



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la vie
Département des sciences de la matière

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences de la matière
Physique
Physique énergétique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
Souri Mebarka

Le : 20-9-2020

Ondes Gravitationnelles et Trous Noirs

Jury :

Laznek Samira	MCB	Université de Med-Khider-Biskra	Président
Aliane Idir	MCB	Université de Med-Khider-Biskra	Encadreur
Boudhib Laila	MCB	Université de Med-Khider-Biskra	Examineur

Année universitaire : 2019/2020

Résumé

Ce mémoire contient une exposition des bases de la relativité générale jusqu'à l'étude des ondes gravitationnelles émises par des systèmes binaires de trous noirs. Le but est donc d'appliquer cette théorie pour comprendre les systèmes binaires de trous noirs, comment ils génèrent des ondes gravitationnelles et l'énergie qu'ils perdent suite à cette radiation. Un tel binaire de trous noirs est la configuration précise qui a produit les ondes gravitationnelles détectées par les observatoires jumeaux LIGO aux États-Unis ces dernières années, ce qui prouve encore une fois la puissance de la théorie de la relativité générale. Ce sujet est donc très prometteur en raison de ses implications dans l'avenir de l'astronomie et de la cosmologie en tant que nouvelle méthode pour obtenir des informations sur notre univers.

Mots-clés : relativité générale, ondes gravitationnelles, trous noirs, systèmes binaires.

Abstract

This dissertation contains an exposition of the basics of General Relativity up to the study of Gravitational Waves emitted by black Hol binary systems. The goal is then to apply this theory to understand binary systems, how they generate gravitational waves and the energy they lose in doing so. Such a black hole binary is the precise configuration that produced the gravitational waves detected by the twin LIGO observatories in the United States just these last years: the first direct detection of gravitational waves, proving once again the power of general relativity theory. This topic is then very promising because of its implications in the future of astronomy and cosmology as a new method to obtain information about our universe.

Keywords : General relativity, gravitational waves, black holes, binary systems.

Remerciements

D'abord et avant tout je remercie Allah (Soit-il exalté), sans Lui ce mémoire n'aurait pas vu le jour.

Je tiens à exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé à obtenir mon diplôme de master.

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à mon superviseur, le Prof. Dr. Aliane Idir pour ses conseils, suggestions, encouragements et perspicacité au cours de ce travail de mémoire.

Je remercie aussi les membres du jury qui ont accepté de juger la valeur de mon travail.

Enfin, je suis redevable à ma famille pour leur soutien moral et financier, l'encouragement et l'amour tout au long du temps passé pour obtenir mon diplôme.

Table des Matières

1	Introduction	9
2	Relativité Générale et Equations d'Einstein	11
2.1	Relativité Générale	11
2.2	Equations d'Einstein du champ de gravitation	15
3	Ondes Gravitationnelles: Théorie d'Einstein linéarisée	17
3.1	Gravité linéarisée	18
3.1.1	Transformation de jauge	19
3.1.2	La jauge transverse et sans trace	21
3.1.3	Interaction des ondes gravitationnelles avec un masse test	24
4	Trous noirs	29
4.1	Métrie de Schwarzschild	29
4.2	Métrie de Kerr	31
5	Rayonnement des OG par fusion d'un binaire de trous noirs	33
5.1	Systèmes binaires compacts coalescents	33
5.2	Émission d'ondes gravitationnelles	34
5.2.1	Formule du quadrupôle	34
5.3	Énergie contenue dans une OG	38
5.4	OG émise par un binaire de trous noirs en orbite circulaire	43
5.4.1	La forme d'onde émise	49
5.4.2	Pulsar de Hulse et Taylor	50
5.4.3	Observation d'une fusion de trou noir par le détecteur LIGO	51
5.5	Coalescences de binaires de trous noirs	55

6 Conclusion générale	58
bibliographie	59

Liste des figures

3.1	Modes de polarisation des ondes gravitationnelles h_+ et h_\times se propageant dans la direction z	24
3.2	Déformation d'une distribution de masses libres réparties sur un anneau sous l'effet des polarisations h_+ et h_\times d'une onde gravitationnelle.	28
5.1	Schéma d'un système binaire de trous noirs avec des orbites circulaires et des masses inégales (à gauche), égales (à droite).	45
5.2	Plus de 30 ans de mesures du système binaire pulsar PSR 1913 + 16. Le décalage dans le périastre (position de l'approche la plus proche de l'étoile compagnon) est tracé sur l'axe vertical. Cette chemise correspond au rétrécissement de l'orbite lorsque les étoiles à neutrons s'enroulent vers l'intérieur, perdant leur énergie orbitale dans l'émission d'ondes gravitationnelles. Combien d'ondes gravitationnelles peuvent être prédites à partir de la relativité (comme nous l'avons fait dans l'exemple simplifié des binaires circulaires) - la prédiction décrit précisément les données observées à 0,2 % près [39].	51

5.3	Schéma de fonctionnement des détecteurs interférométriques terrestres d'ondes gravitationnelles. Une source laser émet une lumière cohérente, qui passe à travers un séparateur de faisceau et est envoyée dans les deux bras détecteurs de longueur égale. La lumière est reflétée d'avant en arrière plusieurs fois, augmentant la précision de l'interféromètre sans avoir besoin de bras trop longs. Une fois que les photons des deux bras se sont recombinaés pour atteindre le photorécepteur, un motif d'interférence apparaît en conséquence. L'empreinte d'une onde traversant le plan détecteur est laissée sur ce motif d'interférence, dont on peut extraire l'amplitude et l'évolution en fréquence de l'onde gravitationnelle et donc de sa source. Crédits photo: la collaboration LIGO [20].	52
5.4	(A gauche) Graphique de la forme d'onde binaire du trou noir en fonction du temps, ainsi que de la séparation du trou noir et de la vitesse relative, le tout calculé à partir de notre approximation du mouvement lent de la théorie linéarisée de la RG. (A droite) Simulations informatiques résolvant numériquement les équations d'Einstein pour la forme d'onde des trous noirs binaires coalescents [40]. Notez les valeurs des vitesses, en particulier juste avant la fusion (ainsi que la forme de la forme d'onde). Ici, il devient clair que notre approximation commence à s'effondrer. [40].	54
5.5	Observation de la tension sur les bras de l'interféromètre due aux ondes gravitationnelles [40].	55
5.6	Étapes de la coalescence de deux trous noirs esquissées avec le signal de forme d'onde théoriquement prédit [41].	57

Chapitre 1

Introduction

La gravité est l'une des quatre forces fondamentales de la physique et est la plus faible d'entre elles. Elle est responsable de la formation de notre univers, des planètes qui tournent autour du soleil, des étoiles qui se déplacent autour du centre de notre galaxie.

Notre compréhension actuelle de cette force est basée sur la théorie de la relativité générale (RG), développée par Albert Einstein en 1915, qui généralise la mécanique newtonienne et la relativité restreinte. Dans cette théorie géométrique de la gravité, la gravitation n'est plus une force : c'est juste la déformation géométrique que le contenu en matière ou énergie impose au continuum (le tissu) de l'espace-temps à quatre dimensions, le faisant courber et se plier. Ainsi, une grande concentration de masse telle une étoile, une galaxie ou un amas de galaxies déforme l'espace-temps autour et affecte le trajet des rayons lumineux provenant d'une source éloignée passant à proximité.

Les équations de la relativité générale induisaient l'existence théorique d'une des classes d'objets les plus fascinantes de l'univers: les ondes gravitationnelles (OG) [1, 2] détectées cent ans plus tard et les trous noirs, deux phénomènes inconnus et inobservables en 1916. Ces ondes sont des perturbations de l'espace-temps lui-même, produites par des masses accélérées, qui déforment le tissu de l'espace-temps à proximité. Ces distorsions se propagent loin de la source à la vitesse de la lumière. Les trous noirs sont des régions de l'espace-temps déconnectées causalement, avec un champ gravitationnel si fort que rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper. Les trous noirs ne sont pas seulement un point singulier dans l'espace-temps mais couvrent une région étendue qui est délimitée par l'horizon des événements. A

l'intérieur de cet horizon, la singularité de l'espace-temps est cachée et à partir d'aujourd'hui les lois qui décrivent la physique au-delà de la singularité sont encore inconnues.

L'existence des ondes gravitationnelles a été confirmée indirectement, et ce à plusieurs reprises, par la mesure de leurs effets sur la dynamique des systèmes binaires. Comme pour tous les objets massifs, les trous noirs binaires tournent les uns autour des autres en raison de leur attraction gravitationnelle mutuelle. Contrairement à un système à deux corps newtonien conservateur, le système binaire de trous noirs a un quadripôle dynamique et un moment de masse d'ordre supérieur, qui se traduit par un rayonnement d'OG. Lorsque le système produit une OG, il perd de l'énergie de sorte que les deux trous noirs se rapprochent jusqu'à ce qu'ils finissent par fusionner en un seul trou noir.

Le présent travail vise à étudier certains aspects de la structure des ondes gravitationnelles émises par de binaires en orbite, tels que deux trous noirs en orbite. Plus concrètement, il vise à fournir un aperçu des sources d'ondes gravitationnelles et une introduction à l'interprétation des données réelles des détecteurs d'OG observé par la collaboration LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

La structure de ce mémoire de master est la suivante. Dans le chapitre 2, nous introduisons la relativité générale en présentant les outils mathématiques nécessaires pour formaliser le traitement de la gravitation en tant que géométrie. Le chapitre 3 décrit comment les ondes gravitationnelles proviennent des équations linéarisées du champ d'Einstein et passe en revue leurs propriétés de base et leurs effets sur les objets qui passent tout autour. Le chapitre 4 est une revue globale des trous noirs. Dans le chapitre 5, qui est basé principalement sur la publication [3], nous appliquons les résultats du chapitre 3 à un système binaire simple de trous noirs en orbite l'un autour de l'autre, en calculant son temps de coalescence, ainsi que plusieurs caractéristiques importantes du rayonnement gravitationnel. À savoir, nous allons découvrir la formule quadripolaire décrivant l'énergie contenue dans les ondes gravitationnelles émises par ce système binaire. Enfin, le chapitre 6 se termine par quelques mots sur les impacts des ondes gravitationnelles et leur détection sur les recherches futures en astronomie et cosmologie et discute des perspectives pour les mesures futures.

Chapitre 2

Relativité Générale et Equations d'Einstein

Dans ce chapitre, nous passons en revue la formulation géométrique de la théorie générale de la relativité ainsi que certains concepts et aspects fondamentaux qui sont pertinents pour ce mémoire. Il suppose une connaissance préalable de la relativité générale dont une introduction détaillée de ce chapitre avec un traitement mathématique complet peut être trouvé par exemple dans [4]. Pour une description complète du sujet, nous renvoyons le lecteur aux manuels par [13, 8, 15]

2.1 Relativité Générale

La relativité générale est une théorie géométrique qui repose sur le concept d'espace-temps. Mathématiquement, l'espace-temps est une variété semi-riemannienne différentiable à quatre dimensions M avec une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, la métrique lorentzienne g . La métrique est utilisée pour mesurer la distance (invariante de Lorentz) entre deux points $p_1, p_2 \in M$. Dans la théorie d'Einstein de la relativité restreinte, cette distance, ou l'intervalle espace-temps (élément de longueur

invariant) entre ces deux points voisins, est donnée par¹

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.2)$$

où dx^μ dénote des différences de coordonnées infinitésimales et les indices grecs dénotent des indices d'espace-temps à quatre dimensions des coordonnées locales, comme

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \quad (2.3)$$

Le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique plate du fait qu'elle décrit l'espace-temps plat de Minkowski (vide de masse) [9] :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Dans le cas le plus général, c'est-à-dire le cas de l'espace courbe, l'intervalle espace-temps s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.5)$$

où $g_{\mu\nu}(x)$ est le tenseur métrique de l'espace-temps courbe qui est un tenseur symétrique avec au plus dix composantes indépendantes qui sont des fonctions des coordonnées de l'espace-temps x^μ . L'élément de longueur doit être invariant sous les transformations de coordonnées, on peut l'écrire comme

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu , \quad (2.6)$$

¹Ici la règle de sommation d'Einstein

$$A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu \quad (2.1)$$

est utilisée.

ce qui implique que la métrique se transforme en

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\mu\nu}(x'). \quad (2.7)$$

La présence de champs gravitationnels est entièrement codé dans le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$. S'il n'y a pas de champs gravitationnels, la métrique correspond à $\eta^{\mu\nu}$, et nous récupérons *l'espace de Minkowski* plat, l'espace-temps de la relativité restreinte.

La mesure géométrique de la présence de champs gravitationnels est la courbure. Une façon naturelle de définir la courbure est en termes de transport parallèle. Dans un espace plat, un vecteur transporté le long d'une courbe fermée ne change pas de direction. Dans un espace courbe cependant, ce n'est plus nécessairement vrai. Pour définir le transport parallèle dans un espace courbe, nous devons définir des dérivées covariantes qui agissent sur les vecteurs V^α comme

$$\nabla_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} V^\nu, \quad (2.8)$$

où $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont les symboles Christoffel de la connexion de Levi-Civita qui peuvent s'écrire comme

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.9)$$

où nous introduisons la notation des dérivées partielles

$$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial ct, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3) \quad (2.10)$$

La notion habituelle de «force gravitationnelle» disparaît dans la relativité générale, remplacée à la place par l'idée que les corps tombant librement suivent les géodésiques dans l'espace-temps. Étant donné une métrique d'espace-temps $g^{\mu\nu}$ et un ensemble de coordonnées spatio-temporelles x^μ , les trajectoires géodésiques sont données par l'équation

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \quad (2.11)$$

où τ est le temps propre tel que mesuré par un observateur voyageant le long de la géodésique.

