

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie civil et d'Hydraulique  
Référence : ...../2020



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية و الري  
المرجع ...../2020

## Mémoire de Master

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structure

Thème

**Le contrôle des vibrations des bâtiments par un  
amortisseur à masse accordée double**

Nom et Prénom de l'étudiant :  
Bensalah Mohamed Mahdi

Encadreur :  
Djedoui Nassim

Année universitaire : 2019 - 2020

## *Remerciement*

*Toute notre gratitude, grâce et remerciement vont à Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience, le Courage et la volonté pour élaborer ce travail.*

*C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que je remercie mon encadreur Dr Djedoui Nassim pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guidé ce travail*

*Je remercie également Pr Ounis Abdelhafid et Dr Abdeddaim Mahdi pour leur précieuse aide dans l'accomplissement de ce travail*

*Je remercie les membres de jury qui nous font l'honneur de présider et d'examiner ce modeste travail.*

*J'exprime ma gratitude va à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation universitaire.*

*Dédicace :*

*Mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère qui a été à mes côtés et ma soutenu durant toute ma vie, et mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis, merci infiniment mes parents.*

*A mes chers frères imed-eddine et mohamed oussama.*

*A ma soeur amina et son mari farouk,*

*A ma nièce amira et mon neveu kosai.*

*A mes meilleurs amis*

*Et à tous ceux qui me sont chère sans exception.*

*A mon encadreur et bien sûr à Monsieur : "ounis abdelhafid" et Mahdi abdeddaim qui ont fait tout son possible pour m'aider et m'orienté dans l'élaboration de ce travail.*

*A tout la promotion de Génie Civil 2020.*

## Résumé :

Parmi les systèmes de contrôle de vibration les plus répandus on distingue les systèmes passifs. L'utilisation de ces systèmes est motivée par leurs conceptions simples et aucune source d'énergie externe n'est demandée. Parmi ces systèmes de contrôle on distingue l'amortisseur à masse accordée (de l'anglais *Tuned Mass Damper* – TMD). En revanche, il a été trouvé que la réduction de la réponse dynamique obtenue par l'installation du TMD n'est pas optimale notamment pour les premiers cycles des vibrations principalement lorsque le TMD est face au problème de dérèglement (de-tuning). Dans le cadre de ce travail, l'amélioration des performances du TMD est notre objectif. Ceci est visé par l'implémentation d'amortisseurs à masse accordée suivant différentes configurations : de nombre, de positionnement et de réglage, au moyen d'une résolution numérique par Matlab. Des analyses dynamiques sont effectuées afin de déterminer les réponses dynamiques des systèmes en termes de déplacement maximum, déplacement inter-étage et effort tranchant par une configuration optimale qui évalue l'influence du contrôle d'un système à double TMD sur la réponse dynamique des structures.

### Mots clés

Contrôle de vibration, amortisseur à masse accordée, TMD, réponse sismique.

### ملخص :

من بين أنظمة التحكم في الاهتزاز الأكثر استخداماً، هناك أنظمة التحكم السلبية. يتم اختيار هذه الأنظمة وفقاً لتصميماتها البسيطة وعدم الحاجة لوجود مصدر طاقة خارجي من أجل العمل. من بين أنظمة التحكم هذه، نميز مخمد الكتلة الذي يستجيب لأهداف التحكم في الاهتزاز، حيث يتم تحقيق انخفاض في الاستجابة الزلزالية بعد إدخال مخمد الكتلة المضبوط. من ناحية أخرى، وجد أن تقليل الاستجابة الزلزالية التي تم الحصول عليها عن طريق تثبيت مخمد الكتلة ليس هو الأمثل خاصة بالنسبة للدورات الأولى من الاهتزازات حيث يواجه هذا الأخير مشكلة عدم الضبط (إلغاء التوليف) مع البنية.

كجزء من هذا العمل، فإن تحسين أداء مخمد الكتلة هو هدفنا الرئيسي. ويستهدف ذلك عبر إضافة مخمد الكتلة بمختلف الأعداد والمواقع والضبط للهيكل المقترح وتعرضه لهزات زلزالية مختلفة الشدة بالاستعانة ببرنامج (Matlab). يتم إجراء التحليلات الديناميكية لتحديد الاستجابات الزلزالية للأنظمة من حيث الحد الأقصى للإزاحة والإزاحة بين الطوابق وقوة القص من خلال التكوين الأمثل الذي يقيم تأثير التحكم في النظام ذو مخمد كتلة مزدوج على الاستجابة الزلزالية للهياكل.

الكلمات المفتاحية : التحكم في الاهتزازات, مخمد الكتلة, الاستجابة الزلزالية

# Sommaire

Remerciements	II
Dédicace	III
Résumé	IV
Sommaire	V
Liste Des Symboles	VII
Liste Des Figures	VIII
Liste Des Tableaux	XII
Introduction Générale	XIII

<b><u>CHAPITRE I : Les différents systèmes de contrôle des vibrations sismiques</u></b>	<b>14</b>
1.1. Introduction	15
1.2. les systèmes de contrôle des vibrations :	15
1.2.1. Les systèmes de contrôle passif :	16
1.2.1.1. L'isolation à la base :	17
a) Principe de base de l'isolation sismique :	18
b) Différents types des systèmes d'isolation à la base	18
1.2.1.2 Les Amortisseurs métalliques :	20
1.2.1.3. Amortisseurs viscoélastiques (VE)	21
1.2.1.4. Amortisseurs à liquide accordé TLD :	22
1.2.1.5. L'amortisseur a masse accordée (Tuned Mass Damper- TMD)	23
a) Implémentation du TMD dans des structures réelles	23
b) Le concept de l'amortisseur a masse accordé	24
1.2.2. Le système de contrôle actif	26
1.2.2.1 Amortisseur à masse accordée actif (ATMD)	27
1.2.3. le système de contrôle semi-actif	28
1.2.4. Les systèmes hybrides	28
1.3. Conclusion	29
<b><u>CHAPITRE II : L'amortisseur à masse accordée TMD : Concept théorique</u></b>	<b>30</b>
2.1. Introduction	31
2.2. L'amortisseur à masse accordée (TMD)	31
2.3. Historique de l'amortissement à masse accordée (TMD)	31

2.4. Concept et utilisation du TMD	32
2.5. Système avec TMD amorti sous chargement harmonique	33
2.6. Bâtiments équipés d'un amortisseur à masse accordée (TMD)	39
2.7. Réponse dynamique et équations de mouvement	39
2.8. Modèle mathématique d'une structure sans dispositif de contrôle	40
2.9. Modèle mathématique d'une structure (1DDL) équipée d'un amortisseur TMD	41
2.10. Bâtiment à plusieurs degrés de liberté avec un TMD	44
2.11. Conclusion	46

### **CHAPITRE III**

#### **Formulation mathématique et mise en équation**

3.1. Introduction	48
3.2. Formulation d'un système à N DDL	48
3.3. Hypothèses et limitation	48
3.4.1 Première configuration – 1 TMD installé au sommet	49
3.4.2 Deuxième configuration – 2 TMD installés en parallèle	50
3.4.3. Troisième configuration – 2TMD installés en série	54
3.4.4 quatrième configuration : – 2 TMD installés aux derniers niveaux	57
3.5. Equation de mouvement d'un bâtiment sous chargement extérieur	60
3.5.1. Solution en représentation d'état (state-space)	60
3.6. Exemple d'un système à deux degrés de libertés sous excitation sismique $F(t)$	61
3.7. Exemple d'un système à plusieurs degrés de libertés (n)	65
3.8. Résolution numérique en utilisant MATLAB	66
3.9 conclusion	66

### **Chapitre IV :**

#### **Résultats et analyses**

4-1. Introduction	68
4-2. Description de la structure	68
4-3. Réglage du TMD	70
4-4. Paramètres des diverses variantes du TMD utilisé	72
4-5. Description des excitations sismiques	74
4-6. Déplacement au sommet	76
4-7. Déplacement inter-étages	80
4-7.1 Déplacement inter étage: ratio de masse 3%	80

4-7.2 Déplacement inter étage : ratio de masse 5%	81
4-8. Effort tranchant à la base	82
4-9. L'effet de dérèglage sur le rendement du TMD	86
4.10. Conclusion	89
<b>Conclusion générale</b>	90
<b>Références bibliographiques</b>	

## Liste des symboles

$M$  : La masse de la structure

$k$  : Raideur de la structure

$c$  : L'amortissement de la structure

$f$  : fréquence de la structure

$x_s(t)$  : Déplacement de la structure

$\dot{x}_s(t)$  : vitesse de la structure

$\ddot{x}_s(t)$  : L'accélération de la structure

$\omega_n$  : fréquence naturelle de la structure

$m_{TMD}$  : La masse du TMD

$k_{TMD}$  : La rigidité du TMD

$c_{TMD}$  : L'amortissement du TMD

$f_{TMD}$  : La fréquence du TMD

$x_{TMD}(t)$  : Déplacement du TMD

$\dot{x}_{TMD}(t)$  : La vitesse du TMD

$\ddot{x}_{TMD}(t)$  : L'accélération du TMD

$\mu$  : Le ratio de masse

$\{\mathbf{r}\}$  : vecteur de distribution des efforts sismiques.

[A]: matrice d'état (state matrix).

[B]: matrice d'entrée, (input matrix).

[C] : matrice de sortie (output matrix).

[D] : matrice de transmission directe entre les entrées et les sorties du système.

# Liste des figures

## CHAPITRE I :

### Les différents systèmes de contrôle des vibrations sismiques

<b>Figure 1-1:</b> Exemple de quelques dispositifs de contrôle passif.	17
<b>Figure 1-2.</b> Bâtiment d'un tribunal en Angleterre avec des isolateurs à la base.	17
<b>Figure 1-3.</b> Isolation parasismique-Schéma.	18
<b>Figure 1-4</b> isolateur élastomérique avec des cales en acier.	19
<b>Figure 1-5</b> isolateur élastomérique à barreau de plomb.	19
<b>Figure 1-6</b> différents systèmes d'isolateurs en élastomère.	20
<b>Figure 1-7</b> Deux types d'amortisseur métallique ADAS en forme X.	21
<b>Figure 1-8</b> Amortisseur viscoélastique.	21
<b>Figure 1-9 :</b> Amortisseur à liquide accordé.	22
<i>a) TLD à ballotement b) TLD à (colonne)</i>	
<b>Figure 1-10 :</b> Un TMD pendulaire de 800 tonnes dans un bâtiment de 508 m de hauteur (Taipei 101).	23
<b>Figure 1-11 :</b> Amortisseur de masse accordée installé sur la structure.	24
<b>Figure 1-12:</b> Amortisseur de vibration dynamique.	24
<b>Figure 1-13:</b> Exemple de quelques dispositifs de contrôle actifs.	27
<b>Figure 1-14</b> Configuration de base d'une structure équipée d'un ATMD actif.	27
<b>Figure 1-15 :</b> Diagramme de contrôle semi-actif.	28
<b>Figure 1-16</b> Configuration de base d'un Amortisseur à mass accordée hybride TMD passif +ATMD actif.	29

## CHAPITRE II : L'amortisseur à masse accordée TMD : Concept théorique

<b>Figure 2-1 :</b> structure + TMD.	33
<b>Figure 2-2:</b> Courbes de résonance de fréquence optimale.	36
<b>Figure 2-3:</b> Courbes de résonance de fréquence optimale et de réglage d'amortissement (d'après Den Hartog 1985).	38
<b>Figure 2-4</b> représentations dynamiques d'une structure à plusieurs degrés de liberté.	40
<b>Figure 2-5</b> Structure à 1 DDL avec un TMD.	40
<b>Figure 2-6 :</b> Diagramme de corps libre – structure à 1DDL avec TMD.	42
<b>Figure 2-7 :</b> Bâtiment à plusieurs degrés de liberté équipé par un TMD.	42
<b>Figure 2-8. :</b> Modèle rhéologique pour un bâtiment à NDDL avec TMD.	42

<b>Figure 2-9</b> : Diagramme de corps libre – structure à NDDL avec TMD.	42
<b>Figure 2-10</b> : modèle rhéologique pour un bâtiment à NDDL avec TMD	44
<b>Figure 2-11</b> : diagramme du corps libre pour un bâtiment à NDDL avec TMD	44

### **Chapitre III : Formulation **mathématique et mise en équation****

<b>Figure 3-1</b> : représentation dynamique de la configuration (C1).	49
<b>Figure 3-2</b> : diagramme rhéologique pour configuration (C1).	49
<b>Figure 3-3</b> représentations dynamiques de la configuration (C2).	51
<b>Figure 3-4</b> : Modèle rhéologique pour configuration (C2).	51
<b>Figure 3-5</b> représentations dynamiques de la configuration (C3).	54
<b>Figure 3-6</b> : Modèle rhéologique pour configuration (C3).	54
<b>Figure 3-7</b> représentations dynamiques de la configuration (C4).	57
<b>Figure 3-8</b> : Modèle rhéologique pour configuration (C4).	57
<b>Figure 3-9</b> : La forme générale de la représentation d'état « <i>state space</i> », SISO ( <i>single input, single output</i> ).	61
<b>Figure 3-10</b> : Système à 2 DDL.	61
<b>Figure 3-11</b> : Système dynamique pour (n) DDL.	65
<b>Figure 3-12</b> : Diagramme de résolution sur SIMULINK/MATLAB.	66

### **Chapitre IV : Résultats et analyses**

<b>Fig 4-1</b> Cas d'étude : (B) modèle de base ; (C1, C2, C3 et C4) configurations adoptées.	70
<b>Figure 4-2</b> : Excitations sismiques utilisées.	75
<b>Figure 4-3</b> : déplacement au sommet du bâtiment réglage de Krenk et Hogsberg ( $\mu = 3\%$ ).	77
<b>Figure 4-4</b> : déplacement au sommet du bâtiment réglage de Krenk et Hogsberg ( $\mu = 5\%$ ).	79
<b>Figure 4-5</b> : Déplacement inter étage, réglage Krenk et Hogsberg ( $\mu = 3\%$ ).	80
<b>Figure 4-6</b> : Déplacement inter étage, réglage Krenk et Hogsberg ( $\mu = 5\%$ ).	81
<b>Figure 4-7</b> : Effort tranchant à la base de la structure.	84
<b>Figure 4-8</b> : Effort tranchant à la base de la structure.	85
<b>Figure 4-9</b> : variation de la réduction du déplacement en tête du bâtiment sous l'effet de dérèglage (ratio de mass 3%).	88
<b>Figure 4.10</b> : variation de la réduction du déplacement en tête du bâtiment sous l'effet de dérèglage (ratio de mass 5%).	88

## Liste des Tableaux

### CHAPITRE 2

#### L'amortisseur à masse accordée TMD : Concept théorique

<b>Tableau 2.1</b> : Conditions de réglage optimal des systèmes TMD amortis attachés à une structure.	38
---	----

### Chapitre IV :

#### Application et discussions des résultats

<b>Tableau 4-1</b> : Paramètres de la structure	68
<b>Tableau 4-2</b> : fréquence de la structure	70
<b>Tableau 4-3</b> : Paramètres du TMD	71
<b>Tableaux 4-4</b> : Paramètres des diverses variantes du TMD	72
<b>Tableau 4-5</b> : Déplacement maximum au sommet du bâtiment ( $\mu = 3\%$ ). Cas de source proche	76
<b>Tableau 4-6</b> : Déplacement maximum au sommet bâtiment ( $\mu = 3\%$ ) : cas de source lointaine	76
<b>Tableau 4-7</b> : déplacement maximum au sommet du bâtiment ( $\mu = 5\%$ ) : cas de source proche	78
<b>Tableau 4-8</b> : déplacement maximum au sommet du bâtiment ( $\mu = 5\%$ ). Cas de source lointaine	78
<b>Tableaux 4-9</b> : Effort tranchant à la base du bâtiment ( $\mu = 3\%$ )	82
<b>Tableaux 4-10</b> : Effort tranchant à la base du bâtiment ( $\mu = 5\%$ )	83

---

## Introduction générale

Les forces sismiques ont toujours constitué une menace pour la sécurité humaine et la stabilité structurale des ouvrages. Ces forces destructives ont causé tant de pertes humaines et matérielles. A l'aube du 20<sup>ème</sup> siècle, le développement de bâtiments élancés a connu un grand essor. Néanmoins, l'emploi de systèmes de contreventement classiques ne peut malheureusement pas garantir la stabilité des structures contre les séismes, d'où l'intérêt des chercheurs de développer de nouveaux procédés pour contrôler la réponse sismique des structures et minimiser les dégâts qui peuvent avoir lieu.

Le contrôle des vibrations structurales peut être réalisé en fournissant des forces de contrôle passif, actif, semi-actif ou hybride. À ce jour, plusieurs méthodes de contrôle structurel ont été développées et utilisées avec succès. Le choix d'une méthode particulière de contrôle des vibrations est souvent régi par un certain nombre de facteurs, tels que l'efficacité, le poids et le coût. Parmi ces systèmes de contrôle, figure l'amortisseur de masse accordée (de l'anglais *Tuned Mass damper*). C'est un système d'amortissement passif qui utilise une masse secondaire attachée à la structure principale par le biais de ressort et amortisseur pour réduire la réponse dynamique de la structure. Le système de masse secondaire est conçu pour avoir une fréquence naturelle, dépendant de sa masse et de sa raideur, réglée sur celle de la structure principale. Lorsque cette fréquence particulière de la structure est excitée le TMD résonnera en déphasage avec le mouvement structurel et réduit sa réponse. Le TMD fonctionne comme une force de recentrage qui sert à réduire la réponse sismique du bâtiment.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse au contrôle des vibrations des bâtiments de grandes hauteurs par l'implémentation d'amortisseurs à masse accordée suivant différentes configurations de nombre, de positionnement et de réglage. Des analyses dynamiques sont effectuées afin de déterminer les réponses dynamiques des systèmes en termes de déplacement maximum, déplacement inter-étage et effort tranchant par une configuration optimale qui évalue l'influence du contrôle par TMD sur la réponse dynamique des structures.

Pour réaliser cet objectif, notre travail sera organisé en quatre chapitres étroitement liés :

---

**Le premier chapitre** est consacré à un état de l'art sur les systèmes de contrôle des vibrations développés durant ces deux dernières décennies ; les systèmes passifs, les systèmes actifs, les systèmes semi-actifs et les systèmes hybrides. Une description de l'amortisseur à masse accordé est également présentée.

**Le deuxième chapitre** concerne la mise en équation d'un système global, d'abord sous forme d'équations différentielles résultant des diagrammes de corps libre puis sous formes matricielles obtenues par le couplage des différentes équations pour un structure équipée d'un amortisseur de type TMD.

**Le troisième chapitre** présente la formulation mathématique nécessaire pour la modélisation. La résolution des différentes configurations est présentée sous forme analytiques puis transformée par représentation d'état (state-space) et finalement introduite dans le code Matlab pour la résolution numérique.

**Le quatrième chapitre :** sera dédié à l'application numérique d'une structure benchmark équipée d'un double TMDs sous différentes excitations sismiques. Dans ce cadre de travail, une étude paramétrique basée sur le rapport de masse et l'emplacement de l'amortisseur TMD est réalisée. Les résultats obtenus sont analysés pour évaluer la validité de l'approche proposée.

Enfin une conclusion générale est dressée pour synthétiser le travail.

---

## **Chapitre I :**

### **Les différents systèmes de contrôle des vibrations sismiques**

---

## CHAPITRE I

### Les différents systèmes de contrôle des vibrations sismiques

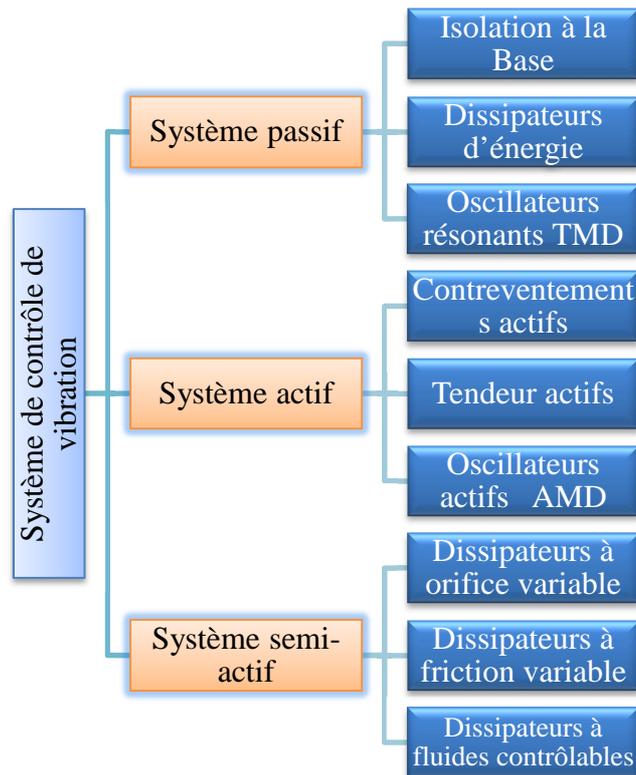
#### **1.1. Introduction**

Les ouvrages de génie civil, tels que les bâtiments, les ponts et les gratte-ciels, peuvent vibrer fortement ou même s'effondrer lorsqu'ils sont soumis à de fortes excitations dues aux vents ou aux séismes ; même la bonne application des règles parasismiques ne peut pas garantir l'absence des dommages lors d'un séisme et les structures sont toujours vulnérables face aux excitations de forte intensité. Pour cela le contrôle des vibrations sismiques est devenu nécessaire, voire même indispensable. Pour se mettre en sécurité, ce challenge a poussé les chercheurs en génie civil à inventé de nouveaux dispositifs qui réduisent l'effet destructif d'une secousse sismique sur les structures. Ces dispositifs sont appelés les systèmes de contrôle des vibrations et ils peuvent être classés en quatre catégories principales : contrôle passif, actif, semi-actif et hybride.

L'intérêt de ce premier chapitre est de définir les différents systèmes de contrôle de vibration ainsi que le système choisi dans notre étude, à savoir le contrôle par amortisseur à masse accordée (TMD) en présentant les avantages et inconvénients de ce système.

#### **1.2. Les systèmes de contrôle des vibrations :**

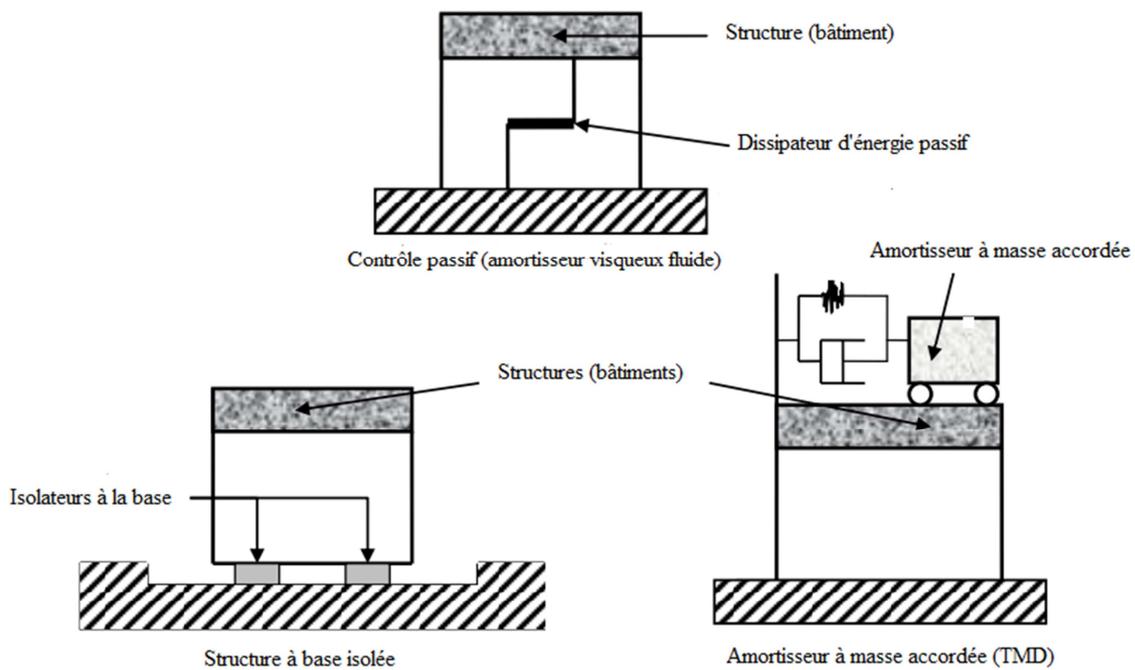
Les systèmes de contrôle des vibrations sont des dispositifs de protection parasismique utilisés pour réduire la réponse structurelle lors d'une forte vibration. Ces systèmes peuvent être classés en trois groupes et ils seront présentés dans le diagramme suivant :



### **1.2.1. Les systèmes de contrôle passif :**

Le contrôle passif a pour objectif d'augmenter la capacité des structures à dissiper l'énergie vibratoire en ajoutant un dissipateur additionnel. La disposition et la position de ces systèmes sont étudiées pour une réduction maximale des efforts externes.

