

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**BESSAM Amina**

Titre :

**Etude d'un système dynamique chaotique**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>OUAAR Fatima</b>	UMKB	Président
Dr. <b>LAADJAL Baya</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>TABERHA Warda</b>	UMKB	Examineur

Juin 2020

## DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

Mon cher père et ma chère mère

Mes frères et mes sœurs

Toutes mes amies

A mes collègues de mathématiques.

Almina

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie le bon dieu, tout puissant,  
de m'avoir donné la force, la patience et la volonté  
pour réaliser ce travail dans des meilleures circonstances et en bon état.

Je tiens à remercier cordialement mon encadreur Dr. Saadjal Baha  
pour son aide afin d'améliorer le contenu de ce mémoire

J'adresse également mes remerciements aux membres du jury

( Dr. OUMMA Fatima et Dr. TABERHA Warda )

d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de mathématiques.

Enfin, Je voudrais associer à mes remerciements toutes les personnes qui ont  
contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Merci à tout

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.1 Systèmes dynamiques à temps continu . . . . .	4
1.1.2 Systèmes dynamiques à temps discrets . . . . .	6
1.1.3 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	7
1.2 Passage de temps continu à temps discret . . . . .	11
1.2.1 La méthode d'Euler . . . . .	11
1.2.2 La section de Poincaré . . . . .	12
1.3 Attracteurs . . . . .	12
1.4 Bifurcation . . . . .	13
1.4.1 Bifurcation fold ou noeud-col . . . . .	14
1.4.2 Bifurcation flip ou doublement de période . . . . .	14
1.4.3 Bifurcation de Neimark . . . . .	14

<b>2 Etude d'un système chaotique discret</b>	<b>16</b>
2.1 Les systèmes dynamiques chaotiques . . . . .	16
2.1.1 Caractéristiques du chaos . . . . .	16
2.1.2 Les exposants de Lyapunov . . . . .	18
2.1.3 Dimension de Lyapunov . . . . .	19
2.1.4 Transitions vers le chaos . . . . .	20
2.2 Le modèle de Hénon . . . . .	21
2.2.1 Présentation et définition du système de Hénon . . . . .	21
2.2.2 Calcul des points fixes . . . . .	22
2.2.3 Stabilité des points fixes . . . . .	23
2.2.4 Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ . . . . .	26
2.2.5 Analyse numérique de bifurcation . . . . .	27
2.2.6 Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	29
2.2.7 Les exposants de Lyapunov . . . . .	30
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>
<b>Annexe : Abréviations et Notations</b>	<b>36</b>

# Table des figures

2.1	Les régions de la stabilité des points fixes $P_1$ et $P_2$ . . . . .	25
2.2	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4, b = 0.3$ . . . . .	26
2.3	Les 100 premières itérées de $X_n$ avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0, Y_0) = (0, 0)$	27
2.4	Les 100 premières itérées de $Y_n$ avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0, Y_0) = (0, 0)$	28
2.5	Diagramme de bifurcation pour le système de Hénon pour $-0.15 \leq a \leq 0.4$ et $b = 0.3$ . . . . .	29
2.6	Diagramme de bifurcation de Hénon . . . . .	30
2.7	Les 100 premières itérées de $X_n$ avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0, Y_0) =$ $(0.001, 0.001)$ . . . . .	31
2.8	Les 100 premières itérées de $Y_n$ avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(X_0, Y_0) =$ $(0.001, 0.001)$ . . . . .	31
2.9	L'évolution de l'exposant le Lyapunov $\lambda$ de système de Hénon en fonction de $a$	32

# Liste des tableaux

2.1	Exposants de Lyapunov pour différents attracteurs . . . . .	19
-----	---	----

# Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équation différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. C'est à dire, des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières. Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les systèmes continus et discrets.

Historiquement, les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle.

En effet, vers la fin du ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de stabilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au XIXe siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

En 1963 le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz

venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

Les systèmes répondant à cette propriété seront de 1975 dénommés : Système chaotique.

C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Dans ce mémoire, l'objectif est d'étudier la dynamique d'un système chaotique dépendant de paramètre et les différents comportements asymptotiques des solutions. Ainsi il est organisé comme suit :

**Le premier chapitre**, nous allons présenter quelques définitions et propriétés des systèmes dynamiques non linéaires (notion des espace des phases , des orbites, de flot, des points critiques, des points d'équilibre, stabilité, attracteurs et des bifurcation).

**Le deuxième chapitre**, nous allons présenter d'abord les notions de base des systèmes chaotiques, où nous allons donner les caractéristiques du chaos et les différentes manières de transition vers le chaos. Nous terminons ce chapitre par une illustration concrète de quelques notions précédentes qui est un exemple célèbre "modèle de Hénon", où nous allons faire l'étude analytique et numérique de ce modèle.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre nous introduisons les notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Nous commençons par donner la définition formelle d'un système dynamique et nous terminons par l'étude de stabilité des solutions dans les deux cas : continu et discret.

### 1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système dont l'état change avec le temps. Mathématiquement, un système dynamique consiste en un espace d'état et une loi appelée dynamique qui permet de déterminer quel état correspondra, dans un temps futur, à un état présent. Discutons les ingrédients d'un système dynamique séparément et donnons ensuite sa définition formelle :

1. **Espace d'état :** Tous les états possibles d'un système sont caractérisés par les points de certains ensembles  $U$ . Cet ensemble s'appelle l'espace d'état du système. En réalité, la spécification d'un point  $x \in U$  doit être suffisante non seulement pour décrire la «position» actuelle du système, mais également pour déterminer son évolution.
2. **L'espace du temps :** L'évolution d'un système dynamique signifie un changement d'état du système avec le temps  $t \in I$ , où  $I$  est un ensemble de nombres. Nous considérerons deux types de systèmes dynamiques : ceux à temps continu (réel)  $I = \mathbb{R}$  et ceux

à temps discret (entier)  $I = \mathbb{Z}$ . Les systèmes du premier type sont appelés systèmes dynamiques à temps continu, alors que ceux du second type sont appelés systèmes dynamiques à temps discret.

**3. L'opérateur d'évolution :** Le composant principal d'un système dynamique est une loi d'évolution qui détermine l'état  $x(t)$  du système à l'instant  $t$ , à condition que l'état initial  $x_0$  soit connu. La manière la plus générale de spécifier l'évolution consiste à définir pour tout  $t \in I$ , l'application  $\phi^t$  dans l'espace d'états  $U$  par:

$$\begin{aligned} \phi^t : U &\longrightarrow U \\ x_0 &\longrightarrow \phi^t x_0 = x(t). \end{aligned}$$

où  $x_0 \in U$  est l'état initial.

L'opérateur d'évolution  $\phi^t$  a deux propriétés naturelles qui expliquent le caractère déterministe du comportement des systèmes dynamiques.

(i)  $\phi^0 = id.$

(ii)  $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s.$

Nous pouvons maintenant donner une définition formelle d'un système dynamique.

