

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

BENCHAIIB Fares

Titre :

Méthodes de résolution numérique des EDSR

Membres du Comité d'Examen :

Dr. CHAOUCHKHOUANE Nassima	UMKB	Président
Dr. LABED Saloua	UMKB	Encadreur
Dr. REMILI Nasira	UMKB	Examineur

septembre 2020

DÉDICACE

Mon voyage universitaire a pris fin après la fatigue et les difficultés.

Et me voici, concluant mes recherches de fin d'études avec toute la vigueur et l'activité.

Et je suis reconnaissant à tous ceux qui ont eu une faveur dans ma carrière.

Aide-moi, même un peu.

Parents, famille, amis et professeurs respectés.

Je vous donne une recherche universitaire.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail,

J'exprime mes profondes gratitudees à mes parents,

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Dr **LABED Saloua**, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire. Je le remercie aussi de son suivi permanent de mon travail, ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu,

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury Dr **CHAOUCHKHOUANE Nassima** et Dr **REMILI Nasira**, qui ont acceptés d'évaluer et de juger mon travail,

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation, toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Rappel sur le calcul stochastique	3
1.1 Processus stochastique	3
1.2 Espérance conditionnelle	5
1.3 Mouvement Brownien standard	6
1.4 Martingales	7
1.5 Intégrale stochastique	9
1.5.1 Construction de l'intégrale stochastique	9
1.5.2 Propriétés de l'intégrale stochastique	11
1.5.3 Processus d'Itô	11
1.5.4 Formule d'Itô	12
2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades	14
2.1 Introduction aux EDSR	14
2.1.1 Equations différentielles stochastiques	14
2.1.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades	15
2.2 Existence et unicité des solutions d'un EDSR	18
2.2.1 Théorème de E. Pardoux et S. Peng	18
2.2.2 Inégalités et théorèmes utile pour la preuve	18

2.2.3	Preuve de théorème 2.2.1	19
2.3	Théorème de comparaison	22
2.4	Exemples des EDSR	23
2.4.1	EDSR linéaires	23
2.4.2	Modèle de Black–Scholes	24
3	Discrétisation et résolution numérique des EDSR	26
3.1	Equations stochastiques rétrogrades discrètes	26
3.1.1	Existence et unicité de la solution	27
3.2	Discrétisation des EDSR	28
3.2.1	Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver ne dépend que de t et Y_t	29
3.3	Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver dépend de t, Y_t, Z_t	32
3.4	Méthode d’Euler	36
3.5	Quelques exemples de Simulation	37
3.5.1	Premier exemple	37
3.5.2	Deuxième exemple	39
	Conclusion	40
	Bibliographie	41
	Annexe A : Abréviations et Notations	42
	Annexe B : Logiciel MATLAB	43

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont été introduites en 1973 par J.-M. Bismut dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z . Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng [4] pour avoir obtenu le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où le terme déterministe de l'équation n'est pas linéaire.

En 1997 N.Elkaroui, S.Peng et M.C.Quenez écrivent l'article fondateur de l'application des EDSR au domaine financier et depuis, le travail de recherche dans ce domaine s'est diversifié et une importance particulière a été donnée aux problèmes de résolution numérique des EDSR (tout genres confondus) dans le cas où la filtration est brownienne, ce qui a augmenté l'importance et l'intérêt de l'application des EDSR dans plusieurs domaines par exemple : Le contrôle stochastique, La finance, Calcul différentiel et équations aux dérivés partielles...etc

Rappelons ici brièvement dans quel contexte la notion d'EDSR a été introduite. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement Brownien B (d -dimensionnel) dont la filtration naturelle et augmentée est notée $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

Une EDSR à horizon déterministe T est définie par une équation dont la forme générique est la suivante

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

dont les paramètres sont la condition terminale $Y_T = \xi$ et la fonction f qui est le générateur.

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés des processus continus ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement Brownien, martingales...etc) qui

nous permettre de définir l'intégrale stochastique.

Dans le deuxième chapitre, nous allons définir les EDSR et montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas linéaire puis dans le cas général et énoncer le théorème de comparaison.

Dans le troisième chapitre, on a donné une description de quelques méthodes d'approximation d'EDSR où la méthode des marches aléatoires a été prise comme exemple. Cette méthode qui a été utilisée dans plusieurs travaux sur la résolution numérique des EDSR, se base sur l'approximation du mouvement brownien B par une suite de marches aléatoires sur un espace de probabilité de dimension fini puis l'écriture de l'équation rétrograde associée, en temps discret. En plus l'ajout d'un schéma de la méthode d'Euler Maruyama pour résolution numérique des EDSR.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre nous introduisons d'abord certains des définitions dont nous avons besoin pour définir une intégrale stochastique qui est en fait étroitement lié au mouvement brownien. En particulier, nous présentons la formule Itô fondamentale qui permet certaines règles de calcul.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par E et à valeur dans \mathbb{R}^d une famille $(X_t)_{t \in E}$ d'applications mesurables de (Ω, \mathcal{F}) dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $t \in E$, X_t est une variable aléatoire.

Remarque 1.1.1 1. Si nous aurons $E = \mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret.

2. Si $E = \mathbb{R}_+$ ou $E = [0; a]$, $a \in \mathbb{R}_+$ pour les processus à temps continu.

Processus à trajectoires continues

Définition 1.1.2 On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .

Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.

Modification d'un processus

Définition 1.1.3 Soient X et Y deux processus, on dit que X est une modification de Y si pour tout $t \geq 0$. Les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales \mathbb{P} - p.s

$$\forall t \geq 0, \quad P(X_t = Y_t) = 1.$$

Processus indistinguables

Définition 1.1.4 On dit que X et Y sont indistinguables si \mathbb{P} - p.s les trajectoires de X et Y sont les même, c'est-à-dire

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.1.2 1. La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification.

2. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.

Filtration

Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ de sous tribus de \mathcal{F}

$$\forall s, t \in T, \quad 0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

La filtration naturelle du processus X est la suite croissante de tribus complètes

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s), s \leq t).$$

Alors on dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilité filtré.

Remarque 1.1.3 Le espace probabilité filtré satisfait les conditions habituelles si

1. Les ensembles négligeables sont contenus dans \mathcal{F}_0 .

2. La filtration est continue à droite i.e $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.

Processus adapté

Définition 1.1.5 Soient $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration et $(X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que X est dit adapté (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) si

$$\forall t \in T : X_t \text{ est } \mathcal{F}_t \text{ - mesurable.}$$

Progressivement mesurable

Définition 1.1.6 (Processus mesurable) Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit mesurable si la l'application $(t, \omega) \rightarrow X_t$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans \mathbb{R}^d est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.7 (Progressivement mesurable) Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans \mathbb{R}^d est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.2 Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire réelle intégrable (i.e $X \in L^1$) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} (i.e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$)

Définition 1.2.1 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et intégrable. Alors il existe une unique variable aléatoire appelée espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{G} , notée $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$, telle que

1. $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ est \mathcal{G} -mesurable.
2. $\int_B \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) dP = \int_B X dP, \quad \forall B \in \mathcal{G}$.

C'est aussi l'unique (à une égalité *p.s* près) variable \mathcal{G} -mesurable telle que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]Y] = \mathbb{E}[XY],$$

pour toute variable Y est \mathcal{G} -mesurable bornée.

Proposition 1.2.1 (Propriétés de l'espérance conditionnelle)

- a) *Linéarité* : soit a et b deux constantes, $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.
- b) *Croissance* : soit X et Y deux variable aléatoire telles que $X \leq Y$ alors $E(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.
- c) $E[E(X \mid \mathcal{G})] = E(X)$.
- d) Si X est \mathcal{G} -mesurable, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.
- e) Si Y est \mathcal{G} -mesurable, $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.
- f) Si X est indépendante de \mathcal{G} , $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X]$.
- g) Si \mathcal{H} et \mathcal{G} sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ alors

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}].$$

- h) Si ϕ est une application convexe et mesurable, $\mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])$; (inégalité de Jensen).

