

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence : 2019/2020



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع/2020

Mémoire de Master

Filière : Génie civil

Spécialité : Matériaux en Génie Civil

Thème

Etude numérique de l'effet de la stratification des couches sur les mécanismes de rupture des poutres stratifiées.

Nom et Prénom de l'étudiant :
BEZAOU Ferdous

Encadreur : KHECHAI Abdelhak

Année universitaire : 2019 - 2020

Remerciement

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté et la santé de continuer mes études.

A travers ce mémoire je tiens à remercier infiniment tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche.

*Mes sincères remerciements vont à **Dr. Khechai Abdelhak**, mon promoteur, qui était toujours présent au de la réalisation de ce mémoire, en plus son encouragement et sa gentillesse, sa disponibilité et ces conseils précieux. Ainsi que, pour le temps précieux qu'il m'avait accordé.*

*Je souhaite également remercier chaleureusement Enseignant **Salhi Mohamed Lamine** pour m'avoir fait partager son expérience, pour les conseils et encouragements qu'il a su me prodiguer pendant toute la durée de ce travail.*

*Je remercie le **jury** pour vos efforts dans l'évaluation de ce travail.*

*Je tiens à remercier vivement toutes l'équipe de départements de **génie civil** de l'université de **Biskra** spécialement le chef de département **Dr. Abd el salam Issam**.*

Je dédie ce modeste travail à :

*La mémoire de la personne qui m'est très chère, qui m'a toujours poussée et motivée dans mes études. **Mon père**, que le bon Dieu lui soit miséricordieux et l'accueille dans son vaste paradis.*

« Tu n'es plus là où tu étais mais tu es partout là où je suis ».

***Ma chère mère**, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que tu as consentis pour me permettre de suivre mes études dans les meilleures conditions possibles sans avoir cessé de m'encourager tout au long de mes années d'études.*

Que dieu t'accorde une longue vie.

*Mon frère **Yahia** et mes sœurs **Harane**, **Selsabil** et **Saoudoussé**, qui m'ont soutenue moralement et m'ont encouragée durant mon cycle universitaire.*

*Ma deuxième mère, ma tante, et ma Enseignante, **Dr. Ouarda**, pour tous les conseils qu'elle m'a donnés, ainsi que son soutien moral, « Tu as toujours été mon soutien dans mes études et dans la vie ».*

***Ma famille**, qui m'a aidée d'une façon ou d'une autre dans l'achèvement de ce travail.*

*Mes copines **Fataxe**, **Sara**, et leur familles pour le soutien moral et leurs encouragements.*

*A mes **Enseignant**, et tous mes amis de la promotion master Matériaux en génie civil.*

Résumé

Les matériaux composites se développent aujourd'hui pratiquement dans tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de hautes technologies. L'amélioration de l'efficacité et de la fiabilité de la conception telle que les poutres stratifiées nécessite une compréhension approfondie et une modélisation fidèle de l'endommagement jusqu'à rupture de ces structures. L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement le comportement de rupture des poutres stratifiées minces en utilisant la méthode des éléments finis.

Un élément fini rectangulaire qui a été, précédemment, développé est étendu vers l'étude du comportement de rupture des poutres stratifiées minces. Basé sur la théorie classique des stratifiées, l'élément contient quatre nœuds avec vingt-six degrés de liberté. La validation de l'élément a montré que ce dernier présente une bonne précision et rapidité de convergence. De plus, une étude paramétrique sur la rupture des poutres stratifiées soumise à la flexion est présentée. Dans cette étude, plusieurs paramètres ont été pris en considération, tel que, le type de stratification, les conditions aux limites et la charge statique appliqué. Il n'a été conclu que la rupture des plaques stratifiées minces peut-être significativement affectée par les paramètres considérés.

Mots clés : matériaux composites, Poutres stratifiées, endommagement, éléments finis.

الملخص

تتطور المواد المركبة الآن في جميع المجالات تقريباً وهي مصدر تحديات هائلة في مختلف إنجازات التكنولوجيا الفائقة. يتطلب التحسين كفاءة وموثوقية التصميم مثل الروافد الرقيقة ذات الطبقات فهماً عميقاً ونموذجية جيدة للأضرار التي لحقت بفشل هذه الهياكل. الهدف من هذا العمل هو الدراسة العددية لسلوك تمزق الروافد الرقيقة ذات الطبقات باستخدام طريقة العناصر المنتهية.

تم استعمال العنصر المنتهي المستطيل الذي تم تطويره سابقاً لدراسة سلوك تمزق الروافد الرقيقة ذات الطبقات. بناءً على النظرية الكلاسيكية للصفائح ذات الطبقات، يحتوي العنصر المنتهي على أربع عقد بستة وعشرين درجة من الحرية. أظهر التحقق من صحة العنصر المنتهي أن الأخير يقدم دقة جيدة وسرعة تقارب. بالإضافة إلى ذلك، تم تقديم دراسة لإظهار مدى تمزق الروافد الرقيقة ذات الطبقات المعرضة للانحناء. في هذه الدراسة، تم أخذ بعين الاعتبار أثر بعض الخصائص على سلوك الروافد، مثل نوع التقسيم الطبقي للروافد والشروط الحدية والقوة المطبقة. وبالتالي تم استنتاج ان سلوك تمزق الروافد الرقيقة ذات الطبقات يمكن ان يتأثر بشكل كبير من قبل الخصائص المعتمدة.

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة، الروافد ذات الطبقات، الضرر العناصر المنتهية.

Abstract :

Composite materials are now developing in virtually all fields and are the source of formidable challenges in various high-tech achievements. Improving the efficiency and reliability of design such as laminated beams requires a thorough understanding and faithful modeling of the damage to failure of these structures. The objective of this work is to numerically study the fracture behavior of thin laminated beams using the finite element method.

A rectangular finite element which was previously developed is extended to the study of the failure behavior of thin laminated beams. Based on classical laminate theory, the element contains four nodes with twenty-six degrees of freedom. The validation of the element showed that the latter presents a good precision and speed of convergence. In addition, a parametric study on the failure of laminated beams subjected to bending is presented. In this study, several parameters were taken into consideration, such as, the type of lamination, the boundary conditions and the applied static load. It was concluded that the failure of thin laminated plates can be significantly affected by the parameters considered.

Keywords : composite materials, Laminated beams, damage, finite elements.

Sommaire :

Introduction générale.....	01
Chapitre I : Généralités sur les Matériaux composites	
I.1 Introduction	04
I.2 Historique.....	04
I.3 Définition générale des composites	05
I.4 Définitions de base.....	05
I.5 Constituants d'un matériau composite.....	05
I.5.1 1e renfort.....	05
I.5.2 La matrice	07
I.6 Classification des matériaux composite.....	08
I.6.1 Les matériaux composites suivant la forme.....	08
I.6.2 Classification suivant la nature des constituants.....	08
I.7 Architecture des matériaux composites.....	08
A. Sandwiches.....	09
B. Les monocouches.....	09
C. Stratifiés	09
I.8 Mise en œuvre des matériaux composites.....	10
I.9 les avantages et inconvénients des matériaux composites.....	11
I.9 .1 les avantages.....	11
I.9 .2 les inconvénients.....	11
I.10. Recyclage des matériaux composites.....	11
I.10.2.Procédés de recyclage.....	12
I.10.2.1. Procédé mécanique.....	12
A) Déchiquetage	12
B) Broyage.....	12
C) Tamisage	12
D) Technologie adaptée aux composites fibres de verre (cimentrie)...	12
I.10.2.2 Procédé thermique.....	13
IV.11. Conclusion	13
Chapitre II : Comportement Mécanique Des stratifiées Composites	
II.1 Introduction.....	15

II .2 Loi de comportement des stratifiées.....	15
II.2.1 Caractéristiques du mélange renfort-matrice	15
II.2.2 Module d'Young longitudinal	17
II.2.3 Modules de Young transversal	18
II.2.4 Coefficient de Poisson longitudinal	19
II.2.5 Module de cisaillement longitudinal	19
II.2.6 Loi de Hooke généralisée.....	20
II.3 Différents Types des matériaux.....	21
II.3.1 Matériaux anisotropes	21
II.3.2 Matériau orthotrope.....	22
II.3.3 Matériaux transversalement isotropes	24
II.3.4 Matériau isotrope.....	25
II.3.5 Relation contrainte-déformation plane	26
II.3.6 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres.....	26
II.3.7 Théories utilisées dans la formulation analytique des structures composites...	28
II.3.8 les théories des Comportement mécanique des stratifiées.....	29
II.4 Théorie classique des stratifiées (CLT)	29
II.5.1 Relation Cinématique (déplacements- déformations).....	30
II.5.2 Expression des résultantes et des moments.....	32
II.5.2.a Résultantes en membrane.....	32
II.5.2.b Moment de flexion et de torsion	33
II.6 Influence de l'empilement des couches.....	35
II.6.1 Couche isotrope.....	35
II.6.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux.....	35
II.6.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes.....	35
II.6.4 Stratifiés symétriques.....	36
II.7) Conclusion.....	37
Chapitre III : Étude Théorique Les Différents Critères D'endommagement	
III.1 Introduction.....	39
III.2 Propriétés de la rupture.....	39
III.2.1 Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel.....	39
A. la rupture des fibres.....	39
B. la rupture transverse de la matrice.....	40

C. la rupture longitudinale de la matrice.....	40
D. L'interface fibre-matrice.....	41
III.3 Critères en contraintes maximales.....	41
III.3.1 Critères dans les axes principaux.....	41
III.4. Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux.....	43
III.5 Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux.....	44
III.6 Critères en déformations maximales.....	45
III.6.1 Critère dans les axes des matériaux.....	45
III.6.2 Critères interactifs.....	45
III.6.2. Théorie générale de Tsai-Wu.....	46
III. 6.2.1.1 Formulation.....	46
III. 6.2.1.2 Expression des constantes.....	47
III. 6.2.1.3 Critère de Tsai-Wu en contraintes planes.....	59
III.7 Conclusion	50
Chapitre IV Formulation Élément Fini et Programmation	
IV.1 Introduction.....	52
IV.2 Avantages et inconvénients de la Méthode des éléments Finis.....	52
IV.3 Élément utilisé.....	53
IV.4 Fonctions de déplacements de l'élément.....	53
IV.5 Relation cinématiques.....	58
IV.6 Loi de comportement.....	58
IV.7 Détermination de la matrice de rigidité.....	59
IV.8 les étapes à suivre afin de calculer la charge de rupture	60
IV.9 Validation de l'élément :.....	62
IV.9.1 Poutre isotrope encastrée à coté et libre à l'autre	62
IV.9.2 Poutre composite stratifiée simplement appuyée	63
VI.9.3 Poutre composite stratifiée encastrée sur deux côtés.....	65
VI.10 Conclusion	66
Chapitre V : Etude paramétrique	
V.1 introduction.....	68
V.2 Poutre stratifiée simplement appuyée à coté et libre à l'autre chargée par une charge de traction.....	68
V.3 Poutre composite stratifiée encastrée sur deux côtés	70

V.4 Poutre stratifiée encastree [90] ₄	73
V.5 Conclusion	76

Liste des figures

Fig. I.1 : Le torchis (mélange de terre et de paille).....	04
Fig. I.2 : sabres japonais.....	04
Fig. I.03 : Matériau composite.....	05
Fig.I.04 : fibre de verre.....	06
Fig. I.05 : Principaux matériaux de renfort	06
Fig. I.06 : Les différentes familles de matrice.....	07
Fig. I. 07 : (a) fibres longues, (b) fibres courtes	08
Fig. I.08 : Un sandwich typique.....	09
Fig. I.09 : Pli à renforcement unidirectionnel.	09
Fig. 10 : Constitution d'un stratifié.....	10
Fig. 11 : Etapes de mise en forme des composites par moulage.....	10
Fig. II.1 : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel.....	16
Fig.II.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.....	17
Fig.II.3 : Schéma simplifié d'une traction transversale.....	18
Fig. II.4 : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal.....	20
Fig. II.5 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.....	22
Fig. II.6 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope...	24
Fig. II.7 : Axes principaux et axes de référence d'une couche.....	27
Fig. II.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des Stratifié	29
Fig.II.9 : Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion.....	34
Fig. III. 01 : Rupture de fibre.....	40
Fig. III. 02 : Rupture transverse de la matrice.....	40
Fig. III. 03 : Rupture longitudinale de la matrice.....	41
Fig. III. 04 : Décohésion fibre-matrice.....	41
FIG. III.05 : Comportements fragile et "ductile" d'un matériau.....	42
FIG. III.06 : Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.....	42
Fig.III.07 : Couche rapportée à des axes de référence quelconques.....	44
Fig. III.08 : Essais de cisaillement.....	48
Figure IV 01 : Elément fini rectangulaire d'élasticité plane : (a) géométrie et axes	

; (b) nœuds et degrés de liberté....	53
Fig.IV.02 : Emplacement des plis stratifiés	61
Fig.IV.03 : Poutre isotrope encastree à coté et libre à l'autre.....	62
Fig.IV.4 : Poutre composite simplement appui.....	63
Fig. IV.5 : Convergence du déplacement pour une poutre composite simplement appui.....	64
Fig.IV.6 : Poutre composite stratifiée encastree sur les deux côtés.....	65
Fig.V.1 : Poutre composite simplement appui à coté et libre à l'autre chargé par une charge de traction.....	68
Fig.V.2 : Poutre composite stratifiée encastree sur les deux côtés.....	70
Fig.V.3 : Les mécanismes de rupture de la première couche (surface supérieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite [0/90]s.....	72
Fig.V.4 : Les mécanismes de rupture de la dernière couche (surface inférieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite [0/90]s...	72
Fig.V.5 : Les mécanismes de rupture de la première couche (surface supérieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite [90]4.....	74
Fig.V.6 : Les mécanismes de rupture de la dernière couche (surface inférieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite [90]4.....	75

Liste des tableaux :

Tableau I. 1 : caractéristiques générales des fibres de verre.....	06
Tableau IV.1 : Propriétés géométriques et mécaniques de la première poutre test...	63
Tableau IV.2 : Déplacement maximum pour la poutre isotrope.....	63
Tableau IV.3 : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième poutre test...	64
Tableau IV.4 : Déplacements pour différentes configuration de maillage.....	64
Tableau IV.5 : Propriétés géométriques et mécaniques de la troisième poutre test...	65
Tableau IV.6 : Déplacement maximal pour la poutre stratifiée.....	66
Tableau V.1 : Propriétés géométriques et mécaniques de la quatrième poutre test...	68
Tableau V.2 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 100.....	69
Tableau V.3 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 3500.....	69
Tableau V.4 : Propriétés géométriques et mécaniques de la cinquième poutre test...	70
Tableau IV.5 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 100 N.....	71
Tableau IV.6 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 550 N.....	71
Tableau IV.7 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 50 N.....	73
Tableau IV.8 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 110 N.....	74

Liste de notations et symboles.

Les symboles	Les notions
$[...]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur.
$[...]^{-1}$	Matrice inverse.
$[...]^T$	Matrice transposée.
\int	Intégrale.
Σ	La somme.
Θ	La dérivée.
h	Épaisseur de la plaque.
\mathbf{C}	Matrice de rigidité.
\mathbf{S}	Matrice de souplesse.
$[Q'_{ij}]$	La matrice de rigidité réduite hors axes principaux.
\mathbf{T}	la matrice de changement.
v_c	Volume de matériau composite.
v_f	Volume de fibre.
v_m	Volume de matrice.
V_m	Fraction volumique de matrice.
V_f	Fraction volumique de fibre.
ϵ_f	Déformation de fibre.
ϵ_m	Déformation de matrice.
ϵ_c	Déformation de composite.
$\sigma_f, \sigma_m, \sigma_c$	Contrainte suivant (fibre, matrice, composite).
$A_m ; A_f$	Les Aires des sections droites de la fibre et de la matrice.
E_1	Module de Young longitudinale.
E_2	Module de Young transversale.
G_{ij}	Module de cisaillement longitudinal.
ν_{ij}	Coefficient de Poisson longitudinal.
σ_{ij}	les contraintes.
ϵ_{ij}	les déformations.
σ	Vecteur des contraintes.
ϵ	Vecteur des déformations.
S_{ijkl}	Tenseur de souplesse.
C_{ijkl}	Tenseur d'élasticité.
u, v	Déplacement suivant x, y.
w	Déplacement suivant z.
$\theta_x; \theta_y$	Rotation autour x et y.
\mathbf{K}	Nom de la couche.
θ	Angle d'orientation des fibres.
Q_x	Force de cisaillement dans la direction x.
Q_y	Force de cisaillement dans la direction y.
$M_x ; M_y$	Moments de flexion suivant les directions x et y.
M_{xy}	Moment de torsion.
$N_x ; N_y$	Contraintes Normales.
N_{xy}	Contrainte de cisaillement.
\mathbf{A}_{ij}	Matrice de rigidité en membrane.
\mathbf{B}_{ij}	Matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

\mathbf{D}_{ij}	Matrice de rigidité en flexion.
\mathbf{U}	Champs des déplacements.
$\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z$	Contraintes normales.
ϵ_x	Déformation dans les directions x.
ϵ_y	Déformation dans les directions y.
ϵ_z	Déformation dans les directions.
$\epsilon^0_x, \epsilon^0_y, \epsilon^0_{xy}$	Déformation membranaire.
$[0/90]_s$	L'orientation des couches : est de 0° pour la 1 ^{er} et 4 ^{ème} couche et 90° pour la 2 ^{ème} et la 3 ^{ème} couche.
$[90]_4$	L'orientation des couches : est de 90° pour les quatre couches
$[0/90/45/0]_s$	L'orientation des couches : est de 0° pour la 1 ^{er} , 4 ^{ème} , 5 ^{ème} et 8 ^{ème} couche et 90° pour la 2 ^{ème} et la 7 ^{ème} couche, et 45° pour la 3 ^{ème} et la 6 ^{ème} couche.
$[902/0]_s$	L'orientation des couches : est de 0° pour la 3 ^{er} et 4 ^{ème} couche et 90° pour la 1 ^{er} , 2 ^{ème} , 5 ^{ème} et 6 ^{ème} couche.

