

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence :/2020



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية والري
المرجع/2020

Mémoire de Master

Filière : Génie civil

Spécialité : Structures

Thème

**Etude numérique de l'effet du rapport d'épaisseur
sur la flexion des plaques composites stratifiées**

Nom et Prénom de l'étudiant :
BENMESSAOUD Yousra

Encadreur :
Dr. BELARBI Mohamed Ouejdi

Année universitaire : 2019 - 2020

Remerciements

*Tout d'abord, je remercie Allah, le tout grand puissant de m'avoir donné
la force, le courage, la patience et la volonté de mener à bien
ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier vivement et sincèrement mon encadreur BELARBI Mohamed Ouejdi
qui a contribué et a assuré la direction de ce travail, pour tout le soutien,
les orientations et la patience qu'il a manifesté durant son encadrement
tout le long de la réalisation de ce mémoire.*

*Je remercie les membres de jury qui me font l'honneur de présider et
d'examiner ce modeste travail.*

*Je saisis aussi l'occasion pour rendre hommage à tous mes enseignants auprès desquels j'ai
reçu ma formation.*

*Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont
contribué de près ou de loin à la réalisation
de ce mémoire.*

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A Une femme qui s'est battue pour ce moment : ma mère (رحمها الله).

A un homme qui était et sera toujours à mes côtés : mon père.

A mon fiancé : Fateh.

A mes chers frères : Mohammed, Moamen Abd al Samad, Moudh.

A mes chères soeurs : Narimen, Fatima, Nada, Marwa.

*A mes ami (e)s et toutes mes connaissances en particulier : Ikram,
Assma*

A tous mes enseignants du département de Génie Civil.

Sommaire

Résumé.....	I
ملخص.....	I
Liste des figures	II
Liste des tableaux	III
Liste des notations.....	IV
Introduction générale.....	1
Problématique.....	1
Chapitre I : Généralité sur les matériaux composites	
I.1 Introduction	2
I.2 Historique	2
I.3 Domain d'applications	2
I.4. Définition un matériau composite	3
I.5. Définitions de base	3
I.6. Constituants des matériaux composites	4
I.6.1. Renfort	4
I.6.2. Matrice	5
I.7. Avantages des matériaux composites	6
I.8. Inconvénients des matériaux composites	6
I.9. Classification des types de matériaux composites	6
I.9.1. Les composites structuraux	7
I.9.1.1. Les composites Monocouches	7
I.9.1.2. Les composites Sandwichs	8
I.9.1.3. Les composites stratifiés.....	8
I.10. Modèles de structures multicouches existants.....	9
I.10.1. Modèles de plaques tridimensionnels (3D).....	10
I.10.2. Modèles de plaques bidimensionnelles (2D)	10
I.10.2.1. Approche de monocouche équivalente	10
I.10.2.1.1. Théorie classique Love-Kirchhoff.....	10

I.10.2.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.....	11
I.10.2.1.3. Théorie d'Ordre Supérieur	12

Chapitre II : Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre.

II.1. Introduction.....	14
II.2. Définition d'une plaque	14
II.3. La théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) (Reissner-Mindlin)	15
II.3.1. Hypothèses cinématiques et mécaniques	15
II.3.2. Relation déformations-déplacements (Cinématique).....	16
II.3.2.1. Champ des déplacements	16
II.3.2.2. Champ des déformations.....	17
II.3.2.3. Champ des contraintes.....	19
II.4.1. Caractéristiques du mélange renfort-matrice	21
II.4.1.1. Module de Young longitudinal EL (E1)	21
II.4.1.2. Module de Young transversal ET (E2)	23
II.4.1.3. Coefficient de Poisson longitudinale ν_{12}	24
II.4.1.4. Module de cisaillement longitudinal G_{LT} G_{12}	25
II.4.2. Loi de Hooke généralisée.....	26
II.4.3. Différents Types des matériaux.....	27
II.4.3.1. Matériaux anisotropes	27
II.4.3.2. Matériaux orthotropes	28
II.4.3.3. Matériaux isotropes.....	30
II.4.4. Relation contrainte-déformation selon la théorie de Mindlin –Reissner.....	31
II.4.4.1. Plaque homogène isotrope.....	31
II.4.4.2. Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres.....	31
II.4.5. Les efforts résultants dans le stratifié	32
II.4.5.1. Résultantes en membrane.....	32
II.4.5.2. Moment de flexion et de torsion.....	34

II.4.5.3. Résultantes en cisaillement	35
II.4.6. Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques stratifiées.....	37
Chapitre III : Formulation de l'élément fini utilisé.....	39
III.1. Introduction	39
III.2. Historique	39
III.3. Principe de la méthode des éléments finis.....	40
III.4. Formulation de l'élément fini utilisé.....	40
III.4.1. Description de l'élément utilisé.....	40
III.4.2. Cinématique de la théorie.....	41
III.4.3. Approximation nodale des déplacements.....	41
III.4.4. Champs des déplacements.....	42
III.4.5. Relations cinématiques.....	43
III.4.6. Loi de comportement.....	45
III.4.7. Évaluation de la matrice de rigidité.....	45
III.4.7.1. Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées.....	45
III. 4.7.2 Problème de flexion.....	46
Chapitre IV : Validation et étude paramétrique.....	48
IV.1. Introduction	48
IV.2. Conditions aux limites adoptées.....	48
IV.3. Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques.....	49
IV.3.1. Plaques isotropes.....	49
IV.3.2. Plaques stratifiées.....	53
IV.4. Etude paramétrique.....	57
IV.4.1. Effet du rapport d'épaisseur d' sur la flèche maximale avec différents cas de conditions aux limites.....	58
IV.4.2. Effet du rapport d'épaisseur sur la flèche maximale avec la variation du rapport d'anisotropie E_{11}/E_{22}	58
IV.4.3. Effet de l'orientation des fibres sur la flèche maximale.....	59
Conclusion générale	61

Références bibliographiques62

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire est l'étude numérique de l'effet du rapport d'épaisseur sur la flexion des plaques composites stratifiées. L'analyse a été menée en utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud. La formulation de l'élément est basée sur la théorie de premier ordre de cisaillement transverse (FSDT). Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions analytiques et ceux obtenus avec des modèles éléments finis numériques. La bonne performance de l'élément en termes de précision et de convergence est testée à travers une série d'exemples.

En addition, une étude paramétrique a été entreprise pour mettre en évidence l'effet de certains paramètres, tel que le rapport d'épaisseur et d'anisotropie et la rotation des fibres sur la variation de la flèche maximale. On peut conclure que l'effet du rapport d'épaisseur joue un rôle très important dans la conception et l'étude des plaques composites multicouches.

MOTS CLES : Plaque stratifiée, théorie de premier ordre, éléments finis, flèche maximal.

ملخص

العمل المقدم في هذه المذكرة هو الدراسة العددية لتأثير نسبة السماكة على ثني الألواح المركبة المصفحة. تم إجراء التحليل باستخدام عنصر محدود مستطيل الشكل بأربع عقد بخمس درجات حرية لكل عقدة. تعتمد صياغة العنصر على نظرية القص العرضي من الدرجة الأولى (FSDT). تم مقارنة النتائج مع الحلول التحليلية وتلك التي تم الحصول عليها بنماذج العناصر المحددة العددية. يتم اختبار الأداء الجيد للعنصر من حيث الدقة والتقارب من خلال سلسلة من الأمثلة. بالإضافة إلى ذلك ، تم إجراء دراسة حدودية لتوضيح تأثير عوامل معينة ، مثل السماكة ونسبة التباين ودوران الألياف على تباين أقصى انحراف. يمكن الاستنتاج أن تأثير نسبة السماكة يلعب دورًا مهمًا للغاية في تصميم ودراسة الألواح المركبة متعددة الطبقات.

الكلمات الرئيسية : صفائح ذات طبقات ، نظرية الدرجة الأولى ، العناصر المحدودة ، أقصى انحراف.

Liste des figures

Figure I.1 : Matériaux composites	3
Figure I.2 : Représentation schématique des caractéristiques géométrique des fibres de renfort	4
Figure I.3 : Classification schématique des principaux matériaux de renfort	5
Figure I.4 : Classification schématique des principaux matériaux de matrice	5
Figure I.5 : Classification schématique des types de composites	7
Figure I.6 : Schématisation d'une monocouche	7
Figure I.7 : Les constituants des composites sandwichs	8
Figure I.8 : Les constituants de Composite stratifié	8
Figure I.9 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.....	9
Figure I.10 : Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff.....	11
Figure I.11 : Cinématique de Reissner-Mindlin	12
Figure I.12 : Cinématique d'ordre supérieur	13
Figure II.1 : Description d'une plaque	14
Figure II.2 : Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin	15
Figure II.3 : illustration de la cinématique de déformation présentée par couche équivalente, en utilisant la théorie FSDT	16
Figure II.4 : Chargement longitudinal	21
Figure II.5 : État de contraintes longitudinales	23
Figure II.6 : Chargement transversal	23
Figure II.7 : Schéma simplifié d'une traction transversale	24
Figure II.8 : schéma par couches d'une traction longitudinale	25
Figure II.9 : Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal	25
Figure II.10 : schématique d'un matériau orthotrope	29
Figure II.11 : Axes principaux et axes de référence d'une couche orthotrope	32

Figure II.12 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié	33
Figure II.13 : Schématisation des résultantes des moments de flexion et de torsion	35
Figure II.14 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement	36
Figure II.15 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal CT Constante (FSDT) et quadratique (HSDT)	38
Figure III.1 : L'élément rectangulaire et variable nodales correspondantes	41
Figure IV.1 : Géométrie de la plaque.....	48
Figure IV.2 : Conditions aux limites	49
Figure IV.3 : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous chargement uniformément répartie	50
Figure IV.4 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope simplement Appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments	51
Figure IV.5 : Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée	51
Figure IV.6 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope encastree (EEEE), en fonction de nombre des éléments	52
Figure IV.7 : Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque isotrope carrée encastree	53
Figure IV.8 : Plaque stratifiée carrée à trois couches simplement appuyée sous chargement uniformément répartie	54
Figure IV.9 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque stratifiée trois couches simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments.....	55
Figure IV.10 : Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque stratifiée trois couches simplement appuyée	55
Figure IV.11 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque stratifiée cinq couches simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments	56

Figure IV.12 : Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque stratifiée cinq couches simplement appuyée 57

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : La flèche maximale d'une plaque isotrope simplement appuyée.....	50
Tableau IV.2 : La flèche maximale d'une plaque isotrope encadrée.....	52
Tableau IV.3 : La flèche maximale d'une plaque stratifiée à trois couches.....	54
Tableau IV.4 : La flèche maximale d'une plaque stratifiée à cinq couches.....	56
Tableau IV.5 : La flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur pour une plaque stratifiée trois couches avec différents types d'appuis.....	58
Tableau IV.6 : La flèche maximale en fonction du rapport d'anisotropie pour une plaque stratifiée trois couches simplement appuyées.....	59
Tableau IV.7 : La flèche maximale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée quatre couches $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$ simplement appuyée.....	60

Liste des Notations

E_1 : Module de Young longitudinal
 E_2 : Module de Young transversale
 G_{12} : Module de cisaillement longitudinal
 ν_{12} : Coefficient de Poisson longitudinal
 C_{ijkl} : Coefficients de la matrice de rigidité [C]
[C]: Matrice de rigidité
[S]: Matrice de souplesse
 S_{ijkl} : Tenseur de souplesse
 C_{ijkl} : Tenseur de rigidité
 $\overline{Q_{ij}}$: Coefficients de rigidité réduit
h: Epaisseur de la plaque
e: Epaisseur de la couche
 $\overline{Q_k}$: Matrice de rigidité réduite
 $\sigma_k(M)$: Matrice de contrainte dans la couche k
 N_x, N_y, N_{xy} : Résultantes en membrane de par unité de longueur
 M_x, M_y : Moments de flexion
 M_{xy} : Moment de torsion
 Q_x, Q_y : Forces de cisaillement respectivement dans les directions x et y
K: Facteurs de correction de cisaillement transverse
 ∂ : Dérivé partiel
t: Temps
 f_x, f_y, f_z : Composantes des forces volumiques exercées sur un solide
 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$: Les composantes du vecteur accélération
 ρ : Masse volumique
 ρ_s : Masse surfacique
 I_{xy} : Moment d'inertie par rapport au plan moyen (Oxy)
T: Énergie cinétique
 Π : Énergie potentielle total
U: Énergie de déformation
u, v, w: Déplacements suivant les axes x, y et z

φ_x, φ_y : Les rotations autour des axes y et x

$\{\delta_i\}$: Vecteur des déplacements

N_i : Fonctions d'interpolation

$[K^e]$: Matrice de rigidité élémentaire

$[K]$: Matrice de rigidité globale

$\{F\}$: Vecteur de force global

$\{q\}$: Vecteur des déplacements global des nœuds de la plaque

Introduction générale

L'utilisation de matériaux composites se développe rapidement dans de nombreux composants structurales comme la marine, le transport, la navigation, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques. Ces matériaux présentent des avantages de réduction des coûts, de légèreté, de résistance mécanique et à la corrosion. Il est donc nécessaire de connaître une bonne connaissance du comportement mécanique des structures multicouches en flexion. Les méthodes numériques, notamment les calculs éléments finis sont indispensables pour le dimensionnement de telles structures complexes.

Problématique:

Pour une utilisation efficace de ce type de matériau, la connaissance de leur comportement structurel et mécanique ainsi qu'une compréhension précise de la flèche maximale sont nécessaires. L'analyse des structures dans lesquelles des matériaux composites ont été utilisés est une tâche très complexe en raison de leur comportement complexe. Il existe plusieurs théories qui visent à étudier le comportement des structures qui se sont appuyées sur l'utilisation de la plaque stratifiée, parmi lesquelles on peut citer la théorie classique des poutres qui est une extension de la théorie de Kirchhoff aux matériaux composites, théorie du premier ordre qui s'est étendue à cette théorie. De Reissner-Midlin et des théories d'ordre supérieur.

Objectif :

Dans ce travail, nous procéderons à l'étude numérique du comportement mécanique en flexion des plaques composites stratifiées. Ainsi, une partie du travail sera consacrée à l'étude de l'influence des caractéristiques mécanique et géométriques des constituants des matériaux multicouches comme le rapport d'épaisseur sur la flexion des plaques composites stratifiées.

Nous avons divisé notre travail en quatre chapitres :

- **Dans le premier chapitre :** On présente une bibliographie générale sur les matériaux composites stratifiés. Ainsi, on présente les théories utilisées pour la modélisation des structures composites multicouches.
- **Le deuxième chapitre :** Sera consacré à l'étude théorique générale du comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie de premier ordre.
- **Le troisième chapitre :** Comportera la formulation d'un élément fini rectangulaire utilisé.

- **Le quatrième chapitre** : Sera consacré à la validation de l'élément fini rectangulaire à travers la comparaison avec les résultats analytiques et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Ainsi, une étude paramétrique sera menée pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation de la flèche maximale des plaques stratifiées.

Enfin une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites. Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont été utilisés par l'homme de puis très longtemps, citons par exemple le bois, le béton [1].

La première partie de ce chapitre est consacré à la présentation des différents constituants des matériaux composites. Dans la deuxième partie, on va présenter le procédé de fabrication de ce type de matériaux et leurs structures.

I.2. Historique

Historiquement, le concept du renforcement à l'aide de fibres est très ancien, ainsi on retrouve dans les références bibliques des allusions à l'utilisation de briques d'argiles renforcées à la paille en Egypte antique. En avançant quelques milliers d'années dans l'histoire, le monde se trouve plongé dans la deuxième guerre mondiale et la révolution industrielle. C'est dès ces moments-là que l'on observe l'ouverture du monde des composites accentué par le développement des polymères.

Le fer fut utilisé pour renforcer la maçonnerie et la construction, cela mena à la création du béton armé. Le premier bateau en fibres de verre fut construit en 1942, ceci fut accompagné par l'utilisation de plastique renforcé dans l'aéronautique et les composants électriques. Les premières fibres de carbone et bore de hautes performances furent introduites dans les années 60. En 1973, Dupont développa fibres de Kevlar. Dès lors, l'utilisation des composites s'étend aux domaines de l'aviation, de la marine, de l'automobile, des accessoires sportifs des industries biomédicales [2].

I.3. Domain d'applications

L'utilisation des matériaux composites est très répandue dans divers domaines tels que l'aérospatiale, l'aéronautique, l'industrie automobile, l'industrie navale, de même que dans l'industrie sportive et le génie civil. Ces matériaux sont connus par leurs grands rapports rigidité poids et résistance-poids, ainsi que pour d'autres propriétés mécaniques intéressantes telles que la résistance à la corrosion. En outre, l'utilisation des matériaux composites dans le domaine de génie civil peut être avantageuse par rapport aux matériaux traditionnels comme

l'acier, car ils permettent la conception de structures aux propriétés globales qui répondent mieux aux exigences particulières d'une situation donnée. Parmi ces propriétés globales, on retrouve la rigidité [3].

I.4. Définition un matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des Performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Les matériaux Composites disposent d'éventualités importantes par rapport aux matériaux traditionnels.