1.3 Mouvement Brownien standard

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.3.1 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard si*

- i. \mathbb{P} -p.s $B_0 = 0$.
- ii. Pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ et suit la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.
- iii. \mathbb{P} -p.s $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue, pour $\omega \in \Omega$.

Remarque 1.3.1 *On dit que B est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -MB si B est un processus continu, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, vérifiant*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s)) \mid \mathcal{F}_s] = \exp\{-u^2(t - s)/2\}.$$

Proposition 1.3.1 *Soit B un MB alors*

1. $-B$ est aussi un MB.
2. Pour tout $c > 0$, le processus $\{\frac{1}{c}B_{c^2t}\}_{t \geq 0}$ est un MB (invariance par changement d'échelle).
3. Pour tout $s \geq 0$, le processus $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ (propriété de Markov simple).

Définition 1.3.2 *Un mouvement Brownien d -dimensionnel standard est un processus $(B_t, t \geq 0)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que si on note*

$$B_t = \left(B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)} \right),$$

les processus $B^{(i)}, 1 \leq i \leq d$, sont des mouvements Browniens standards indépendants à valeurs réelles.

1.4 Martingales

Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus \mathcal{F}_n croissante (telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). La tribu \mathcal{F}_0 contient les négligeables.

Définition 1.4.1 *Un processus X_n à valeurs réelles, \mathcal{F}_t -adapté et intégrable est*

- Une martingale, si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$.
- Une surmartingale, si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$.
- Une soumartingale, si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$.

Cas continu

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus \mathcal{F}_t croissante (telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$).

Définition 1.4.2 *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) si*

1. X_t est intégrable, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.
2. X_t est \mathcal{F}_t -adapté, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.
3. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \quad \forall s \leq t$.

Définition 1.4.3 Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une surmartingale (resp. sousmartingale) par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) si

1. X_t est \mathcal{F}_t -adapté et intégrable $\forall t \in \mathbb{R}_+$,
2. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \quad \forall s \leq t$, (resp $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$).

Remarque 1.4.1 Si B est un MB, alors $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ et $\{\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}_{t \geq 0}$ sont des martingales.

Théorème 1.4.1 (Théorème d'arrêts) Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Si X est une martingale et si δ et τ sont deux temps d'arrêts bornés tels que $\delta \leq \tau$, alors

$$\mathbb{E}[X_\tau / \mathcal{F}_\delta] = X_\delta \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Rappelons aussi qu'un processus X adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ , $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Pour le dernier résultat nous supposons que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles.

Définition 1.4.4 (Martingale locale) Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P} - p.s$ et, pour tout n , $\{X_{t \wedge \tau_n}\}_{\tau_n > 0}$ est une martingale.

Définition 1.4.5 (Semi-martingale) Une semi-martingale continue est un processus X qui s'écrit $X = M + A$, où M est une martingale locale continue et A est un processus continu adapté à variation bornée tel que $A_0 = 0$.

1.5 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du MB. On cherche à définir

$$\int_0^t \theta_s dB_s$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

1.5.1 Construction de l'intégrale stochastique

Cas de processus étagés

Définition 1.5.1 *On dit qu'un processus θ est étagée (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j , $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j sont \mathcal{F}_{t_j} -mesurable et appartient à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ sur $]t_j, t_{j+1}]$, donc on a*

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) \mathbf{1}_{]t_j, t_{j+1}]}(s) \quad \text{pour tout } t \in]t_j, t_{j+1}].$$

On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)),$$

et

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty \theta_s dB_s \right) = 0, \text{Var} \left(\int_0^\infty \theta_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds \right]$$

on obtient

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)).$$

Cas général

On définit les processus càglàd de carrée intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble \mathcal{D} des processus θ adaptés continus a gauche limités a droite, (\mathcal{F}_t) -adaptés tels que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt \right] < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent a \mathcal{D} , on a θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

On peut définir $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ pour tous les processus θ de \mathcal{D} , on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ où

$$\theta_n = \sum_{j=1}^n \tilde{\theta}_j \mathbf{1}_{]t_j, t_{j+1}]}$$

avec $\tilde{\theta}_j \in \mathcal{F}_{t_j}$.

L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ est la limite dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des sommes

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\theta}_j (B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

dont l'espérance est 0 et la variance $\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \tilde{\theta}_j^2 (t_{j+1} - t_j) \right]$.

On note $\int_0^t \theta_s dB_s \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \theta_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s$. Si θ est étagé

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).$$

Conclusion 1.5.1 *Soit l'intégrale suivant*

$$\int_0^T X_s dB_s$$

telle que $(X(s), s \geq 0)$ est un processus stochastique et $(\mathcal{F}_t^B, t \geq 0)$ la filtration naturelle du MB B .

Définition 1.5.2 On dit que $(X_t, t \geq 0)$ est un bon processus s'il est (\mathcal{F}_t^B) -adapté, càglad et si

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_s^2 ds \right] < +\infty, \text{ pour tout } t > 0.$$

1.5.2 Propriétés de l'intégrale stochastique

Définition 1.5.3 Soit B_s un MB et $(X_t, t \geq 0)$ un bon processus

1. $X \mapsto \int_0^T X_s dB_s$ est linéaire.

2. Le processus $\left(\int_0^t X_s dB_s \right)_{t \in [0, T]}$ est à trajectoire continues.

3. Le processus $\left(\int_0^t X_s dB_s \right)_{t \in [0, T]}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$.

4. On a pour $0 \leq s \leq t \leq T$: $\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dB_s \right] = 0$ et

$$\text{Var} \left(\int_0^T X_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_s^2 ds \right).$$

5. Isométrie : $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_s^2 ds \right)$.

1.5.3 Processus d'Itô

Définition 1.5.4 On appelle processus d'Itô un processus $(X(t))_{t \geq 0}$ à valeur réelles tel que

$\mathbb{P} - p.s., \forall 0 \leq s \leq t$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable, b et σ sont deux processus mesurables vérifiant les conditions suivantes

$$\int_0^T |b_s| ds < \infty P - p.s \text{ et } \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty P - p.s,$$

donc la forme différentielle du processus d'Itô devient

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Crochet de deux processus d'Itô

Définition 1.5.5 Soit X et Y deux processus d'Itô, telle que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_1(s)ds + \int_0^t \sigma_1(s)dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_2(s)ds + \int_0^t \sigma_2(s)dB_s$$

On a par définition

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds.$$

avec la table multiplication

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

1.5.4 Formule d'Itô

Proposition 1.5.1 (Formule d'intégration par partie) Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ et $(Y(t))_{t \geq 0}$ deux processus d'Itô, alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Théorème 1.5.1 (Première formule d'Itô) Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.5.2 (Deuxième formule d'Itô) Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus d'Itô et $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , on a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Théorème 1.5.3 (Troisième formule d'Itô) "fonction de deux variable"

Soient $X = (X(t))_{t \geq 0}$ et $Y = (Y(t))_{t \geq 0}$ deux processus d'Itô issus x et y . Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

fonction de classe \mathcal{C}^2 à dérivée bornée, on a

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f(x, y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) d\langle X \rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s) d\langle Y \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre, on introduit la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité ; des exemples d'EDSR sont donnés à la fin du chapitre.

2.1 Introduction aux EDSR

Les EDSR ont été introduites en 1973 par J.-M. Bismut dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z . Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng [4] pour avoir obtenu le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où le terme déterministe de l'équation n'est pas linéaire.

2.1.1 Equations différentielles stochastiques

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

Définition 2.1.1 *Une EDS est une équation la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (2.1)$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

* $b(s, x)$ est un vecteur mesurable de \mathbb{R}^d défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé dérive ou drift de l'EDS.

