



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Sciences de la Matière

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des Sciences de la Matière
Filière de Physique
Spécialité Physique des Matériaux

Réf. :

Présenté et soutenu par :
Chourab Manel

Le :

Quelques structures à l'équation de Schrödinger linéaire au moyen de la méthode des transformées différentielles

Jury :

| | | | |
|---------------------|-------|----------------------|------------|
| Haddar Mebarek | M.A.A | Université de Biskra | Président |
| Haif Khaif Ouanassa | M.C.B | Université de Biskra | Rapporteur |
| Guergueb Saida | M.A.A | Université de Biskra | Examineur |

Année universitaire : 2019/2020

Dédicace

Je remercie le Bon - Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin In Chaa Allah.

Je remercie la prunelle de mes yeux et la couronne de ma tête, mon cher papa pour son soutien et ses motivations , et ses appels à la passion , En plus la chère mère pour sa soutien et ses prières.

À mes frères OMAR, WAHID , RACHID et NOUREDINE , mes sœurs : AICHA, RANIA et mes sœurs : NADJWA ET KENZA Et leurs enfants MED YACINE , MARIEM , WASSIM , CHAHED ET ABDELDJALIL .

À toute ma grande Famille CHOURAB .

Je dédie ce travail à tous mes amis sans exception .

À qui m'a autorisé d'être favorable pour moi, malgré son absence, je le remercie.

Je dédie ce travail à tous qui ont contribué de ma formation et m'ont souhaité toujours le bon travail.

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à l'achèvement de ce mémoire .

Tout d'abord, je voudrais exprimer ma profonde gratitude au professeur superviseur HAIF KHAIFF a peut de la remercier pour sa gentillesse et sa présence ce fut un plaisir de travailler sous sa supervision.

Je remerciets ceux qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de ce travail pour leurs conseils encouragements et soutien.

Sommaire

| | |
|---|----|
| Introduction générale..... | 01 |
| Chapitre I | |
| L'équation de Schrödinger..... | 03 |
| I.1 Introduction..... | 04 |
| I.2 Construction de l'équation de Schrödinger..... | 04 |
| I.2.1 Naissance de l'équation..... | 04 |
| I.2.2 Propriétés de L'équation de Schrödinger..... | 07 |
| I.3 La fonction d'onde..... | 08 |
| I.4 Solution de l'équation de Schrödinger..... | 09 |
| I.4.1 L'équation de Schrödinger stationnaire..... | 09 |
| I.4.2 L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension..... | 10 |
| Chapitre II | |
| Développement de Taylor..... | 12 |
| II.1 Introduction..... | 13 |
| II.2 formules de Taylor..... | 13 |
| II.2.1 Les trois formules de Taylor..... | 14 |
| II.2.2 Opérations sur les polynômes de Taylor..... | 18 |
| Chapitre III | |
| La méthode des transformées différentielles..... | 21 |
| III.1 Introduction..... | 22 |
| III.2 Les Définitions de base du MTD..... | 23 |
| III.3 Application à l'équation de Schrödinger linière..... | 24 |
| Conclusion générale..... | 29 |
| Bibliographie..... | 30 |

Introduction générale

En mécanique quantique, les phénomènes physiques sont décrits par fonction d'onde qui contient toute les informations sur l'état du système, et son comportement suit l'équation de Schrödinger [1].

L'équation de Schrödinger a été proposée de façon inductive par Erwin Schrödinger en 1925 [2], c'est une équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Sa forme générale est une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps, et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire, cette équation joue un rôle fondateur en mécanique quantique par analogue à l'équation de Newton en mécanique classique et les équations de Maxwell en électromagnétisme.

Il existe plusieurs méthodes trouvées par les physiciens théoriciens pour résoudre l'équation de Schrödinger pour différents systèmes physiques, ces méthodes, soient analytiques ou numériques ; à partir de cette solution, on obtient une fonction d'onde permettant d'identifier le système quantique étudié.

L'équation de Schrödinger stationnaire a été résolue analytiquement seulement pour quelques systèmes simples, alors que la plupart des autres cas se sont restés sans solutions, ils n'ont pas pu être résolus que par des méthodes approximatives où numériques.

L'équation linéaire ou non linéaire de Schrödinger joue également un rôle important en physique et en mathématiques appliquées. L'analyse des structures de l'équation de Schrödinger a pris un élan considérable et une attention particulière. Cette étude visait à utiliser les solutions symboliques via l'approche de transformation différentielle. Méthodologie: Grâce à la méthode des transformées différentielles, certaines solutions exactes et approximatives d'ondes progressives d'équation de Schrödinger linéaire sont étudiées.

Notre mémoire est subdivisé en trois chapitres :

- le premier chapitre est consacré à l'équation de Schrödinger stationnaire (indépendant du temps).
- le deuxième chapitre on présente le développement de Taylor ; et les trois formule de solution de Taylor.
- Au dernier chapitre, on détaille les solutions de l'équation de Schrödinger linéaire pour une particule libre en l'absence de potentiel et implémenté une méthode nouvelle connue sous le nom de la méthode des transformées différentielles.

Chapitre I

**L'équation de
Schrödinger**

I.1 Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle fondateur que l'équation de Newton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle et spatiale de l'état d'un objet quantique représenté par une fonction d'onde.