Le tenseur de Riemann [16] est donné par

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho} \quad (2.12)$$

Il contient des informations sur la courbure (déformation) de l'espace-temps. Les composants du tenseur de Riemann satisfont l'identité de Bianchi suivante,

$$\nabla_\tau R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} + \nabla_\sigma R^\mu{}_{\nu\tau\rho} = 0. \quad (2.13)$$

Le tenseur de Ricci [10] est la contraction du tenseur de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (2.14)$$

tandis que le scalaire de Ricci (courbure scalaire) est la contraction des indices restants du tenseur de Ricci, et est donné par

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Il assigne à chaque point de l'espace-temps un simple nombre réel caractérisant la courbure intrinsèque en ce point.

Enfin, nous utilisons l'identité Bianchi (2.13) et contractons cette expression entière deux fois (c'est-à-dire que nous multiplions par $g^{\nu\mu} g^{\sigma\lambda}$) on

$$\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - 1/2 R g_{\mu\nu}) = 0, \quad (2.16)$$

ce qui nous permet de définir le tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 R g_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Le tenseur d'Einstein est conservé de façon covariante,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

il s'agit d'une relation purement géométrique qui découle de la contraction de l'identité Bianchi satisfaite par le tenseur de Riemann.

2.2 Equations d'Einstein du champ de gravitation

Les équations d'Einstein sont la base de la Relativité Générale. Elles établissent le lien profond entre le contenu en matière (masses et énergie) de l'Univers d'une part et sa géométrie (géométrie de l'Espace-Temps), l'une des conséquences les plus importantes de la théorie générale de la relativité publiée par Albert Einstein[5],[6].

L'idée centrale derrière la relativité générale peut être résumée sous la forme schématique suivante:

la matière dit à l'Espace-Temps comment se courber \Leftrightarrow l'Espace-Temps courbé dit à la matière comment se mouvoir

Les équations du champ d'Einstein [11] peuvent être énoncées plus précisément comme

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

construit à partir du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et le scalaire de Ricci R , $T_{\mu\nu}$ denote le tenseur énergie-impulsion représentant la répartition de masse et d'énergie présent dans l'espace-temps (terme source). Il décrit des propriétés géométriques de l'espace-temps. Le facteur $8\pi G/c^4$ est nécessaire pour retrouver la limite newtonienne (soit l'équation de Poisson) lorsque le champ gravitationnel devient faible². La constante G est la constante de Newton et c est la vitesse de la lumière. Les équation (2.20) sont non linéaires et du second ordre en $g_{\mu\nu}$ qui décrivent l'évolution dynamique de cette métrique $g_{\mu\nu}$, déformation et flexion de l'espace-temps en fonction des changements dynamiques des champs de matière représentés par $T_{\mu\nu}$.

Cependant, à cause de son caractère non linéaire, l'équation d'Einstein (2.20) est très difficiles à résoudre. Des techniques d'approximation et de simplifications sont utilisées pour aboutir à une solution, le cas pour le calcul des équations d'ondes gravitationnelles. C'est l'objet du chapitre 3 où l'on se place dans l'hypothèse de champ faible, où l'on peut obtenir de l'équation d'Einstein des solutions qui forment

²Notons que L'équation (2.20) est la version relativiste de l'équation de Poisson : $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$

des ondes gravitationnelles³.

³Il faut noter que des solutions exactes aux équations d'Einstein ont pu être trouvées dans certains cas particuliers où de fortes symétries interviennent: par exemple les solutions exprimant la structure géométrique d'un trou noir isolé (métriques de Schwarzschild, de Kerr), ou encore celles exprimant la structure géométrique d'un univers homogène et isotrope (métriques de Friedmann-Lemaître).

Chapitre 3

Ondes Gravitationnelles: Théorie d'Einstein linéarisée

L'une des prédictions les plus fascinantes de la théorie d'Einstein de la relativité générale est l'existence d'OG [12]. Tout comme les équations de Maxwell en électrodynamique prédisaient des solutions d'ondes¹, il en est de même pour les équations de champ d'Einstein qui prédisent GWs comme de petites perturbations de l'espace-temps produites par une distribution de masse-énergie accélérée, qui se propagent sous forme d'ondes loin de leur source à la vitesse de la lumière.

Ce n'est que 100 ans après les travaux d'Einstein que la première détection directe d'OG fut faite dans les données des détecteurs LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) en 2015, mettant fin définitivement toutes les controverses sur leur existence.

La gravitation linéarisée est la manière la plus simple de dériver l'existence des GWs. Dans ce chapitre, nous résumerons brièvement la dérivation et les principales propriétés des GW, car elles sont au centre de ce mémoire, mais nous pouvons diriger le lecteur intéressé vers [13, 14, 15] pour un traitement plus complet du sujet.

¹Le remplacement de la théorie de l'électrostatique par la théorie de l'électrodynamique à conduit vers l'émergence des ondes électromagnétiques qui sont produites par des mouvements de charge.

3.1 Gravité linéarisée

Les OG sont des perturbations de la métrique de la de géométrie de l'Espace-temps par rapport à une métrique d'une géométrie de référence qui est celle d'un espace-temps quasiment vide.

Dans cette perspective, on considère un un Espace-Temps « plat » de Minkowski mené de la métrique $\eta_{\mu\nu}$ avec une perturbation $h_{\mu\nu}$ de faible amplitude, i.e $|\eta_{\mu\nu}| \ll 1$. On peut donc écrire

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

En utilisant la définition de $g_{\nu\sigma}g^{\sigma\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ on peut trouver la métrique inverse :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} . \quad (3.2)$$

Pour calculer les équations de champ linéarisées, nous évaluons le tenseur d'Einstein à un ordre linéaire, i.e. négliger les termes de l'ordre de $\mathcal{O}(|h_{\mu\nu}|^2)$. Rappelons que dans cette approximation, nous augmentons et diminuons les indices avec la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$ au lieu de $g_{\mu\nu}$.

Les symboles Christoffel linéarisés se simplifient pour:

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\rho}^{\sigma}(\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\mu\nu}) \quad (3.3)$$

tandis que le tenseur de Riemann linéarisé devient

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\partial_{\rho}h_{\mu\sigma} + \partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\nu\rho} - \partial_{\mu}\partial_{\rho}h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\mu\rho}) \quad (3.4)$$

En contractant le tenseur de Riemann linéarisé on obtient alors le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(\partial^{\rho}\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial^{\rho}\partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h) . \quad (3.5)$$

De même, en Contractant $R_{\mu\nu}$ with $\eta^{\mu\nu}$, la courbure scalaire est obtenue comme

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \partial^{\mu}\partial^{\nu}h_{\mu\nu} - \square h \quad (3.6)$$

où $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$ est l'opérateur D'Alambertian et h est la trace du tenseur

$h^{\mu\nu}$:

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

On obtient enfin le tenseur d'Einstein, qui donne au premier ordre:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\eta_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\lambda h^{\sigma\lambda} - \eta_{\mu\nu} \square h \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cette expression peut être simplifiée via l'introduction de la métrique à trace inversée² $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

ou

$$h_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

Si maintenant nous substituons (3.10) dans l'Eq.(3.8), tous les termes contenant la trace h disparaissent, ce qui donne

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Ce sont les *équations d'Einstein linéarisées*.

3.1.1 Transformation de jauge

La liberté de jauge en RG correspond à l'invariance sous transformations de coordonnées. Appliquée à l'approximation linéaire, elle implique que deux perturbations $h_{\mu\nu}$ et $h'_{\mu\nu}$ représentent la même perturbation physique si elles ne diffèrent pas sous une transformation de coordonnées infinitésimale.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (3.12)$$

²Le fait que $\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h$ explique pourquoi $h_{\mu\nu}$ est appelée perturbation métrique à trace inversée.

où ξ^μ est le générateur de la transformation de jauge.

L'application de la loi de transformation générale (2.7) des tenseurs sous le changement des coordonnées à la métrique de perturbation conduit à

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu). \quad (3.13)$$

En appliquant la transformation de jauge à la métrique à trace inversée de l'Eq.(3.9), nous constatons qu'il se transforme comme

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho. \quad (3.14)$$

La défférentiation de l'Eq.(3.14) par rapport à ∂^ν on trouve

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu}) = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu. \quad (3.15)$$

Le choix du paramètre de jauge ξ_μ tel qu'il satisfait

$$\square \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

mène à la *condition de jauge de Lorenz* [17] (aussi dénotée jauge harmonique ou jauge de de Donder [18, 19] dans la littérature) qui est une contrainte de divergence nulle:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.17)$$

Dans cette jauge particulière, quatre conditions sont imposées au tenseur symétrique $\bar{h}_{\mu\nu}$, ce qui signifie que ses 10 composantes indépendantes initiales sont réduites à six et les équations d'Einstein linéarisées (3.11) prennent la forme suivante:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Nous constatons que dans la jauge de Lorenz, les équations de champ linéarisées se sont réduites à de simples équations d'onde pour chaque composante de la métrique de perturbation à trace inversée, où le tenseur énergie-impulsion agit comme terme source. Equation (3.18) est l'équation de base permettant d'étudier les OG dans le

contexte d'un champ gravitationnel linéarisé. En fait, les métriques de perturbation sont des ondes, ou des ondulations dans l'espace-temps, et si la matière est présente, elle peut générer des ondes.

Notons que l'Eq (3.18) est similaire à l'équation de Maxwell en électromagnétisme :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A}_\mu = 4\pi \vec{J}_\mu. \quad (3.19)$$

où \vec{J}_μ est la densité de courant.

3.1.2 La jauge transverse et sans trace

Afin d'exploiter pleinement la liberté de jauge et d'étudier la propagation des OG et leur interaction avec les masses d'essai, nous considérons que ces ondes $\bar{h}_{\mu\nu}$ sont déjà générées et loin de la source, c'est-à-dire: $T_{\mu\nu} = 0$. Ainsi l'Eq (3.18) se simplifie en une équation d'onde homogène

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.20)$$

qui admet, tout comme dans l'électromagnétisme, une classe de solutions homogènes qui sont des superpositions d'ondes planes monochromatiques

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \int d^3\vec{k} A_{\mu\nu}(\vec{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (3.21)$$

Cela implique que toute solution de (3.20), qui est une OG, se propage à la vitesse de la lumière³

Dans le cas du vide, la condition de jauge de Lorenz (3.17) seule n'est pas suffisante pour fixer complètement la liberté de jauge. Un certain changement de jauge, qui correspond à la jauge TT (pour Transverse Traceless), permet encore de simplifier le problème et de se ramener à une description minimale (deux composantes indépendantes).

³En injectant la solution (3.21) dans (3.20) on obtient directement $k^2 = 0$ qui traduit le fait que le vecteur d'onde $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ est du genre lumière et que les OGs se propagent à la vitesse de la lumière.

En fait, on peut choisir les composantes de ξ^μ telles que

$$\square\xi = 0. \quad (3.22)$$

Ce sont quatre contraintes supplémentaires que nous pouvons définir librement. Le premier sera le choix de ξ^0 tel que la trace de la métrique de perturbation soit nulle, $h \equiv h^i_i = 0$. Dans ce cas, de (3.9) on peut facilement voir que $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$. Par conséquent, dans ce qui suit, nous désignerons la forme d'onde par $h_{\mu\nu}$. Les trois prochaines contraintes que nous allons mettre sont le choix des composantes ξ^i , de sorte que $h_{0i} = 0$. Appliqué sur (3.17), nous pouvons réduire la jauge de Lorenz pour $\mu = 0$ à $\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = \partial^0 h_{00} = 0$. Cela signifie que la composante h_{00} est constante dans le temps, que nous la fixerons à $h_{00} = 0$. Par conséquent la métrique de perturbation est purement spatiale $\bar{h}_{00} = \bar{h}_{0i} = 0$ et sans trace $h \equiv h^i_i = 0$, et la condition de jauge de Lorenz en passant par l'exploitation des degrés de liberté de jauge, devient un ensemble de conditions suivantes:

$$h^{0\nu} = 0, \quad \text{transverse (seules les composantes spatiales } \neq 0). \quad (3.23)$$

$$h^i_i = 0, \quad \text{sans trace} \quad (3.24)$$

$$\partial^j h_{ij} = 0, \quad \text{divergence nulle} \quad (3.25)$$

Cet ensemble de conditions définit la *jauge transverse sans trace* (jauge TT), la jauge la plus pratique pour exprimer les ondes gravitationnelles à l'extérieur de la source⁴.

Notez que les 10 composantes indépendantes initiales, réduites à six avec la jauge Lorenz, ont maintenant été encore réduites dans la jauge TT à travers quatre autres conditions, et nous nous retrouvons donc avec seulement deux degrés de liberté. De plus, notez que la jauge TT ne peut être choisie qu'en dehors de la source $T_{\mu\nu} = 0$, car à l'intérieur $\square h_{\mu\nu} \neq 0$ et seule la jauge de Lorenz peut être prise.