Introduction

Générale

Introduction générale

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Nous étudions plus particulièrement les stratifiées à fibres long de verre et à matrice époxyde qui son placent de loin au premier rang utilisés actuellement dans la construction de structures composites. Les bonnes propriétés mécaniques spécifiques de ces matériaux permettent en effet un allègement des structures, particulièrement recherché dans les constructions civiles.

Problématique :

Les composites à fibres de verre renforçant une matrice époxy, ont connu de nombreuses applications ces dernières années, notamment dans le domaine de génie civil. L'amélioration de l'efficacité et de la fiabilité de la conception des poutres stratifiées nécessite une compréhension approfondie et une modélisation fidèle de l'endommagement jusqu'à rupture de ces structures. Cette étude est essentiellement consacrée à la détermination de l'effet de la stratification des couches sur les mécanismes de rupture des poutres stratifiées soumises à des charges statiques.

Dans ce travail, notre contribution est une étude numérique de l'effet de la stratification des couches sur les mécanismes de rupture des poutres stratifiées.

Objectif :

Le but de notre travail est de déterminer numériquement la charge ultime qui cause la rupture des poutres en composite sous une charge statique en utilisant la méthode des éléments finis, et avoir une image claire sur l'effet de l'orientation des fibres sur les modes de rupture de ces poutres.

Ce mémoire se diviser on cinq chapitres :

Le premier chapitre présenter une bibliographie qui comporte des généralités sur les matériaux composites

Le deuxième chapitre consiste a une présentation sur le comportement mécanique des stratifiées composites, où on présente les principaux types des matériaux composites.

Le troisième chapitre présente une étude théorique sur les différents critères d'endommagement et les divers mécanismes des ruptures ainsi que les différentes théories des poutres stratifiés.

Le quatrième chapitre est consacré une formulation en élément fini dans, laquelle on utilisera un élément membranaire flexionnelle, ainsi qu'une programmation avec le langage **FORTRAN**, le programme sera ensuite validé par comparaison avec les résultats analytiques. Et on va analyser et exploiter les résultats donnés par le programme, l'exploitation de ce dernier se fera par variation de différents paramètres du matériau étudié.

Le dernier chapitre consiste a une étude paramétrique sur des poutres stratifies pour voir une image claire de l'effet de la stratification des couches sur les mécanismes de rupture des poutres stratifiées minces.

Finalement, notre mémoire sera achevé par une conclusion générale.

Chapitre I :

Généralités Sur les Matériaux Composites

I.1 Introduction :

Les matériaux composites sont des matériaux à très hautes performances mécaniques, qui peuvent être façonnés à volonté au gré du concepteur, de manière à obtenir les propriétés souhaitées en faisant un choix approprié des constituants. Ainsi, la possibilité de façonner à la carte les matériaux composites modifie considérablement l'approche conventionnelle du dimensionnement des structures habituellement utilisée pour les matériaux traditionnels [3].

Actuellement le besoin industriel à pousser les ingénieurs et les chercheurs dans le monde entier à remplacer les matériaux classiques par des matériaux nouveaux capables de résister à des conditions extrêmes [2]. Les matériaux composites se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de hautes technologies [3].

I.2 Historique

Le bois fut le premier matériau composite naturel utilisé, ensuite le torchis a été utilisé en construction pour ses propriétés d'isolation et de coût (Figure 1). Parmi les premiers composites fabriqués par l'homme on trouve aussi les arcs Mongols (2000 ans av. J. -C.). Leur âme en bois était contrecollée de tendon au dos et de corne sur sa face interne. Les sabres japonais respectant les traditions sont aussi un exemple de matériaux composites particulièrement ancien (Figure 2).

Les forgerons nippons procédaient au pliage et au martèlement du métal jusqu'à obtenir une sorte de pâte feuilletée pouvant être composée de plus de 4 000 couches. Le procédé de pliage était utilisé pour maîtriser exactement l'uniformité de l'acier mais aussi sa composition en carbone tout en conférant à la lame ses propriétés de résistance et de souplesse.



Fig.I.1 : Le torchis (mélange de terre et de paille) [23].



Fig. I.2 : sabres japonais [24].

Au 20ème siècle, les composites modernes ont été utilisés dans les années 1930 lorsque les résines renforcées par des fibres de verre. Les bateaux et les avions ont été construits à partir de ces composites de verre, communément appelé fibre de verre.

Depuis les années 1970, l'application de composites a considérablement augmenté en raison du développement de nouvelles fibres telles que le carbone, le bore et les aramides, ainsi que de nouveaux systèmes composites comportant des matrices en métaux et en céramique [4].

I.3 Définition générale des composites :

La norme AFNOR NF T50-100 définit un matériau composite comme étant un produit solide comportant au moins deux phases physiques distinctes, composées d'un matériau de liaison et d'un matériau sous forme granulée, fibreuse ou lamellaire [1]. Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées « **renforts** » et « **matrice** ». Chacun des deux constituants jouant un rôle particulier dans la tenue mécanique du matériau. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à recevoir toutes les sollicitations et répartir les efforts dans tout le matériau et de protéger le renfort [2].

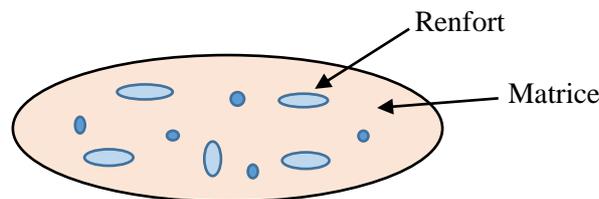


Fig. I.3 : Matériau composite

I.4 Définitions de base :

- **Homogène** : même propriétés physiques en tout point du matériau,
- **Hétérogène** : en 2 points différents, propriétés physiques différentes,
- **Isotrope** : même propriétés mécaniques dans toutes les directions,
- **Anisotrope** : les propriétés mécaniques sont différentes selon les différentes directions.

I.5 Constituants d'un matériau composite :

D'après Berthelot [3], un matériau composite : association de deux constituants :

I.5.1 le renfort : armature, squelette, il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire. Les diverses formes et origines de renforts sont présentés dans la figure I.5. Dans cette étude on utilise les fibres de verre comme renfort.

Les Fibres de verre :

Le verre possède une très bonne résistance à la rupture dépassant même celle de certains métaux. Cependant, le verre est un matériau très fragile du fait de sa forte sensibilité aux microfissures. Cette fragilité diminue lorsque le verre est sous forme de fibre puisque les microfissures sont moins nombreuses, ce qui lui confère de bonnes performances. Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue quatre types de fibres :

Tableau I. 1 : caractéristiques générales des fibres de verre [3].

Type	Caractéristiques générales
E	à usage général; bonnes propriétés électriques
D	hautes propriétés diélectriques
A	haute teneur en alcali
C	bonne résistance chimique
R, S	haute résistance mécanique



Fig. 4 : Fibre de verre.

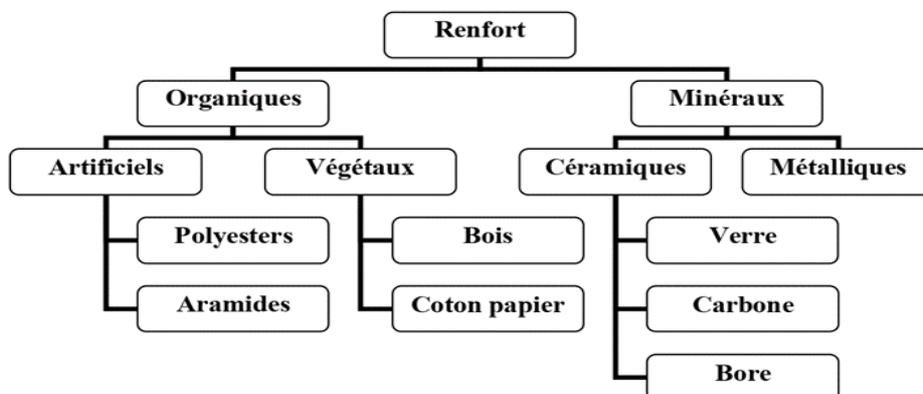


Fig.I.05 : Principaux matériaux de renfort [5].

I.5.2 La matrice :

Lie les fibres renforts, répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique. Les différentes familles de matrice sont présentées dans la figure I.6. Dans cette étude on utilise l'époxyde comme matrice.

- ✓ Ces deux constituants principaux reçoivent des additifs ou charges qui sont des produits peuvent être incorporées à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût.

✚ Epoxydes :

Résines plus performantes sur le plan mécanique et retrait plus faible que les résines polyesters. Souvent utilisées pour des stratifiés à tolérances serrées. Joue également un rôle important dans la construction de pièces pour l'industrie aéronautique où le rapport résistance/poids est un critère essentiel. Les conditions de travail doivent être contrôlées, les proportions doivent être

Respectées scrupuleusement. Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction :

- Du durcissement à chaud ou à froid ;
- De la tenue en température (120-130°C, ou 180-200°C) [7].

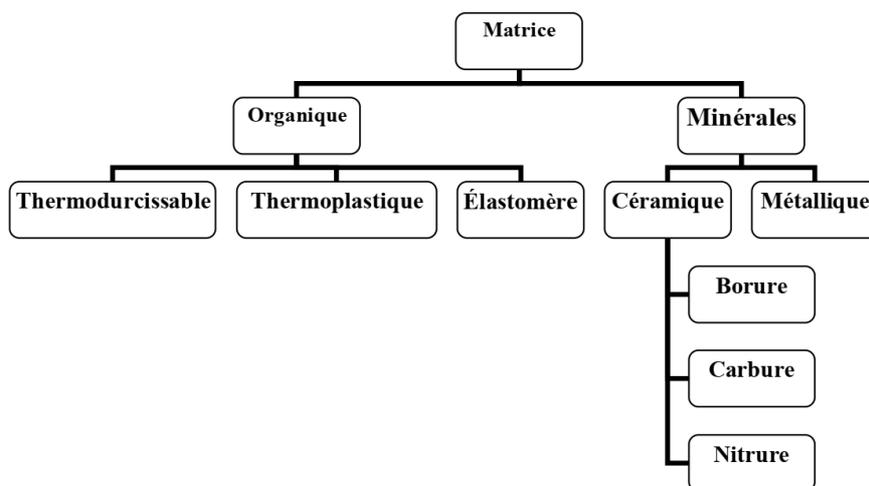


Fig. I.6 : Les différentes familles de matrice [5].

I.6 Classification des matériaux composite

Les composites peuvent être classés suivant la forme et la nature des composants :

I.6.1 Les matériaux composites suivant la forme

- ✓ Les fibres longues (longueur comparable aux dimensions de la pièce),
- ✓ Les fibres courtes (i.e. de longueur faible devant les dimensions de la pièce).

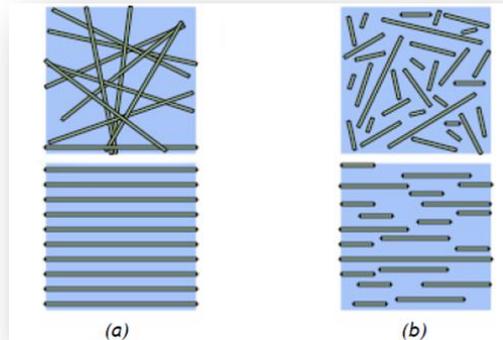


Fig. 7 : (a) Fibres longues, (b) Fibres courtes [25].

I.6.2 Classification suivant la nature des constituants :

On distingue habituellement trois familles :

- Les composites à matrice organique (CMO),
- Les composites à matrice minérale (CMM),
- Les composites à matrice métallique (CMM).

I.7 Architecture des matériaux composites :

D'après Berthelot [3], L'ensemble des procédés de mise en œuvre montre la prépondérance d'une conception des pièces en matériaux composites :

- Par surface : plaques, coques,
 - Par stratification de couches successives.

Ce concept justifie l'importance qui sera donnée par la suite à l'étude des matériaux composites considérés sous la forme de plaques ou de coques, constituées de couches différentes (ou non). Les coques peuvent être modélisées comme un ensemble de plaques, et leur étude déduite de l'étude des plaques.

L'objet de ce paragraphe est de dégager l'architecture générale des matériaux composites.

A. Sandwich :

Un sandwich typique est représenté à la figure 07 est constitué :

- de deux peaux fines,
- prenant une âme ou cœur en sandwich.
- Ces différentes couches sont liées, par exemple par un joint de colle,
- mais nous désignerons par interface la «zone» de liaison entre peaux et âme

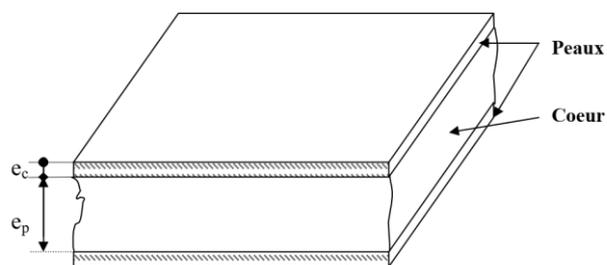


Fig. 8 : Un sandwich typique.

B. Les monocouches :

Les monocouches comme il est indiqué sur la (Figure 08) représentent l'élément de base de la structure composite, les différents types de monocouches sont caractérisés par la disposition du renfort dans la matrice, fibres unidirectionnelles, fibres tissées et fibres courtes [6].

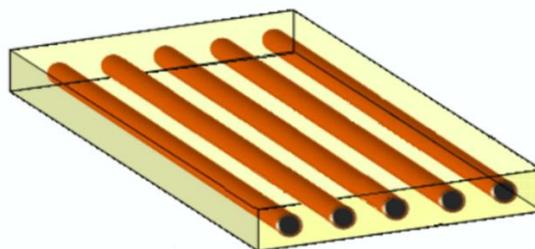


Fig.I.9 : Pli à renforcement unidirectionnel [2].

C. Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches (Figure 9), et désigné comme le repère des axes de symétrie du matériau. Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques.

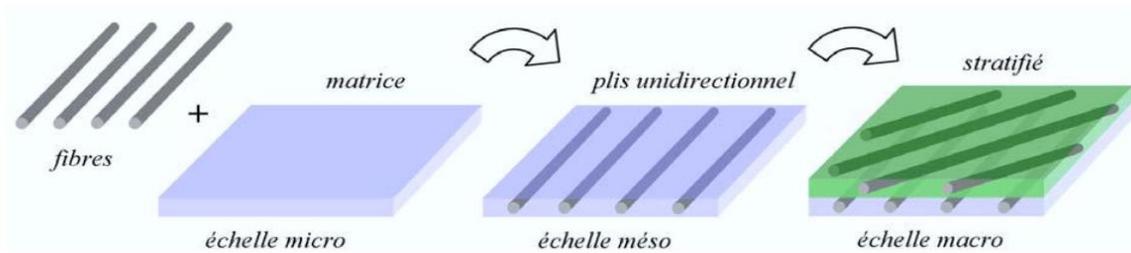


Fig.I.10 : Constitution d'un stratifié [26].

I.8 Mise en œuvre des matériaux composites :

Le mélange (renfort / résine) ne devient un véritable matériau composite résistant qu'au terme de dernière phase de fabrication. Il existe différentes techniques de mise en œuvre mais la plus utilisée est par moulage, les procédés de formage par moulage varient en fonction de la nature des pièces, de l'importance des séries et du prix de revient. Nous retiendrons le formage par moulage des composites à renfort fibreux et à matrice résineuse. Les principales étapes de fabrication sont illustrées dans la (Figure 11).