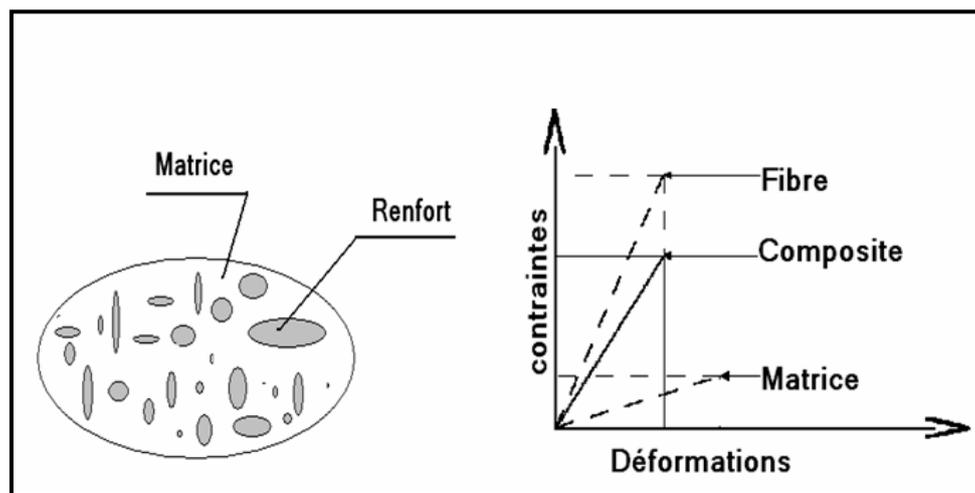


Figure I.1 Matériaux composites [4].

I.5. Définitions de base

Homogène : mêmes propriétés en tout point du matériau.

Hétérogène : propriétés différentes d'un point à un autre.

Isotrope : mêmes propriétés dans toutes les directions.

Isotrope transverse : il existe un axe de symétrie. Symétrie par rapport à une droite.

Orthotrope : propriétés symétriques par rapport à 2 plans de symétrie.

Anisotrope : l'anisotropie (contraire d'isotropie) est la propriété d'être dépendant de la direction. Quelque chose d'anisotrope pourra présenter différentes caractéristiques selon son orientation.

Un matériau composite est la plupart du temps *Hétérogène et Anisotrope* [5].

I.6. Constituants des matériaux composites

Bien des composites ne comportent que deux phases : l'une est continue, appelée *matrice*, et enveloppe l'autre phase, appelé *renfort*.

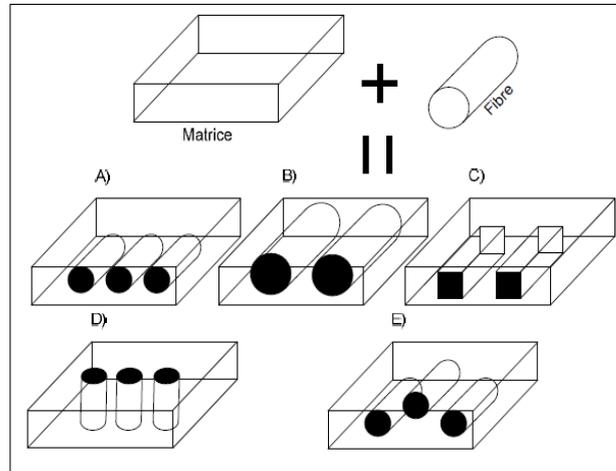


Figure I.2 Représentation schématique des caractéristiques géométriques des fibres de renfort [5].

I.6.1. Renfort

Le renfort est le squelette supportant les efforts mécaniques.

Les renforts peuvent être classés selon :

- Leur composition : métal, verre, polymère, carbone... etc.
- Leur forme :
 - Fibres : courtes (0,1 - 1 mm), longues (1 - 50 mm) ou continues (tissus ou textures

Multidirectionnelles : > 50 mm).

- Charges renforçâtes : gravier (additionné au ciment pour fabriquer le béton) sable, billes de verre... etc.
- Leur disposition : mate ou tissé [3].

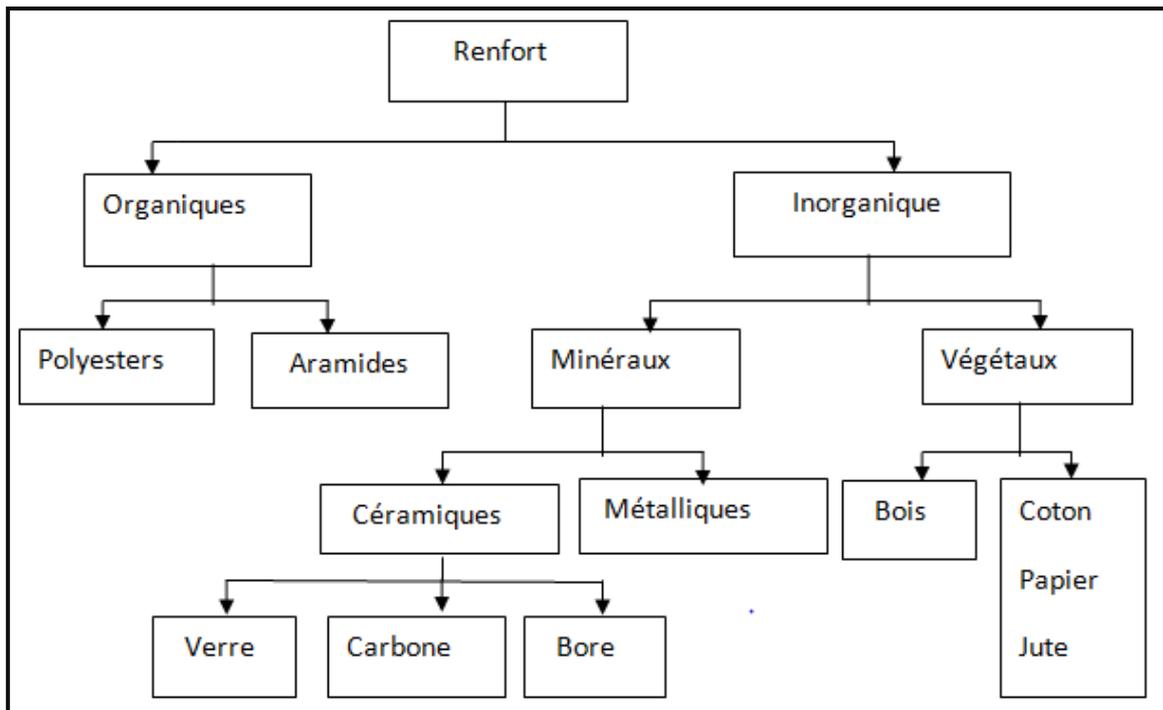


Figure I.3 Classification schématique des principaux matériaux de renfort [6].

I.6.2. Matrice

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres. Généralement, c'est un polymère ou une résine organique.

On peut retrouver dans l'organigramme ci-dessous, les différentes familles de matrices :

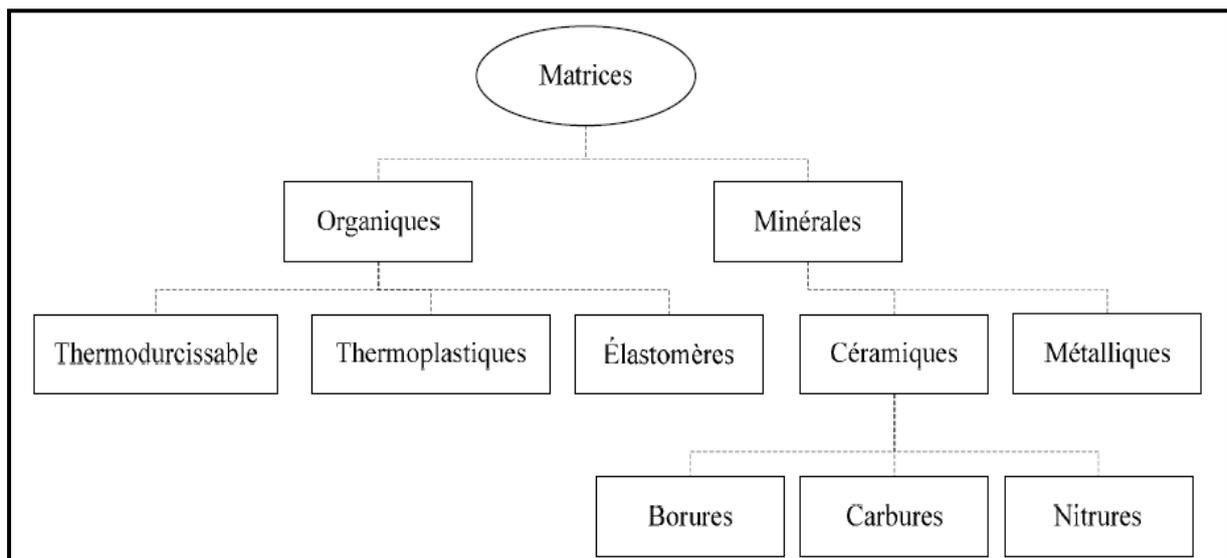


Figure I.4 Classification schématique des principaux matériaux de matrice [7].

I.7. Avantages des matériaux composites

- Légèreté.
- Résistance mécanique et chimique.
- Maintenance réduite.
- Liberté de forme et une bonne isolation électrique.
- Bon rapport résistance/poids.
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage).
- Grande résistance à la fatigue.
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf encas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone).

I.8. Inconvénients des matériaux composites

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est sur tout valable pour des grandes séries.
- Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

I.9. Classification des types de matériaux composites

La Figure (I.4) présente une classification schématique des matériaux composites. Nous y distinguons trois catégories principales : les composites renforcés par des particules, les composites renforcés par des fibres et les composites structuraux. Qui se divise en deux parties qui sont stratifiés et sandwichs.

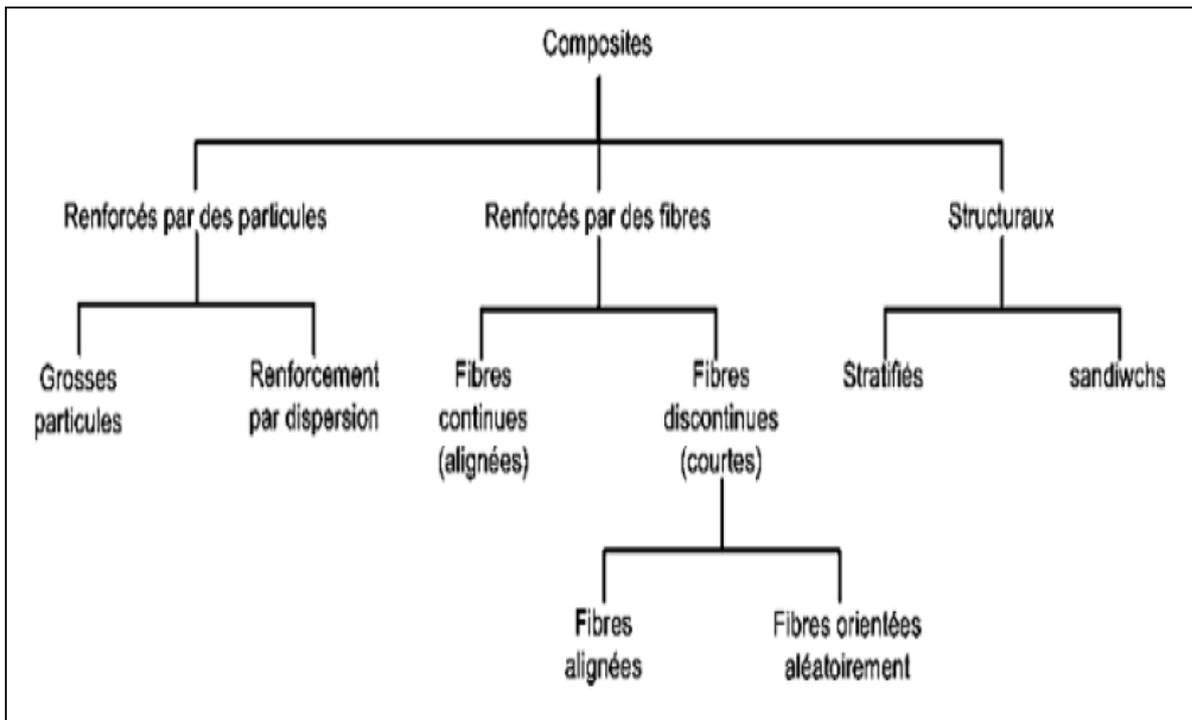


Figure I.5 Classification schématique des types de composites [5].

I.9.1. Les composites structuraux

Généralement, on distingue deux sortes de matériaux composites structuraux: les stratifiés et les sandwichs et les monocouches.

I.9.1.1. Les composites Monocouches

Les monocouches ou plis, représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes [8].

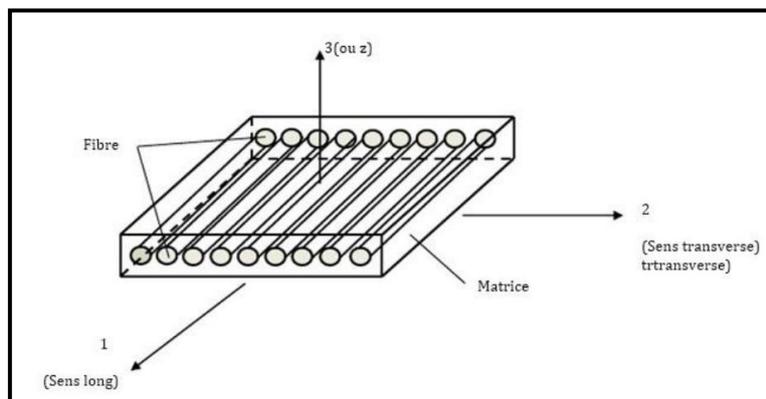


Figure I.6 Schématisation d'une monocouche [1].

I.9.1.2. Les composites Sandwichs

C'est un matériau composé de deux semelles (ou peaux), voir figure (I.7) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

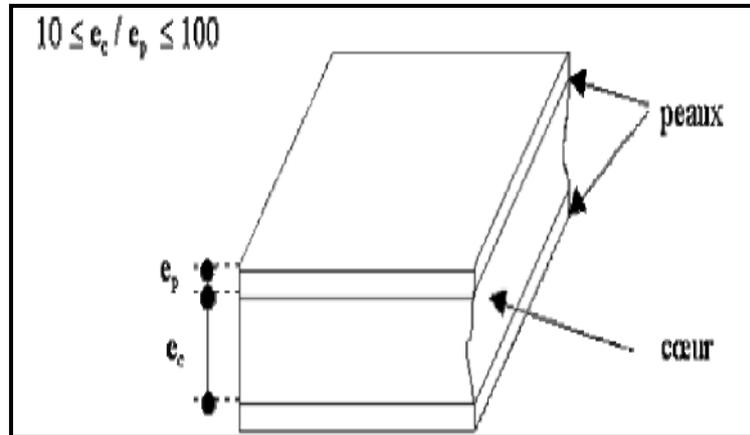


Figure I.7 Les constituants des composites sandwichs [09].

I.9.1.3. Les composites stratifiés

Les stratifiés sont formés de plusieurs couches élémentaires appelées monocouches. En effet, les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite, et sont formées d'une matière plastique renforcée d'un matériau fibreux. Les divers types de monocouches sont définis par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement), à fibres tissées, ou à fibres courtes. La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir une structure composite stratifiée (Figure I.8) [10].

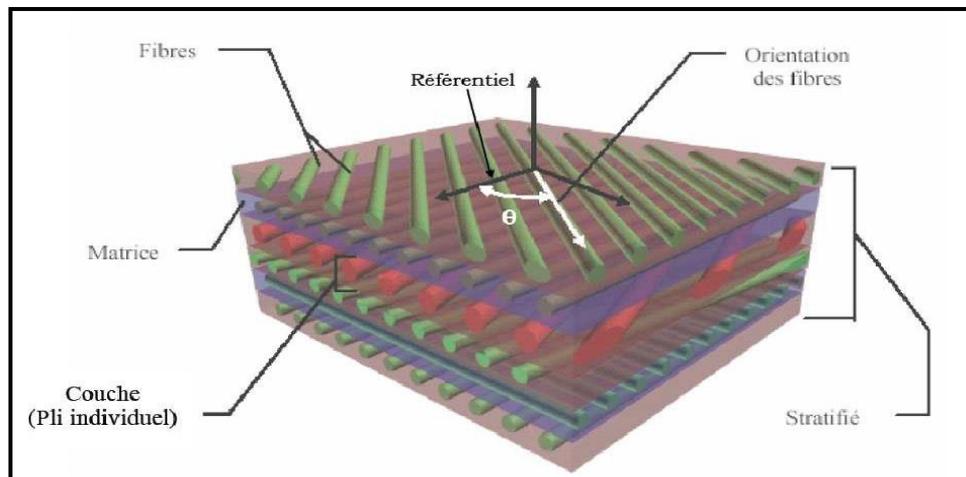


Figure I.8 Les constituants de Composite stratifié [11].

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

Notation " composite " : Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)_2$ s Fig. (I.9) est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0° , -45° , 90° et $+45^\circ$, l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié [09].

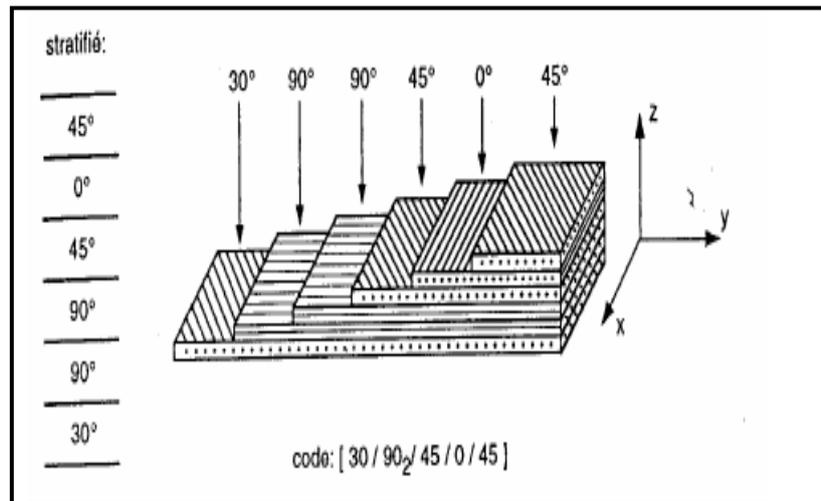


Figure. I.9 Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Equilibre : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de Couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : Stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches 0° que de couches à 90° [10].