Considérons maintenant une OG qui se propage le long de l'axe z . Comme il n'y a aucun changement parallèlement à la direction de propagation, le changement de la métrique porte uniquement sur les coordonnées x et y . Cela signifie que la métrique de perturbation n'aura que des changements avec des indices de x et y , ou

⁴La condition (3.25) entraîne que $k^\mu A_{\mu\nu} = 0$ et que les OGs sont transverse, d'où le nom transverse

où μ et ν sont égaux à 1 ou 2. La métrique la perturbation $h_{\mu\nu}$ prend alors la forme

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Et puisque nous travaillons dans la jauge TT, la trace de la matrice doit être nulle, i.e. $h_{xx} + h_{yy} = 0$, ce qui nous conduit à $h_{xx} = -h_{yy}$. Comme le tenseur $g_{\mu\nu}$ est symétrique, alors $h_{\mu\nu}$ est également symétrique, i.e. $h_{xy} = h_{yx}$. Par conséquent, dans la jauge TT, la perturbation métrique qui sera écrite comme $h_{\mu\nu}^{TT}$, son amplitude prend la forme suivante :

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Dans la jauge TT, l'expression générale de la métrique de perturbation dans le cas d'une onde plane se propageant suivant la direction z , prend la forme finale suivante:

$$h_{ij}^{TT} = e_{ij} e^{ik_\mu x^\mu} + e_{ij}^* e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (3.28)$$

où e_{ij} est le *tenseur de polarisation*, un tenseur symétrique décrivant la polarisation de l'onde :

$$e_{\mu\nu} = h_+ e_{\mu\nu}^+ + h_\times e_{\mu\nu}^\times, \quad (3.29)$$

soit

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

avec

$$e_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_{\mu\nu}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

On remarque que les deux tenseurs $e_{\mu\nu}^+$ et $e_{\mu\nu}^\times$ sont linéairement indépendants, ce qui montre qu'il y a finalement deux polarisations indépendantes pour l'OG, que l'on notera + et \times . Les directions des amplitudes h_+ et h_- sont représentées dans la figure 3.1. De plus, il est facile de constater que l'on passe d'une polarisation à l'autre par une rotation d'angle $\pi/4$, ce qui est caractéristique d'une onde d'hélicite 2 (Le graviton est donc de spin 2). En résumé, l'exploitation de la liberté de jauge

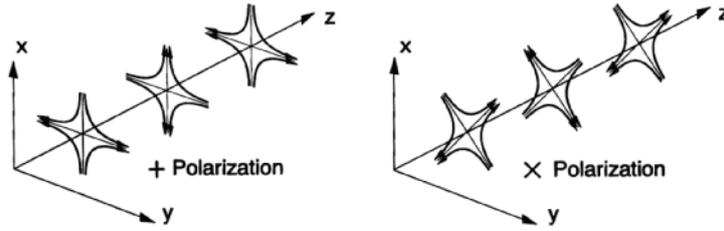


Fig 3.1: Modes de polarisation des ondes gravitationnelles h_+ et h_\times se propageant dans la direction z

en imposant un choix de jauge particulier, la jauge jauge TT, on a pu réduire les dix degrés de liberté de l'onde à seulement 2, et donc les deux modes de polarisation h_+ et h_\times sont les véritables degrés de liberté qui suffisent à caractériser ces OG dans la jauge TT.

La dénomination ”+” et ” \times ” est liée à la topologie que prend un anneau de matière déformé au passage d'une OG (voir les Figs. 1.1 et 1.2).

3.1.3 Interaction des ondes gravitationnelles avec un masse test

Considérons à nouveau la propagation d'ondes gravitationnelles dans un espace plat le long de l'axe z . Dans le système de coordonnées transversal sana trace ($x^\mu =$

(ct, x, y, z) , la métrique d'espace-temps g satisfait:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT})dx^i dx^j. \quad (3.32)$$

Considérons une masse test A au repos dans un espace-temps plat avant le passage de l'onde. Lors du passage de l'onde, la masse test va simplement suivre une géodésique (2.11) $x^\alpha = X_A^\alpha(\tau)$, qui obéit à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 X_A^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dX_A^\mu}{d\tau} \frac{dX_A^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.33)$$

Pour la métrique de perturbation dans la jauge TT, nous avons:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0\alpha} &= 0 \\ \Gamma^i_{00} &= 0 \\ \Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2c} \partial_0 h_{ij}^{TT} \\ \Gamma^i_{0j} &= \frac{1}{2c} \partial_0 h_{ij}^{TT} \\ \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2c} (\partial_j h_{ik}^{TT} + \partial_k h_{ji}^{TT} - \partial_i h_{jk}^{TT}) \end{aligned}$$

The $\alpha = i$ spatial component of the geodesic equation thus becomes:

$$\frac{d^2 X_A^i}{d\tau^2} + \frac{1}{c} \partial_0 h_{ij}^{TT} \frac{dX_A^0}{d\tau} \frac{dX_A^j}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} \frac{dX_A^j}{d\tau} \frac{dX_A^k}{d\tau} = 0. \quad (3.34)$$

Supposons que le masse test A soit à $\tau = \tau_0$ au repos. Donc

$$\frac{dX_A^i}{d\tau}(\tau_0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dX_A^0}{d\tau}(\tau_0) = c \quad (3.35)$$

et pour $\alpha = i$ l'équation géodésique (3.34) à $\tau = \tau_0$ devient

$$\frac{d^2 X_A^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00} c^2 = \frac{d^2 X_A^i}{d\tau^2} = 0. \quad (3.36)$$

Par conséquent, à l'ordre linéaire, une masse test au repos dans la jauge TT restera au repos lors du passage d'une onde gravitationnelle. Ainsi, la séparation des coordonnées entre deux particules d'essai restera constante comme une onde gravitationnelle passe à travers. Cependant, bien que les coordonnées ne changent pas dans la

jauge TT, nous constatons que les distances et les temps appropriés changent. Cela signifie que l'étude du mouvement d'une seule particule n'est pas suffisante pour détecter une onde gravitationnelle.

Le fait que la particule d'essai ne se déplace pas dans le système de coordonnées TT est une propriété remarquable de ces coordonnées (ce qui signifie intuitivement qu'ils se déplacent avec les vagues), ce qui n'implique pas que les distances physiques mesurées ne sont pas impactées par le passage de l'onde gravitationnelle. En fait, la distance L entre deux particules d'essai tombant librement oscillerait au passage de l'onde gravitationnelle.

Pour voir cela, étudions le mouvement relatif des masses induit par une OG. Considérons deux masses test A et B, de coordonnées x_A^μ, x_B^ν . Nous supposons que les deux particules sont initialement au repos, et qu'une onde gravitationnelle à front plan les atteint à un instant $t = 0$, se propageant le long de l'axe des z . Nous supposons également que nous sommes dans la jauge TT, de sorte que les seules composantes qui ne disparaissent pas de l'onde sont celles sur le plan (x, y) . Dans ce cadre, la métrique est

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (3.37)$$

Au moment approprié t_1 , un observateur situé sur un référentiel attaché à A envoie un signal lumineux en direction de B, qui est réfléchi vers A où il arrive au bon moment t_2 . Nous définissons la distance entre A et B comme:

$$L = \frac{c}{2}(t_2 - t_1). \quad (3.38)$$

Puisque la métrique change, cette distance propre L entre les deux masses change de δL , c'est la variation causée par le passage de l'onde gravitationnelle. En supposant que A et B sont infiniment proches, on a:

$$L^2 = g_{\mu\nu}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) = g_{ij}(x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j), \quad \text{car } x_A^0 = x_B^0 = ct \quad (3.39)$$

En supposant que la particule d'essai A se trouve à l'origine $(x_A^x, x_A^y, x_A^z) = (0, 0, 0)$,

on obtient

$$L^2 = g_{ij}x_B^i x_B^j = (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT})x_B^i x_B^j. \quad (3.40)$$

Si on note par \vec{n} le vecteur d'espace unitaire joignant A et B pour la métrique de Minkowski, on a $x_B^i = L_0 n^i$ avec:

$$L_0 = \delta_{ij}x_B^i x_B^j. \quad (3.41)$$

On obtient enfin:

$$L = \sqrt{L_0^2(\delta_{ij} + h_{ij}^{TT})n^i n^j} = L_0 \sqrt{1 + h_{ij}^{TT} n^i n^j}. \quad (3.42)$$

En ne gardant que les termes de premier ordre en h , nous avons:

$$L = L_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j \right). \quad (3.43)$$

En conséquence, la variation relative de la longueur mesurée

$$\frac{\delta L}{L} \equiv \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (3.44)$$

en raison de l'impact de l'onde gravitationnelle est:

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j. \quad (3.45)$$

C'est le principe de détection des détecteurs laser-interférométriques d'OG: la distance entre deux masses d'essai change avec le temps en fonction de la variation temporelle de l'onde gravitationnelle, qui est décrite par la perturbation h_{ij}^{TT} .

Étudions maintenant l'effet de la polarisation de l'onde. Considérons une onde plane dont les composants sont (nous omettons dans la suite l'exposant TT)

$$h_{xx} = 2\Re\{A_+ e^{i\omega(t-z/c)}\}, \quad (3.46)$$

$$h_{xy} = 2\Re\{A_\times e^{i\omega(t-z/c)}\}. \quad (3.47)$$

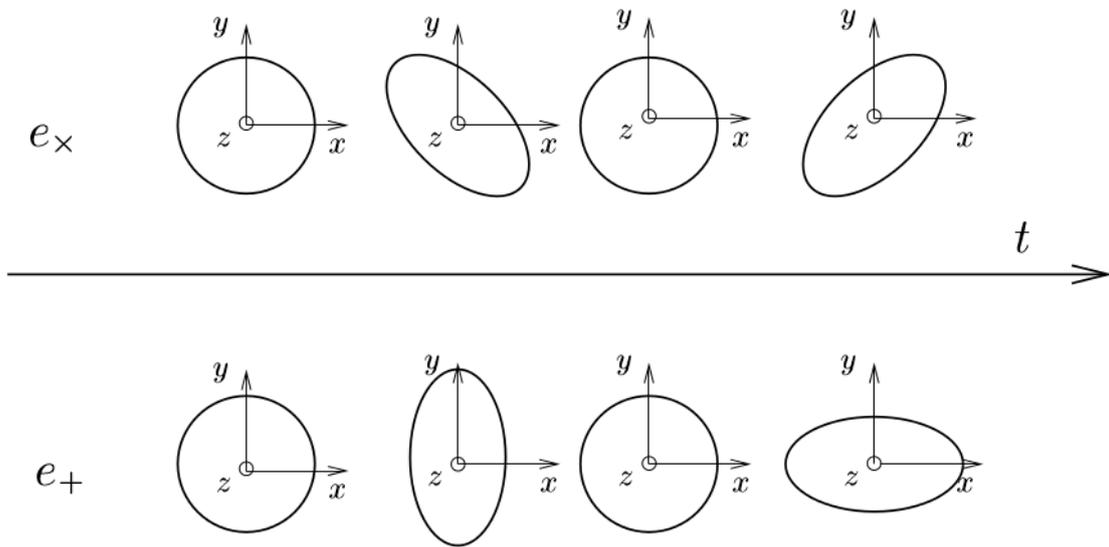


Fig 3.2: Déformation d'une distribution de masses libres réparties sur un anneau sous l'effet des polarisations h_+ et h_\times d'une onde gravitationnelle.

Chapitre 4

Trous noirs

Nous allons ici décrire d'autres solutions aux équations d'Einstein : les trous noirs. Ce sont les objets fondamentaux de la théorie de la gravitation d'Einstein et ils sont caractérisés par peu de paramètres. Dans ce qui suit présentons un petit échantillon des caractéristiques les plus élémentaires des trous noirs

4.1 Métrique de Schwarzschild

L'un des systèmes de coordonnées utilisé pour étudier les trous noirs est le système de Schwarzschild¹. La solution de Schwarzschild ou métrique de Schwarzschild est valable dans une région de vide ($T^{\mu\nu} = 0$) entourant une distribution de masse statique, à symétrie sphérique, non chargée et non tournante, et peut être dérivée des équations de champ d'Einstein. En raison de ces symétries, les composants de la métrique dépendent uniquement du composant radial et l'élément de ligne de Schwarzschild est donné par [28, 29]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.1)$$

où r est une coordonnée radiale qui va de zéro à l'infini, θ l'angle polaire, ϕ l'angle azimutal, M la masse du trou noir ou l'énergie totale de la distribution de masse et

¹En relativité générale, l'étude des trous noirs se fait à l'aide d'une grande variété de systèmes de coordonnées dont certains présentent des singularités. Les singularités peuvent se produire simplement en raison d'un artefact du système utilisé, mais elles peuvent également résulter d'une propriété physique de l'espace-temps considérée, c'est-à-dire en raison de la courbure associée à un point d'espace-temps étant infini.

t la coordonnée temporelle. En raison du théorème de Birkhoff [35], la métrique de Schwarzschild est la solution sphérique unique symétrique aux équations du champ de vide d'Einstein. Ainsi, la métrique de Schwarzschild est une métrique statique (aucune composante de la métrique avec l'élément de ligne (4.1) dépend du temps) qui définit la façon dont nous mesurons les intervalles invariants autour d'une masse M dans un espace-temps statique à symétrie sphérique, i.e elle décrit le champ gravitationnel autour d'un corps sphérique de masse M . Notons que pour $M \rightarrow 0$ nous obtenons l'espace-temps de Minkowski.