Depuis la publication du travail de Schrödinger, les physiciens théoriciens se sont penchés à trouver des solutions à l'équation de Schrödinger pour différents systèmes physiques à partir de plusieurs méthodes, soit analytique ou numérique, à partir de cette solution, on obtient une fonction d'onde qui nous permet d'identifier le système quantique étudié.

I.2 Construction de l'équation de Schrödinger

I.2.1 Naissance de l'équation

Le 19^{ème} siècle a connu l'apparition de l'une des deux grandes théories physiques du siècle ; la physique quantique. Tout au début de la mécanique quantique on a été confronté au problème de l'explication des états discrets d'un atome. En mécanique classique l'état d'un système physique est donné par la résolution des équations du mouvement du système. Par contre, en mécanique quantique l'état du système est déterminé par la résolution de l'équation de Schrödinger. Cette équation a été proposée par E. Schrödinger en 1926. De Broglie et Schrödinger ont ainsi pu développer un parallélisme entre la mécanique classique et l'optique et parvenir à la conception de la mécanique ondulatoire [3].

L'équation de Schrödinger, trouvée par le physicien Erwin Schrödinger en 1925, est une équation d'onde qui généralise l'approche de De Broglie ci-dessus aux particules massives non-relativistes soumises à une force dérivant d'une énergie potentielle.

Le physicien autrichien Erwin Schrödinger utilise les résultats de De Broglie pour établir une équation régissant l'évolution spatiale et temporelle de la fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ d'un système physique. Pour obtenir l'équation de Schrödinger prenons la formule de l'onde plane de De Broglie [4] :

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad (\text{I.1})$$

Dans la suite, il sera plus intéressant de considérer la pulsation ω et le nombre d'onde K qui d'après les postulats de la mécanique quantique sont liés à la particule classique par :

$$E = \hbar\omega \quad (\text{I.2})$$

$$P = \hbar\omega \quad (\text{I.3})$$

Alors:

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i(\vec{P}\vec{r}-Et)}{\hbar}} \quad (\text{I.4})$$

On remarque alors qu'en dérivant l'onde par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} EAe^{i(\vec{P}\vec{r}-Et)} = -\frac{i}{\hbar} E\psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.5})$$

$$E\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.6})$$

Alors :

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{I.7})$$

\hat{E} : L'opérateur d'énergie.

De même le gradient de cette fonction d'onde donne :

$$\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar} \vec{P}\psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.8})$$

$$\vec{p}\psi(\vec{r}, t) = -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t)$$

Donc

$$\hat{P} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (\text{I.9})$$

\hat{P} : L'opérateur d'impulsion

Avec :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.10})$$

Pour une particule libre, d'après la mécanique classique, l'énergie mécanique est donné par:

$$E = E_c = T = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{I.11})$$

Cette quantité apparait dans la formulation hamiltonienne pour une particule libre. $V(\vec{r}) = 0$ de la mécanique classique.

En appliquant le principe de correspondance entre les valeurs classiques et quantiques, pour l'énergie, et l'impulsion de l'équation (I-11) et (I-6) on obtient :

$$\frac{p^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.12})$$

Et Pour l'impulsion : $\hat{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$, on a :

$$\frac{p^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla})^2 \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.13})$$

Donc l'équation de Schrödinger devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.14})$$

Ou : $\vec{\nabla}^2 = \Delta$: est le Laplacien .

L'opérateur hamiltonien du système pour une particule libre s'écrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (\text{I.15})$$

En utilisant cet opérateur, on peut simplifier l'écriture de l'équation de Schrödinger, on obtient:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.16})$$

Lorsque la particule est plongée dans un potentiel scalaire $U(r)$ (par exemple le potentiel d'un oscillateur harmonique) d'après la mécanique classique, l'énergie totale du système s'écrit comme suit:

$$E = T + V(r) = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (\text{I.17})$$

Avec cette nouvelle valeur d'énergie et à partir de l'énergie (I.7) et l'opérateur d'impulsion \hat{P} , l'équation de Schrödinger devient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I.18})$$

L'énergie totale ce n'est que l'opérateur Hamiltonien du système :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \quad (\text{I.19})$$

En utilisant cet opérateur, on peut simplifier l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$

I.2.2 Propriétés de L'équation de Schrödinger

Cette équation est également linéaire et homogène. Ses solutions sont donc linéairement superposables. Si $|\psi_1(t)\rangle$ et $|\psi_2(t)\rangle$ sont deux solutions de l'équation et si l'état initial du système est défini par :

$|\psi(t_0)\rangle = \lambda_1 |\psi_1(t_0)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t_0)\rangle$ alors l'état du système au temps t est donné par :

$|\psi(t)\rangle = \lambda_1 |\psi_1(t)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t)\rangle$ il existe donc une correspondance linéaire entre $|\psi(t_0)\rangle$ et $|\psi(t)\rangle$.

_ Les équations de Schrödinger dépendantes du temps sont des équations différentielles du premier ordre par rapport au temps par conséquent, si on connaît ψ à un instant initial (x, t) on peut déterminer son évolution, ceci montre que l'état dynamique du système est entièrement déterminé par la fonction ψ .

_ Si l'hamiltonien du système ne dépend pas du temps, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme :

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

Avec $\psi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

E: La valeur propre de l'hamiltonien

Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est en effet un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction d'onde quel que soit l'état du système.

