le nombre de degré de liberté, et m_K est le vecteur indice contenant les degrés de liberté (3) du n-ième nœud (1, 2, 3, ou 4) (Figure II.1) dans le k-ième élément fini donnée par :

$$m_K = \{3n_K - 2 \quad 3n_K - 1 \quad 3n_K\} \quad (II.78)$$

Pour n_a actionneurs et n_s capteurs distribués dans la plaque, les équations (II.57) et (II.58) peut être écrites sous la forme globale :

$$[M]\{\ddot{G}\} + [K_{qq}]\{G\} + \sum_{K=1}^N [T_K]^T [K_{\Phi q}]_i [\Phi] - \{F_m\} = 0 \quad (\text{II.79})$$

$$\sum_{K=1}^N ([K_{\Phi q}] [T_K]_i \{G\} + [K_{\Phi\Phi}]_i \{\Phi\} + \{Q_a\}) = 0 \quad (\text{II.80})$$

G : Est le vecteur de déplacement nodal de la structure globale.

Dans le capteur piézoélectrique, il n'y a pas de tension appliquée à l'élément correspondant ($Q_a = 0$), de sorte que le potentiel électrique généré (équation du capteur) est calculé en utilisant l'équation (II.80)

$$\{\Phi_s\} = - \sum_{K=1}^N [K_{\Phi\Phi}]_{si}^{-1} [K_{\Phi q}]_{si} [T_K]_i \{G\}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n_s$

Le voltage globale $\{\Phi\}$ est définie par :

$$\{\Phi\} = \{\Phi_a\} + \{\Phi_{app}\} + \{\Phi_s\}$$

$\{\Phi_a\}$: La tension qui est détectée par l'actionneur.

$\{\Phi_s\}$: La tension qui est détectée par le capteur.

$\{\Phi_{app}\}$: La tension appliquée.

$$[M]\{\ddot{G}\} + [K_{qq}^*]\{G\} = \{F_m\} + \{F_{el}\}$$

Avec :

$$[K_{qq}^*] = [K_{qq}] - [K_{el}]$$

$$\{F_{el}\} = - \sum_{K=1}^{N_j} [T_K]_j^T [K_{q\Phi}]_{aj} \Phi_{aj} \quad , \text{pour } j = 1, 2, \dots, n_a$$

$\{F_{el}\}$: La force électrique.

Et :

$$[K_{el}] = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{K=1}^{N_i} [T_K]_i^T [K_{q\Phi}]_{si} [K_{\Phi\Phi}]_{si}^{-1} [K_{q\Phi}]_{si} [T_K]_i + \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{K=1}^{N_j} [T_K]_j^T [K_{q\Phi}]_{aj} [K_{\Phi\Phi}]_{aj}^{-1} [K_{q\Phi}]_{aj} [T_K]_j$$

$[K_{el}]$: La matrice de rigidité électrique.

Chapitre III

Modélisation numérique du contrôle actif d'une plaque isotrope

III.1 Modélisation d'une plaque d'Aluminium équipée par patches piézoélectriques

Plaque d'aluminium équipée par patches piézoélectriques de dimensions ($L_p=40$ mm, $l_p=40$ mm, $h_p=0.1$ mm). Les résultats sont obtenus à l'aide du logiciel ANSYS apdl et avec la programmation sous Matlab et ils sont comparés avec des résultats théoriques [42].

III.1.1 Description du système étudié

Le système à modéliser est tout simplement constitué d'une plaque mince sur laquelle sont collées deux céramiques piézoélectriques de façon symétrique des deux côtés de la plaque (actionneur et capteur).

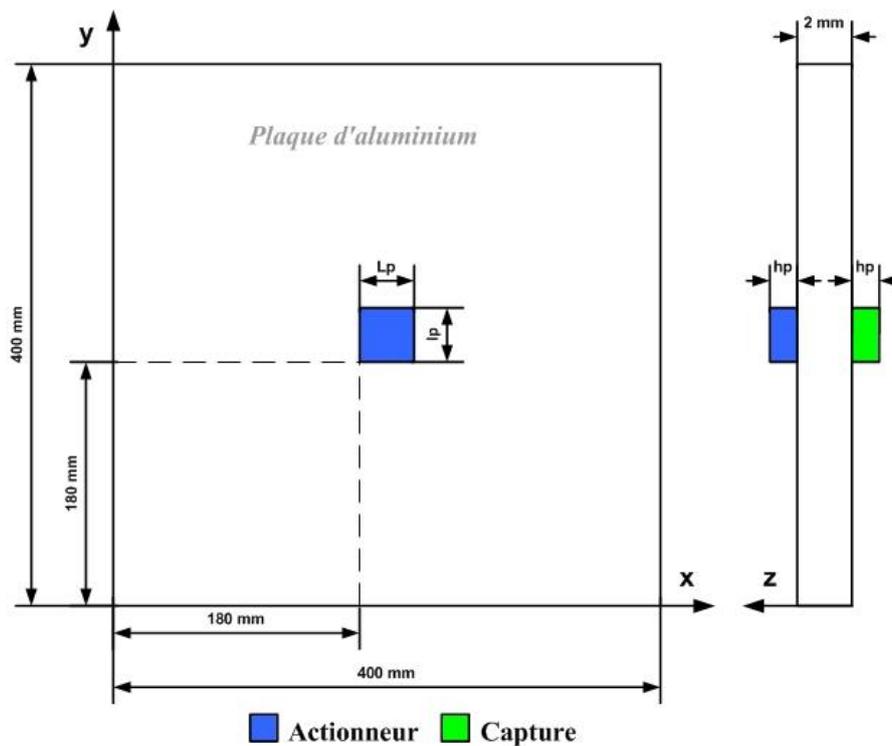


Figure III.1 : Géométrie de la plaque équipée par patch piézoélectriques.

III.1.2 Modélisation par le code ANSYS apdl

Les caractéristiques mécaniques de la plaque ainsi que celles des patches piézoélectriques sont présentées dans le **tableau III.1**.

La plaque et les patches en matériaux piézoélectriques ont été modélisés par l'élément SOLID5 (**figure III.2**), qui comporte 8 nœuds. Chaque nœud possède 4 DDL (UX, UY, UZ et VOLT) pour l'élément patches piézocéramique PZT, et possède 3 DDL (UX, UY et UZ) pour

l'élément plaqué (ANSYS Inc. 2018). Seuls les degrés de liberté de déplacement (DDL) ont été utilisés pour la plaque tandis que la représentation numérique des transducteurs piézoélectriques a également utilisé le degré de liberté électrique.

Propriétés	Unités	Plaque	PZT5A
E (Young's modulus)	Pa	$68 \cdot 10^9$	$69 \cdot 10^9$
ρ (Density)	Kg/m^3	2692	7700
ν (Poisson)	---	0.3	0.3
e31, e32 (Constants piézoélectriques à deformation)	C/m^2	----	12.351
ϵ (Constant diélectrique)	F/m	----	$1.6 \cdot 10^{-8}$

Tableau III.1 : Propriétés des matériaux de la plaque et PZT.

Le modèle volumétrique solide de la plaque et des transducteurs a été créé à partir de formes de blocs, en utilisant la commande BLC4. Après la création des blocs principaux, la plaque a été sectionnée le long des transducteurs piézoélectriques en utilisant des plans de travail tournés.

Les propriétés des matériaux ont été attribuées à partir des données fournies par le fabricant des piézoélectriques et des tableaux d'ingénierie couramment disponibles. Le modèle volumétrique a été maillé par une taille maximale d'élément global de 8 mm Parce que la plaque a été sectionnée en sous-blocs, les nœuds dans la ligne piézoélectrique s'alignent parfaitement avec les nœuds de la plaque située en dessous.