* $\sigma(s, x)$ est une matrice $d \times m$ mesurable de \mathbb{R}^d défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé coefficient de diffusion de l'EDS.

2.1.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à \mathcal{F}_T . On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), & 0 \leq t \leq T \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (2.3)$$

en imposant que, pour tout instant t , Y_t ne dépende pas du futur après t c'est-à-dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Prenons $f \equiv 0$, alors l'unique solution de est $Y_t = \xi$, pour tout t , Y est par conséquent n'est pas une solution adapté à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ car n'est pas déterministe.

La meilleure approximation – disons dans L^2 – adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$ si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(\xi) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s,$$

si on prend $t = T$, alors

$$\begin{aligned} Y_T &= E(\xi) + \int_0^T Z_s dB_s \\ &= E(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

donc

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s$$

i.e

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t, & 0 \leq t \leq T \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté. Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z . Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$, $(Y_t, Z_t)_{t \in [0, T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

avec la condition finale (c'est pour cela que l'on dit rétrograde) $Y_T = \xi$. Comme les EDS, ces équations doivent être comprises au sens intégral, i.e

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

où

- $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement Brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^d , défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$.
- $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration Brownienne telle que \mathcal{F}_0 contienne tous les éléments \mathbb{P} -négligeables de \mathcal{F} , cette filtration est continue à droite.

- La fonction $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée le générateur.
- T est le temps final.
- ξ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^k .

Fixons d'abord quelques notations. Pour $x, x' \in \mathbb{R}$.

- $|x|$ désigne la norme euclidienne et $\|x, x'\|$ le produit scalaire.
- Une matrice de taille $k \times d$ est considérée comme un élément de $\mathbb{R}^{k \times d}$, sa norme euclidienne est donnée par $\|y\| = \sqrt{\text{Trace}(yy^*)}$.
- Pour tout réel $p > 0$, nous allons définir deux espaces fonctionnels $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^n)$.

a. $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$, continus, à valeurs dans \mathbb{R}^n , adaptés, tels que

$$\|X\|_{\mathcal{S}^p} = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \right]^{1 \wedge 1/p} < +\infty.$$

Si $p \geq 1$, $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^p}$ est une norme sur $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ qui en fait un espace de Banach. Si $p \in]0, 1[$, $(X, X') \mapsto \|X - X'\|_{\mathcal{S}^p}$ est une distance sur $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$. Avec cette métrique, \mathcal{S}^p est un espace complet.

b. $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ prévisibles à valeurs dans \mathbb{R}^n , tels que

$$\|X\|_{\mathcal{M}^p} = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right)^{p/2} \right]^{1 \wedge 1/p} < +\infty.$$

Si $p \geq 1$, $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p}$ et si $p \in]0, 1[$, $(X, X') \mapsto \|X - X'\|_{\mathcal{M}^p}$ est une distance sur $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^n)$ qui le rend complet.

- Le générateur f est défini sur $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k \times d})$.
- Pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{t \in [0, T]}$ est progressivement mesurable.

Définition 2.1.2 Une solution de l'EDSR est un couple

$$(Y, Z) = \{(Y_t, Z_t)\}_{t \in [0, T]}$$

de processus progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, tel que, \mathbb{P} – p.s.

* $t \mapsto Z_t$ est dans $L^2([0, T])$;

* $t \mapsto f(t, Y_t, Z_t)$ est dans $L^1([0, T])$;

*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.1.1 *Remarque 2.1.2* Comme les intégrales de l'équation précédente sont bien définies, Y est une semi-martingale continue ; ensuite comme Y est un processus progressivement mesurable, il est adapté et en particulier Y_0 est déterministe.

2.2 Existence et unicité des solutions d'un EDSR

En 1990, E. Pardoux et S. Peng ont démontré l'existence et l'unicité des solutions de l'EDSR dans le cas où le générateur f est lipschitzien par rapport aux deux variables y et z .

2.2.1 Théorème de E. Pardoux et S. Peng

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses suivantes : il existe une constante $K > 0$ telle que*

- i. $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
- ii. $\{f(t, 0, 0)\}_{0 \leq t \leq T} \in L^2(\Omega \times [0, T])$.
- iii. f est uniformément lipschitzienne en y et en z

$$\forall t \in [0, T], \forall (y, y') \in (\mathbb{R}^k)^2, \forall (z, z') \in (\mathbb{R}^{k \times d})^2, \quad |f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq K(|y - y'| + \|z - z'\|).$$

Alors l'EDSR (2.4) admet une unique solution telle que $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$.

2.2.2 Inégalités et théorèmes utile pour la preuve

Théorème 2.2.2 *(Théorème de représentation des martingales Browniennes)* Soit $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ et M_t est une martingale continue de carré intégrable \mathcal{F}_t -adapté. Alors il existe un processus adapté Z tel que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T Z^2 ds \right) < \infty$$

et pour tout $t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Théorème 2.2.3 (Inégalité Burkholder-Davis-Gundy "BDG") Soient $p \in]0, +\infty]$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que pour toute martingale continue X , nul en 0

$$c_p \mathbb{E} \left[\langle X, X \rangle_\infty^{\frac{p}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t} |X|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[\langle X, X \rangle_\infty^{\frac{p}{2}} \right].$$

Lemme 2.2.1 (Lemme de Gronwall) Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0, T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds,$$

alors, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

2.2.3 Preuve de théorème 2.2.1

Preuve. Dans la démonstration on utilise le théorème de représentation des martingales browniennes.

Soit $\mathcal{B}^2 = \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$, qui est un espace de Banach. On construit une fonction Φ de \mathcal{B}^2 et on définit $(Y, Z) = \Phi(U, V)$ de la façon suivante. Considérons la variable aléatoire

$$\zeta = \xi + \int_0^T f(s, U_s, V_s) ds$$

ζ est de carré intégrable car f est lipschitzienne en y et z , d'où

$$|\zeta|^2 \leq 4 \left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr + K^2 \sup_{0 \leq t \leq T} |U_t|^2 + K^2 \int_0^T |V_r|^2 dr \right).$$

Pour Y , on choisit

$$\forall t \in [0, T], \quad Y_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[\xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s) ds \right].$$

D'après ce qui précède, cette espérance conditionnelle est bien définie. De plus le théorème

de représentation des martingales Brownien appliqué à la martingale $\{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(\zeta)\}_{t \in [0, T]}$, permet d'affirmer qu'il existe un processus $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$ tel que

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(\zeta) = E(\zeta) + \int_0^t Z_r dB_r.$$

Ainsi est construit $(Y, Z) = \Phi(U, V)$. De l'égalité précédente on déduit

$$Y_t + \int_0^t f(r, U_r, V_r) dr = Y_0 + \int_0^t Z_r dB_r$$

d'où

$$Y_t = \xi + \int_0^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_0^T Z_r dB_r$$

donc (Y, Z) est solution de (2.4) si et seulement si c'est un point fixe de Φ .

Montrons maintenant que $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$. Pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, U_r, V_r) dr - \int_0^t Z_r dB_r,$$

comme f est lipschitzienne en y et z ,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T |f(r, 0, 0)| dr + K \int_0^T |U_r| dr + K \int_0^T \|V_r\| dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right|$$

Y_0 est déterministe et comme $(U, V) \in \mathcal{B}^2$, Z étant dans \mathcal{M}^2 par construction,

$$\eta = |Y_0| + \int_0^T |f(r, 0, 0)| + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| + K \int_0^T |U_r| dr + K \int_0^T \|V_r\| dr$$

est de carré intégrable. Ainsi

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \eta$$

ce qui prouve que Y est dans $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$. Par construction $Z \in \mathcal{M}^2$.