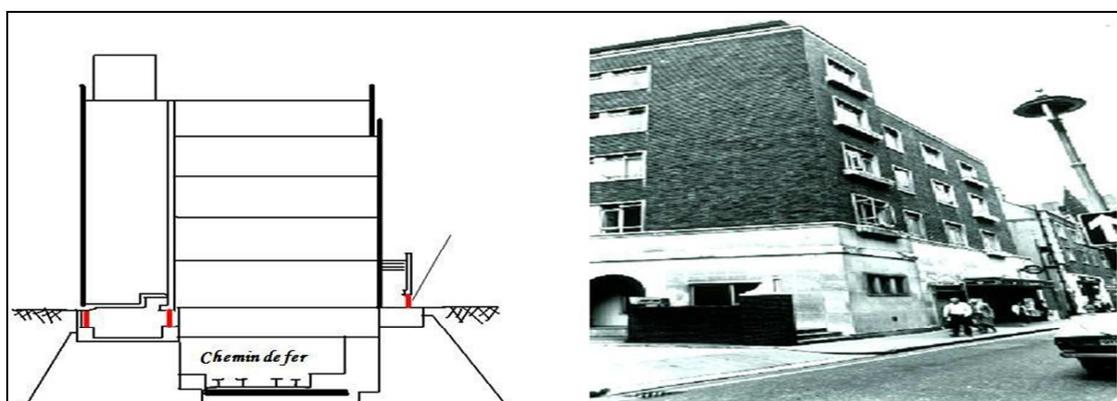
Les systèmes passifs sont autonomes autrement dit, ils ne nécessitent aucune source d'énergie externe pour fonctionner [1]. L'isolation à la base est le 1<sup>er</sup> dispositif de contrôle des vibrations, apparu en 1970 ensuite les amortisseurs à masse accordée (TMD – de l'anglais *Tuned Mass Damper*) et amortisseurs à liquide accordé (de l'anglais – *Tuned Liquid Damper*). Ces systèmes ont la possibilité de subir des déformations pour dissiper l'énergie dynamique en modifiant la rigidité structurale et l'amortissement par un dispositif approprié. Les systèmes passifs dépendent du mouvement relatif de la structure pour entraîner le mécanisme de dissipation de l'énergie, et l'énergie dissipée peut seulement être liée à la réponse structurelle locale (où le dispositif passif est installé).



**Figure 1-1:** Exemple de quelques dispositifs de contrôle passif.

### 1.2.1.1. L'isolation à la base :

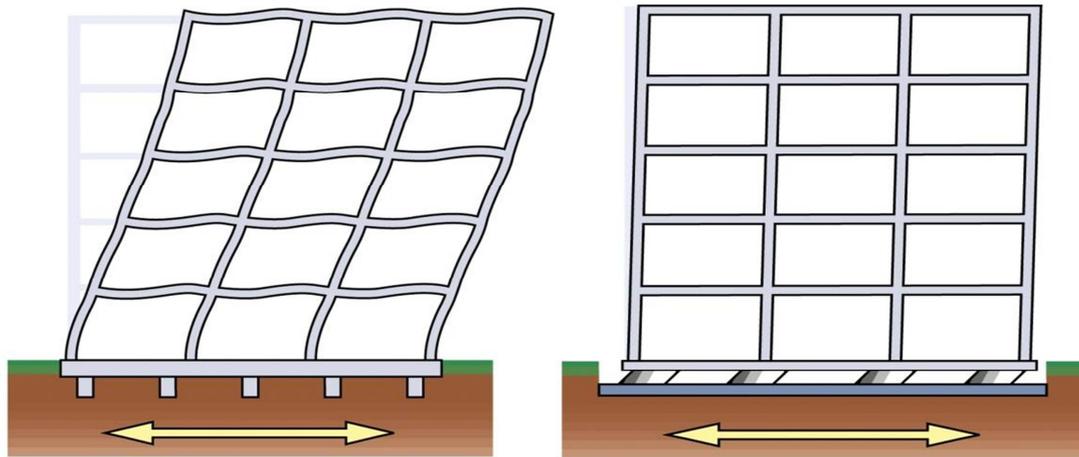
Le système d'isolation sismique à la base est un simple concept qui est apparu au 20<sup>ème</sup> siècle tandis que leurs premières applications modernes dans le monde n'ont été réalisées que dans les années 70 à 80. Cette technologie structurale des blocs en caoutchouc flexible a été employée pour isoler des bâtiments induits par les vibrations (chemin de fer, vent, véhicule...etc.). [2] Avec un système pareil de construction, les structures ne doivent pas être extrêmement résistantes car l'isolation à la base constitue une méthode de construction parasismique efficace. [3]



**Figure 1-2.** Bâtiment d'un tribunal en Angleterre avec des isolateurs à la base

---

L'idée générale de l'isolation à la base consiste à dissocier le mouvement du sol du mouvement de la structure afin de minimiser les forces transmises à cette dernière. L'isolateur reçoit alors les déformations et diminue les accélérations ; la superstructure se déplace essentiellement selon un mode rigide subissant de faibles accélérations et quasiment pas de déformations.



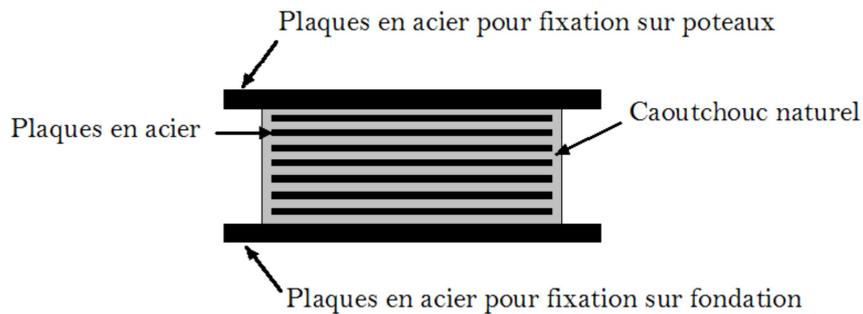
**Figure 1-3.** Isolation parasismique-Schéma

**a) Principe de base de l'isolation sismique :**

L'isolation à la base augmente la période de la structure pour l'allonger de la période d'excitation prédominante d'un séisme afin d'éviter la résonance et réduire les accélérations.

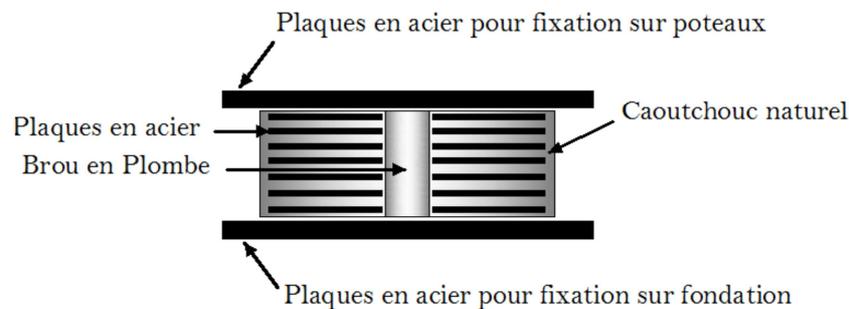
**b) Différents types des systèmes d'isolation à la base**

Il existe plusieurs types d'isolateurs à la base. Certains ont été déjà utilisés, d'autres sont restés au stade d'études théoriques ou d'essais. Parmi ces catégories et selon la matière de fabrication on peut citer : L'isolateur élastomérique et l'isolateur élastomérique avec noyau de plomb...etc. A l'origine, les isolateurs élastomériques étaient conçus de caoutchouc naturel. Plus tard, leurs propriétés ont été améliorées par l'ajout des plaques en acier ; un isolateur en élastomère avec des plaques en acier est présenté schématiquement dans la figure (1.4).



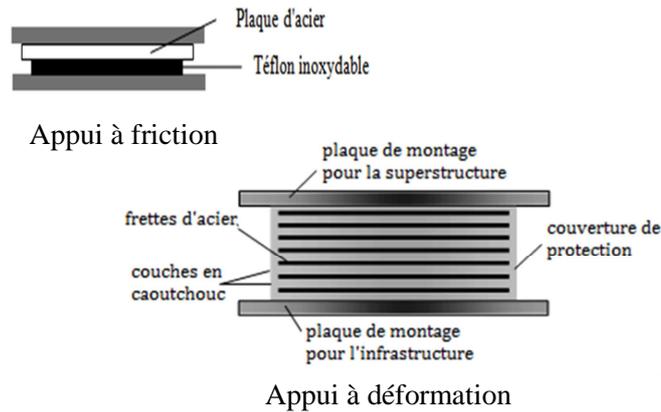
**Figure 1-4 :** isolateur élastomérique avec des cales en acier

L'apparition d'isolateur élastomérique avec noyau de plomb est motivée par l'amélioration des inconvénients de faiblesse d'amortissement d'isolateur en élastomère qui peuvent être résolu en insérant un barreau de plomb dans les couches de l'isolateur figure (1.5).



**Figure 1-5 :** isolateur élastomérique à barreau de plomb

Il est possible aussi de classifier les systèmes d'isolation à la base selon leur mode de fonctionnement comme : L'appui à déformation, l'appui à glissement et l'appui à friction...etc. Parmi ces appuis il y a ceux qui permettent aux systèmes de supporter la charge verticale tandis que l'élastomère se déforme en cisaillement horizontal, d'autres permettent le découplage des mouvements horizontaux et verticaux du tablier de ceux des éléments de fondations qui sont dus à la différence importante des fréquences d'oscillation dans les deux directions.

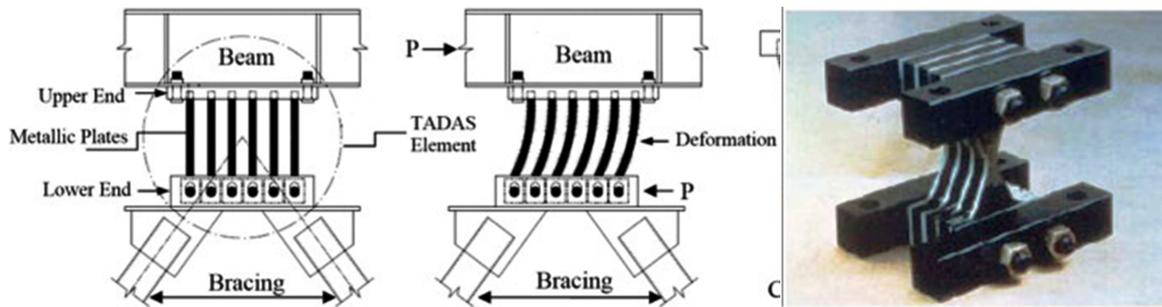


**Figure 1-6** différents systèmes d'isolateurs en élastomère

### 1.2.1.2 Les Amortisseurs métalliques :

Aux années 1970, les chercheurs ont initié des travaux conceptuels et expérimentaux sur les dispositifs métalliques, étant donné que la déformation inélastique des métaux peut être un mécanisme parfait pour la dissipation d'énergie, dont l'idée c'est d'installer des dispositifs métalliques de comportement hystérétique dans la structure pour l'absorption de l'énergie. Des éléments de limite rigidité sont utilisés de telle sorte que les plaques X sont déformées en double courbure. La mise en œuvre des amortisseurs hystérétiques métalliques pour les structures à grande échelle a commencé en Nouvelle-Zélande dans les années 1970. Les dispositifs des amortisseurs hystérétiques métalliques présentent généralement un comportement hystérétique stable, une fatigue à faible cycle, une fiabilité à long terme et une insensibilité relative à la température ambiante. [4, 5].

Le dispositif ADAS (de l'anglais- *Added Damping and Stiffness*) montré en figure (1.7) est l'un des mécanismes les plus connus, il se compose de plusieurs plaques en forme de X dont le comportement augmente la résistance de la structure et de l'amortissement. L'idée c'est d'utiliser des éléments d'une rigidité limite afin d'avoir une déformation en double courbure des plaques X. [6, 7]

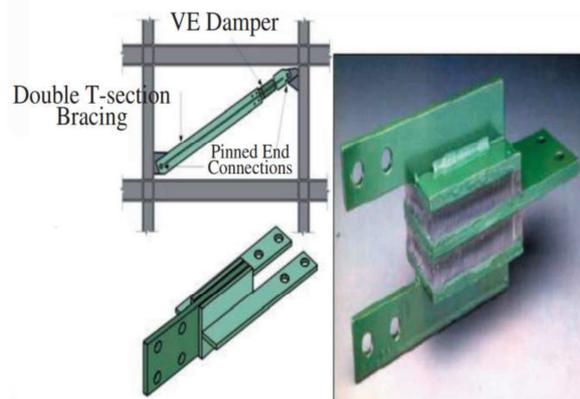


**Figure 1-7** Deux types d'amortisseur métallique ADAS en forme X

### **1.2.1.3. Amortisseurs viscoélastiques (VE)**

Ils se composent de matériaux viscoélastiques avec un taux d'amortissement élevé pour dissiper l'énergie par déformation (caoutchouc et/ou polymères). Un amortisseur viscoélastique typique contient un matériau viscoélastique relié sur des plaques d'acier, comme le montre la figure (1.8). Les composants de l'amortisseur sont montés sur une structure en tant qu'élément de liaison ou de contreventement diagonal.

Leur processus d'analyse et de conception est simple parce qu'ils utilisent des matériaux viscoélastiques linéaires, ce qui rend leur comportement généralement linéaire contrairement aux autres dispositifs, tels que les TLD qui se comportent non linéairement. [1, 8]

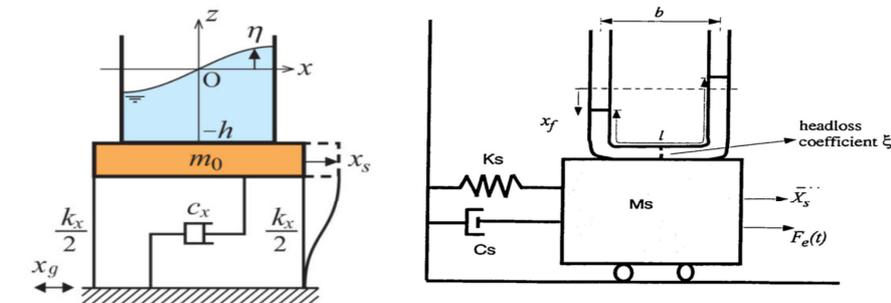


**Figure 1-8** Amortisseur viscoélastique.

### 1.2.1.4. Amortisseurs à liquide accordé TLD :

Sa première apparition revient aux années 1980, initialement appliqué dans les navires puis utilisé pour le contrôle des vibrations des structures en génie civil. Le TLD présente un autre type d'absorbeur dynamique dont le principe est de générer une force de rappel causée par la gravité et le liquide à l'intérieur du conteneur du système. Il intervient comme une masse en mouvement. La turbulence de flux de liquide et le frottement entre le liquide et le récipient converti l'énergie dynamique du fluide en chaleur absorbant aussi l'énergie de vibration structurelle. Notons qu'un TLD a le même principe de base qu'un TMD et la seule différence est que toutes les caractéristiques du système auxiliaire d'un TLD comme la masse, l'amortissement et la rigidité sont fournies par le liquide lui-même.

La figure (1.9) illustre les deux systèmes typiques du TLD. L'amortisseur de ballotement place des mailles ou des tiges dans le liquide pour fournir une capacité d'amortissement, et sa fréquence naturelle est ajustée par la taille du conteneur ou la profondeur du liquide. L'amortisseur de colonne adapte les conteneurs à tubes croisés pour réduire les vibrations structurelles dans toutes les directions. Initialement, il génère une turbulence à haut débit à travers l'orifice et par conséquent il fournit une capacité d'amortissement élevé, sa fréquence naturelle est ajustée par la forme de la colonne et la pression de l'air. Comme tous les systèmes, le TLD a des avantages et inconvénients ; leurs avantages se résument dans son efficacité dans n'importe quelle direction de vibration latérale et la possibilité d'utiliser l'eau de TLD pour servir à double fonction dans le cadre de l'approvisionnement en protection d'incendie du bâtiment. Tandis que les TLD, ils nécessitent plus d'espace car les liquides ont une masse volumique plus faible que les matériaux pour TMD, tels que le béton ou l'acier. Les TLD présentent également une réponse hautement non linéaire due au ballotement. Cette non-linéarité inhérente complique l'analyse et le processus de conception des systèmes TLD. [9, 10]



**Figure 1-9 :** Amortisseur à liquide accordé

a) TLD à ballotement b) TLD à (colonne)

---

### **1.2.1.5. L'amortisseur a masse accordée (Tuned Mass Damper- TMD) :**

C'est l'un des systèmes de contrôle passif les plus connus généralement installés au sommet du bâtiment et couplé au mouvement de la structure de telle manière d'osciller en opposé au mouvement du bloc pour agir comme une force de recentrage afin de pouvoir dissiper l'énergie sismique.[11]

#### **a) Implémentation du TMD dans des structures réelles**

Les TMD sont implémentés généralement sous deux formes. La première forme représentée dans la figure (1.10) est l'amortisseur à masse accordée pendulaire. Les ingénieurs ont utilisé ce système dans une structure de 508m de hauteur (Taipei 101) ou ils ont choisi d'ajouter une boule d'acier de 800 tonnes dans le bâtiment pour stabiliser la tour en présence d'excitation externe (séismes ou vents), la deuxième est connue sous forme d'une masse attachée à la structure principale par un ressort et un amortisseur tel que le bloc de béton et la masse installée au sommet du bâtiment sur une surface lisse lubrifiée avec de l'huile se déplace en combinaison. Citicorp center à New York dans les années 1970.[1]

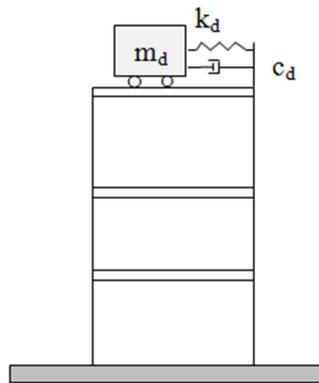


**Figure 1-10 :** Un TMD pendulaire de 800 tonnes dans un bâtiment de 508 m de hauteur (Taipei 101)

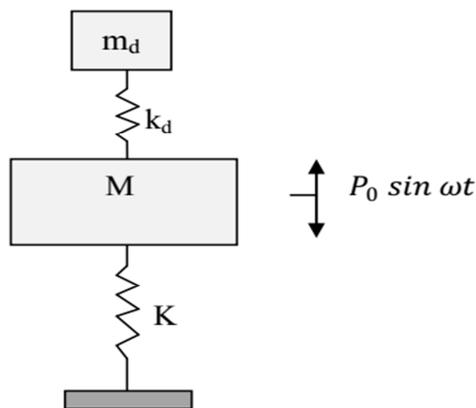
---

**b) Le concept de l'amortisseur a masse accordé :**

Le TMD est composée généralement d'une masse  $m_d$ , un ressort de raideur  $k_d$  et un amortisseur  $c_d$ , l'ensemble est fixé sur la structure principale comme le montre la figure (1.11). Sous un chargement harmonique simple  $P(t) = P_0 \sin \omega \cdot t$ , à la masse principale doit rester stationnaire lorsque la fréquence naturelle est égale à la fréquence d'excitation, soit  $\omega_n = \omega_d = \sqrt{k_d / k_m}$



**Figure 1-11 :** Amortisseur de masse accordée installé sur la structure



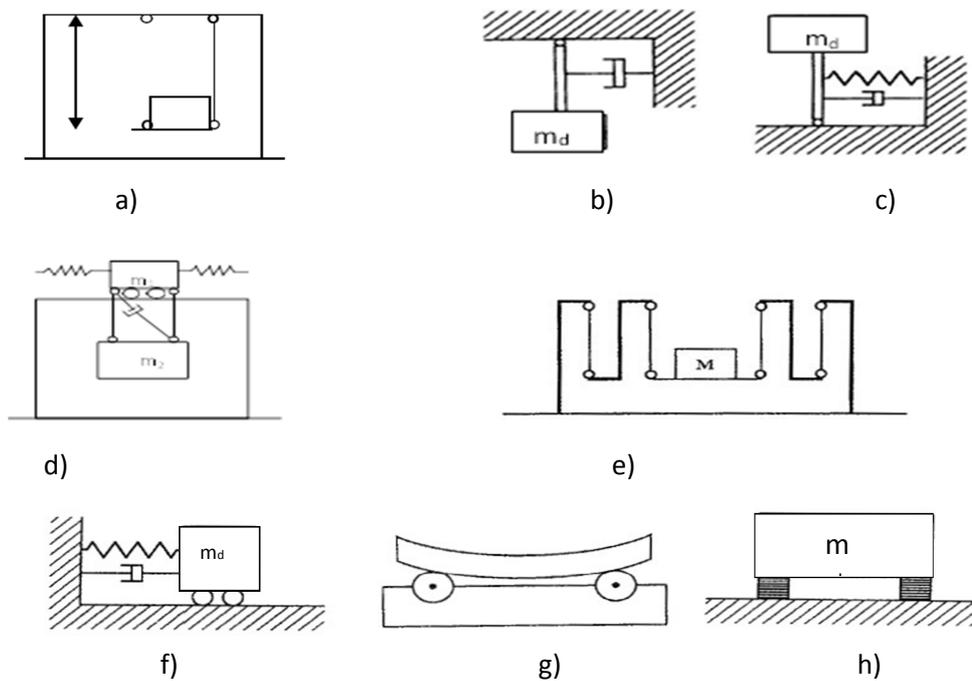
**Figure 1-12:** Amortisseur de vibration dynamique

La force harmonique  $P_0 \sin \omega \cdot t$  exercée sur la masse principale doit être équilibrée par la contre force de la petite masse  $m_d$ .

---

La dissipation de l'énergie de vibration du système dépend de rapport de la masse du TMD sur la masse principale compris entre (1/300 et 1/100), au rapport de la fréquence naturelle du TMD à la structure, et aux constantes d'amortissement du TMD et de la structure. Si la fréquence propre du système auxiliaire est proche de celle du système primaire, le mouvement de la masse TMD a environ 90° de retard de phase de la vibration du système primaire.

Plusieurs types de TMD sont disponibles pour la mise en place pratique, la figure (1.12) présente quelques-uns de ces systèmes. La force de recentrage peut être produite sous trois façon : par le chargement de poids du TMD (types a, b, d, et e), par un ressort (types c, d, et f), ou par un appui (types g et h). La force d'amortissement peut être réalisée par un amortisseur (types b, c, d, et f) ou par HDRB (de l'anglais-*High Damping Rubber Bearing*) appui en caoutchouc à haute dissipation d'énergie (type h). Concernant le TMD du type pendule (types a et b), la période de vibration  $T$  dépend seulement de la longueur  $L$  du bras de pendule ( $T = 2\pi Lg$ ). L'accord de la fréquence de TMD au mode fondamental de la structure exige souvent un très grand espace pour le bras de pendule. Ce pendule simple est modifié de telle manière que la période du pendule dépende de la longueur de bras de pendule et des autres propriétés. Par exemple, le bras de pendule peut être connecté à un ressort (le type c), un amortisseur à deux masses (type d), ou le pendule à plusieurs étages (le type e) peut être utilisé avec des suspentes tournantes qui réduisent l'espace vertical requis et gardent le même espace horizontal occupé. [12-17]. Les TMD sont souvent efficaces pour les structures à un mode dominant.



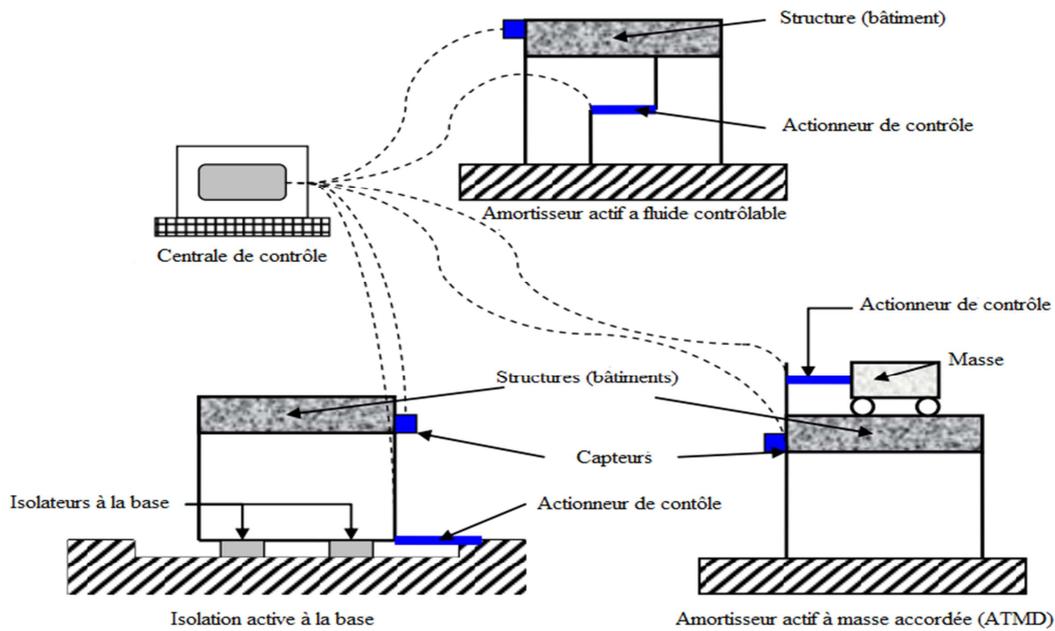
**Figure 1-13** : Les types du TMD :

*a) pendule simple, b) pendule avec amortisseur, c) pendule inversé avec amortisseur et ressort, d) amortisseur à deux-masse, e) amortisseur à plusieurs étages, f) glissant la masse avec ressort et amortisseur, g) la masse basculant sur des appuis de rotation, et h) la masse sur des appuis en caoutchouc*

### **1.2.2. Le système de contrôle actif :**

Contrairement au système passif, le contrôle actif est un système intelligent et adaptable. Il est relié à des actionneurs qui produisent une force qui aide le système structural à dissiper l'effort sismique ou recentrer les déplacements en utilisant des capteurs qui vont évaluer la réponse de la structure et par l'intermédiaire d'une centrale de calcul programmée avec un algorithme de contrôle adéquat, l'effort de résistance sera calculé. Une alimentation électrique est fournie pour produire l'effort nécessaire afin que le système réagisse et résiste aux forces sismiques. Le système obtenu est plus adaptatif et plus puissant à la protection sismique où les modes multiples sont importants dans la réponse structurale. Néanmoins, ce dispositif reste dépendant d'une source d'énergie importante.

