



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des sciences de la matière

MÉMOIRE DE MASTER

Département des Sciences de la Matière
Filière de Physique
Spécialité : Physique des Matériaux

Réf. : Entrez la référence du document

Présenté et soutenu par :
Allia Sara Atoua Loubna

Théorie des Perturbations pour le Modèle de la Convection Naturelle en Géophysique

Jury :

| | | | |
|----------------|---------|------------------------------|------------|
| NACER AMEL | M.A | Université Med Khider-Biskra | Président |
| GUERGUEB SAIDA | M.A. | Université Med Khider-Biskra | Rapporteur |
| MOKHTAR FALEK | M.C.«A» | Université Med Khider-Biskra | Examineur |

Année universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENT

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadreur Mme Saida GUERGUEB pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Un grand merci à ma mère et mon père, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

Un grand merci également aux membres de jury d'avoir accepté de me faire l'honneur de participer au jury de ce modeste travail.

En fin de compte, je voudrais remercier tous ceux qui ont contribué dans ce travail de près ou de loin, et j'espère que cela vous plaira.

DEDICACE

Je dédie ce travail :

À ma mère et mon père.

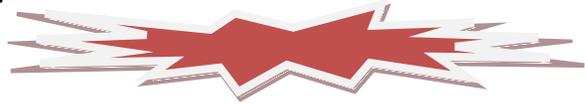
À mes frères.

À ma famille.

À mes professeurs.

À toutes les personnes que j'aime.

NOMENCLATURE :



P Pression normalisée

Re nombre de Reynolds.

Pr nombre de Prandtl ($\frac{\nu}{\kappa}$).

Ra nombre de Rayleigh ($\frac{R_2^5}{\kappa\nu}$)

Gr nombre de Grashof

T Température normalisée

ΔT Différence de température

R_1 Rayon de la sphère interne

k coefficient conductivité thermique

R Rayon normalisé ($\frac{r}{R_2}$)

ν Vitesse azimutale

L Dimension caractéristique [m]

Lettres grecques :

ρ Masse volumique du fluide [Kg/ m³]

μ Viscosité dynamique du fluide [Kg/ (m.s)]

ν Viscosité cinématique du fluide [m²/s]

η Rapport rayon extérieure au rayon intérieur.

θ Angle azimutale

κ Diffusivité thermique

α Coefficient d'expansion thermique

SOMMAIRE



| | |
|--|----|
| INTRODUCTION: | 1 |
| CHAPITRE I: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE | |
| I-1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN MILIEU SPHERIQUE DANS UN LABORATOIRE: | 3 |
| I-2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN GEOPHYSIQUE ET ASTROPHYSIQUE: | 6 |
| CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRASFERT DE CHALEUR | |
| II-1 NOTIONS FONDAMENTALES DE TRANSFERT DE CHALEUR: | 9 |
| II-1-1 Modes de transfert thermique: | 9 |
| II-1-1-1 Transfert de chaleur par conduction: | 10 |
| II-1-1-2 Transfert de chaleur par rayonnement: | 10 |
| II-1-1-3 Transfert de chaleur par convection: | 11 |
| II-2 GRANDEURS SANS DIMENTION: | 12 |
| II-3 NOTIONS FONDAMENTALES D'HYDRODYNAMIQUE:..... | 16 |
| II-3-1 L'équation de conservation de masse: | 16 |
| II-3-2 l'équation de conservation de quantité de mouvement: | 17 |
| II-3-3 L'équation de conservation d'énergie: | 21 |

| | |
|--|----|
| II-4 L'APPROXIMATION DE BOUSSINESQ: | 24 |
| CHAPITRE III: THÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE | |
| III-1 CONCEPT DE BASE: | 28 |
| III-2 NATURE DU PROBLEME PHYSIQUE: | 29 |
| III-3 FORMULATIONS MATHÉMATIQUES DU PROBLEME DES PERTURBATIONS. | 29 |
| III-3-1 Formulation mathématique de l'écoulement de base: | 29 |
| III-3-2 Equations de l'écoulement perturbé: | 31 |
| III-3-3 Analyse de l'instabilité | 34 |
| III-4 ANALYSE DES PERTURBATIONS EN MODES NORMAUX: | 39 |
| III-5 PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE:..... | 43 |
| CHAPITRE VI: RECHERCHE DES VALEURS CRITIQUES Ra | |
| IV-1 PROBLEME A VALEURS CARACTÉRISTIQUES Ra : | 49 |
| IV-2 INTRODUCTION AU CALCUL DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE LA CONVECTION PAR METHODE SPECTRALE: | 56 |
| CONCLUSION | 59 |
| BIBLIOGRAPHIE | 61 |

INTRODUCTION

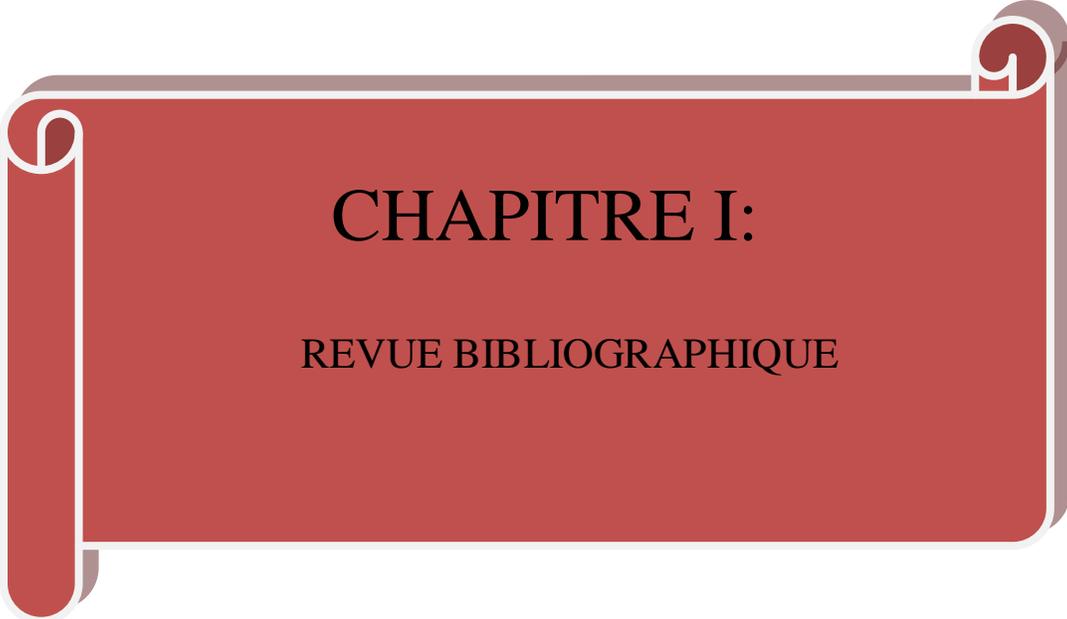
On introduit dans cette étude la méthode des perturbations, d'aspect linéaire, appliquée pour analyser la stabilité d'un système hydrodynamique. Il s'agit de montrer qu'il y a effectivement instabilité thermique pour les conditions et hypothèses de notre problème physique, autrement dit, la convection naturelle dans un espace sphérique et plus particulièrement en géophysique (convection mantellique).

Dans ce présent travail, on introduit dans le premier chapitre une synthèse bibliographique sur les travaux déjà publiés sur la stabilité de la convection naturelle en géophysique, et notamment une revue bibliographique sur le modèle de la convection simulée dans un laboratoire, dans un milieu sphérique.

On présente dans le deuxième chapitre des notions fondamentales d'hydrodynamique, et de transfert de chaleur. On établit ainsi les lois régissant l'écoulement et le transfert thermique.

Une étude théorique est consacrée dans le troisième chapitre à la théorie des perturbations infinitésimales, appliquée pour le modèle de la convection naturelle et particulièrement dans le manteau terrestre. Par une analyse du problème de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un fluide confiné dans une sphère, on établit le principe d'échange de stabilité (il ya instabilité thermique).

Dans le quatrième chapitre, on procède au calcul des valeurs critiques de Rayleigh par la résolution du problème aux valeurs propres dans un espace annulaire sphérique. Le but principal est de déterminer ces valeurs critiques où se manifeste l'instabilité thermique. On rappelle que notre système est soumis à un champ gravitationnel radial comme dans le phénomène de la convection dans le manteau terrestre. Il est intéressant de mettre en évidence l'influence des conditions aux limites sur les valeurs critiques de Rayleigh. On verra par la suite l'effet des parois rigides et des limites libres et notamment l'effet des parois rapprochées.

A decorative red scroll graphic with white outlines and shadows, containing the chapter title. The scroll is oriented horizontally and has a slight 3D effect.