Pour trouver un point fixe, il suffit de prouver que Φ est une contraction stricte de \mathcal{B}^2 . Pour

cela, il faut d'abord remarquer que si $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$, alors

$$\left\{ \int_0^t \langle Y_s, Z_s dB_s \rangle, \quad 0 \leq t \leq T \right\}$$

est une martingale. En effet l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle Y_s, Z_s dB_s \rangle \right| \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_r| \left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{C}{2} \left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_r|^2 \right] + \mathbb{E} \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Ensuite, on prend (U, V) et (U', V') dans \mathcal{B}^2 , $(Y, Z) = \Phi(U, V)$, $(Y', Z') = \Phi(U', V')$ et on note $(\bar{U}, \bar{V}) = (U - U', V - V')$ et $(\bar{Y}, \bar{Z}) = (Y - Y', Z - Z')$. La formule d'Itô entraîne que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ (l'intégrale stochastique est d'espérance nulle)

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \mathbb{E} |\bar{Y}_t|^2 + \mathbb{E} \int_t^T e^{\gamma r} \left(\gamma |\bar{Y}_r|^2 + \|\bar{Z}_r\|^2 \right) dr &\leq 2K \mathbb{E} \int_t^T e^{\gamma r} |\bar{Y}_r| \left(|\bar{U}_r| + \|\bar{V}_r\| \right) dr \\ &\leq 4K^2 \mathbb{E} \int_t^T e^{\gamma r} |\bar{Y}_r|^2 dr + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T e^{\gamma r} \left(|\bar{U}_r|^2 + \|\bar{V}_r\|^2 \right) dr, \end{aligned}$$

on choisit $\gamma = 1 + 4K^2$, donc

$$\mathbb{E} \int_0^T e^{\gamma r} \left(|\bar{Y}_r|^2 + \|\bar{Z}_r\|^2 \right) dr \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T e^{\gamma r} \left(|\bar{U}_r|^2 + \|\bar{V}_r\|^2 \right) dr,$$

ainsi Φ est une contraction stricte de \mathcal{B}^2 muni de la norme

$$\| (Y, Z) \| = \left(\mathbb{E} \int_0^T e^{\gamma t} (\|Y_t\|^2 + \|Z_t\|^2) dt \right)^{1/2}$$

si $\gamma = 1 + 4K^2$, l'espace \mathcal{B}^2 muni de cette norme est un espace de Banach. Donc Φ admet un unique point fixe, qui est l'unique solution de l'EDSR dans \mathcal{B}^2 . ■

Remarque 2.2.1 Dans l'énoncé du théorème, ils ne sont pas précise l'espace dans lequel se trouve Y . Mais dans la démonstration on a vu que $Y \in \mathcal{S}^2$. En fait il s'avère que sous une

hypothèse assez faible concernant le générateur f , le processus Y est dans \mathcal{S}^2 dès que $Z \in \mathcal{M}^2$.

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus $(f_t)_{t \in [0, T]}$ positif dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et une constante $\lambda > 0$ tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \quad |Y(t, y, z)| \leq \lambda (Y_t + |y| + \|z\|).$$

Si (Y, Z) est une solution de l'EDSR telle que $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$, alors $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$.

Preuve. Pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r) dr + \int_0^t Z_r dB_r$$

ainsi

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \lambda \int_0^T (|f_r| + \|Z_r\|) dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_r| dr.$$

Y_0 étant déterministe, les hypothèses faites sur les processus Z , $(f_t)_{t \in [0, T]}$ impliquent que

$$\zeta = |Y_0| + \lambda \int_0^T (|f_r| + \|Z_r\|) dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right|$$

est de carré intégrable. Comme Y est continu, le lemme de Gronwall entraîne que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T},$$

ce qui prouve que Y est dans $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R})$. ■

2.3 Théorème de comparaison

Cette Théorème permet de comparer les solutions de deux EDSR dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème est dû à l'origine à S. Peng.

Théorème 2.3.1 *Supposons que $k = 1$ et que (ξ, f) , (ξ', f') . On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que \mathbb{P} -p.s. $\xi \leq \xi'$ et que $f(t, Y_t, Z_t) \leq$*

$f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes P$ – p.p. (m mesure de Lebesgue). Alors

$$\mathbb{P} - p.s., \quad \forall t \in [0, T], \quad Y_t \leq Y'_t.$$

Si de plus, $Y_0 = Y'_0$, alors $\mathbb{P} - p.s.$, $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ et $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$

En particulier, dès que $\mathbb{P}(\xi < \xi') > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) < f'(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes \mathbb{P}$ – mesure strictement positive alors $Y' < Y_0'$.

2.4 Exemples des EDSR

2.4.1 EDSR linéaires

Dans cette partie nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite. Le cas $k = 1$; Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d .

Proposition 2.4.1 Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t \in [0, T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t \in [0, T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, \mathcal{F}_T – mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\} dr - \int_t^T Z_r dB_r,$$

possède une unique solution qui vérifie

$$\forall t \in [0, T], \quad Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t \right),$$

avec, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\Gamma_t = \exp \left\{ \int_0^t b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2} \int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr \right\}.$$

2.4.2 Modèle de Black–Scholes

Le modèle de Black–Scholes conduit à un exemple d'EDSR linéaire. Prenons le cas le plus simple.

On se place dans un marché financier sur lequel on a une action dont le prix d'une part est régi par l'EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$; le paramètre σ s'appelle la volatilité. On a, pour tout $t \geq 0$,

$$S_t = x \exp \left\{ \sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\}.$$

Parallèlement à cette action, on a un placement sans risque – disons un livret de Caisse d'épargne pour fixer les idées – dont le taux de rendement est constant, égal à r ; le prix d'une part est donné par

$$dE_t = rE_t dt, \quad E_0 = y, \quad \text{alors } E_t = ye^{rt}.$$

Une stratégie est la donnée d'un couple de processus, $(p_t, q_t)_{t \geq 0}$ adapté par rapport à la filtration du MB B ; q_t représente le nombre de parts d'actif sans risque et p_t celui d'actif risqué c'est à dire le nombre d'actions détenues dans le portefeuille à l'instant t . La valeur du portefeuille est donc, à l'instant t

$$V_t = q_t E_t + p_t S_t.$$

On ne considère que des stratégies autofinancées ce qui se traduit par le fait que l'évolution de la valeur du portefeuille est décrite par

$$dV_t = q_t dE_t + p_t dS_t = r q_t E_t dt + p_t S_t (\mu dt + \sigma dB_t),$$

où $q_t E_t = V_t - p_t S_t$ et donc, on a, notant $\pi_t = p_t S_t$

$$dV_t = r V_t dt + \pi_t \sigma (\mu - r) / \sigma dt + \pi_t \sigma dB_t,$$

soit encore notant $Z_t = \pi_t \sigma$ et $\theta = (\mu - r)/\sigma$, alors on a

$$dV_t = rV_t dt + \theta Z_t dt + Z_t dB_t.$$

Et le vendeur veut obtenir

$$V_T = \xi$$

d'où

$$V_t = \xi - \int_t^T (rV_s + \theta Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On peut calculer explicitement V_t pour tout t (par l'exemple précédent)

$$V_t = E \left[\xi \exp \left(-\theta (B_T - B_t) + \frac{\theta^2}{2} (T - t) - r (T - t) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Chapitre 3

Discrétisation et résolution numérique des EDSR

Dans ce chapitre, nous intéressons aux méthodes numériques qui peuvent approximativement résoudre les EDSR.

Nous montrons la méthode d'Euler couramment utilisée pour les EDSR. Le schéma d'Euler est suffisant pour maintenir le comportement global d'ordre élevé lorsque nous concevons des schémas de discrétisation du temps d'ordre élevé pour les EDSR.

3.1 Equations stochastiques rétrogrades discrètes

Considérons la suite de v.a de Bernoulli i.i.d $(\varepsilon_i^n)_{i=1,2,\dots,n}$ avec $\varepsilon_0 = 0$, n fixé avec

$$P(\varepsilon_i^n = 1) = P(\varepsilon_i^n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons par \mathbb{M}_j^n la tribu (σ -algèbre) engendrée par $\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_n^n$, $M_j^n = \sigma(\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$.