I.3 La fonction d'onde

Les solutions de l'équation de Schrödinger d'un système quantique sont appelées les fonctions d'onde, elles peuvent être considérées comme un postulat quantique qui décrit l'état quantique d'une particule et contient toutes les informations qu'on veut connaître du système. La fonction d'onde $\psi(x, t)$ doit satisfaire les conditions suivantes:

- Elle doit être continue pour x .
- La dérivée $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ doit être continue, ces contraintes sont appliquées sous condition de la limite sur les solutions.
- Elle doit être normalisée. Cela implique que la fonction d'onde en approche à zéro comme x approche à l'infini c'est-à-dire:

$$\int \psi^* \psi d^3r = \int |\psi|^2 d^3r = 1$$

Avec $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ est la densité de probabilité.

Comme on a vu que l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps et de deuxième ordre par rapport aux coordonnées spatiales. C'est une équation difficile à résoudre pour la plupart de systèmes quantiques. Il existe deux types d'équations de Schrödinger : l'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire) et l'équation de Schrödinger dépendante du temps (non stationnaire).

I.4 Solution de l'équation de Schrödinger

Les physiciens théoriciens se sont penchés à trouver des solutions à partir des plusieurs méthodes mathématiques pour résoudre l'équation de Schrödinger : Soit analytique ou numérique. L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique [5]. C'est une équation difficile à résoudre pour la plupart de systèmes quantiques. Il existe deux types d'équations de Schrödinger : l'équation de Schrödinger indépendante du temps et l'équation de Schrödinger dépendante du temps [6].

I.4.1 L'équation de Schrödinger stationnaire

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire. Si l'hamiltonien du système physique ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Schrödinger est dit stationnaire, dans ce cas l'énergie totale est conservée, donc l'équation de Schrödinger admet des solutions particulières sous forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \varphi(\vec{r}) \quad (\text{I.22})$$

Où E : l'énergie, et $\varphi(\vec{r})$ satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (\text{I.23})$$

I.4.2 L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension

Les problèmes à une dimension sont intéressants non seulement comme modèles simples permettant de mettre en évidence un certain nombre de propriétés que l'on retrouve dans les situations plus complexes, mais aussi parce que dans ces problèmes il est possible de se ramener après quelques manipulations adéquates à la résolution d'équation du même type que l'équation de Schrödinger à une dimension [7].

Dans ce cas le potentiel dépend d'une seule dimension, et l'équation de Schrödinger s'écrit comme suit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (\text{I.24})$$

En général si le potentiel V est une fonction de x uniquement, dans ce cas l'hamiltonien de système ne dépend pas du temps, on peut résoudre l'équation de Schrödinger par la méthode de séparation des variables :

$$\psi(x, t) = \varphi(x)\chi(t) \quad (\text{I.25})$$

En substituant dans l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\left(i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \varphi(x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) \right\} \chi(t) \quad (\text{I.26})$$

Par conséquent :

$$\frac{i\hbar d\chi}{\chi dt} = \frac{\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) \right\}}{\varphi} \quad (\text{I.27})$$

Comme le membre de gauche de l'équation ne dépend que de t et que le membre de droite ne dépend que de x , il ne pourra y avoir de solution de la forme que si l'équation est égale à une constante qui ne dépend donc ni de t ni de x . Cette constante a la dimension d'une énergie appelons la E .

Alors :

$$E = \frac{i\hbar}{\chi} \frac{d\chi}{dt} \quad (\text{I.28})$$

Et par conséquent :

$$\chi(t) = Ae^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (\text{I.29})$$

Tandis que :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \quad (\text{I.30})$$

Qu'on appelle « l'équation de Schrödinger stationnaire (indépendante du temps) » .donc :

$$\psi(x, t) = Ae^{-\frac{iEt}{\hbar}} \varphi(x) \quad (\text{I.31})$$

$\varphi(x)$: est appelée la solution stationnaire de l'équation de schrodinger :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\varphi(x) = 0 \quad (\text{I.32})$$

Chapitre II

**Développement de
Taylor**

II.1 Introduction

En mathématiques, plus précisément en analyse, le théorème de Taylor (ou formule de Taylor), du nom du mathématicien anglais Brook Taylor qui l'établit en 1715, montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approchée par une fonction polynomiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Cette fonction polynomiale est parfois appelée polynôme de Taylor.

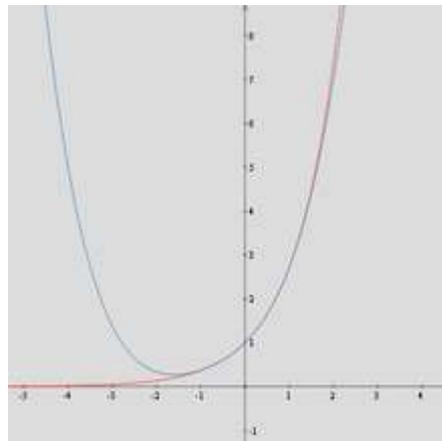


Figure : Représentation de la fonction exponentielle (en rouge) et du polynôme de Taylor d'ordre 4 au point 0 (en bleu).