CHAPITRE I:

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION:

Les études laborieuses du célèbre Rayleigh Bénard sur la convection naturelle dans une couche fluide homogène chauffée par le bas ont abouti à la détermination de la structure de l'écoulement bidimensionnel et hexagonal [1].

Le problème de la convection dans un fluide confiné dans un espace annulaire sphérique a suscité l'intérêt d'innombrables chercheurs. Le phénomène de la convection naturelle dans les cavités sphériques est d'une importance considérable vu ses applications diverses dans les réacteurs nucléaires, systèmes de stockage thermiques, les collecteurs sphériques et particulièrement en géophysique et astrophysique.

I.1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN MILIEU SPHERIQUE DANS UN LABORATOIRE:

Des études expérimentales et numériques ont déterminé les modèles d'écoulement et les caractéristiques du transfert de chaleur, pour des rapports donnés de rayons, de nombre de Prandtl et de Rayleigh. Bishop et al. [2] ont réalisé une expérimentation première de la convection naturelle dans un fluide confiné entre deux sphères concentriques isothermes Ils ont rapporté des écoulements permanents d'air ayant des structures cellulaires sous forme de croissant ou d'haricot.

En poursuivant cette recherche expérimentale, Scalan et al. [3] Ont étudié l'influence du nombre Pr (Pr variant de 4.7 à 4148), de ΔT (Différence de température entre les deux sphères), de l'épaisseur de l'espace sphérique $\eta (= \frac{r_o}{r_i} : \text{rapport des rayons exterieur et interieur})$, allant de 1.09 à 2.81. Les auteurs se sont préoccupés seulement des caractéristiques du transfert de chaleur. Pour plus d'information sur l'écoulement, Scalan et al.[4] complètent les premières études expérimentales, en essayant de visualiser l'écoulement laminaire de l'eau et l'air. Le rapport $(\frac{r_o}{r_i})$ allant de 1.09 à 2.17, les structures de l'écoulement sont photographiées pour les valeurs de Rayleigh variant de $1.4 \cdot 10^3$ à 10^7 . Les divers types de figures d'écoulement stationnaires, formes de croissant ou d'haricot, pour l'air et pour $\frac{r_o}{r_i}=1.78$, l'écoulement permanent reste non perturbé jusqu'à une valeur critique de Grashof égale à $2.46 \cdot 10^5$ où l'écoulement devient instable et transitoire.

Des efforts considérables ont été fournis pour approcher numériquement le problème de la convection naturelle dans une géométrie sphérique. Des modèles numériques ont été élaborés dans ce but. Caltagirone et al. [5] ont simulé par la méthode des différences finies le problème de la convection naturelle dans un fluide confiné entre deux sphères isothermes où une différence de température ΔT est maintenue. Le fluide répond au modèle de Boussinesq et est soumis à la force gravitationnelle verticale. Les auteurs présentent leurs résultats en termes de fonction de courant et distribution de température pour des valeurs de Ra variant de 100 à 10^6 . Pour une épaisseur donnée de l'espace, ils trouvent deux structures d'écoulement différentes pour une épaisseur donnée de paramètres, une structure unicellulaire et une autre multicellulaire pour l'air ($Pr=7$), $\frac{r_o}{r_i}=2$, et $Ra=5.10^4$. Les auteurs pensent que cette diversité des solutions est due à l'hypothèse de l'écoulement axisymétrique qui paraît restrictive.

J.L.Wright et al.[6] ont traité par la méthode des perturbations le problème de la convection naturelle dans une cavité sphérique relativement étroite, la surface extérieure étant la plus chaude. Ils établissent l'influence apparente des nombre de Pr, Gr, $\frac{r_o-r_i}{r_i}$ et la présence d'une source de chaleur volumétrique interne, sur la distribution de température et l'écoulement. La variation de Pr (0.01 ;0.1,...) influe sur l'allure des isothermes. Les courbures indiquent une favorisation de la convection. Pour un Pr et $\frac{r_o-r_i}{r_i}$ donnés, l'augmentation du Ra se traduit par la multiplicité cellulaire. Pour un $\frac{r_o-r_i}{r_i}$ relativement petit, la convection est faible, tandis que la variation de la source de chaleur affecte seulement les isothermes où des courbures prononcées sont observées, La structure cellulaire n'est pas influencée.

David. R. Gardner et al. [7] Ont étudié la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un fluide admettant un écoulement de base axisymétrique permanent dont ils déterminent les caractéristiques. Le problème de bifurcation initial qui correspond à une transition d'un régime stable (Grashof faible) à un autre instable (au Grashof critique), est résolu en considérant le problème linéarisé des équations des perturbations. Les solutions sont approchées à l'aide de la méthode spectrale. Elles sont étroitement liées à l'épaisseur de l'espace et du nombre Pr allant de 0 à 0.7, les auteurs calculent les valeurs critiques de Ra, la partie imaginaire du complexe σ , le nombre d'onde m et le nombre de Nusselt Nu. Ils trouvent que pour $0 \leq Pr < 0.31$, la bifurcation est

axisymétrique et dépend périodiquement du temps. Elle est stationnaire et tridimensionnelle pour $Pr > 0.31$.

Douglass et al. [8] ont présenté une analyse de l'effet du nombre de Pr , allant de 1 à 100, sur la stabilité des perturbations axisymétriques. Pour un Pr donné, la valeur de Ra critique croît quand les sphères sont rapprochées. Il y a une décroissance du Ra critique pour les valeurs élevées de Pr (la diffusivité thermique diminue).

Garg et al. [9] Présentent des résultats d'écoulement et de température pour un rapport $\frac{r_o}{r_i}$ égale à 2, pour des valeurs de Pr égales à 0.02 (métal liquide), 0.7 (air), 6(eau) en variant le nombre de Ra ($Ra = 9.10^4, 2.10^5$).

La discrétisation du modèle mathématique est faite par différences finies en bidimensionnel en utilisant la formulation de fonction de courant et de vorticité. Deux structures d'écoulement sont possibles, le modèle passe de la forme d'un crossant à la forme d'un haricot (ou rien) quant Ra augmente. Les auteurs précisent la formation de cellules secondaires en bas de l'espace annulaire (dans la région stagnée).

Hsin Sen Chu et al. [10] ont résolu numériquement le problème de transition et axisymétrique de la convection laminaire dans l'air confiné entre deux sphères concentriques, la sphère intérieure étant la plus chaude. En formulant le modèle mathématique à l'aide de la vorticité et fonction de courant, les équations globales sont discrétisées grâce aux différences finies et sont résolues par la technique des sur-relaxations successives de Gauss (S.O.R). Les résultats de calcul sont donnés pour des rapports de rayons égales à 1.2, 1.5, et 2. L'écoulement et les caractéristiques du transfert thermique sont déterminés graphiquement pour des valeurs de Ra de $10^3, 10^5$, et 5.10^5 , la solution initiale correspond au régime de conduction pure. Les courbes d'isothermes et le déplacement des vortex vers le haut de l'enceinte illustrent d'une façon remarquable la dominance du régime convectif.

I.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CONVECTION NATURELLE EN GEOPHYSIQUE ET ASTROPHYSIQUE :

Le phénomène de la convection naturelle en milieu sphérique a stimulé largement la recherche dans les sciences géophysiques et astrophysiques. La motivation principale de la

recherche dans cet horizon réside particulièrement dans le processus de la convection dans le manteau terrestre et dans d'autres planètes, telles que Mars et Vénus [11]. La tectonique des roches, le visage changeant de la terre, les études sismiques, et aussi la génération du champ magnétique ont poussé à fond les recherches dans le domaine fertile de la convection liminaire en cavité sphérique. Dans la littérature, des modèles mathématiques ont été élaborés pour approcher la convection dans un fluide soumis à un potentiel gravitationnel radial (cas de la convection mantellique)

S. Chandrasekhar [1] établit les bases de la théorie linéaire des perturbations du phénomène de la convection naturelle dans un fluide sphérique et dans un fluide confiné entre deux sphères concentriques, soumis à un champ gravitationnel radial. La chaleur est générée par une source volumétrique uniforme. Il démontre que l'instabilité thermique a lieu pour une valeur critique de Rayleigh qu'il calcule pour $\eta (= \frac{r_o}{r_i})$ donné. Il établit aussi l'influence de la géométrie et des conditions aux limites de surfaces rigides et libres sur les valeurs critiques de Ra.