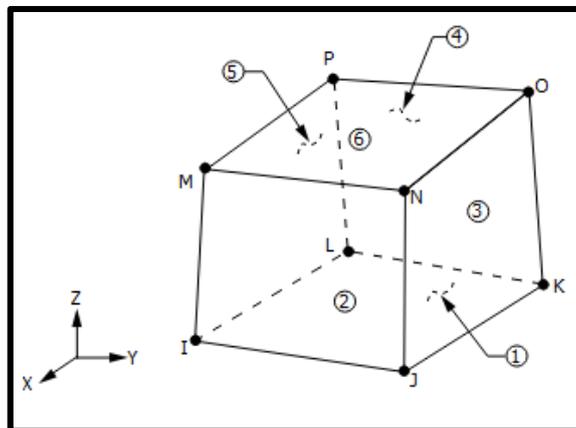


Figure III.2 : Géométrie de l'élément SOLID5 (Ansys Inc. 2018).

De cette façon, les nœuds adjacents peuvent être joints par la commande NUMMRG, qui vise à fusionner des nœuds situés dans une plage de tolérance. Les nœuds fusionnés se comporteront comme un en modélisation, ce qui signifie que si le matériau piézoélectrique se déforme, la plaque sera également en dessous.

Ceci suppose une liaison parfaite entre la plaque et les actionneurs, en écartant les effets mineurs de la mince couche de résine sur le comportement de la structure.

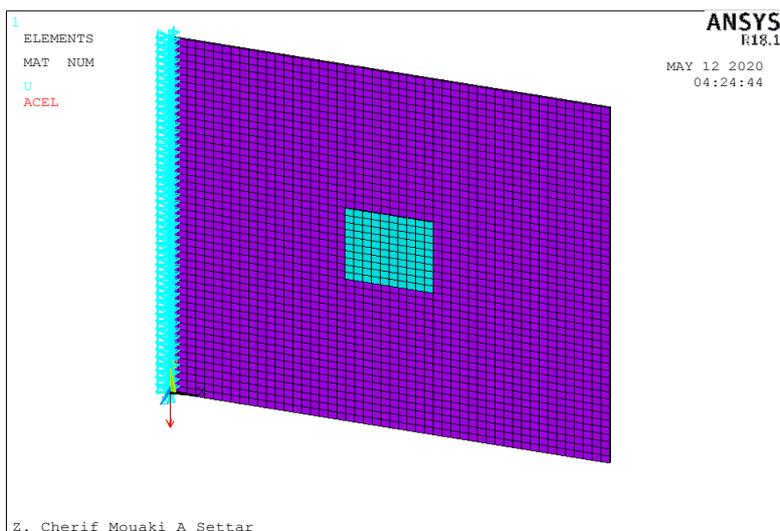


Figure III.3 : Maillage et conditions aux limites

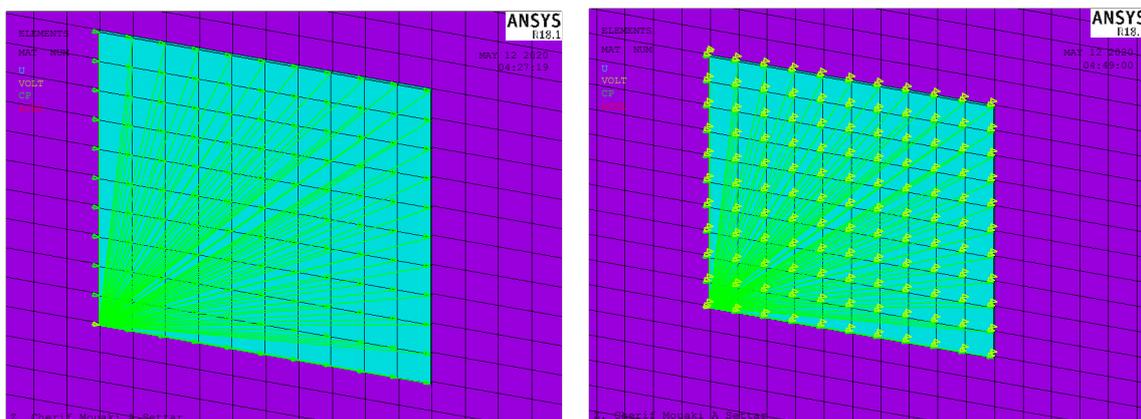


Figure III.4 : couplage électromécanique

La couche supérieure des nœuds crée l'électrode supérieure (vers l'extérieur) sur chaque transducteur, où un couplage est créé par l'instruction CP et le potentiel de tension approprié est assigné.

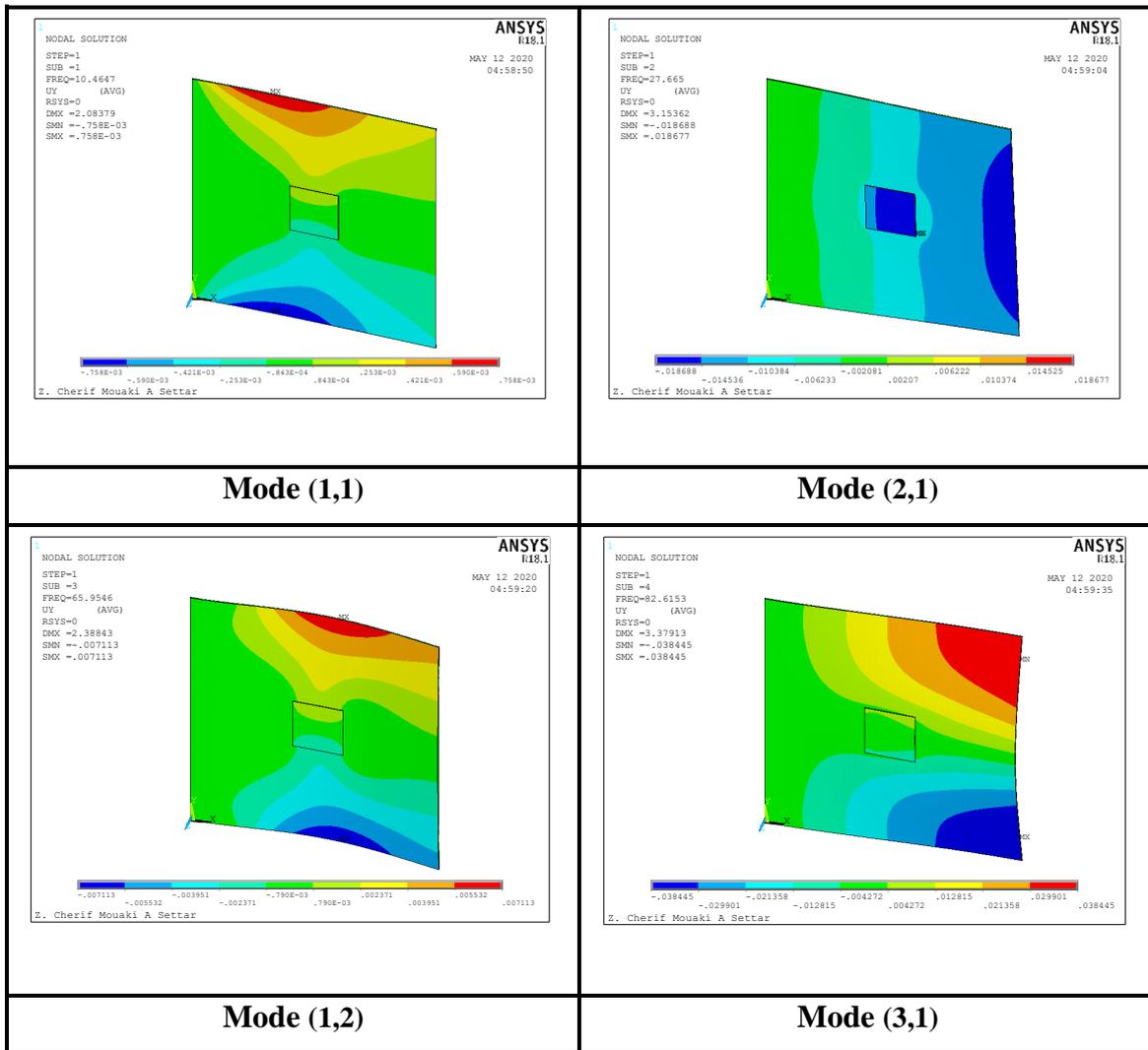
Les électrodes sur le côté inférieur (collé) sont définies d'une manière similaire. Seulement cette fois, un potentiel de tension zéro fixe ($v = 0$ volt) est défini sur les couches inférieures de tous les transducteurs, représentant la borne de masse des actionneurs.

