République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Saci Samira

Titre :

Existence et Unicité de la Solution d'une EDSRs

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Abba Abedelmajid**	UMKB	Président
Dr.	**Chaouchkhounane Nassima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Berouis Nassima**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

■ À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

■ À mes cheres frères, pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

■ À toute ma famille petite ou grande, proche ou lointaine pour leur soutien tout au long de mon parcours scolaire,

■ À mes chers amis, pour leur appui et leur encouragement, Merci d'être toujours là pour moi,

■ À tous mes professeurs du primaire à l'université, et tous mes collègues de promotion de mathématique 2020, Que dieu les protèges, Je pris Allah de leur accorder longue vie et bonne santé.

SAMIRA

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage et la patience d'arrivée a la fin de mes études supérieures et pour la réalisation de ce travail,

Je remercie mon encadreur Dr **chaouchkhouane nassima**, pour m'avoir proposé ce projet et pour son suivi permanent de mon travail,

Ainsi, je remercie les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon projet, je leur présente toutes mes gratitudes et mes profonds respects.

je le remercie aussi vivement pour son écoute, son aide, pour ses remarques et ses conseils.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiquesqui ont contribué à ma formation, à toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de master, nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades **(EDSR** en abrégé**)** ou en anglais **BSDE** (backward stochastic differential équations). La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades a connu un formidable développement à partir des années **1990**. Ces équations sont apparues en **1973**, dans un article de **J.M. Bismut** dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal, et en **1978, Bismut** prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de l'**EDSR** de Riccati. Pourtant le premier résultat général concernant les **EDSR** ne date que de **1990** et est dû à **E. Pardoux** et **S. Peng** .

Maintenant, la question qui nous sommes posés est quelle est la signification d'une équation différentielle stochastique rétrograde ? Si ξ est une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable et $f = f\ (t;\omega;y;z)$ est une fonction progressivement mesurable donnée, l'EDSR **:**

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s;Y_s;Z_s)dt - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \in [0,T]$$

avec W est un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, admet-elle une solution finie sur $[0,T]$? Et si une telle solution existe, est-elle unique ?

Résoudre cette **EDSR**, c'est déterminer un couple de processus noté $(Y_t; Z_t)_{t\ \geq 0}$ qui vérifie l'équation et qui est $\mathcal{F}$-adapté c'est-à-dire ne dépend que de l'information connue jusqu'à l'instant t. On peut dire que les **EDSR** sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne une condition terminale (c'est pourquoi on dit rétrograde). Dans le cas déterministe, par exemple les équations différentielles ordinaires (EDO en abrégé) il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initial par inversion du temps, finalement on résoudre le même problème. Dans le cas aléatoire, les choses sont totalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui reste adapté par rapport à une filtration donnée. Par exemple, si on inverse le temps pour se ramener au problème avec condition initiale et donc à revenir à la théorie des équations différentielles stochastiques "EDS en abrégé", on trouve une solution qui anticipe , c'est-à-dire à l'instant t elle dépend du futur, c'est exactement là où se présente la difficulté.

Notre mémoire est divisé en trois chapitres :

- **Chapitre 1 (Rappels de calcul stochastique) :** Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, ayant pour but de mettre en relief les outils de notre étude, on va présenter une foule de définitions, propositions, théorèmes faits sans démonstration et des résultats de bases du calcul stochastique telle que les processus stochastiques, espérance conditionnelle, mouvement brownien,...ect.

- **Chapitre 2 (Les équations différentielles stochastiques .EDS) :** Dans ce chapitre, nous aurons discuter sur la signification des équations différentielles stochastiques et montrer l'existence et l'uniciter de la solution de ces equations différentielles stochastiques et quels sont ses propriétés .

- **Chapitre 3 (EDSR globalement Lipschitziennes) :**L'objectif de ce chapitre est de montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR, ce résultat est dû à E.Pardoux et S.Peng et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dans le cas où le générateur f non linéaire sous des hypothèses lipschitiziennes en $(y;z)$.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique :

Le calcul stochastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continus remplaçant les fonctions,et les martingales jouent le rôle des constantes.Le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité complet et (E, ε) espace mesurable.

1.1 Processus stochastique :

Définition 1.1.1 ***(Variable aléatoire) :*** *si : $E = \mathbb{R}$ et $\varepsilon = B(\mathbb{R})$ on appelle variable aléatoire (réelle) tout application mesurable*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

où $B(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne , c'est à dire :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in B(\mathbb{R}).$$

Définition 1.1.2 ***(Tribu engendrée) :*** *la tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble $\sigma(x) = \{x^{-1}(A) : A \in \varepsilon\}$.*

où $x^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ est la plus petite tribu de Ω .

Définition 1.1.3 ***(Processus stochastique) :*** *On dire que X est un processus aléatoire définie sur Ω, indexé par T si : ses coordonnées sont des variables aléatoires sur Ω ,*

ie : $X(t) : \omega \mapsto X(t, \omega)$ est une v.a pour tout $t \in T$ .En générale $T = \mathbb{R}_+$ est le processus stochastique est indexé par le temps t

1) Si T est un ensemble fini , le processus est un vecteur aléatoire.

2) Si $T = \mathbb{N}$, le processus est une suite de variables aléatoires.

3) Si $T < \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.

4) Si $T < \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire.

Remarque 1.1.1 ***: i.*** *pour t fixé , X_t est variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

ii. *pour ω fixé , X_t est une fonction à valeurs réels.*

Définition 1.1.4 ***(Filtration) :*** *Une filtration $(\mathcal{F}_t)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall\ s \leq t$.*

1) **processus continu :** le processus $X = \{X_t\ , t \geq 0\}$ est dit continu si pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t\ (\omega)$ est continue (i.e les trajectoires sont continues).

2) **processus mesurable :** le processus $X = \{X_t\ , t \geq 0\}$ est dit mesurable si l'aplication :

$$(t, \omega) \mapsto X_t\,(\omega)$$

définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ muni de $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, à valeur dans $\mathbb{R}^d$ muni de tribu $B(\mathbb{R}^d)$,est mesurable.

3) **processus adapté :** On dit que $X = \{X_t\ , t \geq 0\}$ est $\mathcal{F}-$adapté si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable .

4) **processus progressif :**on dit que $X = \{X_t\ , t \geq 0\}$ est $\mathcal{F}-$progressif si pour tout $t \geq 0$, la fonction $(s, \omega) \mapsto X_s\,(\omega)$ définie sur $([0, t] \times \Omega)$, $B\,([0, t] \otimes \mathcal{F}_t)$ à valeur dans $\left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ est mesurable.

1.2 Espérance conditionnelle :

Soient X ,Y des v.a intégrables définies sur espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.1 *L'espérance conditionnelle $E\,[X|G\,]$ de X sachant G est l'unique variable aléatoire qui vérifiée les deux conditions :*

- $G-$mesurable sur Ω .
- $\int_B XdP = \int_B E[X|G]dP$,$\forall B \in G$.

