



## Mémoire de Master

2<sup>ème</sup> année

Structures

**Analyse numérique du comportement à la rupture en  
flexion des plaques stratifiées**

Étudiant :

**Bennia Manel**

Encadreur :

**Dr. Abdelhak Khechai**

**Septembre 2020**

# Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à remercier infiniment mon Dieu tout puissant ALLAH Qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à adresser mes remerciements, les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ma formation.

Je tiens à remercier particulièrement Dr. *Khechai Abdelhak*, d'avoir accepté de diriger ce travail en tant qu'encadreur, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour le soutien, l'aide, et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens à remercier les membres des jurys qui ont bien voulu accepté de juger ce travail.

J'exprime mon profonde gratitude et remerciements à tous les enseignants de département de génie civil de l'université de Biskra qui ont été pour beaucoup dans mon cursus.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien, leurs encouragements et leur patience toute au long de mon parcours scolaire et universitaire sans eux je ne serais pas là aujourd'hui.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

# Dédicace

A tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à ce travail.

A tous ceux qui m'ont encouragés, soutenus et aidés.

A la mémoire de mes parents.

A mes frères et sœurs.

« Oussama, Raja, Hadil, Raid »

A mes proches.

A mes professeurs.

A mes Collègues.

A mes amis

« Yousra, Mounera, Kahina, Khouloud, Ferial, Souhir, Nadjah »

A ceux qui, bien que distants, ont toujours su être présents par leurs apports moraux...

A tous MERCI.

# RESUME

La conception des plaques composites stratifiées nécessite généralement une bonne compréhension et une modélisation adéquate de l'endommagement jusqu'à la rupture. L'objectif principal de ce travail est de déterminer numériquement, en utilisant un élément fini rectangulaire, le comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées. Dans la présente investigation, on va utiliser le critère de rupture de « Tsai-Wu » afin de déterminer la charge ultime qui peut supporter ces plaques et aussi les sites d'endommagement.

D'autre part, plusieurs paramètres, tels que l'orientation des fibres, la stratification des couches et les types de supports 'conditions aux limites', seront étudiés afin de déterminer leur influence sur le comportement à la rupture de ces structures.

**Mots Clés :** Plaques composite stratifiées, Endommagement, Elément fini, Flexion, Tsai-Wu.

# ABSTRACT

The design of laminated composite plates requires generally a good understanding and an adequate modeling of damage. The main objective of this work is to determine numerically, by using a rectangular finite element, the failure behavior of laminated composite plates under bending loading. In the present investigation, we will use 'Tsai-Wu' failure criteria in order to determine the ultimate load that can be carried by these plates and also the damage locations. On the other hand, several parameters, such as fiber orientations, stacking sequence and boundary conditions, will be studied in order to determine their effect on the failure behavior of these structures.

**KEY WORDS:** Laminate plates, Damage, Finite element, Bending, Tsai-Wu

# ملخص

يتطلب تصميم الألواح المركبة المصفحة عمومًا فهمًا جيدًا ونمذجة مناسبة لمعرفة الضرر الناتج عن الفشل.

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو الدراسة العددية، باستخدام عنصر محدود، السلوك عند فشل الانحناء للألواح الليفية

في التحقيق الحالي، سنستخدم أحد معايير الفشل من أجل تحديد الحمولة القصوى التي تتحملها هاته الألواح وتحديد نقاط الضرر.

من ناحية أخرى، سيتم دراسة العديد من المعاملات، مثل اتجاه الألياف، والتقسيم الطبقي للطبقات وشروط الحدود،

من أجل تحديد تأثيرها على سلوك فشل هذه الهياكل.

**الكلمات الرئيسية:** الصفائح الليفية، التلف، العناصر المحدودة، الانحناء

## Sommaire :

<b>Introduction Générale</b> .....	
<b>Problématique</b> .....	
<b>Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites</b> .....	<b>1</b>
I.1 Introduction : .....	1
I.2 Historique :.....	1
I.3 Qu'est-ce que c'est qu'un matériau composite ? .....	2
I.4 Définitions de base :.....	2
I.5 Avantages et les inconvénients des matériaux composites : .....	3
I.6 Éléments constitutants d'un matériau composite :.....	3
I.7 Classification des matériaux composites : .....	5
I.8 Les Composites structuraux :.....	6
I.8.1 Les Composites sandwiches :.....	6
I.8.2 Les composites stratifiés :.....	7
<b>Chapitre II: Comportement mécanique des plaques stratifiées</b> .....	<b>16</b>
II.1 Introduction : .....	16
II.2 Définition d'une plaque : .....	17
II.3 Loi de comportement des stratifiées :.....	18
II.3.1 Caractéristiques du mélange renfort-matrice :.....	18
II.3.2 Loi de Hooke généralisée :.....	24
II.3.3 Différents Types des matériaux :.....	24
II.3.4 Relation contrainte-déformation plane : .....	29
II.3.5 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :.....	29
II.4 Théories utilisées dans la formulation analytique des structures composites :.....	32
II.5 Théorie classique des stratifiées (CLT) :.....	32
II.5.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :.....	33
II.5.2 Expression des résultantes et des moments :.....	35
II.6 Influence de l'empilement des couches :.....	38
II.6.1 Couche isotrope :.....	38
II.6.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux :.....	38
II.6.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes :.....	38
II.6.4 Stratifiés symétriques : .....	39

<b>Chapitre III:</b>	<b>Étude théorique sur les différents critères d'endommagement. ....</b>	<b>42</b>
III.1	Introduction : .....	42
III.2	Critères de rupture [20]:.....	42
III.2.1	Critères en contraintes maximales [2]:.....	43
III.2.2	Critères en déformations maximales [2]:.....	46
III.2.3	Critères interactifs [2, 20]:.....	46
<b>Chapitre IV:</b>	<b>Formulation éléments finis et programmation. ....</b>	<b>53</b>
IV.1	Introduction : .....	53
IV.2	Historique sur la méthode des éléments finis :.....	54
IV.3	Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis :.....	54
IV.4	Type des éléments finis :.....	55
IV.5	Élément utilisé : .....	55
IV.5.1	Fonction de déplacements de l'élément :.....	56
IV.6	Les étapes à suivre afin de calculer la charge ultime :.....	62
IV.7	Validation d'élément fini dans l'analyse des plaques :.....	63
IV.7.1	Plaque isotrope simplement appuyée (SSSS) :.....	64
IV.7.2	Plaque composite monocouche simplement appuyé (SSSS): .....	65
IV.7.3	Plaques isotrope et composite avec différentes conditions aux limites (SSSS) et (EEEE) :	66
<b>Chapitre V:</b>	<b>Etude Paramétrique .....</b>	<b>68</b>
V.1	Cas 1 : Plaque stratifiée encastree [0/90] <sub>s</sub> :.....	68
V.2	Cas 2 : Plaque stratifiée encastree [90] <sub>4</sub> :.....	71
V.3	Cas 3 : plaque stratifiée simplement appuis [0/90] <sub>s</sub> :.....	73
V.4	Cas 4 : Plaque stratifiée simplement appuis [90] <sub>4</sub> :.....	74
<b>Conclusion Générale</b>	<b>.....</b>	<b>75</b>
<b>Référence bibliographique</b>	<b>.....</b>	

## Liste des figures :

Figure (I-1) : Représentation schématique d'un matériau composite [1].....	4
Figure (I-2) : Classification schématique des principaux matériaux de renfort [2].....	4
Figure (I-3): Les structures géométriques des composites [3].....	5
Figure (I-4) : Classification schématique des principaux matériaux de matrice [4].....	5
Figure (I-5) : Classification schématique des types de composites [5].....	6
Figure (I-6) : Un sandwich typique [6].....	7
Figure (I-7) : Pli à renforcement unidirectionnel [7].....	7
Figure (I-8) : Schématisation d'une monocouche [8].....	8
Figure (I-9) : Modèle de base des stratifiés [9].....	9
Figure (I-10) : Désignation d'un stratifié [2].....	9
Figure (I-11) : Convention de signe pour la désignation des stratifiés [2].....	10
Figure (I-12) : L'influence de l'orientation des fibres [2].....	12
Figure (II-1) : Description d'une plaque [13].....	17
Figure (II-2) : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [14].....	19
Figure (II-3) : Schéma simplifié d'une traction longitudinale [2].....	20
Figure (II-4) : Schéma simplifié d'une traction transversale [2].....	22
Figure (II-5) : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal [2].....	23
Figure (II-6) : Représentation schématique d'un matériau orthotrope.....	26
Figure (II-7) : Représentation schématique d'un matériau transversalement.....	28
Figure (II-8) : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [20].....	30
Figure (II-9) : Résultantes en membrane des actions exercées.....	36
Figure (II-10) : Schématisation des moments de flexion et de torsion [2].....	37
Figure (III-1) : Comportements 'fragile' et 'ductile' d'un matériau [2].....	43
Figure (III-2) : Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche [2].....	44
Figure (III-3) : Couche rapportée à des axes de référence quelconques [2].....	44
Figure (III-4) : Traction en-dehors des axes des matériaux [2].....	45
Figure (III-5) : Essais de cisaillement [2].....	50
Figure (IV-1) : Élément plaque rectangulaire [1].....	55
Figure (IV-2) : L'emplacement des plis dans un stratifié [2].....	62
Figure (IV-3) : Géométrie de la plaque.....	64
Figure (IV-4) : Convergence du déplacement pour une plaque isotrope.....	65
Figure (IV-5) : Convergence du déplacement pour une plaque composite monocouche avec une orientation (02/ 90)s .....	66

## Liste des tableaux :

<b>Tableau (IV-I) : Propriétés géométriques et mécaniques de la première plaque test.....</b>	<b>64</b>
<b>Tableau (IV-II) : Déplacement obtenus pour une plaque isotrope. ....</b>	<b>64</b>
<b>Tableau (IV-III) : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième plaque test. ....</b>	<b>65</b>
<b>Tableau (IV-IV) : Déplacement maximum pour la plaque composite. ....</b>	<b>66</b>
<b>Tableau (IV-V) : Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque isotrope. ....</b>	<b>67</b>
<b>Tableau (IV-VII) : Déplacements obtenus pour la plaque isotrope.....</b>	<b>67</b>
<b>Tableau (IV-VIII) : Déplacement obtenus pour la plaque composite.....</b>	<b>67</b>
<b>Tableau (V-I) : Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque stratifiée.....</b>	<b>68</b>
<b>Tableau (V-II) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.1 MPa.....</b>	<b>69</b>
<b>Tableau (V-III) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.2 MPa.....</b>	<b>69</b>
<b>Tableau (V-IV) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.25 MPa.....</b>	<b>70</b>
<b>Tableau (V-VII) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.1 MPa.....</b>	<b>71</b>
<b>Tableau (V-VIII) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.2 MPa.....</b>	<b>71</b>
<b>Tableau (V-IX) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.225 MPa.....</b>	<b>72</b>
<b>Tableau (V-X) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.1 MPa.....</b>	<b>73</b>
<b>Tableau (V-XI) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.2 MPa.....</b>	<b>73</b>
<b>Tableau (V-XIV) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.1 MPa.....</b>	<b>74</b>
<b>Tableau (V-XV) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.2 MPa.....</b>	<b>75</b>

# Introduction Général

De nos jours les matériaux composites sont devenus incontournables et commencent peu à peu à être une alternative aux matériaux classiques, grâce aux avantages qu'ils présentent. En effet, leur résistance et leur rigidité spécifiques rendent leur utilisation prend de l'ampleur dans presque tous les domaines de construction et de l'industrie. Cependant ce type de matériaux possède des comportements très complexes dus à leur hétérogénéité et leur anisotropie prononcé.

## **Problématique :**

Un matériau composite est l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles et de nature différente la plupart du temps les matériaux composite est Hétérogène et Anisotrope. L'un des avantages principaux des matériaux composites, on cite par exemple « orientation des fibres ». Ce dernier permettre d'augmenter les propriétés mécaniques de la structure au même temps cette caractéristique peut créer des problèmes qui conduit à l'endommagement.

La conception des plaques composites stratifiées nécessite généralement une bonne compréhension et une modélisation adéquate de l'endommagement jusqu'à la rupture.

## **L'objectif :**

L'objectif du présent travail est d'étudier numériquement, en utilisant la méthode des éléments finis, le comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées. Dans la présente investigation, on va utiliser l'un des critères de rupture disponible dans la littérature afin de déterminer la charge ultime et les sites d'endommagement. D'autre part, plusieurs paramètres, tels que l'orientation des fibres, la stratification des couches et les conditions aux limites, seront étudiés afin de déterminer leur influence sur le comportement à la rupture de ces structures.

## **Organisation des chapitres :**

Notre travail est divisé en cinq chapitres :

- ❖ **Le premier chapitre** a pour but de présenter une bibliographie qui comporte des généralités sur les matériaux composites ainsi que des spécificités sur les plaques stratifiées.

- ❖ Dans **le deuxième chapitre**, nous allons présenter une étude théorique générale sur le comportement mécanique des plaques stratifiées. Nous allons aussi présenter la relation fondamentale qui décrit la loi du comportement d'une plaque stratifiée.
- ❖ **Le troisième chapitre** a comme but de présenter les différents critères d'endommagement disponible dans la littérature afin d'analyser le comportement à la rupture des plaques composite stratifiées.
- ❖ **Le quatrième chapitre** comportera une formulation mathématique dans laquelle on utilisera un élément de type plaque ainsi qu'un algorithme présentant les différents étapes de programmation de cet élément. Cet élément fini sera ensuite validé par une comparaison avec des résultats analytiques.
- ❖ Dans **le dernier chapitre**, on va analyser et exploiter les résultats donnés par l'élément en changeant les différents paramètres du matériau étudié.

Enfin une conclusion sur les principaux aspects abordés dans cette étude.

# **Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites.**

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

## I.1 Introduction :

La technologie moderne essaie à plusieurs fois de concevoir aux matériaux de construction une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Dans ce même contexte l'ingénieur désire, dans un grand nombre de situations, concevoir des structures présentant un rapport **performance /masse**, le plus élevé possible. Pour atteindre ces performances, il recherche toujours des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées. Les matériaux répondant à ce critère tels que le verre, le carbone, le bore ....sont très fragiles, un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure.

Pour pouvoir réaliser des structures suffisamment tolérantes aux dommages, il est nécessaire d'utiliser des matériaux renforcés par des fibres qui sont liées entre elles par une résine. Aucun matériau classique ne permet de combiner ces caractéristiques d'où la nécessité de l'utilisation des matériaux composites, les matériaux sandwichs et les matériaux intelligents.

## I.2 Historique :

Historiquement, le concept de renforcement à base de fibre, est très ancien ; il a été utilisé par les Egyptiens dans la construction, par l'introduction de la paille dans de l'argile.

En 1942, le premier bateau à base de fibres de verre a vu le jour, et les plastiques renforcés ont fait leur apparition dans les applications aéronautiques et les composants électriques. Les fibres de carbone et de bore à haute résistance étaient introduites au début des années 60, et ont été utilisées dans les composites à haute performances en 1968. Quant aux composites à matrices métalliques, tels que le bore/aluminium, ils ont été introduits dans les années 70. Par la suite, il y a eu le développement des fibres de Kevlar (aramide) en 1973. A la fin des années 70, les applications des matériaux composites ont pris des plus d'ampleur, et ont touché les constructions aéronautique et automobile, les équipements sportifs et l'industrie biomédicale.

Les années 80 par contre ont été marquées par une augmentation spectaculaire de l'utilisation des fibres à haute performances. Actuellement, l'accent est mis sur le développement des composites destinés aux applications à hautes températures, tels que les composites à matrice métallique, à matrice céramique et carbone/carbone [1].

### **I.3 Qu'est-ce que c'est qu'un matériau composite ?**

Un composite est un matériau hétérogène, formé d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion) de nature différente. Ces matériaux sont disposés selon une organisation géométrique, qui confère au composite des propriétés supérieures à celles des constituants pris séparément [2].

Un matériaux composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts, La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure [3].

### **I.4 Définitions de base :**

- ✓ **Homogène** : mêmes propriétés physiques en tout point du matériau.
- ✓ **Hétérogène** : propriétés physiques différentes d'un point à un autre
- ✓ **Isotrope** : mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions.

- ✓ **Orthotrope** : propriétés mécaniques symétriques par rapport à 2 plans de symétrie.
- ✓ **Anisotrope** : l'anisotropie est la propriété d'être dépendant de la direction. Quelque chose d'anisotrope pourra présenter différentes caractéristiques selon son orientation.

Un matériau composite est la plupart du temps *Hétérogène et Anisotrope* [4].