Le modèle MEF de la plaque est illustré à la **figure III.3** et le **figure III.4**. La plaque entière est représentée sur la **figure III.3**, où la distribution et le positionnement relatif des actionneurs sont présentés. Les symboles indiquant les différentes conditions aux limites sont représentés en détail dans la **figure III.4**. Où les symboles de triangle jaune à droite indiquent le déplacement à zéro DDL (serrage) et les symboles de triangle vert et leur connexion indique la définition du DDL électrique couplé (bornes électriques).

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	10.465	1	1	1
2	27.665	1	2	2
3	65.955	1	3	3
4	82.615	1	4	4
5	94.469	1	5	5
6	160.93	1	6	6
7	185.51	1	7	7
8	194.17	1	8	8
9	222.47	1	9	9
10	284.76	1	10	10

Tableau III.2 : Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre

Le **tableau III.2** montre les dix premiers fréquences de vibration libre de la plaque intelligente obtenue par la modélisation avec le code ANSYS apdl.



La figure III.5 : modes de vibration de la plaque équipée par actionneur et capteur.

La figure III.5 montre les premiers modes de vibration libre de la plaque intelligente obtenue par la modélisation avec le code ANSYS apdl.

III.1.3 Vérification des fréquences naturelles

Pour les plaques isotropes simplement appuyées sur les quatre côtés [42], a présenté les fréquences naturelles exactes analytiquement à partir de la formule suivante :

$$\omega_{rn} = \pi^2 \left[\left(\frac{r}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{l}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (\text{III.1})$$

Et : r et n est le nombre de demi-vagues dans les directions x et y.

Comme les propriétés géométriques des piézoélectriques sont petites comparées à celles de la plaque élastique, les patches piézoélectriques peuvent être négligés dans le calcul des modes propres.

Le tableau III.3 montre et vérifie les fréquences naturelles analytiques et numériques de la plaque d'aluminium simple, avec les fréquences naturelles de la plaque intelligente.

Modes (r, n)	Fréquences naturelles (Hz)					
	Mode (1,1)	Mode (2,1)	Mode (1,2)	Mode (3,1)	Mode (2,2)	Mode (3,2)
Plaque d'Aluminium (analytique)	10.516	25.742	64.525	82.292	93.758	164.01
Plaque d'Aluminium (ANSYS)	10.524	25.772	64.575	82.392	93.888	164.39
Plaque intelligente (ANSYS)	10.465	27.665	65.955	82.615	94.469	160.93

Tableau III.3 : Fréquences naturelles de la plaque d'aluminium et la plaque intelligentes.

III.2 Simulation dynamique de la plaque intelligente pour différentes localisations

Dans cette partie, nous étudierons les patches piézoélectriques à plusieurs localisations différents.

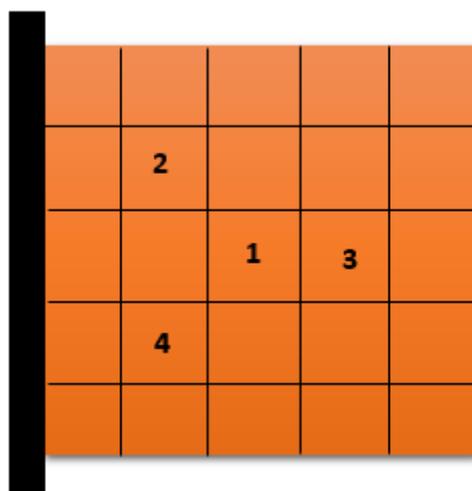


Figure III.6 : les localisations de patches piézoélectriques en la plaque

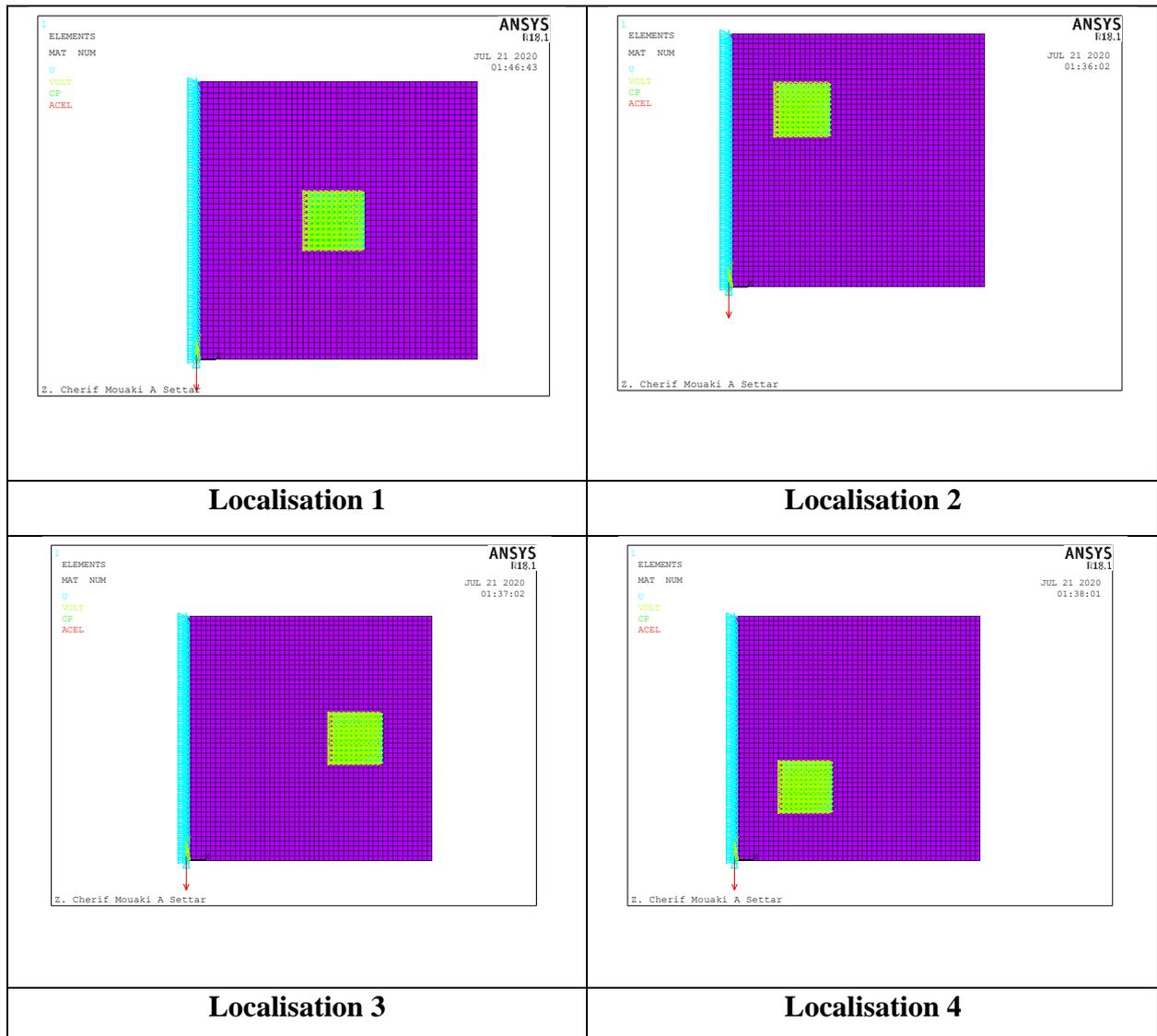


Figure III.7 : Maillage et conditions aux limites pour différentes localisations

A) La localisation 2

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	11.099	1	1	1
2	27.220	1	2	2
3	63.212	1	3	3
4	83.750	1	4	4
5	93.999	1	5	5
6	166.28	1	6	6
7	183.45	1	7	7
8	196.50	1	8	8
9	219.98	1	9	9
10	286.11	1	10	10