II.2 formules de Taylor

En présentant cette formule en 1715[8,8], Taylor propose ainsi une méthode de développement en série[4], mais sans se préoccuper du reste $R_n(x)$.

En effet, pendant tout le XVIII^e siècle, les mathématiciens n'établissent pas encore de différence entre développement limité et développement en série entière. C'est Joseph-Louis Lagrange qui, en 1799, soulignera le premier la nécessité de définir rigoureusement ce reste[10,11]. Les propriétés de celui-ci s'énoncent différemment selon les hypothèses sur la fonction.

La première étape est la formule

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad (\text{II.1})$$

Qui montre que, si f est dérivable, alors f est approchée par un polynôme de degré 1 (une droite). Comment faire pour augmenter le degré?

II.2.1 Les trois formules de Taylor

Notations

Soient I un intervalle de R , x_0 un point intérieur à I , et $f : I \rightarrow R$ une fonction. On fixe un entier naturel n .

On dit qu'une fonction est de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable sur I , et si sa dérivée n -ième est continue sur I .

Théorème 1

Supposons que f soit de classe C^n sur I . Alors, pour tout $h \in R$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^n \varepsilon(h) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition

La somme

$$\sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (\text{II.3})$$

s'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 . Par convention, $1! = 0! = 1$.

Une autre façon d'écrire un développement de Taylor au point x_0 consiste à poser $x = x_0 + h$. Le théorème de Taylor-Young s'énonce alors de la façon suivante : si f est de classe C^n sur I , alors pour tout $x \in I$ on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0) \quad (\text{II.4})$$

ou $\varepsilon(x-x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 .

Exemples

La formule de Taylor-Young pour la fonction $\sin(x)$ à l'ordre $2n + 1$ en 0 s'écrit :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \quad (\text{II.5})$$

En effet, on doit calculer les dérivées successives de $\sin(x)$ en 0. Nous avons :

$$\sin(0) = 0, \sin'(0) = 1, \sin''(0) = -\sin(0) = 0, \dots \quad (\text{II.6})$$

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$$

d'où le résultat.

La formule de Taylor-Young pour la fonction e^x à l'ordre n en 0 s'écrit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \quad (\text{II.7})$$

En effet, e^x est sa propre dérivée.

pour x suffisamment petit, le polynôme $x - \frac{x^3}{3!}$ donne une valeur approchée de $\sin(x)$. On aimerait connaître la précision de cette approximation, c'est-à-dire contrôler la taille du reste $x^3 \varepsilon(x)$. Nous allons d'abord exprimer le reste sous la forme de Lagrange, ce qui constitue une généralisation du théorème des accroissements finis.

Théorème 2 (Taylor-Lagrange)

Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I , il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) \quad (\text{II.8})$$

(notons ici que θ dépend de h).

Exemple

Considérons à nouveau la fonction $\sin(x)$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \quad (\text{II.9})$$

avec $\theta \in]0,1[$. Ainsi, on peut dire que $x - \frac{x^3}{3!}$ constitue une valeur approchée de $\sin(x)$ avec une erreur inférieure ou égale à $\frac{x^4}{4!}$.

considérons encore $x \mapsto e^x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} e^{\theta x} \quad (\text{II.10})$$

Comme la fonction e^x est croissante, on peut dire que $e^{\theta x} \leq e^x$. Ceci permet par exemple de donner une valeur approchée de e . En effet, nous avons:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} e^{\theta} \quad (\text{II.11})$$

avec $e^{\theta} < e < 3$ donc, l'erreur est de l'ordre de $\frac{3}{120} = \frac{1}{40}$

Soit P un polynôme de degré au plus n . Alors P est de classe C^{n+1} et $P^{(n+1)} = 0$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au voisinage de 0 nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} P^{(k)}(0) \quad (\text{II.12})$$

En effet, le reste est nul! Ainsi, les coefficients de P sont donnés par les dérivées successives de P en 0. Ce résultat peut aussi se démontrer par un calcul algébrique (sans recourir à l'analyse).

Démonstration

Si $h = 0$, c'est vrai. Fixons $h \neq 0$, pour simplifier les notations, nous posons $x = x_0 + h$. Nous cherchons donc à montrer l'existence d'un réel c strictement compris entre x_0 et x tel que l'on ait :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (\text{II.13})$$

On introduit la fonction g définie par:

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - K(x-t)^{n+1} \quad (\text{II.14})$$

où K est un réel choisi de telle façon que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + K(x-x_0)^{n+1} \quad (\text{II.15})$$

Il est clair, vu la définition de g , que $g(x) = 0$. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que K est de la forme $\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(c)$ pour un certain c . Vu les hypothèses, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle pour trouver c (strictement compris entre x_0 et x tel que $g'(c) = 0$. Calculons g' . Par la formule de dérivation d'un produit, nous avons:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + K(n+1)(x-t)^n \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(x-t)^l}{l!} f^{(l+1)}(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + K(n+1)(x-t)^n \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

D'où

$$g'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + K(n+1)(x-t)^n = (x-t)^n \left(-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} K(n+1) \right)$$

L'égalité $g'(c) = 0$ se traduit donc par:

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

D'où le résultat.

Théorème 3 (Taylor avec reste intégral)

Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $h \in \mathcal{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on a :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1+t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt \quad (\text{II.17})$$

Le reste intégral admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (\text{II.18})$$

qui découle tout simplement d'un changement de variable $t \mapsto x_0 + th$.