### **I.5 Avantages et les inconvénients des matériaux composites :**

Les avantages des matériaux composites se présentent en :

- ✓ Possibilité de dimensionner les structures « au juste besoin » avec des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement.
- ✓ Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières (coefficient de Poisson négatif, dilatation quasi-nulle...).
- ✓ Possibilité de réaliser des structures de formes complexes réduisant ainsi les coûts d'assemblages.
- ✓ Importantes rigidités et résistances spécifiques afin de concevoir des structures hautes performances tout en réalisant des gains de masse par rapport aux solutions métalliques précédentes.
- ✓ Faible sensibilité à la fatigue.
- ✓ Faible sensibilité à la corrosion [5].

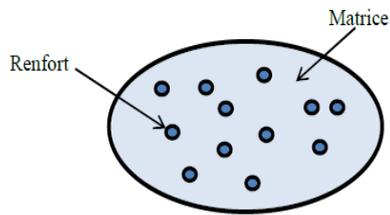
Toutefois, un certain nombre de désavantages sont associés aux matériaux composites :

- ✓ le coût de fabrication est supérieur à celui des matériaux traditionnels.
- ✓ les matériaux composites présentent une forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.

Néanmoins, les avantages des matériaux composites rendent son utilisation rentable, de par l'augmentation de la vie de la structure [6].

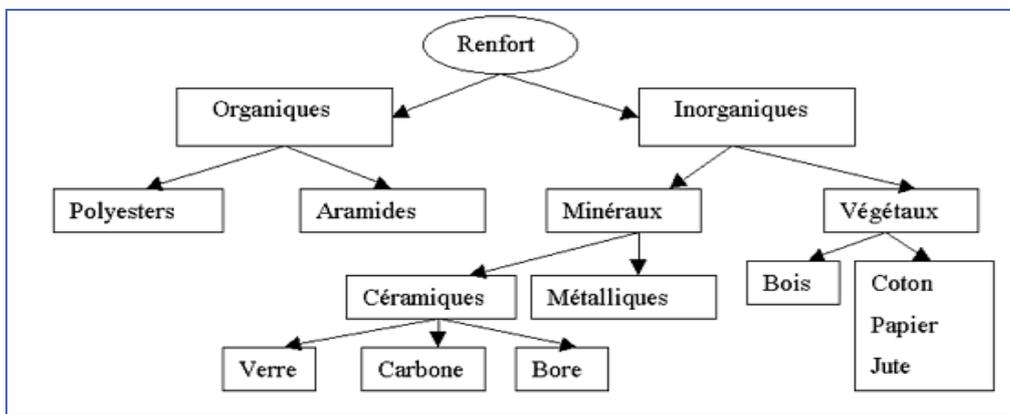
### **I.6 Éléments constitutifs d'un matériau composite :**

D'après Berthelot (2010), un matériau composite plastique : association de deux constituants est indiquée sur la Figure (I-1) suivante :



**Figure (I-1) : Représentation schématique d'un matériau composite [1].**

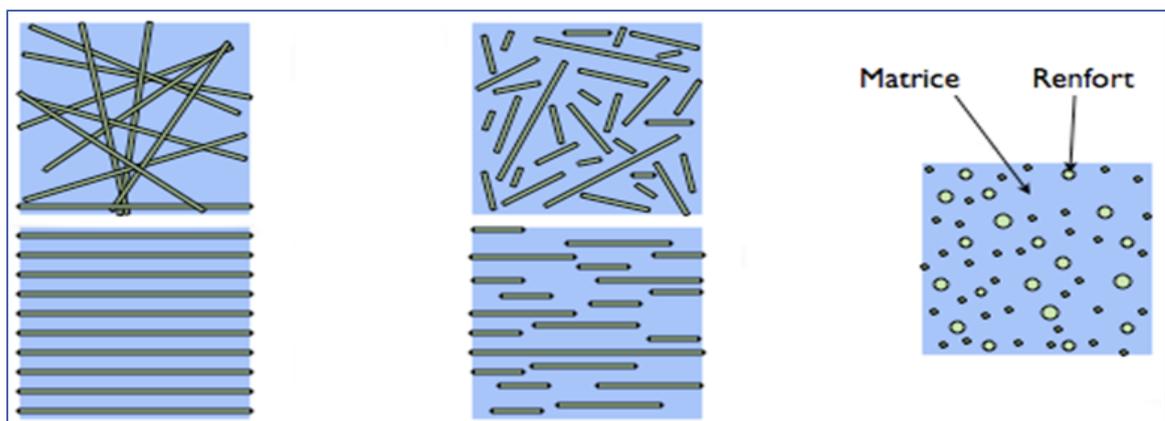
➤ **Le renfort** : armature, squelette, il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la Figure (I-2).



**Figure (I-2) : Classification schématique des principaux matériaux de renfort [2].**

D'un point de vue géométrique, on peut distinguer trois grands types de renforts :

- Les fibres longues (Figure.3. a) ;
- Les fibres courtes (Figure.3. b)
- Les particules (Figure.3. c).



(a) (b) (c)

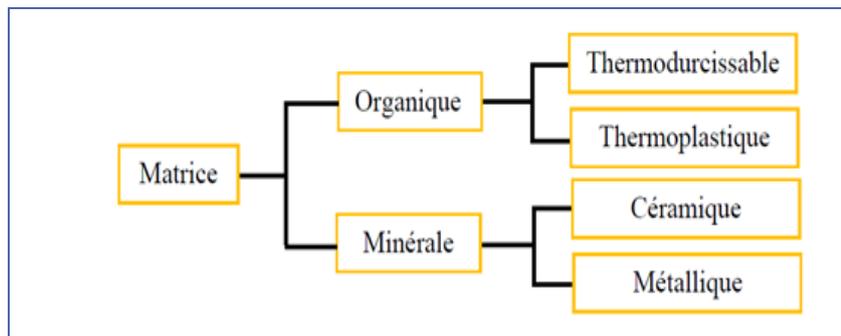
**Figure (I-3): Les structures géométriques des composites [3].**

- **Fibres de verre :**

La forme massive de verre est faite une très grande fragilité, attribuée à une sensibilité Élevée à la fissuration. Par contre, élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (quelques) dizaines de micromètres), le verre perd ce caractère et possède alors de bonnes Caractéristiques mécaniques. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.[7]

➤ **La matrice :**

lie les fibres renforts, répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique. La Figure (I-4) présente la Classification schématique des principaux matériaux de matrice.



**Figure (I-4) : Classification schématique des principaux matériaux de matrice [4].**

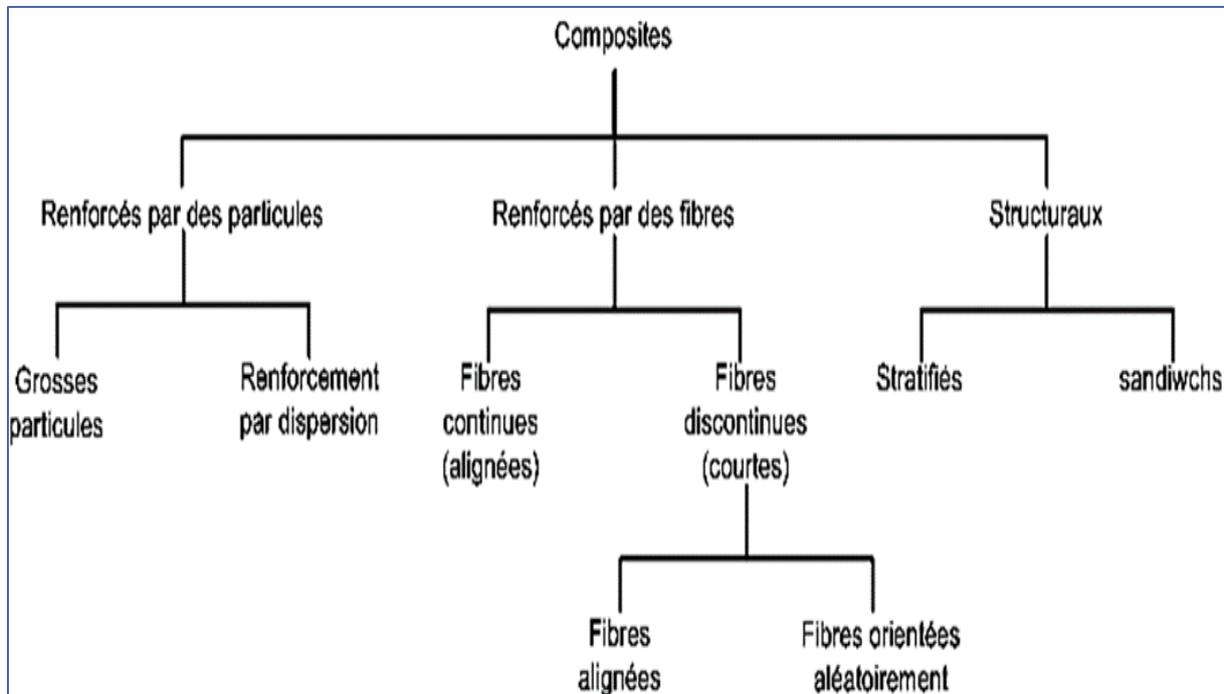
➤ Ces deux constituants principaux reçoivent des additifs ou charges qui sont des produits peuvent être incorporées à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût.

### **I.7 Classification des matériaux composites :**

Différentes classifications des matériaux composites sont rencontrées dans la littérature scientifique. Ces matériaux peuvent être classés selon (1) **la morphologie des agents de renforcement** (les fibres ou particules) ou selon (2) ses **composantes structurelles** (les plis stratifiés). La deuxième classification subdivise les composites en **composites structuraux**,

qui à leur tour, sont subdivisés en **composites sandwichs** et **composites stratifiés** [8].

Voir Figure (I-5)



**Figure (I-5) : Classification schématique des types de composites [5].**

Dans ce qui suit ce chapitre en s'intéressera particulièrement au composite structuraux c'est-à dire les stratifiés et les sandwichs.

## **I.8 Les Composites structuraux :**

En général, un composite structural est constitué d'un matériau homogène et d'un matériau composite. Ses propriétés dépendent de celles de ses constituants et de leur géométrie. Les composites stratifiés et les structures sandwichs sont les composites structuraux les plus courants [6].

### **I.8.1 Les Composites sandwichs :**

Les sandwichs sont des composites structuraux. Ils sont conçus pour être des poutres ou des panneaux légers ayant des rigidités et résistance relativement élevés. Une structure sandwich est obtenue à partir de deux peaux ou revêtements, Réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques, collées sur une âme Réalisée avec un matériau très léger et ayant des faibles caractéristiques mécaniques. L'objet d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et Rigidité [6]. (Voir Figure I-6)

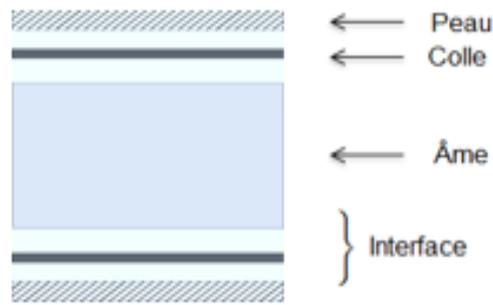


Figure (I-6) : Un sandwich typique [6].

### I.8.2 Les composites stratifiés :

Dans cette section, nous allons discuter les différentes classes des composites stratifiés.

#### I.8.2.1 Les monocouches :

Les monocouches ou plis, représentent l'élément de base de la structure composite. Comme il est indiqué sur les Figures (I-7) et (I-8). Les différents types de monocouches sont caractérisés par la disposition ou la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes.

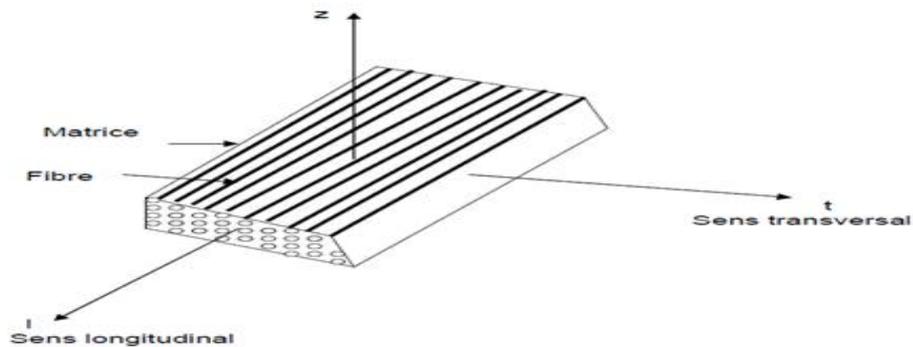
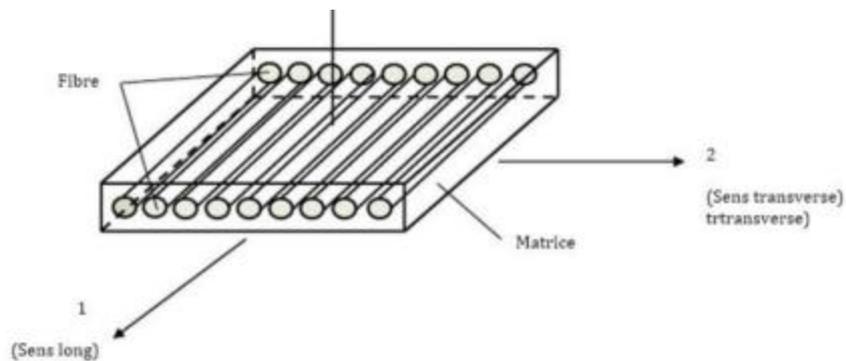


Figure (I-7) : Pli à renforcement unidirectionnel [7].



**Figure (I-8) : Schématisation d'une monocouche [8].**

Les caractéristiques mécaniques de rigidité et résistance des couches normalement utilisées rendent en fait impossible l'utilisation de couches simples principalement à cause de:

- une trop forte anisotropie de la réponse élastique, au moins pour les couches à renfort unidirectionnel.
- une trop faible rigidité ou résistance en direction transversale
- une trop petite épaisseur, ce qui rend d'un côté la rigidité [9] [4] .

**I.8.2.2 Les stratifiées :**

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine.

Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle Microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la Figure (I-9), qui forme les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées.

L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des Contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches) [2] .

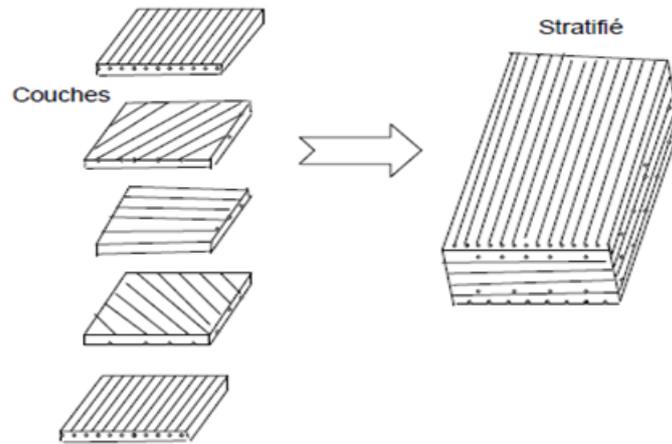


Figure (I-9) : Modèle de base des stratifiés [9].

**Désignation des structures stratifiées :**

- ✚ chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x. Sur les Figures (I-10) (a) et (I-10) (b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;
- ✚ les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » Comme l'exemple de la figure (I.10) (a) :  $[30/90/-45/0/45]$  ;
- ✚ les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la figure (I.10) (b) :  $[30/90_2/45/0/45]$  ;

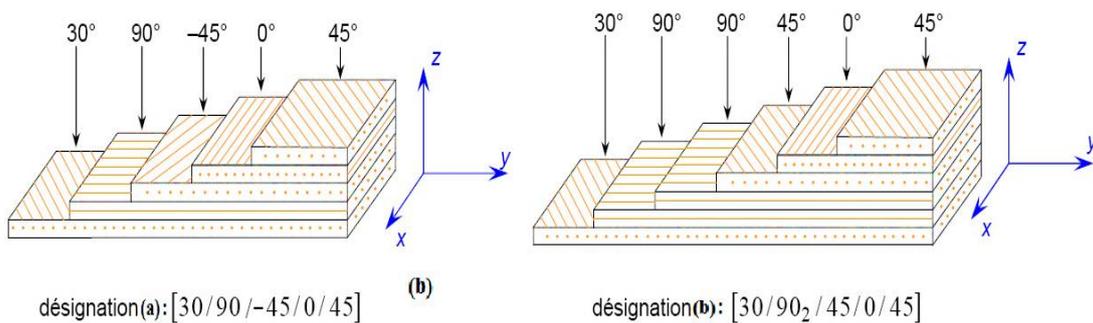
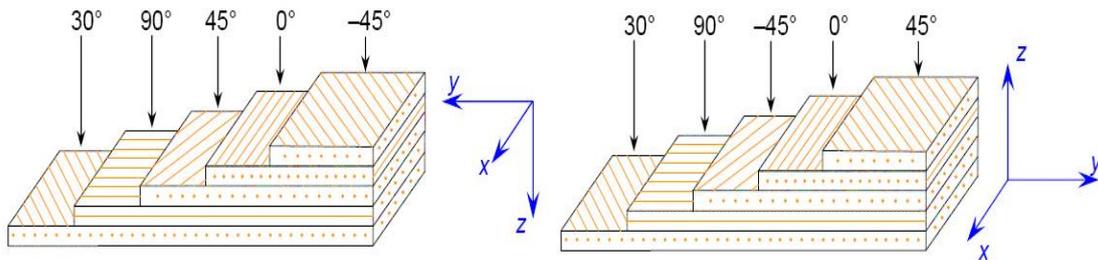


Figure (I-10) : Désignation d'un stratifié [2].