I.10. Modèles de structures multicouches existants

Toutes les théories et les approches développées à ce jour pour l'analyse des éléments de structures conçus à base de ces matériaux, telle que les plaques et les coques minces ou épaisses, présentent des limites de performances ou des difficultés dans les moyens de calcul. Dans ce contexte, de nombreux travaux d'investigations ont été menés à travers les années, dans l'objectif d'améliorer les différentes approches afin de prévoir les réponses statiques et dynamiques ainsi que la stabilité de ces structures. Selon lesquelles on peut distinguer deux modèles principaux : le modèle tridimensionnel (3D) et le modèle bidimensionnel (2D).

I.10.1. Modèles de plaques tridimensionnels (3D)

L'approche tridimensionnelle vise à donner des résultats plus précis, utilisés notamment comme référence, mais peu d'auteurs ont adopté cette approche à cause de son coût en termes de temps de calcul et en capacité de mémoire pour le stockage de la base des données requise qui est plus importante que celle dans l'analyse bidimensionnelle [12]. De plus, les solutions 3D sont difficiles à obtenir dans la majorité des cas de géométrie et de conditions aux limites. Parmi les solutions d'élasticité 3D, on trouve l'article de Pagano [13] qui a proposé une solution d'élasticité tridimensionnelle, sous forme de série sinusoïdale, pour le problème de flexion des plaques stratifiées rectangulaires.

I.10.2. Modèles de plaques bidimensionnelles (2D)

À ce jour, l'utilisation des modèles bidimensionnels (2D) est préférable dans la plupart des applications liées à l'analyse des structures multicouches. En fait, ces modèles sont plus pratiques que les modèles 3D en termes de simplicité dans la modélisation et d'efforts de calcul nécessaires. Parmi ces modèles, deux familles peuvent être distinguées :

- Approche monocouche équivalente (ESL).
- Approche par-couche (LW).

I.10.2.1. Approche de monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre de degrés de liberté ne dépend pas du Nombre de couches. Le cisaillement transverse peut être pris en compte à travers l'inclinaison de la section transverse.

Dans cette approche, on peut distinguer trois théories bien connues, à savoir :

- Théorie classique des plaques (CLPT)
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)
- Théories d'ordres supérieurs (HSDT)

I.10.2.1.1. Théorie classique Love-Kirchhoff

Le modèle classique Love-Kirchhoff se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformée fig. (I.9). Cela revient à dire que le cisaillement transverse est négligé.

Le champ de déplacement d'une plaque de Love-Kirchhoff s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 W(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{I.1}$$

Où :

x, y, z : les directions dans le plan de la plaque.

u_0, v_0 et w_0 : les composantes des déplacements dans le plan moyen.

w_x et w_y : les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions.

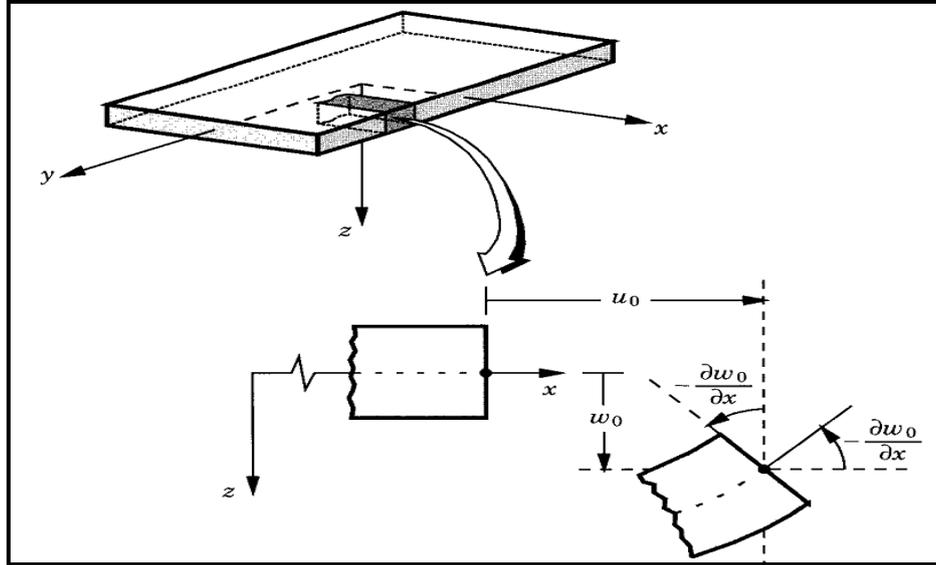


Figure. I.10 Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [14].

I.10.2.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

Pour introduire le cisaillement transverse, on fait l'hypothèse cinématique [15] que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (Fig. I.10).

Les champs de déplacements de la plaque de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (\text{I.2})$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y)$$

φ_x et φ_y sont les rotations de la normale autour des axes (x, y) , respectivement.

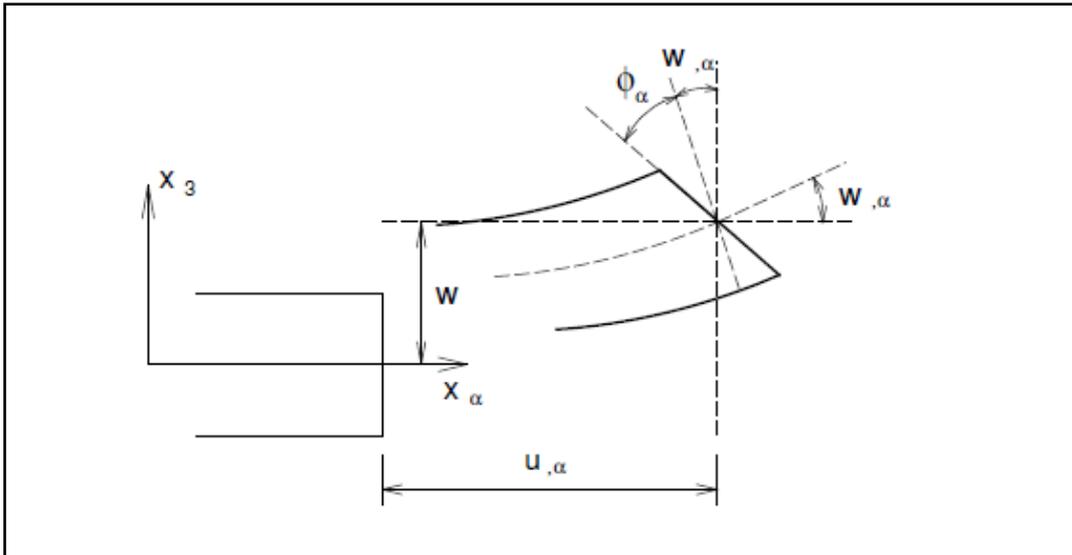


Figure. I.11 Cinématique de Reissner-Mindlin [14].

I.10.2.1.3. Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur

Plusieurs auteurs ont proposé des théories plus élaborées pour franchir les limites des théories *CLT* et *FSDT*, parmi lesquelles on a la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur *HSDT*. Celle-ci adopte une variation cubique pour le champ des déplacements au long de l'épaisseur du stratifié.

Dans cette théorie, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, car la distribution des déformations de *CT* a la forme parabolique le long de l'épaisseur et qui est similaire à la condition réelle prévue par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

Le champ de déplacement considéré est :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + \frac{z^2}{2}\Psi_x(x, y)$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + \frac{z^2}{2}\Psi_y(x, y) \quad (I.3)$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y) + z\varphi_z(x, y)$$

Où (Ψ_x, Ψ_y) sont des termes de second ordre.

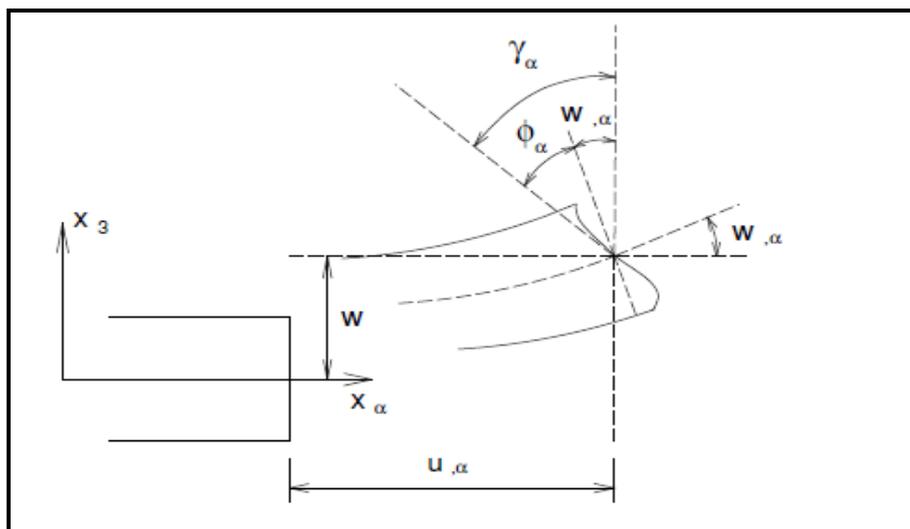


Figure I.12 Cinématique d'ordre supérieur [14].

Chapitre II

Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre

Chapitre II

Comportement mécanique des plaques stratifiées selon la théorie du premier ordre

II.1. Introduction

Le comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysé par la théorie des plaques stratifiées, prenant en compte

le cisaillement transverse qui est basé sur une évaluation des champs des déplacements qui considère qu'une normale au plan moyen d'un stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. Cette déformée ne restant toutefois pas normale à la déformée du plan moyen.

La théorie des stratifiés avec cisaillement transverse et la théorie des plaques sandwichs sont les outils qui peuvent être utilisés usuellement pour analyser le comportement élastique des structures en matériaux composites : soit par une approche analytique ou par une analyse par éléments finis [16].

II.1.2 Définition d'une plaque

- **Une plaque** est un solide défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur (notée $h(x, y)$) petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur (figure II.1)). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

Elle est considérée un milieu continu ayant une dimension très petite par rapport aux deux autres [17].

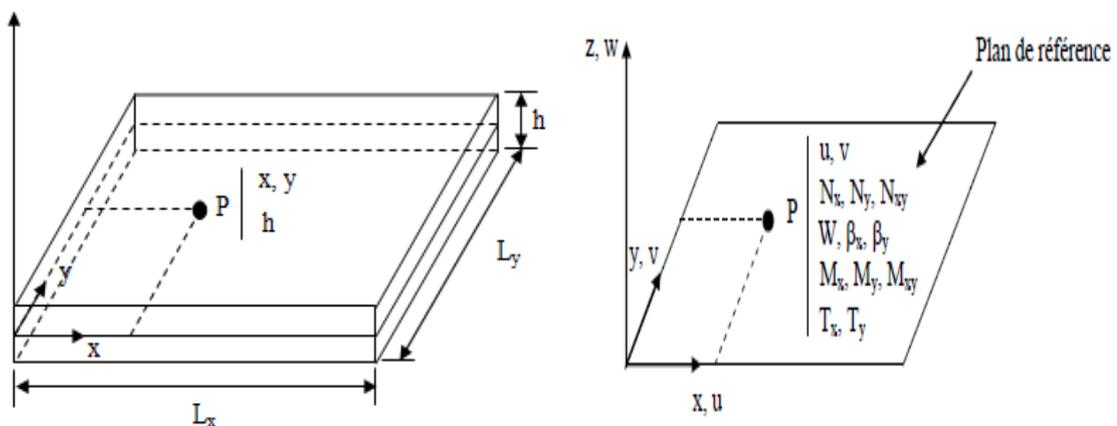


Figure II.1 Description d'une plaque.

II.3. La théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) (Reissner-Mindlin)

Nous allons procéder à l'étude théorique en utilisant **la théorie des plaques épaisses**, ou la théorie du premier ordre des stratifiés pour exprimer les résultantes N_{ij} et les moments M_{ij} des déformations et courbures de la plaque, lorsque cette dernière est constituée d'un matériau composite stratifié.

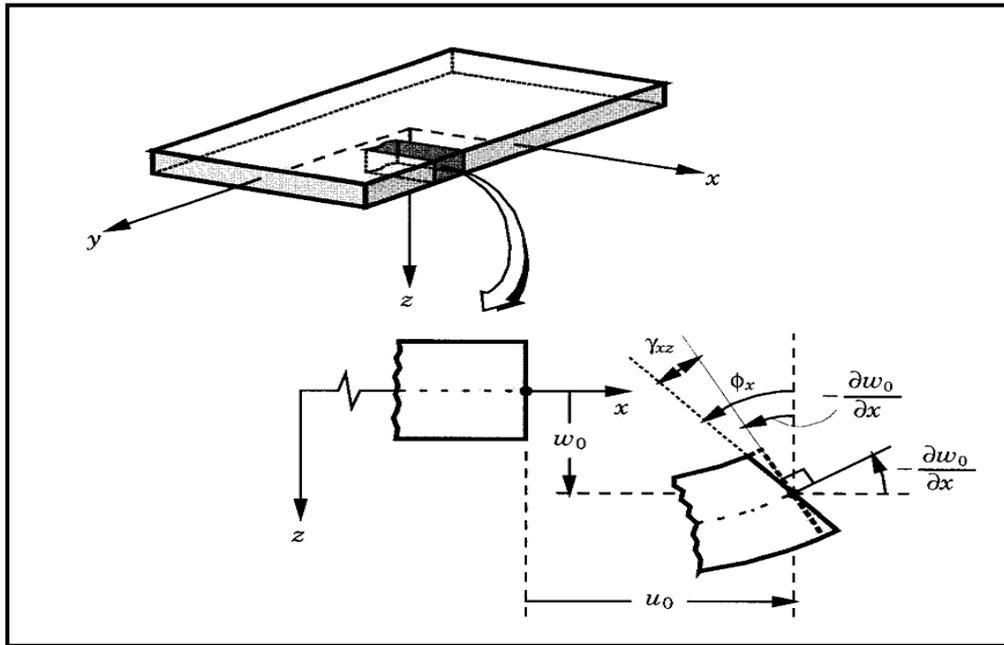


Figure II.2 Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [14].

II.3.1. Hypothèses cinématiques et mécaniques

Cette théorie est basée essentiellement sur l'hypothèse suivante de Reissner-Mindlin :

A. Cinématiques :

- ❖ Hypothèse des sections droites :

“Toute section droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite mais non nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée”.

- ❖ La composante transversale du déplacement suivant l'épaisseur est constante.

B. Mécaniques :

- ❖ Hypothèse des contraintes planes

“ La contrainte σ_z est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes”

- ❖ Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. Cette hypothèse considère z comme axe d'orthotrope de toutes les couches (orthotrope dans le plan LT).

II.3.2. Relation déformations-déplacements (Cinématique)

II.3.2.1. Champ des déplacements

Nous considérons ici l'analyse par éléments finis dans le cas où le comportement mécanique est décrit par la théorie des stratifiés du premier ordre, prenant en compte le cisaillement transverse.

Selon **Berthelot** [1], le schéma utilisé est un schéma du premier degré de la forme générale :

Soit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où φ_x et φ_y indiquent respectivement les rotations autour des axes y et x , et sont représentés sur la figure suivante :

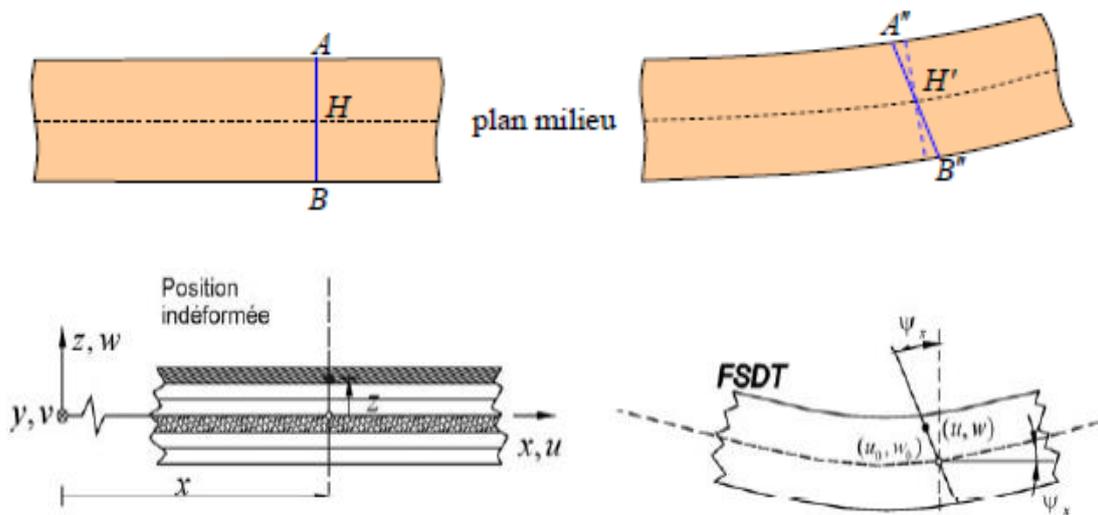


Figure II.3 illustrations de la cinématique de déformation présentée par couche équivalente, en utilisant la théorie FSDT [1].