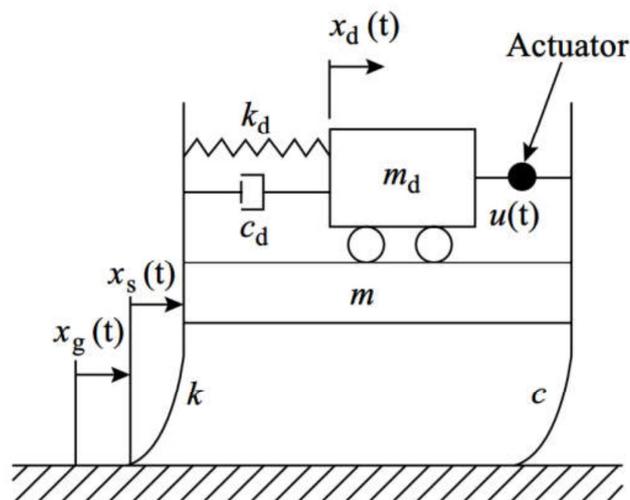
Cette technique innovante peut servir d'amortissement supplémentaire pour réduire les vibrations structurales sous excitations sismiques.[18-21]



**Figure 1-14:** Exemple de quelques dispositifs de contrôle actifs

### 1.2.2.1 Amortisseur à masse accordée actif (ATMD) :

Au début des années 1980, le système ATMD est apparu comme un système plus efficace par rapport au TMD qui ne peut être efficace que pour le contrôle de vibrations structurelles à un premier mode dominant. Le modèle conceptuel d'ATMD illustré dans la figure (1.15) présente un schéma proche au TMD avec l'addition d'un actionneur installé entre la structure et le TMD pour contrôler le mouvement secondaire par l'actionneur qui augmente l'efficacité du dispositif. [21-25]

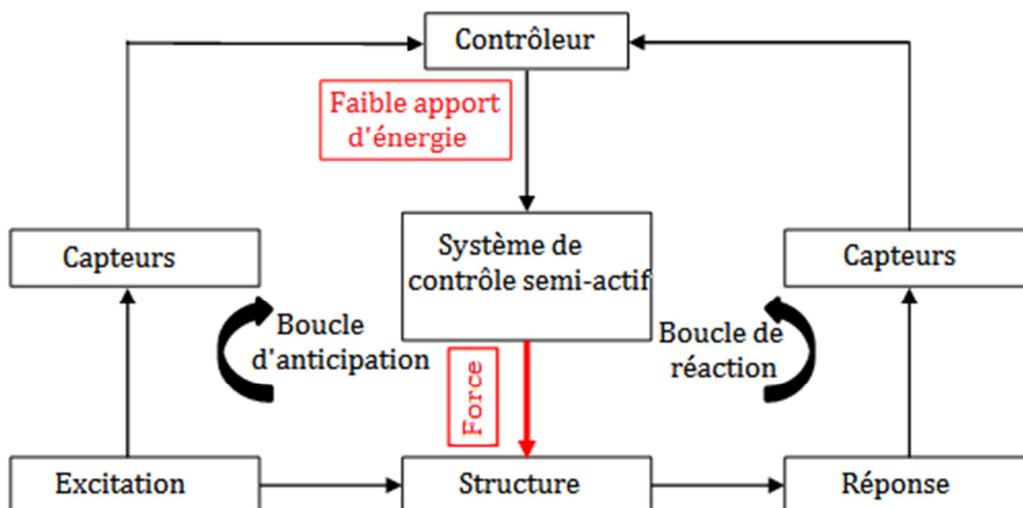


**Figure 1-15** Configuration de base d'une structure équipée d'un ATMD actif.

---

### 1.2.3. Le système de contrôle semi-actif :

C'est une fusion entre les systèmes passifs et actifs qui a donné naissance à un système généreux qui nécessite un minimum d'énergie pour produire une grande force. Les dispositifs semi-actifs fusionnent les informations d'excitation et la réponse structurelle, puis ajustent l'amortissement ; le tout commence par la mesure de l'excitation d'une réponse structurelle à l'aide d'un capteur, puis l'ordinateur de contrôle traite les mesures et donne l'ordre aux actionneurs qui agiront pour ajuster l'amortissement. On mentionne que l'actionneur influe sur le comportement d'amortisseur passif et il n'exerce pas une force directe sur la structure. Ainsi, il ne nécessite qu'une faible source d'énergie comme les batteries, aussi il est facile à fabriquer mais son utilisation reste limitée car il ne peut fonctionner que dans la capacité maximale des dispositifs passifs correspondants. [26-29]

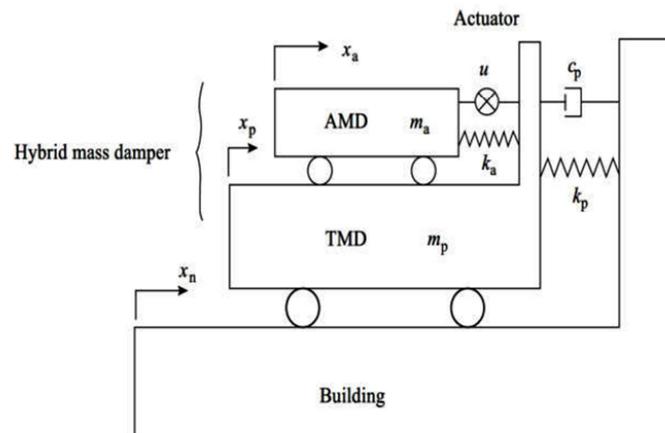


**Figure 1-16 :** Diagramme de contrôle semi-actif.

### 1.2.4. Les systèmes hybrides :

On appelle la combinaison entre deux systèmes un système hybride. Le but de cette combinaison est la compensation mutuelle des faiblesses de l'un et l'autre système. Les travaux de recherche et la technologie industrielle actuels rendent possible la conception et la fabrication d'un tel actionneur de grande taille, mais son coût limite sérieusement son application. Les systèmes de contrôle hybride innovants, qui sont obtenus en combinant des dispositifs de contrôle passif et actif, sont devenus attrayants. Lorsque ces techniques

fonctionnent ensemble, la fiabilité est assurée par la première et la capacité est alimentée par celle-ci. Un système hybride gagne les avantages des deux techniques et atténue les limitations de l'une ou l'autre technique seule. Par conséquent, il dépasse les systèmes passifs, semi-actifs et actifs. Les systèmes de contrôle hybride ont fait l'objet d'une attention considérable depuis les années 1990.[30]



**Figure 1-17** Configuration de base d'un Amortisseur à mass accordée hybride  
TMD passif +ATMD actif

### **1.3. Conclusion :**

L'étude bibliographique réalisée nous a permis d'effectuer la classification des différents mécanismes de contrôle pour les structures en génie civil, à savoir : le système passif, actif, semi-actif et hybride, en notant que le choix du système de contrôle doit se faire selon un objectif bien défini prenant en compte le coût.

Les systèmes passifs montrent une efficacité à moins coût mais avec un certain inconvénient comme la limite de performance qui peut être compensée par un système actif intermédiaire qui augmente la capacité globale malgré que ce dernier dépend d'une source d'énergie important.

---

## **CHAPITRE 2**

### **L'amortisseur à masse accordée TMD**

#### **Concept théorique**

---

## CHAPITRE 2

### L'AMORTISSEUR A MASSE ACCORDEE TMD

#### CONCEPT THEORIQUE

##### **2.1. Introduction :**

Les équations des différents systèmes seront présentées, allant des structures à un degré de liberté (1DDL) vers des structures à plusieurs degrés de liberté (NDDL) afin de passer aux structures avec système de contrôle par amortisseur à masse accordée (TMD). Il s'agit de présenter, en premier lieu, l'historique, le concept et le but d'utilisation d'un TMD et les équations de mouvement des structures sans contrôle. La deuxième partie concernera la formulation mathématique des structures équipées d'un dispositif de contrôle (TMD) pour la résolution d'un système combiné en généralisant la formulation au système à plusieurs (n) degrés de liberté.

##### **2.2. L'amortisseur à masse accordée (TMD) :**

L'amortisseur à masse accordée (AMA) ou encore *Tuned Mass Damper* (TMD) est un dispositif installé sur des ouvrages du génie civil ou des gratte-ciels, permettant la réduction des oscillations provoquées par le vent ou séisme. C'est un oscillateur généralement installé au sommet de la structure et couplé au mouvement de cette dernière, de telle manière qu'idéalement il oscille en opposition de phase avec elle et récupère ainsi de l'énergie. En effet, l'énergie cinétique de la structure est transférée partiellement au TMD qui lui-même dissipe son énergie.[31]

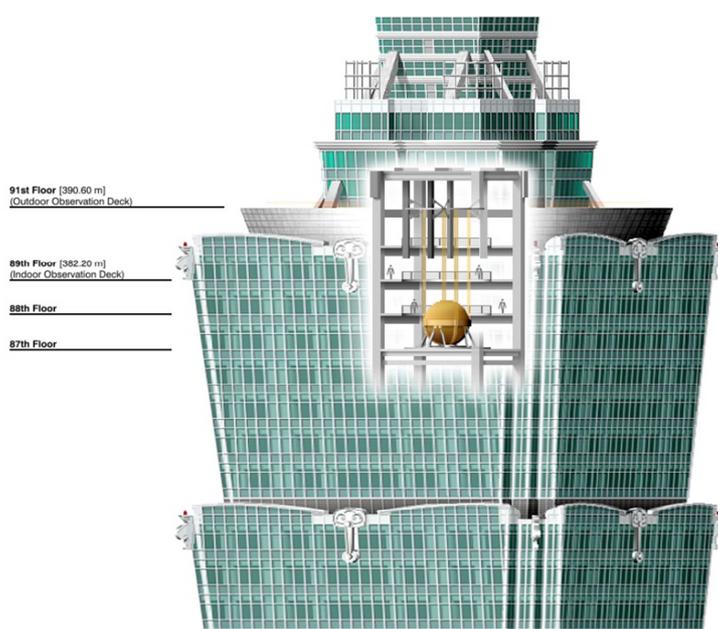
##### **2.3. Historique de l'amortissement à masse accordée (TMD) :**

Le concept du TMD a été étudié par Frahm en 1909 afin de réduire le mouvement de tangage des navires. Plus tard, en 1940 Den Hartog a étudié en détail les TMD et il a proposé des paramètres d'amortissement optimaux pour réduire la réponse d'un système à une perturbation. La théorie initiale était applicable pour un système à 1 degré de liberté (1DDL) non amorti. Des contributions significatives ont également été faites par Randall et Warbuton en 1981.[31]

---

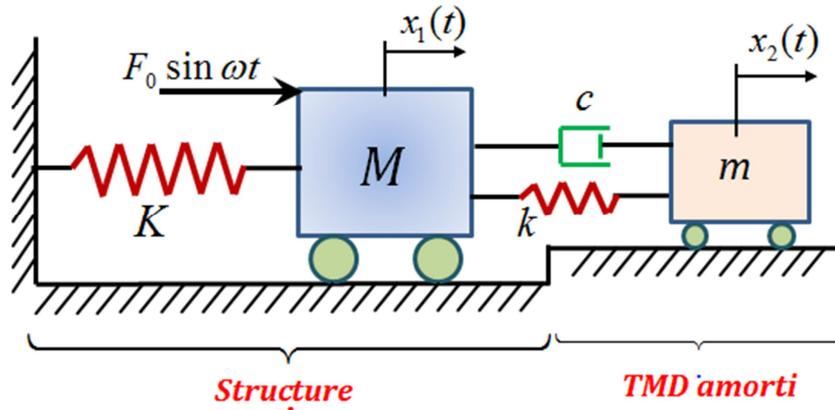
## **2.4. Concept et utilisation du TMD :**

L'utilisation d'un amortisseur à masse accordée (TMD) est une technique d'amortissement extrêmement répandue car elle est simple et peu coûteuse. On la retrouve dans des structures, autres que les tours, comme les ponts, les bateaux et même les voitures. Cette technologie est constituée d'une masse, d'un système oscillant (pendule, ressort, etc.), et d'un amortisseur prenant comme exemple le Taipei 101 :



Situé à Taïwan, la tour Taipei 101 mesure plus de 500 mètres de haut pour une masse totale de près de 700 000 tonnes. Construite en 2003, elle est restée le plus haut gratte-ciel du monde jusqu'en 2007 avec l'inauguration du Burj Dubaï (828 m). Son TMD est constitué d'une boule d'acier de 660 tonnes pour un rayon de 2,7 m suspendue entre le 92<sup>e</sup> et le 87<sup>e</sup> étage. Elle oscille grâce à 4 câbles d'acier de 11,5 m et est amortie par 8 vérins hydrauliques. Ainsi, il est prédit par les constructeurs que les oscillations de la tour peuvent être atténuées de 30 % à 40 %. Le système est étudié pour résister à un tremblement de terre de magnitude 7 sur l'échelle de Richter. Son efficacité a été vérifiée lors du séisme Sichuan qui a frappé Taiwan en 2008. De plus, le TMD ne représente que 0,2 % du coût total de construction du bâtiment.

## 2.5. Système avec TMD amorti sous chargement harmonique



**Figure 2-1** : structure + TMD

En appliquant la seconde loi de Newton sur la masse principale M, on a :

$$M\ddot{x}_1 + Kx_1 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \sin \omega t \quad (2.1)$$

et sur la seconde masse, on a :

$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (2.2)$$

On est intéressé par la solution des vibrations forcées en régime permanent et on ne considère pas la force transitoire de vibration libre.  $x_1$  Comme  $x_2$  sont des mouvements harmoniques à une fréquence  $\omega$  et peuvent être représentés par :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= X_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Où  $X_1$  et  $X_2$  sont des nombres complexes inconnus avec chacun une amplitude et une phase. Nous voulons déterminer l'amplitude de la masse principale  $A_1$

En substituant l'équation (2.3) dans les équations (2.1) et (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} -M\omega^2 + KX_1 + k(X_1 - X_2) + i\omega c(X_1 - X_2) &= F_0 \\ -m\omega^2 X_2 + k(X_2 + X_1) + i\omega c(X_2 - X_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4).$$

En réarrangeant l'équation (2.4), on a :

$$\begin{aligned} -(M\omega^2 + K + k + i\omega c)X_1 - (k + i\omega c)X_2 &= F_0 \\ -(k + i\omega c)X_1 + (-m\omega^2 + k + i\omega c)X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

La résolution de ces deux équations donne :

$$X_1 = F_0 \frac{(k - m\omega^2) + i\omega c}{[(-M\omega^2 + K)(-m\omega^2 + k) - m\omega^2 k] + i\omega c[(-M\omega^2 + K - m\omega^2)]} \quad (2.6)$$

$X_1$  Est complexe, on peut donc écrire :

$$X_1 = F_0(A_1 + iB_1) \quad (2.7)$$

A et B sont réels, l'amplitude de  $X_1$  est donnée par :

$$X_1 = F_0 \sqrt{A_1^2 + iB_1^2} \quad (2.8)$$

Mais l'équation (2.6) n'est pas dans la forme de l'équation (2.7), elle est plutôt de la forme :

$$X_1 = F_0 \frac{A + iB}{C + iD} \quad (2.9)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= (k - m\omega^2) \\ B &= \omega * c \\ C &= (-M\omega^2 + K)(-m\omega^2 + k) - m\omega^2 * k \\ D &= \omega * c(-M\omega^2 + K - m\omega^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

À présent, l'équation (2.9) peut être réécrite dans la forme de l'équation :

$$X_1 = F_0 \frac{(A + iB)(C - iD)}{(C + iD)(C - iD)} = F_0 \frac{(AC + BD) + i(BC - AD)}{C^2 + D^2} \quad (2.11)$$

L'amplitude  $A_1$  peut donc être évaluée :

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{F_0} &= \sqrt{\left(\frac{(AC+BD)}{(C^2+D^2)}\right)^2 + \left(\frac{(BC-AD)}{(C^2+D^2)}\right)^2} \\ \frac{A_1}{F_0} &= \sqrt{\frac{A^2C^2 + B^2D^2 + B^2C^2 + A^2D^2}{(C^2+D^2)^2}} \\ \frac{A_1}{F_0} &= \sqrt{\frac{(A^2+B^2)+(C^2+D^2)}{(C^2+D^2)^2}} \\ \frac{A_1}{F_0} &= \sqrt{\frac{(A^2+B^2)}{(C^2+D^2)}}\end{aligned}\quad (2.12)$$

La substitution des valeurs des constantes de l'équation (2.10) dans l'équation (2.12) donne une expression de l'amplitude de la réponse de la masse principale  $M$ .

$$\frac{A_1}{F_0} = \sqrt{\frac{(k - m\omega^2) + \omega^2 c^2}{[(-M\omega^2 + K)(-m\omega^2 + k) - m\omega^2 k]^2 + \omega^2 c^2 [(-M\omega^2 + K - m\omega^2)]^2}}\quad (2.13)$$

On peut réécrire l'équation (2.13) en définissant les variables suivantes :

$$\mu = \frac{m}{M} = \frac{\text{masse TMD}}{\text{masse structure}} = \text{rapport de masse.}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} = \text{Fréquence naturelle de la structure.}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} = \text{Fréquence naturelle du TMD.}$$

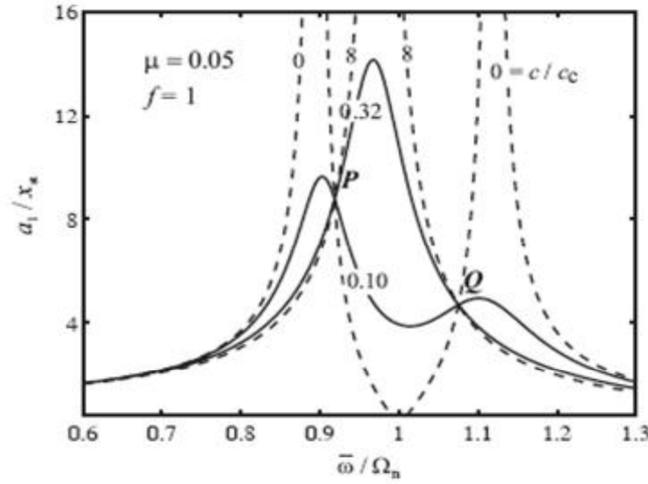
$$f = \frac{\omega_a}{\omega_n} = \text{rapport de fréquence TMD/structure.}$$

$$g = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{Rapport de fréquence de forçage.}$$

$$c_c = 2\omega_a m \text{ Coefficient d'amortissement critique du TMD.}$$

Après quelques transformations algébriques, on peut écrire :

$$\frac{A_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{(2\frac{c}{c_c}g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\frac{c}{c_c}g)^2(g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}}\quad (2.14)$$



**Figure2-2:** Courbes de résonance de fréquence optimale

D'abord les deux points P et Q sont localisés. On peut réécrire l'équation (2.14) comme suit :

$$\frac{A_1}{x_{st}} = \frac{\sqrt{A\left(\frac{c}{c_c}\right)^2 + B}}{\sqrt{C\left(\frac{c}{c_c}\right)^2 + D}} \quad (2.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= 2g^2 \\ B &= (g^2 - f^2)^2 \\ C &= (2g^2)(g^2 - 1 + \mu g^2)^2 \\ D &= [\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si  $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$  l'équation (2.15) devient indépendante de l'amortissement. Cette condition est donnée par :

$$\left( \frac{1}{(g^2 - 1 + \mu g^2)^2} \right)^2 = \left( \frac{g^2 - f^2}{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)} \right)^2 \quad (2.17)$$

Pour enlever le carré dans chaque terme de l'équation (2.17), nous devons introduire le signe ( $\pm$ ) devant chacun des deux termes de l'équation. Avec le signe moins, la solution est triviale puisqu'on trouve  $g^2=0$ , ce qui veut dire que la réponse statique est indépendante de l'amortissement.

La seconde alternative est le signe plus qui mène à :

$$g^4 - 2g^2 \frac{1+f^2 + \mu f^2}{2+\mu} + \frac{2f^2}{2+\mu} = 0 \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) est quadratique en  $g^2$ , donnant deux racines ( $g_1$  et  $g_2$ ) représentant les coordonnées des points fixes  $P$  et  $Q$ . Ces racines sont fonction de  $\mu$  et  $f$ .

Pour ajuster la fréquence de réglage telle que les points  $P$  et  $Q$  soient égaux, les racines de l'équation (2.18) sont déterminées et substituées dans l'équation (2.14). Lorsque les expressions de  $P$  et  $Q$  sont égalisées, une relation simple entre  $\mu$  et  $f$  est alors obtenue :

$$f = \frac{1}{1+\mu} \quad (2.19)$$

Notons que  $\frac{c}{c_c}$  disparaît puisque les amplitudes des points  $P$  et  $Q$  sont indépendantes de l'amortissement.

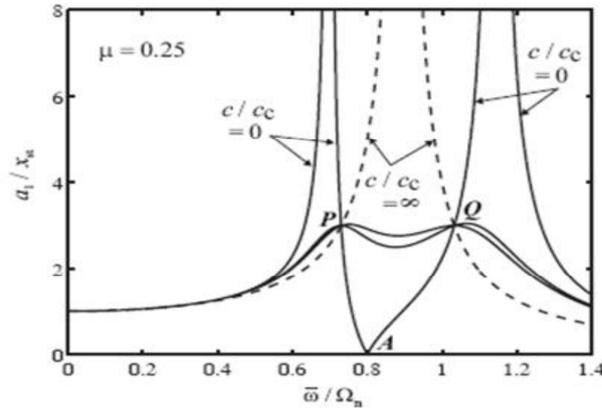
À présent, pour déterminer l'amortissement optimal  $\left(\frac{c}{c_c}\right)_{opt}$ , l'équation (2.19) est substituée dans l'équation (2.14).

L'équation qui résulte est différenciée par rapport à  $g$  et mise égale à zéro, alors qu'une des deux racines obtenues dans l'équation (2.18) est également remplacée dans l'équation (2.14). À partir de ce calcul, nous obtenons pour un optimum à point P.

$$\left(\frac{c}{c_c}\right)_{opt-P} = \frac{\mu \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)^3} \quad (2.20)$$

Alternativement, si la dérivée est égale à zéro au point Q, nous obtenons aussi :

$$\left(\frac{c}{c_c}\right)_{opt-Q} = \frac{\mu \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)^3} \dots (2.21)$$



**Figure2-3:** Courbes de résonance de fréquence optimale et de réglage d'amortissement  
(D'après Den Hartog 1985)

En pratique, pour un réglage optimal, on utilise la valeur moyenne des équations (2.20) et (2.21), soit

$$\left(\frac{c}{c_c}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \quad (2.22)$$

Plusieurs formules ont été proposées pour les paramètres optimaux du TMD passif en utilisant différents critères et approches. Un sommaire des paramètres optimaux du TMD est présenté sur le Tableau 2.1 : Conditions de réglage optimal des systèmes TMD amortis attachés à une structure.

Chercheur	Rapport fréquentiel	Amortissement	Remarque
Den Hartog [11]	$\frac{1}{1+u}$	$\sqrt{\frac{3u}{8(u+1)^3}}$	La première équation des paramètres optimaux d'un TMD pour un système à 1 DDL non amorti.
Sadek et al [32]	$\frac{1}{1+u}$	$\sqrt{\frac{u}{1+u}}$	Résultats basés sur excitation sismique d'un système à 30 DDL
Krenk et Hogsberg [32]	$\frac{1}{(\mu+1)}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{(\mu+1)}}$	

Si on augmente le rapport massique  $\mu$  on rend le TMD plus performant, en revanche et pour des raisons économiques, la masse du TMD est prise entre 1% et 10% de la masse totale de la structure, et plus généralement le rapport  $\mu$  est pris égal à 5%. [33]

---

## **2.6. Bâtiments équipés d'un amortisseur à masse accordée (TMD)**

L'idée c'est d'ajouter un amortisseur à masse accordée – système secondaire - (*Tuned Mass Damper*) dans des positions appropriées dans le bâtiment – système primaire, ensuite mettre le mouvement de la masse secondaire (TMD), attachée à la structure en résonance avec le mouvement de la structure sous les excitations sismiques. Le dispositif est généralement placé au dernier étage.

Si la fréquence propre du système secondaire est proche de celle du système primaire, le mouvement de la masse TMD est en déphasage d'environ  $90^\circ$  du système primaire. Par conséquent, la force d'inertie créée par le mouvement de masse TMD fonctionne comme une force d'amortissement sur le système primaire. [34]

On admet les notations suivantes :

- Fréquence naturelle du système auxiliaire (TMD)  $\omega_{TMD} = \sqrt{\frac{k_{tmd}}{m_{tmd}}}$  .
- Fréquence naturelle du système primaire (structure)  $\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$  .
- Le rapport des masses  $\mu = \frac{m_{tmd}}{m_s}$  .

Où  $m_{tmd}$  est la masse du TMD et  $m_s$  la masse de la structure.

## **2.7. Réponse dynamique et équations de mouvement :**

La réponse dynamique des structures peut être obtenue par deux types d'analyses. L'analyse statique qui consiste à remplacer la force perturbatrice extérieure par une force équivalente statique horizontale exercée sur le plancher du bâtiment, ou bien l'analyse dynamique où le comportement des bâtiments peut être approprié dans une caractéristique plus complète par une approche plus raisonnable.

L'analyse dynamique des structures à plusieurs degrés de liberté soumise à une accélération sismique  $\{\ddot{x}_g\}$ , elle est dépendante de la matrice de rigidité [K], de la matrice masse [M] et la matrice d'amortissement [C]. Dans ce cas, les équations du mouvement peuvent être écrites comme suit :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = -[M]\{r\}\{\ddot{x}_g\} \quad (2.23)$$

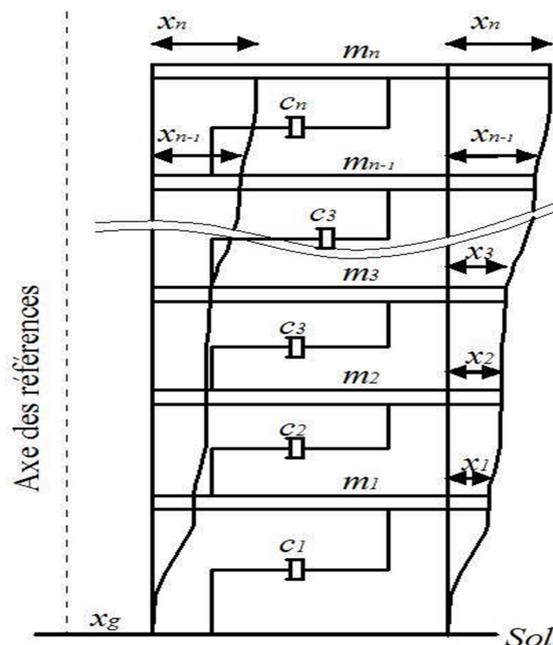
Avec :

$[M]$  La matrice de masse,  $[C]$  la matrice d'amortissement,  $[K]$  la matrice de rigidité,  $\{r\}$  est le vecteur d'influence du séisme sur la structure et plus précisément sur chaque étage (masse), généralement le vecteur  $\{r\}$  est un vecteur unitaire,  $\{x\}$  est le vecteur contenant les déplacements relatifs des étages de la structure par rapport au sol. La dérivée en temps du vecteur  $\{x\}$  donne le vecteur de la vitesse  $\{\dot{x}\}$  et le vecteur d'accélération de la structure  $\{\ddot{x}\}$ , l'accélération du sol appliquée sur le système est donnée par le vecteur  $\{\ddot{x}_g\}$ .