**⚡ Angles positifs et négatifs :**

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou - sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué Figure (I-11).

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés.



**Figure (I-11) : Convention de signe pour la désignation des stratifiés [2].**

	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">0°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">30°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-30°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-45°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">45°</td></tr> </table>	0°	30°	-30°	-45°	45°	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">30°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-60°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-60°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">45°</td></tr> </table>	30°	-60°	-60°	0°	45°	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">0°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-45°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-45°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">45°</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">45°</td></tr> </table>	0°	-45°	-45°	45°	45°
0°																		
30°																		
-30°																		
-45°																		
45°																		
30°																		
-60°																		
-60°																		
0°																		
45°																		
0°																		
-45°																		
-45°																		
45°																		
45°																		
<b>Stratifié:</b>																		
	[ ±45 / ∓30 / 0 ]	[ 45 / 0 / -60 <sub>2</sub> / 30 ]	[ 45 <sub>2</sub> / -45 <sub>2</sub> / 0 ]															
			[ ± ∓ ±45 / 0 ] [ 45 / -45 <sub>2</sub> / 45 <sub>2</sub> / -45 / 0 ]															

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des stratifiés de type :

**⚡ Stratifiés symétriques :**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique.

Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée [2].

**✚ Pourquoi la symétrie miroir :**

Lors de la constitution de la pièce stratifiée, les plis successifs imprégnés de résine sont drapés à température ambiante, puis placés dans une étuve pour la polymérisation. Dans le composite ainsi créé à chaud, la dilatation d'ensemble de la pièce d'origine thermique, s'effectue sans qu'il y ait variation globale de sa forme par voilement ou gauchissement. Par contre lors du refroidissement, les plis ont tendance à se contracter différemment suivant le sens des fibres ou suivant le sens travers. Lorsque la symétrie miroir est réalisée, elle entraîne la symétrie de ces contraintes, et empêche ainsi l'apparition des déformations d'ensemble de la pièce : voilement ou gauchissement [1].

**✚ Séquence :**

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée [2].

**✚ Stratifiés hybrides :**

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation [2].

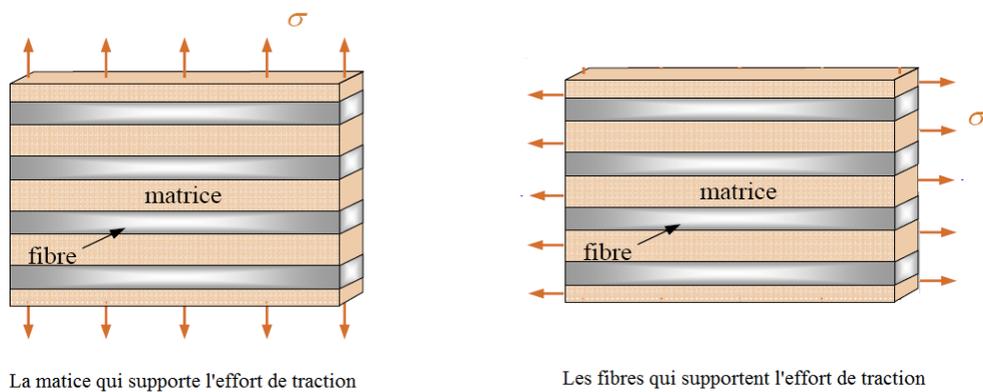
		0°	45°	90°			
90°	45°	45°	90°	0°	0°	0°	0°
45°	45°	90°	45°	90°	45°	45°	45°
45°	45°	90°	90°	60°	-45°	90°	0°
0°	45°	45°	30°	30°	90°	C	V
0°	0°	0°	60°	60°	90°	C	V
45°	45°	90°	30°	30°	-45°	C	V
45°	45°	45°	60°	60°	45°	C	C
90°	90°	0°	30°	30°	0°	V	C

avec V : verre, C : carbone, K : Kevlar

[ 90 / 45 <sub>2</sub> / 0 ] <sub>s</sub>	[ 90 / 45 <sub>2</sub> / 0̄ ] <sub>s</sub>	[ (0 / 45 / 90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	[ (30 / 60) <sub>3</sub> (90 / 45 / 0) <sub>2</sub> ]
Stratifiés symétriques	Séquences	[ 0 <sub>V</sub> / ±45 <sub>C</sub> / 90 <sub>C</sub> ] <sub>s</sub>	[ 0 <sub>2C</sub> / (45 / 90) <sub>SV</sub> / 0 <sub>2K</sub> ]
		Stratifiés hybrides	

✚ **Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation :**

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression, figure (1.6). Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement. En outre, il y a une influence de la forme de renfort sur la déformation. En effet, la raideur obtenue avec un renfort tissé sera moindre que celle que l'on observait en superposant deux directionnels croisés à 90°. Cela est dû à la courbure des fibres du fait de l'opération de tissage, qui rend le pli tissé plus déformable que les unidirectionnels croisés sous une même sollicitation [10] [11].



**Figure (I-12) : L'influence de l'orientation des fibres [2].**

**Chapitre II :**  
**Comportement mécanique des**  
**plaques stratifiées.**

# Chapitre II: Comportement mécanique des plaques stratifiées.

## II.1 Introduction :

Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite, dans ce domaine, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées.

Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité, de la taille et surtout de l'orientation des fibres. Le comportement mécanique d'un matériau composite varie fortement avec l'orientation des fibres. Pour obtenir une résistance élevée, il faut orienter les fibres parallèlement à la direction des contraintes les plus élevées. Dans le cas des matériaux composites, l'élaboration du matériau et la fabrication du composant sont dans un grand nombre de cas simultanés et indissociables. Un premier type de structures réalisables à l'aide d'un matériau composite est constitué par les plaques ou de coques stratifiées .Dans une plaque sollicitée en flexion, ce sont les couches externes qui sont les plus sollicitées [12] .

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie aérospace, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...). Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

Nous allons présenter ici une bibliographie générale non détaillée concernant l'étude du comportement des plaques isotropes et composites.

## II.2 Définition d'une plaque :

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan  $x y$ ) et par une épaisseur (notée  $h(x, y)$ ) petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur (Figure II.1)). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes [13].

Les propriétés d'une plaque dépendent, en grande partie, de son épaisseur en fonction de ses autres dimensions. nous distinguerons deux sortes de plaques :

- ✓ les plaques *minces*,
- ✓ les plaques *épaisses*.

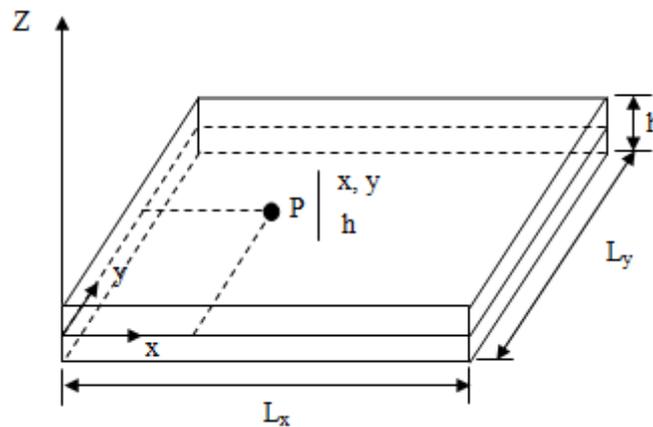


Figure (II-1) : Description d'une plaque [13].

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ .

Il existe plusieurs théories utilisées pour décrire le comportement mécanique des Matériaux multicouches. On peut citer la théorie classique de la plaque stratifiée (CLPT), la Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), la théorie d'élasticité à trois dimensions qui est Assez précise pour les plaques anisotropes [14].

## Chapitre II : Comportement mécanique des plaques stratifiées

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant la théorie des plaques minces, ou la théorie classique des stratifiés pour exprimer les résultantes  $N_{ij}$  et les moments  $M_{ij}$  en fonction des déplacements de la plaque, lorsque cette dernière est constituée d'un matériau composite stratifié.

Premièrement, nous allons écrire dans le repère global la loi de comportement d'un pli composite afin de relier le champ des contraintes au champ des déformations, Ensuite les résultantes et les moments seront exprimés en tenant compte du comportement mécanique des différents plis composites.

### II.3 Loi de comportement des stratifiés :

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu *homogène équivalent anisotrope*. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases :

- ✓ l'étude du comportement mécanique de chaque pli,
- ✓ l'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par *le comportement du stratifiés* [3].

Historiquement, L'étude du comportement des plaques stratifiées composites est basée sur la théorie des stratifiés. Cette théorie utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques qui sont, dans un schéma de premiers degrés, associées aux noms de Reissner/Mindlin et de Kirchoff-Love. La théorie de Kirchoff-Love est historiquement l'une des premières approches bidimensionnelles de la flexion des plaques élastiques. Elle est basée sur l'hypothèse de conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse.

#### II.3.1 Caractéristiques du mélange renfort-matrice :

Les principaux types de matériaux composites utilisés pour la fabrication de systèmes structuraux sont ceux formés par une phase discontinue, appelée *renfort*, insérée dans une phase solide, appelée *matrice*. La distribution et l'interaction, physique et chimique, entre les deux phases donne les propriétés mécaniques finales du matériau composite.

En général, les composites structuraux sont présentés sous la forme d'un empilage de plusieurs plis, chacun présentant des fibres orientées selon une direction préférentielle. L'ensemble matrice-fibres forme le *pli*, l'ensemble de plis orientées forme le *stratifié* [15].

Les propriétés mécaniques moyennes de chaque *pli* sont obtenues par la *règle de mélange* [8]. Selon celle-ci, certaines propriétés du pli, telles que ses modules d'élasticité et sa densité, sont obtenus grâce à l'utilisation de la *fraction volumique de fibres et de la matrice* [2, 16].

Pour cela, La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer *les caractéristiques mécaniques du matériau* en fonction de celles de ses composants. Dans la plupart des cas, ces calculs se réduisent uniquement au calcul du *module d'Young*. Il existe divers modèles d'homogénéisations pour l'obtenir.

D'après Paolo [13], Soit un matériau composite de repère d'orthotrope (1, 2, 3), l'axe 1 ou l'axe *longitudinal* étant disposé conventionnellement selon la direction des fibres, Les directions normales aux fibres dans le plan de la couche sont appelées directions *transversales*, Le composite est considéré comme étant *isotrope transverse* c'est-à-dire qu'il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse est repéré par les deux directions équivalentes 2 et 3.

Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des *fibres unidirectionnelles* uniformément distribuées dans le corps de la couche (Voir Figure II.2).

Soit une cellule élémentaire de *fraction volumique*  $V = 1$  constituée de fibres et de matrice avec :

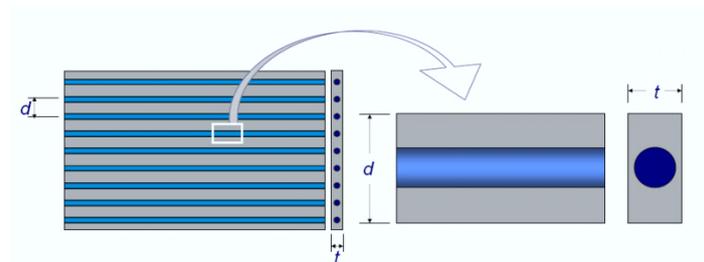


Figure (II-2) : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [14].

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} : \text{Fraction volumique de matrice}$$

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} : \text{Fraction volumique de fibre}$$

$$V = V_m + V_f = 1 \tag{2.1}$$

Nous nous proposons, par le biais du volume élémentaire représentatif introduit auparavant, de trouver les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'une couche à renfort unidirectionnel uniformément reparti.

Les hypothèses de calcul sont :

- matrice *isotrope*, de module d'Young  $E_m$  et coefficient de Poisson  $\nu_m$  ;
- fibres *isotropes*, de module d'Young  $E_f$  et coefficient de Poisson  $\nu_f$  ;
- la fraction volumique des fibres est connue  $V_f$  ;
- le comportement est *élastique linéaire* ;
- il y a une *adhésion parfaite* entre les fibres et la matrice.

L'objectif est de déterminer les constantes techniques homogénéisées de la couche ( $E_1, E_2, G_{12}$  et  $\nu_{12}$ ); à cause de la disposition régulière des fibres, cette dernière a un *comportement macroscopique orthotrope*.

### II.3.1.1 Modules de Young longitudinale $E_1$ :

Le volume élémentaire représentatif est soumis à un état de sollicitation dans lequel seulement  $\sigma_1$  n'est pas nulle, voir la (Figure II.3).

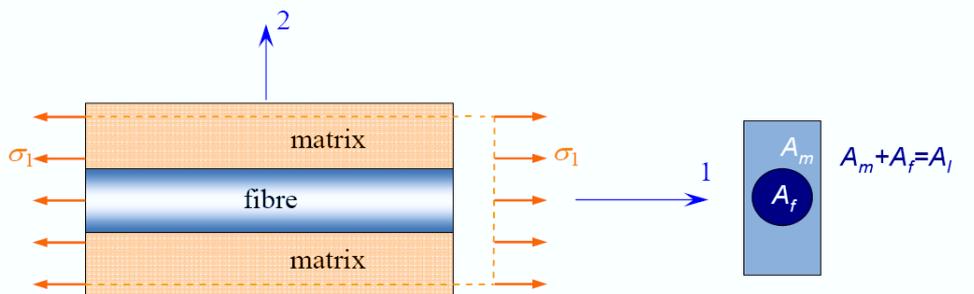


Figure (II-3) : Schéma simplifié d'une traction longitudinale [2].

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l \quad (2.2)$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même

partout (en particulier, les sections droites restent planes):

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.3)$$

## Chapitre II : Comportement mécanique des plaques stratifiées

Où l'indice ( $m$ ) indique une quantité relative à la matrice, ( $f$ ) à la fibre et ( $l$ ) à la couche.

$$\sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m$$

L'équilibre impose la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_1^l A_l &= \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ &= E_1^f \varepsilon_1^l A_f + E_1^m \varepsilon_1^l A_m = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La loi de comportement de l'unidirectionnelle s'écrit :

$$\sigma_1^l A_l = E_1 \varepsilon_1^l A_l$$

$$\text{Donc} \quad E_1 \varepsilon_1^l A_l = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \Rightarrow E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_l}$$

$$\text{avec} \quad V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{A_f}{A_l} \quad \text{et} \quad V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_l}$$

On obtient

$$E_1 = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (2.5)$$

Relation très bien vérifiée dans la direction des fibres. Cette dernière est la célèbre *loi des mélanges*, qui donne la valeur homogénéisée du module d'Young en direction longitudinale (celle des fibres).  $E_1$  Dépend linéairement de  $V_f$ , à savoir de la quantité de fibres présentes.

Le modèle utilisé pour trouver  $E_1$  est un modèle de type *parallèle* : matrice et fibres travaillent en parallèle, pour le champ de contraintes appliqué.

### II.3.1.2 Modules de Young transversal $E_2$ :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seulement  $\sigma_2$  n'est pas nulle, voir (la Figure II.4).

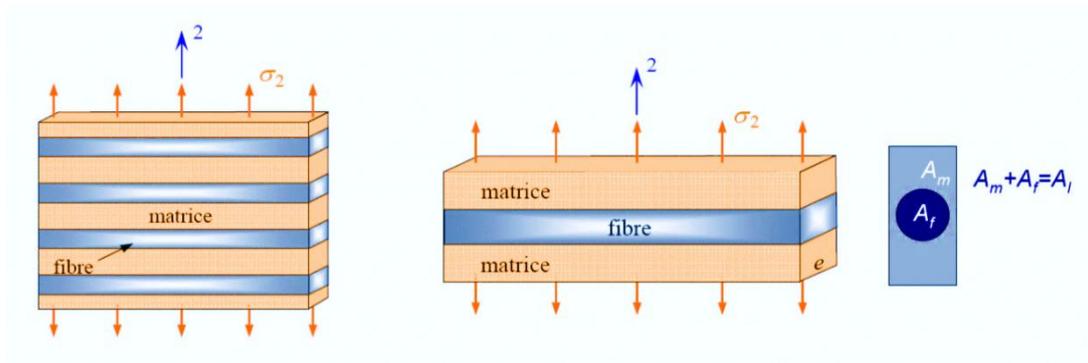


Figure (II-4) : Schéma simplifié d'une traction transversale [2].