Deux singularités² apparaissent dans les coefficients de la métrique (4.1), car elle diverge pour $r = 0$ et $r = 2GM/c^2$. Cette dernière étant connue sous le nom de rayon de Schwarzschild R_s (ou rayon d'horizon des événements, le point de non-retour auquel même la lumière ne peut s'échapper). Mais ces deux singularités sont de nature très différente. La singularité à $r = 0$ est une véritable singularité de courbure. En effet, les scalaires de Ricci $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ et Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ indépendants des coordonnées, pour la métrique de Schwarzschild ont pour valeurs[30]

$$R = 0, \quad K = \frac{48G^2 M^2}{r^6 c^4}, \quad (4.2)$$

Le scalaire de Kretschmann diverge à $r = 0$, qui est ainsi le lieu d'une singularité de courbure, nous parlons dans ce cas de singularité intrinsèque ou encore de singularité physique. Cependant, rayon de Schwarzschild R_s n'est pas une singularité physique, c'est une caractéristique de la métrique provenant du choix du système de coordonnées qui et qui peut être traitée par un choix approprié de coordonnées où à $r = R_s$ l'espace-temps est parfaitement régulier, i.e l'horizon des événements prend une expression non singulière. Nous parlons alors dans ce cas de singularité de coordonnées.

²Une singularité est endroit où le point d'espace-temps est mathématiquement mal défini.

4.2 Métrique de Kerr

Une solution exacte aux équations d'Einstein décrivant les trous noirs en rotation a été trouvée par Roy Kerr en 1963 [32]. La métrique de Kerr lit

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2}{c^2\rho^2} c dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r \sin^2}{c^2\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.3)$$

avec : $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ et $\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2$. M est la masse du trou noir, a est son moment angulaire ($a = J/cM$).

Contrairement à la métrique de Schwarzschild, la métrique de Kerr (4.3) n'est plus statique mais stationnaire, puisque la symétrie $t \rightarrow -t$ de la métrique de Schwarzschild est disparu. Aussi pour la symétrie $\phi \rightarrow -\phi$: l'espace-temps n'est plus sphériquement symétrique, mais reste axisymétrique (la métrique est invariante sous $\theta \rightarrow \pi - \theta$ et ses coefficients ne dépendent pas de ϕ). Par conséquent, la métrique de Kerr est une solution de l'équation d'Einstein permettant de ne décrire que les trous noirs stationnaires et axisymétriques en rotation. Il n'existe pas d'analogue au théorème de Birkhoff pour décrire l'espace-temps à l'extérieur de tout corps axisymétrique en rotation.

Dans cette métrique, les singularités apparaissent pour $\rho^2 = 0$, soit pour $r = 0$ et $\theta = \pi/2$, ainsi que pour $\Delta = 0$. La première singularité est similaire à une singularité centrale puisqu'elle est observée quel que soit le système de coordonnées dans lequel on se place. Cependant, dans le cas de la métrique de Kerr, celle-ci porte le nom de singularité annulaire car elle se présente sous la forme d'un anneau.

La seconde singularité en $\Delta = 0$ est semblable à la singularité de coordonnées en métrique de Schwarzschild au sens où elle permet de caractériser l'horizon des événements.

En métrique de Kerr, une autre hypersurface intéressante, située à l'extérieur de l'horizon des événements, est appelée ergosphère. Elle est définie par :

$$R_{ergo}(\theta) = \frac{R_s}{2} (1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2}) \quad (4.4)$$

La région comprise entre l'horizon des événements et l'ergosphère est appelée ergoré-

gion. La caractéristique de cette région est qu'il ne peut pas y exister d'observateur statique par rapport à l'infini (r , θ et ϕ fixés) car celui-ci est entraîné par la rotation du trou noir. En revanche, si le trou noir est sans rotation cette région n'existe pas car l'ergosphère est confondue avec l'horizon des événements.

Chapitre 5

Rayonnement des OG par fusion d'un binaire de trous noirs

5.1 Systèmes binaires compacts coalescents

Un type de source d'OG que l'on considère habituellement pour les détecteurs interférométriques est le binaire gravitationnel appelé également système binaires compact coalescent qui est formé de deux objets compacts de masses comparables en orbite l'un autour de l'autre tels des trous noirs ou des étoiles à neutrons. Au cours de ce processus de coalescence, les deux objets émettent une partie de leur énergie sous forme de rayonnement gravitationnel.

Un système d'étoiles binaires a un grand moment quadripolaire accélérateur, ce qui en fait une puissante source de rayonnement gravitationnel. Le rayonnement emporte l'énergie de liaison orbitale et le moment angulaire orbital, ce qui conduit à une orbite plus rapide et plus compacte. La troisième loi de Kepler relie la fréquence orbitale f_{orb} , le demi-grand axe a et la masse totale du système M par

$$f_{orb}^2 = \frac{M}{4\pi^2 a^3}. \quad (5.1)$$

Par conséquent, la puissance rayonnée est, par ordre de grandeur,

$$L \propto [Ma^2 f_{orb}^3]^2. \quad (5.2)$$

Notez que la puissance rayonnée *augmente* à mesure que l'orbite décroît:

$$L \propto \left(\frac{M}{a}\right)^5. \quad (5.3)$$

Pour les binaires qui peuvent devenir suffisamment compacts, la puissance rayonnée gravitationnellement deviendra, à la fin, suffisamment grande pour dominer l'évolution du système. Étant donné que la puissance rayonnée augmente à mesure que l'orbite se désintègre, le système se désintègre alors à une vitesse toujours croissante, avec une amplitude, une fréquence et une puissance de rayonnement toujours croissantes, jusqu'à ce que les composants fusionnent. C'est ce rayonnement, pour les systèmes binaires d'étoiles à neutrons ou de trous noirs, qui est considéré comme une source importante pour le détecteur LIGO.

5.2 Émission d'ondes gravitationnelles

5.2.1 Formule du quadrupôle

Il existe une solution pour l'équation d'onde (3.18) qui peut être trouvée en intégrant sur la source, tout comme dans l'électromagnétisme. En EM, le potentiel vectoriel A_μ peut être exprimé comme une intégrale sur la source, le courant J_μ . De même, en RG, le tenseur d'onde $\bar{h}_{\mu\nu}$ peut être exprimé comme une intégrale sur le tenseur énergie-contrainte $T_{\mu\nu}$. Ainsi, les équations d'Einstein pour une onde gravitationnelle linéarisée au premier ordre avec une source:

$$\partial_\sigma \partial^\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Eq. 5.4 sont résolu par

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (5.5)$$

De nombreuses sources astrophysiques intéressantes, telles que les étoiles pulsantes, les pulsars et les systèmes binaires que nous allons traiter dans les sections suivantes, n'ont pas besoin d'être traitées de manière relativiste. Cela signifie que la source est périodique et que le mouvement interne de la source est suffisamment lent pour être négligée dans les calculs. Nous ferons donc l'hypothèse simplificatrice suivante

communément appelée «approximation de mouvement lent» [33]: pour une source contenue dans un rayon R avec une vitesse interne moyenne v et de vitesse angulaire $\omega = v/R$, alors la «longueur d'onde réduite caractéristique» $\lambda_{red} = \lambda/2\pi = 1/\omega$ du rayonnement est supposée être longue par rapport à la taille de la source:

$$\lambda_{red} \gg R_{source} \quad \text{or} \quad R_{source}/\lambda_{red} \ll 1. \quad (5.6)$$

C'est la même chose que la déclaration

$$v/c \ll 1. \quad (5.7)$$

L'hypothèse (5.6) signifie qu'au moment où un changement interne raisonnable se produit (une variation de densité, par exemple) dans la source, suffisamment de fronts d'onde ont déjà été émis pour qu'une mesure soit effectuée. C'est pourquoi on appelle cela «l'hypothèse à mouvement lent», et pourquoi ce type de génération d'ondes gravitationnelles est appelé «génération d'onde à mouvement lent»

Définissons notre système de coordonnées centré sur la source avec l'origine contenue dans R_{source} , puis à de grandes distances radiales de la source

$$r = |\vec{x}| \gg R_{source} = |\vec{x}'|. \quad (5.8)$$

L'intégrale (5.5) peut alors être développée en puissance de \vec{x}'/r , en utilisant l'approximation de mouvement lent [33]:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{rc^4} \int T_{\mu\nu}(\vec{x}', t - r/c) d^3x' + \mathcal{O} \left[\frac{x^j}{r^2 \lambda_{red}} \int x'^j T_{\mu\nu}(\vec{x}', t - r/c) d^3x' \right]. \quad (5.9)$$

Notez que dans la jauge transversale sans trace (TT), seules les composantes spatiales de $\bar{h}_{\mu\nu}$, \bar{h}_{ij} , sont différents de zéro. Rappelons également que le tenseur contrainte-énergie-impulsion a la loi de conservation

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.10)$$

À partir de cette loi de conservation, nous pouvons construire plusieurs identités

utiles [33]:

$$\partial_0 \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_0 \partial_0 T^{\mu 0} + \partial_0 \partial_i T^{\mu i} = 0 \quad (5.11)$$

En particulier pour $\mu = 0$ et en utilisant la symétrie de $T^{\mu\nu}$ et le fait que les dérivés partiels commutent:

$$\partial_0 \partial_0 T^{00} = -\partial_0 \partial_i T^{0i} = -\partial_i \partial_0 T^{i0} . \quad (5.12)$$

En outre, considérons

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \partial_0 \partial_\nu T^{0\nu} + \partial_i \partial_\nu T^{i\nu} = 0 \\ &\Rightarrow \partial_0 \partial_0 T^{00} + \partial_0 \partial_i T^{0i} + \partial_i \partial_0 T^{i0} + \partial_i \partial_j T^{ij} = 0 \\ &\Rightarrow \partial_0 \partial_0 T^{00} - 2\partial_0 \partial_0 T^{00} + \partial_i \partial_j T^{ij} = 0 \quad \text{by 5.12} \\ &\Rightarrow \partial_0 \partial_0 T^{00} = \partial_i \partial_j T^{ij} . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Maintenant, considérons la quantité

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) &= \partial_k [\partial_l T^{kl} x^i x^j + T^{kl} (\delta_l^i x^j + \delta_l^j x^i)] \\ &= \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j + \partial_l T^{kl} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i) + \partial_k (T^{ki} x^j + T^{kj} x^i) . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Considérons pour le moment le second terme. Par la règle du produit

$$\begin{aligned} \partial_l [T^{kl} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i)] &= \partial_l T^{kl} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i) + T^{kl} (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_k^j \delta_l^i) \\ &= \partial_l T^{kl} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i) + 2T^{ij} \\ &\Rightarrow \partial_l T^{kl} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i) = \partial_l [T^{kl} (\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i)] - 2T^{ij} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Donc (5.14) devient

$$\partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) = \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j + 2\partial_k (T^{ki} x^j + T^{kj} x^i) - 2T^{ij} . \quad (5.16)$$

Enfin, considérons l'expression

$$\begin{aligned}
\partial_0\partial_0(T^{00}x^0x^0) &= \partial_0\partial_0T^{00}x^0x^0 \\
&= \partial_k\partial_l T^{kl}x^ix^j \\
&= \partial_k\partial_l(T^{kl}x^ix^j) - 2\partial_k(T^{ki}x^j + T^{kj}x^i) + 2T^{ij}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Nous définissons le second moment de la distribution de masse selon [33] comme¹

$$I^{ij}(t) \equiv \int T^{00}x^ix^jd^3x. \quad (5.18)$$

On peut alors réécrire (par (5.17)) come

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I^{ij}(t)}{\partial t^2} &= \frac{d^2 I^{ij}(t)}{dt^2} = \partial_0\partial_0 \int T^{00}x^ix^jd^3x \\
&= \partial_0\partial_0 \int \partial_0\partial_0(T^{00}x^ix^j)d^3x \\
&= \partial_0\partial_0 \int \partial_k\partial_l(T^{kl}x^ix^j)d^3x - 2 \int \partial_k(T^{ki}x^j + T^{kj}x^i)d^3x \\
&\quad + 2 \int T^{ij}d^3x. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales peuvent être réécrites en utilisant le théorème de Gauss comme intégrales de surface dans lesquelles nous prenons la surface à l'infini. En supposant que la source est bornée de sorte que T^{ij} ne soit défini que dans une région finie de l'espace près de l'origine, ces intégrales de surface disparaissent, et nous nous retrouvons avec

$$\int T^{ij}d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2 I^{ij}(t)}{dt^2}. \quad (5.20)$$

Puis, par substitution de (5.20) dans (5.18) et abandonner les termes d'ordre supérieur (c'est-à-dire que nous supposons que l'observateur est à une distance beaucoup plus grande que la longueur d'onde réduite $r \gg \lambda_{red} \gg R_{source}$), on a

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{2}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t - r/c)}{dt^2}. \quad (5.21)$$

Les quantités I_{ij} , cependant, ne peuvent pas être directement calculés par un observateur externe [33]. Cependant, si nous définissons le moment quadripolaire réduit

¹Le zéro moment est $\int T^{00}d^3x$ et le premier moment est $\int T^{00}x^id^3x$ etc.

en fonction du second moment de masse par

$$Q_{ij} \equiv I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}I_k^k = \int T^{00} \left[x^i x^j - \frac{1}{3}\delta_{ij}r^2 \right] d^3x, \quad (5.22)$$

où $r^2 = x^i x^i$, puis commodément Q_{ij} and I_{ij} sont identiques dans la jauge TT [33]. On peut alors écrire

$$h_{ij}^{TT}(\vec{x}, t) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}^{TT}(t - r/c). \quad (5.23)$$

où l'on rappelle dans la jauge TT $\bar{h}_{ij}^{TT} = h_{ij}^{TT}$, et le moment quadripolaire réduit est pris pour être évalué au temps retardé $t - r/c$. Eq. (5.23) est la fameuse formule quadripolaire, dérivée pour la première fois par Einstein en 1918 [34]. Ainsi, les ondes gravitationnelles émises par une source lente de masse-énergie-densité $T^{00} = \rho$ sont proportionnelles à la deuxième dérivée temporelle du moment quadripolaire de la source. Le moment quadripolaire peut être calculé exactement de la même manière que l'on le ferait dans la théorie newtonienne; comme coefficient dans le terme quadripolaire d'une expansion multipolaire du potentiel newtonien [35].