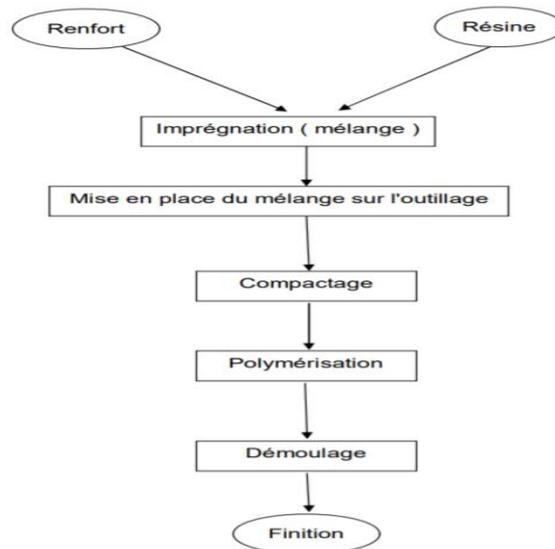


Fig. I. 11 : Etapes de mise en forme des composites par moulage.

I.9 les avantages et inconvénients des matériaux composites :

I.9 .1 les avantages :

- ✓ Caractéristiques mécaniques très élevées (résistance mécanique).
- ✓ Les matériaux composites sont recyclables.
- ✓ Grande durabilité.
- ✓ La légèreté.
- ✓ Faible densité (et donc facilité de transport, manutention, pose).
- ✓ Économies d'énergie lors de l'exploitation.
- ✓ Grande capacité d'absorption de chocs.
- ✓ Faible dilatation.

I.9 .2 les inconvénients :

Cependant, il est bien connu que, un certain nombre de désavantages sont associés aux ces matériaux composites comme par exemple, le coût de fabrication est généralement supérieur à celui des matériaux traditionnels.

Le fait que, en raison de leur développement récent, les techniques des composites ne sont bien connues que des spécialistes, malgré des formations existent, ainsi que des ouvrages techniques. La difficulté de réparation, bien qu'il existe des possibilités, par stratification ou par collage. La tenue à la chaleur des composites est très inférieure à celle des métaux, limitée le plus souvent autour de 100 C° (sauf à utiliser des résines très spéciales telles que PEEK ou polyamides, qui résistent à 250 C° environ).

En addition, les composites présentent un problème majeur appelé le délaminage, On peut définir ce problème comme la séparation entre les couches due à la forte anisotropie entre ces couches.

I.10. Recyclage des matériaux composites

Les matériaux composites sont-ils recyclables ?

En théorie, la réponse est simple. C'est oui. Car il sera toujours possible de leur imaginer de nouveaux usages, mais en pratique il y a des problèmes :

- **Des problèmes techniques**
 - Ces matériaux sont complexes par nature (résines TP ou TD, fibres, charges),
 - Les thermodurcissables ne sont ni fusibles ni solubles,

- Des propriétés mécaniques optimales doivent être conservées (non dégradation des fibres, architecture du renfort).
- **Des problèmes Economiques**
 - Les volumes des composites sont relativement faibles (par rapport aux plastiques, aciers), ce qui peut limiter l'intérêt perçu pour leur récupération en fin de vie,
 - Les gisements sont dispersés rendant la collecte complexe et coûteuse.

I.10.2 Procédés de recyclage :

Le recyclage des matériaux composites possède un double intérêt, à la fois environnemental et économique. Il permet en effet de réduire les besoins en matière première, ainsi que la consommation énergétique lors de la transformation des matériaux. Cela entraîne de ce fait une diminution de l'impact écologique comme des coûts.

I.10.2.1 Procédé mécanique :

A) Déchiquetage :

Une opération de réduction de taille de déchets préalable à tout type de valorisation. La taille des déchets en morceaux de 50 à 100 mm.

B) Broyage

- **Broyage primaire :** (dimension caractéristique 1 à 10 mm),
- **Broyage secondaire :** (particules micronisées de moins de 50 μm).

C) Tamisage :

Les fractions tamisées les plus fines sont des poudres et contiennent une proportion de charges et de polymères plus élevée que dans le composites d'origine. Les fractions tamisées les plus grossières ont tendance à être de nature plutôt fibreuse,

D) Technologie adaptée aux composites fibres de verre (cimentrie)

- **Valorisation de la matière :** La partie minérale entre dans la composition du ciment (Fibres pour anti-fissuration, Charges pour apport matière première de substitution).
- **Valorisation énergétique :** La partie organique (résine) apporte du pouvoir calorifique qui permet d'alimenter le four.

I.10.2.2 Procédé thermique :

Dans ces procédés, le déchet composite subit une action thermique à haute température (généralement 400 à 750°C) qui produit une dégradation de la résine et une séparation des constituants.

Pour la fraction organique, on obtient selon les conditions des résidus solides ou gazeux qui peuvent être utilisés comme combustibles (valorisation énergétique).

Les fibres peuvent être récupérées à l'issue du procédé pour être réintroduit dans des plastiques ou composites.

IV.11) Conclusion :

Ce chapitre a tout d'abord passé en revue le contexte général sur les matériaux composites : Constituants et classification d'un matériau composite, Architecture et mise en œuvre des matériaux composites. Ensuite, le recyclage des matériaux composites. D'après cette synthèse, Les matériaux composites sont des matériaux légers à très hautes performances mécaniques, qui peuvent être remplacé les matériaux classiques pour résister les conditions extrêmes. Dans cette étude on utilise un matériau composite qui constitue d'un renfort (verre) et d'une matrice (époxyde).

Chapitre II :
Comportement Mécanique Des
Plaques Composites Stratifiées.

II.1 Introduction :

L'utilisation des stratifiées composites a connu un grand développement durant ces dernières années, ou les recherches à améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.). Les stratifiées composites est utilisées comme élément structural est souvent soumise à différents types de sollicitation.

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'étude théorique des Matériau composite et les caractéristiques du mélange renfort-matrice. Premièrement nous allons présenter ici une bibliographie générale concernant l'étude du comportement mécanique des stratifiées composites.

II .2 Loi de comportement des stratifiées :

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu homogène équivalent anisotrope. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases :

- ✓ l'étude du comportement mécanique de chaque pli,
- ✓ l'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par le comportement du stratifiées [10].

II.2.1 Caractéristiques du mélange renfort-matrice :

Les principaux types de matériaux composites utilisés pour la fabrication de systèmes structuraux sont ceux formés par une phase discontinue, appelée renfort, insérée dans une phase solide, appelée matrice. La distribution et l'interaction, physique et chimique, entre les deux phases donne les propriétés mécaniques finales du matériau composite. En général, les composites structuraux sont présentés sous la forme d'un empilage de plusieurs plis, chacun présentant des fibres orientées selon une direction préférentielle. L'ensemble matrice-fibres forme le pli, l'ensemble de plis orientées forme le stratifié [11].

La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de celles de ses composants. Pour caractérisé un matériau on va calculer deux paramètres le Module d'Young E et Coefficient de Poisson ν . La détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des modules d'élasticité de la matrice et des fibres

(E_m, ν_m , E_f, ν_f), fraction volumique de la matrice et de fibres (V_f, V_m), les coefficients de Poisson (ν_m, ν_f).

D'après Paolo [13], Soit un matériau composite de repère d'orthotrope (1, 2, 3), l'axe 1 ou l'axe longitudinal étant disposé conventionnellement selon la direction des fibres, Les directions normales aux fibres dans le plan de la couche sont appelées directions transversales, Le composite est considéré comme étant isotrope transverse c'est-à-dire qu'il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse est repéré par les deux directions équivalentes 2 et 3. Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des fibres unidirectionnelles uniformément distribuées dans le corps de la couche (Voir figure II.1).

Soit une cellule élémentaire de fraction volumique $V = 1$ constituée de fibres et de matrice avec :

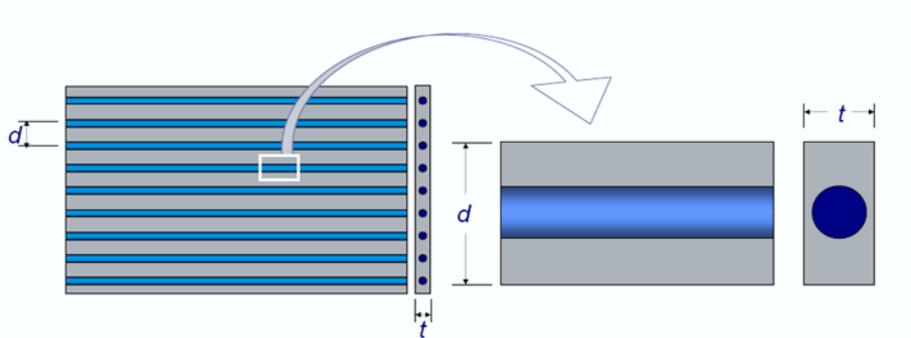


Fig. II.1 : Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [3].

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} : \text{Fraction volumique de matrice}$$

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} : \text{Fraction volumique de fibre}$$

$$V = V_m + V_f = 1 \tag{II.1}$$

Nous nous proposons, par le biais du volume élémentaire représentatif introduit auparavant, de trouver les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'une couche à renfort unidirectionnel uniformément reparti.

Les hypothèses de calcul sont :

- matrice *isotrope*, de module d'Young E_m et coefficient de Poisson ν_m ;

- fibres *isotropes*, de module d'Young E_f et coefficient de Poisson ν_f ;
- la fraction volumique des fibres est connue V_f ;
- le comportement est *élastique linéaire* ;
- il y a *adhésion parfaite* entre fibres et matrice.

L'objectif est de déterminer les constantes techniques homogénéisées de la couche (E_1, E_2, G_{12} et ν_{12}); à cause de la disposition régulière des fibres, cette dernière a un *comportement macroscopique orthotrope*.

II 2.2 Modules de Young longitudinale E_1 :

L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme dans la fibre et dans la matrice [12]. Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal. Le volume élémentaire représentatif est soumis à un état de sollicitation dans lequel seulement σ_1 n'est pas nulle, voir la (figure II.2).

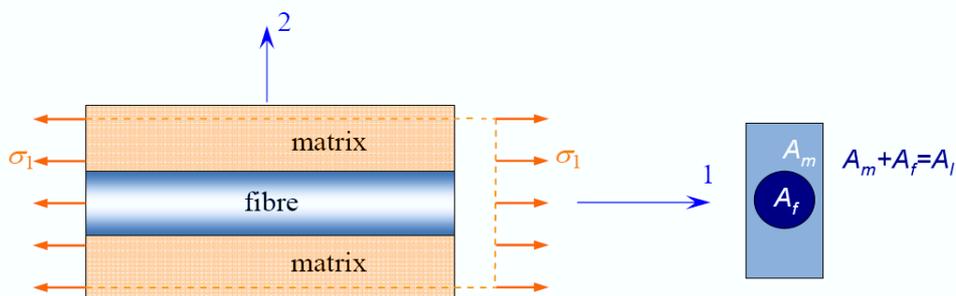


Fig.II.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale [3].

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l \quad (\text{II.2})$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même partout (en particulier, les sections droites restent planes) :

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l \quad (\text{II.3})$$

Où l'indice (m) indique une quantité relative à la matrice, (f) à la fibre et (l) à la couche.

$$\sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m$$

L'équilibre impose la relation :

$$\begin{aligned}\sigma_1^l A_l &= \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ &= E_1^f \varepsilon_1^l A_f + E_1^m \varepsilon_1^l A_m = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m)\end{aligned}\quad (\text{II.4})$$

La loi de comportement de l'unidirectionnelle s'écrit :

$$\sigma_1^l A_l = E_1 \varepsilon_1^l A_l$$

Donc
$$E_1 \varepsilon_1^l A_l = \varepsilon_1^l (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \Rightarrow E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_l}$$

avec
$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{A_f}{A_l} \quad \text{et} \quad V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_l}$$

On obtient

$$E_1 = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (\text{II.5})$$

Relation très bien vérifiée dans la direction des fibres. Cette dernière est la célèbre **loi des mélanges**, qui donne la valeur homogénéisée du module d'Young en direction longitudinale (celle des fibres). E_1 dépend linéairement de V_f , à savoir de la quantité de fibres présentes.

Le modèle utilisé pour trouver E_1 est un modèle de type **parallèle** : matrice et fibres travaillent en parallèle, pour le champ de contraintes appliqué.

II.2.3. Modules de Young transversal E_2 :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seulement σ_2 n'est pas nulle, voir (la fig. II.3).

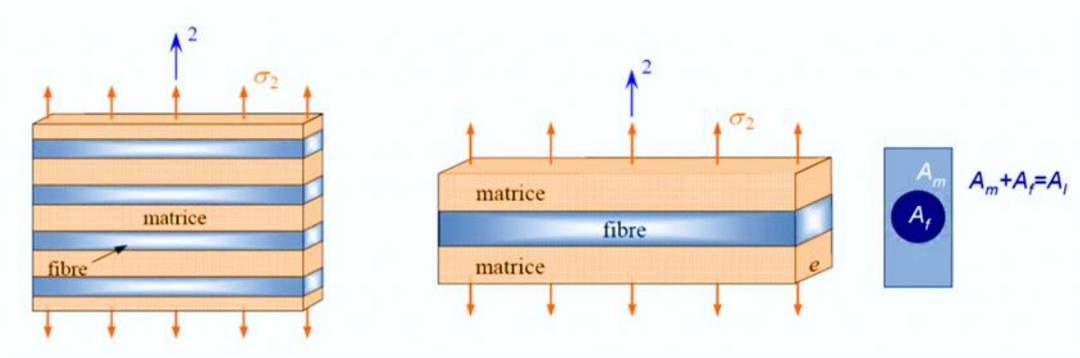


Fig.II.3 : Schéma simplifié d'une traction transversale [3].

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans

une section droite.
$$\sigma_2^l = \sigma_2^m = \sigma_2^f \quad (\text{II.6})$$

La compatibilité de la déformation implique :

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_2^m \\
 \Rightarrow V \frac{\sigma_2^l}{E_2} &= V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1-V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m} \\
 \text{Donc} \quad \frac{1}{E_2} &= \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1-V_f)}{E_2^m} \\
 E_2 &= \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^m + (1-V_f) E_2^f} \quad (\text{II.7})
 \end{aligned}$$

La dépendance du module E_2 de V_f n'est plus linéaire ; en outre, la présence des fibres donne **une faible** à E_2 : les fibres ne sont pas un **renfort efficace** pour la rigidité transversale.

Le modèle utilisé est un modèle de type *série*.

II.2.4. Coefficient de Poisson longitudinal ν_{12} :

Comme pour E_1 , on applique un état de contrainte où seulement σ_1 n'est pas nulle.

Par définition :

$$\nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l} \quad (\text{II.8}) \text{ D'ailleurs,}$$

l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que : $\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^l$ (II.9) Comme E_2 pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation :

$$\begin{aligned}
 V\varepsilon_2^l &= \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f)\varepsilon_2^m \\
 \Rightarrow \varepsilon_2^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \\
 \Rightarrow \nu_{12} \varepsilon_1^l &= \nu_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f)\nu_m \varepsilon_1^m \\
 \text{finalement :} \quad \nu_{12} &= \nu_f V_f + (1-V_f)\nu_m \quad (\text{II.10})
 \end{aligned}$$

II.2.5. Module de cisaillement longitudinal G_{12} :

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule τ n'est pas nulle, voir la figure II.4, où on a mis en évidence même la déformation correspondante

$$\text{Le tenseur des contraintes : } \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.13)$$

$$\text{Le tenseur des déformations : } \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.14)$$

La *loi de Hooke* est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes et de déformations selon l'équation :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (II.15)$$

II.3. Différents types des matériaux :

II.3.1 Matériaux anisotropes :

Selon Nye [22], les *matériaux anisotropes* sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie. La *loi de Hooke* peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \quad (II.16)$$

Où S_{ijkl} est le tenseur de souplesse. Le tenseur de rigidité en a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes σ_{ij} et de déformation ε_{kl} , il y a une réduction des coefficients à 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants.

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et} & \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases}$$

Application du théorème des travaux virtuels : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$ (II.17)

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sym & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.18)$$

La forme inverse de l'équation (2.19), est écrite sur la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & sym & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.19)$$

II.3.2 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

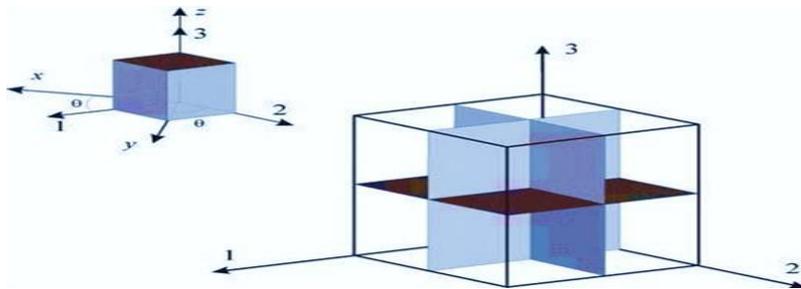


Fig. II.5 Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie [3].