Busse et al. [12], par une étude analytique, analysant des perturbations infinitésimales à l'aide de la méthode spectrale, donnent les solutions du problème linéaires correspondant à l'état perturbé. En tenant compte des effets non linéaires qui ont été négligés dans la théorie de Chandrasekhar [1], et ceci dans le but de lever la dégénérescence, Busse dérive une condition de stabilité. Des solutions stationnaires indépendantes sont calculées pour les valeurs paires du nombre d'onde l (degré de l'harmonique sphérique). Dans la deuxième partie, Busse et al. [13] déterminent les modèles d'écoulement du problème linéaire de la convection naturelle en se basant sur les solutions correspondant aux valeurs impaires de l (1,2,3). Ils discutent la stabilité des solutions en résolvant le problème aux valeurs propres σ (amplitude des perturbations). Le mode correspondant à $l=3$, est étudié en détail. Il lui correspond trois modèles d'écoulement parmi lesquels un écoulement axisymétrique mais instable et un autre tridimensionnel à symétrie tétra hydrique. Par l'analyse de stabilité, ce dernier s'avère stable. Il est à noter que la seule restriction remarquable dans cette étude est qu'elle est faite pour les valeurs de Ra proche de Ra critique.

En géophysique, le modèle de convection naturelle dans un fluide à Pr infini (fluide extrêmement visqueux) a été intensivement étudié. En effet, Zebib et al. [14-17] ont étudié le

problème axisymétrique permanent de la convection dans un fluide newtonien répondant au modèle de Boussinesq. En adoptant la technique de Galerkin (méthode spectrale), ils déterminent les valeurs critiques de Ra pour lesquelles démarre la convection ainsi que les structures pour différents modes d'échauffement du fluide convectant dans l'état perturbé. La détermination des solutions est suivie par une étude de stabilité de ces dernières envers des perturbations tridimensionnelles. Ces auteurs ont trouvé qu'il y avait deux classes de solutions pour le modèle d'écoulement : des solutions dites 'paires', qui sont des cellules symétriques par rapport au plan équatorial et des solutions 'impaires', dont correspond des cellules non symétriques. L'analyse de stabilité démontre que les solutions impaires sont les préférables et ceci pour leur stabilité.

Bercovici et al. [18-19] présentent les solutions du modèle tridimensionnelle de la convection naturelle dans un fluide à Pr infini, dans un champ gravitationnel radial (cas du manteau terrestre). Ils déterminent les structures de l'écoulement perturbé (perturbations à amplitudes finies), à symétrie cubique et tétraédrique, pour les valeurs de Ra égales à cent fois la valeur critique. Les auteurs comparent les résultats de deux codes différents, l'un conforme au modèle de Boussinesq et l'autre suit un modèle approximant l'écoulement compressible, proche du cas réel.

CHAPITRE II

NOTIONS FONDAMENTALES DE
MECANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT
DE CHALEUR

INTRODUCTION:

L'étude analytique et notamment numérique d'un problème de convection nécessite des connaissances approfondies dans les domaines de mécanique de fluide et de transfert de chaleur. Ces deux branches sont intimement liées puisque notre problème physique traite un écoulement de fluide avec transfert de chaleur.

La chaleur est une forme d'énergie qui s'écoule sous l'effet d'une différence de hautes températures vers les basses températures. Elle pénètre, comme la gravité, les substances de l'univers et concourt à tous ses phénomènes.

Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace. Le but de l'analyse des transferts de chaleur est d'identifier quels sont les modes de transfert mis en jeu au cours de la transformation et de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps.

II .1 NOTIONS FONDAMENTALES DE TRANSFERT DE CHALEUR :

Le transfert thermique est une branche de l'ingénierie thermique qui s'intéresse à l'étude de la chaleur ou de la quantité de chaleur et de son échange à travers les systèmes physiques.

Selon le deuxième principe de thermodynamique, le transfert de chaleur a lieu d'une région à haute température à une région à basse température.

Le transfert de chaleur s'effectue par trois méthodes, qui sont la convection, la conduction et le rayonnement. Nous allons les citer brièvement.

II .1.1 Modes de transfert thermiques

II .1.1.1 Transfert de chaleur par conduction :

CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MECANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

C'est le processus de transfert d'énergie thermique par la diffusion et la collision de particules microscopiques à l'intérieur du corps en raison du gradient thermique, autrement dit la température est réduite des molécules à haute température aux molécules à basse température en raison de la collision entre elles. La conduction se produit sous toutes les formes d'une substance pondérée, comme les matériaux solides et liquides, les gaz et le plasma.

Dans ce type de transfert de chaleur, nous avons une loi de Fourier, qui est une loi reliant le processus de transfert de chaleur à la conduction et aux facteurs qui l'affectent, et nous notons qu'elle est liée à la résistance thermique avec la température afin de calculer la quantité de chaleur qui passe dans le milieu. La loi de Fourier [20]., sous sa forme la plus simple est donnée comme suit :

$$q_x = -k A \frac{\partial T}{\partial x}$$

Avec :

q_x : la quantité de chaleur

k : le coefficient de conduction : c'est la quantité de chaleur qui traverse l'espace par unité de temps [W/m². k]

A : la surface à travers laquelle la quantité de chaleur passe [m²]

T : la température.

II .1.1.2. Transfert de chaleur par rayonnement :

Cette situation est à l'opposé de ce que nous avons vu précédemment dans la transfert de chaleur par conduction parce que dans cet état, il n'y a pas de particules de transfert de chaleur , en d'autre terme il n' y a pas de support ente l'émetteur et le récepteur.

Le transfert de chaleur par rayonnement se fait par rayonnement électromagnétique dans le vide qui est produit lorsque les particules de matière s'accélèrent pour donner à la fin, un rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus important de ce cas est la transmission de la lumière solaire vers la terre.

La quantité de chaleur est calculée par la relation suivante :

$$q = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Avec :

q : la quantité de chaleur

A : coefficient de transfert de chaleur par rayonnement

T : la température en kelvin k

σ : constante de Stefan Boltzmann , égale $5,67 \cdot 10^{-8}$ [W/m².k⁴].

II .1.1.3. Transfert de chaleur par convection :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction de l'accumulation d'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz.

D'abord, la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, l'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules.

Ensuite, ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. [21]

II .1.1.3.1 Les différents types de la convection

- **La convection libre ou naturelle :**

La convection naturelle est un mode de transfert de chaleur d'un milieu chaud vers un milieu froid, par un transport macroscopique de la matière (mouvement des particules fluides) généré par des effets de poussée d'Archimède lié à l'action du champ de pesanteur et à la présence d'un gradient de la température. [22].

- **La convection forcée :**

Le mouvement de fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur, etc.) qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement de fluide. [22].

II.2 GRANDEURS SANS DIMENSION

Ces grandeurs sans dimension (ou grandeurs adimensionnelles) interviennent particulièrement en mécanique des fluides et pour la description de phénomènes de transfert lorsqu'on utilise la similitude de modèles réduits ou théorie des maquettes et construit l'interprétation des résultats d'essais. Elles portent le nom de nombres sans dimension, nombres adimensionnels, ou encore des nombres caractéristiques. Les nombres adimensionnels les plus utilisés dans le domaine de convection sont [21] :

- **Le Nombre de Reynolds Re :**

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit comme suit :

$$Re = \frac{LU}{\nu}$$

Où :

Re : nombre de Reynolds

U : vitesse caractéristique du fluide [m/s]

ν : viscosité cinématique de fluide [m²/s]

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

L : dimension caractéristique [m]

- **Le Nombre de Prandtl Pr :**

Un nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. C'est le rapport de

la viscosité cinématique ν et diffusivité thermique κ , ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien allemand :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

• **Le Nombre de GRASHOF Gr :**

Le nombre de Grashof est un nombre sans dimension, nommé d'après Franz Grashof. Le nombre de Grashof est défini comme étant le rapport entre la force de flottabilité et la force visqueuses agissant sur un fluide dans la couche limite de vitesse. Son rôle dans la convection naturelle est à peu près identique à celui du nombre de Reynolds en convection forcée.

La convection naturelle est utilisée si ce mouvement et ce mélange sont causés par des variations de densité résultant de différences de température dans le fluide. Habituellement, la densité diminue en raison d'une augmentation de la température et entraîne la montée du fluide. Ce mouvement est provoqué par la force de flottabilité. La force majeure qui résiste au mouvement est la force visqueuse. Le nombre de Grashof est un moyen de quantifier les forces en présence.

Le nombre de Grashof est défini comme suit :

$$Gr = \frac{\text{forces de flottabilité}}{\text{forces visqueuses}} = \frac{g\beta(T_{\text{mur}} - T_{\infty})L^3}{\nu^2}$$

où:

g est l'accélération due à la gravité terrestre;

β est le coefficient de dilatation thermique;

T_{mur} est la température du mur;

T_{∞} est la température de masse;

L est la longueur verticale;

ν est la viscosité cinématique.