Par analogie avec les EDRS, notons la condition terminale par ξ^n , $\{\xi^n\}_{n \geq 0}$ la suite de variables aléatoires \mathbb{M}_j^n mesurable, de carré intégrable et le générateur (le coefficient) par f_j^n . Considérons les hypothèses suivantes

H₁. ξ^n est \mathbb{M}_j^n mesurable

$$\exists \Phi : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \xi^n = \Phi(\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_n^n).$$

H₂. Pour tout $j = 0, \dots, n-1$, $f_j^n : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathbb{M}_j^n mesurable et pour tout (ω, z) , f_j^n est C lipchitzienne par rapport à y avec $n > C$.

H₃. Pour tout (ω, y) , f_j^n est C lipchitzienne par rapport à z avec $n > C^2$.

Soit $q \geq 0$ une constante donnée, considérons pour $j = n-1, \dots, 1, 0$, l'équation rétrograde discrète

$$y_j^{n,q} = y_{j+1}^{n,q} + f_j^n(y_j^{n,q}, z_j^{n,q}) \frac{1}{n} + \frac{q}{n} (y_j^{n,q})^- - z_j^{n,q} \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_{j+1}^n \quad (3.1)$$

avec la condition terminale

$$y_n^{n,q} = \xi^n.$$

3.1.1 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.1.1 *Supposons que le couple (f_j^n, ξ^n) est soumis aux hypothèses **H₁** et **H₂**, alors il existe un unique couple $(y_n^{n,q}, z_n^{n,q}) \mathbb{M}_j^n$ adapté qui est solution de (3.1).*

Théorème 3.1.2 *(Théorème de comparaison)*

*Si $(y_n^{m,q'}, z_n^{m,q'})$ est solution d'une EDRS de la forme (3.1) correspondant à (f_j^m, ξ^m, q') , $q \geq q'$ et si f_j^m, f_j^n satisfais **H₃** et $f_j^m(\omega, y, z) \geq f_j^n(\omega, y, z)$, $\xi^m \geq \xi^n$, alors pour $j = 0, 1, \dots, n-1$ on a $y_j^{m,q'} \geq y_j^{n,q}$.*

Théorème 3.1.3 *Posons $M_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]} \varepsilon_k^n$ et $\Delta M_{t_{j+1}}^n = M_{t_{j+1}}^n - M_{t_j}^n$ et considérons l'EDRS discrète*

$$\tilde{Y}_{t_j}^n = \xi^{(n)} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^n) - \sum_{j=i}^{n-1} \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n, \quad 0 \leq i \leq n, 0 \leq t_i \leq T \quad (3.2)$$

qui est la version discrète de l'EDRS

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Cette EDRS discrète vérifie \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 ce qui assure l'existence d'une unique solution.

Supposons que $(\tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n)$ est solution de (3.2). Posons

$$U_{t_i}^n = \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n = \tilde{Y}^n - \xi^n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}).$$

Théorème 3.1.4 Si on a

- i. $\xi = F(B)$ où $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipchitzienne bornée i.e il existe une constante k telle que pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$

$$|F(\omega) - F(\omega')| \leq k \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega(t) - \omega'(t)|.$$

- ii. $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue, uniformément lipchitzienne i.e il existe une constante L telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|.$$

Alors la suite (\tilde{Y}^n, U^n) converge faiblement au sens de la topologie de Skorokhode vers $(Y, \int Z dB)$ où (Y, Z) est l'unique solution de l'EDRS

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T.$$

3.2 Discrétisation des EDSR

De nombreuses études sont faites depuis le début des années 1990 sur la résolution numérique des EDSR.

Considérons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré munie de MB à d dimensions $B(t)_{0 \leq t \leq T}$, avec $\Omega = C([0, T], \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d .

En premier lieu, intéressons nous à trouver la solution ou une approximation de celle-ci pour

l'EDS rétrograde de type

$$\begin{cases} dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, & t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (3.3)$$

cette équation a une unique solution, (Y_t, Z_t) dès la satisfaction des conditions d'existence et d'unicité. On rappelle que dans le cas d'une EDSR linéaire, nous avons déjà une forme explicite de la solution (chapitre 2, Proposition 2.4.1).

3.2.1 Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver ne dépend que de t et Y_t

Supposons que le driver f ne dépend que de t et Y dans ce cas l'équation (3.3) prend la forme

$$-dY_t = f(t, Y_t)dt - Z_t dB_t$$

avec la condition terminale $Y_T = \xi$ où ξ est une v.a \mathcal{F}_T -mesurable telle que $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$. Sous forme intégrale, l'équation s'écrit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad (3.4)$$

cette équation a une unique solution (Y_t, Z_t) dès la satisfaction des conditions d'existence et d'unicité.

Supposons qu'il existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonction Lipchitzienne bornée, i.e il existe une constante k telle que pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$

$$|F(\omega) - F(\omega')| \leq k \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega(t) - \omega'(t)|,$$

tel que $\xi = F(B)$ et supposons que $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction continue, uniformément lipchitzienne, i.e il existe une constante L telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|.$$

Pour simplifier les calculs, plaçons nous, dans l'espace de dimension 1 ($d = 1$) avec $T = 1$ et appliquons un schéma d'approche basé sur la discrétisation de (3.3) et on utilise la version discrète de l'EDRS, en remplaçant le mouvement brownien B par une simple marche aléatoire pour cela notons par $M^n = (M_t^n)_{0 \leq t \leq 1}$ une marche aléatoire symétrique où

$$M^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]/n} \varepsilon_k^n, \quad 0 \leq t \leq 1$$

et $\{\varepsilon^n\}_{0 \leq t \leq n}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d de même loi symétrique de Bernoulli.

Notons par \mathbb{M}_j^n la tribu (σ -algèbre) engendrée par $\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n$, $\mathbb{M}_j^n = \sigma(\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$ et par $\{\xi^n\}_{n \geq 0}$ la suite de variables aléatoires \mathbb{M}_j^n mesurable, de carré intégrable convergente, dont la limite est égale à ξ . Supposons que le MB B et la suite de marches aléatoires $(M_t^n)_{0 \leq t \leq 1}$ sont définis sur le même espace de probabilité.

Passons à l'espérance conditionnelle dans l'équation (3.4) en tenant compte que $\mathbb{E} \left(\int dB_t \right) = 0$.

Dans ce cas, la solution Y_t sera présenté sous cette forme,

$$Y_t = \mathbb{E} \left(\xi + \int_t^T f(s, Y_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right)$$

et l'équation (3.4) sera approchée par l'équation rétrograde, discrète

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{t_j}^n = \xi^{(n)} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^n) - \sum_{j=i}^{n-1} \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n \\ \xi^{(n)} = F(M^{(n)}) \end{cases}, \quad (3.5)$$

cette équation aussi a une unique solution sous forme de couple $(\tilde{Y}^{(n)}, \tilde{Z}^{(n)})$.

On a

$$\tilde{Y}_{t_j}^n - \tilde{Y}_{t_{j+1}}^n = \frac{1}{n} f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^n) - \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n$$

en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à \mathbb{M}_i^n et comme $\mathbb{E} \left(\tilde{Z}_{t_i}^n \Delta B_{t_{i+1}}^n \mid \mathbb{M}_i^n \right) = 0$ et $\tilde{Y}_{t_i}^n$ est \mathbb{M}_i^n adapté on aura alors

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n + \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) \mid \mathbb{M}_i^n) = \tilde{Y}_{t_i}^n$$

alors

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n \mid \mathbb{M}_i^n) = \tilde{Y}_{t_i}^n - \frac{1}{n}f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) \quad (3.6)$$

et

$$\tilde{Z}_{t_i}^n = \left[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n - \tilde{Y}_{t_i}^n + \frac{1}{n}f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) \right] \left(\Delta M_{t_{i+1}}^n \right)^{-1}$$

et comme $\tilde{Z}_{t_i}^n$ est \mathbb{M}_i^n adapté, alors on a

$$\tilde{Z}_{t_i}^n = \mathbb{E} \left[\left(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n - \tilde{Y}_{t_i}^n + \frac{1}{n}f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) \right) \left(\Delta M_{t_{i+1}}^n \right)^{-1} \mid \mathbb{M}_i^n \right].$$

En outre, une fois $\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n$ est déterminé, $\tilde{Y}_{t_i}^n$ sera trouvé par la méthode de point fixe.