D'une autre façon on peut dire que les termes à gauche dans l'équation de mouvement (2.23) représentent la force d'inertie, la force d'amortissement et la force élastique respectivement. Tandis que le terme à droite de cette équation représente l'excitation sismique.

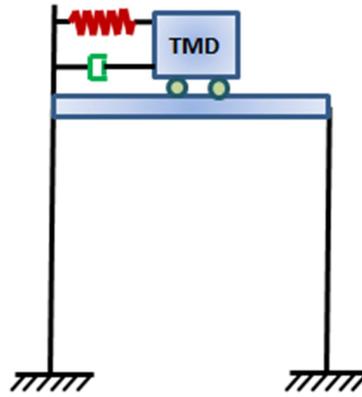
## **2.8. Modèle mathématique d'une structure sans dispositif de contrôle**

Un système à un degré de liberté est constitué d'une masse principale  $M$  qui s'appuie au sol par un ressort de raideur  $K$  et un amortisseur  $C$  ; souvent les bâtiments sont modélisés comme des systèmes à plusieurs degrés de liberté comme le montre la figure (2.5). La masse de la structure est concentrée aux niveaux des planchers, les poutres ont une rigidité infinie et la force axiale dans les poteaux n'engendre pas de déformation dans la structure.

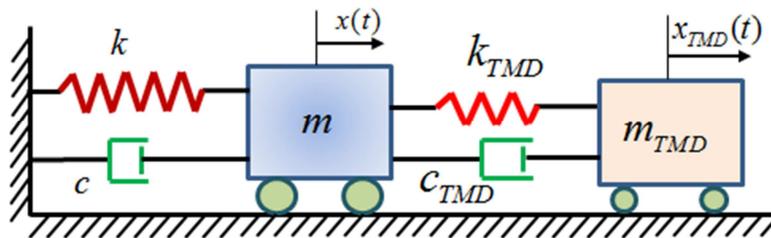


**Figure 2-5 :** représentation dynamique d'une structure à plusieurs degrés de liberté.



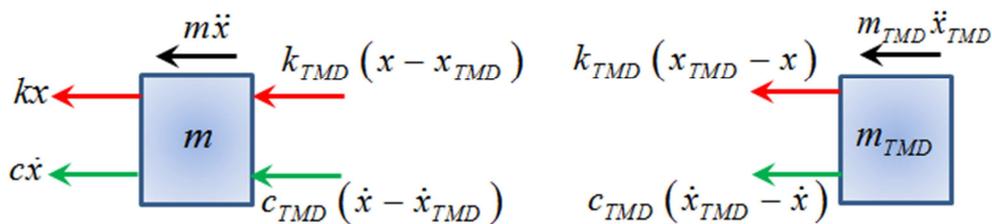


**Figure 2-6** Structure à 1 DDL avec un TMD



**Figure 2-7** : modèle rhéologique – structure avec TMD

Avant de formuler les équations de mouvement il est nécessaire de concevoir le diagramme de corps libre des masses du système. Le diagramme de corps libre est indiqué dans la figure (2.8)



**Figure 2-8** : Diagramme de corps libre – structure à 1DDL avec TMD

L'équation de mouvement est obtenue par l'application de la seconde loi de Newton soit :

$$\sum \vec{F} = m\ddot{x}_g$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - c_{TMD}(\dot{x}_{TMD} - \dot{x}) - k_{TMD}(x_{TMD} - x) = -m\ddot{x}_g$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - c_{TMD}\dot{x}_{TMD} + c_{TMD}\dot{x} - k_{TMD}x_{TMD} + k_{TMD}x = -m\ddot{x}_g$$

$$m\ddot{x} + (c + c_{TMD})\dot{x} + (k + k_{TMD})x - c_{TMD}\dot{x}_{TMD} - k_{TMD}x_{TMD} = -m\ddot{x}_g$$

L'équation de mouvement de la masse  $m_T$  du TMD est donnée par :

$$m_{imd} \ddot{x}_{imd} + c_{imd} (\dot{x}_{imd} - \dot{x}) + k_{imd} (x_{imd} - x) = -m_{imd} \ddot{x}_g$$

$$m_{imd} \ddot{x}_{imd} + c_{imd} \dot{x}_{imd} + k_{imd} x_{imd} - c\dot{x} - kx = -m_{imd} \ddot{x}_g$$

Alors les équations de mouvement qui décrivent l'ensemble du système sont données par les équations qui peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_{imd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_{imd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c + c_{imd} & -c_{imd} \\ -c_{imd} & c_{imd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{imd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_{imd} & -k_{imd} \\ -k_{imd} & k_{imd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{imd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m \\ -m_{imd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_g$$

En introduisant les vecteurs de déplacement relatifs, de vitesse et d'accélération du système, on écrit :

$$x = \begin{bmatrix} x \\ x_{imd} \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{imd} \end{bmatrix}, \quad \ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_{imd} \end{bmatrix}.$$

Les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_{imd} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c + c_{imd} & -c_{imd} \\ -c_{imd} & c_{imd} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k + k_{imd} & -k_{imd} \\ -k_{imd} & k_{imd} \end{bmatrix}.$$

et le vecteur L :

$$L = M\Gamma = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_{imd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous permettent d'écrire le système d'équation de mouvement sous la forme suivante :

$$[M] \cdot \ddot{x} + [C] \cdot \dot{x} + [K] \cdot x = [M] \Gamma \ddot{x}_g$$

## 2.10. Bâtiment à plusieurs degrés de liberté avec un TMD

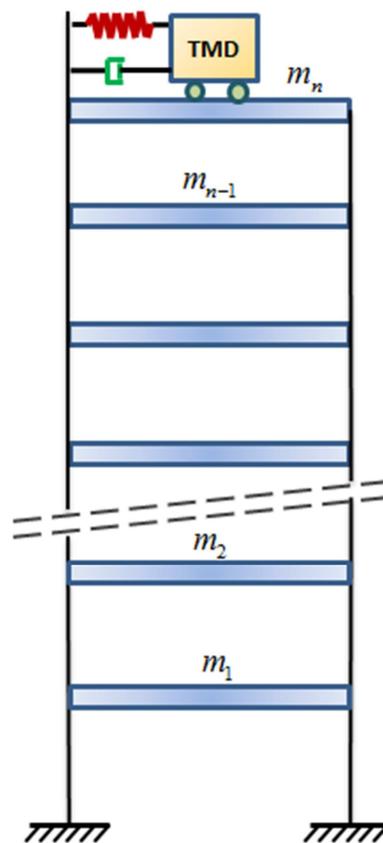


Figure 2-9 : Bâtiment à plusieurs degrés de liberté équipé par un TMD

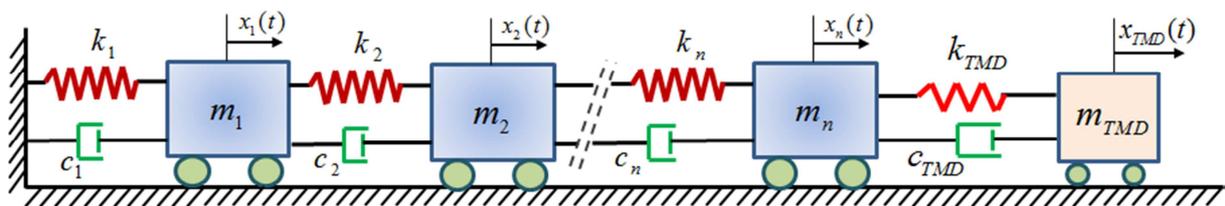


Figure 2-10. : Modèle rhéologique pour un bâtiment à NDDL avec TMD

### 1<sup>er</sup> étape de solution

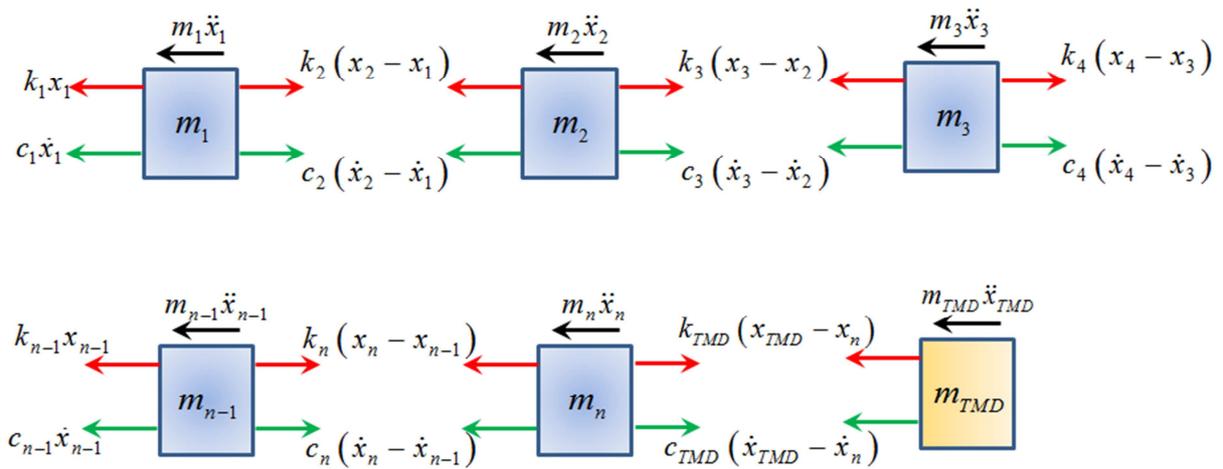
L'application de la loi de Newton, on trouve :

$$\sum F_x = M \times \ddot{X}$$

### 2<sup>ème</sup> étape de solution

L'équation de mouvement globale du système :

$$[M_s]\{\ddot{X}_s\} + [C_s]\{\dot{X}_s\} + [K_s]\{X_s\} = -[M_s]\{r\}\{\ddot{X}_g\} + \{f_u\}[F]$$



**Figure 2-11** : Diagramme de corps libre – structure à NDDL avec TMD

### 3<sup>ème</sup> étape de solution

Equation d'équilibre dynamique pour les masses :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{x}_g \\ m_3 \ddot{x}_3 + (c_3 + c_4) \dot{x}_3 + (k_3 + k_4) x_3 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 - c_4 \dot{x}_4 - k_4 x_4 = -m_3 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} + (c_{n-1} + c_n) \dot{x}_{n-1} + (k_{n-1} + k_n) x_{n-1} - c_{n-1} \dot{x}_{n-2} - k_{n-1} x_{n-2} - c_n \dot{x}_n - k_n x_n = -m_{n-1} \ddot{x}_g \\ m_n \ddot{x}_n + (c_n + c_{tmd}) \dot{x}_n - c_n \dot{x}_{n-1} + (k_n + k_{tmd}) x_n - k_n x_{n-1} - c_{tmd} \dot{x}_{tmd} - k_{tmd} x_{tmd} = -m_n \ddot{x}_g \\ m_{tmd} \ddot{x}_{tmd} + c_{tmd} \dot{x}_{tmd} + k_{tmd} x_{tmd} - c_{tmd} \dot{x}_n + k_{tmd} x_n = m_{tmd} \ddot{x}_g \end{array} \right.$$



---

**CHAPITRE 3**  
**FORMULATION MATHÉMATIQUE**

---

## CHAPITRE 3

### FORMULATION MATHÉMATIQUE ET MISE EN ÉQUATION

#### **3.1. Introduction :**

La formulation mathématique des systèmes implique des équations différentielles complexes dont la résolution analytique est difficile impliquant le recours aux méthodes numériques à travers l'outil informatique. Pour la résolution des équations il faut faire appel aux fonctions de transfert tel que la représentation d'état où la transformée de Laplace, ...etc. Dans notre travail nous allons utiliser la formulation de transfert basée sur représentation d'états (*state-space*) pour passer d'une équation de  $n^{ième}$  ordre à une équation de 1<sup>er</sup> ordre.

#### **3.2. Formulation d'un système à N DDL :**

D'une façon générale la formulation exacte et précise du modèle structurel dans l'analyse dynamique implique un nombre infini de degré de liberté. Par contre, les structures à étudier sont souvent modélisées d'une manière adéquate et par un nombre fini de degrés de liberté dans des points nodaux discrets. Pour la modélisation des structures totalement symétriques on les considère comme des structures planes d'où le nombre de degré de liberté à chaque articulation sera égale à 3 (déplacement horizontal, vertical et rotation) ce qui généralement suffit pour définir le comportement de la structure. Il est possible de considérer seulement le déplacement horizontal pour avoir une structure beaucoup plus simple ; dans ce cas la structure n'a qu'un seul degré de liberté à chaque étage (masse). Ce modèle simple est souvent utilisé lorsque le comportement global de la structure (représenté par le déplacement horizontal du plancher) est la principale préoccupation.[30]

#### **3.3. Hypothèses et limitation**

Dans ce qui suit et pour la formulation mathématique relative à la modélisation des bâtiments équipés des dispositifs de contrôle, certaines hypothèses sont nécessaires :

- Seuls les mouvements horizontaux sont considérés. Le mouvement du sol est supposé se produire dans la direction des plans symétriques du bâtiment.
- La structure est modélisée comme un système linéaire à plusieurs degrés de liberté où la masse est concentrée au niveau de chaque étage avec une rigidité effective donnée.
- Les variations spatiales des mouvements du sol ne sont pas considérées. Autrement dit, l'interaction sol-structure est négligée.

Le but de cette étude c'est d'introduire deux amortisseurs à masse accordée (TMD) dans des positions appropriées afin de pouvoir déterminer la position optimale qui améliore la réponse de la structure sous une excitation sismique. Pour une étude exacte et approfondie, trois configurations seront étudiées :

**3.4.1 Première configuration – 1 TMD installé au sommet du bâtiment :**

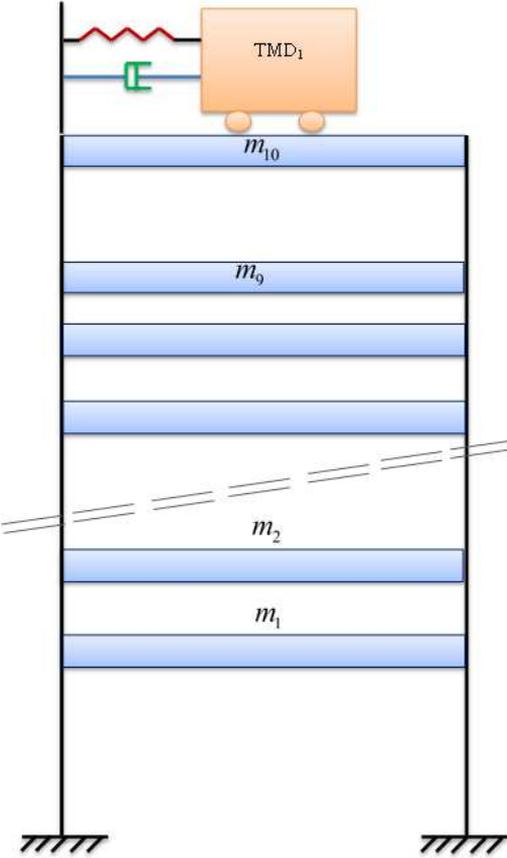


Figure 3-1 : représentation dynamique de la configuration (C1)

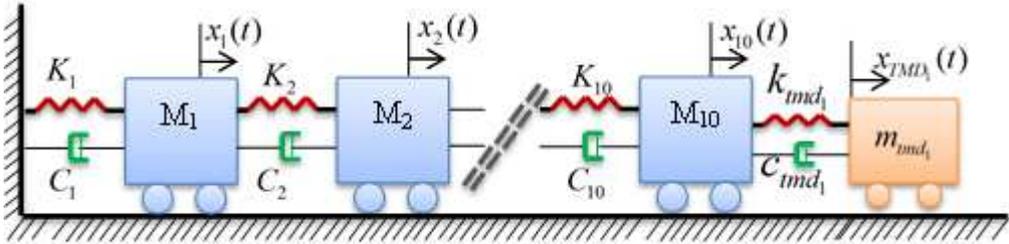
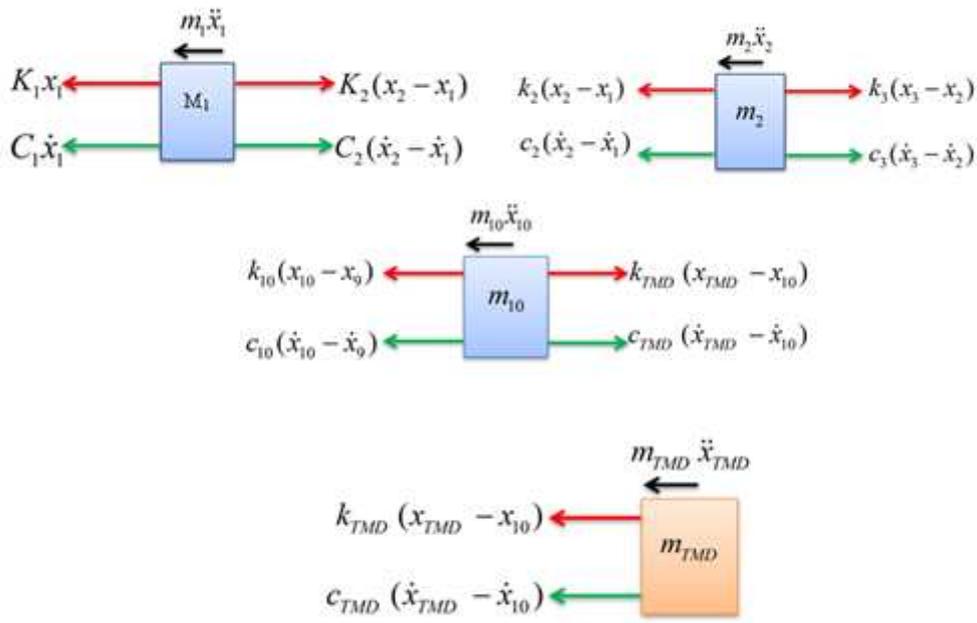


Figure 3-2 : diagramme rhéologique pour configuration (C1)

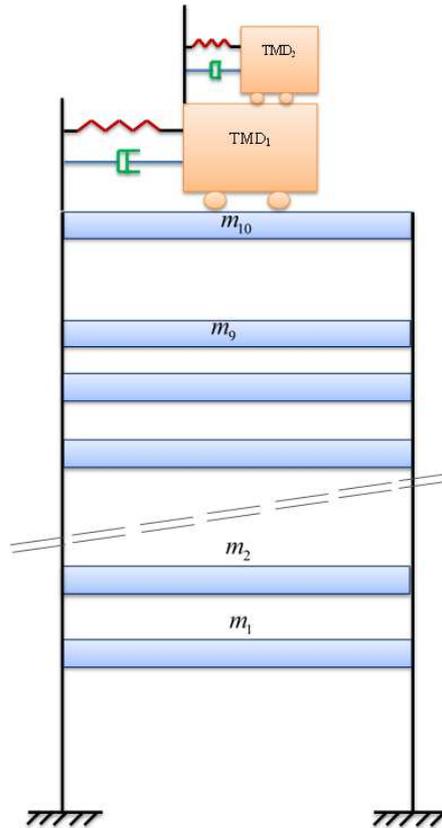


Equation d'équilibre dynamique pour les masses :

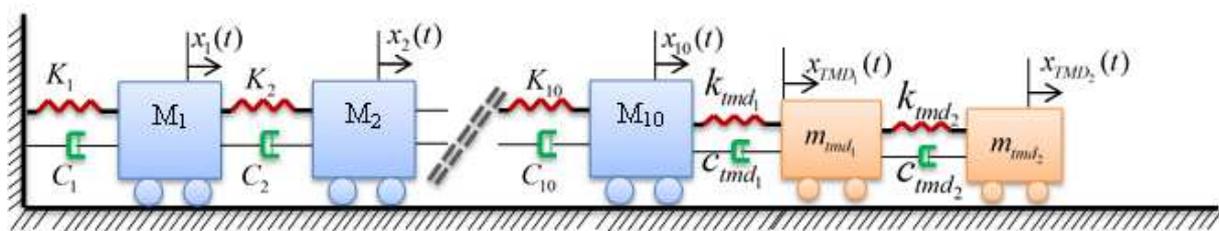
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + (c_{10} + c_{TMD}) \dot{x}_{10} - c_{10} \dot{x}_9 + (k_{10} + k_{TMD})x_{10} - k_{10}x_9 - c_{TMD} \dot{x}_{TMD} - k_{TMD}x_{TMD} = -m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{TMD} \ddot{x}_{TMD} + c_{TMD} \dot{x}_{TMD} + k_{TMD}x_{TMD} - c_{TMD} \dot{x}_{10} + k_{TMD}x_{10} = m_{TMD} \ddot{x}_g \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{tmd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_{tmd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & c_{n-1} + c_n & -c_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n + c_{tmd} & -c_{tmd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{tmd} & c_{tmd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{tmd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & k_{n-1} + k_n & -k_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n + k_{tmd} & -k_{tmd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tmd} & k_{tmd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_{tmd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 \\ -m_2 \\ \vdots \\ -m_{n-1} \\ -m_n \\ -m_{tmd} \end{bmatrix} \ddot{x}_g$$

**3.4.2. Deuxième configuration - 2TMD installés en parallèle :**



**Figure 3-3** représentation dynamique de la configuration (C2).

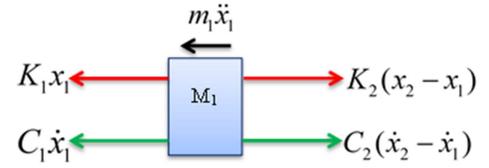


**Figure 3.4** : Modèle rhéologique pour configuration (C2).

On conçoit le diagramme du corps libre et en appliquant la seconde loi de Newton à chaque niveau on obtient les équations de mouvement :

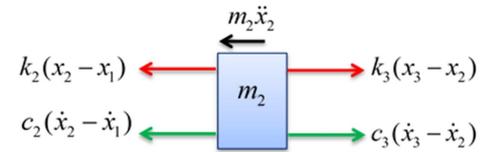
**Pour le 1<sup>er</sup> étage de la structure :**

$$\begin{cases} \sum F = m_1 \ddot{x}_g \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) = -m_1 \ddot{x}_g \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = -m_1 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{x}_g \end{cases}$$

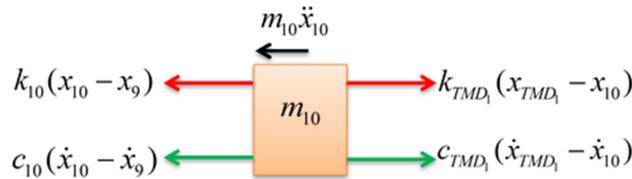


**Pour le 2<sup>ème</sup> étage de la structure :**

$$\begin{cases} \sum F = m_2 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) - c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_3 (x_3 - x_2) = -m_2 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_3 - k_3 x_2 = -m_2 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{x}_g \end{cases}$$

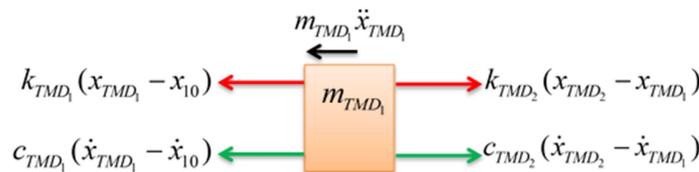


**Pour le 10<sup>ème</sup> étage de la structure :**



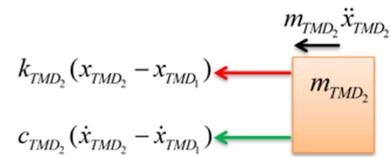
$$\begin{cases} \sum F = m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + c_{10} (\dot{x}_{10} - \dot{x}_9) + k_{10} (x_{10} - x_9) - c_{TMD_1} (\dot{x}_{TMD_1} - \dot{x}_{10}) - k_{TMD_1} (x_{TMD_1} - x_{10}) = -m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{10} \ddot{x}_n + c_{10} \dot{x}_{10} - c_{10} \dot{x}_9 + k_{10} x_{10} - k_{10} x_9 - c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_{10} - k_{TMD_1} x_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{10} = -m_{10} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + (c_{10} + c_{TMD_1}) \dot{x}_{10} + (k_{10} + k_{TMD_1}) x_{10} - c_{10} \dot{x}_9 - k_{10} x_9 - c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{TMD_1} = -m_{10} \ddot{x}_g \end{cases}$$

**Pour le premier TMD :**



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F = m_{TMD_1} \ddot{x}_g \\ m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + c_{TMD_1} (\dot{x}_{TMD_1} - \dot{x}_{10}) + k_{TMD_1} (x_{TMD_1} - x_{10}) - c_{TMD_2} (\dot{x}_{TMD_2} - \dot{x}_{TMD_1}) - k_{TMD_2} (x_{TMD_2} - x_{TMD_1}) = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g \\ m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_{10} + k_{TMD_1} x_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{10} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_2} x_{TMD_2} - k_{TMD_2} x_{TMD_1} = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + (c_{TMD_1} + c_{TMD_2}) \dot{x}_{TMD_1} + (k_{TMD_1} + k_{TMD_2}) x_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_{10} - k_{TMD_1} x_{10} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} - k_{TMD_2} x_{TMD_2} = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g \end{array} \right.$$

### Pour le 2<sup>ème</sup> TMD

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F = m_{TMD_2} \ddot{x}_g \\ m_{TMD_2} \ddot{x}_{TMD_2} + c_{TMD_2} (\dot{x}_{TMD_2} - \dot{x}_{TMD_1}) + k_{TMD_2} (x_{TMD_2} - x_{TMD_1}) = -m_{TMD_2} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{TMD_2} \ddot{x}_{TMD_2} + c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} + k_{TMD_2} x_{TMD_2} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_2} x_{TMD_1} = -m_{TMD_2} \ddot{x}_g \end{array} \right.$$


Les équations de mouvement peuvent être données sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_{TMD_1} \\ \ddot{x}_{TMD_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & \ddots & -c_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_n & c_n + c_{TMD_1} & -c_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{TMD_1} & c_{TMD_1} + c_{TMD_2} & -c_{TMD_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{TMD_2} & c_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{TMD_1} \\ \dot{x}_{TMD_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & -k_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_n & k_n + k_{TMD_1} & -k_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{TMD_1} & k_{TMD_1} + k_{TMD_2} & -k_{TMD_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{TMD_2} & k_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{TMD_1} \\ x_{TMD_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_g$$

### 3.4.3 Troisième configuration - 2TMD installés en série :

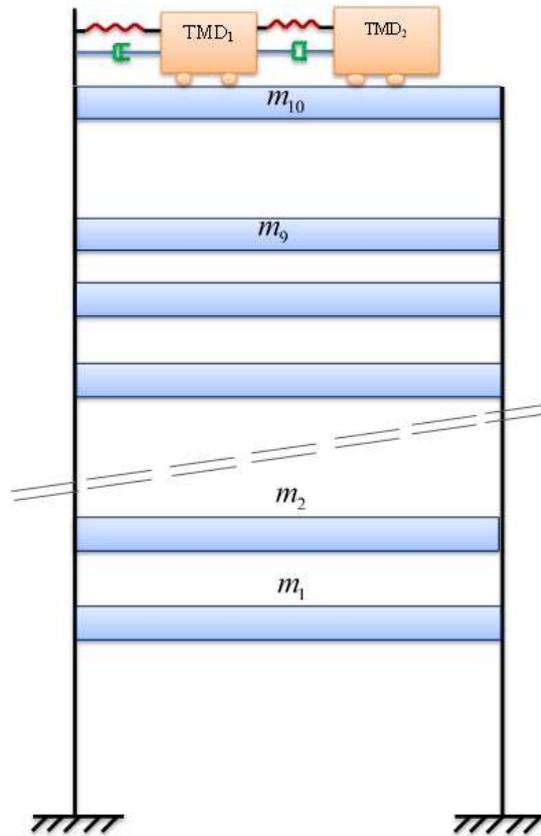


Figure 3-5 représentation dynamique de la configuration (C3).