Pour certaines fonctions f , nous pouvons montrer que le reste tend vers zéro quand n tend vers l'infini; ces fonctions peuvent être développées en série de Taylor dans un voisinage du point x_0 et sont appelées des fonction analytiques.

II.2.2 Opérations sur les polynômes de Taylor

Soient f et g deux fonctions de classe C^n . Comment obtenir le polynôme de Taylor de $f + g$, de fg , de $\frac{f}{g}$, et cætera, à partir de ceux de f et g ? Commençons par démontrer l'unicité du polynôme de Taylor d'une fonction donnée en un point donné.

Théorème 1

Soit f de classe C^n sur I , et soit $x_0 \in I$. Supposons qu'il existe un polynôme P de degré au plus n et une fonction ε qui tend vers 0 en 0, tels que l'on ait.

$$f(x_0 + h) = P(h) + h^n \varepsilon(h) \quad (\text{II.19})$$

pour tout h tel que $x_0 + h \in I$. Alors P est le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 .

Théorème 2

Soient f et g deux fonctions de classe C^n sur I , et soit $x_0 \in I$. Soit P (resp. Q) le polynôme de Taylor de f (resp. g) à l'ordre n au point x_0 . Alors :

- (1) le polynôme de Taylor de $f + g$ à l'ordre n en x_0 est $P + Q$
- (2) le polynôme de Taylor de fg à l'ordre n en x_0 est PQ tronqué en degré n
- (3) si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^n au voisinage de x_0 et le polynôme de Taylor de $\frac{f}{g}$ est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n .

Quelques commentaires

1) PQ est un polynôme de degré au plus $2n$, son tronqué en degré n est le polynôme obtenu en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n . Dans la pratique, ce ne sera même pas la peine de calculer ces termes.

2) La division selon les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n est définie comme suit : si $Q(0) \neq 0$, alors il existe un unique couple (A, B) de polynômes tel que l'on ait :

$$P(X) = Q(X)A(X) + X^{n+1}B(X) \quad \text{avec } \deg(A) \leq n \quad (\text{II.20})$$

On dit que A est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n , et que B est le reste.

Cette division, contrairement à la division euclidienne des polynômes (que l'on appelle aussi division selon les puissances décroissantes), a pour effet d'augmenter le degré du reste, au lieu de le diminuer.

Ainsi, il n'y a pas une seule division selon les puissances croissantes, il y en a une pour chaque ordre n . Plus n augmente, plus le degré du quotient et du reste augmentent.

Théorème 3

Soient $f : I \rightarrow R$ et $g : J \rightarrow R$ deux fonctions de classe C^n telles que $f(I) \subseteq J$, et soit $x_0 \in I$. Soit P le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 , et soit Q le polynôme de Taylor de g à l'ordre n au point $f(x_0)$. Alors le polynôme de Taylor de $g \circ f$ à l'ordre n au point x_0 est le polynôme composé $Q \circ P$ tronqué en degré n . Si une fonction est paire (resp. impaire), alors son polynôme de Taylor d'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de x .

On peut dériver (ou intégrer) les polynômes de Taylor. Plus précisément, si f est de classe C^n alors f' est de classe C^{n-1} , et le polynôme de Taylor de f' à l'ordre $n-1$ au point x_0 s'obtient en dérivant le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en ce même point.

Le théorème de Taylor est enseigné dans des cours de calcul d'introduction et est l'un des principaux outils élémentaires de l'analyse mathématique. Il donne des formules arithmétiques simples pour calculer avec précision les valeurs de nombreuses fonctions transcendantes telles que la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques. Il est le point de départ de l'étude des fonctions analytiques et est fondamental dans divers domaines des mathématiques, ainsi qu'en analyse numérique et en physique mathématique. Le théorème de Taylor se généralise également aux fonctions multivariées et vectorielles.

Chapitre III

La méthode des transformées différentielles

III.1 Introduction

Des efforts considérables ont été entrepris ces dernières années pour obtenir les solutions analytiques des équations d'onde pour certains potentiels d'intérêt physique. Il y a relativement peu de problèmes de mécanique quantique pour lesquels les équations de Schrödinger linéaires et non linéaires sont exactement solubles [12,13, 14]. Jusqu'à présent, de nombreuses méthodes explicites, ont été développées pour résoudre les équations d'ondes linéaires et non linéaires. Certaines d'entre elle utilisent la transformation de Darboux, la transformation de Cole-Hopf, la méthode de Painlevé, la méthode d'équilibre homogène, la méthode de tanh, la méthode sinus-cosinus et ainsi de suite. Un grand nombre de schémas approximatifs et d'approches numériques sont également apparus pour calculer les quantités quantiques de l'équation de Schrödinger pour de nombreuses situations [15-18]. La portée de ce domaine reste jusqu'à présent un domaine plus actif de problèmes divers.

La méthode des transformées différentielle (MTD), est une méthode semi analytique, qui utilise les séries de Taylor pour les solutions des équations différentielle. La (MTD) est une procédure alternative pour obtenir la solution des équations différentielles données et est prometteuse pour diverses autres types d'équations différentielles. Avec cette méthode, il est possible d'obtenir des résultats très précis ou des solutions exactes pour les équations différentielles. Le concept de la méthode des transformées différentielle a été proposé par Zhou (1986), qui a résolu les problèmes linéaires et non linéaires dans l'analyse des circuits électriques.