Pour les gaz, $\beta = 1 / T$ où la température est exprimée en Kelvin. Pour les liquides, il est possible de calculer β si la variation de la masse volumique avec la température à pression constante est connue. Le nombre Grashof est étroitement lié au nombre de Rayleigh, qui est défini comme le produit du nombre Grashof, qui décrit la relation entre la flottabilité et la viscosité dans un fluide, et le nombre de Prandtl, qui décrit la relation entre la diffusivité du moment et la diffusivité thermique.

•**Le Nombre de Rayleigh Ra :**

C'est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante. On peut le définir comme étant le produit du nombre de Grashof, reliant les effets de la force gravifique à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl. Ce nombre porte le nom de Lord Rayleigh, physicien anglais. On le définit de la manière suivante :

$$Ra = Gr * Pr$$

Il faut nécessairement mentionner Rayleigh qui est un ajout à la température en chauffant ou soustrayant la température en refroidissant, quant au Rayleigh il n'y a pas de fraction entre les particules de fluide et la surface, aussi la température affecte clairement le flux. Il est donné par la formule suivante:

$$Ra = \frac{\Delta \rho g L^3}{D \mu}$$

Où:

- $\Delta \rho$ est la différence de densité entre les deux parcelles de matériau qui se mélangent
- g est l'accélération gravitationnelle locale
- L est l'échelle de longueur caractéristique de la convection
- D est la diffusivité de la caractéristique qui cause la convection
- μ est la viscosité dynamique.

VORTICITÉ :

C'est la qualité de ce qui tourbillonne pour un débit d'eau, un écoulement liquide. La vorticité est définie comme le rotationnel de la vitesse : (On verra une autre définition tensorielle ultérieurement)

$$\vec{\omega} = \text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

VISCOSITÉ :

La viscosité est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation. Deux grandeurs physiques caractérisent la viscosité [23] :

- **Viscosité dynamique :**

Lorsque deux couche de fluide glissent, il existe une force de frottement inversement proportionnelle à la distance Δz et proportionnelle à la vitesse des couches Δv et à la surface S

$$F = \mu \cdot S \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

Le facteur de proportionnelle est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Dimension : $[\mu] = M.L^{-1}.T^{-1}$. [23]

- **Viscosité cinématique :**

La viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique μ et la masse volumique ρ . $\nu = \frac{\mu}{\rho}$; $[\nu] = L^2.T^{-1}$. [23]

II.3. NOTIONS FONDAMENTALES D'HYDRODYNAMIQUE :

On ne peut traiter un problème de convection sans établir les équations de base de l'écoulement du fluide considéré. De ce fait, des connaissances des lois de mécanique de fluide sont essentielles.

II.3.1. L'équation de conservation de masse (ou de continuité) :

Dans le fluide étudié, considérons un volume matériel $V_m(t)$. La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{V_m(t)} \rho dV \quad (II, 1)$$

Où ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni puits ni source, la masse qui se trouve dans $V_m(t)$ est constante et on peut écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0 \quad (II, 2)$$

En appliquant le théorème de transport au volume $V_m(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (II, 3)$$

Et l'équation (II,2) devient:

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (II, 4)$$

Si le volume $V_m(t)$ ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur la surface A_m peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{V_m(t)} \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} dV \quad (II, 5)$$

L'équation (II,4) devient :

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right] dV = 0 \quad (II, 6)$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrande doit être identiquement nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (II, 7)$$

II.3.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement :

Considérons à nouveau un volume de control matériel $V_m(t)$. la quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV \quad (II, 8)$$

Le principe fondamentale de la dynamique indique que la variation de quantité de mouvement de ce système matériel est égale à la toute les force extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F}_{ext} \quad (II, 9)$$

Dans la plupart des situations (classiques), deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans V_m :

- (1) les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\int_{V_m(t)} \rho \vec{g} dV \quad (II, 10)$$

- (2) les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface $A_m(t)$. nous écrivons ce type de force sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) dA \quad (II, 11)$$

Dans cette expression, \vec{n} désigne la normale extérieure et :

$$\delta \vec{f} = \vec{t}(\vec{n}) dA \quad (II, 12)$$

Qui représente la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface dA de normale \vec{n} et $\vec{t}(\vec{n})$ est le vecteur contrainte agissant sur dA .

L'expression (II,9) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V_m(t)} \rho \vec{g} dV + \int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) dA \quad (II, 13)$$

Pour simplifier cette première présentation des équations de la mécanique des fluides, nous allons projeter l'équation précédente sur les axes d'un système cartésien fixe.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\vec{n}) dA \quad (II, 14)$$

Dans cette expression, $t_i(\vec{n})$ désigne la projection sur l'axe i du vecteur contrainte. Pour continuer, il faut écrire $t_i(\vec{n})$ de façon plus explicite. On a besoin pour cela de résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

Une analyse détaillée de l'état des contraintes est effectuée à l'annexe A. cette analyse conduit aux résultats suivants :

$$t_i(\vec{n}) = T_{ij} n_j \quad (\text{la notation d'Einstein est utilisée ici})$$

$$\text{Et} \quad T_{ij} = T_{ji} \quad (i=1,2,3 \quad \text{et} \quad j=1,2,3) \quad (II, 15)$$

La première expression indique que la composante i du vecteur contrainte est donnée par le produit scalaire du tenseur des contraintes T dont les composantes sont T_{ij} et du vecteur normale n de composantes n_j . La seconde expression indique que le tenseur T_{ij} est symétrique.

Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous les expressions des trois composantes du vecteur contraintes sous forme totalement explicite :

$$\begin{aligned} t_1(\vec{n}) &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ t_2(\vec{n}) &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ t_3(\vec{n}) &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3 \end{aligned} \quad (II, 16)$$

D'un point de vue physique, il est intéressant de décomposer la contrainte en deux parties :

* la contrainte associée à la pression

* la contrainte associée aux forces visqueuses

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation du fluide. On peut écrire dans ces conditions :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{II,17})$$

T_{ij} : Tenseur des Contraintes

Où $p\delta_{ij}$: Tenseur des Contraintes associées à La pression

τ_{ij} : Tenseur des Contraintes visqueuses

La projection du vecteur contraintes sur l'axe i est alors donnée par :

$$t_i(\vec{n}) = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j \quad (\text{II,18})$$

Soit encore :

$$t_i(\vec{n}) = -pn_i + \tau_{ij} n_j \quad (\text{II,19})$$

Cette expression s'écrit manière extensive :

$$\begin{aligned} t_1(\vec{n}) &= -pn_1 + \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ t_2(\vec{n}) &= -pn_2 + \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ t_3(\vec{n}) &= -pn_3 + \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{aligned} \quad (\text{II,20})$$

En rapportant l'équation (II,18) dans l'équation (II,14), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j dA \quad (\text{II, 21})$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, on écrit :

$$\int_A b_j n_j dA = \int_V \frac{\partial b_j}{\partial x_j} dV \quad (\text{II, 22})$$

L'expression (II,21) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) dV \quad (II, 23)$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV - \int_{V_m(t)} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_{V_m(t)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (II, 24)$$

D'après le théorème de Leibntiz, l'équation devient :

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_m(t)} [\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}] dV \quad (II, 25)$$

Le volume de contrôle $V_m(t)$ étant arbitraire et les intégrantes apparaissant dans les deux membres doivent être identiques, alors:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (II, 26)$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quantté} \\ d'accélération \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Forces associées} \\ \text{à la pression par} \\ \text{unité de} \\ \text{volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Forces} \\ \text{de volume} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{contraintes} \\ \text{visqueuses} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} \quad (II, 27)$$

Pour fixer les idées, nous allons maintenant écrire l'équation (II,26) sous forme explicite et pour les trois composantes :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (II, 28)$$

- **Fluide newtonien:**

On assume que pour un fluide newtonien, chaque élément du tenseur des contraintes est relié au taux de déformation par la relation :

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}v_k + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_i}v_j$$

Donc, nos équations de conservation de mouvement deviennent :

$$\rho\left(\frac{dv_i}{dt} + v_j\frac{\partial}{\partial x_j}v_j\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v_i\right) \quad (II, 29)$$

Enfin, les équations précédentes données par (II, 29) sont celles de Navier-Stokes exprimant la conservation de quantités de mouvement.