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite.

$$\sigma_2^l = \sigma_2^m = \sigma_2^f \quad (2.6)$$

La compatibilité de la déformation implique :

$$\begin{aligned} V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_2^m \\ \Rightarrow V \frac{\sigma_2^l}{E_2} &= V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1-V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m} \\ \text{Donc} \quad \frac{1}{E_2} &= \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1-V_f)}{E_2^m} \\ E_2 &= \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^m + (1-V_f) E_2^f} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La dépendance du module  $E_2$  de  $V_f$  n'est plus linéaire ; en outre, la présence des fibres donne **une faible** à  $E_2$  : les fibres ne sont pas un **renfort efficace** pour la rigidité transversale.

Le modèle utilisé est un modèle de type *série*.

### II.3.1.3 Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ :

Comme pour  $E_1$ , on applique un état de contrainte où seulement  $\sigma_1$  n'est pas nulle.

$$\text{Par définition : } \nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l} \quad (2.8)$$

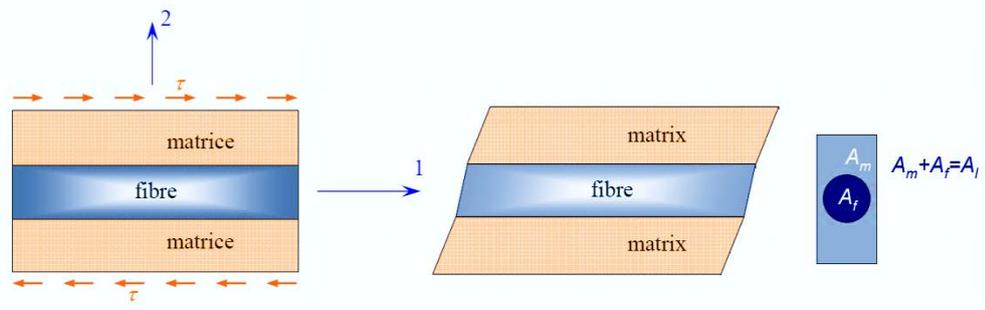
$$\text{D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que : } \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (2.9)$$

Comme  $E_2$  pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation :

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_2^m \\
 \Rightarrow \varepsilon_2^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \\
 \Rightarrow \nu_{12}\varepsilon^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \\
 \text{finalement :} \quad \nu_{12} &= \nu_f V_f + (1-V_f)\nu_m \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

### II.3.1.4 Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule  $\tau$  n'est pas nulle, voir la figure (II.5), où on a mis en évidence même la déformation correspondante



**Figure (II-5) : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal [2].**

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^l = \tau^m = \tau^f \quad (2.11)$$

Tandis que par le lien élastique on a :

$$\tau^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \tau^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \tau^l = G_{12} \varepsilon_6^l \quad (2.12)$$

La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_6^l &= \varepsilon_6^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_6^m \quad \Rightarrow \frac{\tau^l}{G_{12}} = \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1-V_f) \\
 \Rightarrow G_{12} &= \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1-V_f) G_f} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

### II.3.2 Loi de Hooke généralisée :

Les contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) et les déformations ( $\varepsilon_{kl}$ ) sont associées au tenseur de rigidité  $C_{ijkl}$  en utilisant la **loi de Hooke dans le domaine de l'élasticité linéaire**, et sont exprimées, en notation indicielle, sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.14)$$

Où  $i, j, k, l$  prennent les valeurs 1,2,3.  $\varepsilon_{kl}$  est le **tenseur de déformations**,  $\sigma_{ij}$  est le **tenseur de contraintes** et  $C_{ijkl}$  est le **tenseur d'élasticité** (ou de **rigidité**).

Les composantes du tenseur des contraintes et des déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de sa symétrie. Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante :

$$\text{Le tenseur des contraintes : } \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{Le tenseur des déformations : } \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

La **loi de Hooke** est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes et de déformations selon l'équation:

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (2.17)$$

### II.3.3 Différents Types des matériaux :

Dans cette section, nous allons présenter les différents types des matériaux concernant leurs comportements mécaniques.

### II.3.3.1 Matériaux anisotropes :

les **matériaux anisotropes** sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie [17].

La **loi de Hooke** peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \quad (2.18)$$

Où  $S_{ijkl}$  est le tenseur de souplesse. Le tenseur de rigidité en a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\varepsilon_{kl}$ , il y a une réduction des coefficients à 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants.

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases}$$

Application du théorème des travaux virtuels :  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6):

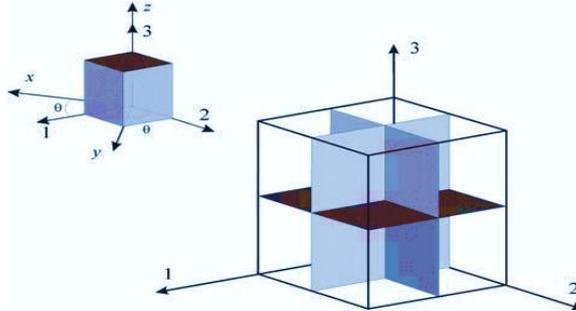
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sym & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La forme inverse de l'équation (2.19), est écrite sur la forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & sym & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

**II.3.3.2 Matériaux orthotropes :**

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels [18].



**Figure (II-6) : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie [18].**

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

\* 3 modules d'élasticité longitudinal  $E_1, E_2, E_3$  dans les directions de l'orthotrope.

\* 3 modules de cisaillement  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ .

\*  $\nu_{ij}$  : ( $\nu_{12}, \nu_{23}$  et  $\nu_{31}$ ) est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction  $j$  quand la contrainte est appliquée selon la direction  $i$ .

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante :

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} ; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} ; \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse  $S_{ij}$  :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{44} = G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12}$$

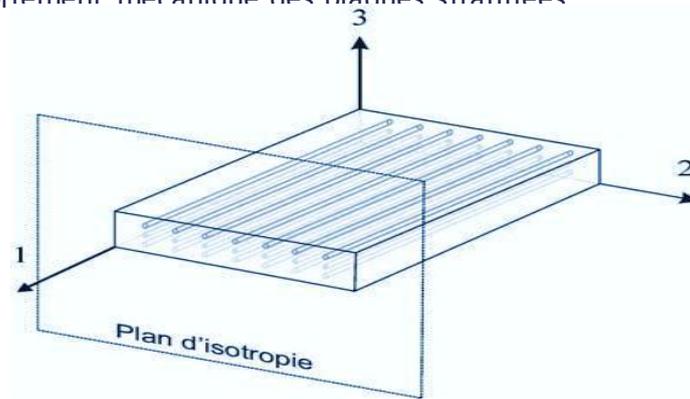
$$C_{12} = \frac{\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{13} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

### II.3.3.3 Matériaux transversalement isotropes :

De la même façon que dans le matériau orthotrope, le matériau transversalement isotrope a trois plans de symétrie (Figure II.6). Toutefois, un de ces plans est isotrope. Le composite renforcé par fibres longues et uniformes est un exemple de matériau transversalement isotrope

[2].



**Figure (II-7) : Représentation schématique d'un matériau transversalement Isotrope [19].**

Celui-ci a des fibres alignées par rapport à la direction 1 du système de référence matériau (Figure II.7). Dans ce cas, le plan perpendiculaire au plan des fibres, plan (2,3), est dit isotrope.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc :

$$C_{22} = C_{33} \quad C_{12} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66} \quad C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2}$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ( $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}$  et  $G_{12}$ ).

### II.3.3.4 Matériaux isotropes :

L'hypothèse d'**isotropie** impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base [2].

Donc, les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad ; \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \quad \text{et} \quad G_{12} = G_{31} = G_{23} = G$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Avec :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

### II.3.4 Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de contrainte plane, La relation contrainte déformation peut être donnée par [2] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ sym & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Les coefficients  $Q_{ij}$  sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.27)$$

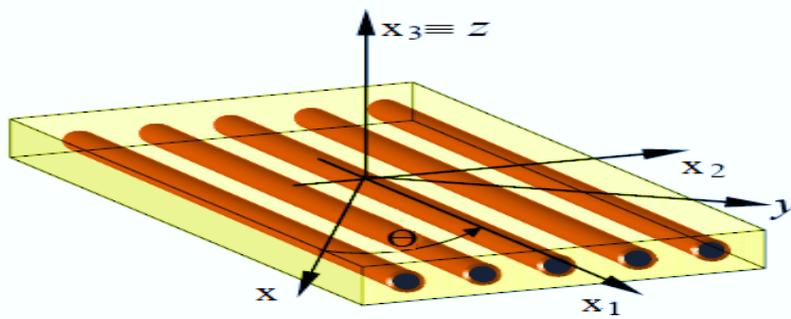
Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ( $E_1, E_2, \nu_{12}$  et  $G_{12}$ ), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement pur.

### II.3.5 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Selon Berthelot, les stratifié sont élaborés par l'empilement de couche successible dont la direction des fibres est variable d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un système d'axe de référence pour

l'ensemble du stratifiée, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotropie sont définis à partir du repère local  $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$ . En règle générale, l'axe  $(x_1)$  est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe  $(x_2)$  est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe  $(x_3)$  est perpendiculaire au plan du pli (voir Figure II.8). Il est question de caractériser les propriétés élastique de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence  $(x, y, z)$  du stratifié, la direction des fibres fait un angle  $(\theta)$  avec la direction  $x$ .



**Figure (II-8) : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [20].**

Les matrices d'élasticité  $\bar{C}$  et de souplesse  $\bar{S}$  dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse  $C$  et  $S$  les relations de **changement de base** Suivantes :

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T] \quad (2.28)$$

$$Et \quad [\bar{S}] = [T]^{-1}[S][T] \quad (2.29)$$

Avec  $T$  est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Avec  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$

$$\text{Et } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

De même pour les déformations, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère  $(x, y, z)$  sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \text{sym} & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Il faut toutefois noter que  $\bar{Q}_{16}$  et  $\bar{Q}_{26}$  ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales

et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales.

#### II.4 Théories utilisées dans la formulation analytique des structures composites :

Différentes théories, utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation, ont été initialement utilisées pour la modélisation de structures métalliques (en matériau isotrope), puis étendues à l'étude de structures composites (en matériau anisotrope, orthotrope ou transversalement isotrope). Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories :

- ✓ celles formulées tenant pour base la notion d'une seule couche équivalente.
- ✓ celles formulées sur le concept de couches distinctes (discrètes).

La première catégorie inclue **la théorie classique des stratifiés** ou '**Classical Laminate Theory**' (CLT).

Dans la section subséquente, nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant : la théorie classique des stratifiés.

#### II.5 Théorie classique des stratifiés (CLT) :

La CLT est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes.

D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure (connue comme surface de référence ou surface neutre), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction.

Selon Reddy [19] , dans la théorie CLT les effets des déformations de cisaillements transversaux ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) et la déformation normale transversale ( $\varepsilon_z$ ), ne sont pas considérés.

Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie CLT, sont :

- Le stratifié est considéré comme une superposition de couches parfaitement liées, (la liaison est supposée infinitésimale) afin d'éviter le délaminage,

- La déformation est supposée continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre,
- Le stratifié se comporte comme une seule couche mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.
- La déformation transversale est nulle, (pas de variation de l'épaisseur).
- Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.
- Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
- Le stratifié est considéré mince, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure ;
- Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

Selon Reddy [19] , le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante:

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les déformations de cisaillement transverse ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie *CLT* n'est adéquate que dans l'étude structures minces. Ainsi, selon CEN et al. [25], l'erreur commise par son emploi augmente avec le ratio de l'épaisseur-*largeur* des structures composites.

### II.5.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié. Pour l'obtention des relations entre les composantes des déplacements et des déformations nous considérons dans ce mémoire que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de l'élasticité linéaire. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements ( $u, v, w$ ) par rapport aux coordonnées  $(x, y, z)$ . Donc, selon Reddy [19], ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

- des déformations de membrane :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

S'exprimant en fonction des déplacements  $(u_0, v_0)$  des points situés dans le plan  $(o y z)$ .

- des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f = z\kappa(x, y) = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

$\kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

$$\text{Finalement le champ des déformations s'écrit : } \varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f \tag{2.39}$$

A partir de l'équation (2.33) les contraintes dans une couche  $k$ , s'expriment par :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \text{sym} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right]$$

$$\text{où } \sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y) \tag{2.40}$$

$\sigma_k(M)$  Représente la matrice de contrainte dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ , la matrice de rigidité réduite  $\bar{Q}_k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes dans les couches successives.

## II.5.2 Expression des résultantes et des moments :

### II.5.2.1 Résultantes en membrane :

D'après Berthelot [2], Les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur :

$$\begin{aligned}
 N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz & (2.41) \\
 &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\
 &= \left[ \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y)
 \end{aligned}$$

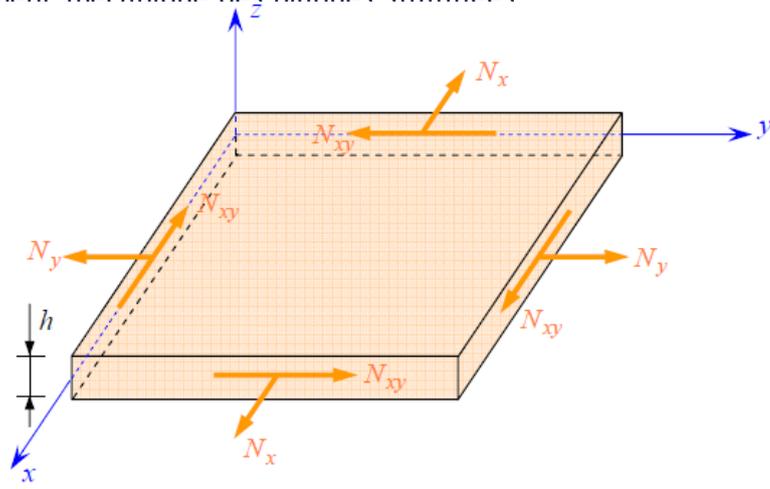
Soit, en définitive:

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.42)$$

$$\text{avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.43)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.44)$$

$N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes *par unité de longueur*, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et de contrainte de cisaillement dans le plan ( $x, y$ ). Elles sont schématisées sur la figure (II.9).



**Figure (II-9) : Résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié [2].**

### II.5.2.2 Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned}$$

Soit, en définitive:

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.46)$$

$$\text{avec } B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.47)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.48)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion et  $M_{xy}$  le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la Figure (II.10).

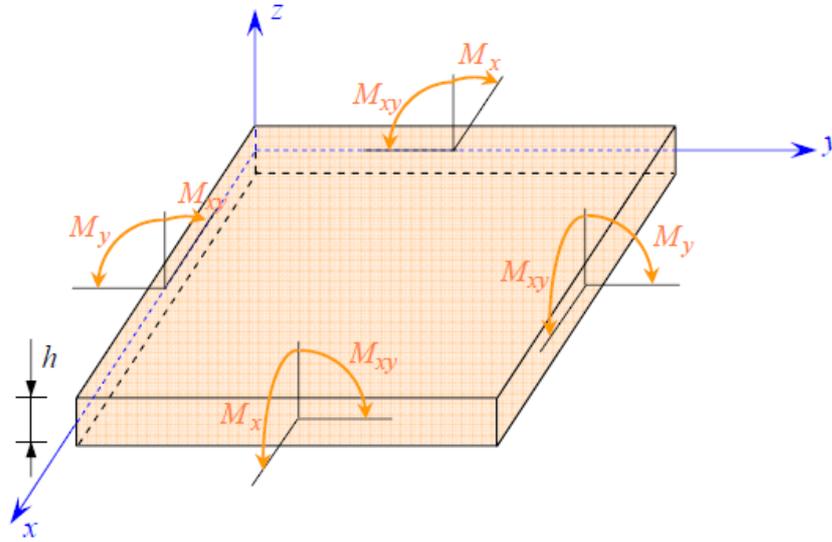


Figure (II-10) : Schématisation des moments de flexion et de torsion [2].

Connaissant que  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont indépendants de  $z$ , les vecteurs forces et moments résultant peuvent être assemblés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice  $ABD$ ) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- ✓ la matrice  $A$  correspond au comportement de membrane,
- ✓ la matrice  $D$  correspond au comportement de flexion,
- ✓ la matrice  $B$  correspond aux termes de couplage entre les phénomènes de membrane et de flexion.