Bien sûr, il est logique que le rayonnement gravitationnel soit de nature au moins quadripolaire ou supérieur: les monopôles gravitationnels ne peuvent pas exister par conservation de la masse, et les dipôles gravitationnels ne peuvent pas exister par conservation de la quantité de mouvement (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de masse négative). Dans l'électromagnétisme, cependant, il peut y avoir un rayonnement dipolaire parce qu'il existe des charges électriques positives et négatives.

5.3 Énergie contenue dans une OG

Comme l'avait soutenu «l'expérience des perles collantes» de Richard Feynman, les ondes gravitationnelles, comme leurs analogues électromagnétiques, peuvent transporter et déposer de l'énergie dans leur environnement. Cela a beaucoup d'énormes implications. Par exemple, un système émettant des OG comme une étoile binaire ou un système de trous noirs perd effectivement de l'énergie via la production de rayonnement gravitationnel. Premièrement, cela implique que la vitesse orbitale de binaire doit diminuer, par conservation de l'énergie, et ainsi finalement les deux corps vont fusionner! Deuxièmement, le rayonnement quittant les binaires peut

transporter cette énergie vers la Terre, où nous pouvons construire une forme de détecteur pour mesurer l'énergie de ces OG et identifier un tel événement. Comme les ondes gravitationnelles voyagent sans entrave dans l'univers, cela présente une multitude de possibilités pour les astronomes d'utiliser le rayonnement gravitationnel pour observer l'univers au-delà de ce qui est possible dans le spectre électromagnétique; par exemple, «voir» au-delà du rayonnement de fond des micro-ondes cosmiques et dans les premiers instants de l'univers.

Dans cette section, nous dériverons une expression de l'énergie contenue dans une onde gravitationnelle. Nous commençons par revenir aux équations du champ d'Einstein:

$$G_{\rho\nu} \equiv R_{\rho\nu} - \frac{1}{2}g_{\rho\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\rho\nu}. \quad (5.24)$$

Dans la section précédente, nous avons résolu ces équations pour une onde gravitationnelle linéarisée au premier ordre afin d'obtenir une expression pour les ondes gravitationnelles h_{ij} . En ne considérant que les équations en premier ordre, nous avons ignoré la possibilité que les ondes gravitationnelles soient elles-mêmes une source de courbure. Pour capturer cela, nous devons considérer les équations au second ordre. Imitant la notation utilisée dans [35], nous écrivons le tenseur de Ricci comme la somme d'un composant n'impliquant que les contributions du premier ordre de $h_{\mu\nu}$ et d'un composant impliquant des termes du second ordre:

$$R_{\rho\nu} = R_{\rho\nu}^{(1)} + R_{\rho\nu}^{(2)}, \quad (5.25)$$

où $R_{\rho\nu}^{(1)}$ est donné par l'Eq. (3.5) et $R_{\rho\nu}^{(2)}$ est donné par

$$\begin{aligned} R_{\rho\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left(h^{\sigma\lambda} \partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\lambda} + h^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \partial_\lambda h_{\rho\nu} - h^{\sigma\lambda} \partial_\lambda \partial_\nu h_{\rho\sigma} - h^{\sigma\lambda} \partial_\lambda \partial_\rho h_{\nu\sigma} \right. \\ & + \partial_\sigma h^{\sigma\lambda} \partial_\lambda h_{\rho\nu} + \partial^\sigma h_\nu^\lambda \partial_\sigma h_{\lambda\rho} - \partial^\sigma h_\nu^\lambda \partial_\lambda h_{\sigma\rho} - \partial_\sigma h^{\sigma\lambda} \partial_\nu h_{\rho\lambda} - \partial_\sigma h^{\sigma\lambda} \partial_\rho h_{\lambda\nu} \left. \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(\partial_\rho h^{\sigma\lambda} \partial_\nu h_{\sigma\lambda} + \partial_\lambda h \partial_\rho h_\nu^\lambda + \partial_\lambda h \partial_\nu h_\rho^\lambda - \partial_\lambda h \partial^\lambda h_{\rho\nu} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Cela nous permet d'écrire l'Eq. (5.24) comme

$$R_{\rho\nu}^{(1)} + R_{\rho\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\nu}(R^{(1)} + R^{(2)}) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\rho\nu}, \quad (5.27)$$

ou encore

$$R_{\rho\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\nu}R^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\rho\nu} + t_{\rho\nu}), \quad (5.28)$$

où nous avons défini

$$t_{\rho\nu} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G} \left(R_{\rho\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\nu}R^{(2)} \right). \quad (5.29)$$

L'Eq. (5.28) est la même équation linéarisée que nous avons résolue pour obtenir Eq. (5.23), sauf que nous avons maintenant ajouté un terme supplémentaire sur le côté droit qui dépend des effets du second ordre de la perturbation métrique. De la manière dont nous avons écrit Eq. (5.28), c'est comme si les ondes gravitationnelles étaient elles-mêmes une source de courbure. Les quantités $t_{\rho\nu}$ sont classiquement appelées pseudo-tenseur d'énergie-impulsion du champ gravitationnel, et décrivent les effets des ondes gravitationnelles elles-mêmes sur la courbure de l'espace-temps qui les entoure.

Il existe plusieurs propriétés indésirables du pseudo-tenseur; à savoir, comme son nom l'indique, ce n'est pas un tenseur, et il n'est pas non plus invariant sous les transformations de jauge [35]. Le premier n'est pas particulièrement un problème, et le dernier peut être surmonté en pensant plutôt au pseudo-tenseur d'énergie-impulsion comme moyenné sur un volume d'espace-temps de côtés plus grand que la longueur d'onde des ondes gravitationnelles. La notation utilisée dans cette moyenne est indiquée universellement par des crochets angulaires,

$$t_{\rho\nu} = \left\langle -\frac{c^4}{8\pi G} \left(R_{\rho\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\nu}R^{(2)} \right) \right\rangle. \quad (5.30)$$

Le calcul de la moyenne peut être considéré comme un «étalement» de la quantité d'énergie des OG sur une région suffisante (c'est-à-dire plus grande que λ , mais plus petite que le rayon de la courbure d'arrière-plan) que la courbure induite par les ondes gravitationnelles peuvent être physiquement décrites d'une manière invariante de jauge [35]. Plus la longueur d'onde de l'OG est petite par rapport à la courbure de fond, meilleure est cette approximation, devenant arbitrairement précise dans la limite d'un observateur très éloigné dans un espace-temps asymptotiquement plat [36]. Pour une source émettant un rayonnement gravitationnel avec une période

cyclique bien définie, cela revient simplement à faire la moyenne sur la période de la source.

Pour dériver une expression pour $t_{\rho\nu}$, nous devons calculer l'Eq. (5.29) donnée par l'Eq. (5.26), puis moyennons selon l'Eq. (5.30). On retrouve, dans la jauge TT,

$$t_{\rho\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\rho h_{\sigma\lambda}^{TT} \partial_\nu h_{TT}^{\sigma\lambda} \rangle. \quad (5.31)$$

Nous avons maintenant une quantité invariante de jauge qui prend une forme relativement simple dans un choix particulier (jauge TT) et décrit l'énergie stockée dans les ondes gravitationnelles. Nous pouvons l'utiliser pour déterminer la luminosité, ou énergie par unité de temps transportée dans les vagues. Nous pouvons le déterminer à partir du flux d'énergie t_{0r} dans la direction radiale, moyenné sur la surface d'une sphère éloignée et contenant la source. Nous trouvons d'abord une expression pour t_{0r} en utilisant l'Eq. (5.31) et l'Eq. (5.23). Notant que le moment quadripolaire ne dépend que du temps $t - r/c$, nous pouvons utiliser la règle de la chaîne pour écrire

$$\begin{aligned} t_{0\nu} &= \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_0 h_{\rho\sigma}^{TT} \partial_r h_{TT}^{\rho\sigma} \rangle \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \frac{2}{r} \ddot{Q}_{ij}^{TT} \left(-\frac{2}{r} \ddot{Q}_{TT}^{ij} - \frac{2}{r^2} \ddot{Q}_{ij}^{TT} \right) \right\rangle \\ &\approx -\frac{c^4}{8\pi G r^2} \langle \ddot{Q}_{ij}^{TT} \ddot{Q}_{TT}^{ij} \rangle, \end{aligned} \quad (5.32)$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé le fait que nous considérons les ondes à une distance très éloignée de la source. Malheureusement, nous ne savons pas nécessairement comment exprimer explicitement le moment quadripolaire dans la jauge TT. Nous pouvons cependant calculer assez facilement le moment quadripolaire réduit régulier via (5.22). Ainsi nous voulons exprimer (5.32) en termes de Q_{ij} , et non de Q_{ij}^{TT} . On peut le faire en utilisant le tenseur de projection défini dans [35],

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (5.33)$$

où n_i est un vecteur normal dans la direction i . La partie sans trace transversale d'un tenseur peut alors être exprimée en termes de tenseur de projection et de tenseur

original X_{ij} comme [35]

$$X_{ij}^{TT} = \left(P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right) X_{kl}, \quad (5.34)$$

qui nous permet d'écrire, après une quantité considérable d'algèbre fastidieuse (impliquant 64 termes de deltas de Kronecker),

$$\ddot{Q}_{ij}^{TT} \ddot{Q}_{TT}^{ij} = \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} - 2 \ddot{Q}_i^j \ddot{Q}^{ik} n_i n_k + \frac{1}{2} \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}^{kl} n_i n_j n_k n_l. \quad (5.35)$$

La puissance rayonnée par les OG peut maintenant être calculée à partir de

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{S_\infty^2} t_{0r} r^2 d\Omega \\ &= -\frac{c^4}{8\pi G r^2} \int_{S_\infty^2} \langle \ddot{Q}_{ij}^{TT} \ddot{Q}_{TT}^{ij} \rangle d\Omega \\ &= -\frac{c^4}{8\pi G r^2} \int_{S_\infty^2} \left\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} - 2 \ddot{Q}_i^j \ddot{Q}^{ik} n_j n_k + \frac{1}{2} \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}^{kl} n_i n_j n_k n_l \right\rangle d\Omega, \end{aligned} \quad (5.36)$$

où l'intégrale est prise sur une sphère à l'infini et $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ est l'angle solide infinitésimal. Puisque les moments quadripolaires ne dépendent que de $t - r/c$, ils sont constants sur la surface de la sphère et peut être pris en dehors de l'intégrale:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c^4}{8\pi G} \left[\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle \int_{S_\infty^2} d\Omega - 2 \langle \ddot{Q}_i^j \ddot{Q}^{ik} \rangle \int_{S_\infty^2} n_j n_k d\Omega + \frac{1}{2} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}^{kl} \rangle \int_{S_\infty^2} n_i n_j n_k n_l d\Omega \right] \quad (5.37)$$

En utilisant les identités pour les moyennes sur la surface d'une sphère [33, 35, 37],

$$\int_{S_\infty^2} d\Omega = 4\pi \quad (5.38)$$

$$\int_{S_\infty^2} n_j n_k d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (5.39)$$

$$\int_{S_\infty^2} n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (5.40)$$

L'intégrale (5.38) est triviale. Intégrale (5.39) et (5.40) sont facilement démontrées en coordonnées cartésiennes:

$$\int_{S_\infty^2} n_j n_k d\Omega = \iiint \frac{x_i x_j}{\sqrt{x_k x^k}} dx dy dz \propto \delta_{ij} \quad (5.41)$$

l'intégrale est nulle si l'intégrale est impaire et est différente de zéro autrement. En

calculant l'intégrale pour $i = j = 3$, nous voyons que la constante de proportionnalité est $4\pi/3$. Le même raisonnement prouve (5.40). Nous pouvons donc simplifier l'Eq. (5.37) comme suit:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= -\frac{c^4}{8\pi G} \left[4\pi \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle - \frac{8\pi}{3} \langle \ddot{Q}_i^j \ddot{Q}^{ik} \rangle \delta_{jk} + \frac{2\pi}{15} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}^{kl} \rangle (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \\
&= -\frac{c^4}{8\pi G} \left[4\pi \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle - \frac{8\pi}{3} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle + \frac{2\pi}{15} \langle \ddot{Q} \ddot{Q} + 2\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle \right] \\
&= -\frac{c^4}{5G} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle. \quad \text{puisque } Q_{ij} \text{ est de trace nulle}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

La puissance rayonnée dans les ondes gravitationnelles (ce que les astronomes appellent la luminosité) est donnée par

$$L_{OG} = -\frac{dE}{dt} = \frac{c^4}{5G} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle. \tag{5.43}$$

Nous avons maintenant une expression de l'énergie émise par une distribution de matière lente sous forme de rayonnement gravitationnel! Il est proportionnel au carré de la troisième dérivée temporelle du moment quadripolaire de cette distribution de matière. Dans la section suivante, nous utiliserons cette formule pour déterminer l'énergie perdue dans un système binaire de trous noirs et comparer notre prédiction théorique à la mesures effectuées par l'observatoire LIGO.

5.4 OG émise par un binaire de trous noirs en orbite circulaire

Nous allons maintenant estimer le signal gravitationnel émis par un système binaire composé de deux trous noirs se déplaçant sur une orbite circulaire autour de leur centre de masse commun. Dans ce qui suis, nous suivrons la construction de ce système comme présenté dans [38]. Pour simplifier, nous supposons que les deux trous noirs de masses inégales M_1 et M_2 sont des masses ponctuelles, verrouillés ensemble en orbite l'un autour de l'autre.