**Définition 1.1** *Un système dynamique est un triple  $\{I, U, \phi^t\}$ , où  $I$  est un ensemble de temps,  $U$  est un espace d'état et  $\phi^t : U \rightarrow U$  est une famille d'opérateurs d'évolution paramétrés par  $t \in I$  et satisfaisant les propriétés (i) et (ii).*

### 1.1.1 Systèmes dynamiques à temps continus

Si le système évolue en temps continu, il est dit système continu. La description mathématique de son évolution est donnée par une équation différentielle ordinaire et un ensemble de conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Lorsque  $F$  dépend explicitement du temps le système (1.1) est dit non autonome. Dans le cas contraire on dit que le système (1.1) autonome.

**Définition 1.2** Une solution du système (1.1) est une fonction  $t \rightarrow X(t)$ , définie d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\Omega$  telle que pour tout  $t \in I$  on a  $\dot{X}(t) = F(X(t))$ .

**Définition 1.3** L'image d'une solution  $X$  est appelée orbite ( trajectoire ) et notée :

$$\gamma_X = \{a \in \Omega; \exists t \in I : X(t) = a \}$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur  $F$ .

**Définition 1.4** Le flot du système (1.1) est la famille avec un paramètre d'application  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\Omega$  dans lui même définies par :

$$\varphi_t(a) = X(t, a); \quad \forall a \in \Omega$$

$X(t, a)$  est l'unique solution du problème de cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X(t)) \\ X(0) = a \end{cases}$$

$\varphi_t$  possède les propriétés suivant :

- i)  $\varphi_t$  est différentiable sur  $\Omega$ .
- ii)  $\varphi_0 = I$ .
- iii)  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ , pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$ .
- iv)  $\varphi_t$  est une bijection et  $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ .

**Définition 1.5** Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $\dot{X} = F(X)$  est un point  $\bar{X}$  de l'espace de phases vérifiant  $F(\bar{X}) = 0$ .

## 1.1.2 Systèmes dynamiques à temps discrets

Si le système prends ses valeurs uniquement à des instant régulièrement distribués, celui-ci est dit système en temps discret ou tout simplement système discret. Sa représentation mathématique est donnée par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n) \\ X_0 = X(0) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $n$  est l'instant discret,  $n_0$  est l'instant discret initial et  $X(0)$  est le vecteur des états initiaux.

Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un **système d'équation aux différences finies**, autrement dit, par une **réurrence**.

**Définition 1.6** *Un point fixe de l'équation (1.2) est un point  $\bar{X}$  vérifiant  $F(\bar{X}) = \bar{X}$ .*

**Définition 1.7** *Etant donné le point initiale  $X_0$ , on appelle orbite ou trajectoire du système dynamique discret d'ordre 1 défini par l'itération d'une fonction  $F$  :*

$$X(0) = X_0, \quad X(n+1) = F(X(n)), \quad \forall n \geq 0$$

*La suite*

$$O(X_0) = \{X(0) = X_0, X(1) = F(X(0)), \dots, X(n+1) = F(X(n))\}.$$

**Exemple 1.1** *Soit un système dynamique discret en dimension 1 défini par la fonction :*

$$F(X) = X^2 \text{ sur l'intervalle } [0, +\infty).$$

*Prenons pour condition initial  $X_0 = 1/2$ . L'orbite correspondante est :*

$$X(0) = X_0 = 1/2, \quad X(1) = F(X(0)) = 1/4, \quad X(2) = F(X(1)) = 1/16.$$

*Remarquons que  $X(n) = F(X(n-1)) = F^n(X(0)) = (1/2)^{2^n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

Prenons un autre point initial,  $X_0 = 2$ . Alors :

$$X(0) = 2, X(1) = F(X(0)) = 4, X(2) = F(X(1)) = 1/16.$$

Dans ce cas, quand  $n \rightarrow \infty$  on a :

$$X(n) = F(X(n-1)) = F^n(X(0)) = 2^{2^n} \rightarrow \infty$$

Et enfin, si l'on choisit pour point initial  $X_0 = 1$ , on voit que :

$$O(X_0) = \{1, 1, X(n) = 1^{2^n} = 1, \dots\}.$$

On observe donc ici trois comportements différents du même système en fonction du point initial choisi. Ainsi nous pouvons parler des propriétés d'un système, en décrivant toutes ses orbites possibles.

### 1.1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

#### 1.1.3.1 Etude de stabilité dans le cas continu

**Définition 1.8** Le point d'équilibre  $\bar{X}$  du système (1.1) est :

- Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(t_0) - \bar{X}\| < \delta \implies \|X(t) - \bar{X}\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.3)$$

- Asymptotiquement stable si :

$$\forall \delta > 0 : \|X(t_0) - \bar{X}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \bar{X}\| = 0$$

- Exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(t_0) - \bar{X}\| < \delta \implies \|X(t) - \bar{X}\| < \alpha e^{-\beta t} \|X(t_0) - \bar{X}\|, \forall t > t_0$$

- *Instable si la condition (1.3) n'est pas satisfaite.*

**Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)**

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $\bar{X}$  du système (1.1). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre.

**Théorème 1.1** *Soit le système dynamique autonome (1.1), et  $\bar{X}$  un point d'équilibre*

- *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative alors  $\bar{X}$  est asymptotiquement stable.*
- *Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive et les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, alors  $\bar{X}$  est instable.*

**Exemple 1.2** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{X} = Y^2 - X \\ \dot{Y} = X^3 - 2Y - XZ \\ \dot{Z} = -Z + XY \end{cases}$$

*L'origine 0 est un point critique. Son linéarisé est :*

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

*Les valeurs propres de  $Df(0)$  sont  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1$  toutes négatives d'où l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.*

**Remarque 1.1** *Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive.*

*Dans ce cas la stabilité de l'équilibre peut être étudié par la seconde méthode.*

### Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  est appelée fonction de Lyapunov. Le théorème suivant résumer cette méthode.

**Théorème 1.2** *Si  $\bar{X}$  est un point d'équilibre du système (1.1) et s'il existe une fonction  $V(X) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continument dérivable, telle que :*

1.  $V(\bar{X}) = 0$  et  $V(X) > 0$ , pour  $X \neq \bar{X}$ .
2.  $\dot{V}(X) = \frac{dV(X)}{dt} \leq 0$ , pour  $X \neq \bar{X}$ .

Alors  $\bar{X}$  est **stable** au sens de Lyapunov.

- Si la dernière condition était plutôt  $\dot{V}(X) < 0$ , alors  $\bar{X}$  est asymptotiquement stable.
- Si on suppose que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $\|X\| \rightarrow \infty$ , donc  $\bar{X}$  est globalement asymptotiquement stable.

$V$  est appelé fonction de Lyapunov du système.

Le choix de la fonction de Lyapunov a un effet sur l'évaluation de la zone de stabilité d'un système non linéaire. Mais il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov.

**Exemple 1.3** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 + \varepsilon X_1 X_2 \end{cases}$$

- Ce système possède un point d'équilibre à  $(X_1, X_2) = (0, 0)$ .
- Analysons la stabilité de ce système avec cette fonction de Lyapunov :

$$V(X_1, X_2) = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$$

Dérivant  $V(X)$ , on trouve :  $\dot{V}(X_1, X_2) = X_1X_2 - X_1X_2 + \varepsilon X_1^2X_2^2 = \varepsilon X_1^2X_2^2$ .

Ainsi,  $V(X)$  est une fonction définie positive qui est strictement décroissante si  $\varepsilon < 0$ .