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9 [4].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.20)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.21)$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

* 3 modules d'élasticité longitudinal E_1, E_2, E_3 dans les directions de l'orthotrope.

* 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{23}, G_{31} .

* ν_{ij} : (ν_{12}, ν_{23} et ν_{31}) est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i.

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante :

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} ; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} ; \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse S_{ij} :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12}-\nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{23} &= \frac{\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ \Delta &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

II.3.3. Matériaux transversalement isotropes :

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou souplesse) [4].

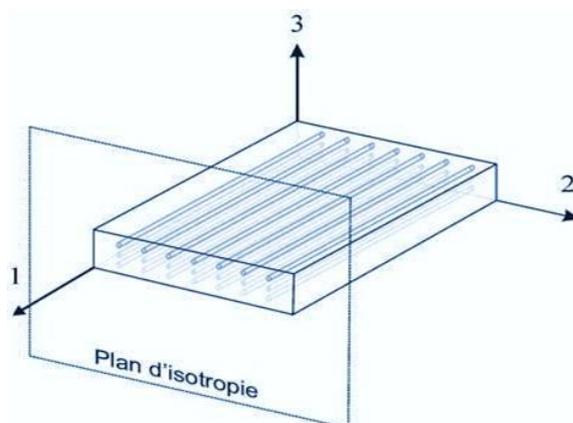


Fig. II.6 : Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope [3].

Celui-ci a des fibres alignées par rapport à la direction 1 du système de référence matériau (Figure II.6). Dans ce cas, le plan perpendiculaire au plan des fibres, plan (II,3), est dit isotrope.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc :

$$C_{22} = C_{33} \quad C_{12} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66} \quad C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2}$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (II.24)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ($E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}$ et G_{12}).

II.3.4. Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité [4].

Donc, les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad ; \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \quad \text{et} \quad G_{12} = G_{31} = G_{23} = G$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (II.25)$$

$$\text{Avec : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

II.3.5. Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de *contrainte plane*, La relation contrainte déformation peut être donnée par [3] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sym} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Les coefficients Q_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (\text{II.27})$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité (E_1, E_2, ν_{12} et G_{12}), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire tel que les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement pur.

II.3.6 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Selon Berthelot [3], les stratifié sont élaborés par l'empilement de couche successible dont la direction des fibres est variable d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre *un système d'axe de référence* pour l'ensemble du stratifiée, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Un pli composite unidirectionnel est classiquement assimilé à un matériau orthotrope dont les axes principaux d'orthotrope sont définis à partir du repère local $(0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2, 3)$. En règle générale, l'axe (x_1) est contenu dans le plan du pli et parallèle aux fibres. L'axe (x_2) est lui aussi contenu dans le plan du pli mais perpendiculaire à la fibre. Enfin, l'axe (x_3) est perpendiculaire au plan du pli (voir figure II.7). Il est question de caractériser les

propriétés élastique de la couche en les exprimant dans le système d'axes de référence (x, y, z) du stratifié, la direction des fibres fait un angle (θ) avec la direction x [2].

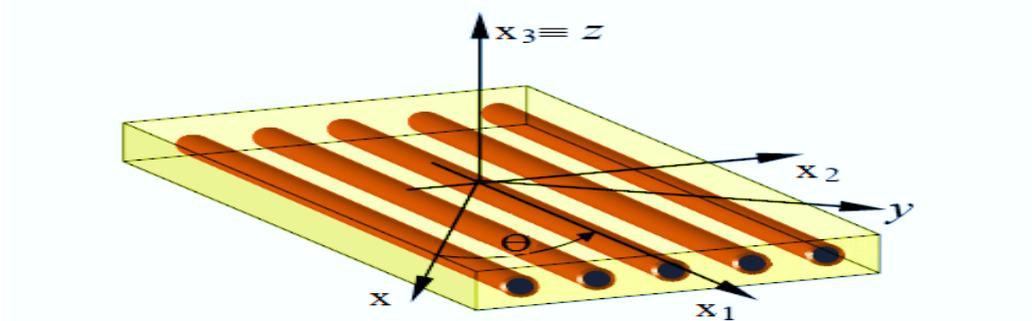


Fig. II.7 : Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [3]

Les matrices d'élasticité \bar{C} et de souplesse \bar{S} dans le système de référence sont obtenues en appliquant aux matrices d'élasticité et de souplesse C et S les relations de *changement de base* Suivantes :

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T] \quad (2.28) \quad (II.28)$$

$$Et \quad [\bar{S}] = [T]^{-1}[S][T] \quad (II.29)$$

Avec T est la matrice de changement de base, donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (II.30)$$

Avec $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

$$Et \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.31)$$

De même pour les déformations, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Nous pouvons également montrer que les contraintes dans le repère (x, y, z) sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Il faut toutefois noter que \bar{Q}_{16} et \bar{Q}_{26} ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales [2].

II.3 Théories utilisées dans la formulation analytique des structures composites :

Différentes théories, utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation, ont été initialement utilisées pour la modélisation de structures métalliques (en matériau isotrope) puis étendues à l'étude de structures composites (en matériau anisotrope, orthotrope ou transversalement isotrope) . Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories :

- celles formulées tenant pour base la notion d'une seule couche équivalente, appelées Théorie en Couche Équivalente Unique.
- celles formulées sur le concept de couches distinctes (**discrètes**), appelées **Théorie en Couches Equivalentes Discrètes**, ou **Simplement Théorie Layerwise** [2].

II.3. les théories des Comportement mécanique des stratifiant :

Il existe plusieurs théories utilisées pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches. On peut citer la théorie classique de la plaque stratifiée (CLPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), la théorie d'élasticité à trois dimensions qui est assez précise pour les plaques anisotropes [14]. Dans notre travail en utilisent la théorie classique des stratifiés.

II.4 Théorie classique des stratifiés (CLT) :

Basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, et qui néglige les déformations de cisaillement transverse et suppose que la normale au feuillet moyen reste normale après déformation [15]. D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure (connue comme surface de référence ou surface neutre), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction, tel que représenté sur la FigII.8 [2].

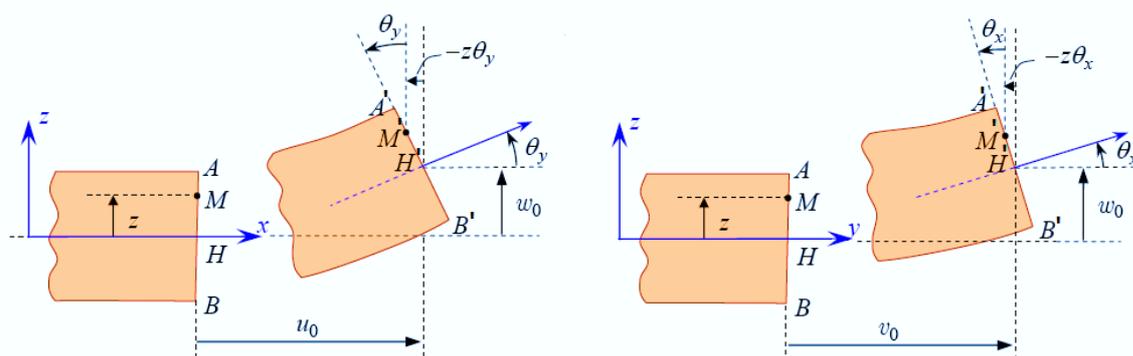


Fig. II.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des Stratifiées [3]

Selon Reddy [18], dans la théorie *CLT*, les effets des *déformations de cisaillements transversaux* (γ_{xz} , γ_{yz}) et la *déformation normale transversale* (ϵ_z), ne sont pas considérés.

Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont :

- ✓ Le stratifié est considéré comme une superposition de couches parfaitement liées, (la liaison est supposée infinitésimale) afin d'éviter le délaminage,
- ✓ La déformation est supposée continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre,
- ✓ Le stratifié se comporte comme une seule couche mince mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales,
- ✓ La déformation transversale est nulle, (pas de variation de l'épaisseur),
- ✓ Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse,
- ✓ Le matériau de chaque pli,
- ✓ Présente un comportement élastique,
- ✓ Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

Selon Reddy [18], le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression

Suivante :

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

u_0 et v_0 : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne,

w_0 : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les déformations de cisaillement transverse ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie CLT n'est adéquate que dans l'étude structures minces. Ainsi, selon CEN et al. [18], l'erreur commise par son emploi augmente avec le ratio de l'épaisseur-largeur des structures composites [2].

II.5.1 Relation Cinématique (déplacements- déformations) :

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié. Pour l'obtention des relations entre les composantes des déplacements et des déformations nous considérons dans ce mémoire que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de *l'élasticité linéaire*. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements (u, v, w) par rapport aux coordonnées (x, y, z) [2]. Donc, selon Reddy [18], ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

- des déformations de *membrane* :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

S'exprimant en fonction des déplacements (u_0, v_0) des points situés dans le plan $(o y z)$.

- des déformations en **flexion et torsion** :

$$\varepsilon_f = z\kappa(x, y) = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

κ_x, κ_y et κ_{xy} sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement le champ des déformations s'écrit : $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f$ (II.39)

A partir de l'équation (2.33) les contraintes dans une couche k, s'expriment par :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

où $\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)$ (II.40)

$\sigma_k(M)$ Représente la matrices de contrainte dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$, la matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre .il en résulte donc **une discontinuité** du champ des contraintes dans les couches successives.

II.5.2 Expression des résultantes et des moments :

II.5.2.a Résultantes en membrane :

D'après Berthelot [3], Les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur :

$$\begin{aligned}
 N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \\
 &\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \tag{II.41} \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\
 &= \left[\sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y)
 \end{aligned}$$

Soit, en définitive :

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \tag{II.42}$$

$$\text{avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \tag{II.43}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \tag{II.44}$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes *par unité de longueur*, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et de contrainte de cisaillement dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées sur la figure II.9.

II.5.2.b Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \tag{II.45}$$

$$\begin{aligned}
 M(x, y) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k \kappa(x, y) \right] dz \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y)
 \end{aligned}$$

Soit, en définitive :

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (\text{II.46})$$

avec $B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (\text{II.47})$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (\text{II.48})$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion. Ils sont schématisés sur la figure II.9.

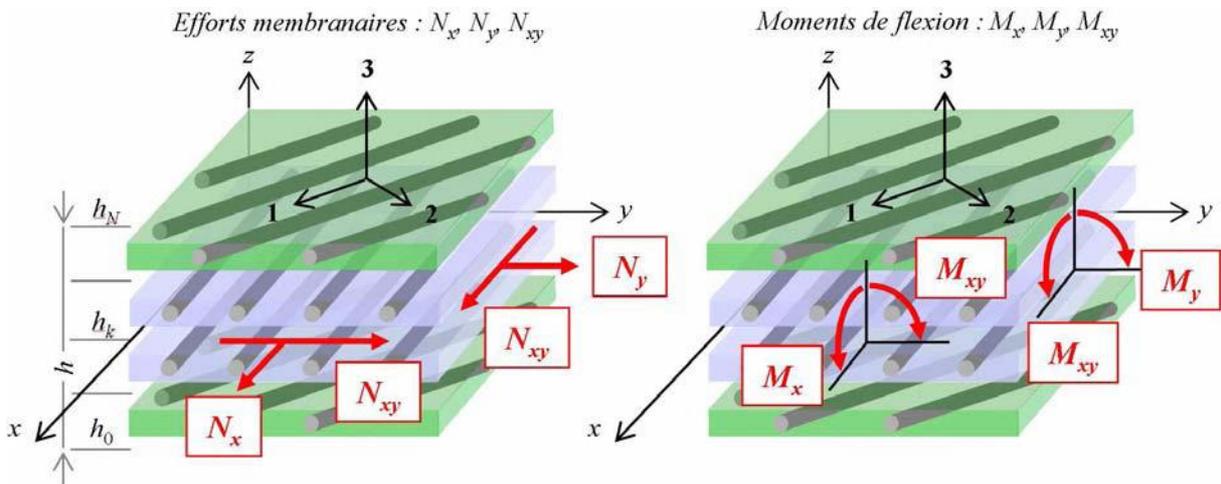


Fig.II.9 : Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion [19].

Connaissant que $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y$ et κ_{xy} sont indépendants de z , les vecteurs forces et moments résultant peuvent être assemblés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice **ABD**) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- ✓ la matrice **A** correspond au comportement de *membrane*,
- ✓ la matrice **D** correspond au comportement de *flexion*,
- ✓ la matrice **B** correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*.

Ainsi, si **B** n'est pas *nul*, un effort de *traction* dans le plan moyen entraîne une *flexion* du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

* Les termes A_{16} et A_{26} correspondent aux couplages plans entre *traction* et *cisaillement*.

* Les termes D_{16} et D_{26} quantifient les couplages entre *flexion* et *torsion* de la plaque stratifiée. Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite.

II.6 Influence de l'empilement des couches :

II.6.1 Couche isotrope :

Dans le cas d'une plaque en matériau *homogène isotrope*, le comportement élastique est décrit par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

Les *résultantes en membrane* (N_x, N_y, N_{xy}) dépendent uniquement des *déformations en membrane* ($\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$) et les *moments de flexion et torsion* (M_x, M_y, M_{xy}) dépendent uniquement des *courbures* du plan moyen ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$). Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

II.6.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux :

Berthelot [3] considère que pour une couche *orthotrope*, d'épaisseur h , dont les axes du matériau sont *confondus* avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

D'où l'expression des coefficients de rigidité du stratifié :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= Q_{ij}h & D_{ij} &= Q_{ij} \frac{h^3}{12} \\ A_{16} &= A_{26} = 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} &= D_{26} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

II.6.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes :

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope *ne coïncident pas* avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Où les coefficients \bar{Q}_{ij} hors axes sont définis en fonction des coefficients Q_{ij} dans les axes du matériau. Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \bar{Q}_{ij}h & D_{ij} &= \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12} \\ A_{16} &= A_{26} = 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} &= D_{26} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion.

Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les *résultantes normales* N_x, N_y dépendent des *déformations axiales* ε_x^0 et ε_y^0 , ainsi que de la *déformation en cisaillement* γ_{xy}^0 . Il existe donc dans ce cas un couplage *traction-cisaillement*.

De la même manière, les composantes des *moments* dépendent toutes des *courbures en flexion* κ_x, κ_y , et de la *courbure en torsion* κ_{xy} . Il existe donc également un *couplage flexion-torsion*.

II.6.4 Stratifiés symétriques :

Selon BERTHELOT [3], Un stratifié est *symétrique* si le plan *moyen* est plan de symétrie.

Deux couches symétriques ont :

- la même matrice de rigidité réduite $[\bar{Q}_{ij}]_k$,
- la même épaisseur h_k ,

Il en résulte que les coefficients B_{ij} de la matrice de rigidité du stratifié sont *nuls*. L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

On remarque qu'il n'existe pas de couplage membrane-flexion dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux. Les stratifiés symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique [2].

II.7) Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté l'étude théorique des Matériau composite et les caractéristiques du mélange renfort-matrice et les théories (théorie classique des stratifie basé

[Chapitre II : Comportement Mécanique Des Plaques Composites Stratifiées]

sur le critère de Kirchhoff) qui nous allons utiliser dans notre travail sous forme des relations et des formules.

Chapitre III :
Étude Théorique Sur Les Différents
Critères D'endommagement.

III.1 Introduction

Par mécanisme de rupture, il faut comprendre tout processus mécanique produisant au sein d'un matériau une "discontinuité" locale de matière appelée fissure. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. L'initiation de la rupture peut être considérée comme la création de microfissures à l'échelle microscopique (celle des constituants) à partir d'un défaut. On parlera de microfissuration. La propagation de la rupture est le résultat de la création de nouvelles surfaces de rupture à l'échelle macroscopique (plusieurs fois celle des constituants), à partir des microfissures existantes. On parlera également de macro fissuration. Dans le cas des matériaux composites, l'initiation de la rupture se produit généralement bien avant l'observation d'un changement du comportement macroscopique [3].

III.2 Propriétés de la rupture :

III.2.1 Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- ❖ la rupture des fibres,
- ❖ la rupture transverse de la matrice,
- ❖ la rupture longitudinale de la matrice,
- ❖ la rupture de l'interface fibre-matrice.

A. la rupture des fibres

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre σ_f atteint la contrainte à la rupture de la fibre σ_{fu} [3].