Tableau III.4 : Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre de localisation 2

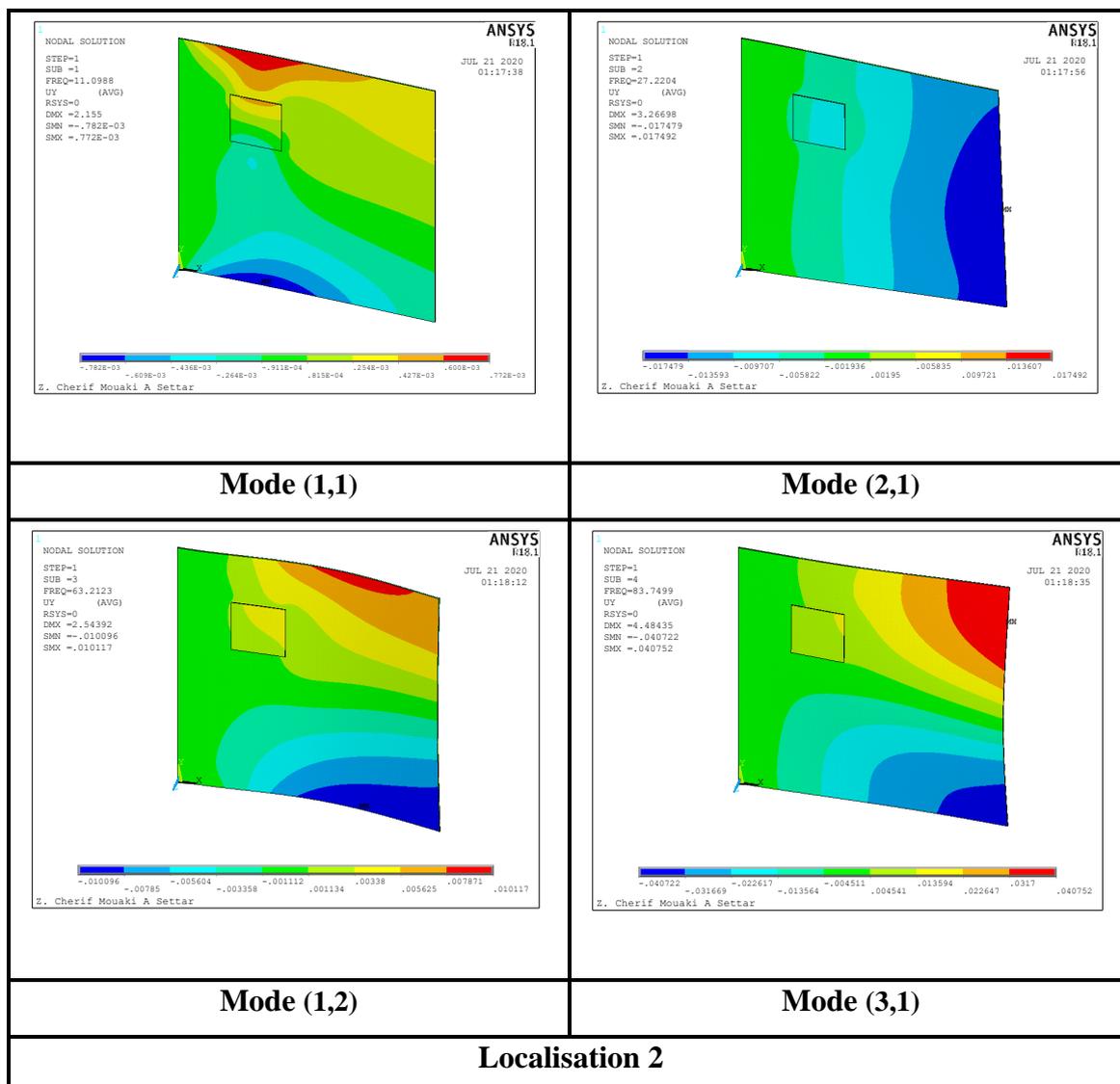


Figure III.8 : modes de vibration de la plaque équipée par (actionneur/capteur) pour localisation 2.

B) La localisation 3

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****					
SET	TIME/FREQ	LOAD	STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	9.8337	1	1	1	1
2	26.997	1	1	2	2
3	67.195	1	1	3	3
4	84.803	1	1	4	4
5	100.70	1	1	5	5
6	164.66	1	1	6	6
7	193.47	1	1	7	7
8	195.21	1	1	8	8
9	216.94	1	1	9	9
10	295.49	1	1	10	10

Tableau III.5 : Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre de localisation 3

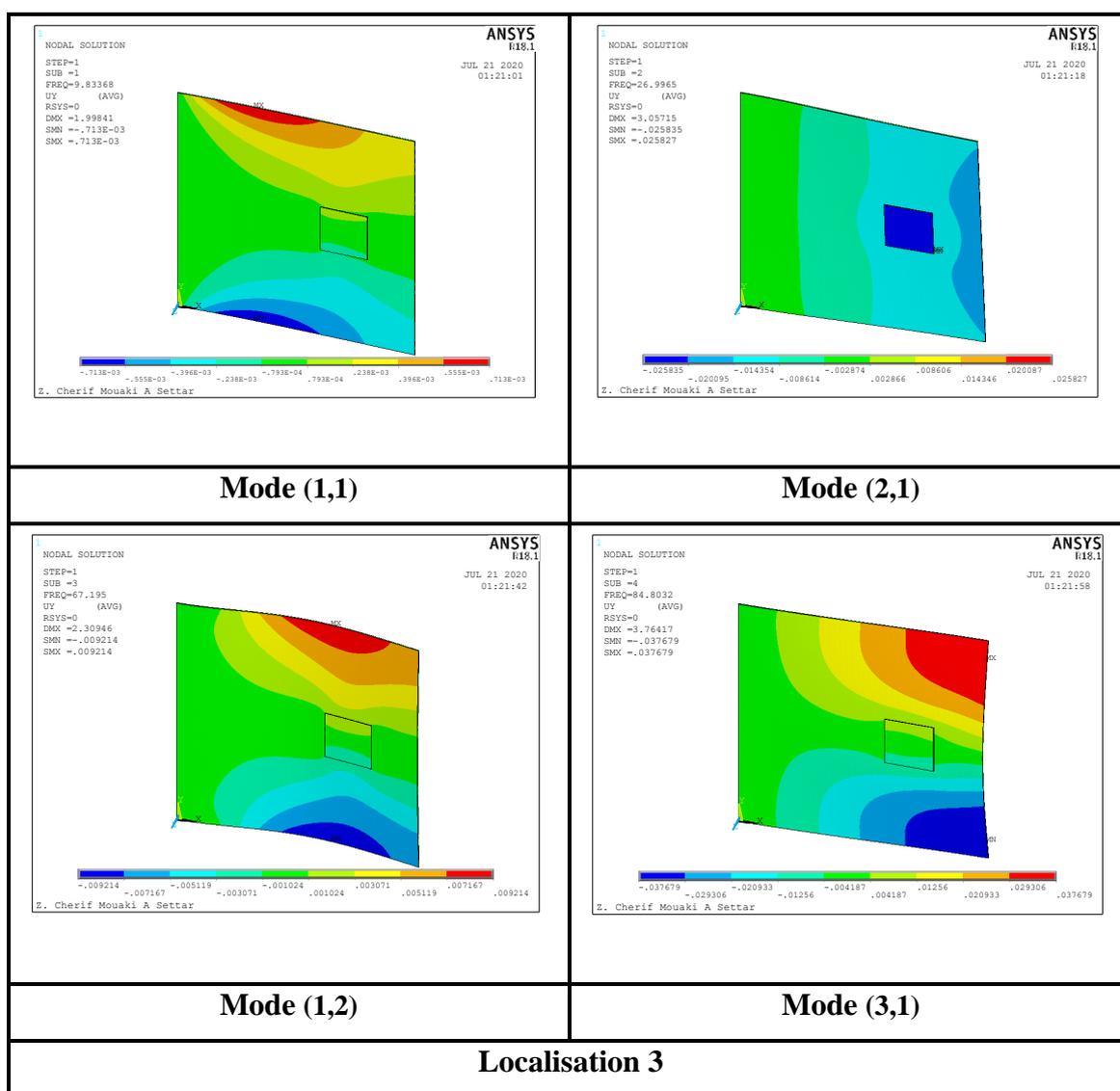


Figure III.9 : modes de vibration de la plaque équipée par (actionneur/capteur) pour localisation 3.