En vertu de la théorie de Lyapunov, le système est globalement stable si  $\varepsilon = 0$ . Il est globalement asymptotiquement stable si  $\varepsilon < 0$ . Sinon, il est globalement instable.

### 1.1.3.1 Etude de stabilité dans le cas discret

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes.

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction vectoriel définie une application discrète, soit  $DF(\bar{X})$  sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe  $\bar{X}$  de l'application  $F$ , pour simplifier les notions de la stabilité du point fixe  $\bar{X}$  on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

**Définition 1.9** Les valeurs propres du Jacobien  $DF(\bar{X})$  sont appelées multiplicateurs caractéristique de  $F$  en  $\bar{X}$ .

**Théorème 1.3** Le point fixe  $\bar{X}$  de  $F$  est asymptotiquement stable si ses multiplication caractéristique sont tous de module strictement inférieur à 1.

Le point fixe  $\bar{X}$  de  $F$  est instable si l'un des multiplication caractéristique est de module strictement supérieur à 1.

**Définition 1.10** Le point fixe  $\bar{X}$  de  $F$  est dit point selle si au moins un multiplication caractéristique est de module strictement inférieur à 1 et les autre multiplication caractéristique sont tous de module strictement supérieur à 1.

**Exemple 1.4** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = -ah(Y_n) + X_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (1.4)$$

et  $h$  est un fonction défini par :

$$h(y) = \begin{cases} bY - c & \text{si } Y \geq 0 \\ bY + c & \text{si } Y < 0 \end{cases}$$

Pour tout les valeur  $a \geq 0$ ,  $c > 0$  et  $b > 0$ , le système (1.4) admet deux points fixes, sont défini par :

$$P_1 = \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{b}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right)$$

Les matrices Jacobienne du système (1.4), évalué aux points fixes  $P_1$  et  $P_2$  sont les mêmes et elle est donnée par :

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et les polynômes caractéristiques pour  $J_{1,2}$  sont données par :

$$\lambda^2 - \lambda + ab = 0$$

Nous avons prouvé le résultat suivant :

1. Si  $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$ , alors les deux points fixes  $P_1$  et  $P_2$  sont stable.
2. Si  $a > \frac{1}{b}$ , alors les deux points fixes  $P_1$  et  $P_2$  sont instable.

## 1.2 Passage de temps continu à temps discret

Il existe plusieurs technique de discrétisation (échantillonnage) des systèmes.

### 1.2.1 La méthode d'Euler

Soit une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{X} = F(X)$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instant choisis, équidistants  $t_n = t_0 + n.\Delta t$ . Si la période d'échantillonnage  $\Delta t$  est choisie assez petite, on peut approcher la dérivé  $X(t)$  par la différence :

$$\dot{X} = \frac{X(t_n) - X(t_{n+1})}{\Delta t}$$

Alors, le système dynamique à temps continu peut être approché par le système dynamique à temps discret suivant :

$$X(n + 1) = X(n) + \Delta t.F(X(n))$$

### 1.2.2 La section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques. Cette méthode transforme un système dynamique continu en un système discret et de réduit sa dimension en conservant les même propriétés topologiques. Plus précisément elle remplace l'analyse des trajectoires d'un système dynamique continu autonome de type (1.1) dont l'espace des phases est de dimension  $n$  par celle de la suite des points d'intersections successives :  $p_0, p_1, \dots$  d'une trajectoire  $\varphi(t, X_0)$  avec un hyperplan  $\Sigma_p$  de dimension  $(n - 1)$ , ce dernier peut être quelconque. Mais un bon choix permet d'obtenir les sections aisément exploitables. L'hyperplan  $\Sigma_p$  est appelé la section de Poincaré.

## 1.3 Attracteurs

**Définition 1.11** *L'attracteur :est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations)vers lesquelles évolue un système dynamique, quelles que soient ses conditions initiales.*

**Définition 1.12** *Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur.*

Il y a deux types d'attracteurs : **les attracteurs réguliers** et **les attracteurs étranges** ou **chaotiques**

1. **Attracteurs régulières** : Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :
  - Un attracteur réduit à un point fixe, c'est le plus simple attracteur.
  - Un attracteur formant une courbe fermée est appelé cycle limite.
  - L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle par fois "mouvements quasi périodique".
2. **Attracteurs étranges** : L'attracteur étrange est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

## 1.4 Bifurcation

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la " bifurcation ". La théorie de bifurcation s'intéresse aux familles des systèmes dynamiques ( continu ou discret ) dépendant d'un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}^k$ . Cette théorie renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent.

**Définition 1.13** *Une bifurcation est un changement de type topologique du système ( changement qualitatif et quantitatif ) lorsque le paramètre  $\mu$  passe à travers une valeur critique.  $\mu = \mu_0$  appeler valeur de bifurcation.*

**Définition 1.14** *Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée.*

Dans ce travail nous considérons les systèmes dynamiques discrets dépendant d'un paramètre réel  $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(\mu, X_n) & , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ X_0 = X(0) \end{cases}$$

Il existe quatre types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques

### 1.4.1 Bifurcation fold ou noeud-col

Cette bifurcation correspond à la situation où l'une des valeurs propres est égale à  $+1$ . Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

### 1.4.2 Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un cycle d'ordre  $k$  stable a un multiplicateur qui passe par la valeur  $\lambda = -1$ . Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre  $2k$ .

### 1.4.3 Bifurcation de Neimark

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  et de plus  $|\lambda_{i=1,2}| = 1$ .

**Exemple 1.5** Soit le système dynamique discret généré par la transformation  $F$  définie par :

$$F : \begin{cases} X_{n+1} = \mu X_n(1 - Y_n), & \mu > 0 \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases}$$

Ce système admet deux points fixes :

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) = (0, 0) \\ (X_2, Y_2) = \left(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu}\right) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne évaluée au point fixe  $(X_2, Y_2)$  est :

$$DF(X_2, Y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle a pour équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda + \mu - 1 = 0$$

On en déduit les valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \mu}$$

Si  $\mu > \frac{5}{4}$ , les valeurs propres sont complexes avec  $|\lambda_{1,2}|^2 = \mu - 1$ . Pour  $\mu = 2$  le point fixe  $(X_2, Y_2)$  perd sa stabilité. Les valeurs propres sont alors  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$  et le système présente une bifurcation de Neimark.

# Chapitre 2

## Etude d'un système chaotique discret

### 2.1 Les systèmes dynamiques chaotiques

La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, ...

La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales. Cette théorie fut développée à partir des années soixante, lorsque Edward Lorenz montra le caractère chaotique de l'atmosphère terrestre.

Actuellement il n'y a pas de définition précise du terme Chaos, on peut donner une définition proche du chaos comme .

**Définition 2.1** *Un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales.*

#### 2.1.1 Caractéristiques du chaos

Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. Les plus connues sont :

1. **Non linéarité :**

L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités. Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire, ne peut pas être chaotique.

## 2. Non périodicité :

Un système présentant un comportement chaotique évolue dans une orbite qui ne se répète jamais sur elle-même. C'est à dire, les orbites ne sont jamais périodiques.