La partie principale de cette étape sert à la construction de solutions spécifiques par la technique des transformées différentielles pour le problème de l'équation de Schrödinger. Plus précisément, le développement de Taylor est l'argument principal sur la construction de cette méthode (DTM). Des solutions exactes peuvent être obtenues par les formes connues des solutions en série tronquées. Les solutions de formes polynomiales peuvent être obtenues et sont vite comparées avec les solutions qui sont calculées avec d'autres approches.

III.2 Les Définitions de base du MTD

Quelques définitions et propriétés de la méthode des transformées différentielles en deux dimensions peuvent être trouvées dans les références, Zhou [19], Ayaz [20-21] et Kurnaz et al [22]. Les principaux ingrédients de la méthode sont résumés comme suit:

On note : $W(k, h)$ est la fonction transformée différentielle

$w(x, t)$ est la fonction transformée inverse différentielle.

Définition 1: La transformée différentielle bidimensionnelle de la fonction $W(k, h)$ est donnée par:

$$W(k, h) = \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=x_0, t=t_0} \quad (\text{III. 1})$$

où $w(x, t)$ est analytique et continue différenciée par rapport à x et t dans le domaine d'intérêt. On note que $w(x, t)$ représente la fonction originale.

Définition 2: La transformée inverse différentielle de $W(k, h)$ est donnée sous la forme de Taylor :

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=x_0, t=t_0} (x - x_0)^k (t - t_0)^h \quad (\text{III. 2})$$

Dans la plupart des cas (x_0, t_0) sont pris $(0, 0)$ et l'expression pratique de $w(x, t)$ est représentée par:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k t^h \quad (\text{III. 3})$$

Définition 3: On suppose que la convergence de la série de Taylor doit être satisfaite pour les deux valeurs particulières de n et de m comme:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m W(k, h) x^k t^h \quad (\text{III. 4})$$

La série est tronquée aux rangs n et m de sorte que $w(x, t)$ aura l'aspect polynomial.

Maintenant, laissez-nous énumérer certaines propriétés dans le tableau III.1, ce qui sera utile dans le développement ultérieur.

Tableau.III.1 : Quelques fonctions transformées avec les formes originales correspondantes

| Fonction originale $w(x, t)$ | Fonction transformée $W(k, h)$ |
|--|---|
| $u(x, t) \pm v(x, t)$ | $U(k, h) \pm V(k, h)$ |
| $\alpha u(x, t)$ | $\alpha U(k, h)$ |
| $\frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s}$ | $(k+1)(k+2) \dots (k+r)(h+1)(h+2) \dots (h+s)U(k+r, h+s)$ |
| $u(x, t)v(x, t)$ | $\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$ |
| $u(x, t)v(x, t)g(x, t)$ | $\sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^{k-n} \sum_{j=0}^h \sum_{l=0}^{h-j} U(n, h-j-1)V(m, j)G(k-n-m, l)$ |

III.3 Application à l'équation de Schrödinger linière

Dans cette section, la méthode avec l'équation de Schrödinger linière. une application en une dimension avec un problème linéaire qui peut être utile pour de nombreuses situations quantiques est introduite. Il est toujours nécessaire d'ajouter les conditions aux limites. Il est également nécessaire de spécifier certaines informations sur les conditions initiales pour déterminer les solutions ultérieurement.

Considérons l'équation de Schrödinger linéaire standard suivante:

$$w_t + \eta i w_{xx} = 0 \quad (\text{III.5})$$

où, les indices en w_t et w_{xx} désignent les dérivées partielles et $w(x, t)$ est une fonction suffisamment différentiable, avec la condition initiale $w(x, 0) = e^{iax}$. L'Eq. (III.5) fournit deux types de solutions selon les valeurs de $\eta = \pm 1$.

Utilisant la méthode de la transformée différentielle à l'Eq. (III. 5) avec son état initial, donne la relation suivante:

$$(h + 1)W(k, h + 1) + \eta i(k + 1)(k + 2)W(k + 2, h) = 0 \quad (\text{III. 6})$$

Réorganisons l'Eq.(III. 6) la relation de récurrence est obtenue :

$$W(k, h + 1) = \frac{-\eta i(k + 1)(k + 2)W(k + 2, h)}{(h + 1)} \quad (\text{III. 7})$$

Et en égalant la forme en série de Eq. (III. 3) avec la condition initiale, on obtient la condition initiale de la transformée différentielle:

$$W(k, 0) = \frac{(ia)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{III. 8})$$

En appliquant l'Eq. (III. 8) dans l'Eq. (III. 7) quelques valeurs essentielles de $W(k, h)$ sont obtenues par itération qui sont montrées dans le Tableau III. 2.