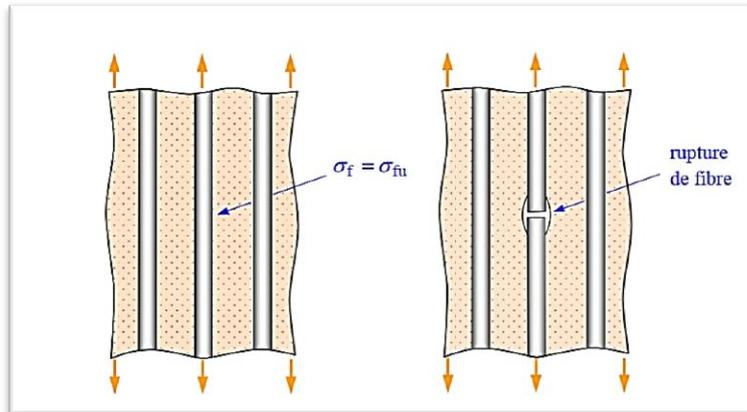


Fig. III. 1 : Rupture de fibre [3].

B. la rupture transverse de la matrice :

Lorsque la contrainte en traction dans la matrice atteint la contrainte à la rupture de la matrice [3].

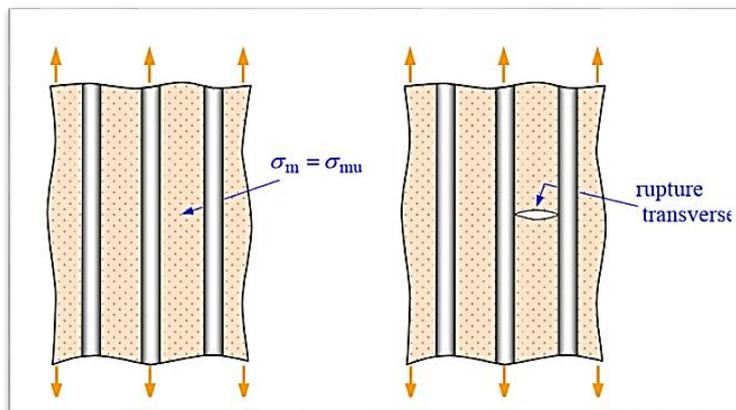


Fig. III. 2 : Rupture transverse de la matrice [3].

C. la rupture longitudinale de la matrice

Lorsque la contrainte de cisaillement dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture [3].

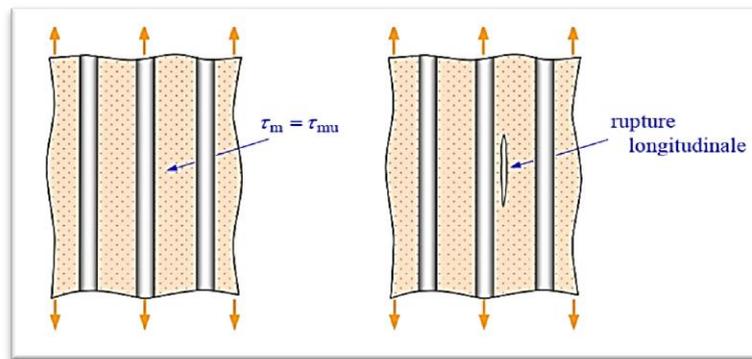


Fig. III. 3 : Rupture longitudinale de la matrice [3].

D. L'interface fibre-matrice

Au voisinage d'une fibre la rupture de la matrice se produit lorsque la contrainte de décohesion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice. Dans le cas contraire, il se produit une rupture par décohesion de l'interface fibre-matrice [3].

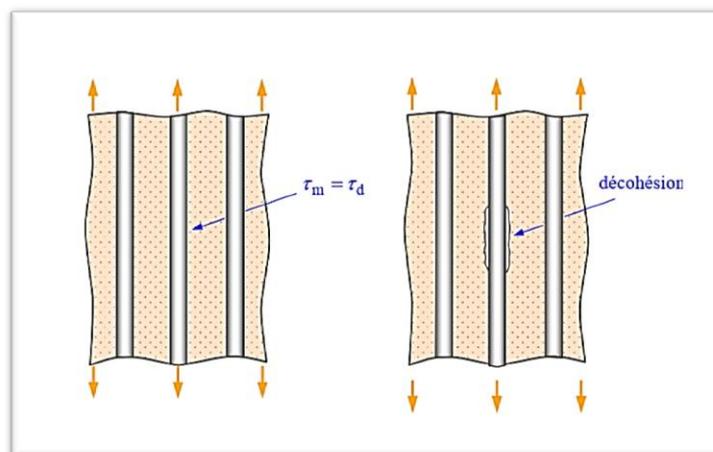


Fig. III. 4 : Décohesion fibre-matrice [3].

III.3 Critères en contraintes maximales

III.3.1 Critères dans les axes principaux :

Les critères en contraintes maximales font intervenir :

X_t, X_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression,

Y_t, Y_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression,

S : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (figure III.05). Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement. Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes (σ_L , σ_T , σ_{LT}) dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme :

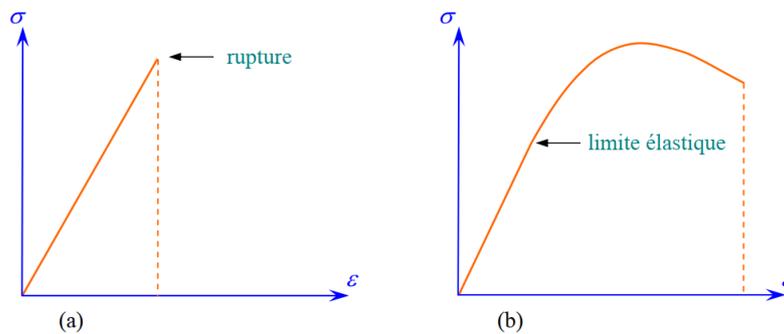


FIG. III. 5 : Comportements fragile et “ductile” d'un matériau [3].

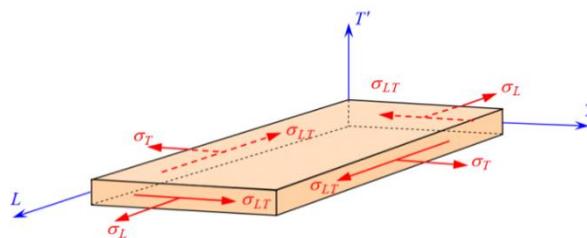


FIG. III. 6 : Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche[3].

$$-X_c < \sigma_L < X_t; \quad (III.1)$$

$$-X_c < \sigma_T < X_t; \quad (III.2)$$

$$-X_c < \sigma_{LT} < X_t. \quad (III.3)$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas. Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état

limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

III.4. Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux

Dans le cas où l'état des contraintes est exprimé dans des axes de référence (x, y, z) (Fig.III.06), il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle θ . Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_l &= \sigma_{xx} \cos^2\theta + \sigma_{yy} \sin^2\theta + 2 \sigma_{xy} \cos \sin \theta, \\ \sigma_t &= \sigma_{xx} \sin^2\theta + \sigma_{yy} \cos^2\theta + 2 \sigma_{xy} \cos \sin \theta, \\ \sigma_{lt} &= (\sigma_{yy} \sigma_{xx}) \sin\theta \cos\theta + \sigma_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta),\end{aligned}\tag{III.4}$$

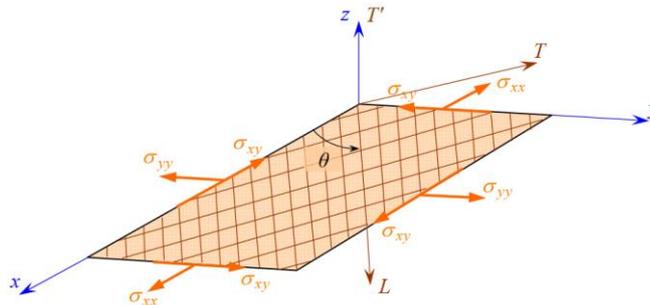


Fig.III.07 : Couche rapportée à des axes de référence quelconques [3].

et les contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}-X_c &< \sigma_{xx} \cos^2\theta + \sigma_{yy} \sin^2\theta + 2 \sigma_{xy} \cos \sin \theta < X_T, \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2\theta + \sigma_{yy} \cos^2\theta + 2 \sigma_{xy} \cos \sin \theta < Y_T, \\ -S &< (\sigma_{yy} \sigma_{xx}) \sin\theta \cos\theta + \sigma_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) < S,\end{aligned}\tag{III.5}$$

$$\sigma_{xu} = \frac{x_c}{\cos^2\theta} , \quad \sigma_{xu} = \frac{y_c}{\sin^2\theta} , \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin\theta \cos\theta} , \quad (\text{III.9})$$

La valeur σ_{xu} étant alors la détermination positive de la contrainte.

III.6 Critères en déformations maximales

III.6.1 Critère dans les axes des matériaux

Les critères en déformations maximales sont transposés des critères en contraintes maximales. Les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations font intervenir :

$X_{\epsilon t}$ ($X_{\epsilon c}$) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal,

$Y_{\epsilon t}$ ($Y_{\epsilon c}$) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal,

S_{ϵ} : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante. Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned} -X_{\epsilon c} < \epsilon l < X_{\epsilon t}, \\ -Y_{\epsilon c} < \epsilon t < Y_{\epsilon t}, \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$$-S_{\epsilon} < \gamma_{lt} < S_{\epsilon}$$

III.6.2 Critères interactifs :

Les critères en contraintes maximales et en déformations maximales ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux : les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment [3].

Des *critères interactifs* ont alors été recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises, utilisé pour les matériaux isotropes. Le critère de Von Mises est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé. C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont parfois appelés *critères énergétiques*.

Toutefois, dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation [3].

III.6.2.1 Théorie générale de Tsai-Wu

III. 6.2.1.1 Formulation

Les critères précédents suffisent généralement pour décrire les divers résultats expérimentaux observés. Toutefois, une des façons d'améliorer la corrélation entre résultats expérimentaux et théoriques est d'accroître le nombre de paramètres des équations théoriques. Ce fait, associé à la possibilité de représenter les critères de rupture sous forme tensorielle, a conduit S.W. Tsai et E.M. Wu [20] à admettre que la rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée [3] :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j=1,2,\dots, 6,$$

Où les constantes F_i et F_{ij} sont les composantes de deux tenseurs respectivement de rang 2 et de rang 4. La notation contractée usuelle est utilisée dans cette relation pour les contraintes rapportées aux axes des matériaux :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} = \sigma_l, & \sigma_2 &= \sigma_{22} = \sigma_t, & \sigma_3 &= \sigma_{33} = \sigma_{lt}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23} = \sigma_{tt'}, & \sigma_5 &= \sigma_{13} = \sigma_{lt'}, & \sigma_6 &= \sigma_{12} = \sigma_{lt}, \end{aligned}$$

L'équation s'écrit sous forme développée suivant :

$$\begin{aligned} &F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 \\ &+ F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 \\ &+ F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 \\ &+ F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 \\ &+ F_{44} \sigma_4^2 + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 \\ &+ F_{55} \sigma_5^2 + 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 \end{aligned}$$

$$+F_{66}\sigma_6^2 = 1 \quad (\text{III.11})$$

Les termes linéaires F_i prennent en compte la différence éventuelle du comportement du matériau en traction et en compression. Les termes quadratiques F_{ij} définissent un ellipsoïde dans l'espace des contraintes et tiennent compte des interactions entre les contraintes σ_i et σ_j . L'intérêt de la formulation développée par Tsai-Wu réside dans :

- 1) l'invariance de la forme de la relation (III.11) dans tout changement de base,
- 2) la transformation du critère suivant les lois de transformation des tenseurs σ_i , σ_{ij} ou F_i , F_{ij} ,
- 3) les propriétés de symétrie des tenseurs F_i , F_{ij} similaires à celles des constantes d'élasticité.

III. 6.2.1.2 Expression des constantes :

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas d'un matériau composite orthotrope soumis à un état de contraintes planes dans le plan $(1, 2) = (L, T)$. La relation s'écrit alors :

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1, \quad (\text{III.12})$$

Ou :

$$F_1\sigma_l + F_2\sigma_t + F_6\sigma_{lt} + F_{11}\sigma_l^2 + F_{22}\sigma_t^2 + F_{66}\sigma_{lt}^2 + 2F_{12}\sigma_l\sigma_t = 1, \quad (\text{III.13})$$

Les paramètres F_i et F_{ij} peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais.

Dans le cas d'un essai de traction suivant la direction L , la contrainte à la rupture X_t est telle que :

$$F_1 X_t + F_{11}X_t^2 = 1 \quad (\text{III.14})$$

et dans un essai de compression :

$$F_1 X_c + F_{11}X_c^2 = 1 \quad (\text{III.15})$$

De ces deux relations, nous tirons :

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad (\text{III.16})$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}. \quad (\text{III.17})$$

Par analogie, nous avons de même :

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \quad (\text{III.18})$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}.$$

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan (L, T) (figure 12.31a), la contrainte à la rupture $SL+T$ est telle que :

$$F_6 S_{lt}^+ + F_{66} S_{lt}^{+2} = 1. \quad (\text{III.19})$$

En inversant le sens des contraintes (figure 12.31b), la contrainte à la rupture $SL-T$ est telle que :

$$F_6 S_{lt}^- + F_{66} S_{lt}^{-2} = 1. \quad (\text{III.20})$$

Ces deux relations conduisent à :

$$F_6 = \frac{1}{F_6 S_{lt}^+} - \frac{1}{F_6 S_{lt}^-}, \quad F_{66} = \frac{1}{S_{lt}^+ S_{lt}^-}. \quad (\text{III.21})$$

La contrainte à la rupture étant indépendante du signe de la contrainte de cisaillement, nous avons :

$$S_{lt}^+ = S_{lt}^- = S_{lt} \quad (\text{III.22})$$

Il en résulte que dans le cas de matériaux orthotropes :

$$\begin{aligned} F_6 &= 0 \\ F_{66} &= \frac{1}{S_{lt}^2} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

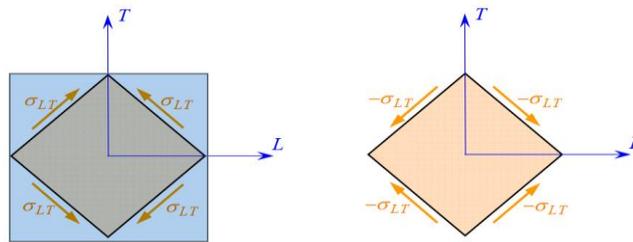


Fig. III.08 : Essais de cisaillement [3].

Il reste à déterminer le paramètre de couplage F_{12} . Ce paramètre peut être déterminé dans un essai bi-axial, par exemple une traction bi-axiale. Un tel essai est effectué en exerçant la même contrainte dans les directions 1 et 2 du matériau. Les contraintes sont alors : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, les autres contraintes étant nulles. Le critère s'écrit :

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1 \quad (\text{III.24})$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]. \quad (\text{III.25})$$

La valeur de F_{12} correspond à la valeur σ de la contrainte mesurée lors de la rupture dans l'essai de traction biaxiale.

Dans la pratique, le coefficient d'interaction F_{12} peut également être déterminé dans un essai de traction (ou compression) à 45° des axes du matériau orthotrope. Dans ce cas, les contraintes dans les axes du matériau sont :

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 &= \frac{\sigma_{45}}{2} \\ \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Où σ_{45} est la contrainte de traction exercée. Le critère s'écrit dans ce cas :

D'où l'expression du paramètre F_{12} obtenue dans cet essai :

$$F_{12} = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left[1 - \frac{\sigma_{45}}{2} \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{\sigma_{45}}{4} \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S_{lt}^2} \right) \right] \quad (\text{III.27})$$

La valeur de F_{12} correspond à la valeur de σ_{45} mesurée lors de la rupture dans un essai de traction à 45° .

III. 6.2.1.3 Critère de Tsai-Wu en contraintes planes

En tenant compte des résultats précédents, le critère de Tsai-Wu, dans un état de contraintes planes, s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_l + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_t + \frac{\sigma_l^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_t^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{lt}^2}{S_{lt}^2} + 2F_{12}^* + \frac{\sigma_l \sigma_t}{X_t X_c} = 1 \quad (\text{III.28})$$

En introduisant le coefficient de couplage F_{12}^* , exprimé suivant :

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 - \left[X_C - X_t + \frac{X_C - X_t}{Y_C - Y_t} (Y_C - Y_t) \right] \sigma + \left(1 + \frac{X_C - X_t}{Y_C - Y_t} \sigma^2 \right) \right\} \quad (\text{III.29})$$

Ou

$$F_{12}^* = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left\{ 1 - \left[X_C - X_t + \frac{X_t - X_C}{Y_t - Y_C} (Y_C - Y_t) \right] \frac{\sigma_{45}^2}{2} + \left(1 + \frac{X_t - X_C}{Y_t - Y_C} + \frac{X_t X_C}{S_{lt}^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{4} \right\} \quad (\text{III.30})$$

Où σ et σ_{45} sont les contraintes à la rupture déterminées, respectivement, dans un essai bi axial et dans une traction à 45° . Bien souvent, le coefficient de couplage F_{12}^* est considéré comme un coefficient empirique, ajusté en fonction des résultats expérimentaux.