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle :

1. **Linéarité :** soit a et b deux constantes, alors : $E\ (aX + bY\ |G) = a\ E(X\ |G\ ) + b$ $E\ (Y\ |G\ )$.
2. **Monotonie :** soit X et Y deux v.a telles que $X \leq Y$, alors $E\ (X\ |G\ ) \leq E\ (Y\ |G\ )$.
3. **Espérance :** $E\ [E(X\ |G)] = E\ (X\ )$.
4. Si X est $G-$mesurable, alors : $E\ (X\ |G\ ) = X$.
5. Si Y est $G-$mesurable, alors : $E\ (X\ Y\ \ |G\ ) = Y\ E\ (X\ |G\ )$ pour tout v.a X .
6. Si X est indépendante de G , alors : $E\ (X\ |G\ ) = E\ [X\ ]$.
7. Si G_1 et G_1 sont deux tribus de $\mathcal{F}$ telles que $G_1 \leq G_2$ alors :

   $E\ [X\ |G_1] =\ E\ [E(X\ |G_1)|G_2] =\ E\ [E(X\ |G_2)\ |G_1]$.

1.3 Quelques inégalités classiques :

1-3-1 Inégalité de Tchebychev : si $\lambda > 0$, alors : $\forall\ p \geq 1$, $P\ (|X\ | > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda p} E\ \ (|X\ |^p)$.

1-3-2 Inégalité de Cauchey-Schwartz : $E\,(XY\ ) \leq \sqrt{E\ \ (X^2)\ \ E\ \ (Y^2)}$.

1-3-3 Inégalité de Hölder : si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors : $E\ (XY\ ) \leq\ \ [E\,|X\ |^p]^{\frac{1}{p}}\ [E\,|Y\ |^q]^{\frac{1}{q}}$.

1-3-4 Inégalité de Jensen :

$si\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} est une fonction convexe telle que : E[\phi(X)] < \infty \quad alors : \ \phi(E[X\ |G]) \ \leq \ E[\phi(X)\ |G]\ .$

1-3-5 Lemme de Fatou : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$.

alors la limite inférieure de la suite est mesurable et :

$$\int \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf (f_n) d\mu \ \leq \ \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \ (\int f_n \ d\mu) \ .$$

1.4 Mouvement Brownien :

Définition 1.4.1 ***(Mouvement brownien) :*** *On appelle Mouvement Brownien un processus stochastique $W = \{Wt, t \geq 0\}$ à valeurs réelles tel que :*

1. **Continuité :** W est un processus à trajectoires continues .
2. W est à accroissements indépendants si : $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est independant de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u \ , u \ \leq s)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.
3. pour tous $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

Remarque 1.4.1 ***:***

i. On dit qu'un mouvement brownien par rapport à x si $W_0 = x$.

ii. Un mouvement brownien est dit standard si $B_0 = 0$ P -p.s ; $E[W_t] = 0$ et $E[W_t^2] = t$.

Proposition 1.4.1 ***:*** *Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, alors : B_t est un processus gaussien i.e. pour tout n et tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ....t_n$; $(W_{t_1}, ...W_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Théorème 1.4.1 *: X un mouvement brownien standard si et seulement si X est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance : $cov(X_s, X_t) = s \wedge t = min(s,t)$*

.

1.5 Martingale :

Définition 1.5.1 ***(Temps d'arrêts) :*** *Soit une variable aléatoire $T \ : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ est un temps d'arrêts si l'évènement $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ , \forall t \in [0, \infty]$.*

Définition 1.5.2 ***(Martingale en temps continue) :*** *Soit $M = \{M \ , t \geq 0 \ \}$ un processus stochastique $\mathcal{F}-$adapté défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que M est une martingale si :*

1. pour tout $t \geq 0$ la variable aléatoire M_t est intégrable .
2. pour tout $0 \leq s \ \leq t$, $E \ (M_t \ |\mathcal{F}_s) = M_s$.

à la place du point (2.) : le processus M_t est appelé sous-martingale (resp.sur-martingale) lorsqu'il vérifié :$\forall s \leq \ t$, $M_s \leq \ E \ (M_t \mid \mathcal{F}_s)$. (resp. $\forall s \leq t : M_s \geq E \ [M_t \mid \mathcal{F}_s \ ]$) .

Définition 1.5.3 ***(Martingale locale) :*** *Soit $M = \{M \ , t \geq 0\}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit martingale locale s'il existe une suite croissente de temps d'arrêt $(T_n)_{n \ \geq \ 1}$ telle que :*

1. la suite T_n converge prèsque sûrement (p.s) vers $+\infty$.
2. pour tout $n \geq 0$, le processus $M^{T_n} := \{M_t^{T_n} = M_{t \ \wedge \ T_n} \ , n \ \geq \ 0 \ \}$ est une martingale uniformément intégrable .

Théorème 1.5.1 *: Soit X une (sous, resp. sur) martingale locale telle que : $E \ \left(\sup_{s \ \leq \ t} |X_s|\right) < \infty$ pour tout $t \geq 0$. alors X est une (sous, resp. sur) martingale.*

Si de plus $E \ (\sup_s \ |X_s|) < \infty$,alors : X est une (sous, resp.sur) martingale uniformément intégrable.

Théorème 1.5.2 ***(l'inégalité de martingale de Doob) :*** *soit* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *est une martingale à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *et soit* $[a,b]$ *est un intervalle borné dans* $\mathbb{R}_+$ *.*

i) si $p \geq 1$ et $M_t \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $c > 0$

$$P\left\{\omega : \sup_{a\leq t\leq b} |M_t(\omega)| \geq c\right\} \leq \frac{E\ |M_b|^p}{c^p}$$

ii) si $p > 1$ et $M_t \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$,alors :

$$E\ \left(\sup_{a\leq t\leq b} |M_t|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\ |M_b|^p$$

1.6 Calcule d'Itô :

Soit W un mouvement brownien sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

1.6.1 Processus d'Itô :

Définition 1.6.1 *On appelle processus d'Itô un processus* X *à valeurs réelles tel que :* $\forall$ $0 \leq t \leq T\ \ ;\ \ X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s\ \ ;\ \ P-p.s$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0$ −mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions : $\int_0^t |b_s|\,ds < \infty$ et $\int_0^t |\sigma_s|\,ds < \infty$.

On utilise la notation suivent :

$$\begin{cases} dX_t &= b_t\ dt + \sigma_t\ dW_t\ , \\ X_0 &= x\ , \end{cases}$$

le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Remarque 1.6.1 ***:****La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

1.6.2 Formule d'Itô :

– **Première formule d'Itô :** Soients X un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornée, alors :

$f\ (X_t) = f\ (X_0) + {}^t\int_0 f\ '(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\ {}^t\int_0 f\ '(X_s)\ \sigma_s^2\ ds$.