En posant $X^0 = \mathbb{E} \left[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n \mid \mathbb{M}_i^n \right]$ et

$$X^{k+1} = X^0 + \frac{1}{n}f(t_i, X^k) = g(X^k),$$

g est contractante, car

$$|g(t, x) - g(t, y)| = \left| X^0 + \frac{1}{n}f(t, x) - X^0 - \frac{1}{n}f(t, y) \right| \leq \frac{L}{n} |x - y|$$

donc, d'après le théorème du point fixe, les itérations de ce procédé convergent vers la solution de (3.6).

De plus, si f est bornée par \mathbf{R} et pour n assez grand, une itération peut représenter déjà une bonne approximation pour la solution de (3.3) et puisque f est L uniformément lipchitzienne,

on a

$$\begin{aligned} |Y_{t_i}^n - X^1| &= \left| \frac{1}{n}f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) + X^0 - X^0 - \frac{1}{n}f(t_i, X^0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n}f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) - \frac{1}{n}f(t_i, X^0) \right| \\ &\leq \frac{L}{n} \left| \tilde{Y}_{t_i}^n - X^0 \right| = \frac{L}{n} \left| \frac{1}{n}f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) \right| \leq \frac{L \mathbf{R}}{n^2} \end{aligned}$$

alors

$$|Y_{t_i}^n - X^1| \leq \frac{LR}{n^2}$$

et par conséquent on peut construire le schéma numérique explicite rétrograde suivant, qui donne une approximation de la solution

$$\widehat{Y}_T^n = \xi^n, \quad \widehat{Z}_T^n = 0.$$

$$\begin{cases} X_{t_i}^{(n)} = \mathbb{E} \left[\widehat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} \mid M_i^n \right] \\ \widehat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} = X_{t_i}^{(n)} + \frac{1}{n} f(t_i, X_{t_i}^{(n)}) \\ \widehat{Z}_{t_i}^n = \mathbb{E} \left[\left(\widehat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} + \frac{1}{n} f(t_i, \widehat{Y}_{t_i}^{(n)}) - \widehat{Y}_{t_i}^{(n)} \right) \left(\Delta B_{t_{i+1}}^n \right)^{-1} \mid M_i^n \right] \end{cases}.$$

3.3 Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver dépend de t, Y_t, Z_t

Considérons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et notons par $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle engendré par le MB de dimension 1, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t \leq T)$.

Supposons que f dépend de t, Y, Z et $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipchitzienne par rapport (y, z) uniformément par rapport t , i.e

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq c(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

$\forall t \in [0, T], \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ avec $f(\cdot, 0, 0)$ de carré intégrable et supposons que ξ est \mathcal{F}_t -mesurable, ξ^n est \mathbb{M}_j^n -mesurable avec

$$\mathbb{E} \left[|\xi|^2 + \sup_n |\xi^n|^2 \right] < \infty \quad \text{et} \quad \lim \mathbb{E} [|\xi - \xi^n|] = 0.$$

Dans ce cas l'équation (3.3) s'écrit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad (3.7)$$

Comme dans le deuxième cas, nous appliquons la même méthode. Pour simplifier les calculs,

posons $\frac{T}{n} = h$ et $M_t^n = \sqrt{h} \sum_{k=1}^{\lfloor t/h \rfloor} \varepsilon_k^n$, $0 \leq t \leq T$ où

$$\begin{cases} (\varepsilon_k^n)_{1 \leq k \leq n} \\ \varepsilon_0^n = 0 \end{cases}$$

est une suite de v.a de Bernoulli symétriques, i.e $P(\varepsilon_k^n = 1) = P(\varepsilon_k^n = -1) = \frac{1}{2}$.

Comme dans le cas précédent nous cherchons à trouver une approximation de processus (Y, Z) réelle, définie sur $[0, T]$ \mathcal{F}_t -progressivement mesurable telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_n |Y_t|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T |Z_t|^2 dt \right] < \infty$$

et qui satisfait

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

telle que $\mathbb{E} |\xi|^2 < \infty$. Pour cela cherchons une solution numérique pour (3.7) à l'aide de couple (Y_t^n, Z_t^n) et qui doit satisfaire

$$(Y_t^n, Z_t^n) \equiv (y_j^n, z_j^n), \quad t \in [jh, (j+1)h]$$

avec $h = \frac{T}{n}$, $(y_j^n, z_j^n)_{0 \leq j \leq n}$ est la solution, dans un petit intervalle, de l'équation rétrograde discrète

$$\begin{cases} y_j^n = y_{j+1}^n + hf(t, y_j^n, z_j^n) - z_j^n \varepsilon_{j+1}^n \sqrt{h} \\ y_n^n = \xi^n \end{cases} \quad (3.8)$$

Le procédé commence par $y_n^n = \xi^n$, alors la solution (y_j^n, z_j^n) de (3.8) est calculée d'une façon rétrograde suivant le schéma implicite suivant, en supposons qu'on connaît y_{j+1}^n .

Théorème 3.3.1 *Soit y_{j+1}^n une v.a \mathbb{M}_{j+1}^n -mesurables. Alors pour $h < \frac{1}{c}$, il existe un couple unique (y_j^n, z_j^n) \mathbb{M}_j^n -mesurable vérifiant l'équation (3.8).*

Preuve. Posons

$$Y_- = y_{j+1}^n \Big|_{\varepsilon_{j+1}^n = -1}$$

et

$$Y_+ = y_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n = +1}$$

et supposons qu'ils sont tout les deux \mathbb{M}_j^n -mesurables en remplaceant dans l'équation (3.8), on

aura

$$\begin{cases} y_j^n = Y_+ + hf(t_j, y_j^n, z_j^n) - \sqrt{h}z_j^n \\ y_j^n = Y_- + hf(t_j, y_j^n, z_j^n) + \sqrt{h}z_j^n \end{cases}$$

ce qui équivalent à

$$Z_j^n = \frac{1}{2\sqrt{h}} (Y_+ - Y_-) = \frac{1}{2\sqrt{h}} \mathbb{E} [y_{j+1}^n \varepsilon_{j+1}^n | \mathbb{M}_j^n] \quad (3.9)$$

$$y_j^n - hf(t_j, y_j^n, z_j^n) = \frac{1}{2} (Y_+ - Y_-) = \mathbb{E} [y_{j+1}^n | \mathbb{M}_j^n] \quad (3.10)$$

par la condition de Lipchitz, on peut montrer que la fonction

$$G(y) = y - hf(t_j, y, z_j^n)$$

est strictement monotone quand $hk < 1$,

$$\langle G(y) - G(y'), y - y' \rangle \geq (1 - h)k |y - y'|^2 > 0.$$

Montrons cette inégalité, en effet $\forall t \in [0, T], \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq c(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

alors

$$\begin{aligned}
 \langle G(y) - G(y'), y - y' \rangle &= \langle y - hf(y, z_j^n) - [y' - hf(y', z_j^n)], y - y' \rangle \\
 &= \langle y - y' - h [f(y, z_j^n) - f(y', z_j^n)], y - y' \rangle \\
 &= |y - y'|^2 - h \langle [f(y, z_j^n) - f(y', z_j^n)], y - y' \rangle \\
 &\geq |y - y'|^2 - h \|f(y, z_j^n) - f(y', z_j^n)\| |y - y'| \\
 &\geq |y - y'|^2 [(1 - h)k] > 0
 \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une valeur unique y_j^n qui réalise (3.8).