En plaçant l'origine de nos coordonnées au barycentre des deux masses, nous définissons la position spatiale vecteurs des deux trous noirs comme $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$, ainsi que les vitesses des deux corps \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Les magnitudes de ces vecteurs sont

désignées simplement comme étant la même variable sans flèche vectorielle. Soit l'orbite des trous noirs dans le plan $x - y$. Puisque les deux étoiles doivent faire une orbite complète dans le même temps, que nous désignons comme la période P , nous avons

$$P = \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{v_2}{2\pi r_2} \Rightarrow r_1 = \frac{v_1}{v_2} r_2. \quad (5.44)$$

En équilibrant la force centripète avec la force gravitationnelle newtonienne pour le premier trou noir, ce qui est raisonnable à faire dans la limite non relativiste sur laquelle l'approximation de mouvement lent a été développée, nous trouvons la relation

$$\frac{M_1 v_1^2}{r_1} = \frac{M_1 M_2}{r_1 + r_2} \Rightarrow v_1^2 = \frac{M_1}{(r_1 + r_2)^2} r_2, \quad (5.45)$$

$$\frac{M_2 v_2^2}{r_2} = \frac{M_1 M_2}{r_1 + r_2} \Rightarrow v_2^2 = \frac{M_2}{(r_1 + r_2)^2} r_1. \quad (5.46)$$

En divisant les expressions pour v_1 et v_2 et en remplaçant (5.44), nous trouvons que

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1} r_2. \quad (5.47)$$

Puis définissant le vecteur de séparation $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, qui a la longueur $r = r_1 + r_2$, on a

$$\vec{r}_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{r}. \quad (5.48)$$

De même, nous pouvons réécrire les vitesses de la même manière en utilisant (5.44):

$$\vec{v}_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}. \quad (5.49)$$

où ici $\vec{v} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ est le vecteur de vitesse relative. Un schéma reliant ces propriétés de base de la configuration orbitale est donné dans la figure 5.1. Une quantité commode à définir est le rapport de masse symétrique, qui est donné par

$$\eta = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (5.50)$$

Puisque nous traitons les masses comme des masses ponctuelles, il est facile d'écrire

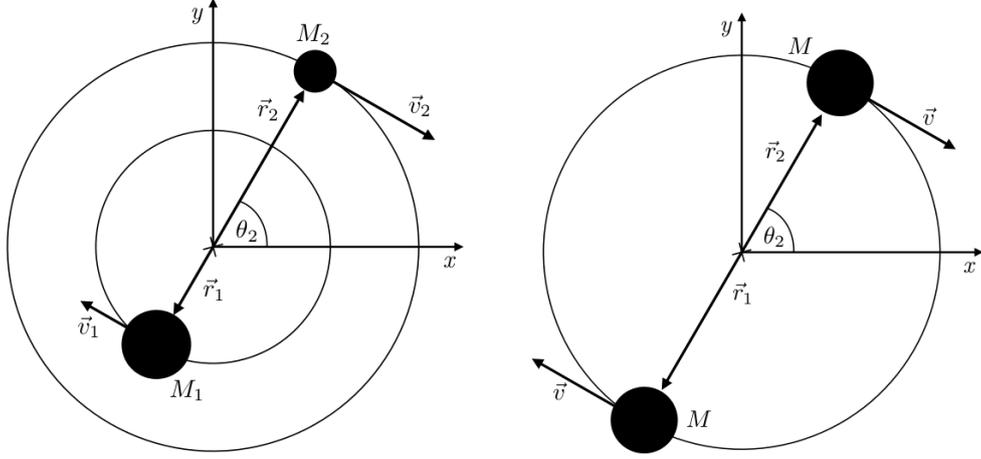


Fig 5.1: Schéma d'un système binaire de trous noirs avec des orbites circulaires et des masses inégales (à gauche), égales (à droite).

la densité de masse ρ du système binaire en termes de fonctions delta comme

$$T^{00}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{r}, t) = M_1 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1) + M_2 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_2), \quad (5.51)$$

où $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$ est la fonction delta de Dirac centrée à la position \vec{r}_i . Explicitement, les positions des deux trous noirs sont

$$\vec{r}_1 = (r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta, 0) \quad , \quad \vec{r}_2 = -(r_2 \cos \theta, r_2 \sin \theta, 0), \quad (5.52)$$

où θ est l'angle azimutal du premier corps, parfois appelé anomalie. En utilisant la troisième loi de Kepler, nous pouvons écrire la période P comme

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{M_1 + M_2} (r_1 + r_2)^3 = \frac{4\pi^2 r^3}{M}, \quad (5.53)$$

où $M = M_1 + M_2$ and $r = r_1 + r_2$, et la vitesse angulaire de l'orbite est

$$\Omega = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{M}{r^3}}, \quad (5.54)$$

nous permettant d'écrire les positions des deux trous noirs comme

$$\vec{r}_1 = (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t, 0) \quad , \quad \vec{r}_2 = -(r_2 \cos \Omega t, r_2 \sin \Omega t, 0), \quad (5.55)$$

La densité est maintenant

$$\rho(\vec{r}, t) = M_1 \delta(x - r_1 \cos \Omega t) \delta(y - r_1 \sin \Omega t) \delta(z) + M_2 \delta(x - r_2 \cos \Omega t) \delta(y - r_2 \sin \Omega t) \delta(z) \quad (5.56)$$

Les fonctions delta font le moment quadripolaire de l'Eq. (5.22) facile à calculer.

Les composantes sont

$$\begin{aligned} Q_{11} &= M_1 \left(r_1^2 \cos^2 \Omega t - \frac{1}{3} r_1^2 \right) + M_2 \left(r_2^2 \cos^2 \Omega t - \frac{1}{3} r_2^2 \right) \\ &= \left(\frac{M_1 M_2^2}{(M_1 + M_2)^2} + \frac{M_2 M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} \right) r^2 \left(\cos^2 \Omega t - \frac{1}{3} \right) \\ &= \eta M r^2 \left(\cos^2 \Omega t - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta M r^2 \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Likewise

$$Q_{22} = \eta M r^2 \left(\sin^2 \Omega t - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \eta M r^2 \left(\frac{1}{3} - \sin 2\Omega t \right) \quad (5.58)$$

$$Q_{11} = -\frac{1}{3} (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) = -\frac{1}{3} \eta M r^2. \quad (5.59)$$

Tout terme non-diagonale impliquant z disparaîtra, ainsi le seul terme non-diagonale survivant est

$$Q_{12} = Q_{21} = M_1 r_1^2 \cos \Omega t \sin \Omega t + M_2 r_2^2 \cos \Omega t \sin \Omega t \quad (5.60)$$

$$= \eta M r^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{1}{2} \eta M r^2 \sin 2\Omega t. \quad (5.61)$$

En les rassemblant, nous pouvons construire le tenseur des moments quadripolaires pour un système binaire de trous noirs de masses inégales mais d'orbites circulaires:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \eta M r^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & \frac{1}{3} - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

La deuxième dérivée temporelle de l'Eq. (5.62), donne

$$\ddot{Q}_{ij} = 2\eta Mr^2 \Omega^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ -\sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Avec le moment quadripolaire à la main, nous pouvons maintenant écrire la perturbation métrique de la formule quadripôle de l'Eq. (5.62), puisque les dérivées temporelles seconde de Q_{ij} et I_{ij} sont identiques:

$$\bar{h}_{ij} = \frac{4\eta Mr^2 \Omega^2}{R} \begin{pmatrix} -\cos[2\Omega(r/c - t)] & -\sin[2\Omega(r/c - t)] & 0 \\ -\sin[2\Omega(r/c - t)] & -\cos[2\Omega(r/c - t)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

où R est la distance de l'observateur à la source (pour que l'approximation soit valide, $R \gg r$). De là, nous pouvons voir que les ondes gravitationnelles ont une fréquence deux fois supérieure à celle de l'orbite des trous noirs. Ainsi dans chaque orbite, les trous noirs émettent deux longueurs d'onde complètes de rayonnement gravitationnel. Ceci est un autre rappel de la nature quadripolaire des OG; en faisant la moyenne de la luminosité sur la période des trous noirs, nous obtiendrons deux périodes de rayonnement gravitationnel.

La troisième dérivée temporelle d'Eq. (5.62) donne

$$\ddot{\ddot{Q}}_{ij} = 4\eta Mr^2 \Omega^3 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Donc

$$\ddot{\ddot{Q}}_{ij} \ddot{\ddot{Q}}^{ij} = 32\eta^2 M^2 r^4 \Omega^6, \quad (5.66)$$

et de l'Eq. (5.43), la luminosité des OG d'un système binaire de trous noirs peut être

$$L_{OG} = \frac{32G^4 \eta^2 M^2 r^4 \Omega^6}{5c^5} = \frac{32G^4 (M_1 M_2)^2 (M_1 + M_2)}{5c^5 r^5}. \quad (5.67)$$

Eq. (5.67) donne la quantité d'énergie émise par le système binaire par unité de temps lorsque les trous noirs tournent en orbite et produisent un rayonnement gravitationnel.

Nous pouvons en tirer plusieurs résultats clés. Premièrement, cette perte d'énergie se traduit par un rapprochement des deux trous noirs, un processus appelé inspiral. Si nous pensons que cette énergie provient de l'énergie totale des orbites du trou noir, alors en utilisant la règle de la chaîne, le taux de changement de la séparation peut être trouvé par

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{dE} \frac{dE}{dt} \\
&= - \left(\frac{2r^2}{GM_1M_2} \right) \frac{32G^4 (M_1M_2)^2 (M_1 + M_2)}{5c^5 r^5} \\
&= - \frac{64G^4 M_1M_2(M_1 + M_2)}{5c^5 r^3}, \tag{5.68}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème virial pour obtenir $E = -1/2U$ pour un binaire circulaire, où $U = GM_1M_2/r$ est l'énergie potentielle gravitationnelle newtonienne.

Le signe négatif dans l'Eq. (5.68) indique que l'orbite se rétrécit. Il continuera à se rétrécir lentement jusqu'à ce que les trous noirs fusionnent au centre de l'orbite. Cela se produit dans un temps fini appelé temps de coalescence (fusion), τ_{fusion} . Pour un binaire circulaire avec un demi-grand axe initial r_0 , l'expression dans l'Eq. (5.68) peut être intégrée simplement pour donner

$$\tau_{fusion} \equiv \Delta t_{fusion} = \frac{1}{\alpha} \int_{r_0}^0 r^3 dr = -\frac{r_0^4}{4\alpha}, \tag{5.69}$$

où la constante α est définie comme

$$\alpha = 64G^4 M_1M_2(M_1 + M_2)/5c^5. \tag{5.70}$$

de même que

$$r^4(t) = r_0^4 - \frac{256 G^3}{5 c^5} M_1M_2(M_1 + M_2)t. \tag{5.71}$$

ou encore

$$r(t) = r_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_{fusion}} \right)^{1/4}. \quad (5.72)$$

D'après l'Eq (5.72), nous voyons que lorsque $t = \tau_{fusion}$, la séparation orbitale devient nulle, et cela est possible parce que nous avons supposé que les corps composant le système binaire sont ponctuels. Bien sûr, les trous noirs ont des tailles finies, donc ils commencent à fusionner et fusionner avant que $t = \tau_{fusion}$ soit atteint. De plus, lorsque les deux étoiles sont suffisamment proches, l'approximation de mouvement lent et l'hypothèse de champ faible sur lesquelles repose le formalisme quadripolaire ne tiennent pas et les effets de champ forts doivent être pris en compte; cependant, la valeur de τ_{fusion} donne une indication du temps dont le système a besoin pour fusionner à partir d'une distance initiale donnée r_0 .

5.4.1 La forme d'onde émise

Au fur et à mesure que les trous noirs tournent vers l'intérieur, la fréquence angulaire de l'orbite augmente. Nous définissons $\omega \equiv 1/P$ comme étant la fréquence orbitale du binaire, donc alors $f \equiv 2\omega$ est la fréquence des OG. À partir de la troisième loi de Kepler, nous pouvons relier f à r par

$$P^2 = \frac{1}{\omega^2} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \Rightarrow f = 2\omega = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (5.73)$$

Pour voir comment la fréquence angulaire change dans le temps, nous pouvons utiliser la règle de la chaîne et les équations. (5.68) et (5.73), ce qui donne

$$\dot{f} = \frac{df}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{96\pi^{8/3} G^{5/3}}{5c^5} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} f^{11/3} \quad (5.74)$$

On définit la masse de gazouillis [38] comme

$$\mathcal{M} \equiv \eta^{3/5} M = \left(\frac{M_1^3 M_2^3}{M_1 + M_2} \right)^{1/5} \quad (5.75)$$

afin que nous puissions écrire le changement de fréquence comme

$$\dot{f} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} f^{11/3} \quad (5.76)$$

De l'Eq. (5.64) nous pouvons maintenant écrire l'amplitude de l'OG comme

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{4G\eta Mr^2\Omega^2}{Rc^4} = \frac{4\eta(GM)^2}{rRc^4} = \frac{4\eta(GM)^2}{Rc^4} \left(\frac{\pi^2}{GM} \right)^{1/3} f^{2/3} \\ &= \frac{4\pi^{2/3}G^{5/3}}{Rc^4} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} f_{OG}^{2/3}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

ou, en termes de masse de gazouillis,

$$h_0(t) = \frac{4\pi^{2/3}(GM)^{5/3}}{Rc^4} f_{OG}^{2/3}(t). \quad (5.78)$$

Avec les formules essentielles décrivant le rayonnement des ondes gravitationnelles d'un système de trous noirs binaires maintenant à portée de main, nous appliquerons notre formule aux deux cas dans lesquels des ondes gravitationnelles ont été détectées sur Terre jusqu'à présent.