Dans le cas où le coefficient de couplage est pris égal à $-\frac{1}{2}$:

$$F_{12}^* = -\frac{1}{2}, \quad (\text{III.31})$$

Le critère de Tsai-Wu (12.65) en contraintes planes s'écrit :

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_C} \right) \sigma_l + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma_t + \frac{\sigma_l^2}{X_t X_C} + \frac{\sigma_t^2}{Y_t Y_C} + \frac{\sigma_{lt}^2}{S_{lt}^2} - \frac{\sigma_l \sigma_t}{X_t X_C} = 1, \quad (\text{III.32})$$

III.7 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les définitions sur les différents mécanismes et les critères de rupture. Dans ces critères de rupture, il y a deux familles des théories : la théorie non interactive qui ne permet pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, exclut l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux et la théorie interactive qui tient en compte l'interaction entre les contraintes et les déformations (Théorie générale de Tsai-Wu). Dans cette étude nous allons utiliser la théorie interactive. Les mécanismes de rupture sont étudiés numériquement dans le chapitre suivant.

Chapitre IV :
Formulation Elément Fini et
Programmation.

IV.1 Introduction :

La modélisation de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature [20].

Seule la méthode des éléments finis est susceptible de résoudre sans grande difficulté les problèmes de plaque composite de forme d'appuis et de mise en charge quelconques [3].

La méthode des éléments finis a été établie comme un outil très performant pour la résolution des systèmes d'analyse des structures et les sciences d'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique ...) permettent de décrire le comportement de système physique grâce à des équations aux dérivées partielles.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation d'un élément fini membranaire et flexionnelle destiné à modéliser des poutres stratifiées travaillant uniquement dans leur plan, en utilisant le principe des *Travaux virtuels*, qui nous permettra de trouver le vecteur force $\{f\}$ et la matrice de rigidité globale $[K]$.

Suite à cette formulation nous avons écrit un programme en langage *FORTRAN77* qui sera utilisé pour calculer les déplacements et les contraintes, ensuite nous allons procéder à la validation du programme en comparant les résultats de celui-ci avec les résultats analytiques.

IV.2 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis :

Les avantages de la MEF par rapport aux autres méthodes numériques sont :

- ✓ La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse ;
- ✓ Elle peut être applicable à une variété de problèmes physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque ;
- ✓ Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite ;
- ✓ Toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites) [21].

IV.3 Elément utilisé :

L'élément utilisé c'est un élément rectangulaire de (24) degré de liberté. La figure IV 01 montre la géométrie de l'élément utilisée, les dimensions (a et b) et l'épaisseur (t).

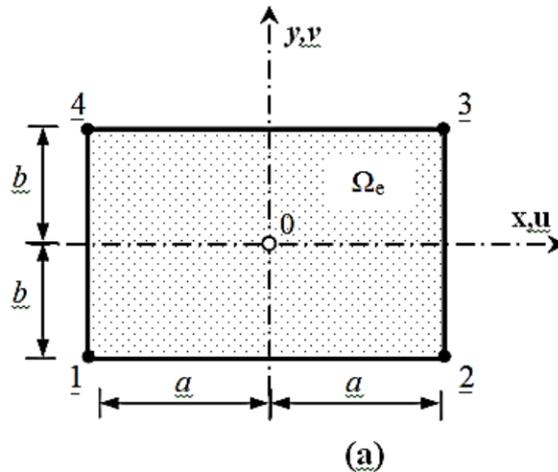


Figure IV 01 : Elément fini rectangulaire d'élasticité plane : (a) géométrie et axes ; (b) nœuds et degrés de liberté

IV.4 Fonctions de déplacements de l'élément :

L'élément possède (4) nœuds avec (6) degrés de libertés chacun, ces degrés de liberté sont :

- Deux degré de liberté dans le plan (x,y) qui sont (u et v)
- Quatre degrés de libertés hors plan qui sont : $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$.

➤ **En membrane :**

$$u(x,y) : \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x,y) : \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \tag{IV.01}$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Nœud (1)} = (x=0, y=0) \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (2)} = (x=a, y=0) \rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (3)} = (x=a, y=b) \rightarrow \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (4)} = (x=0, y=b) \rightarrow \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\{\delta_m^e\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8} \{\alpha_i\}_{8 \times 1} \Rightarrow \{\alpha_i\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8}^{-1} \{\delta_m^e\}_{8 \times 1} = \{\delta_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.02})$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{\delta_m^e\} \quad (\text{IV.03})$$

Calcul des déformations :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{\alpha_i\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [Q] \{\alpha_i\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [Q][X]^{-1} \{\delta_m^e\} \Rightarrow$$

$$[B_m] \{\delta_m^e\} \quad (\text{IV.04})$$

alors :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (IV.05)$$

Donc la matrice $[B_m]$ Relie les déformations membranaire avec les déplacements nodaux.

➤ **En flexion :**

$$W(x,y) = [\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3]$$

$$W(x,y) = \{p(x,y)\} \{\alpha\}^T \quad (IV.06)$$

Avec

$$\{\alpha\}^T = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \alpha_{16})$$

$$\{p(x,y)\} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, x^2 y^2, xy^3, x^3 y^2, x^2 y^3, x^3 y^3\} \quad (IV.07)$$

L'élément plaque nécessite donc quatre degrés de liberté par nœud

$$w_i = \left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, i=1,4 \quad (IV.08)$$

Ce qui explique l'introduction de la dérivée seconde par rapport à x et y

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, y) \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{bmatrix} \times \{\alpha_i\}, i=1,16$$

Nœud (1) : (x=0, y=0) →

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, \quad i=1,16$$

(IV.09)

Nœud (2) : (x=a, y=0) →

$$\left\{ \begin{array}{l} W_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,16 \text{ (IV.10)}$$

Nœud (3) : (x=a, y=b) →

$$\left\{ \begin{array}{l} W_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \\ \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab^2 & b^2 & 0 & 3a^2b & 2ab^2 & b^3 & 3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 2b^2 & a^3 & 2a^2b & 3ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 03b^2 & 6a^2b & 6ab & 9a^2b^2 \end{bmatrix} \times \{\alpha_i\}, \text{ (IV.11)}$$

Nœud (4) : (x=0, y=b) →

$$\left\{ \begin{array}{l} w_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,16 \text{ (IV.12)}$$

$$\{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16} \{\alpha_i\}_{16 \times 1} \Rightarrow \{\alpha_i\} = [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1} \text{ (IV.13)}$$

$\{w(x, y)\} =$

$$\{p(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\} \text{ (IV.14)}$$

- $w_1^*(x, y) = \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_1 + (-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x1} + \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y1} + (-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{xy1}$
- $w_2^*(x, y) = \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_2 + (-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x2} + \left(3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y2} + (-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)) y \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{xy2}$
- $w_3^*(x, y) = \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_3 + (-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x3} + \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y3} + (-x \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right)^2 \theta_{xy3}$
- $w_4^*(x, y) = \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_4 + (-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x4} + \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y4} + (-x \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2) y \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy4}$

$$\{w(x, y)\} = [N_1, N_2, N_3, N_4 \dots \dots \dots N_{13}, N_{14}, N_{15}, N_{16}] \{\delta_f^e\} \text{ et}$$

IV.5 Relation cinématiques :

L'élément utilisé est basé sur la théorie de Kirchhoff, alors les déplacements dans le plan et hors le plan sont données par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \tag{IV.15}$$

Les déformations sont données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z k_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z k_y \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z k_{xy} \end{aligned} \tag{IV.16}$$

Avec k_x , k_y et k_{xy} sont les courbures.

$$\{k(x, y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{p(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \{p(x, y)\}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\{k(x, y)\} = [Q]_{3 \times 16} [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1} \tag{IV.17}$$

IV.6 Loi de comportement :

D'après Berthelot, les résultantes des forces, les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{Ou} \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left[\bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{ij} \right]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

IV.7 Détermination de la matrice de rigidité :

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + V \quad (\text{IV.19})$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation.

$$\partial \Pi = \partial U + \partial V \quad (\text{IV.20})$$

✚ Travail virtuels des efforts :

$$\iint \{ \partial \delta \}^T \{ [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \} \{ \delta \} ds \quad (\text{IV.21})$$

On pose

$$[k^e] = \iint \{ [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \}$$

La matrice $[k^e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[k^e] = [k_1^e] + [k_2^e] + [k_3^e] + [k_4^e] \quad (\text{IV.22})$$

Avec :

$$\begin{aligned} [k_1^e] &= [B_m]^T [A][B_m] : \text{matrice de rigidité élémentaire membranaire,} \\ [k_2^e] &= [B_m]^T [B][B_f] : \text{matrice de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion,} \\ [k_3^e] &= [B_f]^T [B] [B_m] : \text{matrice de rigidité élémentaire de couplage flexion- membrane,} \\ [k_4^e] &= [B_f]^T [D] [B_f] : \text{matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.} \end{aligned}$$

Le travail virtuel s'écrit :

$$\delta U = \{\partial \delta\}^T [k^e] \{\delta\} \quad (IV.23)$$

$[k^e]$ est la matrice de rigidité élémentaire, la matrice de rigidité globale de la structure s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

Travail virtuel de forces extérieures

Soit $\{\partial \delta\}$ le vecteur des déplacements virtuels, alors le travail des forces appliquées à l'élément est donné par :

$$\delta V = \{\partial \delta\}^T \{f^e\} \quad (IV.24)$$

En équilibre, les travaux virtuels sont égaux, alors on aura :

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta V \\ \{\partial \delta\}^T [k^e] \{\delta\} &= \{\partial \delta\}^T \{f^e\} \end{aligned} \quad (IV.25)$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante

$$[k^e] \{\delta\} = \{f^e\} \quad (IV.26)$$

Après assemblage, on obtient l'équation d'équation d'équilibre globale

$$[k_G] \{\delta_G\} = \{f_G\} \quad (IV.27)$$

Où $[k_G]$ est la matrice de rigidité global, $\{\delta_G\}$ est le vecteur déplacement global $\{f_G\}$ est le vecteur force global.

IV.8 Les étapes à suivre afin de calculer la charge de rupture :

1. Calculer les valeurs de la matrice de rigidité réduite $[Q]$ pour chaque pli à l'aide de ses quatre modules élastiques $E_1 E_2 \nu_{12}$ et G_{12}
2. Trouver les valeurs de la matrice de rigidité réduite transformée $[\bar{Q}]$ pour chaque pli, en utilisant la matrice calculée à l'étape 1 et l'angle du pli.
3. Avoir l'épaisseur t_k , de chaque pli, trouver les coordonnées de la surface supérieure et inférieure h_i , $i=1 \dots, n$, de chaque pli en utilisant l'équation suivante :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

L'emplacement de plan médian est $h/2$, à partir de la surface supérieure ou inférieure du stratifié, la coordonnée z de chaque surface de pli k (supérieure et inférieure) est donné par :

1. Pli 1 :

$$h_0 = -\frac{h}{2} \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_1 = -\frac{h}{2} + t_1 \text{ (Surface inférieure).}$$

2. Pli k : (k=2,3,..., n-2, n-1)

$$h_{k-1} = -\frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} t_i \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_k = -\frac{h}{2} + \sum_{i=1}^k t_i \text{ (Surface inférieure).}$$

3. Pli n :

$$h_{n-1} = \frac{h}{2} - t_n \text{ (Surface supérieure).}$$

$$h_n = \frac{h}{2} \text{ (Surface inférieure).}$$

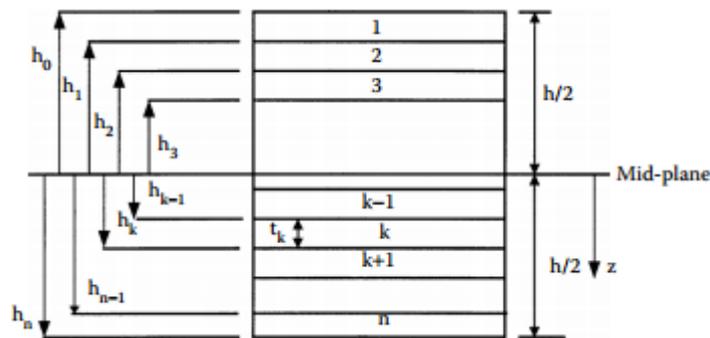


Fig.IV.2 : L'emplacement des plis dans un stratifié.

Considérons un stratifié composé de n couches comme illustré à la figure IV.3. Chaque couche a une épaisseur t_k . donc, l'épaisseur totale de ce stratifié 'h' est :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k \quad \text{(IV.28)}$$

4. Utiliser les matrices de rigidité transformée cette l'étape 2 et l'emplacement de chaque couche, de l'étape 3, pour trouver les trois matrices de rigidité [A], [B] et [D].
5. Remplacer les valeurs de la matrice de rigidité trouvées à l'étape 4 et les forces et moments appliqués dans l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.29)}$$

6. Résolvez les six équations simultanées pour trouver les déformations et les courbures du plan moyen.
7. Maintenant que l'emplacement de chaque couche est connu, trouver les déformations globale dans chaque couche en utilisant l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

8. Pour trouver les contraintes globales, utilisez la relation contrainte-déformation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

9. Pour trouver les déformations locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0/2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

10. Pour trouver les contraintes locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

D'après avoir les contraintes locales dans chaque couche, nous pouvons utiliser l'un des critères de rupture afin de calculer la charge admissible. Dans ce travail nous allons utiliser le critère de Tsai-Wu.

IV.9 Validation de l'élément :

Dans cette section, nous allons mettre en œuvre l'extension de l'élément proposée (R4) et montrer qu'il est efficace pour étudier plus tard le comportement à la rupture des poutres stratifiées. Les poutres qui ont été choisies pour cette validité sont des poutres isotropes et des poutres stratifiées.

IV.9.1 Poutre isotrope encastree à coté et libre à l'autre :

La première poutre test est une poutre isotrope encastree à une extrémité et libre à l'autre. La poutre est chargée par une charge concentrée comme montre la Fig. IV.4. Les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques de cette poutre sont regroupées au (tableau IV.1).

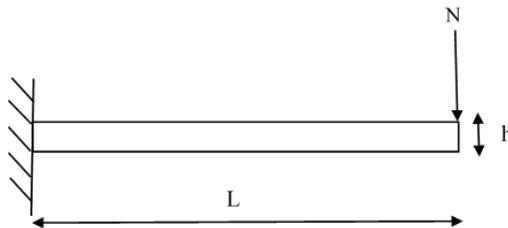


Fig.IV.03 : Poutre isotrope encastree à coté et libre à l'autre.

Tableau IV.1 : Propriétés géométriques et mécaniques de la première poutre test.

E (MPa)	ν	G (MPa)	L (mm)	b (mm)	h (mm)	P (N)
210000	0.3	80769.23	1000	200	120	2000

Les valeurs maximales du déplacement sont calculées théoriquement par la relation suivante :

$$\omega = \frac{q.l^3}{3.E.I} \quad (IV.34)$$

Nous allons maintenant comparer cette dernière avec les résultats donnés par notre élément dans le (tableau IV.2), afin d'assurer que le programme donne des résultats compatibles avec les résultats théoriques.

Tableau IV.2 : Déplacement maximum pour la poutre isotrope.

Maillage	Le présent élément	Erreur (%)
10*4	0.1099	2.984E-3
Déplacement théorique		0.11023

Si on compare les résultats obtenus en utilisant de notre élément avec les résultats analytiques, on constate que les résultats sont pratiquement identiques avec une erreur de 2.98×10^{-3} .

IV.9.2 Poutre composite stratifiée simplement appuyée :

La deuxième structure test est une poutre composite stratifiée simplement appuyée, chargée par une charge concentrée $q=100$ N. l'épaisseur de chaque couche est 2 mm. Les dimensions et les propriétés mécaniques de la deuxième poutre sont regroupées au (tableau IV.3).

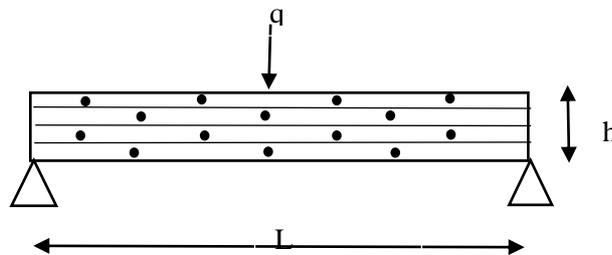


Fig.IV.4 : Poutre composite simplement appuyée.