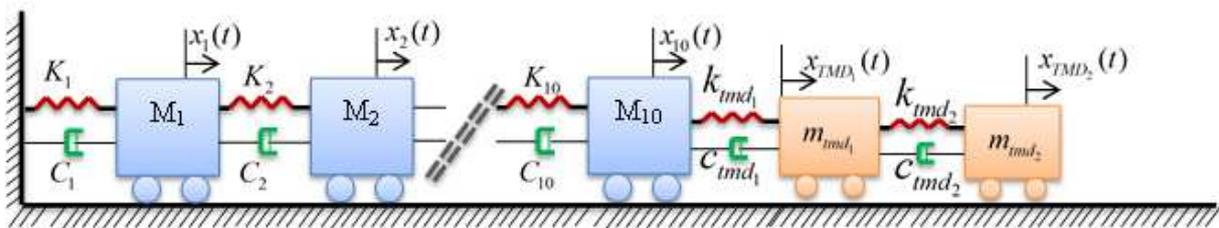
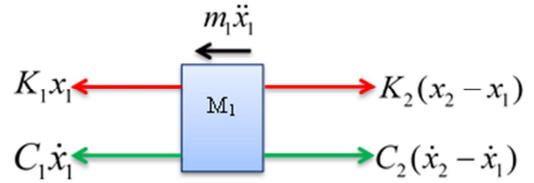


Figure 3-6 : Modèle rhéologique pour configuration (C3).

On conçoit le diagramme du corps libre et en appliquant la seconde loi de Newton à chaque niveau, on obtient les équations du mouvement :

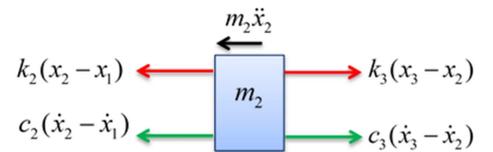
**Pour le 1<sup>er</sup> étage de la structure :**

$$\begin{cases} \sum F = m_1 \ddot{x}_g \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) = -m_1 \ddot{x}_g \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = -m_1 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{x}_g \end{cases}$$

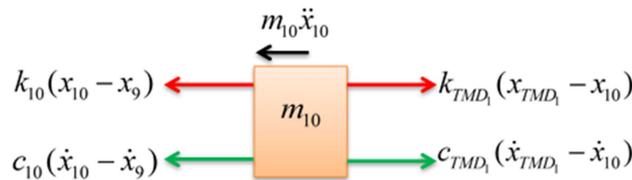


**Pour le 2<sup>ème</sup> étage de la structure :**

$$\begin{cases} \sum F = m_2 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) - c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_3 (x_3 - x_2) = -m_2 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_3 - k_3 x_2 = -m_2 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{x}_g \end{cases}$$

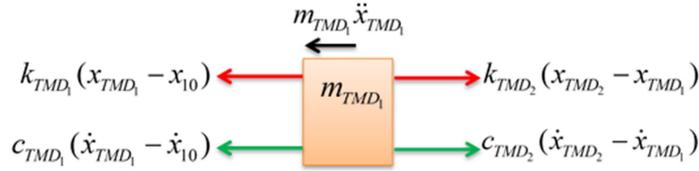


**Pour le 10<sup>ème</sup> étage de la structure :**



$$\begin{cases} \sum F = m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + c_{10} (\dot{x}_{10} - \dot{x}_9) + k_{10} (x_{10} - x_9) - c_{TMD_1} (\dot{x}_{TMD_1} - \dot{x}_{10}) - k_{TMD_1} (x_{TMD_1} - x_{10}) = -m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + c_{10} \dot{x}_{10} - c_{10} \dot{x}_9 + k_{10} x_{10} - k_{10} x_9 - c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_{10} - k_{TMD_1} x_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{10} = -m_{10} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + (c_{10} + c_{TMD_1}) \dot{x}_{10} + (k_{10} + k_{TMD_1}) x_{10} - c_{10} \dot{x}_9 - k_{10} x_9 - c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{TMD_1} = -m_{10} \ddot{x}_g \end{cases}$$

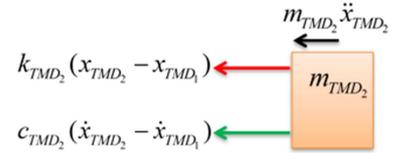
**Pour le 1<sup>er</sup> TMD :**



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F = m_{TMD_1} \ddot{x}_g \\ m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + c_{TMD_1} (\dot{x}_{TMD_1} - \dot{x}_{10}) + k_{TMD_1} (x_{TMD_1} - x_{10}) - c_{TMD_2} (\dot{x}_{TMD_2} - \dot{x}_{TMD_1}) - k_{TMD_2} (x_{TMD_2} - x_{TMD_1}) = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g \\ m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_{10} + k_{TMD_1} x_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{10} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_2} x_{TMD_2} - k_{TMD_2} x_{TMD_1} = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + (c_{TMD_1} + c_{TMD_2}) \dot{x}_{TMD_1} + (k_{TMD_1} + k_{TMD_2}) x_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_{10} - k_{TMD_1} x_{10} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} - k_{TMD_2} x_{TMD_2} = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g \end{array} \right.$$

**Pour le 2eme TMD :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F = m_{TMD_2} \ddot{x}_g \\ m_{TMD_2} \ddot{x}_{TMD_2} + c_{TMD_2} (\dot{x}_{TMD_2} - \dot{x}_{TMD_1}) + k_{TMD_2} (x_{TMD_2} - x_{TMD_1}) = -m_{TMD_2} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{TMD_2} \ddot{x}_{TMD_2} + c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} + k_{TMD_2} x_{TMD_2} - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_2} x_{TMD_1} = -m_{TMD_2} \ddot{x}_g \end{array} \right.$$



Les équations de mouvement peuvent être données sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{10} \\ \ddot{x}_{TMD_1} \\ \ddot{x}_{TMD_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & \ddots & -c_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{10} & c_{10} + c_{TMD_1} & -c_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{TMD_1} & c_{TMD_1} + c_{TMD_2} & -c_{TMD_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{TMD_2} & c_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{TMD_1} \\ \dot{x}_{TMD_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & -k_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{10} & k_{10} + k_{TMD_1} & -k_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{TMD_1} & k_{TMD_1} + k_{TMD_2} & -k_{TMD_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{TMD_2} & k_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \\ x_{TMD_1} \\ x_{TMD_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{x}_g$$

### 3.4.4 Quatrième configuration : - 2 TMD installés aux derniers niveaux

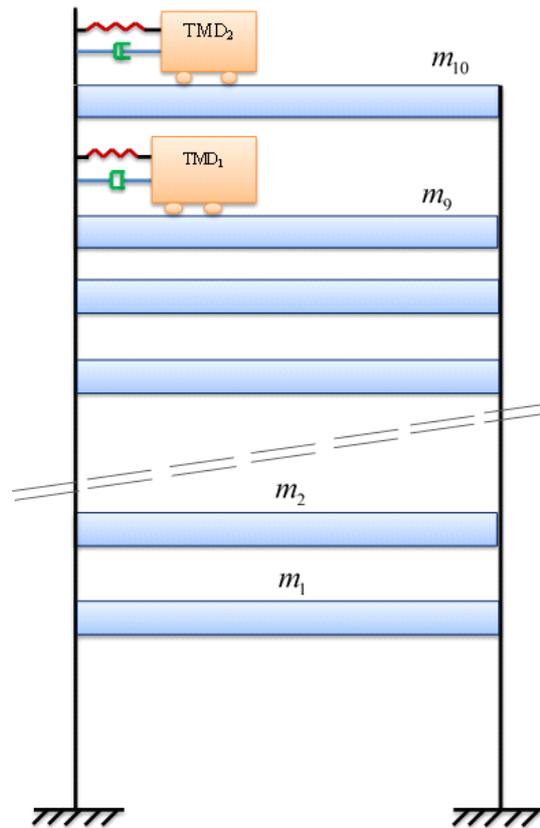


Figure 3-7 représentation dynamique de la configuration (C4).

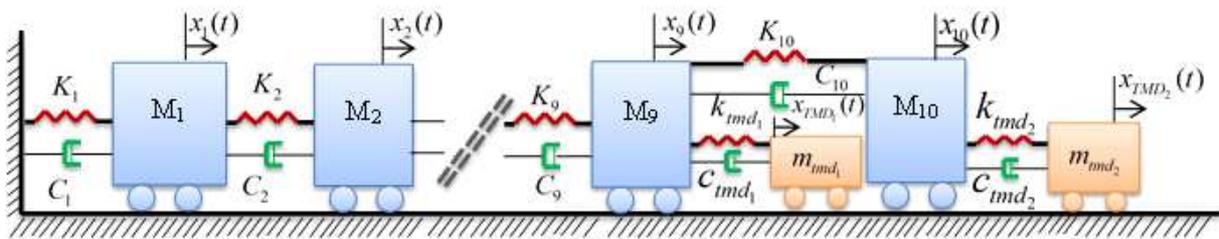
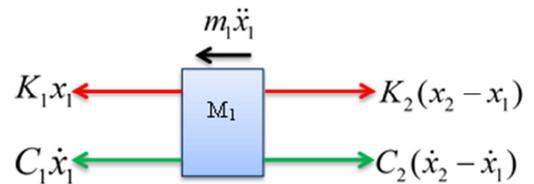


Figure 3-8 : Modèle rhéologique pour configuration (C4).

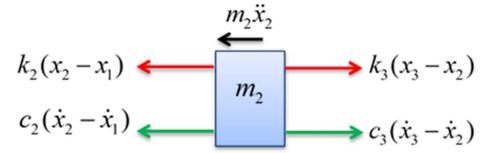
Pour le 1<sup>er</sup> étage de la structure :

$$\begin{cases} \sum F = m_1 \ddot{x}_g \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) = -m_1 \ddot{x}_g \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = -m_1 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = -m_1 \ddot{x}_g \end{cases}$$

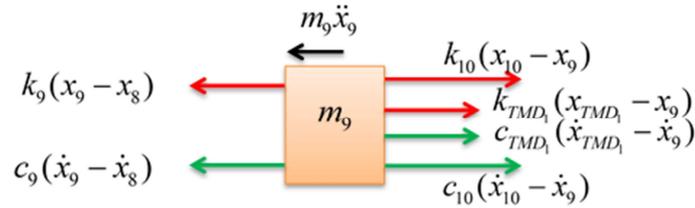


**Pour le 2<sup>ème</sup> étage de la structure :**

$$\begin{cases} \sum F = m_2 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_3(x_3 - x_2) = -m_2 \ddot{x}_g \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_3 - k_3 x_2 = -m_2 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 - c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_3 = -m_2 \ddot{x}_g \end{cases}$$

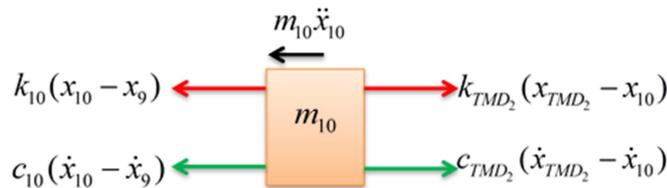


**Pour l'avant dernier étage de la structure :**



$$\begin{cases} \sum F = m_9 \ddot{x}_g \\ m_9 \ddot{x}_9 + c_9(\dot{x}_9 - \dot{x}_8) + k_9(x_9 - x_8) - c_{10}(\dot{x}_{10} - \dot{x}_9) - k_{10}(x_{10} - x_9) - c_{TMD_1}(\dot{x}_{TMD_1} - \dot{x}_9) - k_{TMD_1}(x_{TMD_1} - x_9) = -m_9 \ddot{x}_g \\ m_9 \ddot{x}_9 + c_9 \dot{x}_9 - c_9 \dot{x}_8 + k_9 x_9 - k_9 x_8 - c_{10} \dot{x}_{10} - c_{10} \dot{x}_9 - k_{10} x_{10} - k_{10} x_9 - c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_8 - k_{TMD_1} x_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_9 = -m_9 \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_9 \ddot{x}_9 + (c_9 + c_{10} + c_{TMD_1}) \dot{x}_9 + (k_9 + k_{10} + k_{TMD_1}) x_9 - c_9 \dot{x}_8 - k_9 x_8 - c_{10} \dot{x}_{10} - k_{10} x_{10} - c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} - k_{TMD_1} x_{TMD_1} = -m_9 \ddot{x}_g \end{cases}$$

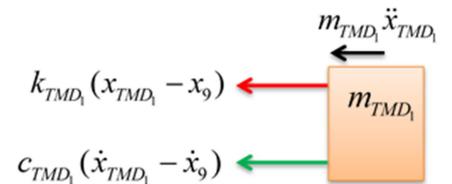
**Pour le 10<sup>ème</sup> étage de la structure :**



$$\begin{cases} \sum F = m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + c_{10}(\dot{x}_{10} - \dot{x}_9) + k_{10}(x_{10} - x_9) - c_{TMD_2}(\dot{x}_{TMD_2} - \dot{x}_{10}) - k_{TMD_2}(x_{TMD_2} - x_{10}) = -m_{10} \ddot{x}_g \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + c_{10} \dot{x}_{10} - c_{10} \dot{x}_9 + k_{10} x_{10} - k_{10} x_9 - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} - c_{TMD_2} \dot{x}_{10} - k_{TMD_2} x_{TMD_2} - k_{TMD_2} x_{10} = -m_{10} \ddot{x}_g \\ \vdots \\ m_{10} \ddot{x}_{10} + (c_{10} + c_{TMD_2}) \dot{x}_{10} + (k_{10} + k_{TMD_2}) x_{10} - c_{10} \dot{x}_9 - k_{10} x_9 - c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} - k_{TMD_2} x_{TMD_2} = -m_{10} \ddot{x}_g \end{cases}$$

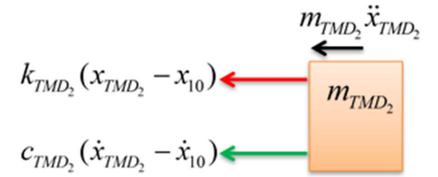
**Pour le 1<sup>er</sup> TMD :**

$$m_{TMD_1} \ddot{x}_{TMD_1} + c_{TMD_1} \dot{x}_{TMD_1} + k_{TMD_1} x_{TMD_1} - c_{TMD_1} \dot{x}_9 - k_{TMD_1} x_9 = -m_{TMD_1} \ddot{x}_g$$



**Pour le 2eme TMD :**

$$m_{TMD_2} \ddot{x}_{TMD_2} + c_{TMD_2} \dot{x}_{TMD_2} + k_{TMD_2} x_{TMD_2} - c_{TMD_2} \dot{x}_{10} - k_{TMD_2} x_{10} = -m_{TMD_2} \ddot{x}_g$$



Les équations du système sont mises sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_9 \\ \ddot{x}_{10} \\ \ddot{x}_{TMD_1} \\ \ddot{x}_{TMD_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & \ddots & -c_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_9 & c_9 + c_{10} + c_{TMD_1} & -c_{10} & -c_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{10} & c_{10} + c_{TMD_2} & 0 & -c_{TMD_2} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{TMD_1} & 0 & c_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{TMD_2} & 0 & c_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{TMD_1} \\ \dot{x}_{TMD_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & -k_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_9 & k_9 + k_{10} + k_{TMD_1} & -k_{10} & -k_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{10} & k_{10} + k_{TMD_2} & 0 & -k_{TMD_2} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{TMD_1} & 0 & k_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{TMD_2} & 0 & k_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{TMD_1} \\ x_{TMD_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{TMD_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_g$$

---

### **3.5. Equation de mouvement d'un bâtiment sous chargement extérieur**

#### **3.5.1. Solution en représentation d'état (state-space) :**

C'est une méthode de résolution numérique des problèmes à plusieurs degrés de liberté (NDDL) d'un ordre supérieur. Le modèle de variable d'état est un ensemble d'équations différentielles de premier ordre couplées généralement écrites sous forme d'une matrice vectorielle. Un système d'ordre  $n$  est écrit en représentation d'état en utilisant des équations de premier ordre, qui préservent la relation entrée-sortie.

La forme générale de l'écriture de la représentation d'état est comme suit :

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{U\} \quad 3.1$$

$$\{Y\} = [C]\{X\} + [D]\{U\} \quad 3.2$$

Dans la formulation par représentation d'état « *state space* » on considère quatre matrices **[A]**, **[B]**, **[C]**, **[D]**

Avec:

**[A]** : La matrice d'état (*state matrix*) : elle dépend des paramètres du système dynamique (M, K et C), lien entre  $X$  et  $\dot{X}$

**[B]** : La matrice d'entrée, (*input matrix*) : elle dépend des entrées (*inputs* : toute force extérieure agissant sur le système dynamique), elle est directement liée à  $\dot{X}$  et  $U$  comme le montre l'équation (3.1).

**[C]**: la matrice de sortie (*output matrix*) elle est généralement unitaire

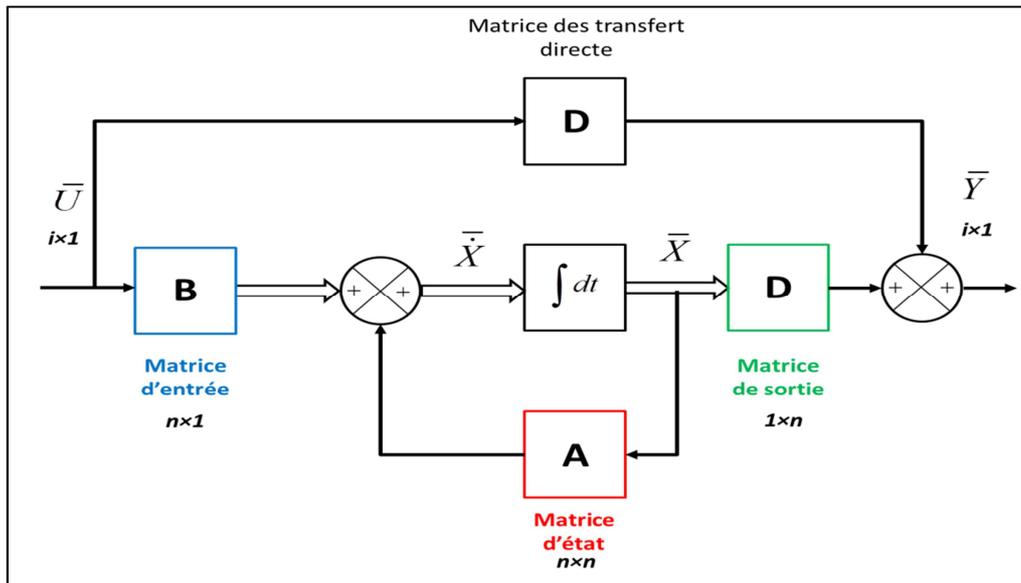
**[D]** : la matrice de transmission directe entre les entrées et les sorties du système (*outputs* et *inputs*) dans les problèmes de dynamique cette matrice est généralement nulle.

**n**: nombre de degrés de liberté DDL

**i** : nombre des entrées - *inputs*

**j** : nombre des sorties - *outputs*

$\{U\}$  : Vecteur d'entrée (*input*)



**Figure 3-9 :** La forme générale de la représentation d'état « *state space* », SISO (*single input, single output*)

L'équation de mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté sous excitation sismique avec un contrôle passif est de la forme suivante :

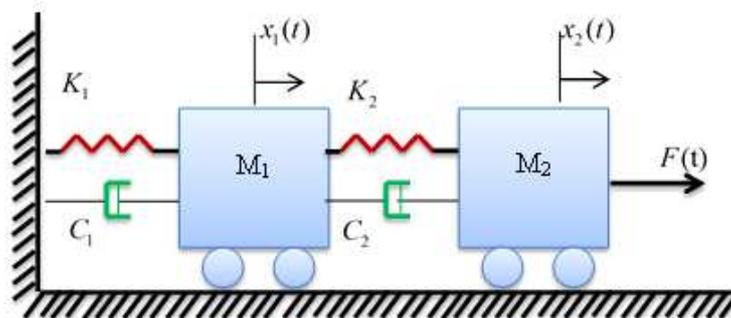
$$[M_s]\{\ddot{X}_s\} + [C_s]\{\dot{X}_s\} + [K_s]\{X_s\} = -[M_s]\{r\}\{\ddot{X}_g\} + \{f_u\}[F] \quad 3.3$$

D'une autre manière :

$$\{\ddot{X}_s\} = -[M_s]^{-1}[C_s]\{\dot{X}_s\} - [M_s]^{-1}[K_s]\{X_s\} - \{r\}\{\ddot{X}_g\} + [M_s]^{-1}\{f_u\}[F] \quad 3.4$$

### **3.6. Exemple d'un système à deux degrés de liberté sous excitation sismique F(t)**

Dans ce travail, nous étudions un système mécanique « MRA » (Masse, Ressort, Amortisseur) à deux degrés de liberté (DDL), pour la mise en œuvre de la résolution mathématique par la représentation d'état « *state space* ».



**Figure 3-10 :** Système à 2 DDL

$[M_s]$  ,  $[K_s]$  ,  $[C_s]$  sont respectivement la matrice masse, la matrice de rigidité et la matrice d'amortissement du système,  $\{\ddot{X}_s\}$  ,  $\{\dot{X}_s\}$  ,  $\{X_s\}$  sont respectivement le vecteur d'accélération, le vecteur de vitesse et le vecteur de déplacement globaux du système.