– **Deuxième formule d'Itô :** Soients $(t, x) \longrightarrow f\ (t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô :

$f\ (t, X_t) = f\ (0, X_0) + {}^t\int_0 f'_x\ (s, X_s)\ dX_s + {}^t\int_0 f'_s\ (s, X_s)\ ds + \frac{1}{2}\ {}^t\int_0 f'_{xx}\ (s, X_s)\ d\ \langle X, X\ \rangle_s$.

Proposition 1.6.1 *(Intégration par parties) : Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors :* $X_t\ Y_t = X_0\ Y_0 + {}^t\int_0 X_s\ dY_s + {}^t\int_0 Y_s\ dX_s + \langle X, Y\ \rangle_s$.

1.7 Théorèmes Générales :

Théorème 1.7.1 *: soit $f \in M^2\ ([0, T\ ], \mathbb{R}^{d\times m})$ et soit ρ, τ deux temps d'arrêts tels que :*

$0 \leq \rho \leq \tau \leq T,$ alors :

$$E\left(\int_\rho^T f\ (s)\, dW_s\ /\ \mathcal{F}_\rho\right) = 0$$

$$E\left(\left|\int_\rho^T f\ (s)\, dW_s\right|^2 /\ \mathcal{F}_\rho\right) = E\left(\int_\rho^T |f\ (s)|^2\, ds\ /\ \mathcal{F}_\rho\right)$$

Théorème 1.7.2 *: soit $p \geq 2$, si $g \in M^2\ ([0, T\ ], \mathbb{R}^{d\times m})$ telle que : $E\int_0^T |g\ (s)|^p\, ds < \infty$ alors :*

$$E\left|\int_0^T g\ (s)\, ds\right|^p \leq \left(\frac{p\ (p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E\int_0^T |g\ (s)|^p\, ds \qquad (1.1)$$

En particulier , pour $p = 2$, il y a une igalité .

Preuve. : pour $p = 2$, elle déja vérifiée dans théoreme (1.7.1). donc , on vas juste la démontrer pour $p > 2$. pour $0 \leq t \leq T$, $x\ (t) = \int_0^T g\ (s)\, dW_s$ par l'utilisation de la formule d'itô et théoreme (1.7.1) on a :

$$E\ |x(t)|^p = \frac{p}{2}E\int_0^t \left(|x(t)|^{p-2}|g\ (s)|^2 + (p-2)|x(s)|^{p-4}\left|x^T\ (s)\ g\ (s)\right|^2\right) ds \tag{1.2}$$

$$\leq \frac{p\ (p\ -1)}{2}\ E\int_0^t \left(|x(s)|^{p-2}|g\ (s)|^2\ ds\ \right) \tag{1.3}$$

Par l'inégalité d'Hölder on a :

$$E\ |x(t)|^p \leq \frac{p\ (p\ -1)}{2}\left(E\int_0^t |x(s)|^p\ ds\ \right)^{\frac{p\ -\ 2}{p}}\left(E\int_0^t |g\ (s)|^p\ ds\ \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= \frac{p\ (p\ -1)}{2}\left(\int_0^t E\ |x(s)|^p\ ds\ \right)^{\frac{p\ -\ 2}{p}}\left(E\int_0^t |g\ (s)|^p\ ds\ \right)^{\frac{2}{p}}$$

on note de (1.2) que $E\ |x(t)|^p$ ne diminue pas en t , il les suit :

$$E\ |x(t)|^p \leq \frac{p\ (p\ -1)}{2}\left(t\ E\ |x(t)|^p\ \right)^{\frac{p\ -\ 2}{p}}\left(E\int_0^t |g\ (s)|^p\ ds\ \right)^{\frac{2}{p}}$$

cela donne :

$$E\,|x(t)|^p \leq \left(\frac{p\ (p\ -1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} t^{\frac{p\ -\ 2}{p}}\ E\int_0^t |g\ (s)|^p\ ds$$

donc : **(1.1)** elle est vérifiée ,si on remplace t par T . ■

Théorème 1.7.3 ***:*** *sous les mêmes hypothèses que le théoème* (1.7.1)

$$E\ \left(\sup_{0\leq t\ \leq T}\ \left|\int_0^t g\ (s)\ dW_s\ \right|^p\right) \leq \left(\frac{p^3}{2\ (p\ -1)}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p\ -\ 2}{p}}\ \ E\int_0^T |g\ (s)|^p\ ds \tag{1.4}$$

Preuve. ***:*** *Rappelons que l'intégrale stochastique* $\int_0^t g\ (s)\ dW_s$ *est une martingale continue à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *.Par conséquent , par l'inégalité de la martingale de doob , nous avons :*

$$E\left(\sup_{0\leq t\ \leq T}\ \left|\int_0^t g\ (s)\ dW_s\ \right|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p\ -1}\right)^p E\ \left|\int_0^T g\ (s)\,dW_s\right|^p$$

et de théorème (1.7.1) *on obtient :*

$$E\left(\sup_{0\leq t\ \leq T}\ \left|\int_0^t g\ \ (s)\ \ dW_s\ \right|^p\right) \leq \left(\frac{p^3}{2\ (p\ \ -1)}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p\ -\ 2}{p}}\ \ E\int_0^T |g\ \ (s)|^p\ ds$$

■

Théorème 1.7.4 ***(Burkholder-Davis-Gundy "BDG") :*** *Soit* $p \in\ ]0;\infty[$*. Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale continue* X*, nul en* 0*.*

$$c_p E[\langle X;X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq E[\sup_{t\ \geq 0}|X_t|^p] \leq\ C_p E[\langle X;X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Remarque 1.7.1 ***:*** *En particulier, si* $T > 0$ *;*

$$c_p E[\langle X;X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq E[\sup_{0\leq t\ \leq T}|X_t|^p] \leq\ C_p E[\langle X;X\rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

Théorème 1.7.5 ***(Théorème du point fixe) :*** *Soient* $(E\ ,d)$ *un espace métrique complet et* $\varphi : E \longrightarrow E$ *une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport* $k < 1$*. Alors,*

φ admet un unique point fixe $a \in E$ tel que : $\varphi(a) = a$.

Théorème 1.7.6 ***(Théorème de représentation des martingales) :*** *Soit* $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *.alors il existe un processus adapté* H *lel que :*

$$E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty;$$

et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s\ P - p.s.$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques(EDS)

Les équations différentielles (**standard**) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les equations en équations différentielles stochastiques **(EDS)**. Dans ce chapitre, nous aurons présenté la signification d'une équation différentielle stochastique et esq-elle admet une solution et si cette solution existe, est-elle unique ?