Ce schéma de résolution de l'EDSR discrète est nommé schéma implicite.

En général on ne peut pas toujours utiliser ce schéma d'une façon explicite (i.e dans le cas G^{-1} ne peut pas être résolue explicitement) d'où la nécessité de construire un autre schéma plus souple en utilisant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[y_{j+1}^n | \mathbb{M}_j^n]$ pour approximer y_j^n .

Posons $\tilde{Y}_T^n = \tilde{y}_T^n = \xi^n$ en commence l'itération par $j = n - 1$ on aura la relation rétrograde

$$\tilde{y}_j^n = \tilde{y}_{j+1}^n + hf [t_j, \mathbb{E}(\tilde{y}_{j+1}^n | M_j^n), \tilde{z}_j^n] - \sqrt{h} \tilde{z}_j^n \varepsilon_{j+1}^n \quad (3.11)$$

ce qui équivaut aux relations suivantes

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_j^n &= \mathbb{E}(\tilde{y}_{j+1}^n | M_j^n) + hf [\mathbb{E}(\tilde{y}_{j+1}^n | M_j^n), \tilde{z}_j^n] \\
 \tilde{z}_j^n &= \frac{1}{2\sqrt{h}} \mathbb{E}(\tilde{y}_{j+1}^n \varepsilon_{j+1}^n | M_j^n) = \frac{\tilde{y}_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n = +1} - \tilde{y}_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n = -1}}{2\sqrt{h}}.
 \end{aligned}$$

■

3.4 Méthode d'Euler

Cette méthode est considérée comme la méthode la plus simple des approximations fortes de Taylor, elle est appelée méthode explicite d'Euler ou Euler Maruyama.

Tout d'abord, notons que le problème de la discrétisation et de la simulation d'EDS est plutôt bien compris et traité 3. Par exemple, si le processus X est solution de l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

alors la solution la plus simple pour obtenir une approximation en temps discret de X est de considérer le schéma d'Euler

$$\begin{cases} X_{t_n} = x \\ X_{t_{i+1}} = X_{t_i}^n + a(t_i, X_{t_i}^n)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, X_{t_i}^n)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \end{cases}$$

avec $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ une partition de $[0, T]$. Le processus ainsi obtenu a le bon goût d'être encore adapté. Enfin, un tel algorithme est implantable sur un ordinateur. Considérons maintenant (Y, Z) la solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

que l'on souhaite approcher par un couple (Y^n, Z^n) de processus adaptés à temps discret. Si l'on remplace $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, Y_s, Z_s) ds$ par $(t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_i}^n, Z_{t_i}^n)$ alors le théorème de représentation martingale nous assure l'existence d'un processus (Z_t^n) , $t \in [0, T]$ tel que l'on ait

$$Y_{t_i}^n = Y_{t_{i+1}}^n + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_i}^n, Z_{t_i}^n) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^n dB_s.$$

Pour $Z_{t_i}^n$ nous allons prendre la meilleure approximation de \tilde{Z}^n par une variable aléatoire \mathcal{F}_{t_i} -mesurable dans $L^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$, à savoir

$$Z_{t_i}^n := \frac{\mathbb{E} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s^n ds \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]}{(t_{i+1} - t_i)} = \frac{\mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]}{(t_{i+1} - t_i)}$$

d'après l'isométrie de l'intégrale d'Itô, cela nous permet d'obtenir un premier schéma de discrétisation en temps donné par

$$\begin{cases} Y_{t_n}^n = \xi \\ Z_{t_i}^n = (t_{i+1} - t_i)^{-1} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ Y_{t_i}^n = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^n \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_i}^n, Z_{t_i}^n), \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Un tel schéma est implicite car $Y_{t_i}^n$ est solution d'une équation non linéaire. Néanmoins, si l'on suppose que f est une fonction lipchitz en y alors un argument de point fixe nous assure l'existence et l'unicité d'une solution lorsque h est suffisamment petit car dans ce cas

$$y \mapsto \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^n \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y, Z_{t_i}^n)$$

est une contraction dans $L^2(\mathcal{F}_{t_i})$. Notons qu'il est également possible de modifier légèrement ce schéma pour le rendre explicite en considérant

$$\begin{cases} Y_{t_n}^n = \xi \\ Z_{t_i}^n = (t_{i+1} - t_i)^{-1} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ Y_{t_i}^n = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^n + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, Y_{t_{i+1}}^n, Z_{t_i}^n) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right], \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

3.5 Quelques exemples de Simulation

3.5.1 Premier exemple

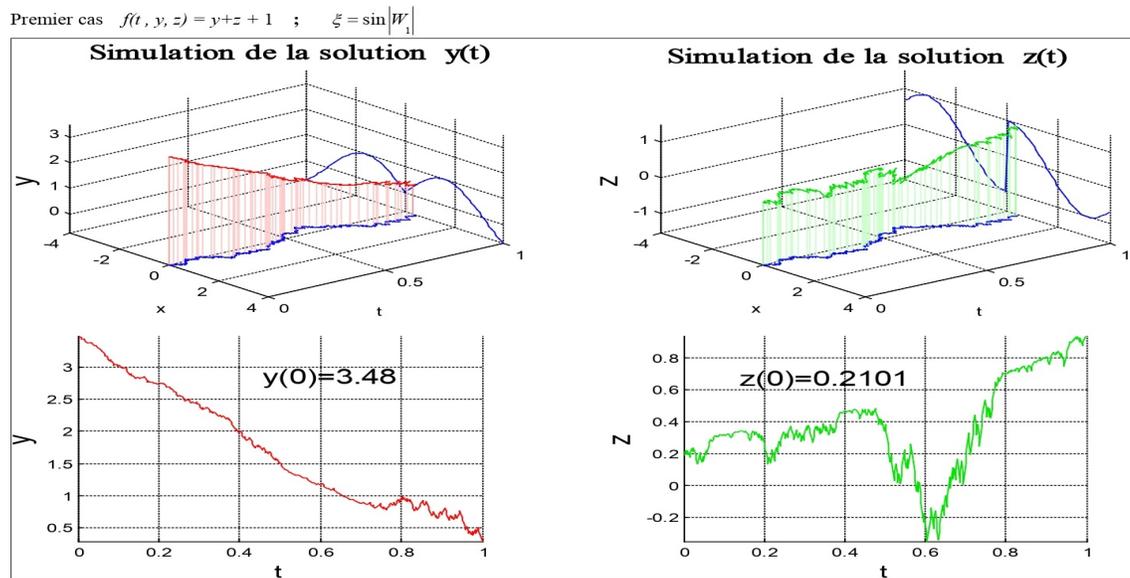
f est linéaire, donc sous la forme $f(t, y, z) = a.y + b.z + c$.