5.4.2 Pulsar de Hulse et Taylor

La première preuve d'observation du rayonnement gravitationnel est venue par la découverte d'un pulsar binaire à Arecibo par les deux physiciens Russell Hulse et Joseph Taylor en 1974. La partie remarquable de ce système d'étoiles binaires, appelé PSR B1913 + 16, est qu'il pourrait être utilisé pour tester les prédictions de la RG. Hulse et Taylor ont collecté des mesures minutieusement précises de la période orbitale pendant plusieurs années, remarquant qu'au fil du temps l'orbite des étoiles se contractaient lentement. Les deux étoiles tournent en orbite toutes les huit heures à des vitesses allant jusqu'à 300 kilomètres par seconde, s'approchant l'une de l'autre et que leurs orbites se rétrécissent à une vitesse de 1 cm/jour. Il s'avère que ce rétrécissement est précisément en accord avec ce qui est attendu par la théorie de la RG si les étoiles émettaient un rayonnement gravitationnel lorsqu'elles tournaient en orbite (Les observations d'Arecibo montrent que l'orbite du pulsar rétrécit exactement à la vitesse prédite par la RG, i.e. l'accord est avec l'équivalent de l'Eq. (5.68), généralisée aux orbites elliptiques). Avec des décennies de données

maintenant en notre possession, l'accord de ce système avec la relativité générale a été mesuré à 2%! [39]. Cette incroyable accord entre les données et la prédiction de la relativité est affiché dans la figure 5.2, qui montre le résultat de plus de 30 ans d'observation de ce système [39]. La figure montre les données d'observation avec des barres d'erreur, et la ligne pleine montre la prédiction théorique par la RG en raison de l'émission d'OG sans écarts substantiels par rapport aux prévisions théoriques. Ce travail a valu à Hulse et Taylor le prix Nobel de physique 1993, et a été la première preuves indirectes soutenant l'existence d'OG.

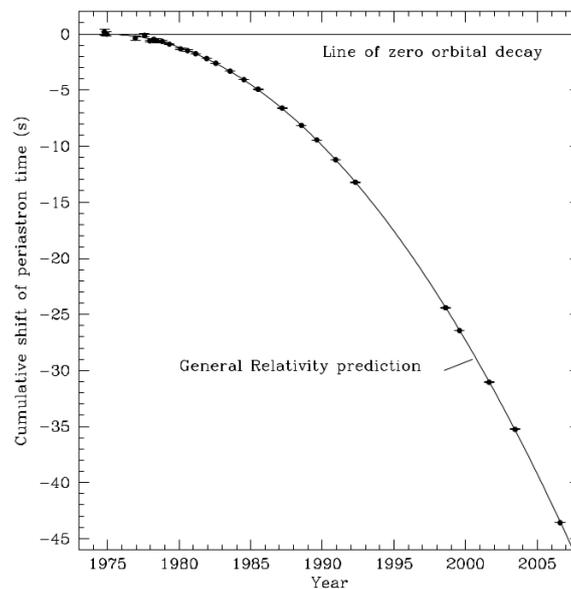


Fig 5.2: Plus de 30 ans de mesures du système binaire pulsar PSR 1913 + 16. Le décalage dans le périastre (position de l'approche la plus proche de l'étoile compagne) est tracé sur l'axe vertical. Cette chemise correspond au rétrécissement de l'orbite lorsque les étoiles à neutrons s'enroulent vers l'intérieur, perdant leur énergie orbitale dans l'émission d'ondes gravitationnelles. Combien d'ondes gravitationnelles peuvent être prédites à partir de la relativité (comme nous l'avons fait dans l'exemple simplifié des binaires circulaires) - la prédiction décrit précisément les données observées à 0,2 % près [39].

5.4.3 Observation d'une fusion de trou noir par le détecteur LIGO

La détection des OG n'est pas une tâche facile. Il faut détecter une déformation de l'espace-temps de l'ordre de $\delta L/L \sim h \approx 10^{-20}$ ou plusieurs amplitudes de moins. Même pour de grandes distances surveillées de quelques kilomètres (longueur de

bras pour les plus grands détecteurs au sol), cela conduit à la nécessité de détecter des distorsions autour de la taille du noyau d'un atome (souvent même une petite fraction de celui-ci).

Principalement, deux types de détecteurs interférométriques kilométriques de troisième génération sont utilisés pour détecter les OG : interféromètre au sol et spatial, dont le fonctionnement est basé sur la mesure d'une variation de distance propre entre deux masses-test.

Actuellement quatre interféromètres opérationnels répartis sur le globe : LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory)[20], VIRGO[21], GEO600[22], KAGRA[23], NANOGrav[24]. Le plus prometteur d'entre eux pour la découverte directe d'ondes gravitationnelles est la collaboration LIGO aux États-Unis. Il se compose de trois interféromètres laser de Michelson. Deux d'entre eux sont situés à Hanford de longueur de bras 2 et 4 km. Le troisième interféromètre se trouve à Livingston de longueur de bras de 4 km. La figure 5.3 illustre schématiquement à quoi ressemble un tel interféromètre.

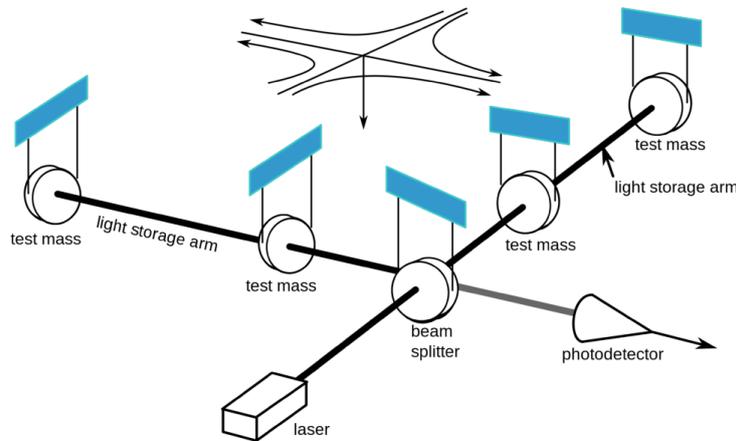


Fig 5.3: Schéma de fonctionnement des détecteurs interférométriques terrestres d'ondes gravitationnelles. Une source laser émet une lumière cohérente, qui passe à travers un séparateur de faisceau et est envoyée dans les deux bras détecteurs de longueur égale. La lumière est reflétée d'avant en arrière plusieurs fois, augmentant la précision de l'interféromètre sans avoir besoin de bras trop longs. Une fois que les photons des deux bras se sont recombinaient pour atteindre le photodétecteur, un motif d'interférence apparaît en conséquence. L'empreinte d'une onde traversant le plan détecteur est laissée sur ce motif d'interférence, dont on peut extraire l'amplitude et l'évolution en fréquence de l'onde gravitationnelle et donc de sa source. Crédits photo: la collaboration LIGO [20].

Les observatoires s'appuient sur le principe de l'interférométrie pour détecter les

ondes gravitationnelles: un laser de haute puissance est envoyé d'une source à travers un séparateur de faisceau qui envoie la moitié du faisceau sur chacun des 4 km bras des interféromètres, qui sont ensuite chacun réfléchis par un miroir aux extrémités des bras, et retournent au séparateur de faisceau où le laser est recombinaé et dirigé vers un photodétecteur qui mesure tout motif d'interférence entre les deux faisceaux. Si une OG traversait l'expérience, un bras du détecteur serait allongé et l'autre comprimé, altérant le temps de parcours lumineux des deux lasers dans les bras, et donc la modification du diagramme d'interférence au niveau du photodétecteur. La "tension" sur les bras peut être mesurée à partir de là, bien que ce soit assez difficile: la longueur du bras ne change que par une taille beaucoup plus petite que le diamètre d'un noyau atomique!

En utilisant les équations que nous avons déjà dérivées, nous pouvons estimer la forme d'une telle déformation sur le détecteur pour le cas du système binaire de trous noirs discuté précédemment. Séparant et intégrant (5.76), nous trouvons que l'expression de la fréquence des ondes gravitationnelles est

$$f(t) = \left[f_0^{-8/3} - \frac{256\pi^{8/3}}{5} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} t \right]^{-3/8}, \quad (5.79)$$

où $f_0 = \Omega_0/\pi = \sqrt{GM/r_0^3}/\pi$ est la fréquence initiale des ondes gravitationnelles. Puis, avec l'expression (5.78) pour l'amplitude, nous pouvons créer la forme d'onde des ondes gravitationnelles:

$$h(t) = h_0(t) \cos[2\pi f(t)t + \pi \dot{f}(t)t^2]. \quad (5.80)$$

La forme d'onde (5.80) décrit l'évolution temporelle des ondes gravitationnelles traversant le détecteur en termes d'amplitude (5.78), de fréquence (5.79) et de taux de changement de fréquence (5.76). L'amplitude des ondes gravitationnelles est proportionnelle à la déformation subie par les bras de l'interféromètre qui s'allongent et se contractent. Pour voir à quoi ressemble cette forme d'onde, nous utilisons les paramètres mesurés pour les trous noirs observés dans l'événement GW150914 au LIGO en septembre 2015 cite Abbott. C'était la première détection directe d'ondes

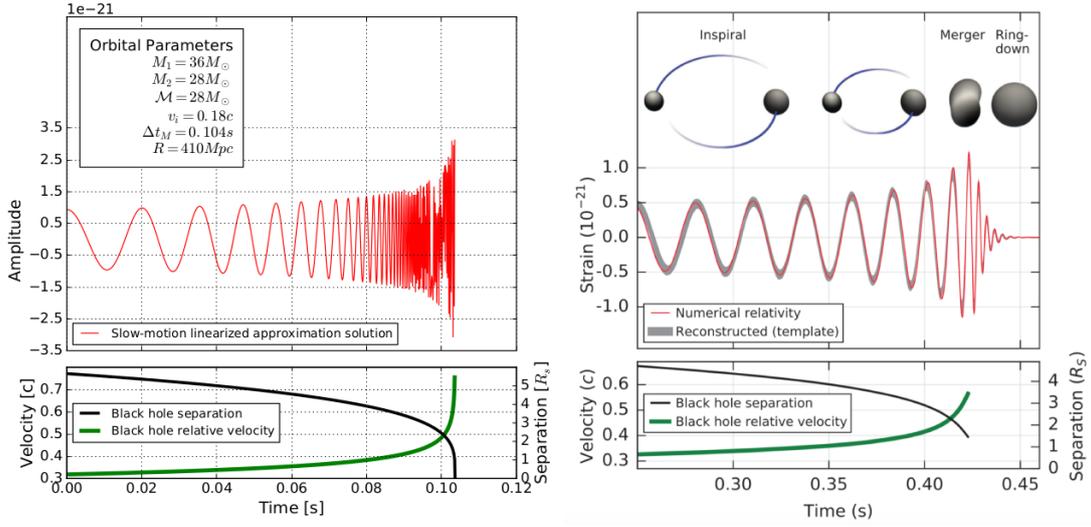


Fig 5.4: (A gauche) Graphique de la forme d'onde binaire du trou noir en fonction du temps, ainsi que de la séparation du trou noir et de la vitesse relative, le tout calculé à partir de notre approximation du mouvement lent de la théorie linéarisée de la RG. (A droite) Simulations informatiques résolvant numériquement les équations d'Einstein pour la forme d'onde des trous noirs binaires coalescents [40]. Notez les valeurs des vitesses, en particulier juste avant la fusion (ainsi que la forme de la forme d'onde). Ici, il devient clair que notre approximation commence à s'effondrer. [40].

gravitationnelles. Les paramètres du binaire sont:

$$M_1 = 36^{+5}_{-4}M_\odot, \quad M_2 = 29^{+4}_{-4}M_\odot \quad (5.81)$$

$$r_0 = 4R_s = \frac{8GM}{c^2}, \quad R = 410^{+160}_{-180}Mpc. \quad (5.82)$$

À partir de ces paramètres, nous trouvons que la masse du chirp est $\mathcal{M} = 28M_\odot$, la luminosité de l'OG pour être $L_{OG} = 4,3 \times 10^{54}$ erg/s ([40] trouve $3,6^{+0,5}_{-0,4} \times 10^{56}$ erg/s utilisant des calculs de relativité numérique), et le temps de fusion pour être $\Delta t_{merge} = 0,104$ s. Nous pouvons également utiliser Eq. (5.68) pour obtenir l'évolution temporelle de la séparation des trous noirs et des vitesses relatives. Ces grandeurs, ainsi que la forme d'onde, sont présentées dans la figure 5.4 aux côtés des résultats obtenus par [40] en utilisant des calculs numériques plus précis. Les données observées de L1 et L2 sont affichées dans la figure 5.5. Nos expressions pour les formes d'onde peut être considérée comme remarquablement précise même à des vitesses relativement élevées (jusqu'à un tiers de la vitesse de la lumière juste avant la fusion!), bien que nos équations soient dérivées de l'hypothèse que la source est

mouvement lent.