II .3.3 Equation de conservation de l'énergie

Pour établir une équation locale exprimant la conservation de l'énergie, nous partons de l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un volume matériel $V_m(t)$ l'énergie contenue dans le volume $V_m(t)$ a pour expression :

$$\int_{V_m(t)} \rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)dV \quad \text{où } e \text{ est l'énergie interne.}$$

Le taux de variation de cette énergie est donné par :

$$\int_{V_m(t)} \rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)dV = W + Q \quad (II, 30)$$

Le travail par unité de temps W qui apparaît au second membre est celui des forces de volume et des contraintes appliquées à la surface du volume :

$$W = \int_{V_m(t)} \rho\vec{g}\vec{v}dV + \int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n})\vec{v}dA \quad (II, 31)$$

**CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MECANIQUE DE FLUIDE ET DE
TRANSFERT DE CHALEUR**

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du volume et nous désignons par q le flux de chaleur par conduction. Ainsi, $-q \cdot \vec{n}$ représente la chaleur qui passe par unité de surface et de temps à travers la surface de contrôle $A_m(t)$:

$$Q = - \int_{A_m(t)} q \cdot \vec{n} dA \quad (II, 32)$$

En substituant les expressions (II,31) et (II,32) dans l'équation (II,30) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_m(t)} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) \cdot \vec{v} dA - \int_{A_m(t)} q \cdot \vec{n} dA \quad (II, 33)$$

Pour déduire une équation locale de cette relation, il faut transformer les premier, troisième et quatrième termes.

D'après le théorème de Leibnitz et Green Ostrogradsky, elle devient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int_{V_m(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \\ &= \int_{V_m(t)} \rho g_i v_i dV + \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho (\tau_{ij} v_i) \right] dV - \int_{V_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \end{aligned} \quad (II, 34)$$

avec:

$$\int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) \cdot \vec{v} dA = \int_{A_m(t)} t_i(\vec{n}) v_i dA = \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho (\tau_{ij} v_i) \right] dV$$

Et :

$$\int_{A_m(t)} q \cdot \vec{n} dA = \int_{V_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV$$

Le volume $V_m(t)$ est arbitraire et par conséquent :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho g_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho (\tau_{ij} v_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (II, 35)$$

L'équation d'énergie peut être écrite sous d'autres formes :

1. l'équation d'énergie mécanique :

Elle est dérivée à partir de l'équation de quantité de mouvement, au multipliant par \vec{V} . En notation symbolique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} V^2 \right) + \nabla^2 \left(\rho \vec{V} \frac{1}{2} V^2 \right) = -\vec{V} \vec{\nabla} p + \vec{V} \vec{\nabla} \vec{\tau} + \rho \vec{V} \vec{F} \quad (II, 36)$$

2. l'équation d'énergie thermique :

C'est l'équation résultant de la différence de l'énergie totale et de l'énergie mécanique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j e) = -p \frac{\partial}{\partial x_j} v_j + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} q_i \quad (II, 37)$$

On a : $e = c_V T$ (énergie interne)

Et en tenant compte de l'équation de continuité :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (c_V T) + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (c_V T) = -\frac{\partial}{\partial x_i} q_i + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j - p \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \quad (2,38)$$

Où :

$$\tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \tau_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) = \left[-\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_i \right) + 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right)$$

$$\phi_v = \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_i \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_i$$

τ_{ij} : est le tenseur de contraintes visqueuses

μ : est la viscosité dynamique

Le transfert de chaleur le plus dominant est la conduction :

$$q_i = -k \frac{\partial}{\partial x_j} T$$

Enfin, les équations (II,7) ,(II,29) et (II,38) sont les équations de base d'un écoulement compressible ,visqueux et newtonien [24], [25]

II.4. L'APPROXIMATION DE BOUSSINESQ :

Elle est appliquée aux situations physiques où la densité du fluide et les autres propriétés thermodynamiques subissent de faibles variations pour de faibles variations de température (de l'ordre de 10°) et où le coefficient d'expansion α est petit. Alors, les propriétés thermodynamiques sont prises constantes sauf dans le terme gravitationnel (ρF_i) qui ne peut être ignoré relativement au terme d'inertie. La variation de ρ en fonction de la température est donné comme suit :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad \text{(II,39)}$$

Où :

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \rho}{\Delta T}$$

T_0 : température de référence, pour notre cas $T_0 = T_c$ (température de la paroi froide).

α : Le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

ρ_0 : Masse volumique du fluide à T_0 .

Et : $\rho - \rho_0 = \delta \rho$ (petite variation)

Avec cette approximation de BOUSSINESQ , les équations de base sont simplifiées, en effet :

- **L'équation de continuité devient :**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad \text{(II,40)}$$

ou encore $\frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0 \quad \text{(II,41)}$

relation équivalente à $div \vec{V} = 0$ (deux indices se répètent : c'est une somme)

- **Les équations de mouvement de Navier-Stokes deviennent :**

**CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MECANIQUE DE FLUIDE ET DE
TRANSFERT DE CHALEUR**

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = \rho g_i - p \frac{\partial}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) \quad (\text{II,42})$$

Où : $\frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0$ (équation de continuité)

En remplacement dans l'équation de mouvement (dans le terme gravitationnel)

$$\rho = \rho_o + \delta\rho$$

Et dans les autres termes ρ par ρ_o :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + (\rho_o + \delta\rho) g_i + \nu \nabla^2 v_i \quad (\text{II,43})$$

Remarquons que: $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta$ et $\nu = \frac{\mu}{\rho_o}$

Donc :

$$\rho_o \left(\frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_o} \right) g_i + \nu \nabla^2 v_i \quad (\text{II,44})$$

L'équation d'énergie devient :

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = \rho c_V \left(\frac{\partial}{\partial t} T + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} T \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial}{\partial x_j} T \right) - p \frac{\partial}{\partial x_j} v_j + \Phi_v \quad (\text{II, 45})$$

Ici : $\Phi_v = 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$ (dissipation visqueuse)

donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} T + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} T = C \nabla^2 T + \Phi_v \quad (\text{II, 46})$$

Où : $C = \frac{k}{\rho c_V}$

CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MECANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

La dissipation visqueuse, dans l'approximation de Boussinesq et en comparaison avec le terme conductif, peut être ignorée.

Ainsi, l'équation de conduction de chaleur devient :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} T + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} T = C \nabla^2 T \quad (II, 47)$$

Enfin les équations (II,41) ,(II,44) et (II,47) sont les équations de base de Boussinesq, instantanées décrivant l'écoulement.

CHAPITRE III :

THEORIE DES PERTURBATIONS
ET PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE
THERMIQUE
DANS UN MILIEU SPHERIQUE.

III.1 CONCEPT DE BASE:

Une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un milieu sphérique a été présentée par Chandrasekhar(1961). Il établit ses fondations théoriques et ses concepts de base. Dans cette analyse, on démontre en premier, la validité du principe d'échange de stabilité et par suite la résolution du problème aux valeurs propres. On détermine les valeurs critiques du paramètre Rayleigh Ra pour lesquelles se manifeste la première bifurcation. On parle de théorie de stabilité linéaire car en fait, elle traite des perturbations qui sont infinitésimales comparées à l'état initial du système linéaire, elle n'est valable et applicable que dans un domaine restreint du paramètre Ra . En effet, ces perturbations qui augmentent exponentiellement avec le temps, dans les conditions favorables, atteignent rapidement une amplitude telle que le produit de ces termes cessent d'être négligé.

Dans le problème linéaire, les produits des termes des perturbations infinitésimales d'un ordre supérieur à un seront négligeables. Ainsi, les équations des perturbations seront linéarisés. En revanche, dans la théorie non linéaire, les perturbations ont une amplitude finie et les effets non linéaires sont pris par conséquence en considération.

La théorie de stabilité linéaire de la convection naturelle nécessite la connaissance de quelques concepts de base essentiels. Un système hydrodynamique est dans un état stable si toutes les variables physiques le décrivant sont indépendantes du temps, dans le cas contraire, il est instable. Un système soumis à des perturbations infinitésimales relativement à ses variables physiques dans son état de base est dit stable, si ces fluctuations disparaissent graduellement. Il est instable si leurs amplitudes progressent dans le temps, et le système ne revient plus à son état initial.

On définit un état de stabilité neutre séparant les deux états stables. Le passage de l'état stable à l'état instable se fait à travers cet état neutre, quand le paramètre Ra atteint une certaine valeur critique. On dira que l'instabilité est établie à cette valeur critique. Les perturbations peuvent évoluer périodiquement, alors l'écoulement présentera des cellules stationnaires. Dans le cas où elles évoluent par des oscillations croissantes ou décroissantes, les mouvements sont alors oscillatoires avec des fréquences caractéristiques définies.

Chandrasekhar démontre que la convection naturelle dans une cavité sphérique, dans un champ gravitationnel radial, présente une structure cellulaire stationnaire.