Il se fait nécessaire l'introduction de facteurs de correction de cisaillement.

II.3.2.2 Champ des déformations

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements. Il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des déplacements dans le plan sont du même ordre en z que les déformations déterminées par le déplacement transverse w .

➤ Le tenseur des déformations en un point M du stratifié est donc :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

➤ Et la matrice des déformations comporte cinq composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

➤ Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

Le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi x \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Le champ des déformations en cisaillement varie a priori d'une couche à l'autre. Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes γ_{yz}^0 et γ_{xz}^0 du stratifié, soit :

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Le champ des déformations en membrane-flexion est la superposition :

➤ Des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0 , v_0) dans le plan moyen (Oxy) des points de ce plan :

➤ Des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (\text{II.10})$$

Avec :

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

k_x , k_y et k_{xy} sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement, le champ $\varepsilon_{mf}(M)$ s'écrit :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ kx = \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \\ ky = \frac{\partial \varphi y}{\partial x} \quad , \quad kxy = \frac{\partial \varphi x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous une forme analogue à la relation de la théorie classique des stratifiés :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon m(x, y, z) = \varepsilon m(x, y) + zk(x, y) \quad (\text{II.14})$$

Seules les expressions des courbures sont modifiées.

II.3.2.3. Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{cccccc} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 & \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} & \end{array} \right]_k \left[\begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right] \quad (\text{II.15})$$

Les paramètres \bar{Q}_{ij} et \bar{c}_{ij} de la couche k sont rapportés aux axes de référence du stratifié.

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des contraintes en cisaillement transverse : σ_{yz} , σ_{xz} . L'expression (II.15) montre que ces deux champs sont découplés.

Avec :

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 \\
\bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\
\bar{C}_{44} &= C_{44}c^2 + C_{55}s^2 \\
\bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44})sc \\
\bar{C}_{55} &= C_{44}s^2 + C_{55}c^2
\end{aligned} \tag{II.16}$$

Les contraintes en *membrane* dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II.17}$$

Ou sous forme contractée :

$$\sigma_k(M) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y) \tag{II.18}$$

Les contraintes en *cisaillement transverse* dans la couche K s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{II.19}$$

$\sigma_k(M)$ Représente la matrice contrainte dans la couche $k: h_{k-1} \leq z \leq h_k$, la matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc *une discontinuité* du champ des contraintes dans les couches successives.

II.4. Loi de comportement des stratifiés

Les matériaux composites sont souvent schématisés par un milieu continu *homogène équivalent anisotrope*. L'étude de leur comportement consiste à passer des propriétés des composantes et de la géométrie du composite. Cette étude comportera deux phases :

- ✓ l'étude du comportement mécanique de chaque pli,
- ✓ l'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis, et désigné généralement par le *comportement du stratifiés* [18].

II.4.1. Caractéristiques du mélange renfort-matrice

Les propriétés mécaniques et géométriques des fibres et de la matrice seront caractérisées par leurs modules d'élasticité, coefficients de Poisson et des fractions volumiques notés respectivement $E_f, E_m, \nu_f, \nu_m, V_f$ et V_m .

La résolution du problème est plutôt complexe à cause des possibilités multiples et variées d'arrangements des fibres dans le composite. Dans ce qui suit on donne quelques expressions simplifiées des modules élastiques du composite unidirectionnel en fonction des caractéristiques des constituants.

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un composite, nous étudions un assemblage de géométrie donnée de deux phases (fibre et matrice) de caractéristiques mécaniques différentes, soumis à des sollicitations simples [19].

Composition du composite (fibre, matrice, vide) :

La teneur en volume des fibres est définie comme :

$$\vartheta_m = \frac{V_f}{S_c} = \frac{\text{Volume de fibre}}{\text{Volume total du composite}}$$

De la même façon, la teneur en volume de la matrice est :

$$\vartheta_m = \frac{V_m}{S_c} = \frac{\text{Volume de matrice}}{\text{Volume total du composite}}$$

II.4.1.1. Module de Young longitudinal E_L (E_1)

Considérons un chargement F parallèle au plan de séparation de la fibre et de la matrice (fig. II.3). Les deux matériaux étant considérés parfaitement collés par hypothèse, **la matrice (m)** et **la fibre (f)** possèdent la même déformation longitudinale ε_L que le matériau composite.

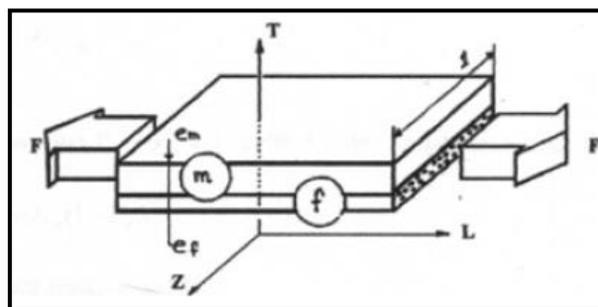


Figure II.4 Chargement longitudinal.

L'état de contraintes dans chaque matériau est un état de traction pure, et les contraintes de traction sont données par :

$$\delta_m = E_m \cdot \varepsilon_L \Rightarrow \text{dans la matrice.}$$

$$\delta_f = E_f \cdot \varepsilon_L \Rightarrow \text{dans la fibre.}$$

La charge totale appliquée est :

$$F = \delta_f S_f + \delta_m S_m \quad (\text{II.20})$$

Où :

S_f et S_m sont respectivement les aires de la section droite de la fibre et de la matrice.

En reportant les expressions des contraintes dans cette dernière relation nous obtenons :

$$F = (E_f S_f + E_m S_m) \varepsilon_L \quad (\text{II.21})$$

La contrainte de traction dans le composite est définie par :

$$\delta = \frac{F}{S} = E_L \varepsilon_L \quad (\text{II.22})$$

En remplaçant F par son expression on obtient :

$$E_L = \frac{E_f S_f}{S} + \frac{E_m S_m}{S} \quad (\text{II.23})$$

Avec :

E_L : Module d'élasticité longitudinal du composite.

$S = S_f + S_m$: Section droite du composite.

Pour un composite de largeur et de longueur égales à l'unité, les fractions volumiques de la fibre (V_f), et de la matrice (V_m) sont données par :

$$V_f = \frac{S_f \times 1}{S \times 1} = \frac{e_f}{e_f + e_m} \quad (\text{II.24})$$

$$V_m = \frac{S_m \times 1}{S \times 1} = \frac{e_m}{e_f + e_m}$$

Le module d'élasticité du composite s'écrit alors :

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (\text{II.25})$$

Finalement, en notons que $V_f + V_m = 1$, cette dernière expression peut s'écrire :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (\text{II.26})$$

La figure suivante représente l'état de contraintes longitudinales :

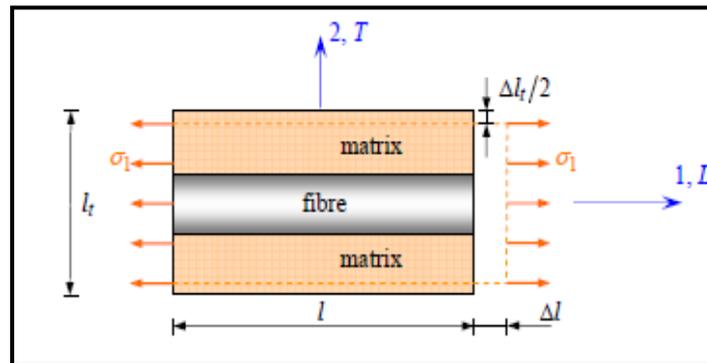


Figure II.5 État de contraintes longitudinales [1].

II.4.1.2 Module de Young transversal E_T (E_2)

Considérons à présent le même matériau que précédemment, soumis à un chargement suivant l'épaisseur du composite (fig II.6).

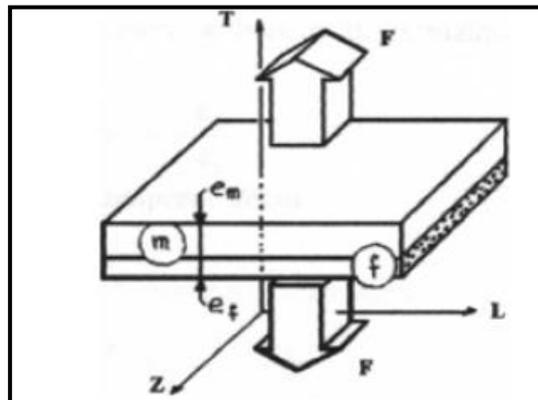


Figure II.6 Chargement transversal.

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale (Fig II.6). Dans cet essai, on suppose que la contrainte transversale est la même dans la fibre et dans la matrice.

La figure suivante représente *traction transversale*.

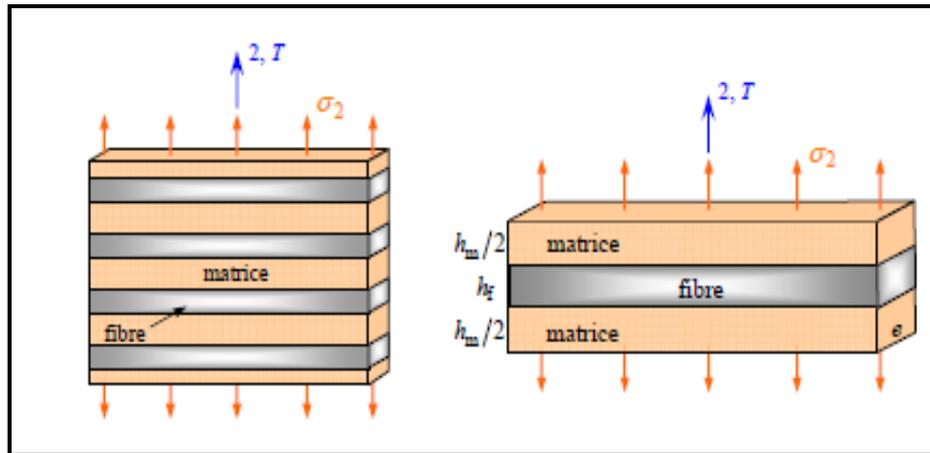


Figure II.7 Schéma simplifié d'une traction transversale [1].

Dans ce cas les états de contraintes dans la fibre et dans la matrice sont identiques, et sont définies par la contrainte de traction dans le composite σ_T , tel que :

$$\delta_f = \delta_m = \delta_T \quad (\text{II.27})$$

La déformation dans le composite est donnée par :

$$\varepsilon_T = \frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{\Delta(e_m + e_f)}{e_f + e_m} = \frac{\Delta e_m}{e_f + e_m} + \frac{\Delta e_f}{e_f + e_m} = \varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f \quad (\text{II.28})$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{\Delta(e_m + e_f)}{e_f + e_m} = \frac{\Delta e_m}{e_f + e_m} + \frac{\Delta e_f}{e_f + e_m} = \varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{1}{E_m} \sigma_T V_m + \frac{1}{E_f} \sigma_T V_f \Rightarrow \frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_m} V_m + \frac{1}{E_f} V_f \quad (\text{II.30})$$

Le module d'élasticité transversal a pour expression :

$$E_T = \frac{E_m E_f}{V_m E_f + V_f E_m} \quad (\text{II.31})$$

II.4.1.3. Coefficient de Poisson longitudinale ν_{LT}

Pour déterminer le coefficient de poisson longitudinal ν_{LT} , nous reprenons schéma précédent dans lequel le composite unidirectionnel est schématisé par couches successives. Le coefficient ν_{LT} est déterminé dans un essai de traction longitudinal, schématisé sur la figure.

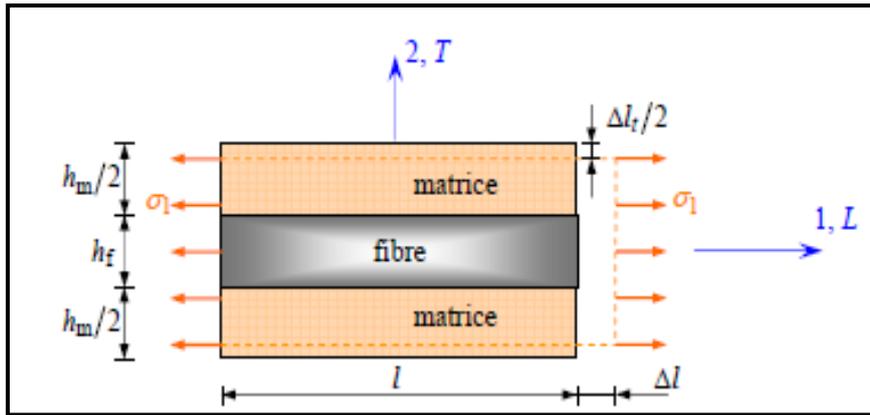


Figure II.8 schémas par couches d'une traction longitudinale [1].

Il en résulte que les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$E_{Tm} = -\vartheta_m \varepsilon_L$$

$$E_{Tf} = -\vartheta_f \varepsilon_L \quad (\text{II.32})$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\vartheta_m \varepsilon_L h_m - \vartheta_f \varepsilon_L h_f \quad (\text{II.33})$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta l_t}{h_f h_m} = -[\vartheta_m(1 - V_m) + \vartheta_f V_f] \varepsilon_L \quad (\text{II.34})$$

D'où l'expression du coefficient de poisson :

$$\vartheta_{LT} = \vartheta_f V_f + \vartheta_m(1 - \vartheta_m) \quad (\text{II.35})$$

II.4.1.4. Module de cisaillement longitudinal G_{LT} G_{12}

Dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule n'est pas nulle (fig.II.9), où on a mis en évidence même la déformation correspondante.

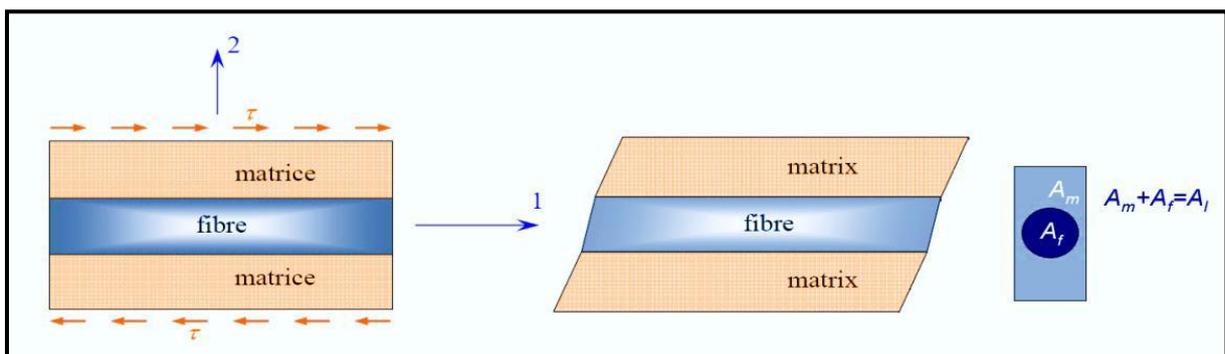


Figure II.9 Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal [1].

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m \quad (\text{II.36})$$

La déformation totale de la cellule est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_m \gamma_m + h_f \gamma_f \quad (\text{II.37})$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma_f = \frac{\delta}{h_m + h_f} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (\text{II.38})$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT} suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \quad (\text{II.39})$$

En combinant les expressions précédentes nous obtenant :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m} \quad (\text{II.40})$$

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{V_f G_m + (1-V_f) G_f} \quad (\text{II.41})$$

II.4.2. Loi de Hooke généralisée

Pour un milieu élastique linéaire, la loi de comportement va relier les deux tenseurs de contraintes et déformations.

La loi que nous considérons est la forme $\sigma = k \cdot \varepsilon$ ou k une fonction linéaire.

Alors la loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad \text{avec } i, j, k, l = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{II.42})$$

C : la matrice de rigidité du matériau (le tenseur d'élasticité).

ε : est le tenseur de déformations.

σ : est le tenseur de contraintes.

La relation (40) peut être écrite sous la forme inverse :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad \text{avec } i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{II.43})$$

- La matrice S est appelée *matrice de souplesse* ou *de flexibilité* à la même forme que

la matrice de rigidité.

- Les deux tenseurs " σ " et " ε " sont des matrices (3x3) symétriques et dont chacun à 6 coefficients indépendants, donc k comporte 36 coefficients qui lient la matrice de rigidité (ou de souplesse) est déterminée par 21 constantes indépendantes, ce cas

correspond à un matériau possédant aucun propriété de symétrie si le matériaux possède un plan de symétrie, le nombre de constantes indépendantes est réduit à **13**.

Le tenseur des contraintes :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \\ \delta_{33} \\ \delta_{23} = \delta_{32} \\ \delta_{13} = \delta_{31} \\ \delta_{12} = \delta_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

Le tenseur des déformations :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

$$\Rightarrow \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

La ‘‘loi de Hooke’’ est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes et de déformations selon l’équation :

$$\{\delta\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{II.47})$$

II.4.3. Différents Types des matériaux

Dans le premier chapitre, nous avons parlé des types de matériaux. Dans ce chapitre, nous détaillerons plus sur ces types :

II.4.3.1. Matériaux anisotropes

Les *matériaux anisotropes* sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie [20]. La *loi de Hooke* peut être exprimée par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \delta_{kl} \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

C_{ijkl} : La matrice de rigidité du matériau (Tenseur d'élasticité).

S_{ijkl} : Tenseur de souplesse.

ε_{kl} : Tenseur de déformation.

σ_{ij} : tenseur de contrainte.