Tableau. III. 2 : Présente des valeurs de $W(k, h)$ pour $\eta = + 1$

| k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ |
|-----|-----|-----------------------|-----|-----|-----------------------|-----|-----|------------------------|
| 0 | 1 | ia^2 | 1 | 1 | $-a^3$ | 2 | 1 | $-\frac{ia^4}{2}$ |
| 0 | 2 | $-\frac{a^4}{2}$ | 1 | 2 | $-\frac{ia^5}{2}$ | 2 | 2 | $\frac{a^6}{4}$ |
| 0 | 3 | $-\frac{ia^6}{6}$ | 1 | 3 | $\frac{a^7}{6}$ | 2 | 3 | $\frac{ia^8}{12}$ |
| 0 | 4 | $\frac{a^8}{24}$ | 1 | 4 | $\frac{ia^9}{24}$ | 2 | 4 | $-\frac{a^{10}}{48}$ |
| 0 | 5 | $\frac{ia^{10}}{120}$ | 1 | 5 | $-\frac{a^{11}}{120}$ | 2 | 5 | $-\frac{ia^{12}}{240}$ |

| k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ |
|-----|-----|------------------------|-----|-----|------------------------|-----|-----|-------------------------|
| 3 | 1 | $\frac{a^5}{6}$ | 4 | 1 | $\frac{ia^6}{24}$ | 5 | 1 | $-\frac{a^7}{120}$ |
| 3 | 2 | $\frac{ia^7}{12}$ | 4 | 2 | $-\frac{a^8}{48}$ | 5 | 2 | $-\frac{ia^9}{240}$ |
| 3 | 3 | $-\frac{a^9}{36}$ | 4 | 3 | $-\frac{ia^{10}}{144}$ | 5 | 3 | $\frac{a^{11}}{720}$ |
| 3 | 4 | $-\frac{ia^{11}}{144}$ | 4 | 4 | $\frac{a^{12}}{576}$ | 5 | 4 | $\frac{ia^{13}}{2880}$ |
| 3 | 5 | $\frac{a^{13}}{720}$ | 4 | 5 | $\frac{ia^{14}}{2880}$ | 5 | 5 | $-\frac{a^{15}}{14400}$ |

Par conséquent, en remplaçant toutes les valeurs de $W(k, h)$ dans l'Eq. (III. 4) et en combinant les facteurs communs

$$C = (1 + iax - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{ia^3}{6}x^3 + \frac{a^4}{24}x^4 + \frac{ia^5}{120}x^5 + \dots)$$

pour les éléments ayant la même puissance de t , l'expression de $w(x, t)$ donne:

$$w(x, t) = C + Cia^2t + C\frac{1}{2}(ia^2)^2t^2 + C\frac{1}{6}(ia^2)^3t^3 + C\frac{1}{24}(ia^2)^4t^4 + C\frac{1}{120}(ia^2)^5t^5 + \dots \quad (\text{III. 9})$$

Et ainsi de suite, le reste des composantes $W(k, h)$ de l'itération Eq. (III. 7) ont également été obtenus en utilisant le package Mathematica.

Par conséquent, la solution $w(x, t)$ est écrite sous forme de polynôme après quelques manipulations:

$$w(x, t) = C \left[1 + (ia^2)t + \frac{(ia^2)^2}{2}t^2 + \frac{(ia^2)^3}{6}t^3 + \frac{(ia^2)^4}{24}t^4 + \frac{(ia^2)^5}{120}t^5 + \dots \right] \quad (\text{III. 10})$$

Les formes exactes de C et le terme en accolades sont identifiées comme les développements de série de Taylor de e^{iax} et e^{ia^2t} , respectivement. Alors la solution globale est facilement trouvée pour être $w_{+1}(x, t) = e^{ia(x+at)}$ (l'indice dans w se réfère à $\eta = +1$) qui est le résultat exact. De façon similaire, les valeurs de $W(k, h)$ dans le cas $\eta = -1$ sont listées dans le tableau III. 3.

Tableau. III. 3 : Les valeurs de $W(k, h)$ pour $\eta = -1$

| | | | | | | | | |
|-----|-----|------------------------|-----|-----|-------------------------|-----|-----|------------------------|
| k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ |
| 0 | 1 | ia^2 | 1 | 1 | a^3 | 2 | 1 | $\frac{ia^4}{2}$ |
| 0 | 2 | $-\frac{a^4}{2}$ | 1 | 2 | $-\frac{ia^5}{2}$ | 2 | 2 | $\frac{a^6}{4}$ |
| 0 | 3 | $\frac{ia^6}{6}$ | 1 | 3 | $-\frac{a^7}{6}$ | 2 | 3 | $-\frac{ia^8}{12}$ |
| 0 | 4 | $\frac{a^8}{24}$ | 1 | 4 | $\frac{ia^9}{24}$ | 2 | 4 | $-\frac{a^{10}}{48}$ |
| 0 | 5 | $-\frac{ia^{10}}{120}$ | 1 | 5 | $\frac{a^{11}}{120}$ | 2 | 5 | $\frac{ia^{12}}{240}$ |
| k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ | k | h | $W(k, h)$ |
| 3 | 1 | $-\frac{a^5}{6}$ | 4 | 1 | $-\frac{ia^6}{24}$ | 5 | 1 | $\frac{a^7}{120}$ |
| 3 | 2 | $\frac{ia^7}{12}$ | 4 | 2 | $-\frac{a^8}{48}$ | 5 | 2 | $-\frac{ia^9}{240}$ |
| 3 | 3 | $\frac{a^9}{36}$ | 4 | 3 | $\frac{ia^{10}}{144}$ | 5 | 3 | $-\frac{a^{11}}{720}$ |
| 3 | 4 | $-\frac{ia^{11}}{144}$ | 4 | 4 | $\frac{a^{12}}{576}$ | 5 | 4 | $\frac{ia^{13}}{2880}$ |
| 3 | 5 | $-\frac{a^{13}}{720}$ | 4 | 5 | $-\frac{ia^{14}}{2880}$ | 5 | 5 | $\frac{a^{15}}{14400}$ |