Définition 2.0.1 *Une équation différentielle stochastique* ***(EDS)*** *est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{2.1}$$

où sous forme condensée :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \text{ avec } X_0 = x ,$$

où : $(W_t)_{t \geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien m-dimensionnel sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $X_0 = x$, $x \in \mathbb{R}^n$ (condition initiale), le processus X ici est inconnue.

les deux fonctions : $b : [0;T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0;T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ sont mesurables et bornées, tels que : $n, m \in \mathbb{N}$.

Pour une équation différentielle ordinaire, Le problème est de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients b et σ , l'EDS (2.1) a une unique solution. Donc, on vas définir cette solution.

2.1 Existence et unicité forte

Définition 2.1.1 ***(solution forte de EDS) :*** *On dit que un processus* $X = \{X_t \ , \ T \geq t \geq 0\}$ *est une solution forte de l'EDS* (2.1) *s'il vérifié les conditions suivants :*

i. X est continu et $\mathcal{F}_t-$adapté .

ii $\{b(t, X_t)\} \in \mathcal{L}^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ et $\{\sigma(t, X_t)\} \in \mathcal{L}^1([0,T], \mathbb{R}^{n \times m})$

ou : $E\left[\int_0^t \left\{|b(s, X_s)| + \|\sigma(s, X_s)\|^2\right\} ds\right] < +\infty$, tel que : $\|\sigma\|^2 = trace$ $(\sigma\sigma^*)$ où : σ^* désigne le transposé de σ .

iii. Pour tout $t \in [0,T]$, on a : $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ P-p.s .

Théorème 2.1.1 ***(Existence et unicité) :*** *Supposons que les fonctions* b *et* σ *satisfont pour tout* $t \in [0,T]$, x , $y \in \mathbb{R}$, *les deux conditions suivantes :*

1. Condition de Lipschitz locale : Pour tout compact $L \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $\Bbbk = \Bbbk(L)$, telle que :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \Bbbk\,|x - y| \tag{2.2}$$

2. Condition de croissance : Il existe une constante $K \in \mathbb{R}$, telle que :

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + |x|) \tag{2.3}$$

De plus, La condition initiale X_0 est independante de $(W_t)_{t \geq 0}$ est de carré intégrable, i.e : $E\left(|X_0|^2\right) < \infty$.

Alors il existe une unique solution de l'EDS (2.1) à trajectoires continues pour tout t .

Lemme 2.1.1 ***(Gronwall) :*** *Soient $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$, on a :*

$$g(t) \leq a + b \quad \int_0^t g(s)ds \tag{2.4}$$

Alors on a $g\ (t) \leq a\ exp\ (bt)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration : (Gronwall) : En itérant la condition (2.4) sur g , on a pour tout $n \geq 1$,

$$g(t) \leq a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + ... + \frac{(bt)^n}{n_!} + b^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_n} g(s_{n+1})ds_{n+1}.$$

Si g est majorée par A , le dernier terme se majore par $A(bt)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers 0, quand $n \longrightarrow +\infty$,ce qui prouve le lemme car le développement à droite tend vers a $exp\ (bt)$.

Nous préparons d'abord un lemme .

Lemme 2.1.2 *Supposons que la conditon de croissance lineaire soit vérifiée, si X_t est une solution de l'EDS(2.1), alors :*

$$E\left(\sup_{0 \leq t\ \leq T} |X_t|^2\right) \leq (1 + 3E\,|x|^2)\ e^{3KT\ (T+4)} \tag{2.5}$$

En particulier , X_t appartient à $M\ ^2\ (\ [0, T\ ]\ , \mathbb{R}^d)$

Preuve. : pour chaque entier $n \geq 1$; on définie la suite des temps d'arrét

$$T_n = T \wedge \inf\{t \in [0, T] : |X_t| \geq n\}.$$

Clairement , $T_n \uparrow T$ p.s , soit $X_t^n = X(t \wedge T_n)$, $t \in [0, T]$, alors X_t^n satisfait l'équation :

$$X_t^n\ = x\ +\ \int_0^t b(X_s^n, s)I_{[[0,T_n]]}(s\ )ds\ +\ \int_0^t \sigma(X_s^n, s\ )I_{[[0,T_n]]}(s\ )dW_s \quad .$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $|a+b+c|^2 \leq 3(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$, l'inégalité d'Hölder et la condition de croissance (2.3) , on peut montrer que :

$$|X_t^n|^2 \leq 3|x|^2 + 3Kt \int_0^t (1+|X_s^n|^2)ds + 3\left|\int_0^t \sigma(X_s^n, s)dW_s\right|^2$$

par le théorème (1.7.2)et la condition de croissance (2.3), on obtient que :

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s^n|^2\right) &\leq 3\ E\ |x|^2 + 3KT \int_0^t (1+E|X_s^n|^2)ds + 12\ E\int_0^t |\sigma(X_s^n, s)|^2 I_{[[0,T_n]]}(s)ds \\ &\leq 3\ E\ |x|^2 + 3K(T+4)\int_0^t (1+E|X_s^n|^2)ds \end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$1+E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_r^n|^2\right) \leq 1+3E|x|^2 + 3K(T+4)\int_0^t \left[1+E\left(\sup_{0\leq r\leq t}|X_r^n|^2\right)\right]ds,$$

l'inégalité de Gronwall nos donne :

$$1+E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_s^n|^2\right) \leq \left(1+3E|x|^2\right)\ e^{3KT\ (T+4)},$$

alors

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T_n}|X_t|^2\right) \leq (1+3E|x|^2)e^{3KT\ (T+4)}$$

Enfin, si on fait tendre $n \longmapsto \infty$ on obtient (2.5) . ■

Preuve. (Théorème d'existence et d'unicité) :

<u>1-Unicité</u> : On suppose que X_t et $\tilde{X}_t$ deux solutions de l'EDS (2.1) **;** par le lemme (2.1.2), les deux solutions appartiennent à $M^2([0,T], \mathbb{R}^d)$, notant que :

$$X_t - \tilde{X}_t = \int_0^t [b(X_s,s) - b(\tilde{X}_s,s)]ds + \int_0^t [\sigma(X_s,s) - \sigma(\tilde{X}_s,s)]dW_s$$

Par l'utilisation de l'inégalité de Hölder , théorème (1.7.2) et la condition de Lipschitz (2.2) on peut montrer de la même manière de la preuve du lemme(2.1.2) que :

$$E\left(\sup_{0\leq s\ \leq t}\left|X_s\ -\tilde{X}_s\right|^2\right)\leq 2\mathbb{k}(T+4)\int_0^t E\left(\sup_{0\leq r\ \leq t}\left|X_r\ -\tilde{X}_r\right|^2\right)ds$$

L'inégalité de Gronwall donne alors que :

$$E\left(\sup_{0\leq t\ \leq T}|X_t\ -X_t|^2\right)=0.$$

Par conséquent, $X_t=\tilde{X}_t$ pour tout $0\leq t\leq T$ prèsque sûrement .L'unicité à été prouvée .