C) La localisation 4

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****					
SET	TIME/FREQ	LOAD	STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	11.099		1	1	1
2	27.220		1	2	2
3	63.212		1	3	3
4	83.750		1	4	4
5	93.999		1	5	5
6	166.28		1	6	6
7	183.45		1	7	7
8	196.50		1	8	8
9	219.98		1	9	9
10	286.11		1	10	10

Tableau III.6 : Fréquences de la plaque intelligente de vibration libre de localisation 4

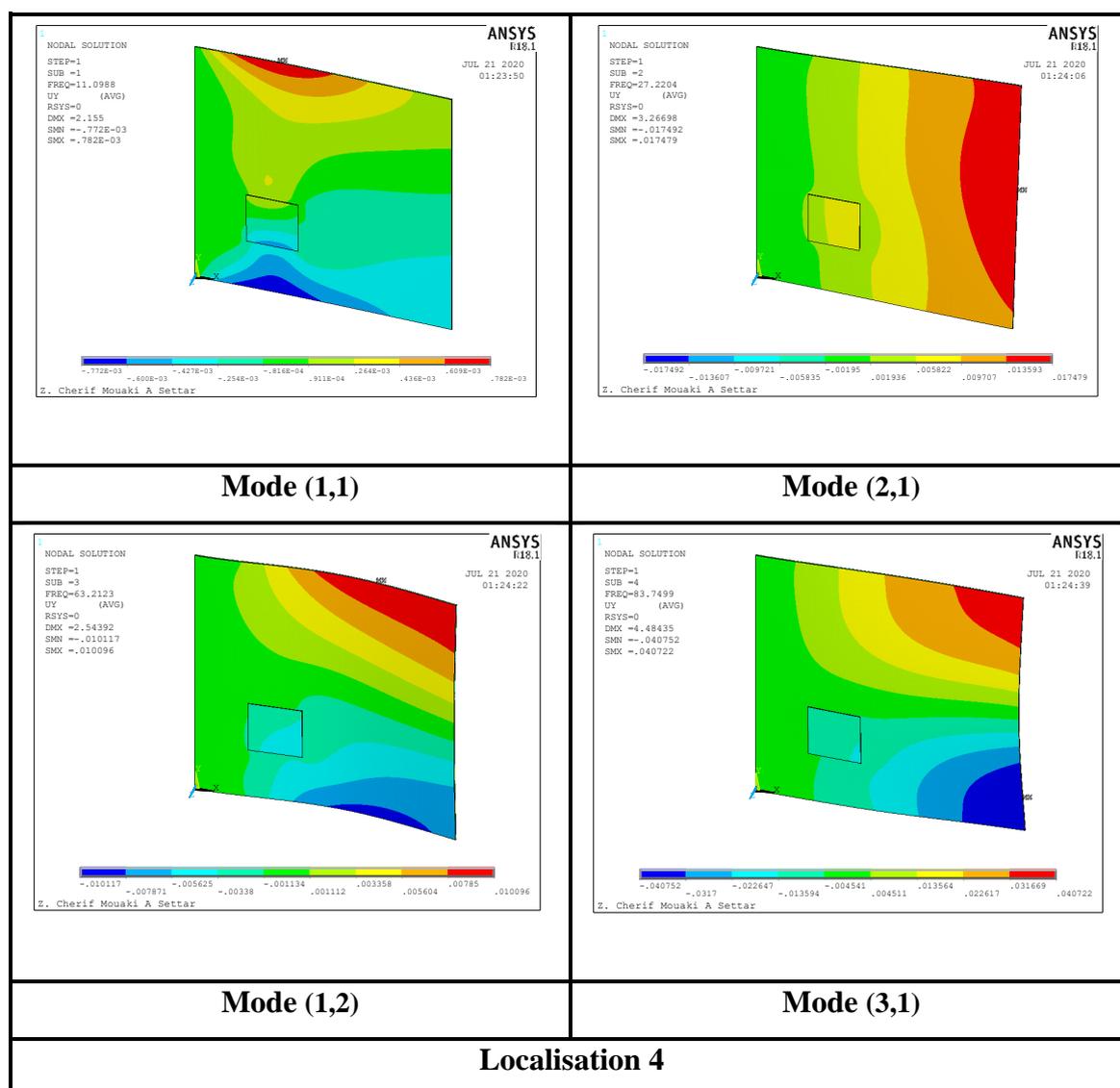


Figure III.10 : modes de vibration de la plaque équipée par (actionneur/capteur) pour localisation 4

D) Comparaison les quatre localisations

Modes (r, n)	Fréquences naturelles (Hz)			
	Mode (1,1)	Mode (2,1)	Mode (1,2)	Mode (3,1)
Localisation 1	10.465	27.665	65.955	82.615
Localisation 2	11.099	27.22	63.212	83.75
Localisation 3	9.833	26.997	67.195	84.803
Localisation 4	11.099	27.22	63.212	83.75

Tableau III.7 : Fréquences naturelles de la plaque intelligentes pour localisations différente.

La localisation 3 est meilleure pour le patch piézoélectrique dans cette plaque que les autres localisations car il a les meilleures valeurs de fréquence naturelles.

III.3 Contrôle actif

Dans cette section, nous considérons le contrôle actif de la plaque précédente.

Le système dynamique (I.3) est donné avec les variables d'état par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{III.2})$$

$$y = Cx(t) \quad (\text{III.3})$$

Où les matrices [A], [B] et [C] désignent la matrice du système, la matrice d'entrée et la matrice de sortie du système, respectivement.

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [\omega_i] \\ -[\omega_i] & [2\zeta_i\omega_i] \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

$$[B^T] = [[0] \quad [b_{ij}]] \quad (\text{III.5})$$

$$[C] = [[c_{ij}] \quad [0]] \quad (\text{III.6})$$

b_{ij} : Représente l'action du j-ième actionneur au i-ème mode propre et est égale à :

$$b_{ij} = (2h + h_p) \int_s \left(e_{31} \frac{d^2\psi}{dx^2} + e_{32} \frac{d^2\psi}{dy^2} \right) ds \quad (\text{III.7})$$

c_{ij} : Est la constante de détection du j -ième capteur due au mouvement du i -ième mode est égale à :

$$C_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_{33}} \left(2h + \frac{h_p}{2} \right) \int_s \left(e_{31} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + e_{32} \frac{d^2 \psi}{dy^2} \right) ds \quad (\text{III.8})$$

b_{ij} et c_{ij} dépendent respectivement de la i -ième position d'actionneur et de la j -ième position de capteur.

(ω_i, ψ) : Représente le i -ième couple de valeur propre / mode propre.

ζ_i : Est un rapport d'amortissement du i -ième.

e_{31} et e_{32} sont les coefficients piézoélectriques.

En supposant que l'équation d'état est contrôlable, elle consiste à utiliser une loi de contrôle :

$$\{\phi\} = -[G]\{x\} \quad (\text{III.9})$$

G : étant la matrice de gain de feedback d'état. Pour concevoir un tel compensateur LQR, nous considérons d'abord la minimisation de la fonction de coût quadratique (Equation (I.6)).

La sélection de Q et R est essentielle dans le processus de conception de contrôle.

Q et R sont les paramètres libres de conception et stipulent l'importance relative du résultat de contrôle et de l'effort de contrôle. Un grand Q impose des exigences plus élevées sur le résultat du contrôle, et un grand R limite davantage l'effort de contrôle [42].

La solution optimale est la suivante :

$$[G] = [R]^T [B]^T [K] \quad (\text{III.10})$$

$[K]$ satisfait à l'équation de Riccati (Equation (I.11)).