### 1<sup>er</sup> étape de solution

Selon la seconde loi de Newton, on trouve :

$$\sum F_x = M \times \dot{X}$$

### 2<sup>ème</sup> étape de solution

L'équation de mouvement globale du système :

$$[M_s]\{\ddot{X}_s\} + [C_s]\{\dot{X}_s\} + [K_s]\{X_s\} = -[M_s]\{r\}\{\ddot{X}_g\} + \{f_u\}[F] \quad 3.4$$

### 3<sup>ème</sup> étape de solution

a- Equation d'équilibre dynamique pour la masse  $M_1$  :

$$M_1 \ddot{X}_1 + C_1 \dot{X}_1 + C_2 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + K_1 X_1 + K_2 (X_1 - X_2) = 0 \quad 3.5$$

Posant:

$$\dot{X}_1 = X_3 = Y_1 \Leftrightarrow \ddot{X}_1 = \dot{X}_3 \quad 3.6$$

$$\dot{X}_2 = X_4 = Y_2 \quad 3.7$$

On remplace (3.6) et (3.7) dans l'équation (3.5), l'équation devient:

$$M_1 \dot{X}_3 + C_1 X_3 + C_2 (X_3 - X_4) + K_1 X_1 + K_2 (X_1 - X_2) \quad 3.8$$

$$M_1 \dot{X}_3 = -C_1 X_3 - C_2 (X_3 - X_4) - K_1 X_1 - K_2 (X_1 - X_2) \quad 3.9$$

$$M_1 \dot{X}_3 = -C_1 \times X_3 - C_2 \times X_3 + C_2 \times X_4 - K_1 X_1 - K_2 \times X_1 + K_2 \times X_2 \quad 3.10$$

$$M_1 \dot{X}_3 = -K_2 \times X_1 - K_1 X_1 + K_2 \times X_2 - C_1 \times X_3 - C_2 \times X_3 + C_2 \times X_4 \quad 3.11$$

On divise les deux termes de l'équation par  $M_1$ , l'équation (3.11) devient :

$$\dot{X}_3 = \frac{-K_1 - K_2}{M_1} \times X_1 + \frac{K_2}{M_1} \times X_2 + \frac{-C_1 - C_2}{M_1} \times X_3 + \frac{C_2}{M_1} \times X_4 \quad 3.12$$

b- Equation d'équilibre dynamique pour la masse  $M_2$  :

De la même manière que pour la masse  $M_1$ , nous trouvons :

$$\dot{X}_4 = \frac{K_2}{M_2} \times X_1 - \frac{K_2}{M_2} \times X_2 + \frac{C_2}{M_2} \times X_3 - \frac{C_2}{M_2} \times X_4 + \frac{F}{M_2} \quad 3.13$$

$$\dot{X}_1 = 0 \times X_1 + 0 \times X_2 + 1 \times X_3 + 0 \times X_4 \quad 3.14$$

$$\dot{X}_2 = 0 \times X_1 + 0 \times X_2 + 0 \times X_3 + 1 \times X_4 \quad 3.15$$

### Taille des matrices

a) **Matrice d'état [A]** : la taille de la matrice d'état est  $(2n \times 2n)$  Les équations (3.14), (3.15), (3.12) et (3.13) successivement, seront écrites sous forme matricielle

$$[A] = \begin{bmatrix} & 2n \times 2n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 4 \times 4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_1 - K_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & \frac{-C_1 - C_2}{M_1} & \frac{C_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{-K_2}{M_2} & \frac{C_2}{M_2} & \frac{-C_2}{M_2} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

b) **Matrice d'entrée [B]** : la taille de matrice d'entrée est  $(2n \times i)$

$$[B] = \begin{bmatrix} & 2n \times i & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 4 \times 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.17$$

c) **Taille de matrice de sortie [C]** : la taille de matrice de sortie est  $(j \times 2n)$

$$Y_1(t) = 1 \times X_1(t) + 0 \times X_2(t) + 0 \times X_3(t) + 0 \times X_4(t) \quad 3.18$$

$$Y_2(t) = 0 \times X_1(t) + 1 \times X_2(t) + 0 \times X_3(t) + 0 \times X_4(t) \quad 3.19$$

$$[C] = \begin{bmatrix} & j \times 2n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 2 \times 4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.20$$

**d) Matrice de transmission directe [D] :** la taille de matrice de transmission directe est ( $j \times 2n$ )

$$[D] = \begin{bmatrix} j \times i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.21$$

**e) Taille du vecteur d'entrée {U} :** la taille de vecteur d'entrée est ( $i \times 1$ )

$$\{U\} = \begin{pmatrix} i \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad 3.22$$

La solution mathématique de l'exemple précédent par la représentation d'état « *state-space* », est donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_1 - K_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & \frac{-C_1 - C_2}{M_1} & \frac{C_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{-K_2}{M_2} & \frac{C_2}{M_2} & \frac{-C_2}{M_2} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad 3.23$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad 3.24$$

### 3.7. Exemple d'un système à plusieurs degrés de liberté (nDDL) :

La solution générale par représentation d'état « *state space* » pour un système à n DDL est donnée sous forme matricielle comme suit :

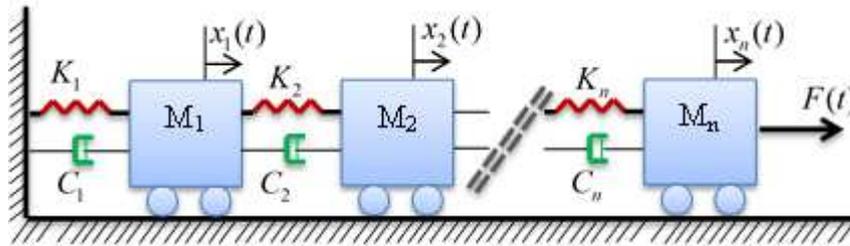


Figure 3-11 : Système dynamique pour (n) DDL.

L'application de la loi de Newton, on trouve :

$$\sum F_x = M \times \ddot{X}$$

L'équation de mouvement globale du système :

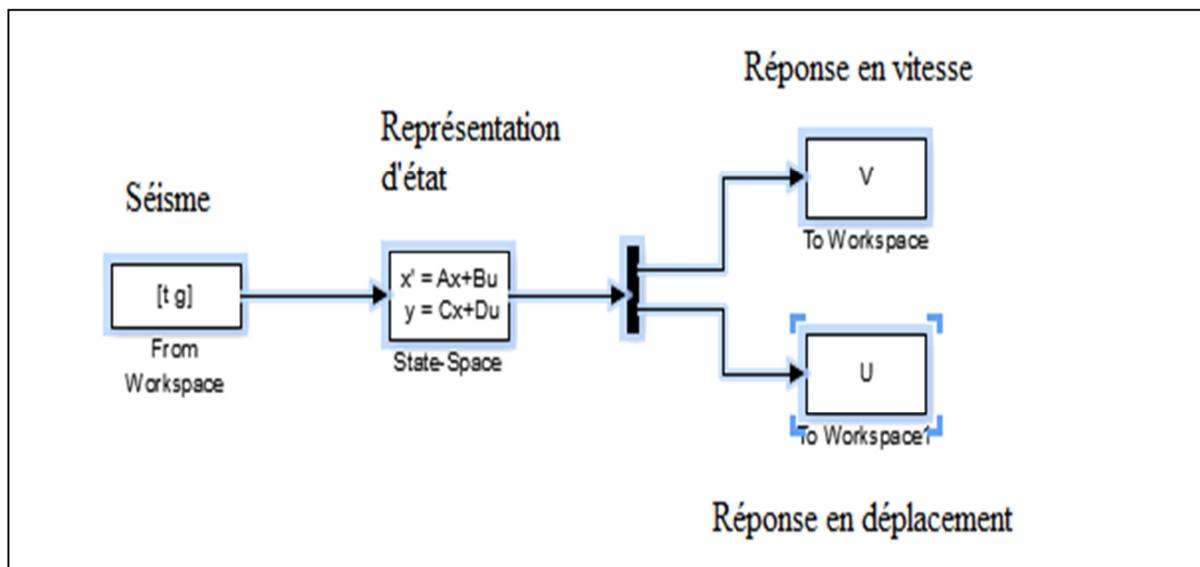
$$[M_s]\{\ddot{X}_s\} + [C_s]\{\dot{X}_s\} + [K_s]\{X_s\} = -[M_s]\{r\}\{\ddot{X}_g\} + \{f_u\}[F]$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{ni} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_j \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{j1} & \dots & d_{ji} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_i \end{Bmatrix}$$

### 3.8. Résolution numérique en utilisant MATLAB

Ce travail étudie l'efficacité des dispositifs de contrôle des vibrations sur un bâtiment avec un système à double TMD dans différents étages. L'équation de mouvement représentant le système du bâtiment sous excitation sismique est implémentée dans le module de simulation SIMULINK du logiciel MATLAB en utilisant la boîte à outils de la représentation d'état (*State-Space Toolbox*). Cette boîte à outils emploie le système continu pour résoudre l'équation de mouvement. L'intégration numérique est conduite en utilisant le solveur Dormand -Prince de 8<sup>ème</sup> ordre intégré à SIMULINK.



**Figure 3-12** Diagramme de résolution sur SIMULINK/MATLAB

### 3.9. Conclusion :

Le code écrit en MATLAB sera exécuté afin d'obtenir les résultats et cela sous diverses excitations sismique. L'ensemble des résultats obtenus seront détaillés et interpréter dans le chapitre suivant.

---

## **Chapitre IV :**

### **Application et discussions des résultats**

---

## Chapitre IV

### RESULTATS ET ANALYSE

#### 4-1. Introduction :

Dans ce chapitre l'efficacité d'une stratégie de contrôle par amortisseur à masse accordée sera étudiée. Une étude paramétrique sera effectuée en testant deux ratios de masse pour différentes configurations de TMD (nombre d'amortisseurs et positionnement). Les résultats obtenus seront discutés et interprétés pour plusieurs paramètres dynamiques soigneusement choisis. Les résultats obtenus seront donnés en termes de déplacements au sommet du bâtiment, déplacement inter-étage et effort tranchant à la base, cela sous diverses excitations sismiques.

#### 4-2. Description de la structure :

La structure utilisée dans cette étude est un bâtiment à 10 étages modélisé en portique bidimensionnel. Cette structure a été utilisée par Ş. S. ÖZSARIYILDIZ et A. BOZER [35] comme un modèle de référence (*Benchmark*). Les paramètres de la structure sont présentés dans le tableau (4.1) :

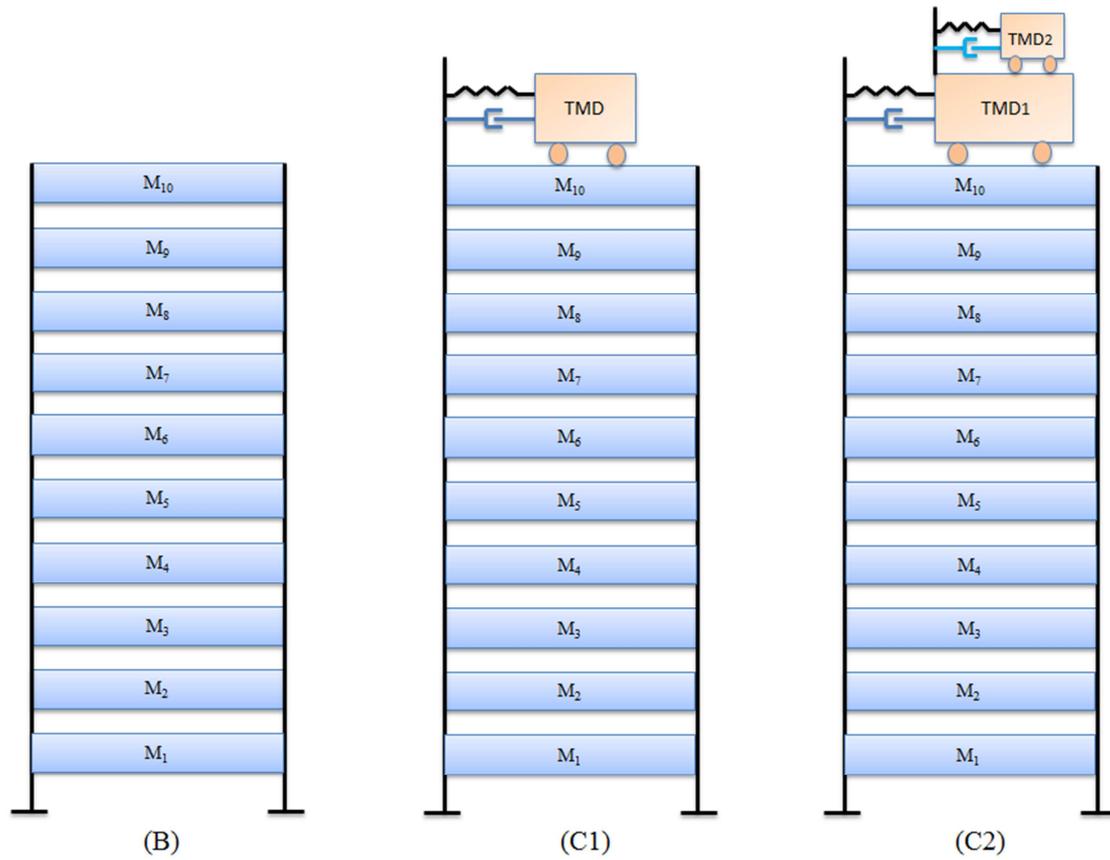
**Tableau 4-1** : Paramètres de la structure

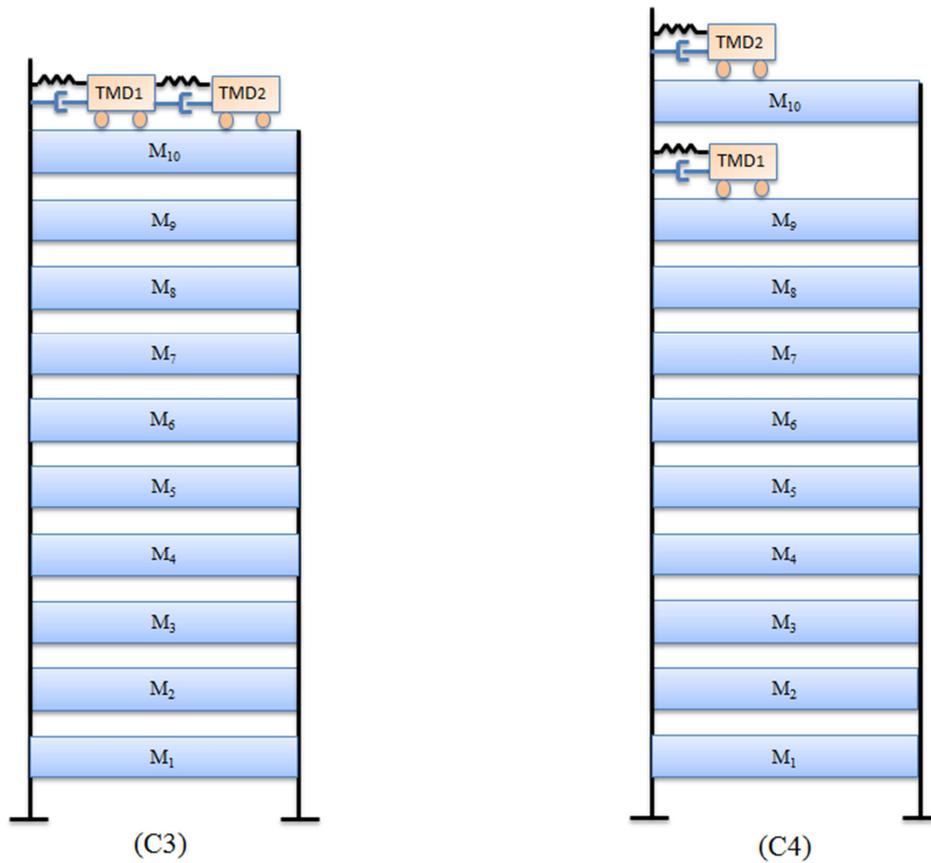
Etage	Masse (t)	Rigidité (kN)	Amortissement (kN.s/m)
1	360	$650 \times 10^3$	$6,2 \times 10^3$
2	360	$650 \times 10^3$	$66,2 \times 10^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
10	360	$650 \times 10^3$	$6,2 \times 10^3$

Cas d'étude : Dans le cadre de notre travail, différentes configurations sont choisies, en relation avec le nombre d'amortisseurs et leur positionnement, tel que représenté en figure (4.1), à savoir :

- Le modèle de référence (*Benchmark*) : structure sans contrôle, noté (B)
- Structure avec 1 TMD placé au sommet, noté (C1)

- Structure avec 2 TMDs montés en série et placé au sommet, noté (C2)
- Structure avec 2 TMDs montés en parallèle et placés au sommet, noté (C3)
- Structure avec 2 TMDs placés respectivement aux deux derniers niveaux, noté (C4).





**Fig 4-1** Cas d'étude : (B) modèle de base ; (C1, C2, C3 et C4) configurations adoptées.

### **4-3. Réglage du TMD :**

Le réglage du TMD est mis en place en suivant trois procédures proposées respectivement par Den Hartog [11], Sadek et al [32] et Krenk et Hogsberg [32]. Les équations présentées dans le tableau (4.3) donnent la procédure de réglage. Il est important de noter que le premier amortisseur TMD est réglé par rapport à la première fréquence naturelle et le deuxième TMD par rapport à la deuxième fréquence de la structure ; les 5 premières fréquences naturelles de la structure sont montrées dans le tableau 4-2 :

**Tableau 4-2 :** fréquence de la structure

Fréquence de la structure libre				
$f(1) = 1,01_{Hz}$	$f(2) = 3,01_{Hz}$	$f(3) = 4,94_{Hz}$	$f(4) = 6,76_{Hz}$	$f(5) = 8,43_{Hz}$

Le réglage de l'amortisseur TMD sera dérivé du ratio de masse choisi  $\mu = \frac{m_{tmd}}{m_s}$ ,  
 Selon le processus de calcul proposé par ALI BOZER [35], avec  $\mu = 3\%$  ;  $m_{tmd}$  et  $m_s$  sont respectivement la masse de l'amortisseur et celle de la structure. Pour la validité de notre étude, nous proposons une deuxième valeur pour le ratio de masse, soit  $\mu = 5\%$ . On notera,  $f_s(1)$  est la première fréquence de la structure et  $f_{tmd}(1,2)$  la fréquence pour chaque TMD. Le rapport de masse  $\mu$  sera donc pris respectivement égal à 3% et 5% de la masse totale de la structure étudiée.  $k_{tmd}$  Et  $\xi_{tmd}$  sont respectivement la rigidité et le pourcentage d'amortissement du dispositif TMD. Et selon le réglage de Den Hartog, Sadek et al et Krenk et Hogsberg les résultats sont présentés dans les tableaux (4.3) et (4.4) :

**Tableau 4-3 : Paramètres du TMD**

<u><i>Den Hartog</i></u>	<u><i>Sadek et al</i></u>	<u><i>Krenk et Hogsberg</i></u>
$m_{tmd} = \mu \times \sum_{i=1}^n m_i$	$m_{tmd} = \mu \times \sum_{i=1}^n m_i$	$m_{tmd} = \mu \times \sum_{i=1}^n m_i$
$f_{tmd} = \frac{f_s}{(\mu + 1)}$	$f_{tmd} = \frac{f_s}{(\mu + 1)}$	$f_{tmd} = \frac{f_s}{(\mu + 1)}$
$k_{tmd} = f_{tmd}^2 \times m_{tmd} \dots (4.3)$	$k_{tmd} = f_{tmd}^2 \times m_{tmd}$	$k_{tmd} = f_{tmd}^2 \times m_{tmd}$
$\xi_{tmd} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(\mu + 1)^3}}$	$\xi_{tmd} = \sqrt{\frac{\mu}{(\mu + 1)}}$	$\xi_{tmd} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{(\mu + 1)}}$

#### 4-4. Paramètres des diverses variantes du TMD utilisé

**Tableaux 4-4:** Paramètres des diverses variantes du TMD

réglage selon <i>Den Hartog</i>	Ratio de masse $\mu$			
	Ratio de masse (1) $\mu = 3\%$		Ratio de masse (2) $\mu = 5\%$	
	$\mu_1 = 1.5\%$	$\mu_2 = 1.5\%$	$\mu_1 = 2.5\%$	$\mu_2 = 2.5\%$
Fréquence (s)	$f_{tmd} = 6,10$		$f_{tmd} = 6,01$	
	$f_{tmd_1} = 6,2570$	$f_{tmd_2} = 18,63$	$f_{tmd_1} = 6,20$	$f_{tmd_2} = 18,45$
Masse (t)	$m_{tmd} = 108$		$m_{tmd} = 180$	
	$m_{tmd_1} = 54$	$m_{tmd_2} = 54$	$m_{tmd_1} = 90$	$m_{tmd_2} = 90$
Rigidité (kN)	$k_{tmd} = 101,8004$		$k_{tmd} = 163,27$	
	$k_{tmd_1} = 2114,09$	$k_{tmd_2} = 18744,52$	$k_{tmd_1} = 3455,07$	$k_{tmd_2} = 30634,26$
Pourcentage d'amortissement	$\xi_{tmd} = 0,1015$		$\xi_{tmd} = 0,1273$	
	$\xi_{tmd_1} = 0,0733$	$\xi_{tmd_2} = 0,0733$	$\xi_{tmd_1} = 0,0933$	$\xi_{tmd_2} = 0,0933$

réglage selon <i>Sadek et al</i>	Ratio de masse			
	Ratio de masse 1 $\mu = 3\%$		Ratio de masse 2 $\mu = 5\%$	
	$\mu_1 = 1.5\%$	$\mu_2 = 1.5\%$	$\mu_1 = 2.5\%$	$\mu_2 = 2.5\%$
Fréquence (s)	$f_{imd} = 6,10$		$f_{imd} = 6,01$	
	$f_{imd_1} = 6,17$	$f_{imd_2} = 18,36$	$f_{imd_1} = 6,05$	$f_{imd_2} = 18,01$
Masse (t)	$m_{imd} = 108$		$m_{imd} = 180$	
	$m_{imd_1} = 54$	$m_{imd_2} = 54$	$m_{imd_1} = 90$	$m_{imd_2} = 90$
Rigidité (kN)	$k_{imd} = 101,80$		$k_{imd} = 163,27$	
	$k_{imd_1} = 2052,96$	$k_{imd_2} = 18202,54$	$k_{imd_1} = 3292,50$	$k_{imd_2} = 29192,85$
Pourcentage d'amortissement	$\xi_{imd} = 0,1707$		$\xi_{imd} = 0,2182$	
	$\xi_{imd_1} = 0,1216$	$\xi_{imd_2} = 0,1216$	$\xi_{imd_1} = 0,1562$	$\xi_{imd_2} = 0,1562$

Réglage selon <i>Krenk et Hogsberg</i>	Ratio de masse			
	Ratio de masse 1 $\mu = 3\%$		Ratio de masse 2 $\mu = 5\%$	
	$\mu_1 = 1.5\%$	$\mu_2 = 1.5\%$	$\mu_1 = 2.5\%$	$\mu_2 = 2.5\%$
Fréquence (s)	$f_{imd} = 6,10$		$f_{imd} = 6,01$	
	$f_{imd_1} = 6,26$	$f_{imd_2} = 18,63$	$f_{imd_1} = 6,20$	$f_{imd_2} = 18,45$
Masse (t)	$m_{imd} = 108$		$m_{imd} = 180$	
	$m_{imd_1} = 54$	$m_{imd_2} = 54$	$m_{imd_1} = 90$	$m_{imd_2} = 90$
Rigidité (kN)	$k_{imd} = 101,80$		$k_{imd} = 163,27$	
	$k_{imd_1} = 2114,09$	$k_{imd_2} = 18202,54$	$k_{imd_1} = 3455,07$	$k_{imd_2} = 30634,26$
Pourcentage d'amortissement	$\xi_{imd} = 0,0853$		$\xi_{imd} = 0,1091$	
	$\xi_{imd_1} = 0,0608$	$\xi_{imd_2} = 0,0608$	$\xi_{imd_1} = 0,0781$	$\xi_{imd_2} = 0,0781$

---

#### **4-5. Description des excitations sismiques :**

Le bâtiment étudié sera soumis aux excitations sismiques suivantes:

- Séisme de Northridge Rinaldi Receiving station 1994 de magnitude de 6,7 et d'une accélération maximale du sol avec un PGA de  $8,57\text{m/s}^2$ .
- Séisme de Chichi Taiwan TCU045 1999 de magnitude de 7,7 et d'une accélération maximale du sol avec un PGA de  $5,65\text{ m/s}^2$ .
- Séisme de Northridge Beverly Hills Mulhol 1994 de magnitude de 6,7 et d'une accélération maximale du sol avec un PGA de  $4,35\text{ m/s}^2$ .
- Séisme de Dzuce Turquie Bolu 1999 de magnitude de 6 et d'une accélération maximale du sol avec un PGA de  $7,90\text{ m/s}^2$ .

Le choix de ces séismes est motivé par leurs natures ; Duzce 1999 et Northridge 1994 sont considérés dans la littérature comme des séismes de champ lointain, alors que Northridge 1994 et Chichi 1999 sont considérés comme un séisme de champs proche avec un effet de directivité.

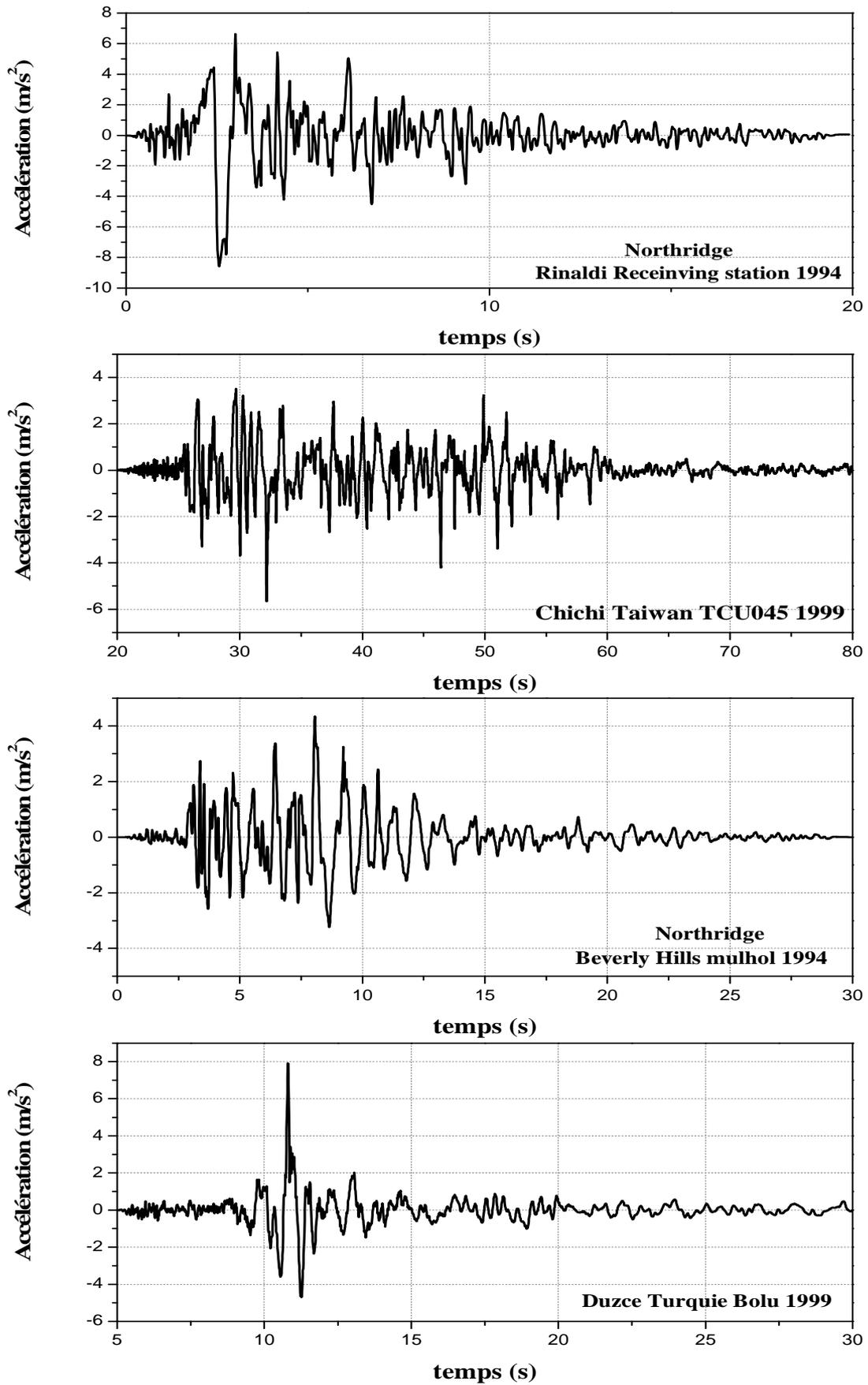


Figure 4-2 : Excitations sismiques utilisées.