2-Existence : Soit $X_0=x$, et pour tout $n=1,2,...,$ en utilisant la méthode d' itérations de Picard pour $t\in[0,T]$:

$$X_t^n=x\ +\int_0^t b(X_s^{n-1},s)ds+\int_0^t\sigma(X_s^{n-1},s\ )dW_s\ , \tag{2.6}$$

il est clair que , $X_0\in M^{\ 2}\ (\ [0,T\ ]\ ,\mathbb{R}^d)$.

De plus par induction $X_t^n\in M^{\ 2}\ (\ [0,T\ ]\ ,\mathbb{R}^d)$, car on a de (2.6) que **:**

$$E\left|X_t^n\right|^2\leq C_1+3K(T+1)\ \int_0^t E|X_s^{n-1}|^2ds \tag{2.7}$$

Où : $C_1=3E\left|x\right|^2+3KT\ (T+1)$. Pour tout $K\ \geq 1$ et de (2.7) on a :

$$\begin{aligned}\max_{1\leq\ n\ \leq\ K}E\left|X_t^n\right|^2&\leq C_1+3K(T+1)\ \int_0^t\max_{1\leq\ n\ \leq\ K}E|X_t^{n-1}|^2ds\\&\leq C_1+3K(T+1)\ \int_0^t\left(E\left|x\right|^2+\max_{1\leq\ n\ \leq\ K}E|X_s^n|^2\right)ds\\&\leq C_2+3K(T+1)\ \int_0^t\max_{1\leq\ n\ \leq\ K}E|X_s^n|^2ds\end{aligned}$$

Où : $C_2=C_1+3KT\ (T+1)\ E\left|x\right|^2$. L'inégalité de Gronwall implique que :

$$\max_{1\leq\ n\ \leq\ K}E\left|X_t^n\right|^2\leq C_2e^{3KT\ (T+1)}$$

Puisque K est arbitraire , pour tout $0 \leq t \leq T$, $n \geq 1$:

$$E\left|X_t^n\right|^2 \leq C_2 e^{3KT\ (T+1)} \tag{2.8}$$

Ensuite, on obtient :

$$\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 = \left|X_t^1 - x\right|^2 \leq 2\left|\int_0^t b(x,s)ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(x,s\ )dW_s\ \right|^2$$

En passant à l'esperance mathématiques et en utilisant (2.3), on obtient :

$$E\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2Kt^2\left(1+E\left|x\right|^2\right) + 2Kt\left(1+E\left|x\right|^2\right) \leq C; \tag{2.9}$$

Où : $C = 2KT\ (T+1)\left(1+E\left|x\right|^2\right)$ .Alors pour tout $0 \leq t \leq T$, $n \geq 1$:

$$E\left|\ X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq \frac{C\ [M\ t]^n}{n\ !} \tag{2.10}$$

Où : $M = 2\mathbb{k}\ (T+1)$. Nous le montrerons par induction. Par (2.9) , (2.10) est vraie pour $n = 0$ .Ensuite, supposons que (2.10) , est vraie jusqu'a l'ordre $n \geq 0$, nous montrerons que (2.10) est vraie pour $n+1$alors :

$$\begin{aligned} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 &\leq 2\left|\int_0^t [b(X_s^{n+1},s) - b(X_s^n,s)]ds\right|^2 \\ &+ 2\left|\int_0^t [\sigma(X_s^{n+1},s\ ) - \sigma(X_s^n,s\ )]dW_s\ \right|^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

En passant à l'esperance mathématiques, et en utilisant (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} E\left|X_t^{n+2} - X_t^{n+1}\right|^2 &\leq 2\mathbb{k}(t+1)E\int_0^t \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2 ds \\ &\leq ME\int_0^t \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2 ds \\ &\leq M\int_0^t \frac{C\ [M\ s]^n}{n\ !}ds = \frac{C\ [M\ t]^{n+1}}{(n\ +1)\ !} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, (2.10) est vraie pour $n+1$. Par conséquent, par induction, (2.10) donne pour tout $n \geq 0$. En outre dans(2.11) on remplacer n par $n-1$, on obtient que :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq 2\mathbb{k}T \int_0^T \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^T [\sigma(X_s^n, s) - \sigma(X_s^{n-1}, s)] dW_s\right|^2$$

En passant à l'esperance mathématiques et en utilisant le théorème (1.7.3) et (2.10), nous trouvons que :

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) \leq 2\mathbb{k}(T+4) \int_0^T E\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds \leq 4M \int_0^T \frac{C\,[M\,s]^{n-1}}{(n-1)\,!} ds = \frac{4C\,[M\,T\,]^n}{n\,!}$$

Par conséquent,

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{n+1} - X_n^t\right| > \frac{1}{2^n}\right\} \leq \frac{4C\,[4M\,T\,]^n}{n\,!}$$

par le fait que $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} 4C[4MT]^n}{n!} < \infty$; le lemme de Borel-Cantelli nos donne que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier positif $n_0 = n_0(\omega)$ tel que :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0$$

Il s'ensuit que, avec probabilité 1 , les sommes partilles :

$$X_t^0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left[X_i^{n+1} - X_i^n\right] = X_t^n.$$

convergent uniformément dans $[0, T]$. on note la limite par X_t. Clairement, X_t est continu et $\mathcal{F}_t$ -adapté. D'autre part par (2.10) et pour tout t , $\{X_t^n\}_{n \geq 1}$est une suite de cauchy dans L^2 .Par conséquent, $X_t^n \longmapsto X_t$ dans L^2 . quand $n \longmapsto \infty$, (2.8) donne :

$$E\left|X_t\right|^2 \leq C_2 e^{3KT\,(T+1)}, \qquad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T$$

Donc, $X_{(.)} \in M^{2}([0,T], \mathbb{R}^d)$. il reste à montrer que X_t satisfait l'équation (2.1). notons que :

$$E\left|\int_0^t [b(X_s^n, s)ds - \int_0^t b(X_s, s)]ds\right|^2 + E\left|\int_0^t [\sigma(X_s^n, s)dW_s - \int_0^t \sigma(X_s, s)]dW_s\right|^2$$
$$\leq \Bbbk\,(T+1)\int_0^T E\,|X_s^n - X_s|^2\,ds \longmapsto 0 \quad \text{quand } n \longmapsto \infty \tag{2.12}$$

Par conséquent, si $n \longmapsto \infty$ dans (2.6) on obtient :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s\,, \qquad \text{sur } 0 \leq t \leq T$$

La preuve est complète. ■

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques rétrogrades $(EDSR)$

L'objectif de ce chapitre est de présenter et montrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques rétrogrades dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par **Pardoux** et **Peng** en **1990** avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

3.1 Motivationset notations :

3.1.1 Présentation du problème :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, où T désigne un temps terminal.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\frac{dY_t}{dt} = f\ (Y_t)\ ,\ t \in [0, T] \\ \qquad Y_T = \xi\ ; \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant t ; Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f = 0$; le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe.