## 3. Sensibilité aux conditions initiales :

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du xixe siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en **1963** par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

## 4. Déterminisme :

Le déterminisme signifie que le système est non aléatoire et ne possède aucun paramètre ou entrée stochastique. Cette propriété est propre à tous les systèmes dont l'évolution est définie par un ensemble d'équation différentielles ou d'équations aux différences. Dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, et bien qu'ils paraissent, à première vue, aléatoires, les systèmes dynamiques chaotiques sont régis par certaines équations rendant compte du phénomène, mais dont les solutions sensibles aux conditions initiales.

## 5. Attracteur étrange :

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qui on trouve dans la littérature sont restrictives.

**Définition 2.2** *Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$ , c'est à dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- $U$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $U$  est entièrement contenue dans  $U$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.
- Les orbites dont le point initial est dans  $\mathbb{R}$  sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.
- $A$  est un objet fractal.
- Pour tout point de  $A$ , il existe des orbites démarrées dans  $\mathbb{R}$  qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

### 2.1.2 Les exposants de Lyapunov

Alexander Lyapunov (1857-1918) a développé un paramètre qui nous permet de calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

Ce moyen de contrôle est appelé "Exposant de Lyapunov" qui est une quantité permettant de caractériser le chaos temporel et est défini pour un système dynamique par :

$$\lambda(X_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(X_0)}{dX} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(X_i)|$$

où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application, et  $X_0$  est une condition initiale.

Le nombre d'exposant de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont souvent rangés du plus grand au plus petit :  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ . La valeur du plus grand exposant quantifie le degré du chaos.

Les conditions suivantes sont nécessaires pour l'apparition du chaos dans un système dyna-

mique.

- Au moins l'un des exposants de Lyapunov est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un des exposants de Lyapunov est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
- La somme de tous les exposants est négative pour indiquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd énergie.

Le tableau 2.1 illustre le lien entre les exposants de Lyapunov et les formes d'attracteurs et donne les signes des exposants de Lyapunov pour chaque type d'attracteur.

Attracteur	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
Cycle limite	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Tore d'ordre 2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3$
Tore d'ordre $k$	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, 0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$
Attracteur chaotique	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TAB. 2.1 – Exposants de Lyapunov pour différents attracteurs

**Exemple 2.1** *Considérons l'application logistique :*

$$F(X_i) = 4X_i(1 - X_i); \quad X_i \in [0, 1].$$

*Ce système est chaotique puisque :*

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |4(1 - 2X_i)| = \ln 2 > 0.$$

### 2.1.3 Dimension de Lyapunov

Paramètre permettant de mesurer la dimension du chaos. Suivant le type de chaos généré, la dimension de Lyapunov est plus ou moins grande : pour des systèmes non retardés (dimension finie) tels que les systèmes de Lorenz ou Rössler, la dimension de Lyapunov est au maximum égale au nombre de variable du système (dimension faible), alors que pour les systèmes à

retard (dimension infinie) la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée.

Classant les exposants de Lyapunov  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

La dimension de Lyapunov  $D_L$  est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}$$

Où  $j$  est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0.$$

### 2.1.4 Transitions vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on déjà appelé bifurcation. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

**Par intermittence :**

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière.

**Par doublement de période :**

Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourche. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc..., ces doublement de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

**Quasi-périodicité :**

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle

et Takens (1971) illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963). Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi-périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

## 2.2 Le modèle de Hénon

Dans cette section, nous donnons une illustration concrète de toutes les notions précédentes par un exemple célèbre de systèmes dynamiques chaotiques discrets dans le plan. Le premier objectif est la recherche des points fixes et l'étude de stabilité de ces points, et le second est la localisation des courbes de bifurcations et leur évolution dans le plan paramétrique.

### 2.2.1 Présentation et définition du système de Hénon

L'astronome Michel Hénon exploitera la suggestion de Pomeau et Ibanez, pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice ( sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau expose l'idée de réaliser des systèmes dynamiques plus simples encore que celui de Lorenz, mais présentant des caractéristiques similaires, et qui permettraient de prouver plus clairement des "évidences" mises en lumière par les calculs numériques. Puisque le raisonnement repose sur la section de Poincaré il propose de produire une application du plan dans lui-même, plutôt qu'une équation différentielle, imitant le comportement de Lorenz et son attracteur étrange. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon.

Le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes

formes. On utilisera la forme suivant :

$$H(X_n, Y_n) : \begin{cases} X_{n+1} = -aX_n^2 + Y_n + 1 \\ Y_{n+1} = bX_n \end{cases}$$

Où  $a$  et  $b$  étant deux paramètres réels, où la valeurs de la constante  $a$  contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de  $b$  traduit le rôle de la dissipation. Et  $X_n, Y_n$  un point de coordonnées. On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ , et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

### 2.2.2 Calcul des points fixes

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation  $H(X_n, Y_n) = (X_n, Y_n)$  :

$$H(X_n, Y_n) = (X_n, Y_n) \Leftrightarrow \begin{cases} -aX_n^2 + Y_n + 1 = X_n \\ bX_n = Y_n \end{cases} \quad (2.1)$$

**Théorème 2.1** Pour  $|b| < 1$ , et  $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  on a :

1. Si  $a < a_0(b)$ , l'itération  $H$  n'a aucun point fixe.
2. Si  $a = a_0(b)$ , l'itération  $H$  a un seul point fixe.
3. Si  $a > a_0(b)$ , l'itération  $H$  a deux points fixes.

**Preuve.** Le discriminant de l'équation (2.1) est donné par l'équation

$$(b-1)^2 + 4a = 0,$$

Donc pour  $|b| < 1$ , et  $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  on a :

1. Si  $a < a_0(b)$ ,  $X_{\pm}(a, b) \notin \mathbb{R}^2$ , alors dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour  $H$ .
2. Si  $a = a_0(b)$ , nous obtenons  $X_+(a, b) = X_-(a, b) = \frac{b-1}{2a}$ . Donc dans ce cas le système  $H$  admet exactement un seul point fixe  $(X_1, Y_1) = \left(\frac{b-1}{2a}, b\left(\frac{b-1}{2a}\right)\right)$ .

3. Pour  $a > a_0(b)$ , nous avons  $X_+(a, b)$  et  $X_-(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $X_+(a, b) \neq X_-(a, b)$

Dans ce cas nous avons deux points fixes de la forme :

$$P_1 = (X_1, Y_1), \quad \text{et } P_2 = (X_2, Y_2)$$

avec :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{b-1+\beta}{2a}, \\ Y_1 = b \left( \frac{b-1+\beta}{2a} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} X_2 = \frac{b-1-\beta}{2a}, \\ Y_2 = b \left( \frac{b-1-\beta}{2a} \right) \end{cases}$$

Où  $\beta = \sqrt{4a + (b-1)^2}$ .