Le tenseur de rigidité a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes σ_{ij} et de déformation ε_{kl} , il y a une réduction des coefficients à 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants. Les distorsions angulaires sont exprimées en fonction des déplacements :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \text{ et } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \text{ et } \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} & \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jilk} \end{cases}$$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{sym} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

En inversant (II.46), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & C_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & C_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & \text{sym} & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

II.4.3.2. Matériaux orthotropes

Selon Kollar et Springer [21], un milieu est dit *orthotrope* pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par *symétrie* relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels.

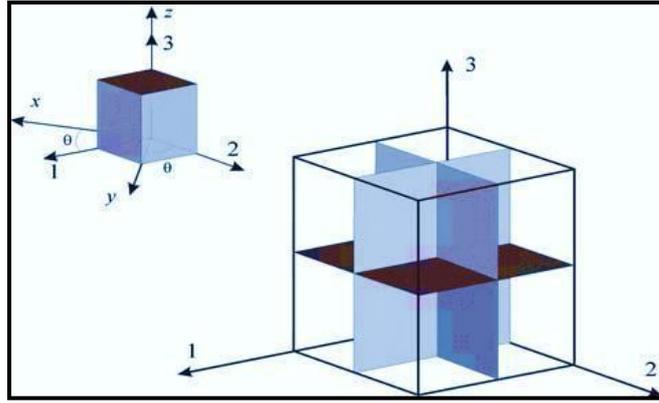


Figure II.10 schématisant un matériau orthotrope [21].

Donc, Le nombre des coefficients indépendants est réduit à 9.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & sym & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & sym & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

- ❖ 3 modules d'élasticité longitudinale E_1, E_2, E_3 dans les directions de l'orthotrope.
- ❖ 3 modules de cisaillement G_{31}, G_{23}, G_{12} .
- ❖ $\nu_{ij} : (\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13})$ est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i .
- ❖ La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Avec :

- E_{ij} et G_{ij} sont le module d'Young et Coulomb respectivement.
- ν_{ij} est le coefficient de Poisson.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Les composantes de la matrice de rigidité du matériau, sont obtenues par inversion de la matrice de souplesse S_{ij} :

$$C_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad C_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad C_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{44} = C_{23}, \quad C_{55} = C_{13}, \quad C_{66} = C_{12}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad C_{13} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad C_{23} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

II.4.3.3. Matériaux isotropes

L'hypothèse d'*isotropie* impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autres termes, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. Donc, les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \quad \text{et} \quad G_{12} = G_{23} = G_{13} = G.$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II.54})$$

$$\text{Avec : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

II.4.4. Relation contrainte-déformation selon la théorie de Mindlin –Reissner

II.4.4.1. Plaque homogène isotrope

Si l'on s'intéresse à un petit élément de matière subissant de petites déformations, alors sa loi de déformation (loi de Hooke généralisée) est linéaire et réversible quelle que soit la sollicitation.

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope, cette loi définit, sous forme matricielle, les relations contraintes-déformations suivantes [16]:

$$\{\sigma\}=[Q]_f \cdot \{k\} \quad (\text{II.55})$$

$$\{\tau\}=[C]_c \cdot \{\gamma_c\} \quad (\text{II.56})$$

Avec $\{\sigma\}$ et $\{\tau\}$ sont les contraintes plans et de cisaillement, définies par :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_{12}\} \text{ et } \{\tau\} = \{\tau_{13} \quad \tau_{23}\}$$

$\{k\}$ et $\{\gamma_c\}$ sont respectivement la courbure de flexion et la déformation de cisaillement transverse :

Avec :

$$[Q]_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \text{ et } [Q]_c = k \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

La matrice de comportement de cisaillement $[Q]_c$ dépend du coefficient k de correction du Cisaillement transverse.

II.4.4.2. Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres

Dans le cas où le matériau est constitué d'une stratification de couches orthotropes dans le plan (x, y) et isotropes dans le plan (y, z) (fig II.10), nous pouvons écrire pour une couche:

$$\{\sigma_x\}=[Q_x]_f \cdot \{\varepsilon_x\} \quad \{\tau_x\}=[C_x]_c \cdot \{\gamma_z\} \quad (\text{II.58})$$

$$\{\sigma_x\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}\} \text{ et } \{\tau_x\} = \{\tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} \quad (\text{II.59})$$

De même :

$$\{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\} \text{ et } \{\gamma_x\} = \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\} \quad (\text{II.60})$$

Dans le repère d'orthotrope (x, y, z), les matrices de comportement élastiques s'écrivent:

$$[Q_x]_f = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{bmatrix} \quad [Q_x]_c = \begin{bmatrix} C_{xz} & 0 \\ 0 & C_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

$$Q_{xx} = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}, \quad Q_{yy} = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}, \quad Q_{xy} = \frac{E_x\nu_{xy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}, \quad C_{yz} = \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})}$$

Le passage du repère orthotrope au repère cartésien se fait par l'intermédiaire des matrices de transformation $[T_1]$ et $[T_2]$ ainsi:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & CS \\ S^2 & C^2 & -CS \\ -2CS & 2CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix}, [T_2] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Avec :

$$\{\sigma\} = [Q]_f \{\varepsilon\} \{\tau\} = [c]_c \{\gamma\}$$

$$[Q]_f = [T_1]^t [Q_x] [T_1] [c]_c = [T_2]^t [c_x] [T_2]$$

Avec : $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

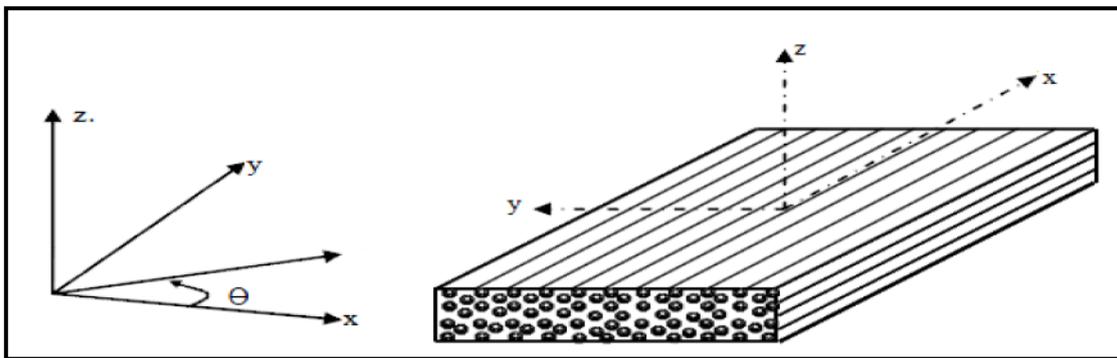


Figure II.11 Axes principaux et axes de référence d'une couche orthotrope [16].

II.4.5. Les efforts résultants dans le stratifié

II.4.5.1. Résultantes en membrane

D'après Berthelot [1], le vecteur des résultantes en membrane noté $N(x, y)$, d'une couche k , est défini par:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.63})$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y)] dz$$

$$= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz] + \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz]$$

$$= [\sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k] \varepsilon_m(x, y) + [\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k] k(x, y)$$

Soit, en définitive :

$$N(x,y) = A_{ij} \varepsilon_m(x,y) + B_{ij} \kappa(x,y) \quad (\text{II.64})$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (\text{II.65})$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (\text{II.66})$$

Les expressions développées des résultantes s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

N_x, N_y et N_{xy} sont les résultantes *par unité de longueur*, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et de contrainte de cisaillement dans le plan (x, y). Elles sont schématisées sur la (fig II.12).

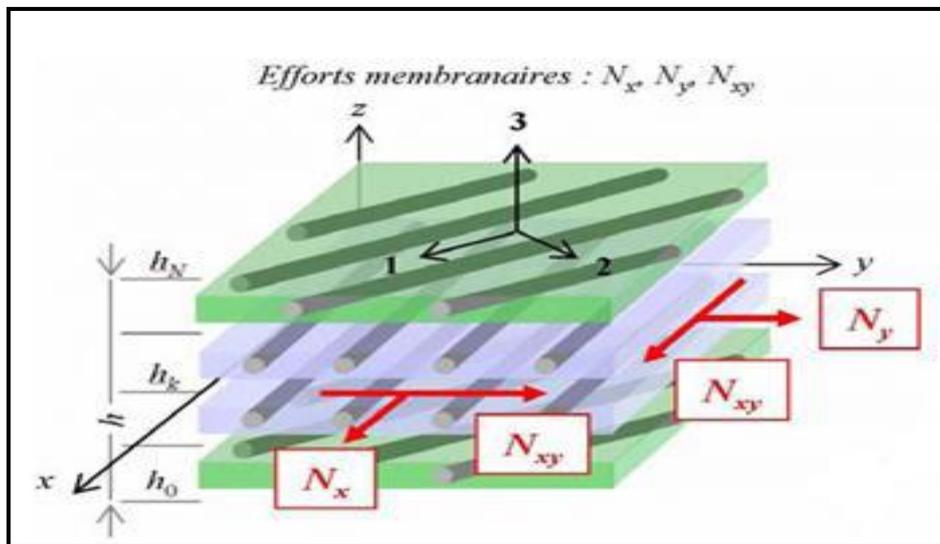


Figure II.12 Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié [22].

II.4.5.2. Moment de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (\text{II.68})$$

L'expression (II.18) conduit à l'expression des moments de flexion et de torsion :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[z [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^2 [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (\text{II.69})$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \quad (\text{II.70})$$

$$M(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \quad (\text{II.71})$$

Soit :

$$M(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D \kappa(x, y) \quad (\text{II.72})$$

Où, L'expression de la matrice D

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \quad (\text{II.73})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k \quad (\text{II.74})$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.75})$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur (fig II.13).

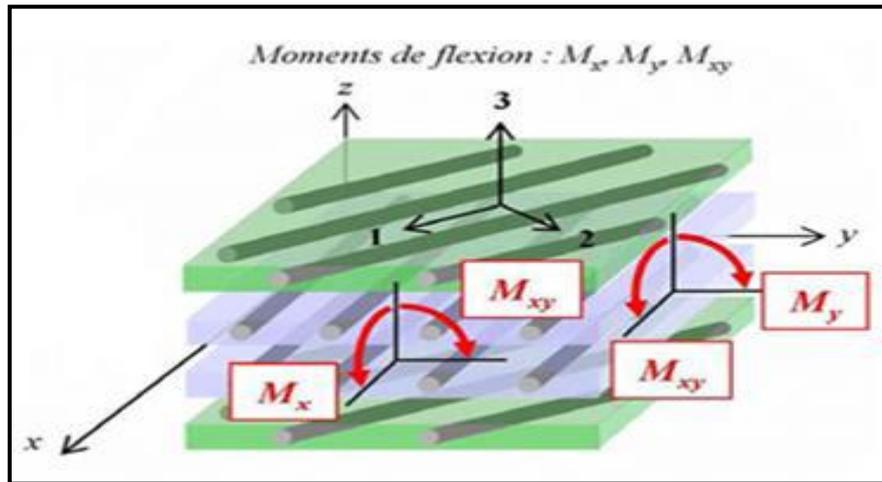


Figure II.13 Schématisation des résultantes des moments de flexion et de torsion [22].

II.4.5.3. Résultantes en cisaillement

L'équation constitutive d'un stratifié, tenant compte du cisaillement transverse, est d'après

La superposition de la théorie classique des stratifiés, et de l'équation faisant intervenir

Les résultantes en cisaillement Q_x et Q_y soit :

$$Q(x,y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.76})$$

Compte tenu des expressions (II.75) et (II.76), l'équation des résultantes en cisaillement

s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.78})$$

Avec :

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{C}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (\text{II.79})$$

Les coefficients ont H_{ij} même forme que les coefficients A_{ij} . Ils en diffèrent par l'utilisation des coefficients \bar{C}_{ij} de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients \bar{Q}_{ij} de rigidité réduit.

Les résultantes en cisaillement Q_x et Q_y Ils sont schématisés sur (fig II.14).

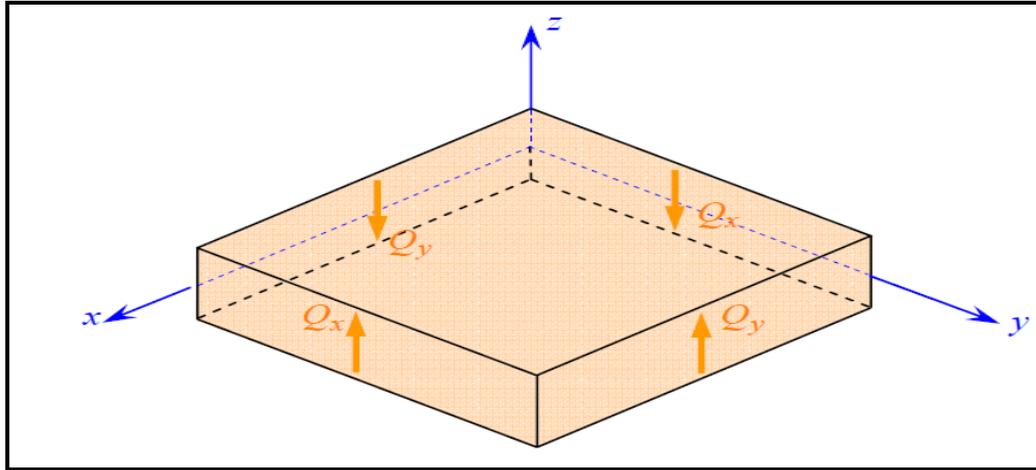


Figure II.14 Représentation schématique des résultantes de cisaillement [1].

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \text{ où } \begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \\ H_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{C}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \end{cases} \quad (\text{II.80})$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice **ABDH**) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des Stratifiés :

- ✓ La matrice **A** correspond au comportement de **membrane**.
- ✓ La matrice **D** correspond au comportement de **flexion**.

- ✓ La matrice \mathbf{B} correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*.
- ✓ La matrice \mathbf{H} correspond au comportement de *cisaillement transverse*.

Ainsi, si \mathbf{B} n'est pas *nul*, un effort de *traction* dans le plan moyen entraîne une *flexion* du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

- * Les termes A_{16} et A_{26} correspondent aux couplages plans entre *traction* et *cisaillement*.
- * Les termes D_{16} et D_{26} quantifient les couplages entre *flexion* et *torsion* de la plaque stratifiée. Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite.

II.4.6. Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques stratifiées

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchhoff qui annule l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces.

La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de par l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de CT constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/CT. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du CT sont introduits [23].

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre. En optant pour ce choix, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Fig II.14). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre. Des facteurs de corrections doivent être Introduits [24].

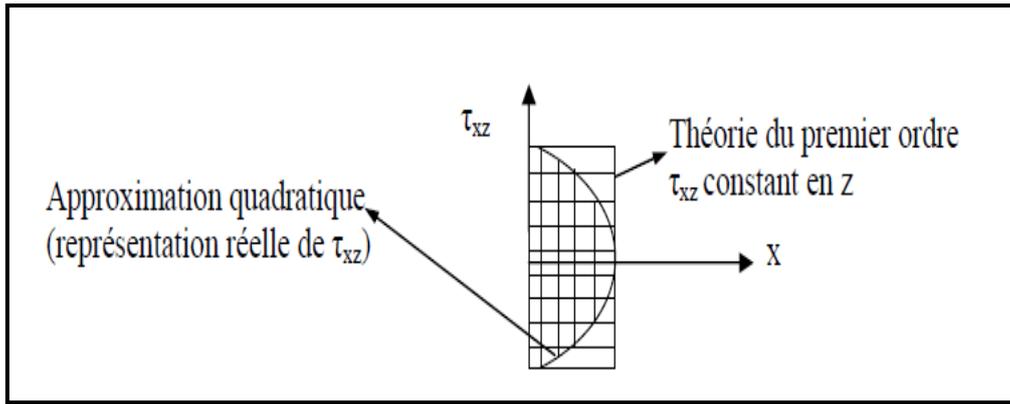


Figure II.15 Approximations de la contrainte du cisaillement transversal CT Constante (FSDT) et quadratique (HSDT) [25].

Pour les plaques composites, la précision des résultats de la théorie du premier ordre en CT (par rapport aux solutions tridimensionnelles) dépend beaucoup de la loi de comportement modifiée par les facteurs correction de CT. Pour les plaques homogènes, le facteur de correction de CT est généralement admis $k=5/6$ (comme pour les poutres rectangulaires).

Chapitre III

Formulation de l'élément fini utilisé

Chapitre III

Formulation de l'élément fini utilisé

III.1. Introduction

La méthode des éléments finis est un outil de résolution de problèmes aux dérivées partielles avec conditions aux limites imposées ; par exemple, l'équation du quatrième ordre pour le déplacement caractéristique de la flexion d'une plaque mince. Cependant, la M.E.F. n'est pas basée sur la forme différentielle de l'équation aux dérivées partielles mais sur une formulation intégrale de type projectif ou variation el. Dans ce dernier cas, il est important de noter qu'il y a équivalence entre résoudre un problème différentiel étreindre stationnaire une fonctionnelle (formulation intégrale) L'obtention d'une solution exacte étant aussi difficile en formulation intégrale qu'en formulation différentielle, une solution approchée est recherchée sous la forme de fonctions d'approximation (généralement polynomiales) propres à des morceaux du domaine complet.

Ces sous-domaines, à la taille relativement réduite et aux formes topologiquement simples, sont les éléments. Les coefficients des fonctions évoquées sont déterminés en utilisant les valeurs de ces fonctions en des points particuliers des éléments : les nœuds [26].