Ainsi, si  $B$  n'est pas nul, un effort de traction dans le plan moyen entraîne une flexion du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

\* Les termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$  correspondent aux couplages plans entre traction et cisaillement.

\* Les termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$  quantifient les couplages entre flexion et torsion de la plaque stratifiée.

Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite.

## II.6 Influence de l'empilement des couches :

### II.6.1 Couche isotrope :

Dans le cas d'une plaque en matériau homogène isotrope, le comportement élastique est décrit par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

Les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) dépendent uniquement des déformations en membrane ( $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ ) et les moments de flexion et torsion ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) dépendent uniquement des courbures du plan moyen ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ). Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

### II.6.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux :

Berthelot (2010) considère que pour une couche orthotrope, d'épaisseur  $h$ , dont les axes du matériau sont confondus avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

D'où l'expression des coefficients de rigidité du stratifié :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= Q_{ij} h & D_{ij} &= Q_{ij} \frac{h^3}{12} \\ A_{16} = A_{26} &= 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} = D_{26} &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

### II.6.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes :

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope *ne coïncident pas* avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Où les coefficients  $\bar{Q}_{ij}$  hors axes sont définis en fonction des coefficients  $Q_{ij}$  dans les axes du matériau. Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \bar{Q}_{ij} h & D_{ij} &= \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12} \\ A_{16} = A_{26} &= 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} = D_{26} &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion.

Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les résultantes normales  $N_x, N_y$  dépendent des déformations axiales  $\varepsilon_x^0$  et  $\varepsilon_y^0$ , ainsi que de la déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}^0$ . Il existe donc dans ce cas un couplage traction-cisaillement.

De la même manière, les composantes des moments dépendent toutes des courbures en flexion  $\kappa_x, \kappa_y$ , et de la courbure en torsion  $\kappa_{xy}$ . Il existe donc également un couplage flexion-torsion.

## II.6.4 Stratifiés symétriques :

### II.6.4.1 Cas général :

Selon Berthelot (2010), Un stratifié est symétrique si le plan moyen est plan de symétrie.

Deux couches symétriques ont :

- la même matrice de rigidité réduite  $[\bar{Q}_{ij}]_k$ ,
- la même épaisseur  $h_k$ ,

Il en résulte que les coefficients  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité du stratifié sont **nuls**. L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

On remarque qu'il n'existe pas de *couplage membrane-flexion* dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux. Les stratifiés symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique.

#### II.6.4.2 Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié (symétrie miroir) :

La matrice de rigidité réduite de chaque couche est dans ce cas de la forme :

$$[Q]_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{21}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Où les coefficients de rigidité réduite s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur de chaque couche.

Les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment donc suivant :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{K=1}^N Q_{ij}^k h_k & A_{ij} &= \sum_{K=1}^N \frac{1}{3} Q_{ij}^k h_k^3 \\ A_{16} = A_{26} &= 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} = D_{26} &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

D'où l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

## Chapitre II : Comportement mécanique des plaques stratifiées

Outre que l'absence de couplage membrane flexion/torsion, il y a également absences de couplages en traction- cisaillement et en torsion-flexion.

Dans le cas de la symétrie miroir des couches d'un matériau composite stratifié, **les caractéristiques élastiques équivalentes** sont :

$$E_x = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{22}} \quad E_y = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{11}}$$
$$v_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad v_{yx} = \frac{A_{21}}{A_{11}} \quad G_{xy} = \frac{A_{33}}{h}$$

## **Chapitre III: Étude théorique sur les différents critères d'endommagement.**

# Chapitre III: Étude théorique sur les différents critères d'endommagement.

## III.1 Introduction :

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés. D'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible : soit à la rupture réelle du matériau (Figure III.1.a), soit à la limite du domaine élastique (Figure III.1.b). Dans le cas des matériaux composites, la limite du domaine élastique est généralement liée à l'apparition de la microfissuration : micro ruptures dans la matrice, ruptures de fibres, décohésion fibres-matrice, etc. Une fois initiées, ces microfissures restent généralement localisées, ne modifiant que très progressivement la rigidité du matériau.

D'après Les critères de rupture d'une couche d'un stratifié on a des critères en contraintes maximales et des critères en déformations maximales, des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques

Dans ce chapitre on s'intéresse beaucoup plus sur les microfissures basé sur « First Ply Failure Theory ».

## III.2 Critères de rupture [20]:

Parmi ces critères, le critère de la contrainte maximale (ou sa forme duale, le critère de la déformation maximale) est le critère le plus simple et celui qui reste le plus utilisé dans les bureaux d'études. On considère que le matériau casse dès qu'une des composantes du tenseur des contraintes (ou des déformations) dépasse une valeur seuil. Le critère de la contrainte maximale est découplé. En effet, bien qu'il informe sur le mode de rupture du matériau, il ne

tient pas compte des interactions entre les différentes composantes du tenseur des contraintes. Ainsi, pour des chargements multiaxiaux, il surestime généralement la contrainte à rupture.

### III.2.1 Critères en contraintes maximales [2]:

#### III.2.1.1 Critères dans les axes principaux :

Les critères en contraintes maximales font intervenir :

$X_t, X_c$  sont les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression.  $Y_t, Y_c$  sont les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression.  $S$  est la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (Figure III.2). Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement.

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes ( $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$ ) dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante.

Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme :

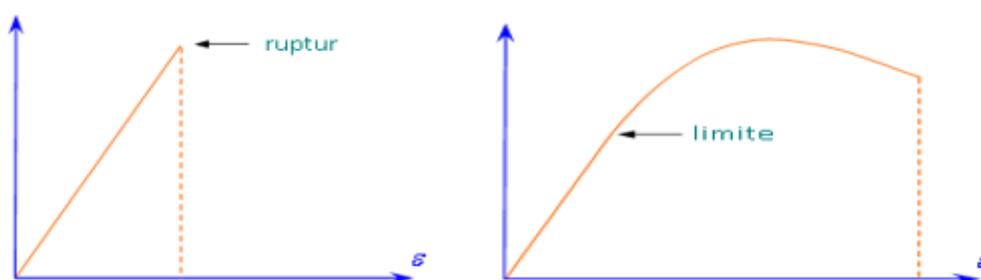


Figure (III-1) : Comportements 'fragile' et 'ductile' d'un matériau [2].

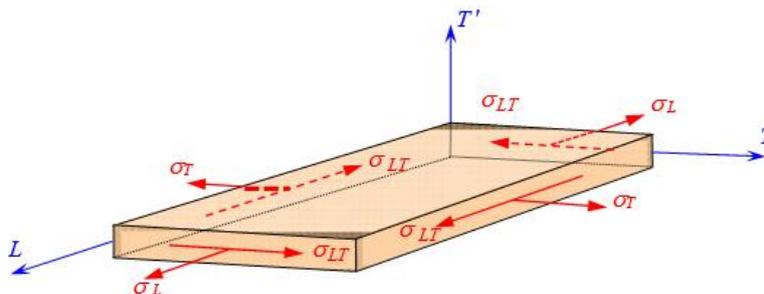


Figure (III-2) : Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche [2].

$$\begin{aligned}
 -Xc &< \sigma_L < Xt \\
 -Yc &< \sigma_T < Yt \\
 -S &< \sigma_{LT} < S
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas. Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

### III.2.1.2 Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux :

Dans le cas où l'état des contraintes est exprimé dans des axes de référence (x, y, z) (figure III.3), il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle  $\theta$ . Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent d'après (2.69) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_l &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta. \\
 \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta. \\
 \sigma_{LT} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

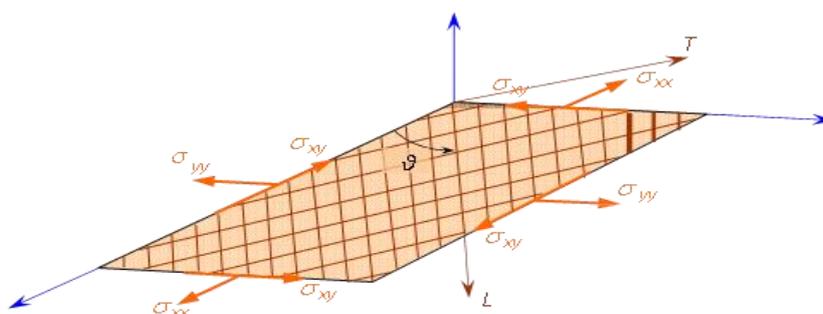


Figure (III-3) : Couche rapportée à des axes de référence quelconques [2].

et les critères (3.1) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}
 -Xc &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Xt \\
 -Yc &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Yt \\
 -S &< (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < S
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

### III.2.1.3 Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux :

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes des matériaux (Figure III.4) : les contraintes (3.2) se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 \sigma_l &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta \\
 \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta \\
 \sigma_{LT} &= -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

et les critères en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}
 -Xc &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta < Xt \\
 -Yc &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta < Yt \\
 -S &< -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta < S
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Ce critère peut être représenté graphiquement en traçant la valeur maximale  $\sigma_{xu}$  de la contrainte  $\sigma_{xx}$  de traction ou compression pour laquelle l'un des critères est atteint, en fonction de l'angle  $\theta$  entre la direction du chargement et les directions du matériau.

Dans un essai de traction, la contrainte de traction  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :

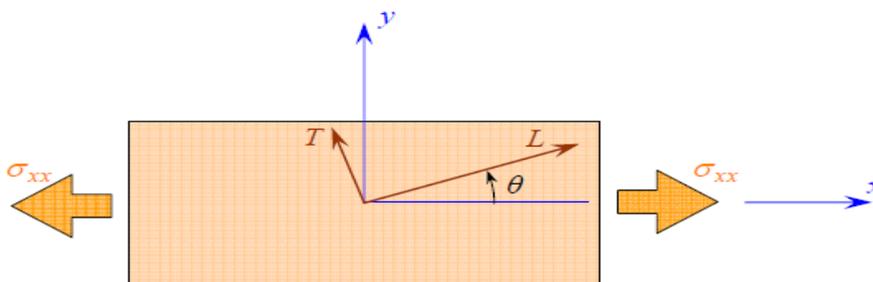


Figure (III-4) : Traction en-dehors des axes des matériaux [2].

$$\sigma_{xu} = \frac{X_t}{\cos^2 \theta} , \quad \sigma_{xu} = \frac{X_c}{\sin^2 \theta} , \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3.6)$$

et dans un essai de compression, la contrainte de compression  $\sigma_{xu}$  correspond à la plus petite des valeurs :

$$\sigma_{xu} = \frac{X_c}{\cos^2 \theta} , \quad \sigma_{xu} = \frac{X_t}{\sin^2 \theta} , \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3.7)$$

La valeur  $\sigma_{xu}$  étant alors la détermination positive de la contrainte.

### III.2.2 Critères en déformations maximales [2]:

#### III.2.2.1 Critère dans les axes des matériaux :

Les critères en déformations maximales sont transposés des critères en contraintes maximales, les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations font intervenir :

$X\epsilon_t$  ( $X\epsilon_c$ ) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal.  $Y\epsilon_t$  ( $Y\epsilon_c$ ) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal.  $S\epsilon$  : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante. Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned} -X\epsilon_t < \epsilon_L < X\epsilon_c \\ -Y\epsilon_c < \epsilon_T < Y\epsilon_c \\ -S\epsilon < \gamma_{LT} < S\epsilon \end{aligned} \quad (3.8)$$

### III.2.3 Critères interactifs [2, 20]:

Les critères en contraintes maximales et en déformations maximales ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux : les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment.

Des critères interactifs ont alors été recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises, utilisé pour les matériaux isotropes. Le critère de Von Mises est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé. C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont parfois appelés critères énergétiques. Toutefois, dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation.

### III.2.3.1 Critère de Hoffman :

Une généralisation du critère de Hill, tenant compte de la différence du comportement des matériaux en traction et en compression, a été formulée par O. Hoffman [19]. Le critère de Hoffman admet que la rupture du matériau se produit lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} C_1 (\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + C_2 (\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + C_3 (\sigma_L - \sigma_T)^2 + C_4 \sigma_L + C_5 \sigma_T + C_6 \sigma_{T'} \\ + C_7 \sigma_{TT'}^2 + C_8 \sigma_{LT'}^2 + C_9 \sigma_{LT}^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les constantes C1 à C9 sont caractéristiques du matériau et reliées aux contraintes à la rupture du matériau par les relations :

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right), \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_t Z_c} + \frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right), \\ C_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right), \quad C_4 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad C_5 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \\ C_6 = \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c}, \quad C_7 = \frac{1}{S_{TT'}^2}, \quad C_8 = \frac{1}{S_{LT'}^2}, \quad C_9 = \frac{1}{S_{LT}^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan (L, T), le critère de Hoffman se réduit à :

$$\frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_c X_t} \sigma_L + \frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_T + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} = 1. \quad (3.11)$$

### III.2.3.2 Théorie générale de Tsai-Wu :

#### III.2.3.2.1 Formulation :

Les critères précédents suffisent généralement pour décrire les divers résultats expérimentaux observés. Toutefois, une des façons d'améliorer la corrélation entre résultats expérimentaux et théoriques est d'accroître le nombre de paramètres des équations théoriques. Ce fait, associé à la possibilité de représenter les critères de rupture sous forme tensorielle, a conduit S.W. Tsai

et E.M. Wu [20] à admettre que la rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_{ij} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.12)$$

où les constantes  $F_i$  et  $F_{ij}$  sont les composantes de deux tenseurs respectivement de rang 2 et de rang 4. La notation contractée usuelle est utilisée dans cette relation pour les contraintes rapportées aux axes des matériaux :

$$\sigma_1 = \sigma_{11} = \sigma_L, \quad \sigma_2 = \sigma_{22} = \sigma_T, \quad \sigma_3 = \sigma_{33} = \sigma_{T'} \quad (3.13)$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{TT'}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{LT'}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{LT}$$

L'équation (3.12) s'écrit sous forme développée suivant :

$$\begin{aligned} & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 \\ & + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + \\ & + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 \\ & + F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 \\ & + F_{44} \sigma_4^2 + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 \\ & + F_{55} \sigma_5^2 + 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 \\ & + F_{66} \sigma_6^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les termes linéaires  $F_i$  prennent en compte la différence éventuelle du comportement du matériau en traction et en compression. Les termes quadratiques  $F_{ij}$  définissent un ellipsoïde dans l'espace des contraintes et tiennent compte des interactions entre les contraintes  $\sigma_i$  et  $\sigma_{ij}$ .

L'intérêt de la formulation développée par Tsai-Wu réside dans :

- ✚ l'invariance de la forme de la relation (3.12) dans tout changement de base ;
- ✚ la transformation du critère suivant les lois de transformation des tenseurs

$$\sigma_i, \sigma_{ij} \text{ Ou } F_i \sigma_i \text{ et } F_{ij}$$

Les propriétés de symétrie des tenseurs  $F_i \sigma_i$  et  $F_{ij}$  similaires à celles des constantes d'élasticité.

### III.2.3.2.2 Expression des constantes :

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas d'un matériau composite orthotrope soumis à un état de contraintes planes dans le plan  $(1, 2) = (L, T)$ . La relation (3.14) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 &= 1 \\ F_1 \sigma_L + F_2 \sigma_T + F_6 \sigma_{LT} + F_{11} \sigma_L^2 + F_{22} \sigma_T^2 + F_{66} \sigma_{LT}^2 + 2F_{12} \sigma_L \sigma_T &= 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Les paramètres  $F_i, F_{ij}$  et peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais.