■

### 2.2.3 Stabilité des points fixes

La stabilité de ces points fixes est fixée par les valeurs propres obtenues en résolvant l'équation  $\det(J - \lambda I) = 0$ , où  $I$  est la matrice identité et  $J$  est la matrice jacobienne donne par l'expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2aX & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

et comme  $\det(J - \lambda I) = 0$ , nous avons l'équation caractéristique suivant :

$$\lambda^2 + 2aX\lambda - b = 0$$

Alors les valeurs propres (multiplicateurs) de la récurrence de Hénon sont :

$$\lambda_1 = -aX + \sqrt{a^2X^2 + b}, \quad \lambda_2 = -aX - \sqrt{a^2X^2 + b}$$

1. **Pour le point fixe  $P_1$  :**

La matrice jacobienne correspond à cette point s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -(b-1+\beta) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(b-1+\beta) - b$$

On résout donc :

$$\Delta = (b-1+\beta)^2 + 4b$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{a}(\frac{1}{2}\beta + \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{a}(\frac{1}{2}\beta - \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \end{cases}$$

## 2. Pour le point fixe $P_2$ :

La matrice jacobienne correspond à cette point s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -(b-1-\beta) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(b-1-\beta) - b$$

On résout donc :

$$\Delta = (b-1-\beta)^2 + 4b$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{a} \left( \sqrt{b + \frac{1}{4}(b + \beta - 1)^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right) \\ \lambda_2 = -\frac{1}{a} \left( \sqrt{b + \frac{1}{4}(b + \beta - 1)^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

Il peut être également démontré que l'un de ces deux points est stable à la signe positive devant le radical, l'autre est toujours instable.

En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont  $(-1,1314; -0,3394)$  et  $(0,6314; 0,1894)$ , les valeurs propres au premier point d'équilibre sont  $(2,3284; -0,0657)$  et les valeurs propres au deuxième point sont  $(0,5657; -1,8284)$ . D'où le premier est un point selle et le deuxième est clairement un point stable.

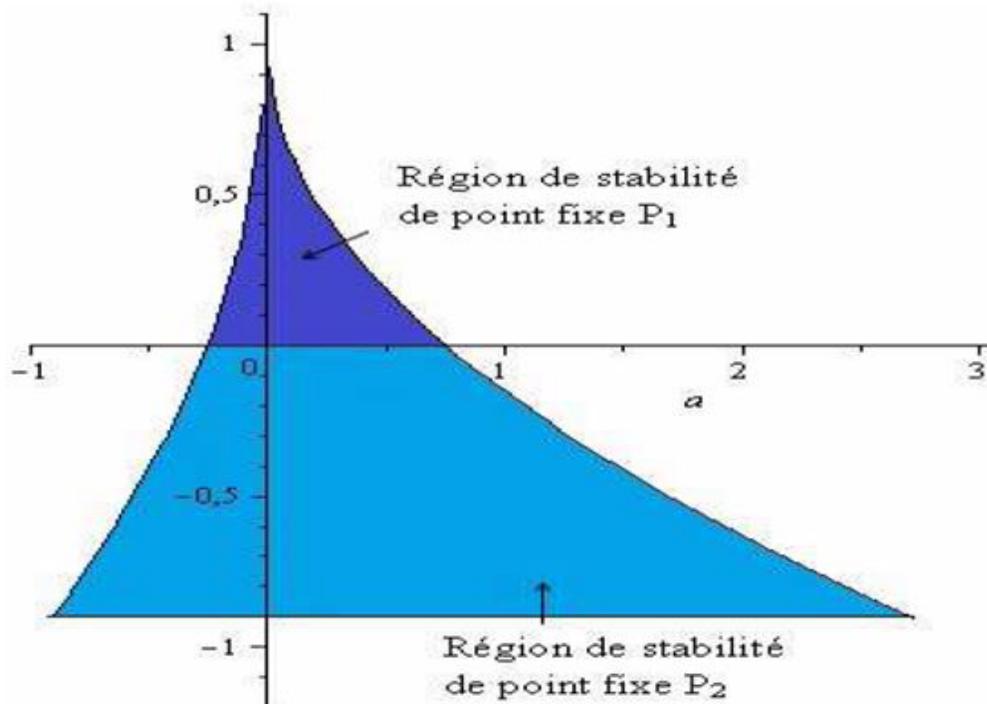


FIG. 2.1 – Les régions de la stabilité des points fixes  $P_1$  et  $P_2$

### 2.2.4 Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

Le modèle de Hénon est un système dynamique de comportement chaotique les plus étudiés.

Il dépend de deux paramètres  $a$  et  $b$ , qui ont pour valeurs canoniques :  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

Pour ces valeurs, l'attracteur de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de  $a$  et  $b$ , il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique.

On peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, voir Fig (2.2).

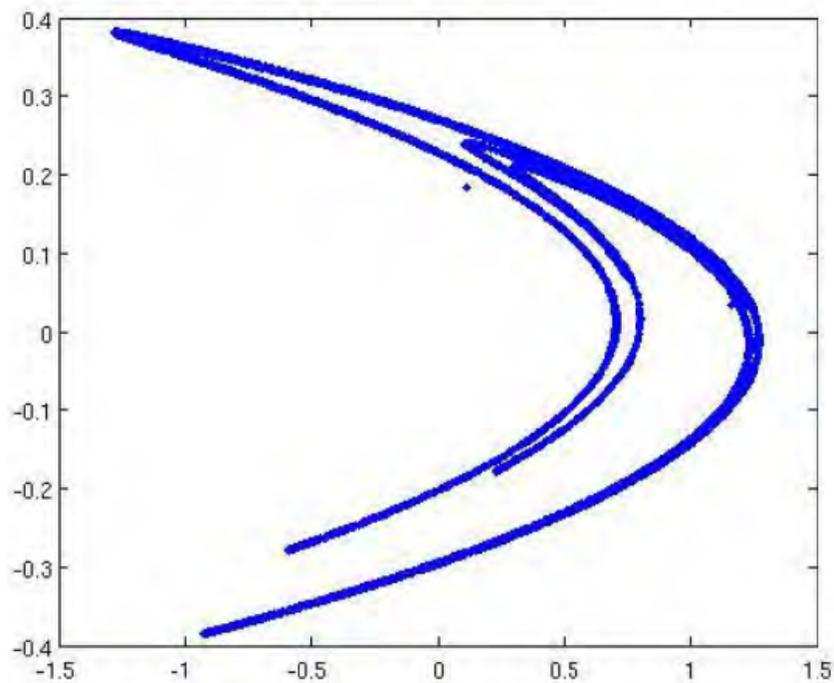


FIG. 2.2 – Attracteur de Hénon pour  $a = 1.4, b = 0.3$

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables  $X$  et  $Y$  pour une condition initiale  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ , voir Fig (2.3) et Fig (2.4) respectivement.

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables.