L'intervalle du temps Δt pour l'analyse transitoire est pris comme $1/(20f_h)$, où f_h est la fréquence supérieure. Et considérons un champ de déplacement initial appliqué à la plaque égale à 1 mm.

Les résultats de modélisation ont été exportés vers le logiciel MATLAB afin de déterminer la fonction de coût et la représentation de l'espace d'état du système. Ce modèle a été obtenu par des commandes d'identification de système à partir du logiciel MATLAB en utilisant la réponse en fréquence de la plaque à patches piézoélectriques.

III.3.1 Réponse de la plaque pour la première localisation

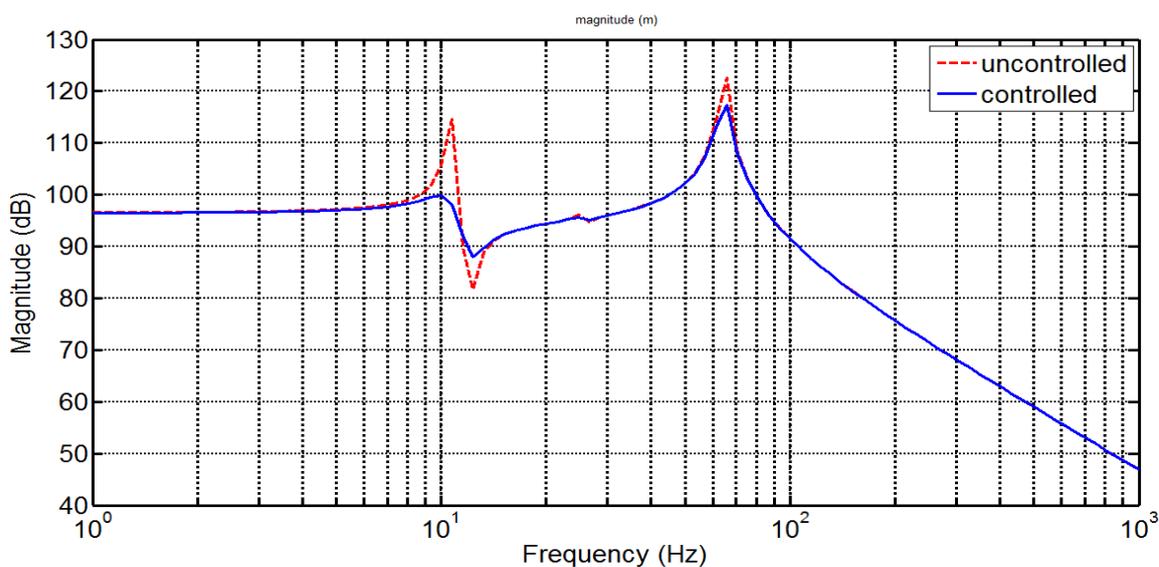


Figure III.11 : Réponse en fréquences de la plaque en boucle-ouverte et fermée.

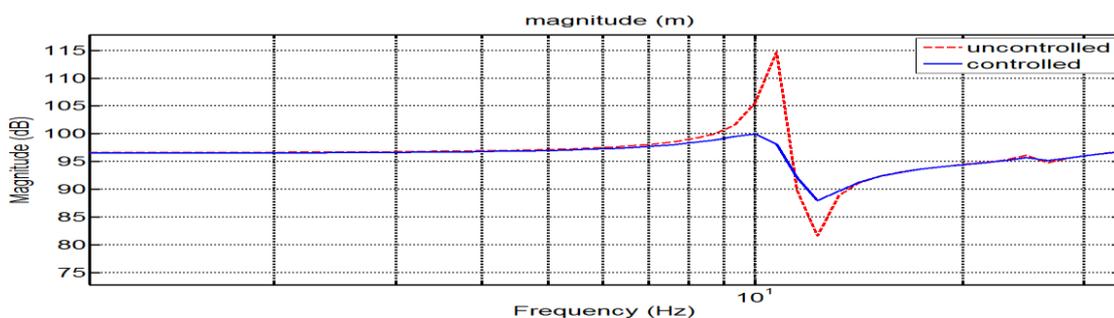


Figure III.12 : Réponse en première fréquence de la plaque.

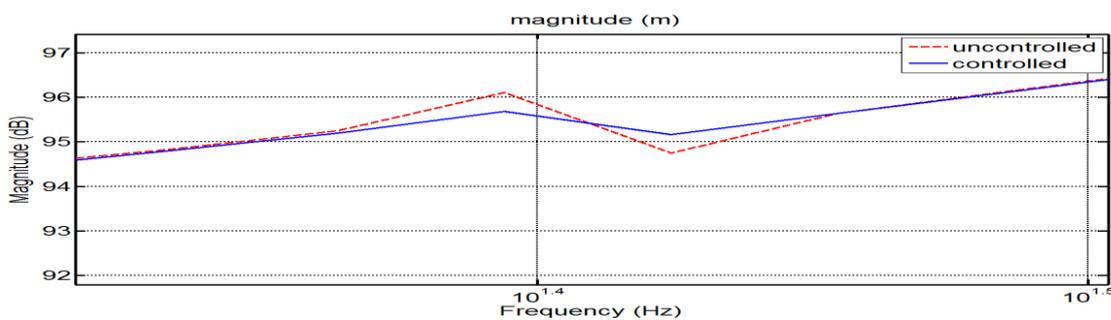


Figure III.13 : Réponse en deuxième fréquence de la plaque.

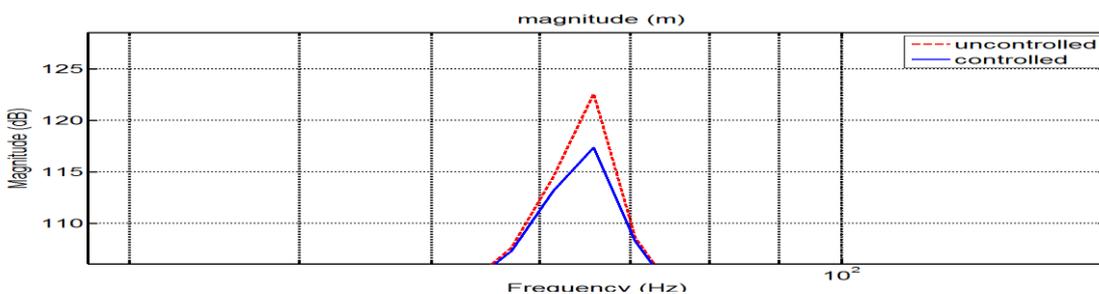


Figure III.14 : Réponse en troisième fréquence de la plaque.

La **figure III.11** représente une comparaison entre l'état de surveillance actif, ou on dit circuit fermé avec le stabilisateur. Dans la condition de contrôle, on constate une diminution de l'amplitude du mouvement, ce qui conduit à la suppression des vibrations et à la stabilité de la plaque à trois fréquences propres (**figure (III.12), (III.13) et (III.14)**).