La meilleure approximation-disons dans L^2-adaptée est la martingale $Y_t = E\ (\xi/\mathcal{F}_t)$, si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré integrable et adapté tel que :

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \in [0,T]$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} -\ dY_t = -Z_t dW_t,\ t \in [0,T] \\ Y_T = \xi\ ; \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f dépendre du processus Z ; l'équation devient alors :

$$\begin{cases} -\ dY_t = f\ (t; Y_t; Z_t)dt\ - Z_t dW_t,\ t \in [0,T] \\ Y_T = \xi\ ; \end{cases} \tag{3.1}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (s; Y_s; Z_s)dt - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \in [0,T]$$

3.1.2 Notations :

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement brownien (MB) d-dimensionnel sur cet espace. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus :

- On note $S^{2}(\mathbb{R}^K)$: l'espace vectoriel formé des processus Y , progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, tels que :

$$\|Y\|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S_c^{2}(\mathbb{R}^K)$ le sous espace formé par le processus continus.

- En suite $M^{2}(\mathbb{R}^{K\times d})$ celui formé par les processus Z , progrssivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{K\times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty,$$

Où si $z \in \mathbb{R}^{K\times d}$, $\|z\|^2 = trace\,(zz^*)$. $M^{2}(\mathbb{R}^{K\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^{2}(\mathbb{R}^{K\times d})$.

$\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K\times d}$ seront souvent omis ; les espaces S^{2} ; S_c^{2} et M^{2} sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^{2} l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^K) \times M^{2}$ $(\mathbb{R}^{K\times d})$.

Dans tout ce chapitre, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0;T] \times\Omega\times\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^K$ telle que, pour tout $(y;z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$, le processus$\{f\ (t,y;z)\}_{0\leq t\ \leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ , mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^K$. La fonction f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale. Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation differentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) (3.1) .

Définition 3.1.1 *: une solution de l'EDSR* $(\mathbf{3.1})$ *est un couple de processus* $\{(Y_t; Z_t)\}_{0\leq t\ \leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs recpectivement dans $\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K\times d}$;

2. P-p.s ;

$$\int_0^T \left\{ f\ (r; Y_r; Z_r) + \|z_r\|^2 \right\} dr < \infty;$$

3. P-p.s, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (r; Y_r; Z_r) dr - \int_t^T Z_r\ dW_r\ ,\ t \in [0, T]$$

Remarque 3.1.1 *: Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation* (3.1) *étant bien définies,* Y *est une semi-martingale continue, ensuite, comme le processus* Y *est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier* Y_0 *est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f , le processus$Y$ appartient à $S^{\,2}$.

Proposition 3.1.1 *: supposons qu'il existe un processus*$\{f\ (t; y; z)\}_{0\leq t\leq T}$ *, positif appartenant à* $M^{\,2}\ (\mathbb{R}^K)$ *et deux constantes positives* C *et* K *tels que*

$$\forall (t; y; z) \in [0; T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}; \quad |f\ (t; y; z)| \leq\ f_t + C\ |y|\ + K \|z\|\ .$$

Si $\{(Y_t; Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (3.1) telle que $Z \in M^{\,2}$, alors Y appartient à $S^{\,2}_{\,c}$.

Preuve. : On a, pour tout $t \in [0; T]$,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f\ (r; Y_r; Z_r) dr - \int_0^t Z_r\ dW_r\ ,$$

et par suit, utilisant l'hypothèse sur f ,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + K\,\|Z_r\|)\, dr + \sup_{0\leq t\ \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right| + C \int_0^t |Y_r|\, dr.$$

posons

$$\lambda = |Y_0| + \int_0^T (f_r + K \|Z_r\|)\, dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|,$$

par suite on a

$$|Y_t| \leq \lambda + C \int_0^t |Y_r|\, dr.$$

Y étant un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$|Y_t| \leq \lambda \exp(Ct) \;,$$

et donc :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \lambda \exp(CT),$$

λ est une variable aléatoire de carré intégrable, puisque par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, d'après l'inégalité de Doob, on a :

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r \; dW_r \right|^2\right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} E\left[\int_0^t \|Z_r\|^2\, dr\right],$$

ce qui signifie que le troisème terme de λ est de carré intégrable. Il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ et Y_0 puisqu'il est déterministe donc de carré intégrable. Ceci montre que Y appartient à S^2 . Finissons par un résultat d'intégrabilité qui servira à plusieurs reprise. ■

Lemme 3.1.1 *: soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^K)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{K \times d})$, alors :*

$$\left\{ \int_0^t Y_s \; Z_s \; dW_s, t \in [0;T] \right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. : En appliquant l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante positive

C telle que :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\,\leq T}\left|\int_0^t Y_r\ Z_r\ dW_r\right|\right] &\leq C\ E\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2\,\|Z_r\|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C\ E\left[\sup_{0\leq t\,\leq T}\ \ |Y_r|^2\left(\int_0^T \|Z_r\|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

et par suite en appliquant linégalité :

$$ab \leq \frac{a^{\,2}}{2} + \frac{b^{\,2}}{2}\ ,$$

on obtient :

$$E\left[\sup_{0\leq t\,\leq T}\left|\int_0^t Y_r\ Z_r\ dW_r\right|\right] \leq \acute{C}\ \left(E\ \left[\sup_{0\leq t\,\leq T}|Y_r|^2\right] + E\ \left[\int_0^T \|Z_r\|^2\,dr\right]\right)\ .$$

Par hypothèse le deuxième membre de cette inégalité est fini, et donc on aura :

$$E\left[\sup_{0\leq t\,\leq T}\left|\int_0^t Y_r\ Z_r\ dW_r\right|\right] \leq \infty\ ,$$

■

3.2 Cas Lipschitz :

3.2.1 Résultat de Pardoux-Peng :

Nous allons montrer le résultat de **E. PARDOUX** et **S.PENG** qui sera généralisé plus tard. où il est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR** dans

le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler, sous les données suiventes : f est définie sur $[0,T]\ \times\Omega\times\ \mathbb{R}^K\ \times\ \mathbb{R}^{K\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^K$, telle que,

pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^K\ \times\ \mathbb{R}^{K\times d}$; le processus $\{f\ (t,y,z)\}_{0\leq t\,\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire,$\mathcal{F}_T-$mesurable,à valeurs dans $\mathbb{R}^K$.

a) Condition d'intégrabilité :

$$E\left[|\xi|^2+\int_0^T |f\ (r,0,0)|^2\,dr\right]\ <\infty,$$

b) Condition de Lipschitz en (y ; z) : pour tout $t; y; \acute{y}; z; \acute{z};$

$$|f\ (t;y;z)-f\ (t;\acute{y};\acute{z})|\ \leq\ \ C\ \ (|y-\acute{y}|+\|z-\acute{z}\|)\ \ ;$$

où : C est une constante indépendante de t ; y ; $\acute{y}; z$ et $\acute{z}$.