III.2. NATURE DU PROBLEME PHYSIQUE :

Un fluide newtonien, obéissant à l'approximation de Boussinesq, visqueux est confiné dans un espace annulaire sphérique. Un gradient de température est y maintenu par une source de chaleur uniforme, le fluide étant soumis seulement au champ gravifique. Si la distribution de la densité était régulière, la force de pesanteur appliquée à un élément de volume extrait du fluide serait équilibrée par la force d'Archimède d'expulsion et pourrait ne pas être prise en compte. Cependant, à cause du gradient de température maintenu dans le fluide, la distribution de la densité est irrégulière, en d'autre terme, la densité dépend de la température du fluide. L'action de la pesanteur n'étant pas alors équilibrée par la force d'Archimède. Par expansion thermique, le fluide sera le siège d'une circulation à courant ascendant dans la partie la plus chaude et à courant descendant dans la partie de l'espace à température la plus basse. Ces deux courants s'expliquent par l'effet du potentiel gravitationnel, le fluide le plus léger et donc le plus chaud monte tandis que le fluide dans la partie froide et donc lourd, aura tendance à se redistribuer lui-même pour combler le manque de masse provoqué par le fluide chaud.

Ainsi le principe de conservation de masse n'est pas violé. Cependant, cette tendance naturelle est contrôlée par la viscosité du fluide. Ceci conduit à dire que le gradient de température maintenu par la source de chaleur devrait atteindre une certaine valeur avant que l'instabilité ou la convection ne se manifeste.

III.3 FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME DES PERTURBATIONS :

III.3.1 Formulation mathématique de l'écoulement de basse :

Le traitement mathématique du problème de la stabilité de la convection naturelle dans un milieu sphérique passera par les étapes suivantes :

- Déterminer l'écoulement de basse du fluide dans son état initial, les équations de base étant les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie.

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

- L'état initial est soumis à de faibles perturbations, mathématiquement parlant, des quantités infinitésimales seront ajoutées aux variables physiques indépendantes décrivant l'écoulement telles que la vitesse, la température et la pression.

Les équations régissant l'écoulement et le transfert de chaleur sont réécrites pour cet état perturbé. L'étude analytique de la stabilité de la convection naturelle dans une enceinte sphériques ou dans un espace annulaire sphérique fait intervenir des notions mathématiques d'un niveau supérieur.

Pratiquement, on assume que la perturbation est une superposition de certains modes et la stabilité du système sera examiné envers chaque mode. Ainsi, la stabilité du système dépend en particulier de sa stabilité envers toutes les perturbations infinitésimales en termes de modes normaux.

Pour le fluide newtonien visqueux, confiné dans l'espace sphérique une distribution de chaleur est supposé maintenue par une source de chaleur volumétrique uniforme notée ε , dans un état initial. Le fluide est supposé au repos, le champ d'écoulement est alors nul. Dans la littérature [7 - 8], le fluide, initialement, peut être en mouvement, autrement dit, il admet un écoulement de base non nul, qu'on se doit de calculer, ce qui s'avère encore plus compliqué.

Pour l'analyse de la stabilité, les perturbations s'ajouteront aux valeurs moyennes de l'écoulement calculé.

Les équations de mouvement de l'état statique pour un élément de fluide soumis à une seule force de volume qui est la pesanteur en plus des forces de viscosité et de pression, sont écrites en notation tensorielle. On a opté pour cette formulation mathématique pour les simplifications qu'elles peuvent engendrer grâce à certaines propriétés des tenseurs. On ne fera pas allusion à la valeur de Prandtl, qu'elle soit finie ou infinie, et donc pas de restrictions.

Les équations de mouvement projetées sur les axes de coordonnées en notation tensorielle sont réduites à :

$$\partial_i p = \rho X_i \quad (\text{III .1})$$

Ou

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE

$$\partial_i p = -\rho g(r) \quad (\text{III.2})$$

La distribution de température est donnée par l'équation de conduction de chaleur en régime stationnaire où la dissipation visqueuse est négligeable :

$$\kappa \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\varepsilon \quad (\text{III.3})$$

Où $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique.

L'équation (3.3) admet comme solution exacte dans un système de coordonnées sphériques :

$$T(r) = \beta_0 - \beta_2 r^2 \frac{\beta_1}{r} \quad (\text{III.4})$$

Où β_0 et β_1 sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites et :

$$\beta_2 = \frac{\varepsilon}{6\kappa} \quad (\text{III.5})$$

Le champ de température ne dépend que de la position radiale. Les variations de température n'étant pas large, l'approximation de Boussinesq est appliquée, en prenant la densité du fluide constante excepté dans le terme gravitationnel. La densité du fluide est approchée par un développement en séries de Taylor en fonction de la température :

$$\rho = \rho_0 - \alpha(T - T_0) \quad (\text{III.6})$$

α étant l'expansion thermique du fluide à pression constante exprimée par :

$$\alpha = \left. \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (\text{III.7})$$

ρ_0 étant la densité du fluide correspondant à une température de référence T_0 .

Les propriétés thermodynamique telles que la viscosité, la chaleur spécifique, la diffusivité sont considérées constantes.

III.3.2. Equations de l'écoulement perturbé :

CHAPITRE III : T  RIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

Dans cet état perturbé, comme il a été signalé précédemment, chaque variable physique moyenne subit une perturbation infinitésimale. En notant par u'_i , T' , p' et ρ' la vitesse, la température, la pression et la densité du fluide dans l'état perturbé et par u_i , θ , δp et $\delta \rho$ les quantités infinitésimales des perturbations de vitesse, de température, de pression et de densité, alors :

$$u'_i = v_i + u_i \quad (\text{III, 8})$$

$$T' = T + \theta \quad (\text{III, 9})$$

$$p' = p + \delta p \quad (\text{III, 10})$$

$$\rho' = \rho + \delta \rho \quad (\text{III, 11})$$

O   :

$$\rho' = \rho(1 + \alpha\theta) \quad (\text{III, 12})$$

Avec ces nouvelles variables, on r  crit les équations régissant l'écoulement de l'état perturbé.

L'équation de conservation de masse :

$$\partial_i(v_i + u_i) = 0 \quad (\text{III, 13})$$

Qui devient : $\partial_i(u_i) = 0 \quad (\text{III, 14})$

L'équation de conservation de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \{ \partial_0(v_i + u_i) + (v_j + u_j)\partial_j(v_i + u_i) \} \\ = -\partial_i(p + \delta p) + (\rho + \delta \rho)g_i + \mu \nabla^2(v_i + u_i) \end{aligned} \quad (\text{III, 15})$$

Par application de l'approximation de Boussinesq et en développant :

$$\begin{aligned} \partial_0 u_i + u_j \partial_j(u_i) + \partial_0 v_i + v_j \partial_j v_i \\ = -\partial_i \left(\frac{p}{\rho} \right) - \partial_i \left(\frac{\delta p}{\rho} \right) + \left(\frac{\rho + \delta \rho}{\rho} \right) g_i + \nu \nabla^2 v_i + \nu \nabla^2 u_i \end{aligned} \quad (\text{III, 16})$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

On peut remplacer ρ par ρ_0 sauf dans le terme gravitationnel. En retranchant les équations de base des équations de l'état perturbé, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_0 u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_i \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) + \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right) g_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III, 17})$$

Où $u_j \partial_j (u_i) = 0$ (les termes non linéaires sont négligeables).

L'évolution de la densité $\delta \rho$ causée par la perturbation θ de la température est donnée par :

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\alpha \theta$$

Et : $F_i = -g e_i$

Où : e_i est un vecteur unitaire dans la direction de la force gravitationnelle.

Ainsi, les équations de mouvement des perturbations linéaires sont :

$$\partial_0 u_i = -\partial_i \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) + \alpha \theta g e_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III, 18})$$

L'équation de conservation d'énergie :

$$\partial_0 T + \partial_0 \theta + v_j \partial_j T + v_j \partial_j \theta + u_j \partial_j T = C \nabla^2 \theta + C \nabla^2 T \quad (\text{III, 19})$$

En retranchant les équations de base des équations de l'état perturbé, on obtient alors :

$$\partial_0 \theta = -u_j \partial_j T + C \nabla^2 \theta - v_j \partial_j \theta \quad (\text{III, 20})$$

Où : $v_j \partial_j T = 0$ car les termes non linéaires sont négligeables.

Donc :

$$\partial_0 \theta = -u_j \partial_j T + C \nabla^2 \theta \quad (\text{III, 21})$$

Finalement, les équations (III,14) , (III,18) et (III,21) sont les équations de perturbation gouvernant la convection dans le fluide.