III.3.2 Comparaison entre les réponses des quatre localisations des patches piézoélectriques dans les cas contrôlés

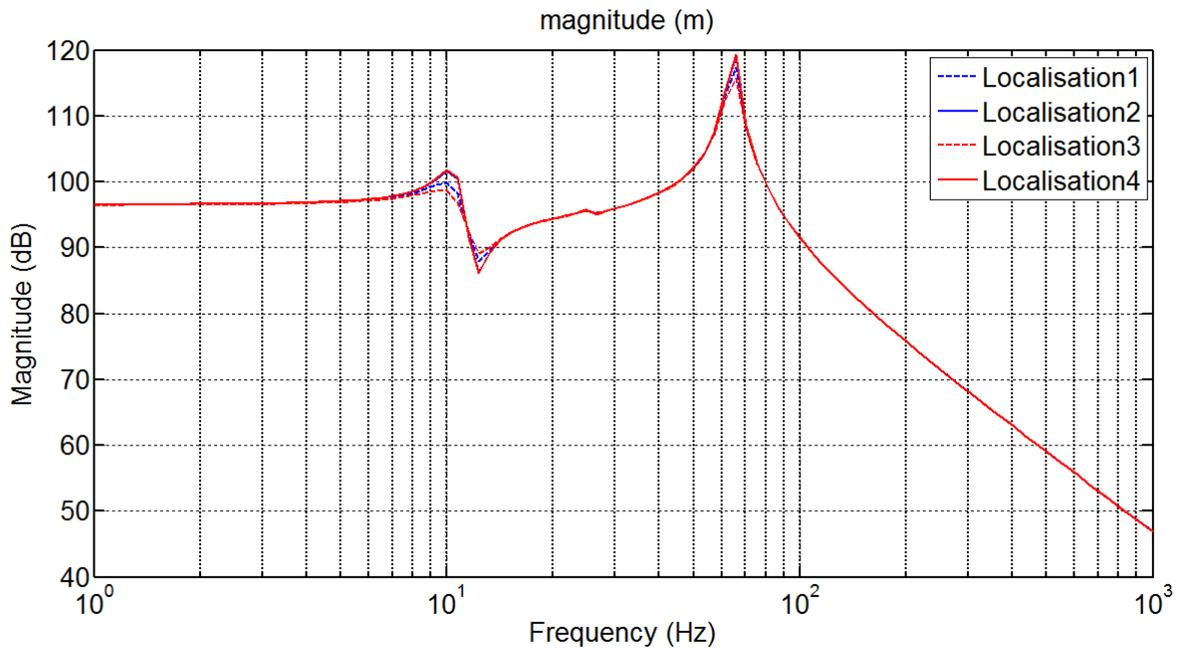


Figure III.15 : Réponse en fréquences de la plaque en boucle-ouverte et fermée pour quatre localisations différentes.

De la **figure III.15**, nous ne prenons que l'état de contrôle actif ou le circuit fermé, mais dans trois nouvelles positions en plus du premier état, il y aura quatre états. Ici, nous comparons la réduction de capacité dans chaque cas et à chaque fréquence, et ici nous concluons que la position de fixation du patch a un effet significatif sur la valeur de la diminution de capacité et Stabilité de la plaque, et cette étude est une introduction à l'utilisation de programmes d'optimisation pour obtenir la meilleure position, mais à notre niveau actuel nous nous contentons d'une étude comparative uniquement.

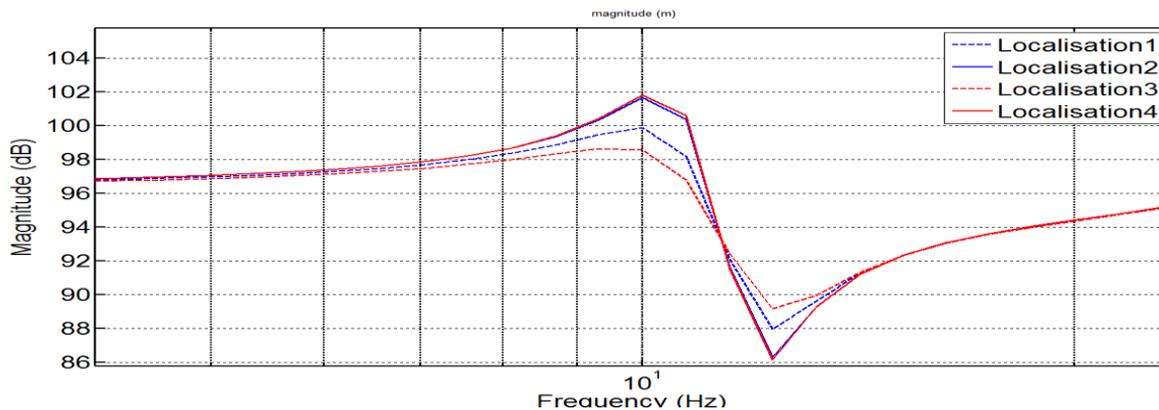


Figure III.16 : Réponse en première fréquence de la plaque pour quatre localisations différente.

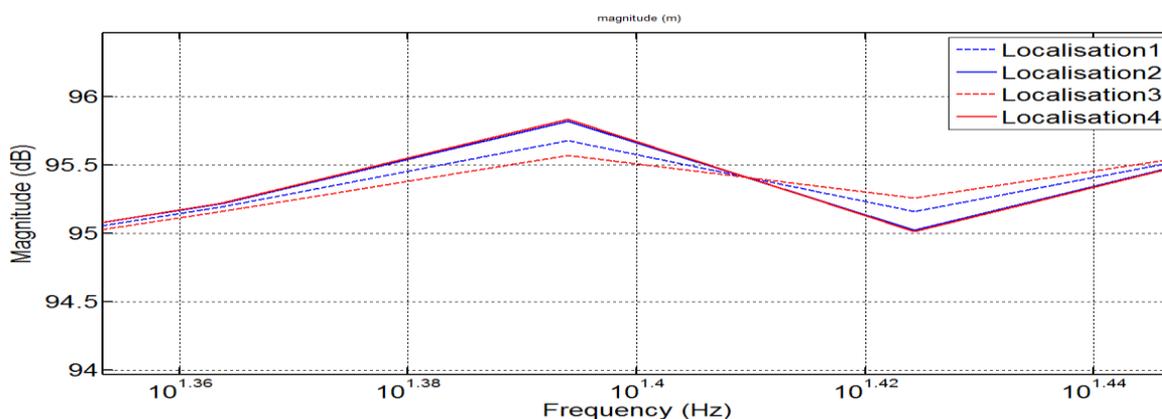


Figure III.17 : Réponse en deuxième fréquence de la plaque pour quatre localisations différente.

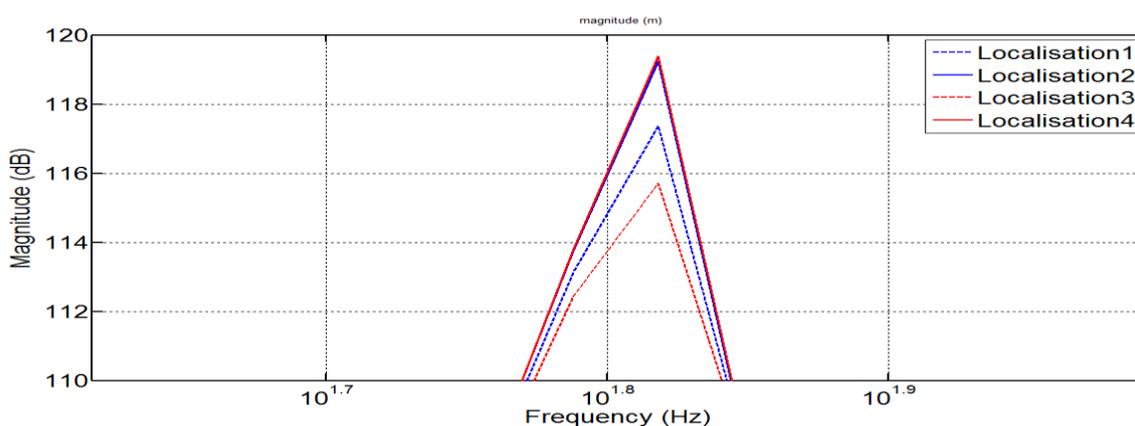


Figure III.18 : Réponse en troisième fréquence de la plaque pour quatre localisations différente.

En fonction des résultats obtenus, choisissez l'emplacement des spots piézoélectriques afin de contribuer à un bon contrôle.

Conclusion générale

Conclusion générale

La présente étude a traité le problème du contrôle actif des vibrations des plaques isotrope. Il s'agit de contrôler activement les vibrations de ces structures en y incorporant des matériaux piézoélectriques ; ainsi, ces structures sont appelées des structures intelligentes.

A travers des capteurs et d'actionneurs (patches PZT), on arrive à analyser en temps réel la dynamique de la structure et à manœuvrer pour la réduction des vibrations.

Dans un premier temps, la structure étudiée (plaque isotrope en Aluminium) a été modélisée par EF en utilisant le code Ansys apdl ; ce dernier est basé sur des formulations piézoélectriques en potentiels et proposent plusieurs éléments finis piézoélectriques solides 3D (solid5, solid226).