III.2. Historique

La MEF (Méthode des Eléments Finis) est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement). Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont données de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangles (Courant, 1943) ; mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément fini date de 1960(Clough). Les années 60 ont vu la MEF s'attaquer à tous les domaines du calcul des solides et structures, avant de déborder dans d'autres domaines : écoulements souterrains, transfert de chaleur, fluides, etc. (Zienkiewicz, Cheung, 1965). En fait, les ingénieurs (aéronautique, génie civil et mécanique surtout) développent la MEF pour l'appliquer à leurs problèmes pratiques, avant que les bases théoriques ne soient bien établies.

Dès 1970, la méthode envahit tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor est, dès le début et aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateurs [27].

III.3. Principe de la méthode des éléments finis

La modélisation physique de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Eléments Finis MEF est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

Le solide est alors divisé en un certain nombre de sous-domaines appelés éléments, dont l'assemblage permet la reconstitution de la géométrie initiale. Chacun des éléments est relié à ces voisins par des nœuds dont les degrés de liberté constituent les inconnues du problème [28].

III.4. Formulation de l'élément fini utilisé

III.4.1. Description de l'élément utilisé

Dans la présente étude, un élément fini bidimensionnelle (2D), construit sur la base de la théorie du premier ordre (FSDT) a été utilisé. L'élément formulé est de forme rectangulaire défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté (5DDL) : deux degrés dans le plan (x, y) qui sont $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ et trois hors plan $w_0(x, y)$, $Q_x(x, y)$, $Q_y(x, y)$ fig(III. 1).

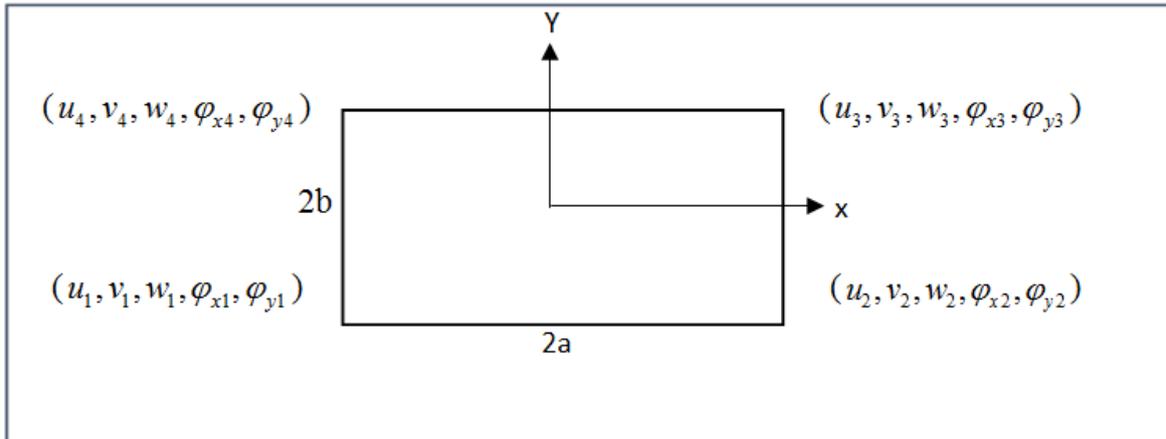


Figure III.1 L'élément rectangulaire et ses variables nodales correspondantes.

III.4.2. Cinématique de la théorie

L'élément utilisé est basé sur la théorie du premier ordre, alors les déplacements dans le plan et hors plan sont données par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Les variables des déplacements sont :

$$u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t), \varphi_x(x, y, t), \varphi_y(x, y, t).$$

III.4.3. Approximation nodale des déplacements

Les variables $u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t), \varphi_x(x, y, t), \varphi_y(x, y, t)$ sont interpolées en fonctions des variables nodales pour :

$$\delta(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \quad (\text{III.2})$$

Les coefficients $(\alpha_0 - \alpha_3)$ peuvent être déterminés à partir des variables nodales.

Les fonctions de formes sont les fonctions N_i qui relient les déplacements d'un point quelconques intérieur à un élément aux n déplacements nodaux q_i .

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \\ N_2 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \\ N_3 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \\ N_4 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y) \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

III.4.4. Champs des déplacements

Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées (x, y) de la plaque peut être exprimé par :

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \delta_i \quad (\text{III.4})$$

Où :

$\delta(x, y)$ est le vecteur des déplacements.

$N_i(x, y)$ Les fonctions de forme pour l'élément.

$\{\delta_i\}$ est le vecteur des déplacements.

Pour cet élément qui est un rectangulaire de quatre nœuds on a :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_i \\ w(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) w_i \\ \varphi_x(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{xi} \\ \varphi_y(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \varphi_{yi} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Où $u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}$, sont les déplacements d'un nœud i .

Est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, étant le numéro du nœud considéré i .

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot q$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

III.4.5. Relations cinématiques

Les déformations sont liés aux déplacements par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Sous forme contracté nous permet d'avoir :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(x, y) + z k(x, y) \quad (\text{III.8})$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \{\varepsilon\} \text{ déformation } \varepsilon_m(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$\{K\} \text{ courbures } k(x,y) = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Les déformations en membrane sont exprimées par :

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]\{q\}$$

Où :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$[B_m]$: La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds. Les déformations en **flexion** et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = z k(x, y) \quad (\text{III.12})$$

Où k la matrice de courbure s'écrit :

$$\{k\} = [B_f]\{q\} \quad (\text{III.13})$$

En introduisant les fonctions de forme :

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Les déformations en **cisaillement transverse** sont exprimées par :

$$\{\gamma\} = [B_c]\{q\} \quad (\text{III.15})$$

Les déformations peuvent être en fonction de vecteur des déplacements :

$$\begin{Bmatrix} Y_{xz} \\ Y_{yz} \end{Bmatrix} = [B_c] \{q\} \quad (\text{III.16})$$

$$\gamma_c \begin{Bmatrix} Y_{yz} \\ Y_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + Q_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Donc :

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

III.4.6. Loi de comportement

Les expressions des résultantes et des moments sont :

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A] \{\varepsilon_m\} + [B] \{k\} \\ \{M\} &= [B] \{\varepsilon_m\} + [D] \{k\} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\{Q\} = [H] \{\gamma_c\}$$

III.4.7. Évaluation de la matrice de rigidité

III.4.7.1. Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon^T dv \quad (\text{III.20})$$

Où : v est le volume de la plaque.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations constitutives des stratifiés, l'énergie potentielle de déformation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A ((\varepsilon_m)^T \{N\} + \{k\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{Q\}) dA \\ U &= \frac{1}{2} \int_A ((\varepsilon_m)^T [A] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_m\}^T [B] \{k\} + \{k\}^T [B] \{\varepsilon_m\} + \{k\}^T [D] \{k\} + \{\gamma\}^T [H] \{\gamma\}) dA \quad (\text{III.21}) \\ U &= \frac{1}{2} \int_A \left(\{B_m\}^T \{q\}^T [A] \{B_m\} \{q\} + \{B_m\}^T \{q\}^T [B] \{B_f\} \{q\} + \{B_f\}^T \{q\}^T [B] \{B_m\} \{q\} \right. \\ &\quad \left. + \{B_f\}^T \{q\}^T [D] \{B_f\} \{q\} + \{q\}^T \{B_c\}^T [H] \{q\} \{B_c\} \right) dA \end{aligned}$$

Donc :

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_A \begin{pmatrix} \{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} \\ + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\} \end{pmatrix} \{q\} dA \quad (\text{III. 22})$$

III. 4.7.2 Problème de flexion

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + W$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation, soit :

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0$$

$$\int_A \left[\{\partial q\}^T \left(\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\} \right) \{q\} \right] dA - \{\partial q\} \{F^e\} \quad (\text{III. 23})$$

Qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante :

$$[k^e] \{q\} = \{F^e\} \quad (\text{III. 24})$$

Où la matrice de rigidité élémentaire :

$$[k^e] = \int_A \left(\{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} + \{B_c\}^T [H] \{B_c\} \right) dA \quad (\text{III. 25})$$

La matrice $[k^e]$ peut-être écrite sous la forme :

$$[k^e] = [k_1^e] + [k_2^e] + [k_3^e] + [k_4^e] + [k_5^e]$$

Avec :

$$[k_1^e] = \int_A \{B_m\}^T [A] \{B_m\} dA$$

$$[k_2^e] = \int_A \{B_m\}^T [B] \{B_f\} dA$$

$$[k_3^e] = \int_A \{B_f\}^T [B] \{B_m\} dA \quad (\text{III.26})$$

$$[k_4^e] = \int_A \{B_f\}^T [D] \{B_f\} dA$$

$$[k_5^e] = \int_A \{B_c\}^T [H] \{B_c\} dA$$

$[k_1^e]$: Matrice de rigidité élémentaire membranaire.

$[k_2^e]$ et $[k_3^e]$: Matrices de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion.

$[k_4^e]$: Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.

$[k_5^e]$: Matrice de rigidité élémentaire de cisaillement transverse.

L'assemblage des matrices de rigidité et des vecteurs forces élémentaires permet d'obtenir l'équation suivante :

$$[K]\{q\} = \{f\} \quad (\text{III.27})$$

Avec $[K]$ est la matrice de rigidité globale, $\{f\}$ est le vecteur de force global et $\{q\}$ est le vecteur des déplacements global des nœuds de la plaque.

Chapitre IV

Validation et étude paramétrique

Chapitre IV

Validation et étude paramétrique

IV.1. Introduction

On montre à travers une série d'applications la performance de l'élément utilisé dans la résolution des problèmes de flexion des plaques isotropes et composites stratifiées. Les résultats obtenus seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature. Une fois la performance de l'élément est confirmée, on procède à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres tels que l'orientation des fibres, le nombre de couches et le degré d'anisotropie sur la flèche maximale des plaques composites stratifiées.

IV.2. Conditions aux limites adoptées

La figure (IV.1) montre la géométrie pour une plaque épaisse.

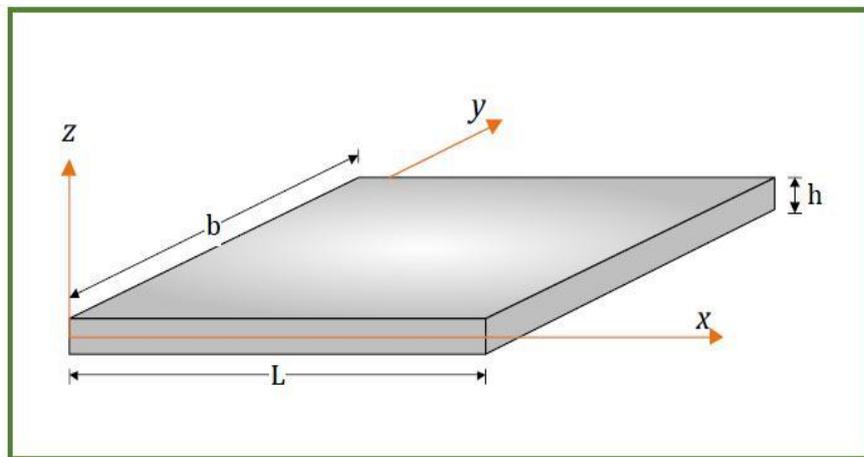


Figure IV.1 Géométrie de la plaque.

Les conditions aux limites considérées pour une plaque.

SSSS : Plaque simplement appuyée sur les quatre bords.

EEEE : Plaque encastée sur les quatre bords.

ESES : Deux bords opposés encastés et deux autres bords simplement appuyés.

ELEL : Deux bords opposés encastés et deux autres bords libres.

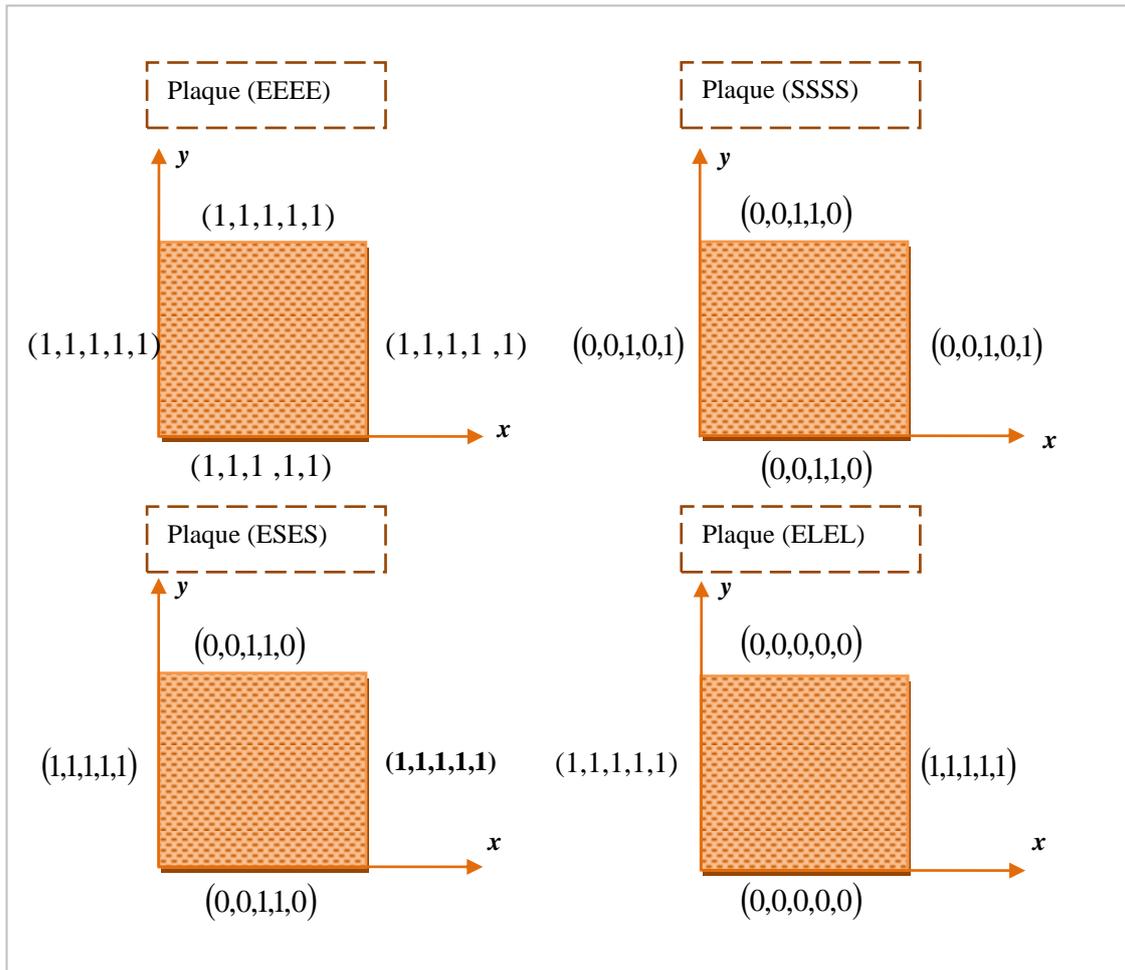


Figure IV.2 Conditions aux limites.

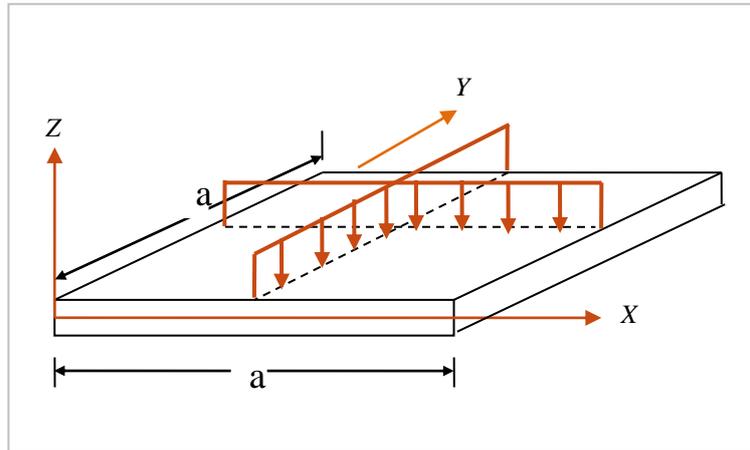
IV.3. Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques

IV.3.1. Plaques isotropes

On se propose de calculer la flèche maximale d'une plaque carrée de côté a , soumise à un chargement uniforme $p = 1\text{N/m}^2$, pour différents maillages et différents rapports d'épaisseurs ($a/h = 2, 3, 4, 5$ et 10). La plaque est construite d'un matériau de module d'élasticité $E = 10,92\text{ Mpa}$; de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et Module de cisaillement $G = 4,2\text{ Mpa}$. La convergence de déplacement transversal pour les deux cas de conditions aux limites est présentée dans les tableaux (IV.1) et (IV.2) ainsi que dans les figures (IV.4) et (IV.6). Les résultats obtenus sont comparés avec des modèles analytiques et numériques.

$$W_{max} = \frac{100 \cdot D \cdot w}{q \cdot a^4} \tag{IV.1}$$

avec $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$



. **Figure IV.3** Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous chargement uniformément répartie