III.3.3 Analyse de l'instabilité thermique d'un fluide dans une sphère :

Pour étudier la stabilité de cet état initial, en rapportant ces variables dans les équations de base et tenant compte de l'approximation de Boussinesq, on ignore les produits du premier ordre et plus des perturbations. On obtient les équations suivantes pour cet état perturbé, dans l'espace sphérique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \alpha g(r) x_i \theta + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III, 22})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \kappa \nabla^2 \theta \quad (\text{III, 23})$$

Ici $x_i g(r)$ est l'accélération terrestre.

x_i représente une des coordonnées spatiales sphériques, dans le terme exprimant la force ascensionnelle, x_i est r.

On a:
$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2 \left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3} \right) r \quad (\text{III, 24})$$

Ou encore

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2 \left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3} \right) x_i \quad (\text{III, 25})$$

Soit :
$$\beta(r) = \left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3} \right)$$

Donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2 \beta(r) x_i \quad (\text{III, 26})$$

En rapportant $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ dans l'équation de conduction et en écrivant :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \gamma(r) x_i \theta + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III, 27})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 2 \beta(r) x_i u_i + \kappa \nabla^2 \theta \quad (\text{III, 28})$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

Où :

$$\gamma(r) = \alpha g(r) \quad (\text{III, 29})$$

Il est plus commode d'éliminer les termes de pression ($\frac{\delta p}{\rho}$) et d'obtenir les équations de mouvement en termes en vorticité. En prenant le rotationnelle de l'équation (III,27), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \gamma(r) \theta x_k + \nu \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\text{III, 30})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_i = \gamma(r) \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta x_k + \nu \nabla^2 w_i \quad (\text{III, 31})$$

(j et k : indices de sommation).

On rappelle que:

ω_i est une composante du champs de vorticité défini par :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \quad (\text{III, 32})$$

En notation tensorielle, la composant ω_i est :

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\text{III,33})$$

Le tenseur ε_{ijk} est le tenseur unitaire alternateur antisymétrique défini par :

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } ijk = 123,231,312 \\ 0 & \text{si deux indices sont gaux} \\ -1 & \text{si } ijk = 321,213,132 \end{array} \right\}$$

Un résultat important est obtenu en prenant le rotationnel une seconde fois de l'équation (III,22)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \gamma(r) \partial_l x_m + \nu \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} u_m \quad (\text{III, 34})$$

Sachant que :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (\text{III, 35})$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

Où le terme de gauche devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) = \frac{\partial}{\partial t} (\partial_j \partial_i u_i - \partial_j \partial_j u_i) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i \quad (\text{III, 36})$$

Car : $\partial_i u_i = 0$

Et après développement :

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \gamma(r) \partial_l \theta x_m = \partial_j \gamma(r) (x_j \partial_i \theta - x_i \partial_j \theta) \quad (\text{III, 37})$$

Et :

$$v \nabla^2 (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) = -v \nabla^4 u_i \quad (\text{III, 38})$$

Ainsi, l'équation (III,31) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = \partial_j \gamma(r) (x_j \partial_i \theta - x_i \partial_j \theta) + v \nabla^4 u_i \quad (\text{III, 39})$$

Et en se servant des propriétés du tenseur alternateur, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = -O_i \theta + v \nabla^4 u_i \quad (\text{III, 40})$$

Où : O_i est un opérateur différentiel défini par :

$$O_i = \partial_j \gamma(r) (x_j \partial_i - x_i \partial_j) \quad (\text{III, 41})$$

L'opérateur (O_i) après développement s'écrit :

$$O_i = \gamma(r) (\partial_i + \partial_i x_j \partial_j - x_i \nabla^2) + \frac{1}{r} \frac{d(\gamma(r))}{dr} (r^2 \partial_i - x_j x_j \partial_j) \quad (\text{III, 42})$$

Où : $\frac{1}{r} \frac{d(\gamma(r))}{dr} = \frac{1}{x_j} \partial_j (\gamma(r))$ du fait que $\gamma \equiv \gamma(r)$ seulement, donc x_j correspond ici r.

Et : $\partial_i x_j \partial_j = x_j \partial_i \partial_j - (\partial_i x_j) \partial_j$

On a aussi : $x_i x_i = x_j x_j = r^2$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

En revenant à l'équation de vorticité et en multipliant l'équation (III,31) par la coordonnée spatiale x_i , on obtient l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i w_i) = \gamma(r) \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta x_k x_i + \nu x_i \nabla^2 w_i \quad (\text{III, 43})$$

Sachant que le produit d'un tenseur symétrique et antisymétrique est identiquement nul, l'équation (III,43) est réduite à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i w_i) = \nu x_i \nabla^2 w_i \quad (\text{III, 44})$$

On démontre que le champ de vorticité étant solénoïdal ($\text{div } \vec{\omega} = 0$) alors :

$$x_i \nabla^2 w_i = \nabla^2(x_i w_i) \quad (\text{III, 45})$$

On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i w_i) = \nu \nabla^2(x_i w_i) \quad (\text{III, 46})$$

C'est en fait l'équation de transport de vorticité.

L'équation (III, 40) peut être réduite sous une autre forme. En multipliant les deux membres de l'équation (III,40) par x_i , un résultat important est obtenu, en effet.

$$\nabla^2 \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (x_i u_i) = \gamma x_i O_i \theta \quad (\text{III, 47})$$

Où l'opérateur $x_i O_i$ s'écrit:

$$x_i O_i = \gamma (x_i \partial_i - x_i \partial_i x_j \partial_j - r^2 \nabla^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial x} (r^2 x_i \partial_i - r^2 x_j \partial_j) \quad (\text{III, 48})$$

Et qui devient après développement :

$$x_i O_i = \gamma (x_i \partial_i - x_i \partial_i x_j \partial_j - r^2 \nabla^2) \quad (\text{III, 49})$$

Donc :

$$x_i O_i = \gamma L^2 \quad (\text{III, 50})$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

On définit l'opérateur cinétique du carré du moment angulaire par :

$$L^2 = (x_i \partial_i - x_i \partial_i x_j \partial_j - r^2 \nabla^2) \quad (\text{III, 51})$$

En coordonnées sphérique (r, θ, φ) et L^2 devient alors :

$$L^2 = r \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \nabla^2 \quad (\text{III, 52})$$

Ou encore :

$$L^2 = r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \nabla^2 \right)$$

Sachant que :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{III,53})$$

L'équation (III.47) devient alors :

$$\nabla^2 \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (x_i u_i) = \gamma L^2 \theta \quad (\text{III,54})$$

On voudrait éliminer la perturbation de température de l'équation (III,54) en multipliant à gauche par l'opérateur $(\kappa \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t})$ déduit de l'équation d'énergie (III,28). On obtient alors :

$$\left(\kappa \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma^{-1} \nabla^2 \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (x_i u_i) = -2L^2 \beta(r) u_i x_i \quad (\text{III, 55})$$

Finalement les équation développées (III,28),(III,46) et (III,55) forment l'ensemble du problème de l'écoulement perturbé.

III.3.3.1 : Les conditions aux limites du problème considéré :

Les conditions aux limites sont celles des surfaces imperméables, les particules fluides ne peuvent traverser les frontières, donc leur impulsion normale à la frontière est nulle ($u_r=0$). Cette condition est imposée pour tout type de frontière, qu'elle soit rigide ou libre. Une équation correspondant à ce cas, est dérivée à partir de l'équation de continuité, celle-ci étant :

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITÉ THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHÉRIQUE

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2 u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \cot g\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III, 56})$$

- Sur la surface rigide : la surface sphérique ($r = \text{constante}$) u_θ et u_φ sont nulles, c'est une condition de non glissement étant donné que $u_\theta = u_\varphi = 0$:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III, 57})$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad (\text{III, 58})$$

- Sur la surface libre : les contraintes tangentielles s'annulent, ici : $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{r\varphi}$ sont nulles. En coordonnées sphériques, ces contraintes s'écrivent :

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{III, 59})$$

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{III, 60})$$

Puisque en : $r = \text{constant}$, $u_r = 0$ alors :

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] u_\theta = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \quad (\text{III, 61})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] u_\varphi = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) = 0 \quad (\text{III, 62})$$

En revenant à l'équation de continuité et en appliquant l'opérateur $(r \frac{\partial}{\partial r})$ sur l'équation, et en tenant compte des conditions (III,61) et (III,62), on aura après développement des calculs :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_r) = 0 \quad (\text{III, 63})$$

Aussi, sur les frontières du système sphérique, il n'y a pas de perturbations de température, les surfaces sont isothermes.

III-4 : ANALYSE DES PERTURBATIONS EN MODES NORMAUX :

On assume qu'une perturbation est une superposition de certains modes. La stabilité du système sera examinée envers chaque mode. En observant les équations déjà établies des perturbations, l'opérateur L^2 , carré du moment angulaire, admet comme fonctions propres des fonctions harmoniques sphériques.