D'autre part, nous avons identifié, utilisé et dans certains cas, développé des algorithmes de contrôle de vibrations sous MATLAB. L'application de la stratégie du contrôle LQR en utilisant les actionneurs et les capteurs piézoélectriques diminue les risques d'instabilité des modes non contrôlés.

Ce travail montre que l'usage de ces codes est satisfaisant pour la détermination des fréquences et les formes des modes de vibration des structures pour implanter le contrôleur LQR. Ainsi, Nous avons réalisé numériquement le contrôle actif de la plaque isotrope.

Conclusion générale

En perspective, le travail numérique développé et la simulation appliquée en utilisant les logiciels ANSYS Apdl et MATLAB, pourrait être confronté aux résultats d'un dispositif expérimental avec différentes formes possibles de structures.

Références Bibliographiques

- 1 : Smith, Ralph C. Smart material systems : model development. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- 2 : Chandran, Sanjay, Valery D. Kugel, and Leslie Eric Cross. "CRESCENT : à novel piezoelectric bending actuator." Smart Structures and Materials 1997 : Smart Structures and Integrated Systems. Vol. 3041. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- 3 : Chen, Y. H., et al. "Electrophoretic deposition and characterization of helical piezoelectric actuator." Ceramics international 34.1 (2008) : 1-6.
- 4 : Fukada, Elichi, S. Tasaka, and H. S. Nalwa. "Polyureas and polythioureas." Plastics engineering-New York- 28 (1995) : 353-353.
- 5 : Ikeda, Takurō. Fundamentals of piezoelectricity. Oxford university press, 1996.
- 6 : Kawai, Heiji. "The piezoelectricity of poly (vinylidene fluoride)." Japanese journal of applied physics 8.7 (1969) : 975.
- 7 : Mason, W. P. "Physical acoustics and the properties of solids. Von Nostrand Co." Inc., Princeton (1958).
- 8 : Mei, B. Z., J. I. Scheinbeim, and B. A. Newman. "The ferroelectric behavior of odd-numbered nylons." Ferroelectrics 144.1 (1993) : 51-60.
- 9 : Mohammadi, F., et al. "High-displacement spiral piezoelectric actuators." Applied Physics Letters 75.16 (1999) : 2488-2490.
- 10 : Su, J., J. S. Harrison, and T. St Clair. "Novel polymeric elastomers for actuation." ISAF 2000. Proceedings of the 2000 12th IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics (IEEE Cat. No. 00CH37076). Vol. 2. IEEE, 2000.
- 11 : Voigt, Woldemar. Lehrbuch der kristallphysik. Vol. 962. Leipzig : Teubner, 1928.
- 12 : Berlincourt, Don A., Daniel R. Curran, and Hans Jaffe. "Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers." Physical Acoustics: Principles and Methods 1.Part A (1964): 247.
- 13 : Berlincourt, Don A., Daniel R. Curran, and Hans Jaffe. "Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers." Physical Acoustics: Principles and Methods 1.Part A (1964): 247.
- 14 : Fuller, Christopher C., Sharon Elliott, and Philip A. Nelson. Active control of vibration. Academic Press, 1996.

- 15 : Haussonne, Jean-Marie. Céramiques pour l'électronique et l'électrotechnique. PPUR presses polytechniques, 2002.
- 16 : Eyraud, Lucien. Diélectriques solides, anisotropes et ferroélectricité. Gauthier-Villars, 1967.
- 17 : Lam, Mountaga. Formalisme d'octet appliqué à la propagation d'ondes dans des milieux piézoélectriques inhomogènes. Diss. Tours, 2008.
- 18 : Defaÿ, Emmanuel. Elaboration et caractérisation de couches minces piézoélectriques de Pb (Zr, Ti) O₃ sur silicium pour applications aux microsystèmes. Diss. Lyon, INSA, 1999.
- 19 : Soong, Tsu T., and Gary F. Dargush. * Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering. Wiley, 1997.
- 20 : Lam, Margaretha J., Daniel J. Inman, and William R. Saunders. "Vibration control through passive constrained layer damping and active control." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 8.8 (1997) : 663-677.
- 21 : Rizet, Nicolas. Contrôle actif de vibrations utilisant des matériaux piézo-électriques. Diss. Lyon, INSA, 1999.
- 22 : Liu, C., and R. Forward. "Electronic damping of resonance in gimbal structures." 22nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. 1981.
- 23 : Trindade, Marcelo Areias. Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes. Diss. 2000.
- 24 : Takács, Gergely, and Boris Rohal'-Ilkiv. Model predictive vibration control : efficient constrained MPC vibration control for lightly damped mechanical structures. Springer Science & Business Media, 2012.
- 25 : Sun, Bohua, and Da Huang. "Analytical vibration suppression analysis of composite beams with piezoelectric laminae." *Smart materials and structures* 9.6 (2000) : 751.
- 26 : Boukazouha, Faiza. Conception, Réalisation, Modélisation et Caractérisation Expérimentale d'un Transformateur de Tension de Type Rosen. Diss. Université des sciences et de la technologie Houari Boumediène (USTHB), 2016.

- 27 : Serhane, Hanane. Analyse et simulation du comportement dynamique des structures composites type sandwich. Application au contrôle actif des vibrations des structures. Diss. 2019.
- 28 : Boucher, Eric. Elaboration et caractérisation de céramiques PZT bi-substituées et modélisation non-linéaire de leur comportement en contrainte et en champ électrique. Diss. Lyon, INSA, 2002.
- 29 : Zouari, Wajdi. Développement d'éléments finis ferroélectriques et ferroélastiques de type solide et coque curvilignes. Diss. 2010.
- 30 : Disponible sur : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Piézoélectricité> le 25/07/2020
- 31 : Preumont, André. Vibration control of active structures : an introduction. Vol. 246. Springer, 2018.
- 32 : Caruso, Giovanni. "A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping." *Smart materials and structures* 10.5 (2001) : 1059.
- 33 : Hagood, Nesbitt W., and Andreas von Flotow. "Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks." *Journal of sound and vibration* 146.2 (1991) : 243-268.
- 34 : Reddy, J. N. "On laminated composite plates with integrated sensors and actuators." *Engineering Structures* 21.7 (1999) : 568-593.
- 35 : De Abreu, G. L. C. M., J. F. Ribeiro, and V. Steffen Jr. "Finite element modeling of a plate with localized piezoelectric sensors and actuators." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 26.2 (2004) : 117-128.
- 36 : Latrache, Mohamed. Contrôle des structures par couches piézoélectriques. Diss. Université Mohamed Khider-Biskra, 2019.
- 37 : Bendine, Kouider. Contribution à l'étude du contrôle actif des structures composites par incorporation de matériaux intelligents. Diss. Université de Sidi Bel Abbès-Djillali Liabes, 2016.
- 38 : Kumar, K. Ramesh, and S. Narayanan. "The optimal location of piezoelectric actuators and sensors for vibration control of plates." *Smart Materials and Structures* 16.6 (2007) : 2680.
- 39 : Bathe, Klaus-Jurgen. "Finite element procedures. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall ; 1996." rev. De : *Finite element procedures in engineering analysis*. 1982.

40 : Taylor, G.W. ; Gagnepain, J. ; Meeker, T.R. ; Nakamura, T. and Shuvalov, L., 1985, "Piezoelectricity Ferroelectricity and Related Phenomena", Gordon and Breach Science Publishers.

41 : Lopes, Vicente, Joao Antonio Pereira, and D. J. Inman. "Structural FRF acquisition via electric impedance measurement applied to damage location." Imac-xviii : A Conference on Structural Dynamics, Vols 1 and 2, Proceedings. Soc Experimental Mechanics Inc, 2000.

42 : Leissa, Arthur W. Vibration of plates. Vol. 160. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.

43 : Malgaca, Levent. "Integration of active vibration control methods with finite element models of smart laminated composite structures." Composite Structures 92.7 (2010) : 1651-1663.