#### 4-6. Déplacement au sommet :

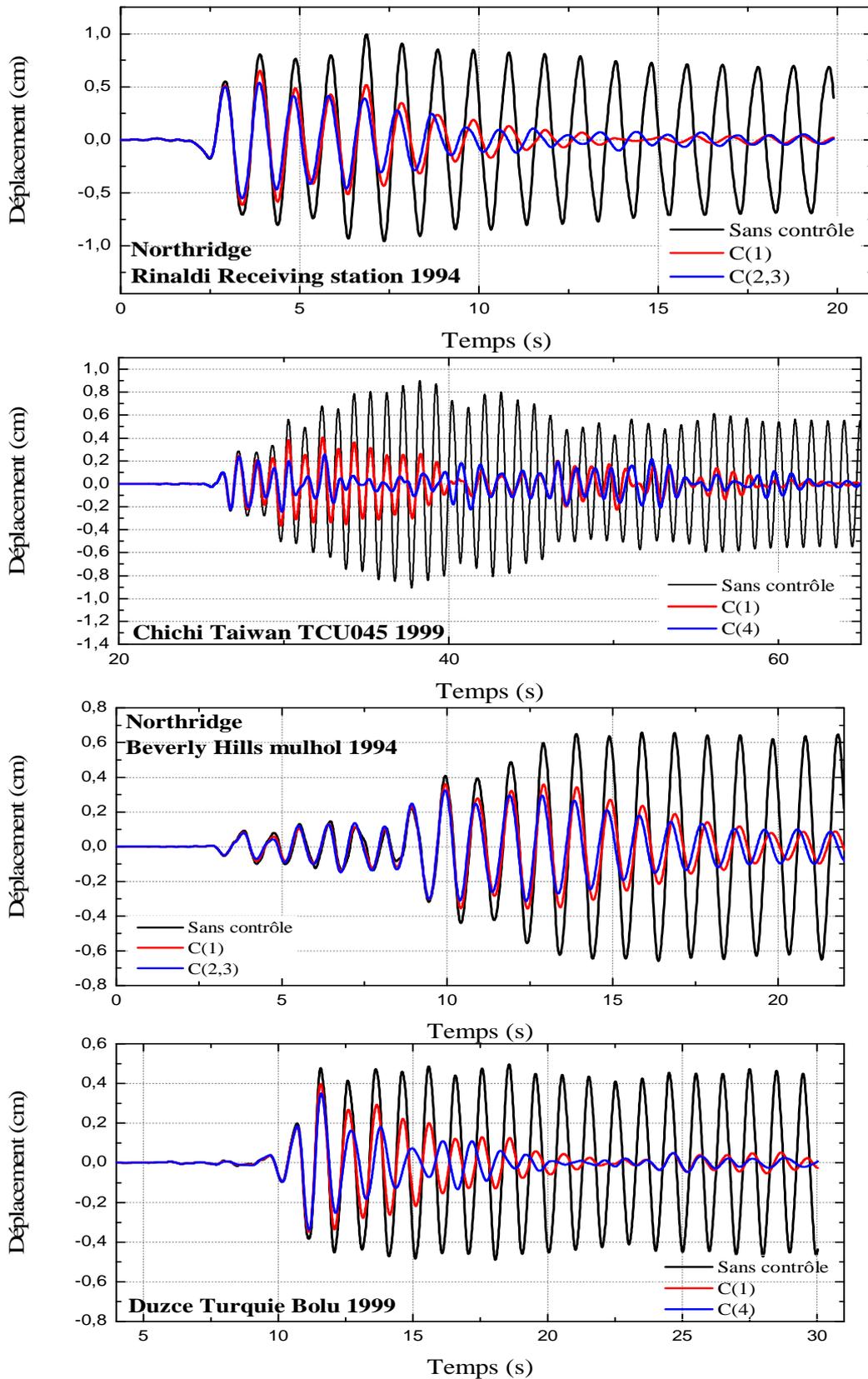
L'analyse effectuée pour les différentes configurations adoptées nous a permis de comparer les résultats des déplacements au sommet du bâtiment sous les excitations sismiques de Northridge, Chichi, Northridge et Duzce. Ces résultats sont montrés dans les tableaux et les figures ci-dessous.

**Tableau 4-5:** Déplacement maximum au sommet du bâtiment ( $\mu = 3\%$ ). Cas de source proche

Séisme <i>Source proche</i>	Réglage $\mu = 3\%$	Structure sans contrôle (cm)	Configurations			
			C1	C2	C3	C4
Northridge	Réglage 1 <b>Den Hartog</b>	99,61	65,18	55,20	55,20	58,83
	Réglage 2 <b>Sadek et al</b>		64,11	51,83	51,83	57,99
	Réglage 3 <b>Krenk et Hogsborg</b>		65,25	<b>55,17</b> <b>44,61%</b>	<b>55,17</b> <b>44,61%</b>	58,72
Chichi	Réglage 1 <b>Den Hartog</b>	90,76	40,51	33,80	33,80	<b>27,02</b>
	Réglage 2 <b>Sadek et al</b>		39,24	30,11	30,11	29,11
	Réglage 3 <b>Krenk et Hogsborg</b>		40,57	34,18	34,18	<b>25,52</b> <b>71,88%</b>

**Tableau 4-6:** Déplacement maximum au sommet bâtiment ( $\mu = 3\%$ ) : cas de source lointaine

Séisme <i>Source lointaine</i>	Réglage $\mu = 3\%$	Structure sans contrôle (cm)	Configurations			
			C1	C2	C3	C4
Northridge	Réglage 1 <b>Den Hartog</b>	65,95	35,98	<b>32,57</b> <b>50,62%</b>	<b>32,57</b> <b>50,62%</b>	33,14
	Réglage 2 <b>Sadek et al</b>		35,87	32,41	32,41	33,28
	Réglage 3 <b>Krenk et al</b>		36	32,66	32,66	33,25
Duzce	Réglage 1 <b>Den Hartog</b>	49,73	39,89	35,96	35,96	35,16
	Réglage 2 <b>Sadek et al</b>		39,74	35,87	35,87	35,58
	Réglage 3 <b>Krenk et al</b>		39,92	36,06	36,06	<b>35,03</b> <b>29,56%</b>



**Figure 4-3 :** déplacement au sommet du bâtiment réglage de Krenk et Hosgberg ( $\mu = 3\%$ )

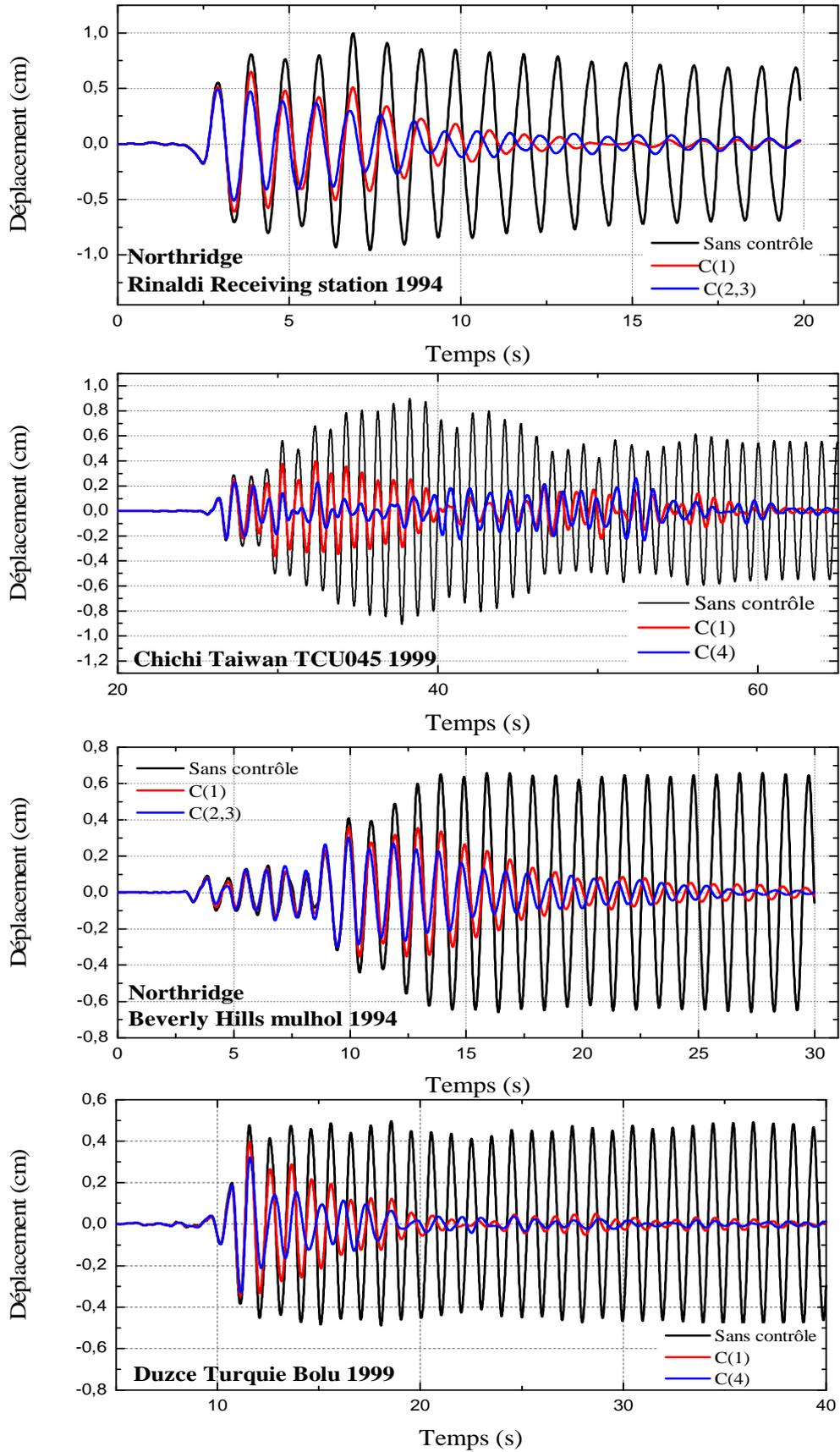
**Tableau 4-7:** déplacement maximum au sommet du bâtiment ( $\mu = 5\%$ ) : cas de source proche

Séisme <i>source proche</i>	Réglage $\mu = 5\%$	Structure sans contrôle (cm)	Configurations			
			C1	C2	C3	C4
Northridge	<i>Réglage 1</i> <b>Den Hartog</b>	99,61	64,70	51,23	51,23	57,32
	<i>Réglage 2</i> <b>Sadek et al</b>		64,11	51,83	51,83	57,99
	<i>Réglage 3</i> <b>Krenk et Hogsberg</b>		64,81	51,17 48,63%	51,17 48,63%	57,11
Chichi	<i>Réglage 1</i> <b>Den Hartog</b>	90,76	39,80	31,29	31,29	24,75 72,73%
	<i>Réglage 2</i> <b>Sadek et al</b>		39,24	30,11	30,11	29,11
	<i>Réglage 3</i> <b>Krenk et Hogsberg</b>		39,91	31,70	31,70	26,18

**Tableau 4-8:** déplacement maximum au sommet du bâtiment ( $\mu = 5\%$ ). Cas de source lointaine

Séisme <i>source lointaine</i>	Réglage $\mu = 5\%$	Structure sans contrôle (cm)	Configurations			
			C1	C2	C3	C4
Northridge	<i>Réglage 1</i> <b>Den Hartog</b>	65,95	35,79	30,08 54,4%	30,08 54,4%	31,23
	<i>Réglage 2</i> <b>Sadek et al</b>		35,56	29,83	29,83	31,80
	<i>Réglage 3</i> <b>Krenk et Hogsberg</b>		35,83	30,22	30,22	31,26
Duzce	<i>Réglage 1</i> <b>Den Hartog</b>	49,73	39,63	33,58	33,58	33,12
	<i>Réglage 2</i> <b>Sadek et al</b>		39,33	33,52	33,52	33,39
	<i>Réglage 3</i> <b>Krenk et Hogsberg</b>		39,69	33,74	33,74	33,04 33,56%

Sur les tableaux (4-5) à (4-8) nous remarquons que l'introduction d'un TMD permet de réduire les déplacements au sommet des bâtiments. Il est clair que les configurations optimales sont respectivement C1 et C2 qui donnent une bonne réduction sur les quatre excitations utilisées. Aussi les résultats montrent que le meilleur réglage est Krenk et Hogsberg selon la nature de l'excitation sismique. Cette réduction est proportionnelle à la masse du TMD, ainsi plus la masse est grande plus la réponse est réduite.



**Figure 4-4 :** Déplacement au sommet du bâtiment réglage de Krenk et Hogsberg ( $\mu = 5\%$ )

Les figures (4-3, 4-4) viennent conforter les résultats montrés dans les tableaux (4-5) à (4-8). On observe clairement que l'oscillation est fortement réduite et les déplacements de la structure ont diminué en présence d'un dispositif de contrôle (TMD), ce qui démontre l'efficacité du système de contrôle pour la réduction des déplacements au sommet des bâtiments de grande hauteur.

#### 4-7. Déplacement inter-étages :

Les figures suivantes montrent la variation des déplacements inter-étages du bâtiment étudié sous les quatre excitations sismiques utilisées.

##### 4-7.1 Déplacement inter étage: ratio de masse 3%

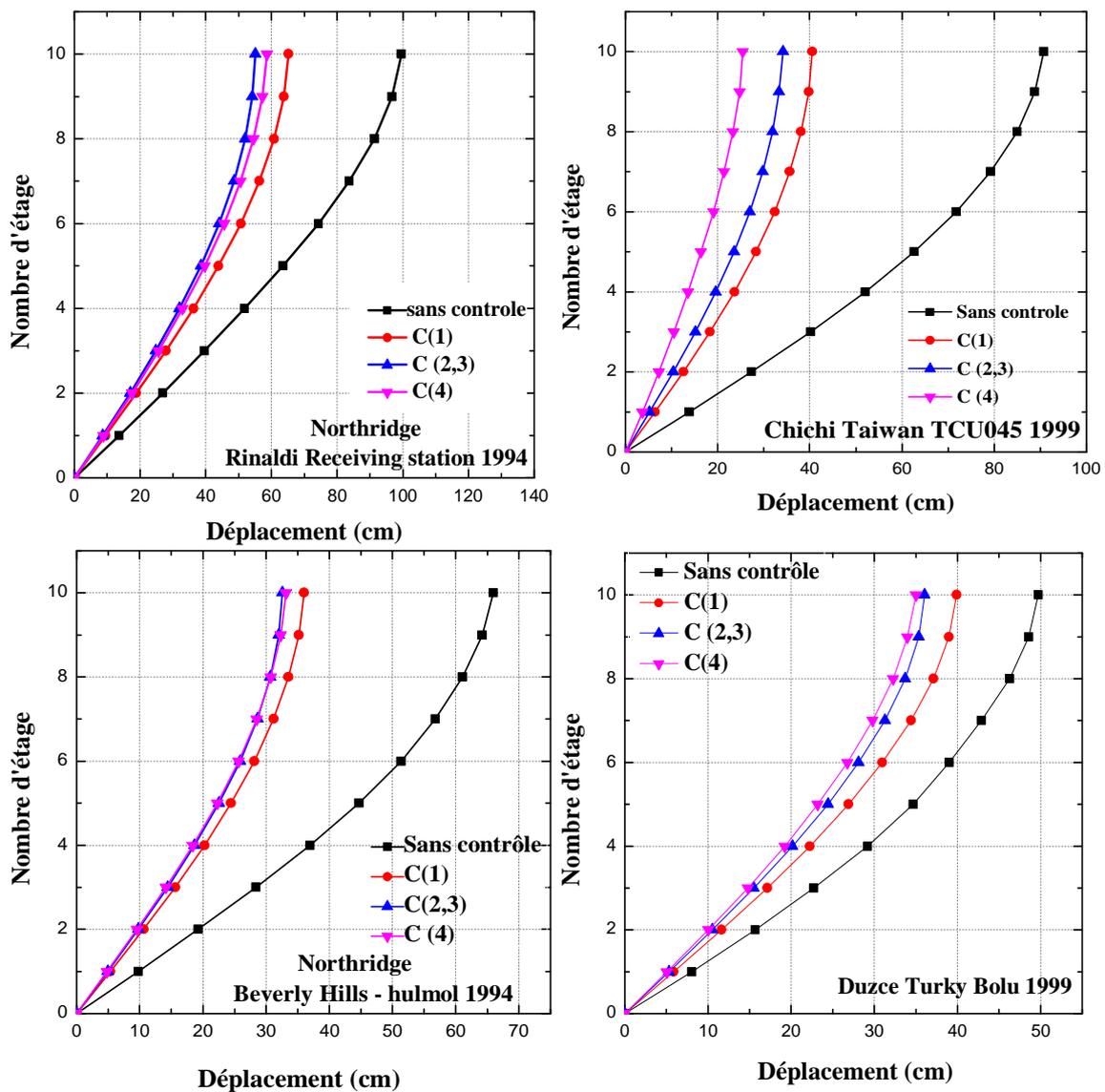


Figure 4-5 : Déplacement inter étage, réglage Krenk et Hogsberg ( $\mu = 3\%$ )

#### 4-7.2 Déplacement inter étage : ratio de masse 5%

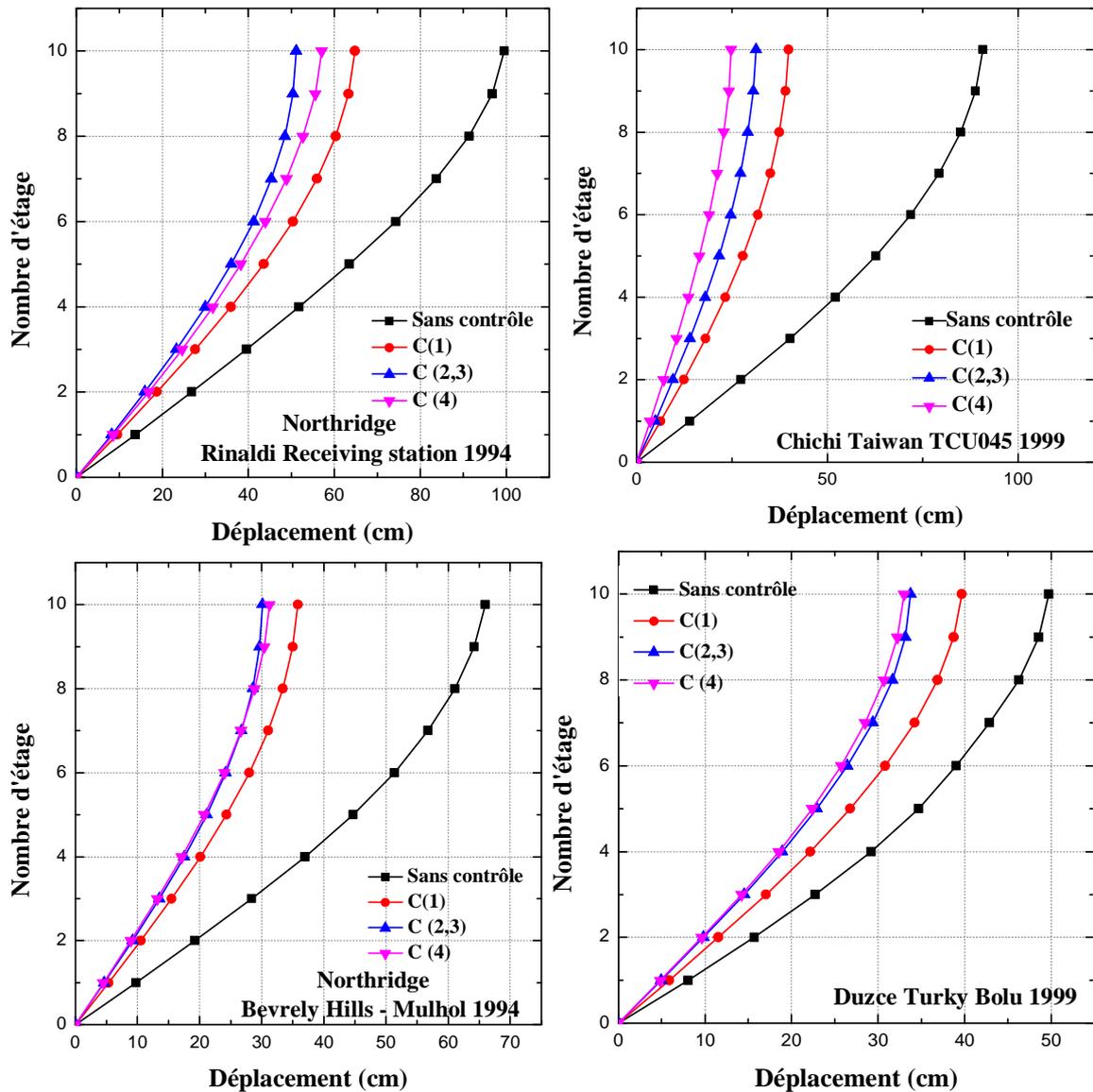


Figure 4-6 : déplacement inter étage, réglage selon Krenk et Hogsberg ( $\mu = 5\%$ )

Les figures (4-5, 4-6) montrent une importante réduction du déplacement inter-étages et au niveau supérieur du bâtiment équipé d'un (TMDs) par rapport au bâtiment sans contrôle. La réduction est principalement dû à l'effet de la masse accordée qui permet d'intervenir comme une force de recentrage au niveau de la structure et de se déplacer au sens contraire du bloc structurel.

#### 4-8. Effort tranchant à la base :

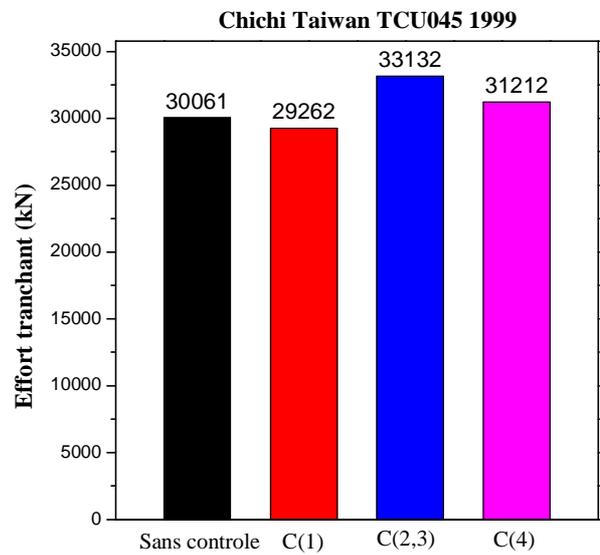
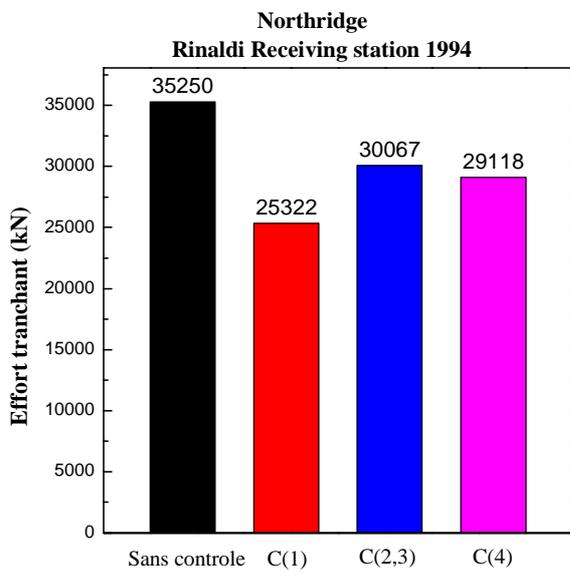
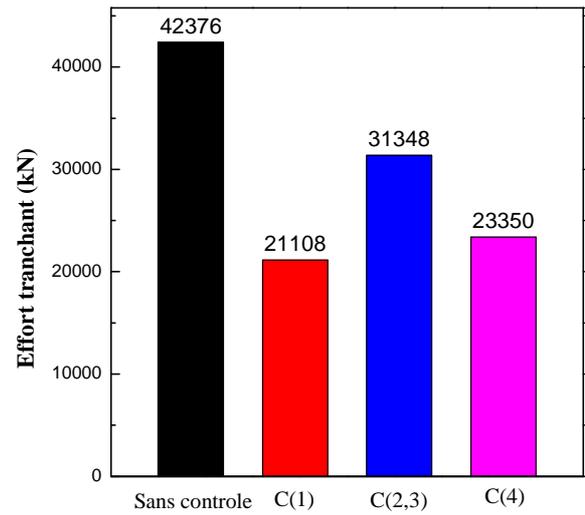
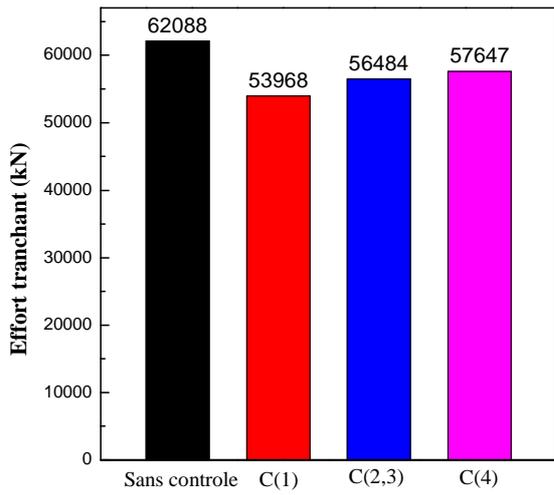
L'effort tranchant à la base du bâtiment pour les différentes configurations adoptées est étudié. Une analyse comparative est effectuée et les résultats obtenus sont montrés dans les tableaux (4-8) et (4-9), respectivement pour les ratios de masse  $\mu = 3\%$  et  $\mu = 5\%$ .