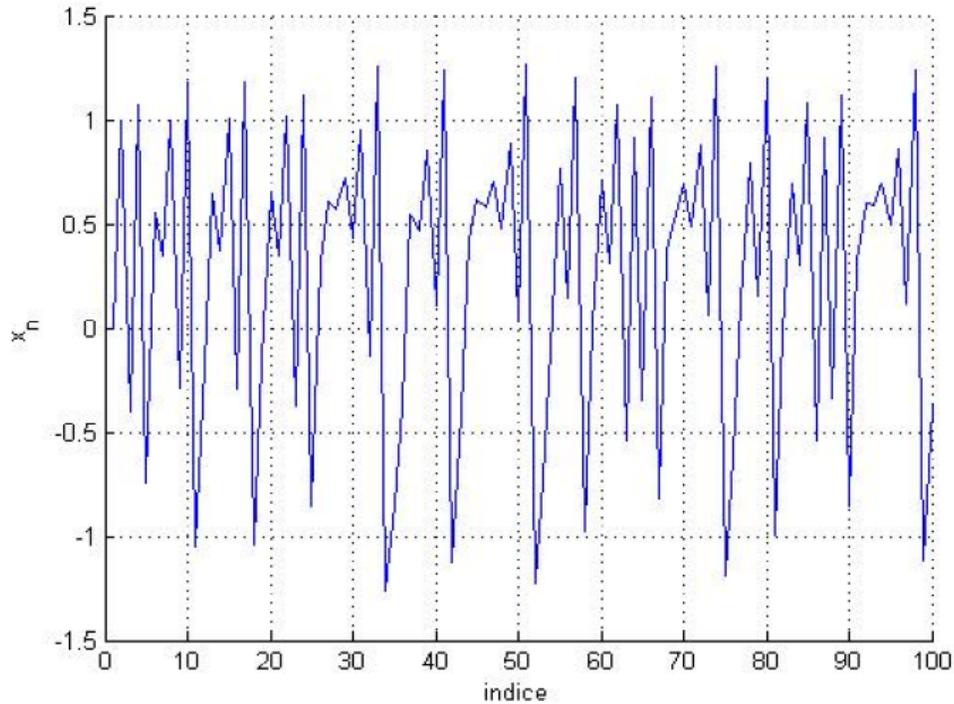


FIG. 2.3 – Les 100 premières itérées de  $X_n$  avec  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  avec  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$

### 2.2.5 Analyse numérique de bifurcation

Nous procédons en donnant les résultats de stabilité pour le système de Hénon. Nous rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour  $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$ .

**Lemme 2.1** *Pour  $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  et  $\beta = 0$  le système de Hénon a un unique point d'équilibre en  $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$  avec les valeurs propres  $\{1, -b\}$  indiquant une bifurcation selle-noeud.*

**Preuve.** En substituant  $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  et  $\beta = 0$  dans l'équation (2.2) les deux points d'équilibre se trouvent à s'imbriquer les uns les autres en  $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ . La jacobienne du système en ce point d'équilibre est :

$$\begin{pmatrix} 1-b & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi les valeurs propres sont  $\{1, -b\}$ . ■

On considère la bifurcation selle-noeud avec un exemple numérique.

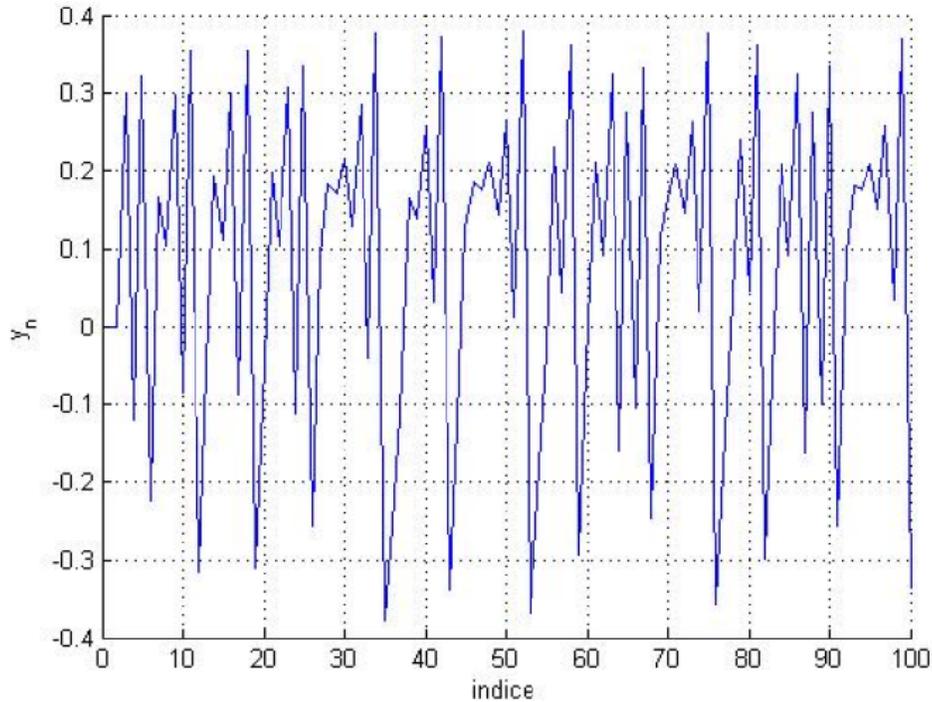


FIG. 2.4 – Les 100 premières itérées de  $Y_n$  avec  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  avec  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$

**Proposition 2.1** *Pour  $b = 0,3$  et  $a = -0,1225$ , on a une bifurcation selle-noeud.*

**Preuve.** Pour  $b = 0,3$  et  $a = -0,1225$ ; le point d'équilibre du système est  $(2,8571; 0,8571)$  indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la Figure (2.5). La région de  $a$  de la branche stable est comprise entre  $-0,1225 \leq a \leq 0,3675$ . ■

**Proposition 2.2** *Pour le cas particulier de  $a = 0,3675$  une bifurcation par doublement de la période est observée.*

**Preuve.** Pour  $a = \frac{3}{4}(b-1)^2 = 0,3675$ ; le système de Hénon a deux points d'équilibre en  $(0,9524; 0,2857)$ . Les valeurs propres sont  $\{-1; 0,3\}$  et  $\{2,2343; -0,1343\}$ . En effet, quand  $a$  s'approche de  $0,3675$ , une orbite périodique de période 2 est constatée. ■

### Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre  $a$  de 0 à 1,4 avec un pas de 0,001,  $b$  est égale à 0,3. On obtient le diagramme suivant :