Tableau IV.1 La flèche maximale d'une plaque isotrope simplement appuyée.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur a/h				
		2	3	4	5	10
Présent élément (2×2)	R4-FSDT	1	0.6358	0.5	0.4350	0.3480
Présent élément (4×4)	R4-FSDT	0.9687	0.6604	0.5460	0.4970	0.4240
Présent élément (6×6)	R4-FSDT	0.9500	0.6518	0.5420	0.4960	0.4280
Présent élément (8×8)	R4-FSDT	0.94375	0.6469	0.5420	0.4940	0.4280
Présent élément (10×10)	R4-FSDT	0.9370	0.6444	0.5390	0.4940	0.4280
Présent élément (12×12)	R4-FSDT	0.9375	0.6432	0.5390	0.4940	0.4280
Présent élément (14×14)	R4-FSDT	0.9312	0.6419	0.5390	0.4940	0.4280
Belarbi (16×16)[33]	RSFT52	0.8847	0.6191	0.5251	0.4809	0.4164
Kant et al [32]	HSDT	0.8530	0.6120	0.5222	0.4800	0.4230
Kant [29]	HSDT	/	/	/	0.4800	0.4230
Yuan et mailler [31]	FSDT	/	/	0.6139	0.5544	0.4614
Rao et al [30]	FSDT	/	/	0.5157	0.4763	0.4237

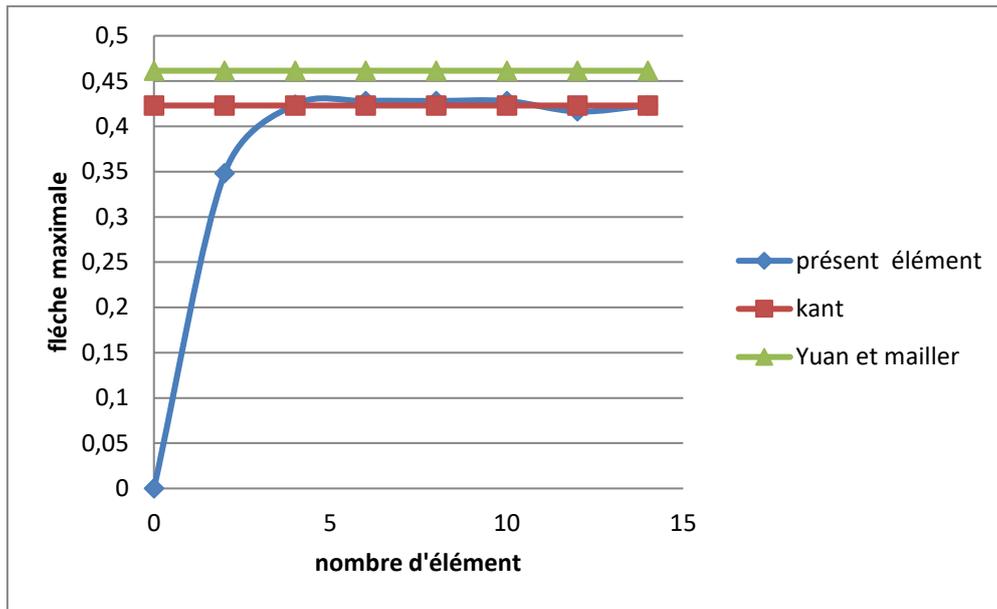


Figure IV.4 Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope simplement Appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments.

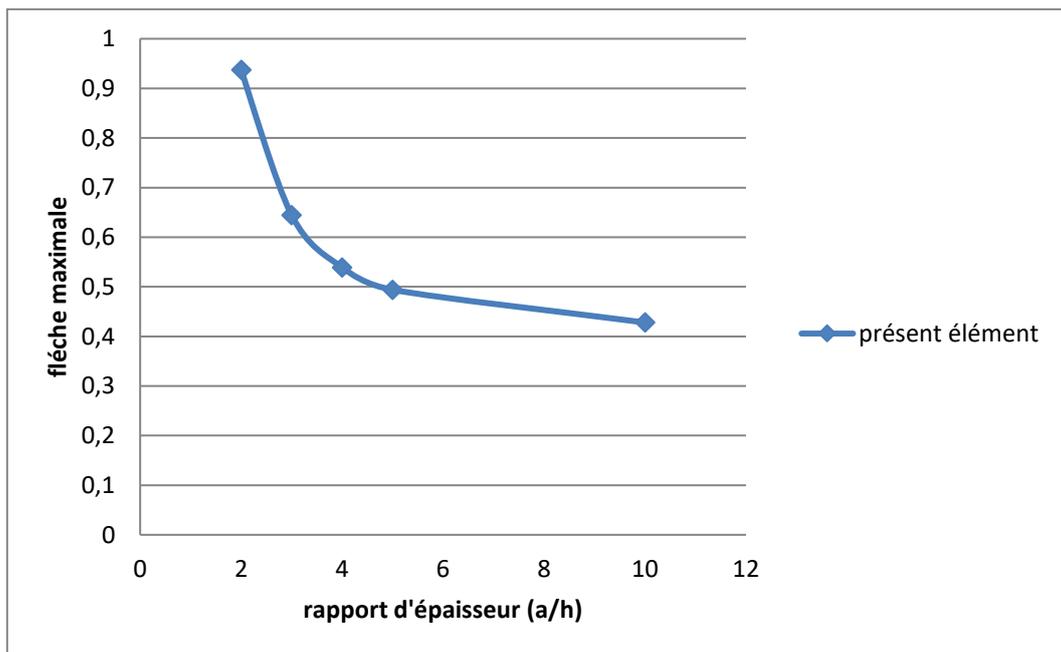


Figure IV.5 Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée.

Tableau IV.2 La flèche maximale d'une plaque isotrope encadrée.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur a/h				
		2	3	4	5	10
Présent élément (2×2)	R4-FSDT	0.6687	0.2975	0.1671	0.2613	0.0267
Présent élément (4×4)	R4-FSDT	0.6750	0.3666	0.2589	0.2080	0.1430
Présent élément (6×6)	R4-FSDT	0.6687	0.3679	0.2632	0.2144	0.1475
Présent élément (8×8)	R4-FSDT	0.6625	0.3691	0.2644	0.2144	0.1487
Présent élément (10×10)	R4-FSDT	0.6625	0.3691	0.2648	0.2160	0.1493
Présent élément (12×12)	R4-FSDT	0.6625	0.3691	0.2652	0.2160	0.1497
Présent élément (14×14)	R4-FSDT	0.6625	0.3691	0.2652	0.2160	0.1499
Reddy [34]	Analytique	/	/	/	/	0.1560
Ferrira [35]	Numérique	/	/	/	/	0.1503

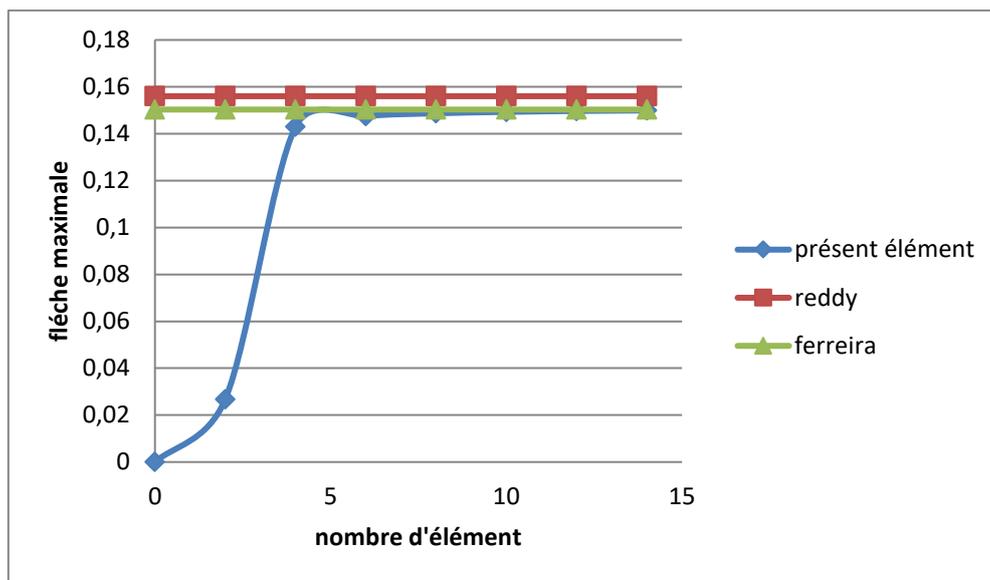


Figure IV.6 Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope encadrée (EEEE), en fonction de nombre des éléments.

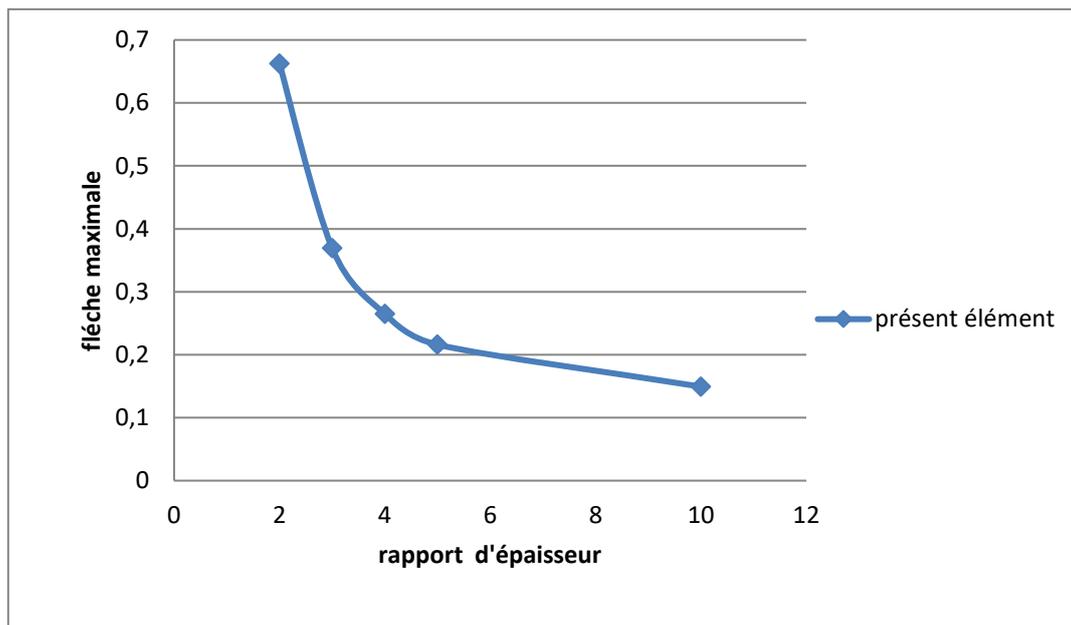


Figure IV.7 Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque isotrope carrée encadrée.

Interprétation des résultats :

Selon les tableaux et les figures, les résultats obtenus par le présent élément pour les deux cas sont en bon accord avec la solution analytique de Kant [29] et Reddy [34] ainsi qu'avec les résultats numériques de Ferreira [35] en utilisant un modèle d'éléments finis, basés sur des théories du premier ordre [30-31].

L'effet de rapport épaisseur (a/h) sur la variation du déplacement transversal pour les deux cas de conditions aux limites (SSSS et EEEE) est montré sur les figures (IV.5) et (IV.7) respectivement.

D'après les figures, nous constatons que quand le rapport d'épaisseur (a/h) augmente, la flèche maximale diminue.

IV.3.2. Plaques stratifiées

Dans cette section, deux exemples ont été considérés pour mettre en évidence la performance du modèle proposé dans l'analyse du comportement des plaques stratifiées.

IV.3.2.1. Plaque stratifiée à trois couches (0 / 90 / 0) sous chargement uniforme

Dans cet exemple, On considère une plaque stratifiée carrée simplement appuyée différents maillages et différents rapports d'épaisseurs ($a/h = 2, 5, 10, 20$ et 50) comme épaisseur.

Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes :

$$E_{11} = 25, E_{22} = 1, G_{12} = G_{13} = 0.5, G_{23} = 0.2, \nu = 0.25$$

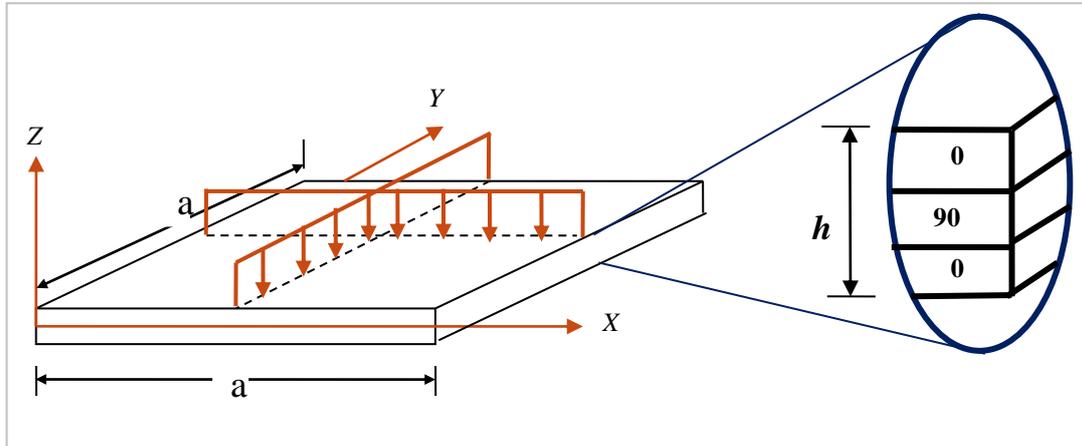


Figure IV.8 Plaque stratifiée carrée à trois couches simplement appuyées sous chargement uniformément répartie.

La convergence de déplacement transversal pour les deux cas de conditions aux limites est présentée dans le tableau (IV.3) ainsi que dans la figure (IV.9). On remarque que les résultats obtenus sont très satisfaisants en comparant avec les modèles analytiques et numériques. Par ailleurs, l'effet du rapport d'épaisseur sur le déplacement transversal est montré dans la figure (IV. 10). Comme le rapport (a/h) augmente, les valeurs du déplacement transversal diminuent.

Tableau IV.3 La flèche maximale d'une plaque stratifiée à trois couches (0/90/0).

Références	Rapport d'épaisseur (a/h)				
	2	5	10	20	50
Présent élément (2×2)	0,6141	2,1147	0,9403	0,6141	0,5187
Présent élément (4×4)	0,7516	2,0510	1,0321	0,7512	0,6701
Présent élément (6×6)	0,756	2,0198	1,0285	0,7556	0,6768
Présent élément (8×8)	0,7575	2,0084	1,0269	0,7575	0,6792
Présent élément (10×10)	0,7582	2,0032	1,026	0,7582	0,6805
Présent élément (12×12)	0,7586	2,0003	1,0256	0,7586	0,6812
Présent élément (14×14)	0,7588	1,9985	1,0253	0,7588	0,6832
Reddy[34]	0,7573	/	1,09	0,776	/
Belinhai et Dinis[36]	/	/	1,0225	0,7583	/
Xiao et al. [37]	/	2,1044	1,0576	0,7794	/

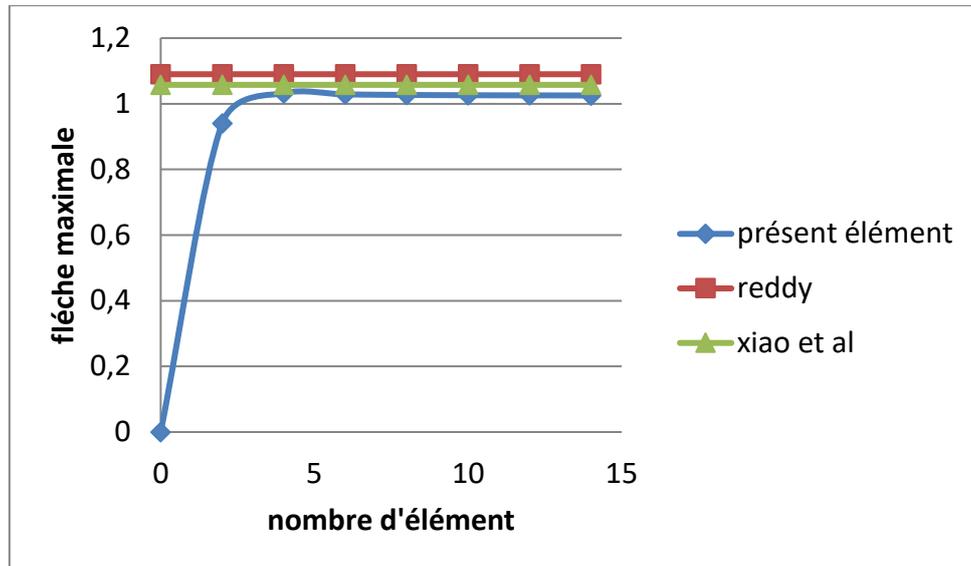


Figure IV.9 Convergence de la flèche maximale d'une plaque stratifiée trois couches simplement appuyée (SSSS), en fonction du nombre des éléments.

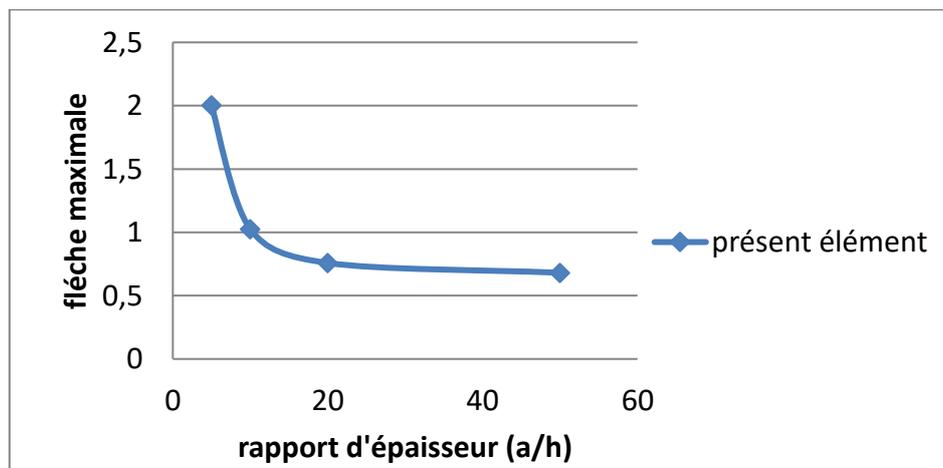


Figure IV.10 Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque stratifiée trois couches simplement appuyée.