Au début, Nous commençons par le cas simple, celui où f ne dépend pas ni par y ni par z **i.e.** on se donne de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\ \leq T}$ dans $M^{\ 2}\ (\mathbb{R}^K)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t=\xi+\int_t^T F_r dr-\int_t^T Z_r dW_r, 0\leq t\leq T \tag{3.2}$$

Lemme 3.2.1 *: Soient* $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T\ )$ *et* $\{F_t\}_{0\leq t\ \leq T}\in M^{\ 2}\ (\mathbb{R}^K)$ *. L'EDSR* (3.2) *possède une unique solution* $(Y;Z\ )$ *telle que* $Z\ \in M^{\ 2}$.

Preuve. : Supposons dans un premier temps que $(Y;Z\ )$ soit une solution vérifiant $Z\ \in M^{\ 2}$: Si on prend l'esperance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t=E\left(\xi+\int_t^T F_r\ dr\ \ \backslash\ \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aid de la formule précédent et il reste à trouver Z .Remarquons que, d'aprés le théoreme de Fubini, comme F est progressivement mesurable $\int_0^t F_r\ dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\ \leq T}$; en fait dans $S_c^{\ 2}$puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t\in[0;T]$,

$$Y_t=E\left(\xi+\int_0^T F_r\ dr\ \ \backslash\ \mathcal{F}_t\right)-\ \int_0^t F_r dr\ \ =M_t-\ \int_0^t F_r dr\ ,$$

où M est une martingale brownienne; par le théorème de représentation des martingales brownienne on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr \ ,$$

On vérifie facilement que $(Y; Z)$ ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$;

$$Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr \right)$$

finalement, on obtient,

$$Y_t = \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.$$

L'unicité est évidente pour les solution vérifiant $Z \in M^2$. ∎

Théorème 3.2.1 ***(Pardoux–Peng 90) :*** *Sous les hypothèses* ***(a)*** *et* ***(b)*** *, l'EDSR* (3.1) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. : Nous utilisons un argument de point fixe (1.7.5) dans l'espace de Banach B^2 pour demontrer ce théorème, en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'EDSR (3.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ. ∎

Pour (N, H) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(N, H)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r; N_r; H_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r \ , \ 0 \le t \le T$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_r = f(r, N_r, H_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$|F_r| \le |f(r; 0; 0)| + C|N_r| + C\|H_r\| \ ,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (3.2.1)pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^{2}$.

(Y, Z) appartient à B^{2} : l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition (3.1.1), Y appartient à S_{c}^{2} .

Donc, l'application Ψ de B^{2} dans lui-même est bien définie.

Soient (N, H) et $(\acute{N}, \acute{H})$ deux éléments de B^{2} et $(Y, Z) = \Psi(N, H)$, $(\acute{Y}, \acute{Z}) = \Psi(\acute{N}, \acute{H})$.

Posons $y = Y - \acute{Y}$ et $z = Z - \acute{Z}$. On a , $y_{T} = 0$ et

$$dy_t = -\left\{f\ (t, N_t, H_t) - f\ (t, \acute{N}_t, \acute{H}_t)\right\} dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right) &= \alpha e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\left\{f\ (t, N_t, H_t) - f\ (t, \acute{N}_t, \acute{H}_t)\right\} dt \\ &\quad + 2e^{\alpha t} y_t.z_t dW_t + e^{\alpha t}\left\|z_t\right\|^2 dt\ . \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr \ &= \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\ \left|y_r\right|^2 - 2y_r.\left\{f\ (r, N_r, H_r) - f\ (r, \acute{N}_r, \acute{H}_r)\right\}\right) dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r\ . \end{aligned}$$

et, comme f est Lipshitz, il vient, notant n et h pour $N - \acute{N}$ et $H - \acute{H}$ respectivement,

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr \ \leq & \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\ \left|y_r\right|^2-2C\ \left|y_r\right|.\left|n_r\right|+2C\ \left|y_r\right|.\left\|h_r\right\|\right) dr \\
& -\int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r\ .
\end{aligned}
$$

Pour tout $\epsilon>0$; on a

$$
2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon}+\epsilon b^2,
$$

et donc, l'inégalité précédente donne

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr \ \leq & \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha+\frac{2C^{\,2}}{\epsilon}\right)\ \left|y_r\right|^2 dr \ -\int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r \\
& +\epsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(\ \left|n_r\right|^2+\left\|h_r\right\|^2\right) dr\ \ .
\end{aligned}
$$

et prenant $\alpha=\frac{2C^{\,2}}{\epsilon}$; on notant

$$
K_\epsilon=\epsilon\int_0^T e^{\alpha r}\left(\ \left|n_r\right|^2+\left\|h_r\right\|^2\right) dr\ .
$$

$$
\forall t\in[0;T]\ ,\qquad e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\ \alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\ \leq K_\epsilon-2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r. \tag{3.3}
$$

D'aprés le lemme (3.2.1), la martingale locale

$$
\left\{\int_0^T e^{\ \alpha r} y_r.z_r dW_r\right\}_{t\in[0;T]}\ ,
$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 puisque $Y\ ,\acute{Y}$ appartiennent à $S^{\,2}$ et $Z\ ,\acute{Z}$ appartiennent à $M^{\,2}$.

En prenant l'espérance, il vient que pour $t=0$:

$$E\ \left[\int_0^T e^{\,\alpha t}\left\|z_r\right\|^2 dr\ \right]\leq E\ \ [K_\epsilon]\,. \tag{3.4}$$

Revenant à l'inégalité (3.3), les inégalités Burkholder-Davis-Gundy fournissent fournit

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2\right] &\leq E\ \ [K_\epsilon]+AE\left[\left(\int_0^T e^{\,2\alpha}\left|y_r\right|^2\left\|z_r\right\|^2 dr\ \right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq E\ \ [K_\epsilon]+AE\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\frac{a\ t}{2}}\ \left|y_t\right|\left(\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right)^{\frac{1}{2}}\right], \end{aligned}$$

puit, comme $\quad ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2\right]\leq E\ \ [K_\epsilon]+\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2\right]+\frac{A^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right],$$

Prenant en considération l'inégalité (3.4), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right]\leq\left(3+A^2\right)E\left[K_\epsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de K_ϵ ,

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right]\leq\epsilon\left(3+A^2\right)(1\vee T\ )\,E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|n_t\right|^2+\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \ \left\|h_r\right\|^2 dr\ \right]$$

Prenons ϵ tel que $\ \epsilon\,(3+A^2)\,(1\vee T\ )=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $B^{\,2}$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|(N,H)\right\|_\alpha=E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|N_t\right|^2+\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \ \left\|H_r\right\|^2 dr\ \right]^{1/2}\quad,$$

qui en fait un espace de banach-cette derniére norme étant équivalent à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

L'application Ψ posséde donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (3.1) dans $B^{\,2}$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^{\,2}$ puisque la Proposition (3.1.1) implique qu'un telle solution appartient à $B^{\,2}$.