Tableau IV.3 : Propriétés géométriques et mécaniques de la deuxième poutre test.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	q (N)	L (mm)	b (mm)	h (mm)	L'orientation des fibres
123^{E7}	8.5^{E7}	4.1^{E7}	0.25	100	1000	200	12	[90 ₂ /0] _s

Les valeurs maximales du déplacement théorique sont calculées par la relation suivante :

$$\omega = \frac{q.l^3}{48 .Eeq.I} \quad (IV.35)$$

Avec $E_{eq} = 12 / (D_{11} * h^3)$

Pour différents maillages, la convergence du déplacement obtenu est regroupée dans le tableau (IV.4) et tracée sous forme d'une courbe (figure IV.4).

Tableau IV.4 : Déplacements pour différentes configuration de maillage

Maillage	Le présent	
	Elément	Erreur (%)
4*2	0.56671^{E-3}	5.114^{E-4}
8*4	0.56676^{E-3}	4.232^{E-4}
10*4	0.56677^{E-3}	4.056^{E-4}
12*6	0.56678^{E-3}	3.880^{E-4}
14*8	0.56679^{E-3}	3.703^{E-4}
Déplacement théorique		0.567^{E-3}

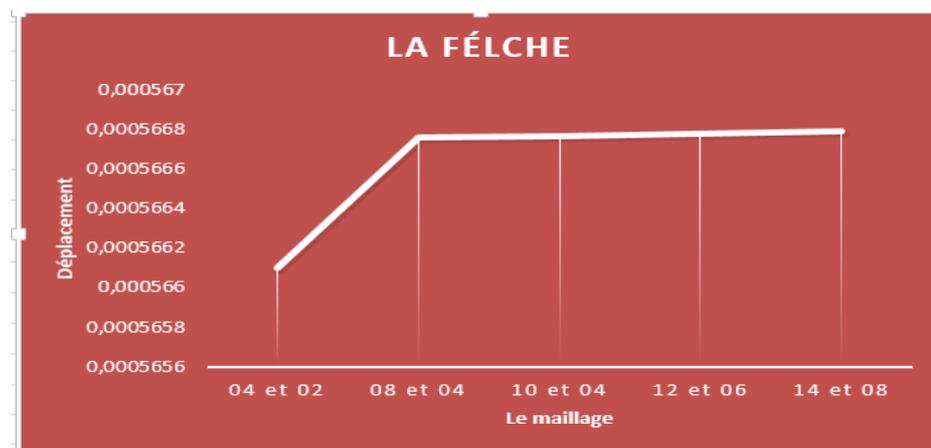


Fig. IV.5 : Convergence du déplacement pour une poutre composite simplement appui

D'après les résultats donnés par la formule analytique du déplacement et les résultats obtenus par notre élément, on peut observer que notre élément converge par une manière très rapide vers le résultat obtenus analytiquement et qui montre la performance de l'élément utilisé.

VI.9.3 Poutre composite stratifiée encastree sur deux côtés :

La troisième structure test est une poutre composite stratifiée encastree sur les deux côtés, chargée par une charge flexionnelle $q=100$ N, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau IV.5).

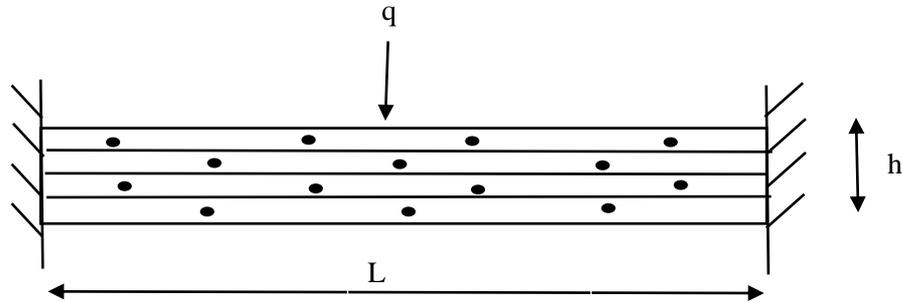


Fig.IV.6 : Poutre composite stratifiée encastree sur les deux côtés.

Tableau IV.5 : Propriétés géométriques et mécaniques de la troisième poutre test.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	q (N/mm)	L (mm)	b (mm)	h (mm)	L'orientation des fibres
39000	8600	3800	0.28	100	1000	200	4	[0/90/45/0]s

Les valeurs maximales du déplacement théorique sont calculées par la relation suivante :

$$\omega = \frac{p \cdot (l/2)^6}{3 \cdot Eeq \cdot I \cdot l^3} \quad (IV.36)$$

Pour un maillage de 10x4, les déplacements obtenus sont regroupés dans le tableau (IV-6).

Tableau IV.6 : Déplacement maximal pour la poutre stratifiée.

Maillage	Le présent élément	Erreur (%)
10*4	17.649	0.0101
Déplacement théorique		17.83

D'après le tableau IV.6, on remarque que les résultats de nôtre modélisation sont très proches au résultat obtenu analytiquement. Ces résultats montrent la performance de l'élément utilisé.

VI.10 Conclusion :

Le présent chapitre a été consacré à la validation de la précision de l'élément fini par le biais de plusieurs tests analytiques. A travers les résultats trouvés, on a vu que l'élément présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence. Nous avons vu que l'élément R4 est capable d'analyser correctement les déplacements des poutres isotropes et les poutres composites, et qui montre qu'il est efficace pour étudier plus tard le comportement à la rupture des poutres composites stratifiées.

Chapitre V :
Etude Paramétrique

V.1 introduction

Après avoir validé l'élément R4 et s'être assuré du bon fonctionnement de notre programme, nous allons maintenant exploiter ce dernier pour analyser numériquement l'influence de stratification des couches sur la charge de rupture.

Afin d'évaluer l'effet de l'orientation des fibres sur la charge de rupture, on propose de procéder à une étude paramétrique, qui a comme objectif de déterminer l'influence de l'orientation des fibres et de la stratification des couches sur la valeur maximale de la charge de rupture et les zones des points d'endommagement.

V.2 Poutre stratifiée simplement appuyé à coté et libre à l'autre chargée par une charge de traction.

La quatrième structure test est une poutre composite stratifiée avec quatre couches, chargée par une charge membranaire $N_x=100$, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau V.1). L'épaisseur de chaque couche est 1 mm.

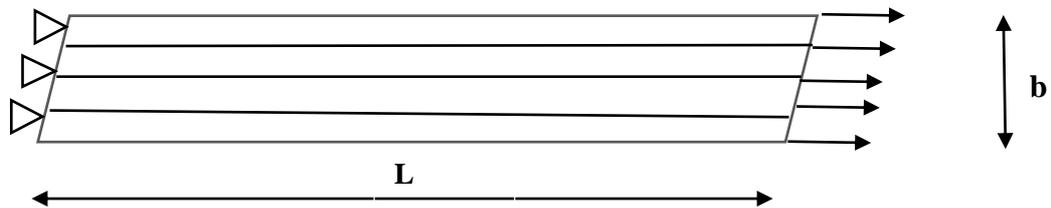


Fig.V.1 : Poutre composite simplement appuyé à coté et libre à l'autre chargée par une charge de traction.

Tableau V.1 : Propriétés géométriques et mécaniques de la quatrième poutre test.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	N_x (N/mm)	L (mm)	h (mm)	b (mm)	L'orientation des fibres
141000	9340	4500	0.35	100	1000	4	100	[0/90]_s
X_t (MPa)	Y_t (MPa)	X_c (MPa)	Y_c (MPa)	S (MPa)				
1500	180	1000	240	150				

Dans cet exemple, notre poutre soumise à une charge de traction varie de 100 à 3500 N/mm.

Tableau V.2 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 100.

charge	Déplacement	Couche	Coeff de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
100	0.33051*10 ⁻²	TOP1	3357.2163		×
		BOT1	3357.2163		×
		TOP2	5678.898		×
		BOT2	5678.898		×
		TOP3	5678.898		×
		BOT3	5678.898		×
		TOP4	3357.2163		×
		BOT4	3357.2163		×

$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$T_{ \perp}$	Failure Criteria	RF _{min}	Failure Type
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
-0,01	0,031	-0,0	TsaiWu	5678,899	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure
0,469	0,01	0,0	TsaiWu	3357,216	Failure

Tableau V.3 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 3500.

Charge	Déplacement	Couche	Coeff de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
3500	1.156802*10 ¹	TOP1	0.959	×	
		BOT1	0.959	×	
		TOP2	1.623		×
		BOT2	1.633		×
		TOP3	1.623		×
		BOT3	1.623		×
		TOP4	0.959	×	
		BOT4	0.959	×	

$\sigma_{ }$	σ_{\perp}	$T_{ \perp}$	Failure Criteria	RF _{min}	Failure Type
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
-33,387	107,268	-0,0	TsaiWu	1,623	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure
1642,732	33,387	0,0	TsaiWu	0,959	Failure

D'après les tableaux, on peut observer que :

- La charge de rupture est 3500 N/mm, pour une plaque composite $[0/90]_s$ et le déplacement correspondant est 11.56802.
- Les couches endommagées sont les couches numéro 1 et 4.
- Les résultats numériques obtenus en utilisant notre élément sont identiques aux ceux obtenus analytiquement en utilisant un logiciel pour les calculs analytiques.

V.3 Poutre composite stratifiée encasté sur deux côtés :

La structure test est une poutre composite stratifiée encastée sur les deux côtés. Le nombre des couches dans cette poutre est 4 couches (voir Fig.V2). L'épaisseur de chaque couche est 0.5 mm. Les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableauV.4).

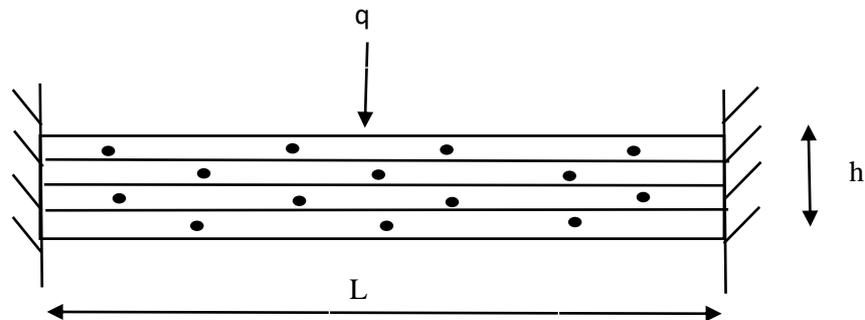


Fig.V.2 : Poutre composite stratifiée encastée sur les deux côtés.

Tableau V.4 : Propriétés géométriques et mécaniques de la cinquième poutre test.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	L (mm)	h (mm)	b (mm)	L'orientation des fibres
141000	9340	4500	0.35	1000	2	100	$[0/90]_s$
X_t (MPa)	Y_t (MPa)	X_c (MPa)	Y_c (MPa)	S (MPa)			
1500	180	1000	240	150			

Dans cet exemple, notre poutre soumise à une charge concentrée varie de 100 à 550 N. A travers ce test, nous souhaitons de déterminer la charge maximale qui peut cette poutre supportée. D'une autre part, nous voulons déterminer les points d'endommagement, la couche endommagée et les mécanismes de rupture pour chaque configuration de stratification.

Pour un maillage de 10*4, les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux (V-5 et V-6).

- **Pour une charge q=100 N.**

Tableau V.5 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 100 N.

Charge	Déplacement	Couche	Coeff. de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
100	62.407	TOP1	4.970		×
		BOT1	9.941		×
		TOP2	23.452		×
		BOT2	1*10 ¹⁰		×
		TOP3	1*10 ¹⁰		×
		BOT3	26.127		×
		TOP4	9.967		×
		BOT4	4.983		×

- **Pour une charge q=550 N**

Tableau V.6 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 550 N.

Charge	Déplacement	Couche	Coeff. de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
550	343.24	TOP1	0.904	×	
		BOT1	1.808		×
		TOP2	4.264		×
		BOT2	1*10 ¹⁰		×
		TOP3	1*10 ¹⁰		×
		BOT3	4.635		×
		TOP4	1.812		×
		BOT4	0.906	×	

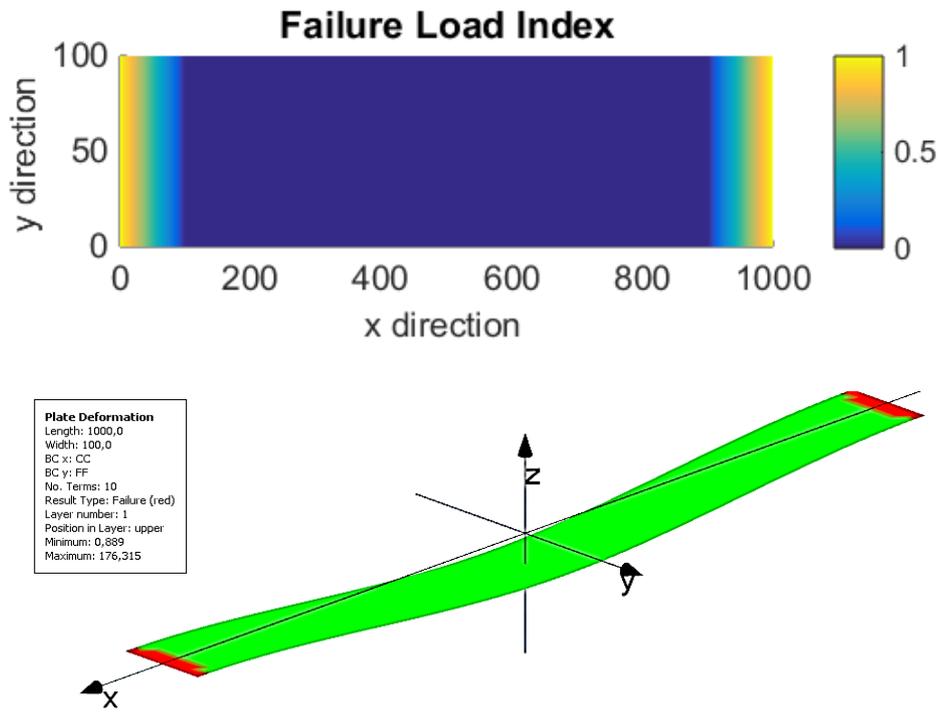


Fig.V.3 : Les mécanismes de rupture de la première couche (surface supérieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite $[0/90]_s$.

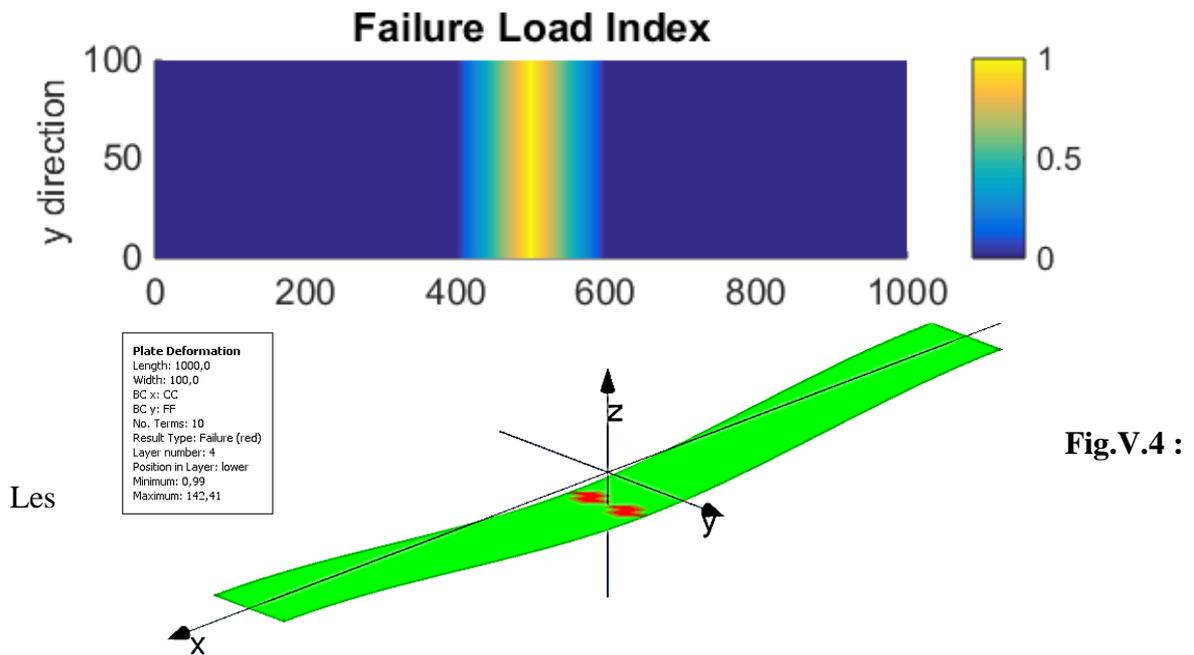


Fig.V.4 :

mécanismes de rupture de la dernière couche (surface inférieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite $[0/90]_s$.