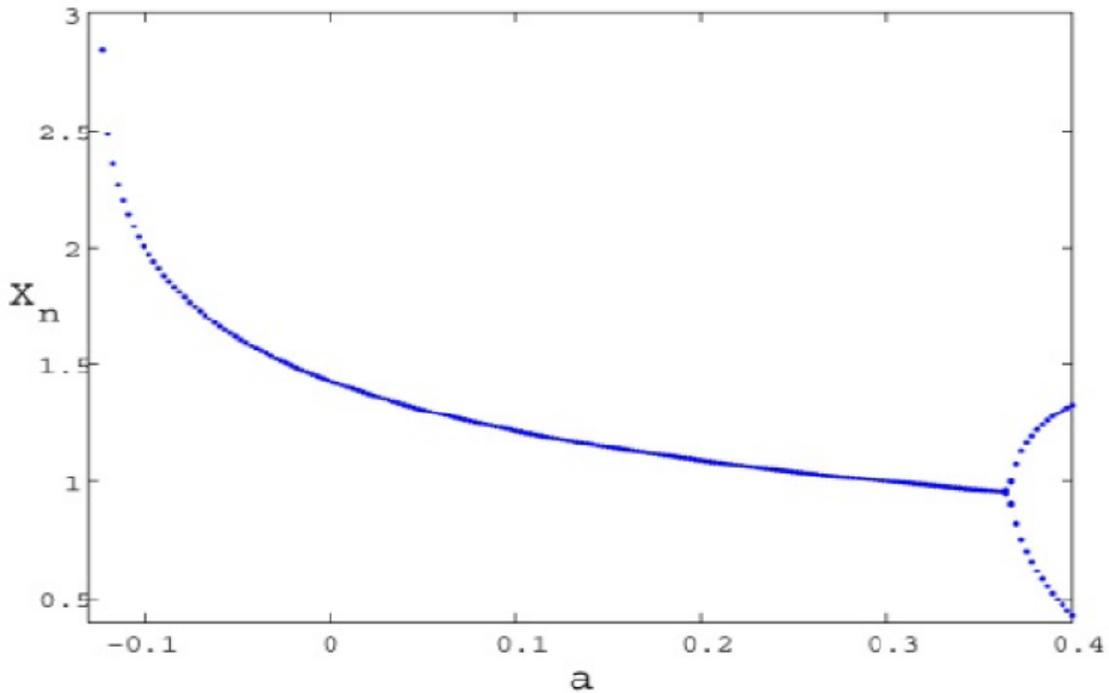


FIG. 2.5 – Diagramme de bifurcation pour le système de Hénon pour  $-0.15 \leq a \leq 0.4$  et  $b = 0.3$

1. Si  $-0.1225 < a < 0.3675$ , les itérations convergent vers un point du plan.
2. Si  $0.3675 < a < 0.9$ , les itérations tendent à constituer une suite  $(X_n, Y_n)$  telle que  $(X_{2n}, Y_{2n})$  converge vers un point et  $(X_{2n+1}, Y_{2n+1})$  converge vers un autre point. On a donc deux points limites : on observe un doublement de période.
3. Si  $0.9 < a < 1.02$ , on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

4. Pour  $a \geq 1.02$ , on ne distingue plus les cycles, et donc le système est chaotique.

## 2.2.6 Sensibilité aux conditions initiales

Que-ce passe-t-il quand on choisit des conditions initiales extrêmement voisines? Prenons par exemple  $(X_0, Y_0) = (0.001, 0.001)$ .

On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quant à  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ , voir Fig (2.7) et Fig (2.8).

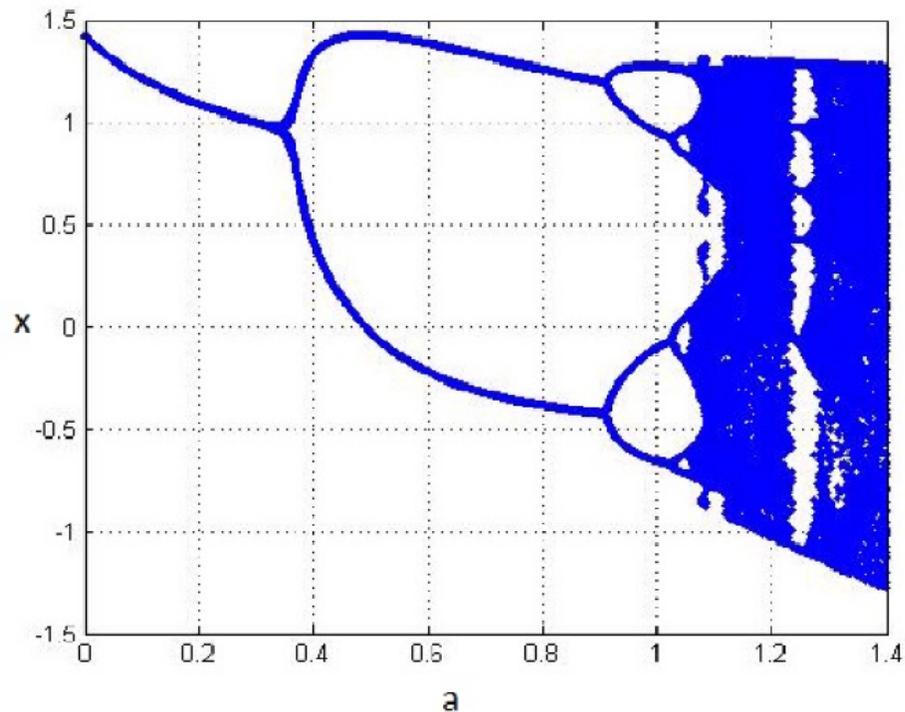


FIG. 2.6 – Diagramme de bifurcation de Hénon

### 2.2.7 Les exposants de Lyapunov

Pour justifier l'apparition de l'état chaotique et pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$ .

- Pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ , l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov  $\lambda_1 = 0.42205$ ,  $\lambda_2 = -1.626$  la dimension de Lyapunov par définition est égale à  $D_L = 1.2596$ .
- On fixe  $b = 0.3$ , on laisse  $a$  varier entre 0 et 1.4.

A partir de la Figure (2.9) on obtient deux zones :

- Une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0, 1.052]$ .
- Une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1.052, 1.4]$ .

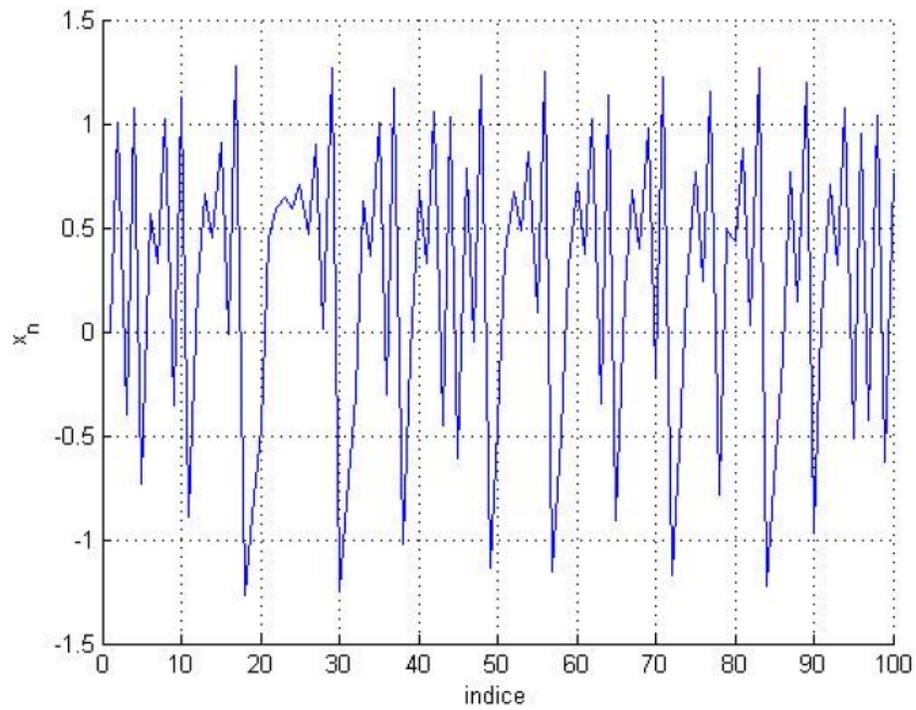


FIG. 2.7 – Les 100 premières itérées de  $X_n$  avec  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  avec  $(X_0, Y_0) = (0.001, 0.001)$