3.3 Rôle de Z :

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T z_r \, dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 3.3.1 *: Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR* (3.1) *et soit τ un temps d'arrêt majoré par T.*

On suppose qu'Il existe une constante C telle que P - p.s, que ξ est $\mathcal{F}_\tau$ –mesurable et que f $(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$.

Alors $Y_t = Y_{t \wedge \tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$.

Preuve. : On a, P–p.s.,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (r; Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r \, dW_r \ , \ 0 \leq t \leq T$$

et donc, pour $t = \tau$, comme $f\ (t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f\ (r; Y_r, Z_r) dr - \int_\tau^T Z_r \, dW_r \ = \xi - \int_\tau^T Z_r dW_r \ .$$

Il vient alors $Y_\tau = E(\xi | \mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r \, dW_r \ = 0$ d'où l'on tire que

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_r \, dW_r\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] = 0,$$

et finalement que $Z_r \mathbf{1}_{r \geq \tau} = 0$. Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau$, $Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f\ (r; Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dW_r\ = Y_t + 0 - 0.$$

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle,

$$\frac{dY_t}{dt} = f\ (t, Y_t, 0)\ , \qquad Y_T = \xi.$$

■

3.4 EDSR linéaires :

Dans ce partie, nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

Définition 3.4.1 *: On suppose que $C = 1$ ce qui implique que Y est un réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ (vecteur de dimension d).*

Soit $\{(u_t, v_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times\ \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné et soient $\{p_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^{\,2}(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$ -mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.

$$Y_\tau = \xi + \int_t^T \{u_r Y_r + v_r\ Z_r + p_r\}\, dr - \int_t^T Z_r dW_r\ . \tag{3.5}$$

L'EDSR (3.5) s'appelle EDSR linéaire.

Proposition 3.4.1 *: L'EDSR (3.5) possède une solution unique qui vérifie :*

$$\forall t \in [0, T], Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T p_r\ \Gamma_r\ dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0, T]$;

$$\Gamma_t = \exp\left\{ \int_0^t v_r \ .dW_r - \frac{1}{2} \int_0^t |v_r|^2 \, dr + \int_0^t u_r \ dr \right\}.$$

Preuve. : Commençons par remarquer que le processus Γ vérifier :

$$d \ \Gamma_t = \Gamma_t(u_t dt + v_t.dW_t), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part, comme v est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à S^2. De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f\ (t, y, z) = u_t y + z v_t + p_t$ et de vérifier que **(a)** et **(b)** est satisfaite. Y appartient à S^2 par la proposition (3.1.1) . La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} d \ \Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d \langle \Gamma, Y \rangle_t \\ &= -\Gamma_t p_t dt + \Gamma_t \ Z_t dW_t + \Gamma_t \ Y_t v_t.dW_t \ , \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t p_r \ \Gamma_r \ dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $p \in M^2$ et Γ, Y sont dans S^2. Par suite,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t p_r \Gamma_r dr \ = E\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T p_r \ \Gamma_r \ dr \ \mid \mathcal{F}_t \right) \ ,$$

ce qui donne la formule annoncée. ■

Remarque 3.4.1 *: Notons que si $\xi \geq 0$ et si $p_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$.*

Bibliographie

[1] Briand, P. (2001).Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars. Paul Sabatier.

[2] Breton, J. C. (2014). Calcul stochastique. Notes de cours de M, 2.

[3] Comets, F., & Meyre, T. (2006). Calcul stochastique et modeles de diffusions. Dunod Paris.

[4] El Karoui.N, S. Peng, and M-C. Quenez (1997), Backward equations in finance, Math. Finance, 7(1), 1-71.

[5] J. M. Bismut, "Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control", J. Math.Anal. Appl., 1973, 44, 384-404.

[6] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique. cours de master.7.

[7] LAKHDARI, I. E. (2010). Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et Applications en Contrôle Optimal (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider Biskra).

[8] Mao, X. (2007). Stochastic differential equations and applications. Elsevier.

[9] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1). 55-61.

[10] Tudor, C. (2007). Cours de calcul stochastique.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathcal{L}^1([0,T],\mathbb{R}^n)$	Ensemble des fonctions une fois intégrable,à valeurs de l'intervalle $[0,T]$,dans $\mathbb{R}^n$.
1_A	Indicatrice de A est noté : $1_A(\omega)=\begin{cases}1 \ , \ \omega\in A\\ 0 \ , \ \omega\notin A\end{cases}$
σ^*(ou z^*)	Transposée de la matrice σ (ou z).
$B\ (\mathbb{R}^k)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^k$.
$dt\otimes dP$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0,T]$ avec mesure de dP .
$\lambda\otimes P-p.p$	Presque partout par rapport la mesure $\lambda\otimes P$.
$P-p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité P .
$\mathbb{R}^k$	Espace réel euclidien de dimension k .
$\mathbb{R}^{k\times d}$	Ensemble des matrices réelles $k\times d$.
H_T^4	Espace vectoriel formé des processus progressifs f_t , tel que : $\Vert f\Vert_4^4=E\left[\left(\int_0^T \vert f_t\vert^2\,dt\right)^2\right]<\infty$.
$tr(\sigma)$	Trace de la matrice σ.
N	Ensemble négligeable.
$\mathbb{N}$	Ensemble des négligeables N.
$<.\vert.>$	Produit scalaire.
$\Vert f\Vert_\infty$	$\sup\{\vert f(x)\vert\}$.
E_P	Espérance par rapport à la probabilité P.
max	Maximum.
v.a	Variable aléatoire.
resp	Respectivement.
i.e	C 'est-à-dire.

ملخص

ان الهدف الرئيسي من اجراء هذا العمل هو برهنة ودراسة نتيجة وجود ووحدانية الحل بالنسبة للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، هذه النتيجة هي دراسة أساسية ، تعالج الحالة الليبشيزية التي تأسست عام 1990 من قبل aP.Euxodr و gneP.S.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية التراجعية العشوائية، الحالة الليبشيزية، الوجود و الوحدانية.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est de démontrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'équations différentielles stochastique rétrogrades '(EDSR en abrégé) ; ce résultat est une étude de base, qui traite le cas lipschitzien établi en 1990 par E. pardoux et S.peng.

Mots clés : Equations différentielles stochastiques rétrogrades, cas

Abstract

The main objective of this work is to demonstrate and study the result of existence and uniqueness of backward stochastic differential equations (BSDE in short) ; this result is a basic study , which deals with the Lipchitz case established in 1990 by E.Pardoux and S.Peng.

Key words: Backward stochastic differential equations, Lipchitz case, existence and uniqueness.