D'après les tableaux et les figures, on peut observer que :

- La charge de rupture est 550 N, pour une poutre composite $[0/90]_s$ et le déplacement correspondant est 343.24.
- Les couches endommagées sont les couches numéro 1 et 4.
- Les surfaces endommagées sont la surface supérieure pour la couche 1 et la surface inférieure pour la couche numéro 4 (les zones de traction).

V.4 Poutre stratifiée encastree $[90]_4$:

La dernière poutre que nous présentons ici, est analogue à celle étudiée à la section précédente, ce que veut dire que les propriétés mécaniques et géométriques sont celles présentées au (tableau V.4). Mais dans ce cas, l'orientation de toutes les fibres est 90° . A travers ce test, nous souhaitons analyser l'influence de la stratification des couches sur les charges et les mécanismes de rupture. Dans cet exemple, notre poutre soumise à une charge concentrée varie de 50 à 110 N.

- **Pour une charge $q=50$ N.**

Tableau V.7 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 50 N.

Charge	Déplacement	Couche	Coeff. de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
50	417.47	TOP1	1.9267		×
		BOT1	3.8535		×
		TOP2	3.8535		×
		BOT2	$1.0 \cdot 10^{10}$		×
		TOP3	$1.0 \cdot 10^{10}$		×
		BOT3	3.9548		×
		TOP4	3.9548		×
		BOT4	1.977		×

- Pour une charge $q=110$ N.

Tableau IV.8 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche – la charge appliquée est 110 N.

Charge	Déplacement	Couche	Coeff. de rupture	Rupture ?	
				Oui	Non
110	918.43	TOP1	$8.758 \cdot 10^{-1}$	×	
		BOT1	1.751		×
		TOP2	1.751		×
		BOT2	$1.0 \cdot 10^{10}$		×
		TOP3	$1.0 \cdot 10^{10}$		×
		BOT3	1.797		×
		TOP4	1.797		×
		BOT4	$9.036 \cdot 10^{-1}$	×	

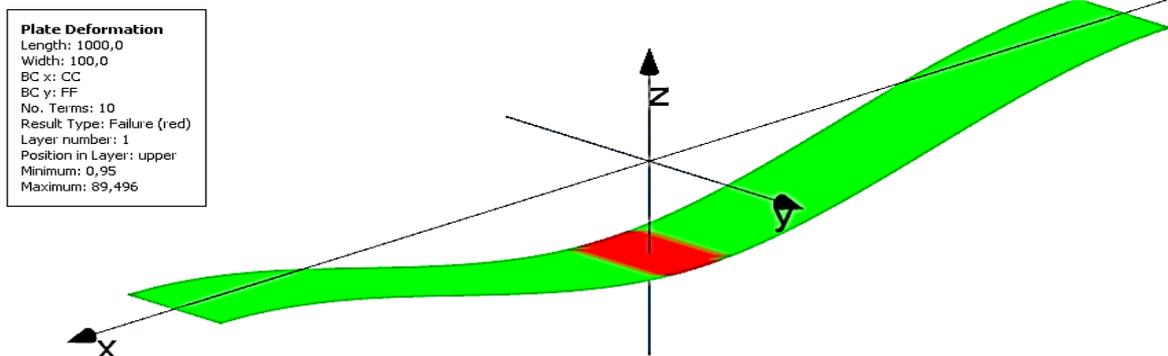
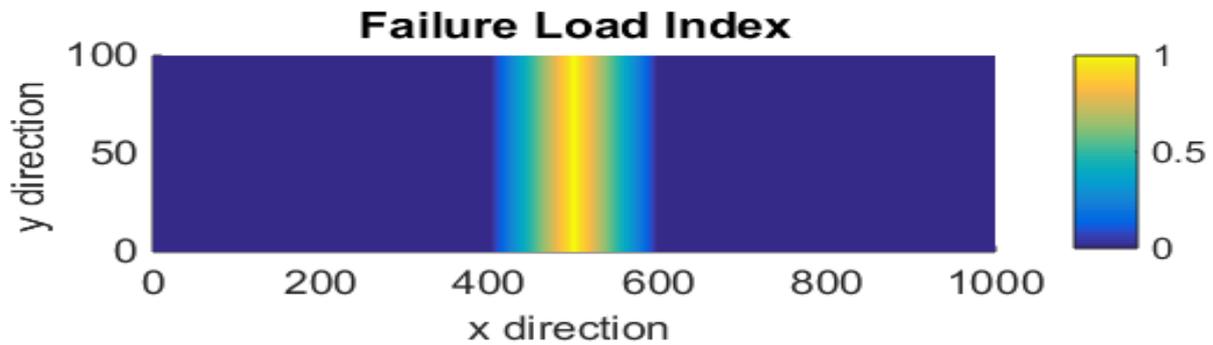


Fig.V.5 : Les mécanismes de rupture de la première couche (surface supérieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite [90]₄.

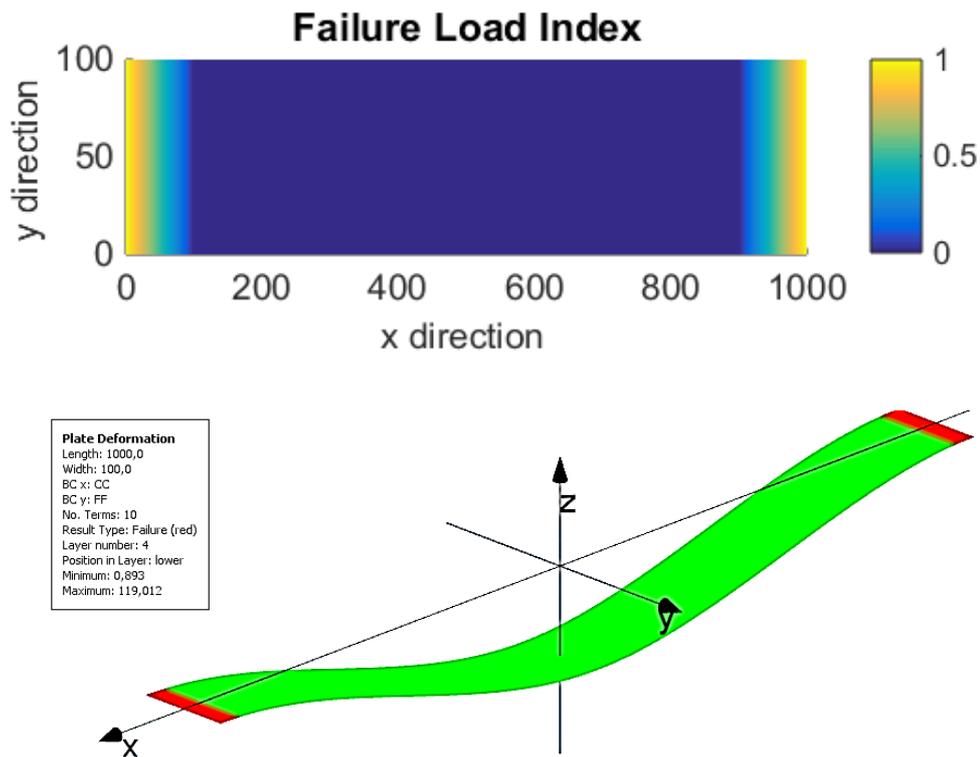


Fig.V.6 : Les mécanismes de rupture de la dernière couche (surface inférieure) obtenus numériquement et analytiquement pour une poutre composite $[90]_4$.

D'après les tableaux et les figures, on peut observer que :

- La charge de rupture est 110 N, pour une poutre composite $[90]_4$ et le déplacement correspondant est 918.43.
- Les couches endommagées sont les couches numéro 1 et 4.
- Les surfaces endommagées sont la surface supérieure pour la couche 1 et la surface inférieure pour la couche numéro 4.

D'après les deux figures, on peut voir clairement l'effet de la stratification des couches. Si on change l'orientation des couches, les zones et les mécanismes de ruptures seront changés.

V.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, une étude paramétrique a été présentée portant sur l'effet de certains paramètres influençant le comportement de rupture des poutres stratifiées minces tel que : les conditions aux limites (encastrement sur les deux côtes) et la stratification.

Dans cette étude deux types de stratifications ont été considérés, à savoir la stratification $[0/90]_s$, et $[90]_4$ soumise à la flexion. Cette étude a montré :

- ✓ Dans le cas général, l'endommagement des poutres stratifiées est affecté avec l'augmentation de la charge N ,
- ✓ Avec toutes les séquences d'empilement, les ruptures sont légèrement affectées dans la couche supérieure 1 et la couche inférieure 4,
- ✓ Les résultats montrent aussi que la stratification $[0/90]_s$ donne une bonne résistance à la rupture par rapport à la stratification $[90]_4$,
- ✓ l'endommagement est influencé significativement avec l'orientation des fibres.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Notre travail avait pour but d'étudier numériquement le comportement de rupture des poutres composites stratifiées minces en utilisant la méthode des éléments finis. Pour mettre en place cette étude nous avons présenté dans un premier temps une généralité sur les matériaux composite telle que les caractéristiques de composite, les différents types, Les différentes constituantes (matrice et renfort), et l'architecteur des matériaux composites (les sandwiches, les monocouches et les Stratifiées).

Ensuite dans le deuxième chapitre et pour mieux comprendre le comportement mécanique des stratifiées composites nous avons présenté la loi de comportement, les différents matériaux et les théories utilisés dans la formulation analytique des structures composites. Nous avons visé l'étude des poutres composites stratifiées minces, car elles sont plus vulnérables aux ruptures, donc nous avons opté un élément fini basé sur la théorie classique des stratifiées.

Dans le troisième chapitre nous avons présenté une étude théorique sur les différents critères d'endommagement ainsi que les diverse mécanismes de rupture des composites stratifiées afin d'utilisé ces mécanismes dans les formulations de l'élément fini dans le chapitre suivant.

Le quatrième chapitre de notre travail était destiné à la présentation et l'exposition de la formulation d'un élément fini rectangulaire à quatre nœuds R4 avec vingt- six degrés de liberté et son extension vers l'étude de la rupture des poutres composites stratifiées, comme dans tous les cas d'utilisation de la méthode des éléments finis, il est nécessaire de vérifier et de valider la précision et les performances de l'élément fini employé, ce qui était l'objet du quatrième chapitre. Dans ce chapitre, l'élément a été confronté à une série de test sur des poutres isotropes et composites stratifiées sous différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés à des résultats analytiques. A travers les résultats trouvés dans la partie de validation, on a pu conclure que l'élément présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

Le travail de cinquième chapitre portait sur une étude paramétrique de l'effet de certains paramètres influençant la rupture des poutres stratifiées. Le premier effet qui a été abordé dans l'étude paramétrique est l'effet du l'orientation des fibres. Pour ce faire, on a considéré deux types de starification symétrique, à savoir : $[90]_4$ et $[0/90]_s$ soumise à la flexion. Nous avons remarqué que la stratification $[0/90]_s$ donne une bonne résistance à la rupture par rapport à la stratification $[90]_4$,

D'autre part, nous avons noté qu'avec toutes les séquences d'empilement, les ruptures sont légèrement affectées dans la couche supérieure 1 et la couche inférieure 4.

Après avoir étudié le comportement de rupture des poutres stratifiées minces avec ces deux types de stratification, on a conclu que l'endommagement est influencé significativement avec l'augmentation de la charge appliqué et l'orientation des fibres.

Comme perspectives à ce travail on propose :

- D'étudier le comportement à la rupture des poutres composites stratifiées hybrides.
- D'utiliser une « approche par couche » afin d'étudier l'état des contraintes de rupture des poutres stratifiées.
- D'étudier le comportement à la rupture sous l'effet de la géométrie des poutres composites stratifiées.

Références Bibliographiques

- [1] DELANNOY (MARC) & DEMARLE (BENOIT) « L'utilisation du carbone et des composites dans la réalisation de châssis de voitures de course » école des mines de Douai 2009.
- [2] KHECHAI, A., Etude numérique de l'effet des singularités géométriques sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées, Université Mohamed Khider Biskra, (2013).
- [3] J.M.BERTHELOT «Matériaux composite : Comportement mécanique et analyse des structures»,Ed. MASSON, Paris, 2010
- [4] IZEMMOUREN, O. Cours matériaux composite. (2019-2020).
- [5] BAHLOULI, N. Cours Matériaux Composites / DESS Mécanique avancée et Stratégie industrielle.
- [6] BOUROUIS, F. Etude du comportement mécanique des structures sandwich à différents matériaux de revêtements. Mémoire de magistère, Université de Constantine, 2010.5.
- [7] GHARBI,A. « Analyse des fissurations des matériaux composites et détermination de leur délaminage utilisant des capteurs piézo-électriques » thèse de magister,Université Mentouri- Constantine (2005).
- [8] BOUAZZA, H , Recyclage des matériaux composites thermodurcissables à usage naval, Université des sciences et de la technologie d'Oran MOHAMED BOUDIAF-Oran (2010-2011).
- [9] M.GEIER D.DUEDAL «Guide pratique des matériaux composites», TEC & DOC (Lavoisier), Paris, (1985).
- [10] KALLEL-KAMOUN,I. Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada),30 Juin 1999.
- [11] IRISARRI, F.X. Stratégies de Calcul pour l'Optimisation Multi-objectif des Structures Composites. Thèse de doctorat. Université de Toulouse III - Paul Sabatier,Toulouse, France, (2009).
- [12] LAHOUEL, B-E. Vibration des plaques composites trouées. Thèse de doctorat. Université de Batna(2015).
- [13] PAOLO VANNUCCI, Cours Matériaux Composites. Université de Versailles et Saint Quentin-en-Yvelines, A.U,2005-06.
<http://paolo.vannucci.free.fr/2012/Downloads.html>
- [14] L. BOUYAYA, Etude théorique et numérique du comportement dynamique D'un stratifié composite unidirectionnel, 21ème Congrès Français de Mécanique. Bordeaux, 26 au 30 août 2013
- [15] TATI, A., & HESSINI, M. (2014).Analyse du comportement de flambage des Plaques Minces stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis. Courier du Savoir – N°09, Mars 2009, pp.09-15, 9.Revues.univ-biskra.dz
- [18] REDDY, J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates : Theory and Analysis. 2.ed. Florida : CRC Press, 1997.
- [19] FRANÇOIS-XAVIER IRISARRI, Stratégies de calcul pour l'optimisation multi-objectif des structures composites, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 23 Janvier 2009.

- [20] S.W. Tsai et E.M. Wu (1971). A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. J. Compos. Mat., 5, 58-80.
- [21] ATIKI,E.Vibration des plaques stratifiée matériaux composite menues d'ouverturesrectangulaires des éléments finis centrales par la méthode des en Université Mohamed Khider – Biskra, (2018).
- [22] BELARBI,M-O, Introduction à la méthode des éléments finis Cours et Applications, polycopie universitaire, Université Mohamed Khider – Biskra (2018/2019).
- [23] <https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Ffr.vikidia.org%2Fwiki%2FTorchis&psig=A0vVaw3eHTlBmxa25Rr1J9qelfTt&ust=1599503326822000&source=images&cd=vfe&ved=0CA0QjhxqFwoTCKDcnbSU1esCFQAAAAAdAAAAABAD>.
- [24] https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Ffr.wikipedia.org%2Fwiki%2FSabre_japonais&psig=A0vVaw1QrAUL3xZEdSBnH7JZOMx7&ust=1599503522678000&source=images&cd=vfe&ved=0CA0QjhxqFwoTCNid0puV1esCFQAAAAAdAAAAABAD.
- [25] https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Feduscol.education.fr%2Fsti%2Fsi-ens-cachan%2Fressources_pedagogiques%2Fmatériaux-composites-et-structures-composites&psig=A0vVaw2_FFn4VXUF0Bq0a93chqVg&ust=1599583893604000&source=images&cd=vfe&ved=0CA0QjhxqFwoTCODJwMLA1-sCFQAAAAAdAAAAABAD.
- [26] <https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fhal.archives-ouvertes.fr%2Ftel-01234928%2Fdocument&psig=A0vVaw2ytKk4RoEPpGkOvraY46FL&ust=1599584733772000&source=images&cd=vfe&ved=0CA0QjhxqFwoTCJipzNfD1-sCFQAAAAAdAAAAABAK>.