Dans le cas d'un essai de traction suivant la direction L, la contrainte à la rupture  $X_t$  est telle que :

$$F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1 \quad (3.16)$$

et dans un essai de compression :

$$F_1 X_c + F_{11} X_c^2 = 1 \quad (3.17)$$

De ces deux relations, nous tirons :

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad (3.18)$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \quad (3.19)$$

Par analogie, nous avons de même :

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \quad (3.20)$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad (3.21)$$

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan  $(L, T)$  (Figure III.3.a)

la contrainte à la rupture  $S_{LT}^+$  est telle que :

$$F_6 S_{LT}^+ + F_{66} S_{LT}^{+2} = 1 \quad (3.22)$$

En inversant le sens des contraintes (figure 12.31b), la contrainte à la rupture  $S_{LT}^-$  est telle que :

$$F_6 S_{LT}^- + F_{66} S_{LT}^{-2} = 1 \quad (3.23)$$

Ces deux relations conduisent à :

$$F_6 = \frac{1}{s^+_{LT}} - \frac{1}{s^-_{LT}} \quad (3.24)$$

$$F_6 = \frac{1}{s^+_{LT}s^-_{LT}} \quad (3.25)$$

La contrainte à la rupture étant indépendante du signe de la contrainte de cisaillement, nous avons :

$$s^+_{LT} = s^-_{LT} = s_{LT} \quad (3.26)$$

Il en résulte que dans le cas de matériaux orthotropes :

$$F_6 = 0 \quad (3.27)$$

$$F_6 = \frac{1}{s^2_{LT}} \quad (3.28)$$

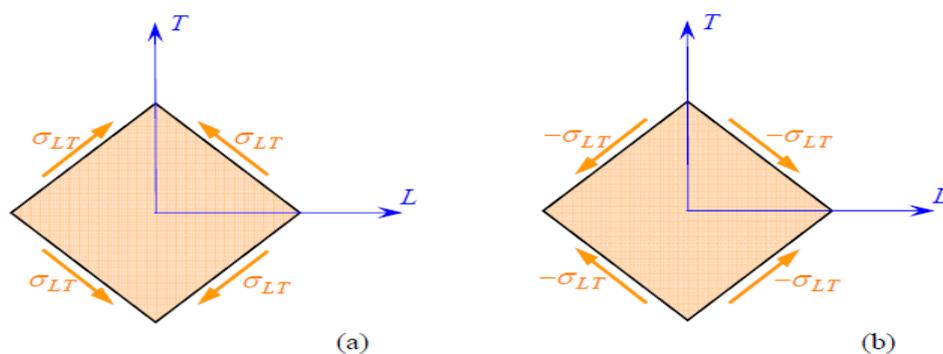


Figure (III-5) : Essais de cisaillement [2].

Il reste à déterminer le paramètre de couplage  $F_{12}$ . Ce paramètre peut être déterminé dans un essai bi axial, par exemple une traction bi axiale. Un tel essai est effectué en exerçant la même contrainte dans les directions 1 et 2 du matériau. Les contraintes sont alors :  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

les autres contraintes étant nulles. Le critère (3.15) s'écrit :

$$(F_1 + F_2) \sigma + (F_{11} + F_{22} + 2 F_{12}) \sigma^2 = 1 \quad (3.29)$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \mathbf{1} - \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} - \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]. \quad (3.30)$$

La valeur  $F_{12}$  de correspond à la valeur  $\sigma$  de la contrainte mesurée lors de la rupture dans l'essai de traction bi axiale .

Dans la pratique, le coefficient d'interaction  $F_{12}$  peut également être déterminé dans un essai de traction (ou compression) à  $45^\circ$  des axes du matériau orthotrope. Dans ce cas, les contraintes dans les axes du matériau sont :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{\sigma_{45}}{2} \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Où  $\sigma_{45}$  est la contrainte de traction exercée. Le critère (3.15) s'écrit dans ce cas :

D'où l'expression du paramètre  $F_{12}$  obtenue dans cet essai :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma_{45}^2} \left[ \mathbf{1} - \frac{\sigma_{45}}{2} \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} - \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{\sigma_{45}}{4} \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S_{LT}^2} \right) \right]. \quad (3.32)$$

La valeur de  $F_{12}$  correspond à la valeur de  $\sigma_{45}$  mesurée lors de la rupture dans un essai de traction à  $45^\circ$ .

### III.2.3.2.3 Critère de Tsai-Wu en contraintes planes :

En tenant compte des résultats précédents, le critère de Tsai-Wu (3.15) dans un état de contraintes planes, s'écrit sous la forme :

$$\left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_L + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_L \sigma_T}{S_{LT}^2} + F_{12}^* \frac{\sigma_L}{X_t} \frac{\sigma_T}{X_c} = \mathbf{1} \quad (3.33)$$

En introduisant le coefficient de couplage  $F_{12}^*$  exprimé suivant :

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \mathbf{1} - \left[ X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \sigma + \left( \mathbf{1} + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right\} \quad (3.34)$$

$$F_{12}^* = \frac{1}{\sigma_{45}^2} \left\{ \mathbf{1} - \left[ X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \frac{\sigma_{45}}{2} + \left( \mathbf{1} + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} + \frac{X_t X_c}{S_{LT}^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{4} \right\} \quad (3.35)$$

où  $\sigma$  et  $\sigma_{45}$  sont les contraintes à la rupture déterminées, respectivement, dans un essai bi axial et dans une traction à  $45^\circ$ . Bien souvent, le coefficient de couplage  $F_{12}^*$  est considéré comme un coefficient empirique, ajusté en fonction des résultats expérimentaux. Dans le cas où le

coefficient de couplage est pris égal à  $\frac{-1}{2}$  :

$$F_{12}^* = \frac{-1}{2} \quad (3.36)$$

le critère de Tsai-Wu en contraintes planes s'écrit :

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right)\sigma_L + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{LT}^2}{s_{LT}^2} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} = 1 \quad (3.37)$$

Nous retrouvons le critère de Hoffman (3.11) en contraintes planes. Si, de plus, les contraintes à la rupture en traction et en compression sont identiques :

$$X_t = X_c = X \quad (3.38)$$

$$Y_t = Y_c = Y \quad (3.39)$$

Le critère (3.37) s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{s_{LT}}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{s^2} = 1 \quad (3.40)$$

# **Chapitre IV: Formulation éléments finis et programmation.**

# Chapitre IV: Formulation éléments finis et programmation.

## IV.1 Introduction :

En pratique, la forme et les conditions d'appuis d'une structure rencontrées dans la majorité des problèmes sont souvent complexe. En générale, on dit qu'une structure est complexe si toute solution analytique de celle-ci est impossible ou est obtenue après des calculs délicats. Cette définition s'applique exactement aux structures en plaques composites. L'utilisation des méthodes numériques de résolution comme par exemple différences finies a comme difficulté majeure, la représentation des conditions aux limites.

Seule la méthode des éléments finis est susceptible de résoudre sans grande difficulté les problèmes de plaque composite de forme d'appuis et de mise en charge quelconques.

L'analyse du comportement des plaques est du plus haut intérêt pour les ingénieurs en génie civil, puisque les dalles constituent l'essentiel de la structure des bâtiments (radier, plancher, toiture...). Donc la mise au point d'un élément fini qui traite parfaitement le comportement d'une plaque composite est, pendant longtemps, un défi lancé aux chercheurs et continue aujourd'hui à susciter beaucoup d'intérêt [21, 22].

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation d'un élément fini . Suite à cette formulation nous avons écrit un programme en langage **FORTRAN77** qui sera utilisé pour calculer les déplacements et les contraintes.

## IV.2 Historique sur la méthode des éléments finis :

Le mathématicien courant décrivait une solution polynomiale par morceaux pour le problème de la torsion. Son travail ne fut pas remarqué par les ingénieurs et la procédure était impossible à l'époque en raison du manque d'ordinateurs. Dans les années 1950, le travail dans l'industrie aéronautique a introduit la méthode MEF aux ingénieurs en exercice. Un article classique décrivait le travail de la MEF qui était motivé par le besoin d'analyser les ailes delta, qui sont trop courtes pour que la théorie des faisceaux soit fiable. Le nom «élément fini» a été inventé en 1960. En 1963, la validité mathématique de la méthode MEF a été reconnue et la méthode a été étendue de ses débuts structurels pour inclure le transfert de chaleur, l'écoulement des eaux souterraines, les champs magnétiques et d'autres zones. De grands logiciels MEF d'utilisation générale ont commencé à apparaître dans les années 1970. À la fin des années 1980, le logiciel était disponible sur micro-ordinateurs, avec des graphiques en couleur et des préprocesseurs et post-processeurs. Vers le milieu des années 1990, environ 40 000 articles et livres sur la méthode MEF et ses applications avaient été publiés [23].

## IV.3 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis :

De toutes les méthodes permettant de résoudre de manière approximative un problème aux limites (séries, différences finies, ...), la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément), sauf cas particuliers.

Ces avantages sont essentiellement les suivants :

- La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse.
- Elle peut être applicable à une variété de problèmes physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque.
- Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite.
- Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).

La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients.

- Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique.

- Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple.
- Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires.
- Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés.
- L'expérience et un grand sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle.
- La plupart des problèmes comportent un grand nombre de données et une foule de résultats qu'on doit dépouiller avec méthode pour une compréhension optimale

#### IV.4 Type des éléments finis :

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie comme suit :

- ✓ **Les éléments unidimensionnels (1D)** : Sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modéliser les raidisseurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.
- ✓ **Les éléments bidimensionnels (2D)** : Élasticité plane : (déformation ou contrainte plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- ✓ **Les éléments tridimensionnels (3D)** : élément de volume, ou coques épaisses.
- ✓ **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique [24].

#### IV.5 Élément utilisé :

L'élément utilisé est un élément rectangulaire de (24) degrés de liberté. La figure montre la géométrie de l'élément utilisé, les dimensions ( $a$  et  $b$ ) et l'épaisseur ( $t$ ).

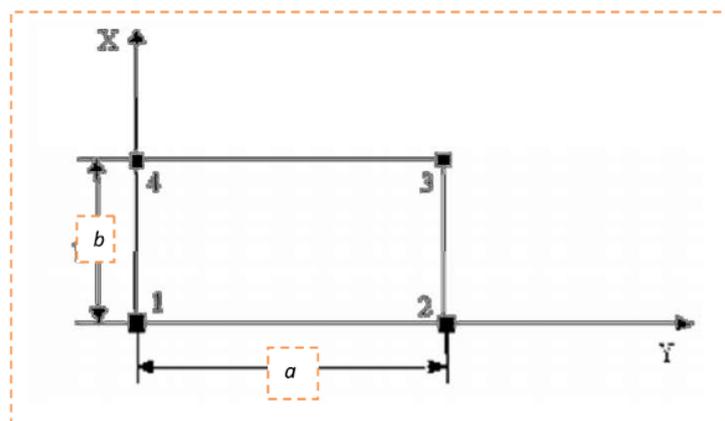


Figure (IV-1) : Élément plaque rectangulaire [1].

**IV.5.1 Fonction de déplacements de l'élément :**

L'élément possède quatre (4) nœuds avec (6) degrés de liberté chacun, ces degrés de liberté sont :

- ✓ Deux degrés de liberté dans le plan (x, y) qui sont (u.v.).
- ✓ Quatre degrés de liberté hors plan qui sont :  $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial xy})$ .

❖ En membrane :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) \\ v(x, y) &= (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) \end{aligned} \tag{4.1}$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

$$\text{Nœud (1) : } (x=0, y=0) : \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8 \tag{4.3}$$

$$\text{Nœud (2) : } (x=a, y=0) : \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8 \tag{4.4}$$

$$\text{Nœud (3) : } (x=a, y=b) : \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8 \tag{4.5}$$

$$\text{Nœud (4) : } (x=0, y=b) : \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,8 \tag{4.6}$$

$$\{\delta_m^e\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8} \{\alpha_i\}_{8 \times 1} \longrightarrow \{\alpha_i\}_{8 \times 1} = [X]^{-1}_{8 \times 8} \{\delta_m^e\}_{8 \times 1}$$

$$\text{et } \{\delta_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{\delta_m^e\} \quad (4.7)$$

Calcul les déformations :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{\alpha_i\} \rightarrow \{\varepsilon(x,y)\} = [Q]\{\alpha_i\}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [Q][X^{-1}]\{\delta_m^e\} = [B_m]\{\delta_m^e\} \quad (4.8)$$

alors :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Donc la matrice  $[B_m]$  relie la déformation membrane avec les déplacements nodaux.

❖ En flexion :

$$w\{x,y\} = [\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3]$$

$$w\{x,y\} = \{p(x,y)\}\{\alpha\}^T$$

avec :

$$\{\alpha\}^T = \{ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9 \ \alpha_{10} \ \alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \alpha_{13} \ \alpha_{14} \ \alpha_{15} \ \alpha_{16} \}$$

$$\{p(x,y)\} = \{ 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ x^2 y^2 \ xy^3 \ x^3 y^2 \ x^2 y^3 \ x^3 y^3 \}$$

L'élément plaque nécessite donc quatre degrés de liberté par nœud.

$$\{w_i\} = \begin{bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}; i=1, 4$$

Ce qui explique l'introduction de la dérivée seconde par rapport à x et y.

$$\begin{bmatrix} w(x,y) \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}$$

Nœud (1) : ( x=0 , y=0 )

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,6$$

Nœud (2) : ( x=a , y=0 )

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,6$$

Nœud (3) : ( x=a , y=b )

$$\begin{bmatrix} w_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \\ \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & 2ab^2 & b^3 & 3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 2a^2b & 3ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & 6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}$$

Nœud (4) :( x=0 , y=b )

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,6$$

$$\{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16} \{\alpha_i\}_{16 \times 1} \longrightarrow \{\alpha_i\}_{16 \times 1} = [X]^{-1}_{16 \times 16} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1}$$

$$\{w(x, y)\} = \{p(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\begin{aligned} \star w_1^*(x, y) &= \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y^3}{b^3}\right) w_1 + \left(-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x1} \\ &+ \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y1} + \left(-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{xy1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star w_2^*(x, y) &= \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y^3}{b^3}\right) w_2 + \left(-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x2} \\ &+ \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y2} + \left(-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{xy2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star w_3^*(x, y) &= \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3}\right) \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3}\right) w_3 + \left(-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x3} \\ &+ \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y3} + \left(-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star w_4^*(x, y) &= \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}\right) \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3}\right) w_4 + \left(-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x4} \\ &+ \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y4} + \left(-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy4} \end{aligned}$$

$$\{w(x, y)\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad \dots \quad N_{13} \quad N_{14} \quad N_{15} \quad N_{16}] \{\delta_f^e\}$$

et

$$\{\delta_f^e\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{xy1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{xy4}\}$$

• **Relation cinématiques :**

L'élément utilisé est basé sur la théorie de Kirchhoff, alors les déplacements dans le plan et hors le plan sont données par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Les déformations sont données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = zk_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = zk_y \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = zk_{xy}\end{aligned}$$

Avec  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_{xy}$  sont les courbures.

$$\{k(x, y)\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{p(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\{k(x, y)\} = [Q]_{3 \times 16} [X^{-1}]_{16 \times 16} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [B_f]_{3 \times 16} \{\delta_f^e\}$$

• **Loi de comportement :**

D'après Berthelot, les résultantes des forces, les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \text{ où } \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^2_k - h^2_{k-1}) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^3_k - h^3_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

• **Détermination de la matrice de rigidité :**

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversale répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + V$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation.

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = 0$$

- Travail virtuels des efforts :

$$\iint \{\partial\delta\}^T \{ [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \} \{\delta\} ds$$

On pose

$$[K^e] = \iint \{\partial\delta\}^T \{ [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \} ds$$

La matrice  $[K^e]$  peut-être écrite sous la forme :

$$[K^e] = [K^e_1] + [K^e_2] + [K^e_3] + [K^e_4]$$

avec :

$$[K^e_1] = [B_m]^T [A] [B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire membranaire.}$$

$$[K^e_2] = [B_m]^T [B] [B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion.}$$

$$[K^e_3] = [B_f]^T [B] [B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage flexion-membrane.}$$

$$[K^e_4] = [B_f]^T [D] [B_f] \text{ Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.}$$

Le travail virtuel s'écrit :

$$\delta U = \{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\}$$

$[K^e]$  Est la matrice de rigidité élémentaire ; la matrice de rigidité globale de la structure s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

- Travail virtuels des forces extérieures

Soit  $\{\partial\delta\}$  le vecteur des déplacements virtuel, alors le travail des forces appliquées à l'élément est donné par :

$$\delta V = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

En équilibre, les travaux virtuels sont égaux, alors on aura :

$$\delta U = \delta V$$

$$\{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\} = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante :

$$[K^e] \{\delta\} = \{f^e\}$$

Après assemblage, on obtient l'équation d'équilibre globale :

$$[K_G] \{\delta_G\} = \{f_G\}$$

Ou  $[K_G]$  est la matrice de rigidité globale,  $\{\delta_G\}$  est le vecteur déplacement global et  $\{f_G\}$  est le vecteur de force global.