IV.3.2.2. Plaque stratifiée à cinq couches (0 / 90 / 90/90/0) sous chargement uniforme :

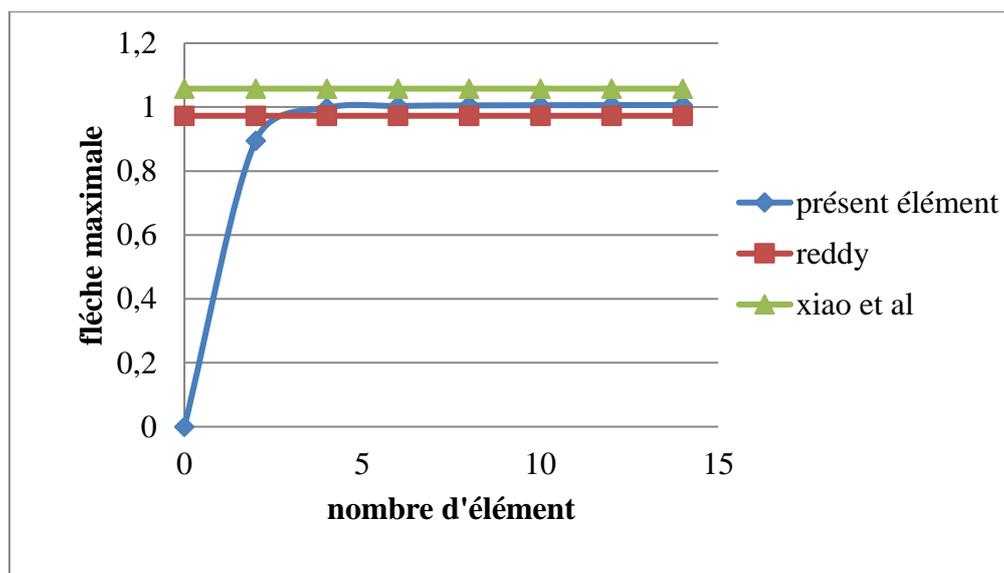
Dans cet exemple, on considère une plaque stratifiée carrée simplement appuyée. Différents maillages et différents rapports d'épaisseurs ($a/h = 2, 5, 10, 20$ et 50) sont considérés dans la présente étude.

Les caractéristiques mécaniques de chaque couche sont les suivantes:

$$E_{11} = 25, E_{22} = 1, G_{12} = G_{13} = 0.5, G_{23} = 0.2, \nu = 0.25$$

Tableau IV.4 La flèche maximale d'une plaque stratifiée à cinq couches (0/90/90/90/0).

Références	Rapport d'épaisseur (a/h)				
	2	5	10	20	50
Présent élément (2×2)	8,7618	1,9411	0,8947	0,6032	0,5158
Présent élément (4×4)	7,5893	1,8944	0,9971	0,7466	0,6722
Présent élément (6×6)	7,4112	1,8779	1,0036	0,76	0,6877
Présent élément (8×8)	7,3531	1,8721	1,0052	0,764	0,6925
Présent élément (10×10)	7,3268	1,8694	1,0058	0,7657	0,6947
Présent élément (12×12)	7,3125	1,8678	1,0062	0,7666	0,6958
Présent élément (14×14)	7,3043	1,867	1,0063	0,7671	0,6965
Reddy[34]	/	/	0,9727	0,7581	/
Belinhai et Dinis[36]	/	/	0,9722	0,7584	/
Xiao et al[37]	/	2,1044	1,0576	0,7794	/

**Figure IV.11** Convergence de la flèche maximale d'une plaque stratifiée cinq couches simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments.

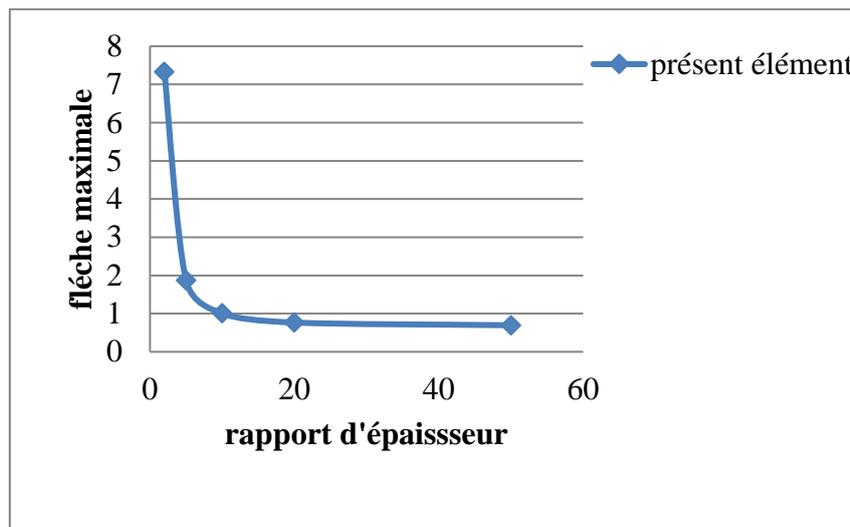


Figure IV.12 Variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque stratifiée cinq couches simplement appuyées.

Interprétation des résultats :

La figure (IV.11) montre la convergence de la valeur de flèche maximale par comparaison aux valeurs de solution analytique et numérique. Quand le nombre des éléments augmente, les valeurs se rapprochent rapidement vers la solution analytique. Selon la comparaison présentée dans le tableau (IV.4), la bonne performance de l'élément est confirmée. La figure (IV.12) montre variation de la flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur pour une plaque stratifiée simplement appuyée à cinq couches.

Par ailleurs, l'effet du rapport d'épaisseur sur le déplacement transversal est montré dans la figure (IV. 12). Même remarque a été trouvée. Comme le rapport (a/h) augmente, les valeurs du déplacement transversal diminuent.

IV.4. Etude paramétrique

Après avoir validé l'élément et d'être assuré de son bon fonctionnement, nous allons passer à une étude paramétrique, qui consiste à varier différents paramètres et d'interpréter les variations des résultats obtenus, cette manipulation a pour but de savoir et déterminer l'effet de chaque paramètre sur le comportement flexionnel des plaques stratifiées.

Dans notre étude, nous prenons en considération les paramètres suivants : le rapport d'anisotropies E_{11}/E_{22} , les conditions aux limites, le nombre de couches, l'orientation des fibres, le rapport d'épaisseur (a/h).

Dans cette étude, un maillage de (12×12) a été adopté.

IV.4.1. Effet du rapport d'épaisseur d sur la flèche maximale avec différents cas de conditions aux limites

Dans cette section, nous allons montrer l'effet du rapport d'épaisseur sur la variation des valeurs de la flèche maximale pour différents cas d'appuis (SSSS, EEEE, SESE, SLSL, ELEL, SLEL). Pour ce faire, une plaque stratifiée croisée de trois couches (0 / 90 / 0).

Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

$$E_{11} = 25, E_{22} = 1, G_{12} = G_{13} = 0.6, G_{23} = 0.5, \nu = 0.25$$

Tableau IV.5 La flèche maximale en fonction du rapport d'épaisseur pour une plaque stratifiée trois couches avec différents types d'appuis.

Rapport d'épaisseur (a/h)	Bord					
	SSSS	EEEE	SESE	SLSL	ELEL	SLEL
2	5.5494	4.4990	4.6650	7.3550	6.8818	7.2675
5	1.6064	0.9888	1.2290	1.6920	1.1917	1.4448
10	0.9109	0.3881	0.7116	0.8936	0.3800	0.5535
20	0.7220	0.2038	0.5750	0.6960	0.1820	0.3222
50	0.6676	0.1467	0.5356	0.6421	0.1295	0.2584
100	0.6597	0.1383	0.5299	0.6344	0.1225	0.2496

Interprétation des résultats :

D'après le tableau (IV.5), on remarque que comme le rapport (a/h) augmente, la valeur du déplacement transversal diminue quel que soit le type de condition aux limites. Ainsi, on constate que les valeurs minimales du déplacement transversal se trouvent dans le cas d'une plaque encastree. Cela revient à la variation de la rigidité de plaque.

IV.4.2. Effet du rapport d'épaisseur sur la flèche maximale avec la variation du rapport d'anisotropie E_{11}/E_{22} :

Dans cette section, nous allons montrer l'effet de l'anisotropie sur la variation des valeurs de flèche maximale pour différents rapports d'épaisseur (a/h). Pour ce faire, une plaque stratifiée simplement appuyée a été choisie plaque trois couches (0/90/0).

Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

$$\frac{E_{11}}{E_{22}} = \text{variable}, G_{12} = G_{13} = 0.6, G_{23} = 0.5, \nu = 0.25$$

Tableau IV.6 La flèche maximale en fonction du rapport d'anisotropie pour une plaque stratifiée trois couches simplement appuyées.

Rapport d'épaisseur (a/h)	E_{11}/E_{22}				
	3	10	20	30	40
2	7.015	6.0862	5.6731	5.4497	5.2940
5	3.4948	2.2292	1.7278	1.5194	1.4014
10	2.9742	1.6025	1.0440	0.8173	0.6944
20	2.8358	1.4378	0.8601	0.6250	0.4978
50	1.6136	1.3901	0.8072	0.5694	0.4407
100	1.6100	1.3832	0.7996	0.5614	0.4324

Interprétation des résultats :

D'après le tableau (IV.6), on remarque que le rapport (a/h) augmente avec la diminution de la valeur du déplacement transversal quel que soit le rapport d'anisotropie.

IV.4.3. Effet de l'orientation des fibres sur la flèche maximale

Dans cette section, nous allons montrer l'effet de l'orientation des fibres sur la variation des valeurs de flèche maximale pour différents rapports d'épaisseur (a/h), Pour ce faire, une plaque stratifiée quatre couches ($\theta, -\theta, -\theta, \theta$).

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$$E_{11} = 25, E_{22} = 1, G_{12} = G_{13} = 0.6, G_{23} = 0.5, \nu = 0.25$$

Tableau IV.7 La flèche maximale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée quatre couches ($\theta, -\theta, -\theta, \theta$) simplement appuyée.

l'orientation des fibres	Rapport d'épaisseur				
	2	5	10	20	50
15	5.2988	1.4652	0.8308	0.6621	0.6120
30	4.7810	1.2544	0.7175	0.5740	0.5251
45	4.5968	1.1777	0.6699	0.5343	0.4864
60	4.7650	1.245	0.7133	0.5733	0.5275
90	5.7616	1.6112	0.8939	0.7041	0.6501

Interprétation des résultats :

Le tableau (IV.7) montre la flèche maximale en fonction de l'orientation des fibres d'une plaque stratifiée simplement appuyée à quatre couches ($\theta, -\theta, -\theta, \theta$). On remarque dans ce tableau que la flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres la flèche diminue dans l'intervalle $[0^\circ, 45^\circ]$ pour atteindre son maximum à $\theta = 45^\circ$, puis augmente symétriquement dans l'intervalle $[45^\circ, 90^\circ]$.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce travail une étude numérique sur l'étude de l'effet du rapport d'épaisseur sur le comportement flexionnel des plaques stratifiées en matériaux composites. Dans cette étude, un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud a été formulé sur la base de la théorie du premier ordre (FSDT). La bonne performance de l'élément utilisé a été montrée à travers une série d'exemple sur les plaques isotropes et stratifiées composites. La comparaison des résultats a été faite avec des modèles analytiques ainsi des modèles numériques.

Une étude paramétrique a été faite pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation de la flèche maximale des plaques composites qui est proportionnel à :

- Plus le rapport d'épaisseur (a/h) augmente, plus la flèche maximale diminue pour différents cas de conditions aux limites.
- Plus le rapport de l'épaisseur (a/h) est augment, plus la flèche sera diminuée, quelles que soit la variation du rapport d'anisotropie E_{11}/E_{22} .
- La flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres la flèche diminue dans l'intervalle $[0^\circ, 45^\circ]$ pour atteindre son maximum à $\theta = 45^\circ$, puis augmente symétriquement dans l'intervalle $[45^\circ, 90^\circ]$.

Références Bibliographique

- [1] Berthelot J. M. Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures. 4^{ème} édition, 2010.
- [2] Michael Eriksson. Détermination des propriétés et applications des composites. Gymnase Auguste Piccard Lausanne, Nov. 2009.
- [3] Chilali.A, Chettibi.T. Contribution à l'optimisation multi-objectif de la rigidité d'un stratifié composite. Première Conférence Internationale de Mécanique. (ICM2010). Laboratoire de mécanique des structures, EMP, BEB, Alger, Algérie, , 23 et 24 novembre 2010.
- [4] BOUDENNE.A, « Etude expérimentale et théorique des propriétés thermo physiques de matériaux composite à matrice polymère », Université PARISXII, 2003.
- [5] Ounis H., « Modélisation du comportement dynamique d'un composite sandwich par éléments finis », Mémoire de Master 2, Université de Biskra, juin 2010, 67p.
- [6] MOKADDEM.A, « Modélisation du Comportement de L'interface Fibre-Matrice de Matériaux Composites », Mémoire de magister, USTO, 2008.
- [7] JULES.E. J, « Couplages entre propriétés thermiques, réactivité chimique et viscosité des matériaux composites thermodurcissables en relation avec les conditions de leur élaboration fondée sur l'hystérésis Diélectrique », Ecole nationale supérieure d'arts et métiers, 2001.
- [8] DRIS Locif. Evaluation simultanée des vitesses de propagation et d'atténuation des ultrasons dans des matériaux composites et polymériques. Mémoire de magistère université de Boumerdès, 2007.
- [9] Bahlouli, N. (2009). Cours matériaux composites. Univ. Strasbourg. URL : <http://www-ipst.ustrasbg.fr/cours/matériaux-composites/tm.htm>.
- [10] SAAIDIA, A., Etude comparative du comportement mécanique de différents composites stratifiés (Doctoral dissertation),2010.
- [11] KAUCHE, N., Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites. Université d'Oran, mémoire de magister,2016.
- [12] Kant, T. and K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, Composite Structures,2002.

- [13] Pagano, N., Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, Journal of composite materials, 1970.
- [12] Kant, T. and K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, Composite Structures, 2002.
- [13] Pagano, N., Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, Journal of composite materials, 1970.
- [14] Reddy, J.N., Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis. 2003 : CRC press.
- [15] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic ,elastic plates. Journal of applied mechanics, 1951.
- [16] Benatta Mohamed Atef « Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé » Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, 2010.
- [17] Batoz J.L, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2, Poutres et Plaques. Hermes, 1990.
- [18] Imen KALLEL-KAMOUN, Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement postcritique. Mémoire de Doctorat, Université de Sherbrooke (Canada) ,30 Juin 1999.
- [19] Tati, A., Analyse du flambage des plaques stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider de Biskra, 2007, 144 pp.
- [20] NYE, J. F. Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices. 4. ed. London : Oxford University Press, 1969.
- [21] KOLLAR, L. P. and SPRINGER, G. Mechanics of Composite Structures. Cambridge University Press. 2003.
- [22] François-Xavier IRISARRI, Stratégies de calcul pour l'optimisation multi-objectif des structures composites, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 23 Janvier 2009.
- [23] Achraf Tafla, éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches, Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [24] Cohen G.A, transverse shear stiffness of laminated Anisotropic shells, Computer Methods in applied mechanics and Engineering. 13, pp 205-220, 1978.

- [25] Cohen G.A, transverse shearstiffnes of laminated Anisotrope shells, Computer Methods in appliedmechanics and Engineering. 13, pp 205-220, 1978.
- [26] Bouyaya, L, Analyse numerique du comportement dynamique de structures composites à renforcement fibreux,2011.
- [27] François F., Jaroslav J., Analyse des structures et milieux continus : Méthode des éléments finis, école polytechniques Fédérale de Lausanne, volume6, 297p.
- [28] hireche salim, calcul de flottement des ailes d'avions legersas similees a des plaques composites moyennement épaisses par la méthode des éléments finis, mémoire master en aéronautique, université saâddahleb de blida, institut d'aéronautique et des études spatiales,2017.
- [29] Kant, T., (1982), Numerical analysis of thick plates, Computer methods in applied mechanics and engineering, 31 (1) 1-18.
- [30] Rao, G.V., J. Venkataramana, and I. Raju, (1974), A high precision triangular plate bending élément for the analysis of thick plates, Nuclear Engineering and Design, 30 (3) 408-412.
- [31] Yuan, F.G. and R.E. Miller, A cubic triangular finite element for flat plates with shear, International journal for numerical methods in engineering, 28 (1) 109-126,1989.
- [32] Kant, T., D. Owen, and O. Zienkiewicz, (1982), A refined higher-order C plate ben ding élément, Computers & structures, 15 (2) 177-183.
- [33] Belarbi, M.O. Eléments finis pour l'analyse des structures sandwichs. Université Mohamed khider , Biskra, Thèse Doctorat.2015.
- [34] J.N. Reddy, **A simple higher-order theory for laminated composite plates**, J. Appl. Mech.
- [35] A. J. M. Ferreira, **Matlab codes for Finite Element analysis**, Portugal : Springer,2009.
- [36] Belinha, J. and L.M.J.S. Dinis, (2006), Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method, Computers & structures, 84 (22–23) 1547-1559.
- [37] Xiao, J., et al., (2008), Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method, Composites Engineering, 39 (2) 414-427.