**Tableaux 4-9 :** Effort tranchant à la base du bâtiment ( $\mu = 3\%$ )

Séismes	Structure sans contrôle $\times 10^4$ (kN)	Réglage	Effort tranchant $\times 10^4$ (kN)			
			Configurations			
			C1	C2	C3	C4
Northridge 1994	6.2088	Den Hartog	5.3968 <b>13,08%</b>	5.6484 9.02%	5.6484 9.02%	5.7647 <b>7.15%</b>
		Sadek et al	5.8016	5.6587	5.6587	5.8150
		Krenk et Hogsberg	6.0870 1,96%	5.6926 <b>8,31%</b>	5.6926 <b>8,31%</b>	6.0173 3,08%
Chichi 1999	4.2376	Den Hartog	2.2106 47.83%	3.3829 20.02%	3.3829 20.02%	2.4476 <b>42.22%</b>
		Sadek et al	4.1258	3.2826	3.2826	2.8614
		Krenk et Hogsberg	3.9949 5,72%	3.1475 <b>25,72%</b>	3.1475 <b>25,72%</b>	3.9737 6,23%
Northridge 1994	3.5250	Den Hartog	2.7803 <b>21.12%</b>	3.1978 9.28%	3.1978 9.28%	3.1344 <b>11.08%</b>
		Sadek et al	3.4425	3.1715	3.1715	3.1339
		Krenk et Hogsberg	3.3922 3,77%	3.0807 <b>12,6%</b>	3.0807 <b>12,6%</b>	3.2224 8,58%
Duzce, Turkey 1999	3.0061	Den Hartog	2.8854 4.02%	2.8371 <b>5.62%</b>	2.8371 <b>5.62%</b>	3.0773 -2.36%
		Sadek et al	2.9904	2.8334	2.8334	3.0093
		Krenk et Hogsberg	2.9681 1,26%	2.8421 <b>5,46%</b>	2.8421 <b>5,46%</b>	2.9446 2,05%

**Tableaux 4-10:** Effort tranchant à la base du bâtiment ( $\mu = 5\%$ )

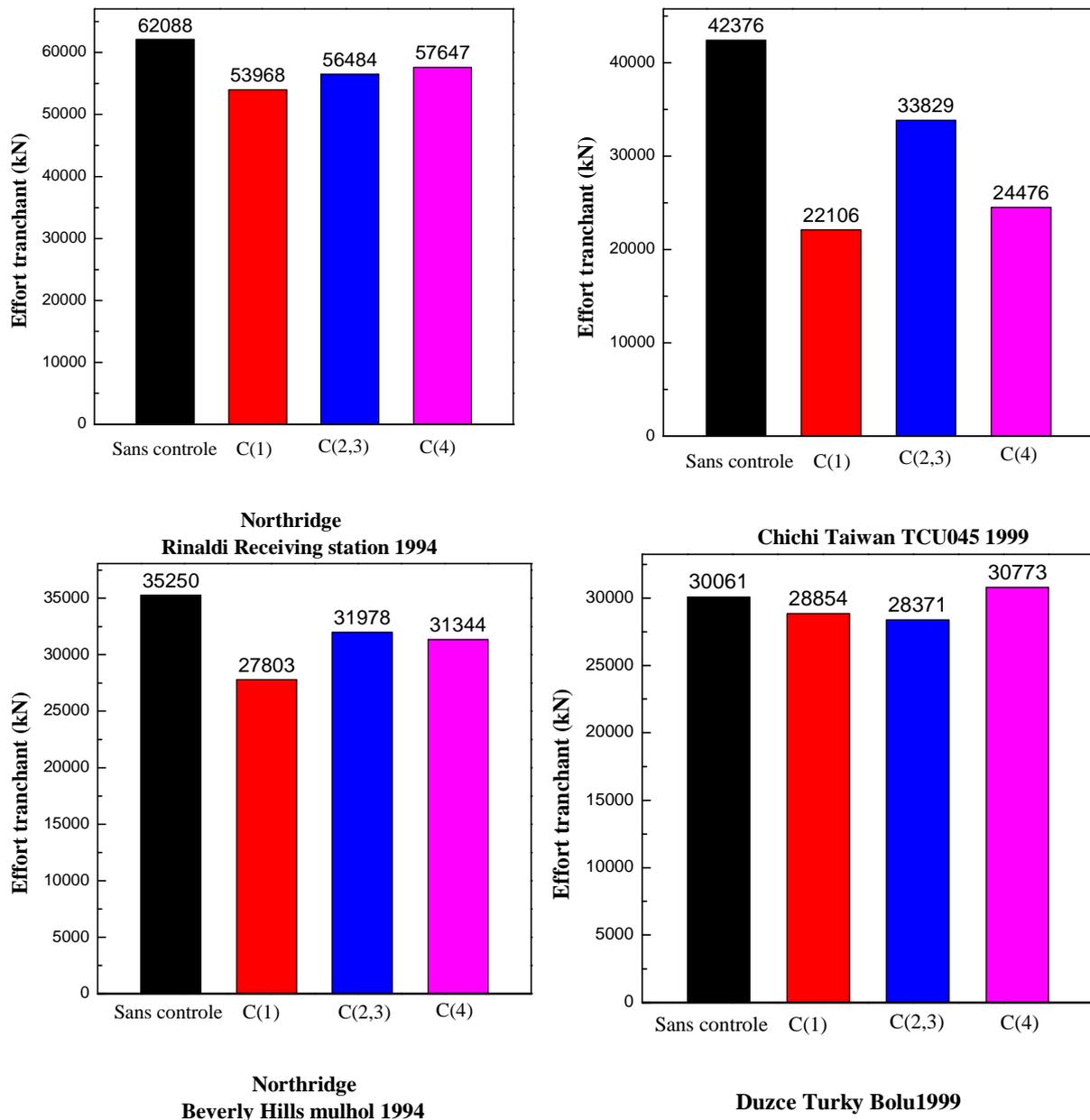
Séismes	Structure sans contrôle $\times 10^4$ (kN)	Réglage	Effort tranchant $\times 10^4$ (kN)			
			Configurations			
			C1	C2	C3	C4
Northridge 1994	6.2088	Den Hartog	4.9699 <b>19.95%</b>	5.3113 <b>14.45%</b>	5.3113 <b>14.45%</b>	5.5508 10.59%
		Sadek et al	6.1052	5.3396	5.3396	5.6399
		Krenk et Hogsberg	6.0126 3,16%	5.3735 <b>13,45%</b>	5.3735 <b>13,45%</b>	5.9114 4,79%
Chichi 1999	4.2376	Den Hartog	2.1108 <b>50.19%</b>	3.1348 26.02%	3.1348 26.02%	2.3350 <b>44.9%</b>
		Sadek et al	4.0237	3.0234	3.0234	2.6453
		Krenk et Hogsberg	3.8578 8,96%	2.7657 3,47%	2.7657 3,47%	3.6457 <b>13,96%</b>
Northridge 1994	3.5250	Den Hartog	2.5322 <b>28.16%</b>	3.0067 14.7%	3.0067 14.7%	2.9118 <b>17.4%</b>
		Sadek et al	3.4092	2.9578	2.9578	2.9479
		Krenk et Hogsberg	3.3449 5,11%	2.8196 2%	2.8196 2%	3.0820 <b>12,57%</b>
Duzce Turkey 1999	3.0061	Den Hartog	2.9262 <b>2.65%</b>	3.3132 -10.21%	3.3132 -10.21%	3.1212 -3.83%
		Sadek et al	3.8850	3.3074	3.3074	3.2085
		Krenk et Hogsberg	3.8059 -2,66%	3.2078 -6,71%	3.2078 -6,71%	3.5257 -17,28%



**Northridge  
Beverly Hills millhol 1994**

**Duzce Turkey Bolu 1999**

**Figure 4-7 : Effort tranchant à la base de la structure**



**Figure 4-8** : effort tranchant a la base de la structure

Les tableaux (4-9) et (4-10) et les figures (4-7, 4-8) montrent la réduction de l'effort tranchant. On remarque que cette réduction est assez faible pour les 3 excitations (Northridge1, Duzce et Northridge2) par rapport à la réduction marquée par le séisme de (Chichi). Cela peut être expliqué par la nature des excitations sismiques qui peuvent affecter la réduction (augmentation ou diminution) de l'effort. Aussi il est important de noter que cette réduction est liée principalement aux différents paramètres de la structure (masse et accélération).

---

#### **4-9. L'effet de dérèglement sur le rendement du TMD :**

Il est important de noter que malgré la bonne réduction au niveau de la réponse obtenue dans une structure équipée d'un TMD seul, ou des autres dispositifs présentés dans cette étude, il y'a un risque de dérèglement du TMD, c'est-à-dire lors de la phase d'exploitation de la structure, la masse de cette dernière peut changer pour diverses raisons (changement de fonctionnalité, changement de la charge d'exploitation) résultant ainsi en la variation de la fréquence propre de cette dernière ce qui peut causer un dérèglement du TMD.

On admet que la structure a subi des changements de masse (une augmentation ou diminution) induite par un paramètre «  $\alpha$  » qui varie dans l'intervalle (0,7-1,3) d'où on obtient une nouvelle masse  $M_n = \alpha M$  et les calculs ont été refait suivant la nouvelle masse; il est important de noter que lorsque  $\alpha = 1$ , on est dans le cas de notre structure de référence. Les résultats de ce dérèglement sont montrés dans les figures (4.9) et (4.10) :

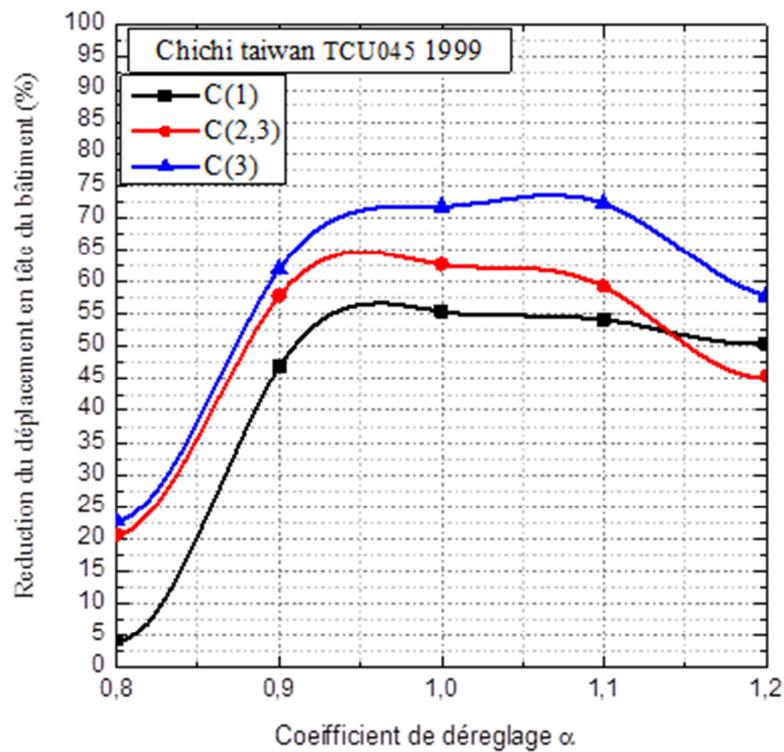
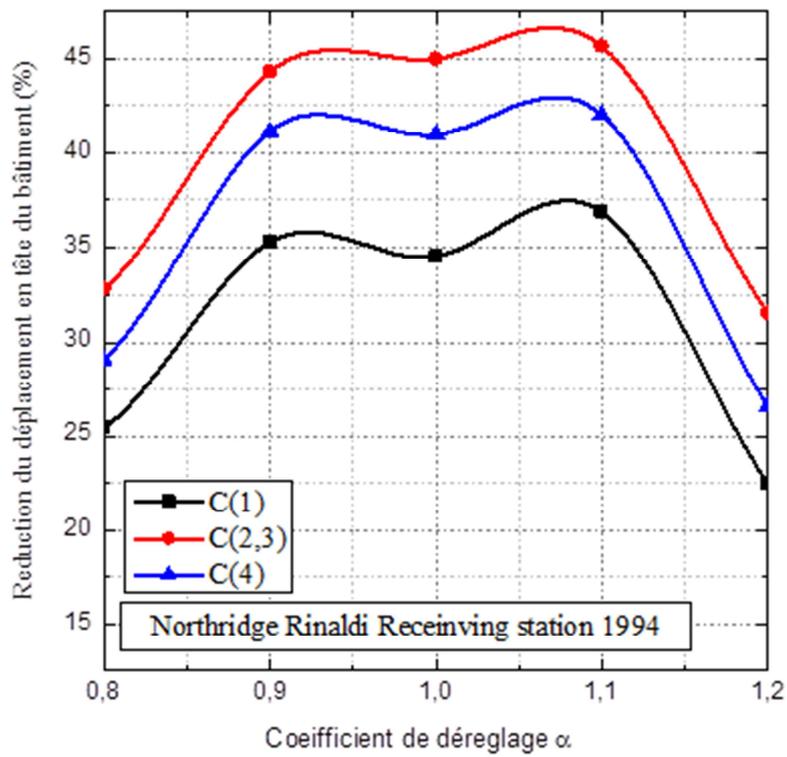


Figure 4.9 : variation de la réduction du déplacement en tête du bâtiment sous l'effet de déréglage (ratio de mass 3%)

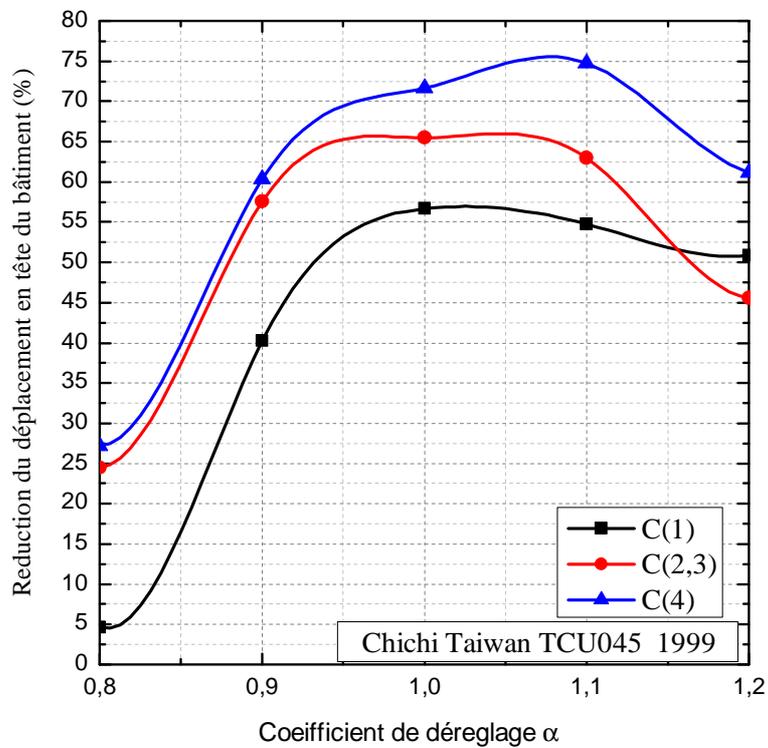
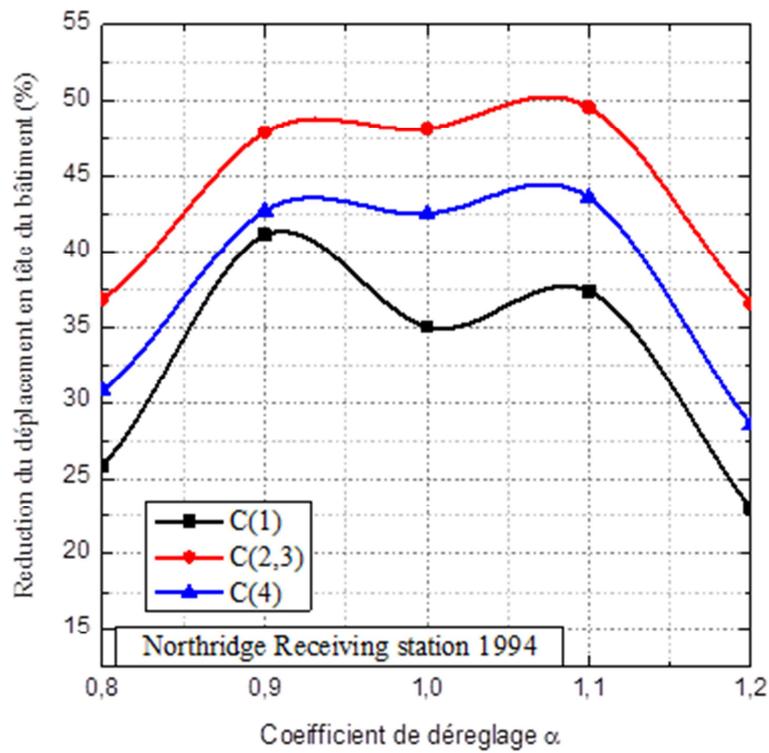


Figure 4.10 : variation de la réduction du déplacement en tête du bâtiment sous l'effet de déréglage (ratio de mass 5%)

---

Dans les figures (4.9) et (4.10), il est clair que le dérèglement du TMD provoqué par la variation de facteur  $\alpha$  influe sur le fonctionnement du système contre le mouvement vibratoire. On remarque que le système est sensible au dérèglement si le coefficient de dérèglement est inférieur à 0,9 ou supérieur à 1,1, où on observe une diminution dans le pourcentage de réduction du TMD. Par contre, dans l'intervalle de (0,9 – 1,1) on remarque que la réduction est améliorée sensiblement par rapport à la structure de référence. Concernant les autres configurations, l'efficacité demeure malgré le changement des paramètres du bâtiment.

#### **4.10. Conclusion :**

Sur l'ensemble des résultats obtenus pour les configurations étudiées et les divers ratios de masse de l'amortisseur à masse accordée et d'après l'analyse de ces résultats on peut tirer les conclusions suivantes :

- 1- La présence d'un amortisseur à masse accordée (TMD) au sommet d'un bâtiment permet de réduire considérablement les vibrations dues au séisme.
- 2- L'effet de la force de recentrage d'un système à deux TMD sur la structure est mieux qu'un système à un seul TMD.
- 3- L'augmentation du rapport de ratio de masse permet d'obtenir plus de réduction en termes de déplacement en tête du bâtiment.
- 4- La réduction de l'effort tranchant est légère, cela est principalement dû à la masse additionnelle du TMD.
- 5- Les déplacements inter-étages sont positivement affectés par la présence du TMD.
- 6- Les systèmes à un seul TMD sont beaucoup plus sensibles au dérèglement par rapport au système à plusieurs TMD.
- 7- Il existe un intervalle de fréquence dans lequel le TMD reste efficace malgré un probable dérèglement.

---

## Conclusion générale

L'utilisation d'un amortisseur à masse accordée pour contrôler la vibration des bâtiments de grandes hauteurs est une méthode efficace avec laquelle on obtient de bons résultats. Néanmoins celle-ci, est parfois sujette au dérèglement provoquant ainsi une défaillance dans l'amortissement et une incapacité dans la résistance du bâtiment en fonction des excitations sismiques. Ceci est dû à son incompatibilité par rapport aux caractéristiques du bâtiment (fréquence, masse.....etc.), cela induit un changement du poids structurel ou autres.

Par contre la solution la plus appropriée au dérèglement, c'est d'utiliser un système à double TMD adapté à deux fréquences différentes,

A la base de ce travail, nous avons déduit que l'efficacité du contrôle de la vibration des bâtiments par le système d'amortissement à double TMD peut modérer la réponse sismique de l'ouvrage, ceci par rapport aux différentes configurations structurelles que nous avons étudiées et analysées à travers notre étude.

Ceci dit, l'objectif principal de cette étude est d'atteindre les performances visées par notre approche et les configurations proposées, en fonction des équations différentielles des mouvements structurels et en utilisant la représentation d'état (*state-space*).

Pour cela, cinq algorithmes de contrôle ont été appliqués dans cette étude afin de se conformer aux résultats escomptés. Sur la base de l'analyse comparative effectuée et des résultats obtenus par rapport à une structure libre (sans contrôle) et une autre avec un seul TMD, nous concluons ce qui suit :

- La présence d'un amortisseur à masse accordée (TMD) au sommet d'un bâtiment permet de réduire considérablement les vibrations dues au séisme.
- L'effet de la force de recentrage d'un système à deux TMD sur la structure est mieux qu'un système à un seul TMD.
- L'augmentation du rapport de masse permet d'obtenir plus de réduction en termes de déplacement au sommet du bâtiment.
- La réduction de l'effort tranchant est légère, cela est principalement dû à la masse additionnelle du TMD.
- Les déplacements inter-étages sont positivement affectés par la présence du TMD.
- Les systèmes à un seul TMD sont beaucoup plus sensibles au dérèglement par rapport au système à plusieurs TMD.
- Il existe un intervalle de fréquence dans lequel le TMD reste efficace malgré un éventuel dérèglement.

---

## Références bibliographiques

1. Soong, T.T. and G.F. Dargush, *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*1997: Wiley.
2. BENAYAD, K., *Comportement dynamique des ouvrages sur isolateurs de base*, 2013.
3. BENZINA, F., *Contribution à l'étude des structures intelligentes*, 2013.
4. Kelly, J.M., R. Skinner, and A. Heine, *Mechanisms of energy absorption in special devices for use in earthquake resistant structures*. Bulletin of NZ Society for Earthquake Engineering, 1972. **5**(3): p. 63-88.
5. Skinner, R., J. Kelly, and A. Heine, *Hysteretic dampers for earthquake-resistant structures*. Earthquake engineering & structural dynamics, 1974. **3**(3): p. 287-296.
6. Aiken, I.D., D.K. Nims, and J.M. Kelly, *Comparative study of four passive energy dissipation systems*. Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering, 1992. **25**(3): p. 175-192.
7. Martinez-Romero, E., *Experiences on the use of supplementary energy dissipators on building structures*. Earthquake spectra, 1993. **9**(3): p. 581-625.
8. Crosby, P., J. Kelly, and J. Singh. *Utilizing visco-elastic dampers in the seismic retrofit of a thirteen story steel framed building*. in *Structures congress XII*. 1994. ASCE.
9. Hoang, N., Y. Fujino, and P. Warnitchai, *Optimal tuned mass damper for seismic applications and practical design formulas*. Engineering Structures, 2008. **30**(3): p. 707-715.
10. Whittaker, A.S., et al., *Seismic testing of steel plate energy dissipation devices*. Earthquake spectra, 1991. **7**(4): p. 563-604.
11. Den Hartog, J.P., *Mechanical vibrations*1985: Courier Corporation.
12. Beards, C., *Structural vibration: analysis and damping*1996: Elsevier.
13. Dyke, S., et al., *An experimental study of MR dampers for seismic protection*. Smart Materials and Structures, 1998. **7**(5): p. 693.
14. Fujino, Y. and M. Abé, *Design formulas for tuned mass dampers based on a perturbation technique*. Earthquake engineering & structural dynamics, 1993. **22**(10): p. 833-854.
15. Luft, R.W., *Optimal tuned mass dampers for buildings*. Journal of the Structural Division, 1979. **105**(12): p. 2766-2772.
16. École polytechnique de Montréal. Département des génies civil, g.e.d.m. and G. Bondonet, *Élaboration d'un isolateur à la base original pour les ponts et viaducs au Canada*1997.
17. Etienne, J., *Les nouvelles technologies du bâtiment au Japon*. Ambassade de France au Japon, 2005.
18. Cheng, F.Y. *Response control based on structural optimization and its combination with active protection*. in *Proceeding of 9th World conference in Earthquake engineering, IAEE, Tokyo*. 1988.
19. Cheng, F.Y. and C.P. Pantelides, *Combining Structural Optimization and structural control*1988: National Center for Earthquake Engineering Research.
20. Meirovitch, L., *Dynamics and control of structures*1990: John Wiley & Sons.
21. Soong, T. and B. Spencer Jr Reviewer, *Active structural control: theory and practice*. Journal of Engineering Mechanics, 1992. **118**(6): p. 1282-1285.
22. Chung, L., A. Reinhorn, and T. Soong, *Experiments on active control of seismic structures*. Journal of Engineering Mechanics, 1988. **114**(2): p. 241-256.
23. Nishimura, I., et al., *Active tuned mass damper*. Smart Materials and Structures, 1992. **1**(4): p. 306.
24. Soong, T. and B. Spencer Jr, *Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice*. Engineering Structures, 2002. **24**(3): p. 243-259.
25. Yang, J., *Control of tall building under earthquake excitation*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1982. **108**(5): p. 833-849.
26. Hrovat, D., P. Barak, and M. Rabins, *Semi-active versus passive or active tuned mass dampers for structural control*. Journal of Engineering Mechanics, 1983. **109**(3): p. 691-705.

- 
27. Karnopp, D., M.J. Crosby, and R. Harwood, *Vibration control using semi-active force generators*. 1974.
  28. Spencer Jr, B., et al., *Phenomenological model for magnetorheological dampers*. Journal of Engineering Mechanics, 1997. **123**(3): p. 230-238.
  29. Symans, M.D. and M.C. Constantinou, *Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review*. Engineering Structures, 1999. **21**(6): p. 469-487.
  30. Djedoui, N., *Modélisation et analyse du contrôle hybride*

*(actif-passif) des vibrations des bâtiments sous*

*sollicitations sismiques en champ proche*. 2018.

31. Connor, J.J., *Introduction to Structural Motion Control*2003: Prentice Hall Pearson Education, Incorporated.
32. Soto, M.G. and H. Adeli, *Optimum tuning parameters of tuned mass dampers for vibration control of irregular highrise building structures*. Journal of Civil Engineering and Management, 2014. **20**(5): p. 609-620.
33. Janocha, H., *Adaptronics and smart structures*1999: Springer.
34. Nishimura, I., *Vibration control of building structures by active tuned mass damper*, 1994, Doctoral dissertation.
35. Özsarıyıldız, Ş.S. and A. Bozer, *Finding optimal parameters of tuned mass dampers*. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2015. **24**(6): p. 461-475.