Exemple 3.5.1 *On prend $a = b = c = 1$, $\xi = \sin |B_1|$, dans ce cas on sait qu'on peut calculer la solution explicitement. La solution exacte pour $t = 0$ est (d'après chapitre 2, Proposition*

2.4.1)

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)T\right) \mathbb{E}[\xi \exp(bB_T)] + \frac{c}{a} [\exp(aT) - 1] \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2}\right) \mathbb{E}[\sin|B_1| \exp(B_1)] + [\exp(1) - 1].
 \end{aligned}$$

La méthode de Monte-Carlo avec 10000000 échantillons donne la solution $y_0 = 3.4850$. Avec la méthode proposée par le schéma implicite et pour $n = 400$, on trouve, $y(0) = 3.48$, $z(0) = 0.2101$



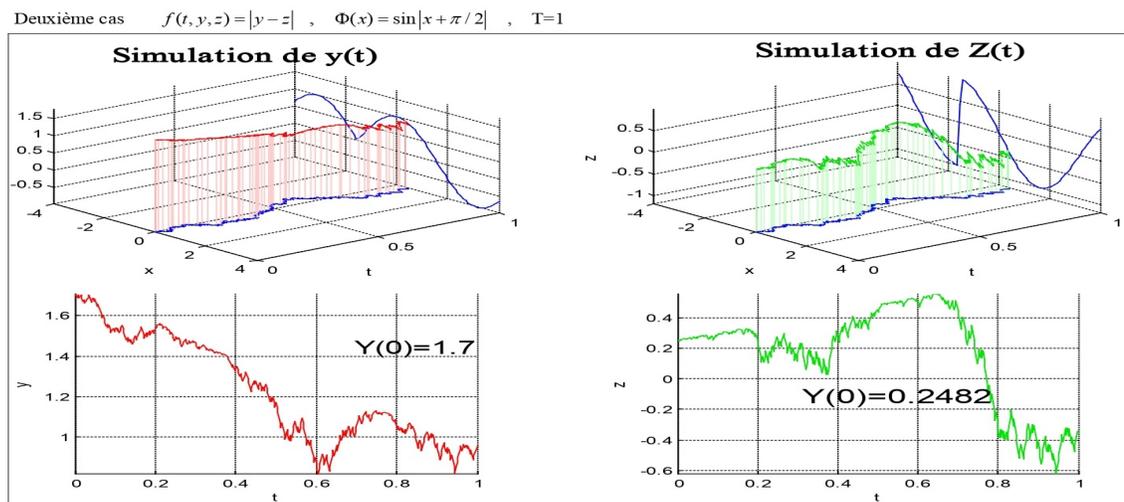
Simulation des solutions $y(t)$ et $z(t)$ pour $f(t; y; z) = y + z + 1$, $\xi = \sin|B_1|$.

3.5.2 Deuxième exemple

f n'est pas linéaire

Exemple 3.5.2 On prend $f(t, y, z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \frac{\pi}{2}|$, $T = 1$.

On trouve, $y(0) = 1.7$, $z(0) = 0.2482$.



Simulation des solutions $y(t)$ et $z(t)$ pour $f(t; y; z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \frac{\pi}{2}|$, $T = 1$.

Conclusion

Dans ce modeste travail, nous construisons des intégrales stochastiques avec les concepts et propriétés nécessaires à la construction, ensuite nous savons que les équations différentielles stochastiques rétrogrades pour prouver l'existence et unicité de leurs solutions en utilisant Inégalité (Théorème de représentation des martingales Browniennes, Burkholder-Davis-Gundy, Lemme de Gronwall) avec mention théorème de comparaison.

Enfin j'ai choisi de décrire une méthode de discrétisation basée sur le remplacement de mouvement Brownien par une simple marche aléatoire ce qui a aboutit à deux schémas l'un est implicite et l'autre explicite après l'étude de convergence de ces deux schémas on a pu donner un exemple de simulation de la solution.

Bibliographie

- [1] Adrien Richou., Étude théorique et numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2010.
- [2] Alexandre P., *Équations différentielles stochastiques rétrogrades avec condition finale singulière*; décembre 2004.
- [3] Monique Jeanblanc M., *Cours de Calcul stochastique Mastère2*; IF EVRY, septembre 2006.
- [4] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.
- [5] Philippe B., *Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades*; Mars 2001.
- [6] Zitouni M., *Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades*; Mémoire de Magister, Université M'hamed Bougara, Boumerdes 2010.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

i.e : C'est à dire.

BDG : Inégalité Burkholder-Davis-Gundy.

tq : Tell que.

iid : indépendantes et identiquement distribuées.

$\mathbb{E}(X)$: L'espérance mathématique de la Variable aléatoire X .

$\frac{\partial}{\partial x}$: La dérivé partielle première par rapport à la variable x .

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$: La dérivé partielle seconde par rapport à la variable x .

MB : Mouvement Brownien .

EDS : Equations différentielle stochastique.

EDSR : Equations différentielle stochastique rétrograde.

Annexe B : Logiciel MATLAB

Pour les simulations, nous utilisons MATLAB 7.10 R2010a.

Simulation de EDSR

BSDE.m

%% Backward Stochastic Differential Equation

% $-dY_t=f(t,Y_t,Z_t)dt-Z_t dW_t$

% $Y_T=x_i$; $\eta=5$; %risk aversion coefficient $\beta=2$; $\alpha=1$; $\theta=\alpha*\beta$;

% Number of iterations 70

itera=75;

% Number of partitions 120

N=120;

% Number of truncation 25

n = 25;

EsperanzaY=zeros(N);

EsperanzaZ=zeros(N);

Y=zeros(N,itera);

Z=zeros(N,itera);

pi=zeros(N,itera);

x=linspace(0,1,N);

delta=1/N;

sdelta=sqrt(1/N);

tic,

for k=1 :itera

```
z=zeros(N);
y=zeros(N);
%terminal value
y(N, :)= Precios(0.001,N);
%y(N, :)=0;
for i = N-1 :-1 :1
for j =1 :i
z(i,j) = (y(i + 1,j) - y( i + 1,j + 1))./(2 * sdelta);
y(i,j) = (y(i+1, j ) + y(i + 1, j + 1))/2 +
f(trunca(z(i,j), n),eta,beta,alpha) * delta;
end
end
EsperanzaY=EsperanzaY+y;
EsperanzaZ=EsperanzaZ+z;
pi( :,k)=(z( :,1)+theta/eta)/beta;
Y( :,k)=y( :,1); Z( :,k)=z( :,1);
clear z;
clear y;
end
EsperanzaY=EsperanzaY./itera; EsperanzaZ=EsperanzaZ./itera;
toc
```

Les fonctions auxiliaires

```
Precios.m function H = Precios(dt,nPeriods)
% nPeriods # of simulated observations
% dt time increment = 1
H=zeros(nPeriods,1);
F = drift(0, 0.1); % Drift rate function F(t,X)
G = diffusion(1, 3); % Diffusion rate function G(t,X)
SDE=sdeddo(F, G);
```

```
SDE.StartState=0.5;  
  
for i=1 :nPeriods  
[S,T] = SDE.simByEuler(nPeriods, 'DeltaTime', dt);  
H(i)=S(nPeriods);  
end
```

f.m fonctionf.m

```
function  
generator=f(x,eta,beta,alpha)  
%generator=0.5*x^2;  
%generator=abs(x);  
theta=alpha*beta;  
generator=x*theta+(theta^2)/(2*eta); %-eta*((x+theta/eta)^2)/2; end
```

ملخص

في هذا العمل، نحن مهتمون بكشف بعض الطرق والأمثلة والتطبيقات على الدقة العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية. أولاً، قمنا بالتذكير ببعض الأساسيات حول حساب التفاضل والتكامل العشوائي. بعد ذلك حددنا الميزات الرئيسية للمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية وتطرقنا لنظرية وجود ووحدانية الحلول المتعلقة بهذه المعادلات. تم تخصيص الجزء الأخير للطرق العددية الخاصة بحل المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، وقدمنا الرسومات التوضيحية ونظريات التقارب المرتبطة بها، وذكرنا طرق للحلول التقريبية "طريقة أويلر"

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à d'exposer quelques méthodes, exemples et applications sur la résolution numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Premièrement, on a donné quelques rappels de base concernant le calcul stochastique. En suite, on a exposé les grandes lignes concernant les EDSR et les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions concernant ces équations. La dernière partie été consacré aux méthodes de discrétisation des EDSR, on a donné les schémas de discrétisation avec les théorèmes de convergence associés, une description de quelques méthodes d'approximation d'EDSR "méthode d'Euler".

Abstract

In this work, we are interested in exposing some methods, examples and applications on the numerical resolution of backward stochastic differential equations. First, we gave some basic reminders about the stochastic calculus. Next, we outlined the main features of the BSDE and the existence and uniqueness of solution theorems concerning these equations. The last part was devoted to the discretization methods of the BSDE, we gave the discretization schemes with the associated convergence theorems, a description of some approximation methods of BSDE "Euler method".