**IV.6 Les étapes à suivre afin de calculer la charge ultime :**

1. calculer les valeurs de la matrice de rigidité réduite  $[Q]$  pour chaque pli, à l'aide de ses quatre modules élastiques  $E_1 E_2 \nu_{12}$  et  $G_{12}$ .
2. Trouver les valeurs de la matrice de rigidité réduite transformée  $[\bar{Q}]$  pour chaque pli, En utilisant la matrice calculée à l'étape 1 et l'angle du pli.
3. avoir l'épaisseur,  $t_k$  de chaque pli, trouver les coordonnées de la surface supérieure et inférieure  $h_i, i = 1 \dots, n$ , de chaque pli en utilisant l'équation suivante :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

L'emplacement du plan médian est  $h/2$ , à partir de la surface supérieure ou inférieure du stratifié. La coordonnée  $z$  de chaque surface de pli  $k$  (supérieure et inférieure) est donné par :

1. Pli 1 :

$$h_0 = -\frac{h}{2} \text{ (surface supérieure)}$$

$$h_1 = -\frac{h}{2} + t_1 \text{ (surface inférieure)}$$

2. Pli  $k$  : ( $k= 2,3, \dots, n-2, n-1$ )

$$h_{k-1} = -h/2 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i \text{ (surface supérieure).}$$

$$h_k = -h/2 + \sum_{i=1}^k t_i \text{ (surface inférieure).}$$

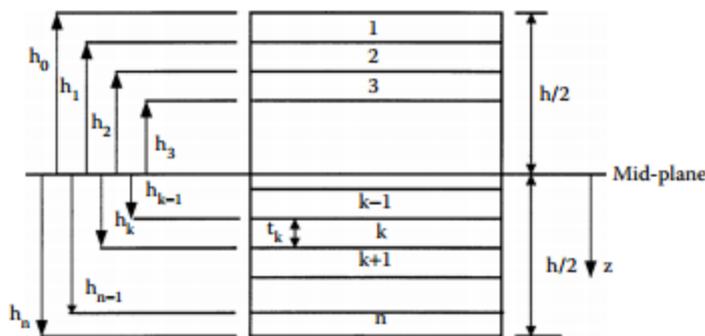
3. Pli  $n$  :

$$h_{n-1} = \frac{h}{2} - t_n \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_n = \frac{h}{2} \text{ (Surface inférieure).}$$

Considérons un stratifié composé de  $n$  couches comme illustré à la figure (IV.2) chaque couche a une épaisseur  $t_k$ . Donc, l'épaisseur totale de ce stratifié 'h' est :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$



**Figure (IV-2) :L'emplacement des plis dans un stratifié [2].**

4. Utiliser les matrices de rigidité transformée de l'étape 2 et l'emplacement de chaque couche de l'étape 3, pour trouver les trois matrices de rigidité  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$
5. Remplacer les valeurs de la matrice de rigidité trouvées à l'étape 4 et les forces et moments appliqués dans l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix}$$

6. résolvez les six équations simultanées pour trouver les déformations et les courbures du plan moyen.
7. Maintenant que l'emplacement de chaque couche est connu, trouver les déformations globale dans chaque couche en utilisant l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

8. Pour trouver les contraintes globales, utilisez la relation contrainte-déformation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

9. Pour trouver les déformations locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}$$

10. Pour trouver les contraintes locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

D'après avoir les contraintes locales dans chaque couche, nous pouvons utiliser l'un des critères de rupture afin de calculer la charge admissible. Dans ce travail nous allons utiliser le critère de Tsai-Wu.

#### IV.7 Validation d'élément fini dans l'analyse des plaques :

Dans cette section, nous allons tester l'efficacité de notre élément rectangulaire à quatre nœuds, dans l'étude du comportement mécanique des plaques stratifiées.

La validation se tiendra par la convergence des résultats des déplacements numériques obtenus par notre élément aux ceux obtenus analytiquement et par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

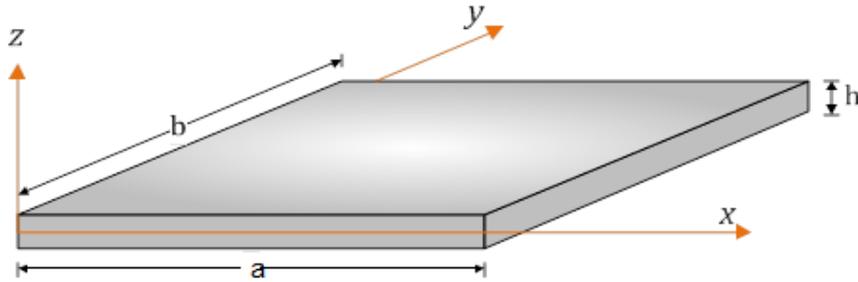


Figure (IV-3) : Géométrie de la plaque.

#### IV.7.1 Plaque isotrope simplement appuyée (SSSS) :

La première structure test est une plaque carrée, chargée par une charge répartie de 1 MPa, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau IV.1) :

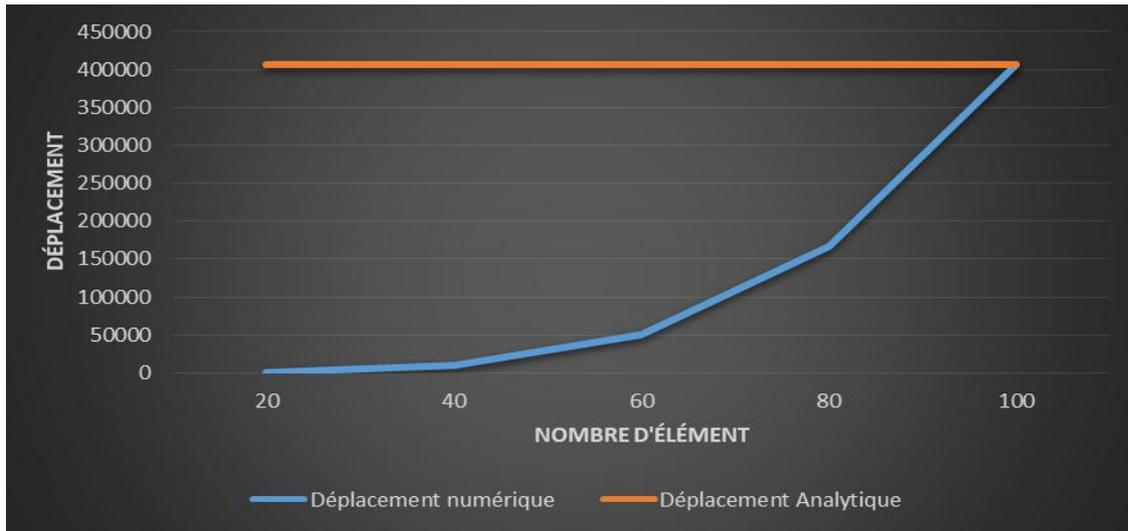
Tableau (IV-I) : Propriétés géométriques et mécaniques de la première plaque test.

E (MPa)	$\nu$	G (MPa)	a et b (mm)	h (mm)
10.92	0.3	4.2	100	1

La solution analytique du déplacement est donnée par T. Pour différents maillages, la convergence du déplacement obtenu est regroupée dans le tableau (IV-II) et tracée sous forme de graphe (figure IV.4).

Tableau (IV-II) : Déplacement obtenus pour une plaque isotrope.

Maillage	Déplacement
2*2	$0.688 \cdot 10^3$
4*4	$1.042 \cdot 10^4$
6*6	$4.993 \cdot 10^4$
8*8	$1.664 \cdot 10^5$
10*10	$4.062 \cdot 10^5$
Déplacement analytique	$4.062 \cdot 10^5$



**Figure (IV-4) : Convergence du déplacement pour une plaque isotrope.**

D'après les résultats donnés par l'étude analytique du déplacement et les résultats obtenus par notre élément, on peut constater que les résultats sont pratiquement identiques.

#### IV.7.2 Plaque composite monocouche simplement appuyé (SSSS):

La deuxième structure test est une plaque composite stratifiées, simplement appuyé (SSSS) chargée par une charge répartie de 1 MPa. Le nombre des couches dans cette plaque est 6 couches. Les dimensions et les propriétés mécaniques de cette plaque sont regroupées au (tableau IV.3) :

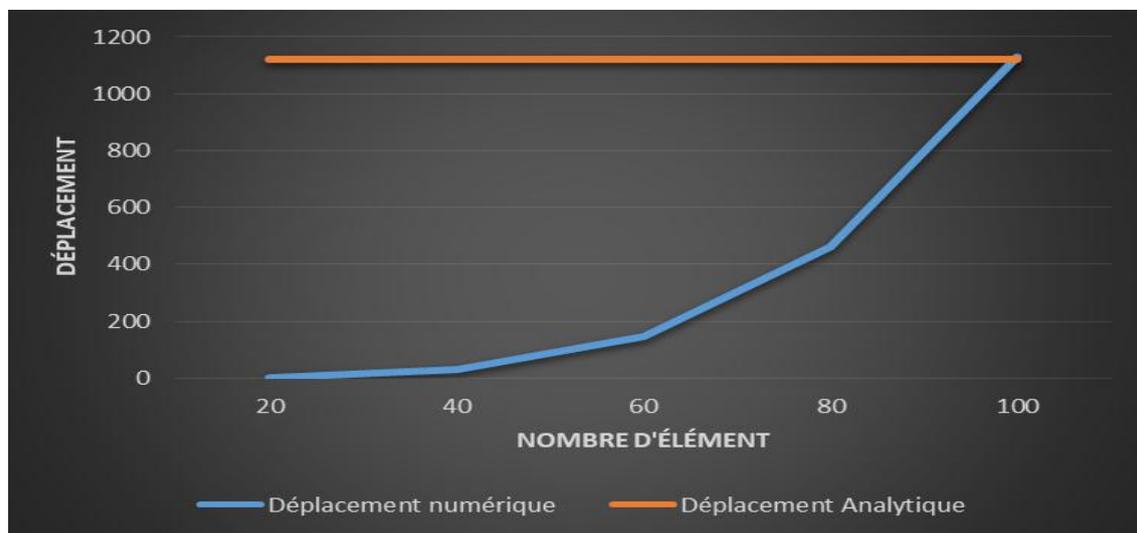
**Tableau (IV-III) : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième plaque test.**

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$	a et b (mm)	h (mm)	L'orientation des fibres
46	10	4.6	0.25	100	1	$(0_2/90)_s$

Pour différents maillages, la convergence du déplacement obtenu est regroupée dans le tableau (IV-IV) et tracée sous forme de graphe (figure IV.5).

**Tableau (IV-IV) : Déplacement maximum pour la plaque composite.**

Maillage	Déplacement numérique
2*2	1.8427
4*4	$2.947 \cdot 10^1$
6*6	$1.461 \cdot 10^3$
8*8	$4.611 \cdot 10^3$
10*10	$1.128 \cdot 10^3$
Déplacement analytique	$1.122 \cdot 10^3$



**Figure (IV-5) : Convergence du déplacement pour une plaque composite monocouche avec une orientation  $(0_2/90)_s$ .**

D'après les résultats donnés par l'étude analytique du déplacement et les résultats obtenus par notre, on peut observer que notre élément converge par une manière très rapide vers le résultat obtenu analytiquement et qui montre la performance de l'élément utilisé.

### IV.7.3 Plaques isotrope et composite avec différentes conditions aux limites (SSSS) et (EEEE) :

Dans la prochaine section, nous étudierons deux plaques isotrope et composite dont les conditions aux limites sont les suivantes :

- (SSSS) Simplement appuyée dans les quatre cotés.
- (EEEE) Encastrée dans les quatre cotés.

Nous utilisons des plaques isotropes et composites avec différentes conditions aux limites pour ainsi voir leurs influences sur les résultats obtenus.

Les dimensions et les propriétés mécaniques de ces plaques sont regroupées aux (tableaux IV.V et IV.I). Les plaques sont chargées par une charge répartie de 1 MPa.

**Tableau (IV-V) : Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque isotrope.**

E (MPa)	$\nu$	G (MPa)	a et b (mm)	h (mm)
210000	0.3	80796.23	100	1

**Tableau (IV-VI) : Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque composite.**

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$	a et b (mm)	h (mm)	L'orientation des fibres
<b>46</b>	<b>1</b>	<b>0.6</b>	<b>0.25</b>	<b>100</b>	<b>(0.333/0.166/0.166/0.333)</b>	<b>(0<sub>2</sub>/90)<sub>s</sub></b>

Pour un maillage de 10x10, les déplacements obtenus sont regroupés dans les tableaux (IV-VII et IV-VIII).

**Tableau (IV-VII) : Déplacements obtenus pour la plaque isotrope.**

Maillage <b>10*10</b>	Déplacement numérique	
	(SSSS)	(EEEE)
<b>Présent élément</b>	21.125	6.582
<b>Déplacement analytique</b>	21.125	6.581

**Tableau (IV-VII) : Déplacement obtenus pour la plaque composite.**

Maillage <b>10*10</b>	Déplacement numérique	
	(SSSS)	(EEEE)
<b>Présent élément</b>	4.323*10 <sup>5</sup>	8.681*10 <sup>4</sup>
<b>Déplacement analytique</b>	4.323*10 <sup>5</sup>	8.683*10 <sup>4</sup>

Dans les présents tableaux, on remarque que les déplacements obtenus en utilisant des plaques encastées sont supérieurs à ceux obtenus pour les plaques simplement appuyées. A travers des comparaisons, on observe que notre élément donne des résultats pratiquement identiques aux ceux obtenus analytiquement, et le maillage n'a pas nécessairement besoin d'être très raffiné.

# **Chapitre V:**

## **Etude Paramétrique**

# Chapitre V: Etude Paramétrique

Après avoir validé l'élément R4 et s'être assuré du bon fonctionnement de notre programme, nous allons maintenant exploiter ce dernier pour analyser numériquement l'influence de stratification des couches sur la charge de rupture.

Afin d'évaluer l'effet de l'orientation des fibres sur la charge de rupture, on propose de procéder à une étude paramétrique, qui a comme objectif de déterminer l'influence de l'orientation des fibres et de la stratification des couches sur la valeur maximale de la charge de rupture et les zones des points d'endommagement.

## V.1 Cas 1 : Plaque stratifiée encastrée $[0/90]_s$ :

La structure test est une plaque composite stratifiée encastrée (EEEE). Le nombre des couches dans cette plaque est 4 couches. Les dimensions et les propriétés mécaniques de cette plaque sont regroupées au (tableau V.I) :

**Tableau (V-I) : Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque stratifiée.**

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$	a et b (mm)	h (mm)
<b>141000</b>	<b>9340</b>	<b>4500</b>	<b>0.35</b>	<b>100</b>	<b>(0.333/0.166/0.166/0.333)</b>
$X_t$ (MPa)	$Y_t$ (MPa)	$X_c$ (MPa)	$Y_c$ (MPa)	S (MPa)	
<b>1500</b>	<b>180</b>	<b>1000</b>	<b>240</b>	<b>150</b>	

Dans cet exemple, notre plaque soumise à une charge uniformément répartie varie de 0.1 à 0.25 MPa. A travers ce test, nous souhaitons de déterminer la charge maximale qui peut cette plaque supportée. D'une autre part, nous voulons déterminer les points d'endommagement, la couche endommagée et les mécanismes de rupture pour chaque configuration de stratification.

Pour un maillage de 10x10, les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux (V-II, V-III et V-IV).

- Pour une charge 0.1 MPa:

**Tableau (V-II) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.1 MPa.**

charge	Flèche	couche	nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?	
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		oui	non
					+	-	+	-	+	-		
0.1	2.373	TOP1	56	2.745	25.305		68.182			1.723		×
		BOT1	56	8.280	9.388		22.704			5.733		×
		TOP2	55	4.633	319.773		7.509			8.272		×
		BOT2	T	1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$			$4.022 \times 10^{-9}$		×
		TOP3	T	1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$			$4.022 \times 10^{-9}$		×
		BOT3	56	3.132		342.209		7.838		8.938		×
		TOP4	6	6.073		176.646		4.095		5.943		×
		BOT4	6	2.009		533.920		12.378		1.786		×

- Pour une charge 0.2 MPa:

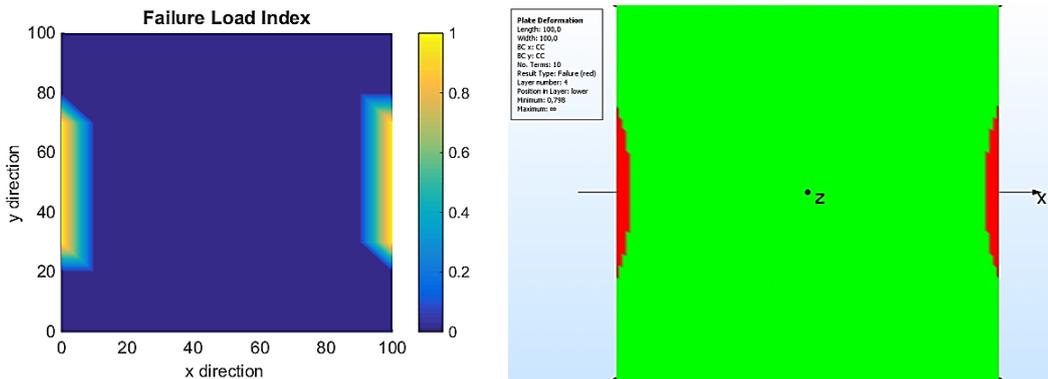
**Tableau (V-III) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.2 MPa.**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?	
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		oui	non
					+	-	+	-	+	-		
0.2	4.746	TOP1	56	1.371	49.157		136.330			3.446		×
		BOT1	56	4.129	17.322		45.374			1.146		×
		TOP2	56	2.316	684.521		15.965			1.775		×
		BOT2	T	1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$			$4.022 \times 10^{-9}$		×
		TOP3	T	1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$			$4.022 \times 10^{-9}$		×
		BOT3	56	1.566		684.453		15.773		1.783		×
		TOP4	6	3.024		354.747		8.224		1.188		×
		BOT4	6	1.003		1069.293		24.790		3.573		×

- Pour une charge 0.25 MPa:

**Tableau (V-IV) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.25 MPa.**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?		
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		oui	non	
					+	-	+	-	+	-			
0.25	5,933	TOP1	56	1.097	61.083		170.404			4.308		×	
		BOT1	56	3.302	21.290		56.710		1.433			×	
		TOP2	56	1.852	855.643		19.933			2.220		×	
		BOT2	T	1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$		$4.022 \times 10^{-2}$	$3.369 \times 10^{-2}$			×
		TOP3	T	1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$		$4.022 \times 10^{-2}$	$3.369 \times 10^{-2}$			×
		BOT3	56	1.253		855.575		19.740	2.228				×
		TOP4	6	2.417		443.797		10.289	1.485				×
		BOT4	6	$8.024 \times 10^{-1}$		1336.980		30.997	4.466			×	



**Les mécanismes de rupture obtenus numériquement et analytiquement pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub>.**

D'après les tableaux, on peut observer que :

- La charge de rupture est 0.25 MPa, pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> et le déplacement correspondant est 5.933.
- La couche endommagée est la couche numéro 4.
- La surface endommagée est la surface inférieure (surface de traction).