Il est clair que dans le cas présent, il n'est pas nécessaire de recalculer la solution pour $\eta = -1$, car tous les éléments $W_{-1}(k, h)$ d'un h particulier sont simplement déduits de $W_{+1}(k, h)$ multiplié par $(-1)^h$. Par conséquent, la solution de série de puissance formelle de $w_{-1}(x, t)$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
 w_{-1}(x, t) &= \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m W_{-1}(k, h) x^k t^h \\
 w_{-1}(x, t) &= \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m W_{+1}(k, h) (-1)^h x^k t^h & \text{(III. 11)} \\
 &= w_{+1}(x, -t) \\
 &= e^{ia(x-at)}
 \end{aligned}$$

III-4 Conclusion

En utilisant quelques exemples explicatifs, il devrait être noté que cette méthode est une méthode qui fournit des solutions exactes et directes pour les équations de Schrödinger linéaires. Pour cette étude, deux expressions exactes de solutions pour le cas linéaire sont obtenues avec la séquence itérée.

Conclusion générale

Nous avons étudié dans ce travail, La méthode des transformées différentielles. Nous sommes arrivés aux résultats corrects produits par l'image quantique dans le cadre de l'introduction de l'équation de Schrödinger. les résultat obtenues sont exactes.

Comme résultat, des solutions exactes sont obtenues avec les modèles cités qui sont utiles en physique mathématique. Il a été démontré que la méthode des transformées différentielles fonctionne bien et peut constituer un excellent outil pour explorer des solutions dans un environnement quantique.

Les résultats ont été comparés à d'autres approches. Pour un travail futur, il est important d'étudier les solutions globales lorsque les conditions initiales symboliques sont exprimées par d'autres formes alternatives plus complexes. Un développement important doit être fourni dans ce sens afin de produire les solutions appropriées.

Bibliographie

- [1] C.C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe-Mecanique Quantique-T1 et T2- Hermann, Paris, Novell édition revue, corrigée et augmentée 1977.
- [2] M. Born, The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics nobel Lecture, December 11, 1954
- [3] S. Menouaer, thèse de doctorat, (Université de Sétif, 2009).
- [4] E. Schrödinger, "The non relativistic équation of the de Broglie waves," Ann. Physis 79(1926)361-376
- [5] E. Schrödinger , Naturwissenschaften 14 (1926) 664
- [6] L. Krache, Thèse de Doctorat, (Université de Sétif, 2010).
- [7] Gérald Goldstein, Université Libre de Bruxelles Faculté des Sciences Appliqués Année académique 2002-2003
- [8] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 2 : Analyse, Bordas, 1977
- [9] Claude Deschamps et André Warusfel, J'intègre : Mathématiques première année, Dunod, 1999
- [10] Joseph-Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies (1797),
- [11] Formules de Taylor [archive], cours de Jean-François Burnol.
- [12] F. Iachello, Nucl. Phys A 1993;560:23.
- [13] Selg M. Numerically complemented analytic method for solving the time-independent one-dimensional Schrödinger equation. Phys Rev E 2001;64(5):056701.
- [14] Varshni Y P 1990 Phys. Rev. A 41 4682.
- [15] Bose S K, 1994 IL NUOVO CIMENTO B 109 1217.
- [16] Child M S, Dong S H and Wang X G 2000 J. Phys. A: Math. Gen. 33 5653.
- [17] Exton H 1995 J. Phys. A: Math. Gen. 28 6739.
- [18] Alomari A K, Noorani M S M and Nazar R 2009 Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 14 1196.
- [19] Zhou, J.K., 1986, Huazhong University Press, Wuhan, China.
- [20] Ayaz, F., 2003, Applied Math. Comput., 143: 361-374.

[21] Ayaz, F., 2004, Applied Math. Comput., 147: 547-567.

[22] Kurnaz, A., G. Oturanc and M.E. Kiris, 2005, Int. J. Comput. Math., 82: 369-380.

المخلص

في هذا العمل ، استخدمنا طريقة التحويل التفاضلي في معالجة النماذج الفيزيائية الخطية، من خلال طريقة التحويل التفاضلي ، تم التحقق من بعض الحلول الموجية الدقيقة والتقريبية لمعادلات شرودنجر الخطية. النتائج المتحصل عليها في هذا العمل كانت جد مرضية.

Abstract

In This work, we use the Differential Transform Method in the treatment of the linear physical models, through differential transform method, some exact and approximate traveling wave solutions of linear Schrödinger equations are investigated. Results very satisfactory were obtained for this work.

Résumé

Dans ce travail, nous avons utilisé le développement des transformées différentielles dans le traitement des modèles physiques linéaires, Avec cette méthode, certaines solutions d'onde exactes et approximatives pour l'équation de Schrödinger linéaires sont étudiées. Des résultats très satisfaisant ont été obtenus pour ce travail.