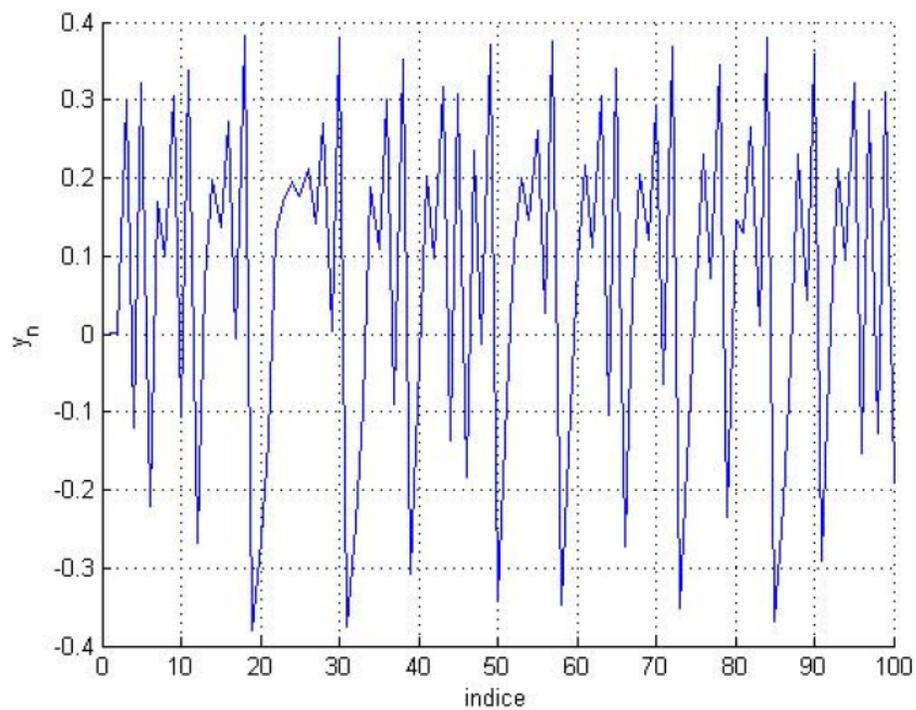


FIG. 2.8 – Les 100 premières itérées de  $Y_n$  avec  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  avec  $(X_0, Y_0) = (0.001, 0.001)$

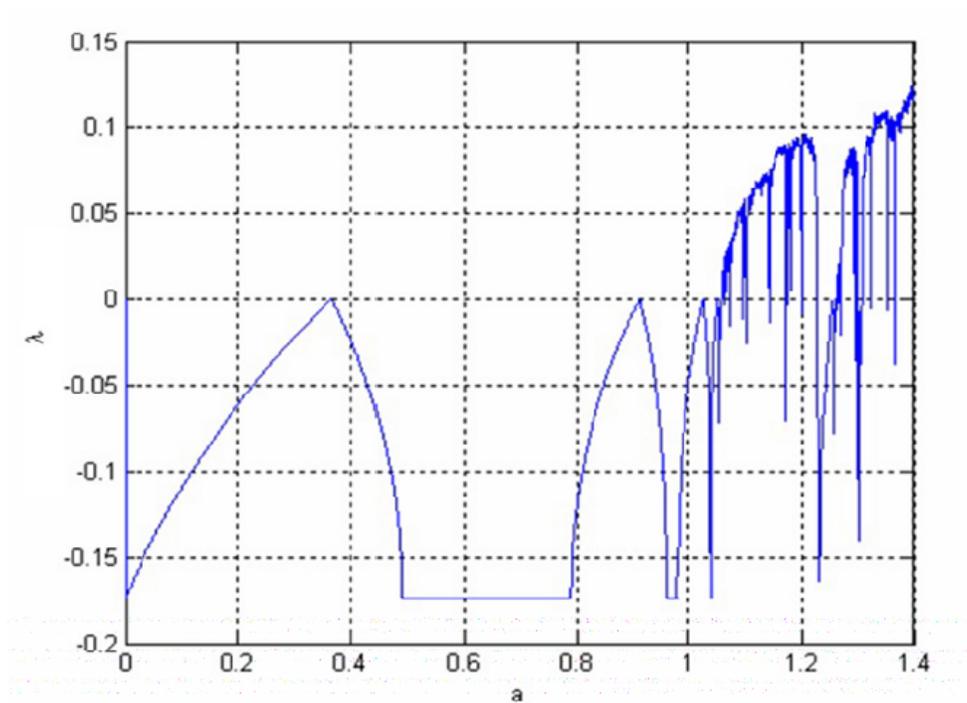


FIG. 2.9 – L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de Hénon en fonction de  $a$

# Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude des systèmes dynamiques chaotiques dépendant de paramètre et les différents comportements asymptotiques des solutions. Nous avons fourni les notions de bases et les outils mathématiques nécessaires pour étudier et appliquer les systèmes chaotiques. En premier lieu, à maîtriser et à comprendre certaines des propriétés complexes de la dynamique chaotique. Cette compréhension a été accompagnée par une illustration concrète de quelque notions précédentes par un exemple célèbre " modèle de Hénon ".

# Bibliographie

- [1] Adel Ouannas (07/12/2015). Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets. Thèse de Doctorat université Frères Mentouri à Constantine.
- [2] Anna Désilles (24/09/2003). Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.
- [3] Boukhalfa El-hafsi (2017). Sur le chaos et synchronisation dans les systèmes dynamiques discrets. Thèse de Doctorat université Badji Mokhtar-Annaba.
- [4] Haoran Wen (21/04/2014). A review of the Hénon map and its physical interpretations. School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332-0430, U.S.A.
- [5] Ibtissem Talbi (29/06/2010). Systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos (Application à la cryptographie). Mémoire de Magistère en Mathématique université Mentouri de constantine.
- [6] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke, (1996). Chaos- an Introduction to Dynamical Systems. Springer New York.
- [7] Orhan. Ozgur Aybar, I. Kusbeyzi Aybar, and A. S. Hacinliyan, (2013), Stability and Bifurcation in the HenonMap and its Generalizations, Yeditepe University, Istanbul, Turkey.
- [8] Ouerdia MEGHERBI (23 Juin 2018). Synchronisation des systèmes chaotiques discrets d'ordre fractionnaire pour la sûreté de communication à base d'observateurs impulsifs. Thèse de Doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [9] Samia Rezzag (2016). Etude et estimation des bornes de systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques. Thèse de Doctorat université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi.

- [10] Tayeb Hamaizia (25/04/2013). Systemes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithmes chaotique". Thèse de Doctorat université Constantine-1.
- [11] Tidjani Menacer (26/05/2014). Synchronisation des systèmes dynamiques dérivées fractionnaires. Thèse de Doctorat université Constantine1.
- [12] YAHIAOUI Yanis (02/12/2009). Sur certains aspects des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels. Mémoire de Magistère en Mathématique université Abderrahmane Mira - Béjaia.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\dot{X}$  : dérivée de  $X$ .

$O$  : orbite.

$\lambda_i$  : les valeurs propres.

$I$  : matrice identité.

$\det J$  : déterminant d'une matrice jacobienne  $J$ .

$H$  : application de Hénon.

$\sum$  : la somme algébrique.

$|\cdot|$  : valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n$  : vecteur de réels de dimension  $n$ .