**V.2 Cas 2 : Plaque stratifiée encadrée [90]<sub>4</sub>:**

- Pour une charge 0.1 MPa:

**Tableau (V-V) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.1 MPa.**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?	
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		Oui	Non
					+	-	+	-	+	-		
0.1	2.356	TOP1	6	2.277	28.705		82.014		3.403			×
		BOT1	6	6.681	9.783		27.952		1.160			×
		TOP2	6	6.681	9.783		27.952		1.160			×
		BOT2	T	186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		TOP3	T	186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		BOT3	6	9.441		9.081		25.948		1.076		×
		TOP4	6	9.441		9.081		25.948		1.076		×
		BOT4	6	3.061		28.003		80.010		3.319		×

- Pour une charge 0.2 MPa:

**Tableau (V-VI) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.2 MPa.**

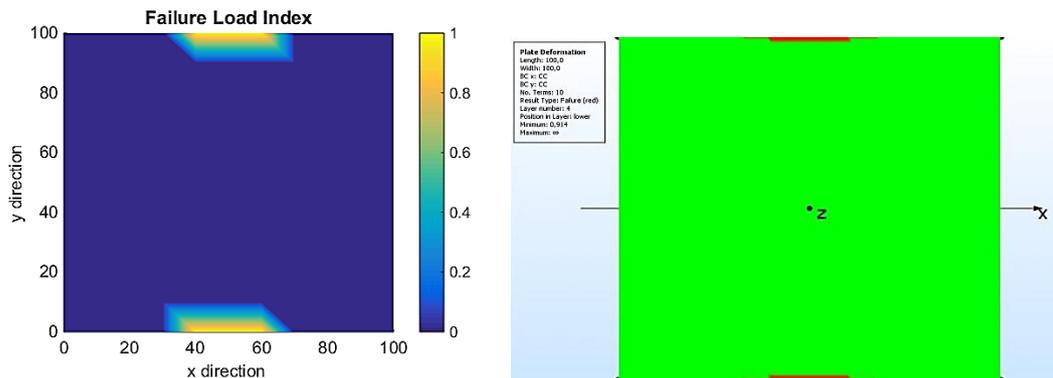
Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?	
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		Oui	Non
					+	-	+	-	+	-		
0.2	4.713	TOP1	6	1.145	57.059		163.026		6.764			×
		BOT1	6	3.401	19.215		54.902		2.278			×
		TOP2	6	3.401	19.215		54.902		2.278			×
		BOT2	T	186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		TOP3	T	186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		BOT3	6	4.631		18.514		52.898		2.194		×
		TOP4	6	4.631		18.514		52.898		2.194		×
		BOT4	6	1.521		56.357		161.022		6.680		×

- Pour une charge 0.225 :

**Tableau (V-VII) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?	
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		Oui	Non
					+	-	+	-	+	-		
0.225	5.302	TOP1	6	1.019	21.573		61.639		2.557			×
		BOT1	6	3.030	64.147		183.279		7.605			×
		TOP2	6	3.030	64.147		183.279		7.605			×
		BOT2		186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		TOP3		186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		BOT3	56	2.701		394.259		8.146		1.299		×
		TOP4	56	2.701		394.259		8.146		1.299		×
		BOT4	56	$9.025 \times 10^{-1}$		1185.856		26.499		3.821	×	

de 0.225 MPa.



**Les mécanismes de rupture obtenus numériquement et analytiquement pour une plaque composite [90]<sub>4</sub>.**

- D'après les tableaux, on peut observer que :
- La charge de rupture est 0.225 MPa, pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> et le déplacement correspondant est 5.302.
  - La couche endommagée est la couche numéro 4.
  - La surface endommagée est la surface inférieure (surface de traction).
  - D'après les deux figures, on peut voir clairement l'effet de la stratification des couches. Si on change l'orientation des couches, les zones et les mécanismes de ruptures seront changés.

**V.3 Cas 3 : plaque stratifiée simplement appuyés [0/90]<sub>s</sub> :**

- Pour une charge 0.1 MPa:

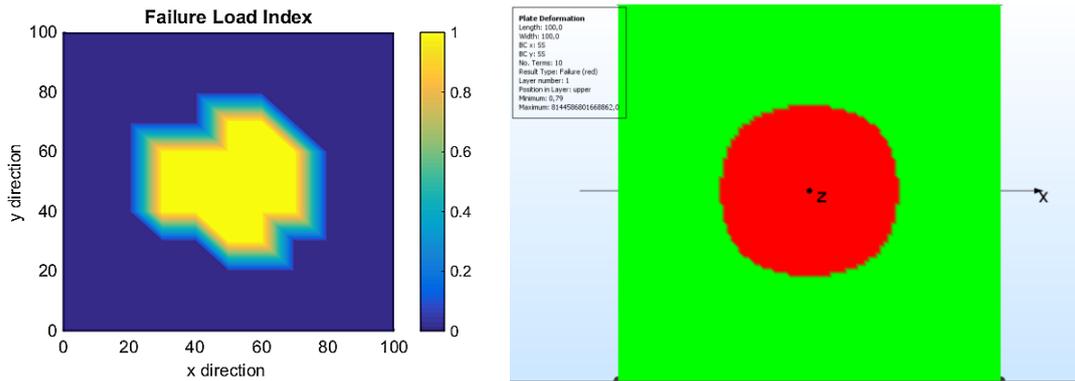
**Tableau (V-VIII) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.1 MPa.**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?		
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		Oui	Non	
					+	-	+	-	+	-			
0.1	10,985	TOP1	61	1.566		763.881		55.198		5.020		×	
		BOT1	61	4.728		253.146		18.340		1.670		×	
		TOP2	58	4.841		244.536		15.99	2.823			×	
		BOT2		1939.85	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$		$4.022 \times 10^{-9}$				×
		TOP3		1939.85	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$		$4.022 \times 10^{-9}$				×
		BOT3	58	6.788	244.603		16.192			2.815		×	
		TOP4	61	6.480	256.054		18.407		1.670			×	
		BOT4	61	2.163	766.788		55.265		5.020			×	

- Pour une charge 0.2 MPa:

**Tableau (V-IX) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> chargée de 0.2 MPa.**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?		
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		Oui	Non	
					+	-	+	-	+	-			
0.2	21,97	TOP1	50	$8.140 \times 10^{-1}$		1468.77		105.34		9.942	×		
		BOT1	61	2.356		507.74		36.713		3.34		×	
		TOP2	58	2.421								×	
		BOT2		1939.8	$3.369 \times 10^{-2}$		$9.628 \times 10^{-2}$		$4.022 \times 10^{-9}$				×
		TOP3											×
		BOT3	58	3.394	489.174		32.287			5.635		×	
		TOP4	59	3.249	433.219		39.860		4.775			×	
		BOT4	61	1.0829	1532.12		110.49		1.004			×	



**Les mécanismes de rupture obtenus numériquement et analytiquement pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub>**

D’après les tableaux, on peut observer que :

- La charge de rupture est 0.2 MPa, pour une plaque composite [0/90]<sub>s</sub> et le déplacement correspondant est 21.97.
- La couche endommagée est la couche numéro 1.
- La surface endommagée est la surface supérieure.

**V.4 Cas 4 : Plaque stratifiée simplement appuyés [90]<sub>4</sub> :**

- Pour une charge 0.1:

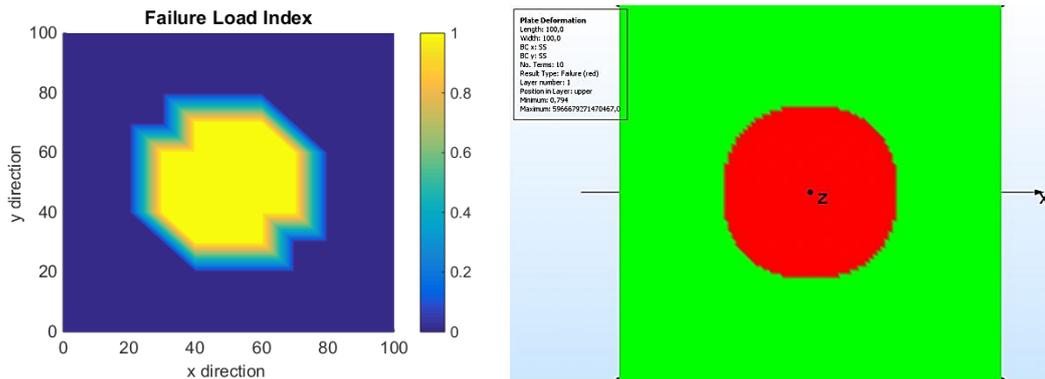
**Tableau (V-X) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.1 MPa.**

Charge	Flèche	Couche	Nœud	Coeff	Contrainte						Rupture ?	
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		Oui	Non
					+	-	+	-	+	-		
0.1	11.576	TOP1	61	1.462		807.22		51.32	4.69×10 <sup>-5</sup>		×	
		BOT1	61	4.379		268.30		16.40	1.565×10 <sup>-5</sup>		×	
		TOP2	61	4.379		268.30		16.40	1.565×10 <sup>-5</sup>		×	
		BOT2		186.398	3.507×10 <sup>-1</sup>		1.002		4.186×10 <sup>-8</sup>		×	
		TOP3		186.398	3.507×10 <sup>-1</sup>		1.002		4.186×10 <sup>-8</sup>		×	
		BOT3	61	6.172	269.00		18.40		1.55×10 <sup>-5</sup>		×	
		TOP4	61	6.172	269.00		18.40		1.55×10 <sup>-5</sup>		×	
		BOT4	61	2.055	807.92		53.33		4.68×10 <sup>-5</sup>		×	

- Pour une charge 0.2:

**Tableau (V-XI) : Déplacement et contraintes pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> chargée de 0.2 MPa.**

Charge	Flèche	couche	nœud	COEF F	contrainte						rupture		
					$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		$\sigma_{xy}$		oui	non	
					+	-	+	-	+	-			
0.2	23,35	TOP1	61	$7.262 \times 10^{-1}$		1626.89		104.576	9.506		×		
		BOT1	61	2.179		540.979		34.120	3.165			×	
		TOP2	61	2.179		540.979		34.120	3.165			×	
		BOT2			186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		TOP3			186.398	$3.507 \times 10^{-1}$		1.002		$4.186 \times 10^{-8}$			×
		BOT3	61	3.065	541.68		36.12		3.15				×
		TOP4	61	3.065	541.68		36.12		3.15				×
		BOT4	61	3.065	541.68		36.12		3.15				×



**Les mécanismes de rupture obtenus numériquement et analytiquement pour une plaque composite [90]<sub>4</sub>.**

- D'après les tableaux, on peut observer que :
- La charge de rupture est 0.2 MPa, pour une plaque composite [90]<sub>4</sub> et le déplacement correspondant est 23.35.
  - La couche endommagée est la couche numéro 1.
  - La surface endommagée est la surface supérieure.
  - D'après les deux figures, on peut voir clairement que pour une plaque simplement appuyée, la stratification des couches n'a pas une influence sur les zones et les mécanismes de rupture.

# Conclusion générale

Dans ce travail une analyse numérique a été présentée afin de déterminer, le comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées. En utilisant un élément fini basé le critère de rupture de « Tsai-Wu ».

Cette étude concerne la validation de l'élément rectangulaire à quatre nœuds. Avec six degrés de liberté, pour analyser le comportement mécanique des plaques isotropes et stratifiées à la rupture en flexion. Les résultats obtenus seront comparés avec les résultats des solutions analytiques et d'autre modèle d'élément fini disponible dans la littérature. A travers des comparaisons, on observe que notre élément donne des résultats pratiquement identiques aux ceux obtenus analytiquement, et le maillage n'a pas nécessairement besoin d'être très raffiné. Cette étude a permis de montrer la rapidité de convergence et la stabilité de l'élément utilisé.

Une étude paramétrique a été considérée sur le comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées, l'étude qui consiste à varier différents paramètres, tels que l'orientation des fibres, la stratification des couches et les types de supports, conditions aux limites, pour voir l'influence de celle-ci.

Les résultats ont montré que l'effet de la stratification des couches sur la charge de rupture dans certaines conditions d'appuis.

À partir de cette analyse des remarques sont obtenus :

- Les déplacements obtenus en utilisant des plaques encastrees sont supérieurs à ceux obtenus pour les plaques simplement appuyées.
- On peut voir clairement l'effet de la stratification des couches. Si on change l'orientation des couches, les zones et les mécanismes de ruptures seront changés.
- Pour une plaque simplement appuyée, la stratification des couches n'a pas une influence sur les zones et les mécanismes de rupture.

## Références bibliographique :

1. Daniel, I.M., et al., *Engineering mechanics of composite materials*. Vol. 3. 1994: Oxford university press New York.
2. Berthelot, J.-M., *Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures*. &, 1999. **245**: p. 172.
3. Kallel Kamoun, I., *Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique*, 1999, Ecully, Ecole centrale de Lyon.
4. Dris, L., *Évaluation simultanée des vitesses de propagation et d'atténuation des ultrasons dans des matériaux composites et polymériques*, 2007.
5. Chalaye, H., *Les matériaux composites–Dynamisme et innovation*. 2002.
6. Callister, W.D., *Science et génie des matériaux*. 2001.
7. Prombut, P., *Caractérisation de la propagation de délaminage des stratifiés composites multidirectionnels*, 2007, Université Toulouse III-Paul Sabatier.
8. Faria, A.W., *Modélisation par éléments finis de plaques composites: contribution à l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes (PhD thesis)*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia. Université de Franche-Comté. Besançon, França, 2010.
9. Vincent, M., *Méthodes d'analyse par éléments finis des contraintes aux interfaces dans les structures sandwich*, 1998.
10. Tafla, A., *Éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches*, 2007, Reims.
11. Dupeux, M., *Aide-mémoire-Science et génie des matériaux-4e éd.* 2018: Dunod.
12. Sedira, L., *Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Éléments Finis Spéciaux*, 2013, Reims.
13. Batoz, J.-L. and G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis: Solides élastiques*. 1990: Presses Université Laval.
14. BOUYAYA, L. and F. MILLI. *Étude théorique et numérique du comportement dynamique d'un stratifié composite unidirectionnel*. in *Congrès français de mécanique*. 2013. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc, 92400 Courbevoie, France ....
15. Irisarri, F.-X., *Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites*, 2009.
16. Chou, T.-W., *Microstructural design of fiber composites*. 2005: Cambridge University Press.
17. Nye, J.F., *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*. 1985: Oxford university press.
18. Kollar, L.P. and G.S. Springer, *Mechanics of composite structures*. 2003: Cambridge university press.
19. Reddy, J., *Mechanics of laminated plates: theory and analysis*, 1997, Boca Raton, FL: CRC Press.
20. Marcin, L., *Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures*, 2010.
21. Frey, F. and J. Jirousek, *Analyse des structures et milieux continus: Méthode des éléments finis*. Vol. 6. 2001: PPUR presses polytechniques.
22. Cazenave, M., *Méthode des éléments finis-2e éd.: Approche pratique en mécanique des structures*. 2013: Dunod.
23. Cook, R.D., *Finite element modeling for stress analysis/Robert D. Cook*. 1994.
24. Reid, S.R. and G. Zhou, *Impact behaviour of fibre-reinforced composite materials and structures*. 2000: Elsevier.