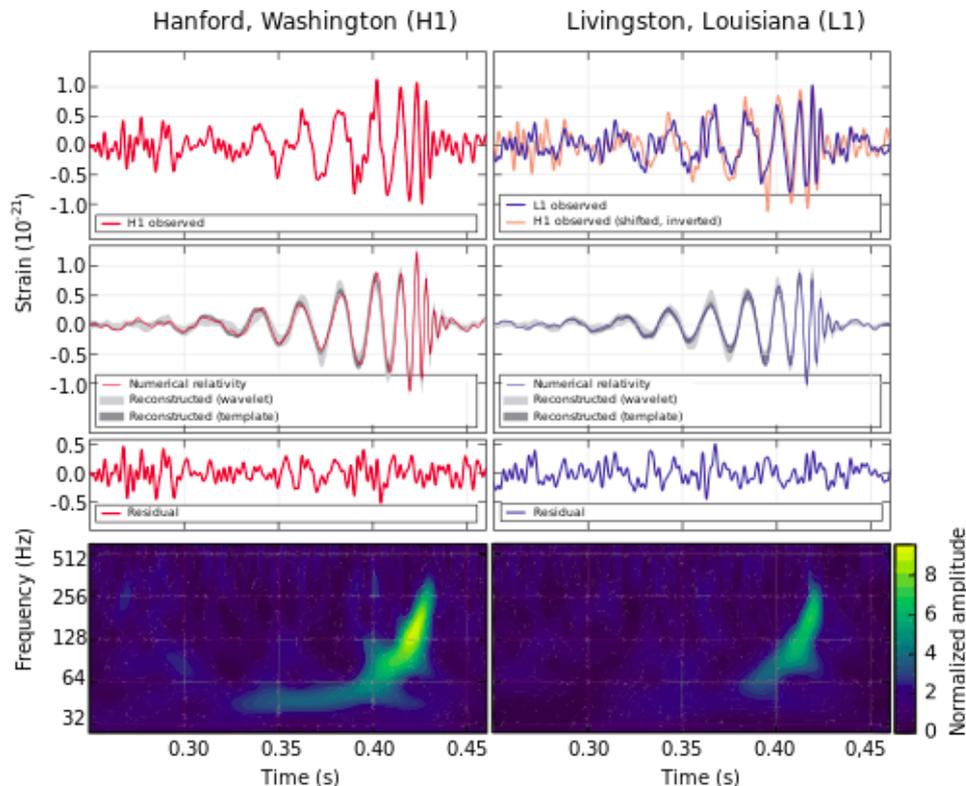


Fig 5.5: Observation de la tension sur les bras de l'interféromètre due aux ondes gravitationnelles [40].

5.5 Coalescences de binaires de trous noirs

Il est reconnu depuis longtemps que les coalescences de systèmes de trous noirs binaires (BBH) pourraient être une source importante d'ondes gravitationnelles [1, 2], à la fois pour les détecteurs interférométriques au sol LIGO [20] et VIRGO [21], et également pour l'éventuel futur interféromètre spatial LISA [26, 27]. Les orbites des BBH se désintègrent progressivement de la perte d'énergie et de moment angulaire au rayonnement gravitationnel. Finalement, ils fusionnent pour former un seul trou noir.

Le processus de l'évolution de la coalescence est couramment divisé en trois phases plus ou moins distinctes :

1. La phase de spiralement

Après la formation d'un système binaire à un moment donné, les deux trous

noirs sont encore loin l'un de l'autre et se déplacent à des vitesses non relativistes sur des orbites presque circulaires (orbites elliptiques) qui s'enroulent lentement vers l'intérieur [42]. Cette phase peut durer plusieurs millions d'années selon la masse du système. Au début, très peu d'énergie est rayonnée hors du système sous la forme d'OG. Cependant, à mesure que la séparation se rapproche de plus en plus, l'amplitude et la fréquence des OG émises augmentent continuellement pendant l'inspiration (signal "chirp") et entraînent une perte rapide d'énergie de rotation du système, donc une diminution continue de la distance entre les deux trous noirs et une augmentation de la vitesse de rotation.

2. La phase de fusion

À un certain moment de l'évolution, les trous noirs deviennent très rapprochés. Par la suite, les trous noirs tomberont très rapidement les uns dans les autres et fusionnent en formant un seul trou noir excité à la suite de la fusion.

3. La phase de vibration (ring-down)

au cours de laquelle le trou noir nouvellement formé rayonne des ondes gravitationnelles sous forme de modes quasi-normaux, de façon à relaxer vers un trou noir de Kerr.

Ces trois étapes sont illustrées dans la figure 5.6. Le signal commence par l'inspiral, où les deux trous noirs sont encore assez éloignés l'un de l'autre. Le signal reçu dans le détecteur est essentiellement un signal sinusoïdal dont l'amplitude et la fréquence augmentent avec le temps à mesure que les trous noirs se rapprochent de plus en plus vite. Cette partie du signal est assez lisse et régulière, et correspond à une valeur relativement petite de v/c . Cette phase peut être traitée à l'aide d'approches perturbatives, notamment en utilisant les développements post-newtoniens.

Ensuite, la fusion se produit, où les deux trous noirs fusionnent l'un dans l'autre formant un dernier trou noir plus grand. Les équations de la relativité générale qui régissent cette phase deviennent hautement non linéaires, et il n'existe pas de modèle analytique complet pour la phase de fusion. Le seul moyen de prédire et modéliser sont les solutions numériques des équations de champ d'Einstein où l'espace-temps est entièrement simulé sur grille.

Enfin, après la fusion des deux trous noirs, le trou noir final en rotation se

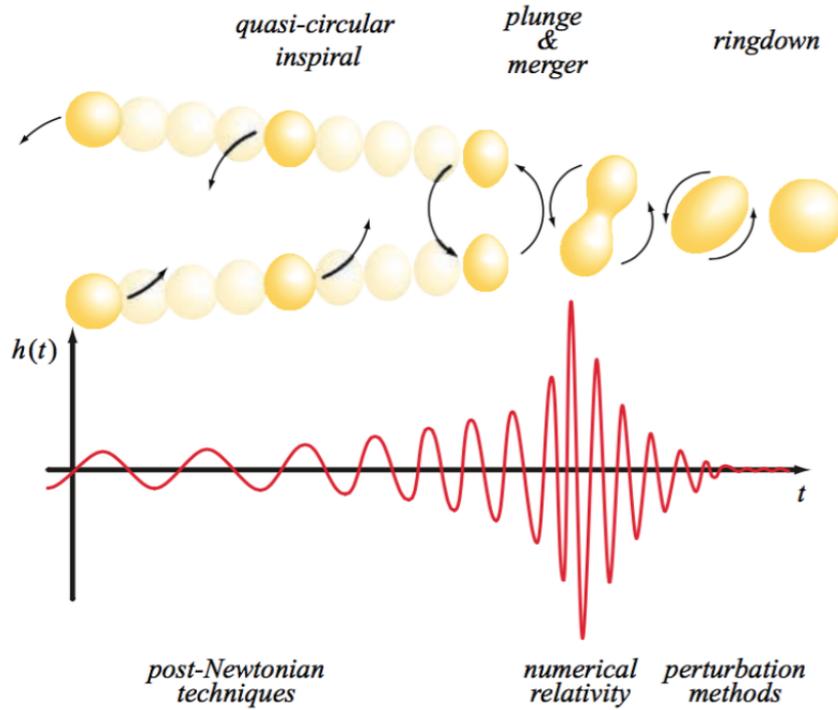


Fig 5.6: Étapes de la coalescence de deux trous noirs esquissées avec le signal de forme d'onde théoriquement prédit [41].

détend et se stabilise. Le signal pendant la sonnerie est constitué d'une combinaison d'ondes sinusoïdales amorties de manière exponentielle. Les fréquences et les temps d'amortissement associés au trou noir tournant final peuvent être étudiés en utilisant la théorie des perturbations du trou noir regardant les perturbations des solutions de Kerr.

Chapitre 6

Conclusion générale

En conclusion, la relativité générale a permis de prédire de nouveaux effets qui n'avaient encore jamais été observés. L'ensemble des tests faits à l'heure actuelle, à savoir Les observations de LIGO, couplées à la découverte de Hulse et Taylor, pour la détection des ondes gravitationnelles par fusion d'un binaire de trous noir présentent des preuves concluantes que ces OG sont en fait une propriété physique de notre univers et tendent à prouver que la relativité générale est hautement satisfaisante pour décrire l'interaction gravitationnelle. En outre, la collaboration LIGO fournit des preuves solides que la plupart des OG observées peuvent être attribués à l'enroulement de deux trous noirs en orbite mutuelle, se terminant par la coalescence des trous noirs, renforçant ainsi notre confiance dans l'existence des trous noirs.

Ces binaires coalescents sont d'un intérêt particulier pour l'astronomie des OG car ils sont parmi les candidats les plus prometteurs pour être détectés en premier lieu. Le rayonnement gravitationnel émis par des trous noirs (ou des paires d'étoiles à neutrons) peut être modélisé avec précision par une variété de méthodes théoriques analytiques et numériques. Cela implique que les recherches de ces systèmes peuvent être conçues en utilisant des algorithmes optimaux basés sur les formes d'onde attendues à détecter. De plus, les binaires coalescents peuvent être utilisés comme bougies standard pour mesurer les distances astrophysiques, car leur amplitude est uniquement déterminée par leur évolution de phase et la distance de luminosité à la source. Peut-être pourrions-nous sonder le fonctionnement interne des trous noirs à travers les ondulations de l'espace qu'ils créent. Ce sont ces perspectives et bien d'autres qui en font une période passionnante pour faire partie de la quête de l'humanité pour comprendre l'univers.

Bibliographie

- [1] A. Einstein. Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.*, 1:688, 1916.
- [2] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.*, 1:154–167, 1918.
- [3] R. Rubenzahl. Gravitational Wave Radiation by Binary Black Holes. PHY 413 FINAL P APER
- [4] Thèse de doctorat présentée par Mr. BELABBAS Abdelmoumene :
LES INTERACTIONS FONDAMENTALES ET LA S TRUCTURE DE L' ESPACE-TEMPS
- [5] A. Einstein, *Die Feldgleichungun der Gravitation (The Field Equations of Gravitation)*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, November 25, 1915, 844-847.
- [6] A. Einstein. *The Foundation of the General Theory of Relativity*, *Annalen der Physik*, **49**, 769 (1916).
- [7] J. B. Hartle. *Gravity*. Addison Wesley, 2003. ISBN 0-8053-8662-9.
- [8] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1970. ISBN 0-7167-0344-0.
- [9] H. Minkowski, *Nachr. Ges. Wis. Göttingen Math. Phys. Kl.*, 53, 1908.
- [10] G. Ricci-Curbastro, *Atti R. Inst. Veneto*, 63:1233, 1904.
- [11] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 844, 1915.

- [12] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzber. König.-Preuss. Akad. Wiss.*, pages 154-167, 1918.
- [13] J. B. Hartle. *Gravity*. Addison Wesley, 2003. ISBN 0-8053-8662-9.
- [14] M. Maggiore. *Gravitational Waves Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008. ISBN 978-0-19-857074-5. Reprint 2013.
- [15] B. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, second edition, 2009. ISBN 978-0-521-88705-2.
- [16] B. Riemann, *Mémoire pour l'Académie de Paris*, 1861, *Gesammelte mathematische werke und wissenschaftlicher nachlass*, B.G. Teubner, Leipzig, 1892.
- [17] L. V. Lorenz, *Philos. Mag.*, 34:287, 1867.
- [18] T. de Donder. *La gravifique Einsteinienne*. Gauthier-Villar, Paris, 1921.
- [19] T. de Donder. *The mathematical theory of relativity*. M.I.T. Press, Cambridge,
- [20] <http://www.ligo.caltech.edu>,
- [21] <http://www.ego-gw.it>
- [22] <http://www.geo600.org>
- [23] <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en>
- [24] <http://nanograv.org>
- [25] eLISA: <http://www.elisascience.org>, ET: <http://www.et-gw.eu>. (Cited on pages 2, 21, 22, 24, 43, and 87)
- [26] Adresses Web ESA & NASA du projet LISA :
<http://sci.esa.int/lisa/> & <http://lisa.jpl.nasa.gov/>.
- [27] K. Danzmann et A. Rüdiger - « Lisa technology–concept, status, prospects », *Class. Quant. Grav.* **20** (2003), p. S1.
- [28] T. Regge and J. A. Wheeler, “Stability of a Schwarzschild singularity,” *Phys.Rev.* **108**(1957) 1063–1069.

- [29] F. Dowker, *Black Holes*, Imperial College London, MSc Quantum Fields and Fundamental Forces, Lecture Notes [2013].
- [30] T. E. Regge, *General relativity without coordinates*, Nuovo Cim. **19** [1961], pgs 558-571.
- [31] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Pearson [2013].
- [32] R. P. KERR, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett., **11** (1963), pp. 237-238.
- [33] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *GRAVITATION*. Gravitation. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [34] K.D. Kokkotas. *GRAVITATIONAL WAVE PHYSICS*. Article in Encyclopedia of Physical Science and Technology, 3rd Edition, Vol 7. Academic Press, 2002.
- [35] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education, Limited, 2004.
- [36] J.B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education, Limited, 2013.
- [37] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, volume 2 of *Course of Theoretical Physics*. Elsevier Science, 2013.
- [38] E. Poisson and C.M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [39] J. M. Weisberg, D. J. Nice, and J. H. Taylor. Timing measurements of the relativistic binary pulsar psr b1913+16. *The Astrophysical Journal*, 722(2):1030, 2010.
- [40] B. P. et al. Abbott. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [41] Baumgarte, T. Shapiro, S. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press (2010)

- [42] P. Peters, “Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses,”
Phys.Rev., vol. 136, pp. B1224–B1232, 1964