En effet, l'opérateur L^2 est défini encore par :

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{III, 64})$$

Les harmoniques sphériques, notés par $Y_l^m(\theta, \varphi)$, indépendantes de r, sont définies par :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad m \leq l \quad (\text{III, 65})$$

Les fonctions $P_l^m(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre de degré l , et d'ordre m associés à Y_l^m , $e^{im\varphi}$ est la dépendance azimutale caractérisée par le nombre d'onde m . Les valeurs propres de l'opérateur L^2 sont telles que :

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{III, 66})$$

$l(l+1)$ étant la valeur propre, l est un entier ($l=1,2,3,\dots$)

Les fonctions harmoniques sphériques, $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont normalisées et la norme est définie comme suit :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = N_l^m \quad (\text{III, 67})$$

Où :

$$N_l^m = \frac{4\pi}{(2l+1)(l-m)!} \quad (\text{III, 68})$$

Les solutions indépendantes du problème linéaire des perturbations formulé par les équations (III,28),(III,46),(III,54) et (III,55) sont représentées par les formes suivantes, dans le système de coordonnées sphériques :

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

$$x_i w_i = r w_r = Z(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}$$

$$x_i u_i = r u_r = W(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}$$

$$\theta = \theta(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}$$

$Z(r)$, $W(r)$ et $\theta(r)$ sont des fonctions exprimant la dépendance radiale de la vorticité, de la vitesse et de la température.

p est un nombre complexe dépendant des variables de l'écoulement de base, c'est aussi le taux d'amplification des perturbations.

Il reste maintenant à rapporter ces expressions dans les équations gouvernant les perturbations déjà établies.

En rapportant les expressions de $x_i w_i$, $x_i u_i$ et θ dans les équations du problème :

L'équation (III,28) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}) = 2\beta(r) W(r) Y_l^m e^{pt} + \kappa \nabla^2 [\theta(r) e^{pt}] \quad (\text{III, 69})$$

Sachant que :

$$\nabla^2 Y_l^m(\theta, \varphi) f(r) = Y_l^m(\theta, \varphi) \mathcal{D}_l f(r) \quad (\text{III, 70})$$

Où \mathcal{D}_l est un opérateur indépendant de θ et, déduit de l'expression de L^2 tel que :

$$\mathcal{D}_l = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \quad (\text{III, 71})$$

Donc l'équation (III, 28) devient :

$$\theta(r) Y_l^m p e^{pt} = 2\beta(r) W(r) Y_l^m e^{pt} + \kappa \mathcal{D}_l \theta(r) e^{pt} \quad (\text{III, 72})$$

Et qui devient :

$$\left(\mathcal{D}_l - \frac{p}{\kappa} \right) \theta(r) = 2 \frac{\beta(r)}{\kappa} W(r) \quad (\text{III, 73})$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

En prenant l'unité de mesure de longueur R_1 (rayon de la sphère) et en multipliant l'équation par R_1^2 où :

$$\mathcal{D}_l = \frac{d^2}{d\left(\frac{r}{R_1}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{r}{R_1}\right)} \frac{d}{d\left(\frac{r}{R_1}\right)} - \frac{l(l+1)}{\left(\frac{r}{R_1}\right)^2} \quad (\text{III, 74})$$

Et encore :

$$\mathcal{D}_l = \frac{d^2}{d(R)^2} + \frac{2}{(R)} \frac{d}{d(R)} - \frac{l(l+1)}{(R)^2} \quad (\text{III, 75})$$

Où $R = \frac{r}{R_1}$

Et l'équation (III,73) devient :

$$\left(\mathcal{D}_l - \frac{p}{\kappa} R_1^2\right) \theta(r) = -2 \frac{\beta(r)}{\kappa} R_1^2 W(r) \quad (\text{III, 76})$$

En multipliant et en divisant par ν :

$$(\mathcal{D}_l - \sigma Pr) \theta(r) = -\left(\frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa}\right) W(r) \quad (\text{III, 77})$$

Ici $\sigma = \frac{p}{\nu} R_1^2$ est un nombre complexe exprimant, comme p, le taux de progression ou de diminution des perturbations.

Et Pr : nombre de Prandtl étant défini par : $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

D'où, l'équation (III,46) de Vorticité devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (Z(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}) = \nu \nabla^2 (Z(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}) \quad (\text{III, 78})$$

$$pZ(r) = \nu \mathcal{D}_l Z(r) \quad (\text{III, 79})$$

$$\left(\mathcal{D}_l - \frac{p}{\nu} R_1^2\right) Z(r) = 0 \quad (\text{III, 80})$$

$$(\mathcal{D}_l - \sigma) Z(r) = 0 \quad (\text{III, 81})$$

L'équation s'écrit encore :

$$\nabla^2 \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (W(r) Y_l^m e^{pt} = \gamma L^2 [\theta(r) Y_l^m e^{pt}] \quad (III.82)$$

Et :

$$\mathcal{D}_l (\nu \mathcal{D}_l - p) W(r) = \gamma l(l+1) \theta(r) \quad (III,83)$$

$$\mathcal{D}_l \left(\mathcal{D}_l - \frac{R_1^2 p}{\nu} \right) W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1) \theta(r) \quad (III,84)$$

$$\mathcal{D}_l (\mathcal{D}_l - \sigma) W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1) \theta(r) \quad (III, 85)$$

L'ensemble des équations (III,77), (III,81), (III,85) adimensionnelles, décrit l'état perturbé en termes de fonctions $W(r)$, $Z(r)$, $\theta(r)$.

- L  s conditions aux limites établies précédemment s'écrivent avec ces nouvelles variables :

$$W(r)=0, \frac{\partial W(r)}{\partial r} = 0 \quad \text{   } r=\eta, 1 \text{ si les surfaces sont rigides}$$

$$W(r)=0, \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{   } r=\eta, 1 \text{ si les surfaces sont libres}$$

III.5.PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE :

Par analyse des perturbations, on voudrait qu'il y ait réellement échange de stabilité à travers un état de stabilité neutre. En effet, dans l'expression des solutions du problème, et plus précisément dans la fonction temporelle exponentielle, c'est la valeur du nombre complexe σ qui détermine si l'état du fluide est stable, neutre ou instable. En particulier, il y a échange de stabilité si la partie imaginaire du taux d'amplification des perturbations σ est nulle. Dans ce qui suivra, on considère le cas d'une source de chaleur uniforme et accélération gravitationnelle telles que :

$$\beta(r) = \frac{\varepsilon}{6\kappa} = \text{constante}$$

$$\gamma(r) = \alpha g(r) = \text{constante}$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

On considère les équations de l'énergie, de vorticité et de mouvement, déjà établies en termes de $W(r)$, $Z(r)$, et $\theta(r)$:

$$(\mathcal{D}_l - \sigma \text{Pr}) \theta(r) = -\left(\frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa}\right) W(r) \quad (\text{III},86)$$

$$(\mathcal{D}_l - \sigma)Z(r) = 0 \quad (\text{III},87)$$

$$\mathcal{D}_l(\mathcal{D}_l - \sigma)W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l + 1) \theta(r) \quad (\text{III},88)$$

En éliminant la température entre l'équation (III,86) et (III,88) , on applique l'opérateur $(\mathcal{D}_l - \sigma \text{Pr})$ sur l'équation (III,89) :

$$(\mathcal{D}_l - \sigma \text{Pr}) \mathcal{D}_l(\mathcal{D}_l - \sigma)W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l + 1)(\mathcal{D}_l - \sigma \text{Pr}) \theta(r) \quad (\text{III},89)$$

$$(\mathcal{D}_l - \sigma \text{Pr}) \mathcal{D}_l(\mathcal{D}_l - \sigma)W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l + 1)\left(-\frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa}\right) W(r) \quad (\text{III},90)$$

L'équation devient :

$$\mathcal{D}_l(\mathcal{D}_l - \sigma \text{Pr})(\mathcal{D}_l - \sigma)W(r) = -l(l + 1)Ra_l W(r) \quad (\text{III},91)$$

Les valeurs Ra_l (nombre de Rayleigh) sont définies par :

$$Ra_l = \left(\frac{2\beta(r)R_1^2 \gamma}{\kappa \nu}\right) \quad (\text{III},92)$$

L'indice l met en évidence la dépendance de Ra avec le mode de perturbation. Pour chaque valeur de l , correspond une valeur de Ra_l . Tout de même, la valeur de l qui sera prise en considération est celle qui correspondra à la valeur minimale de Ra_l ou valeur critique.

Dans l'équation (III,85), on pose :

$$F = l(l + 1) \gamma \frac{R_1^4}{\nu} \theta(r) \quad (\text{III},93)$$

O  F est une fonction proportionnelle à $\theta(r)$

L' quation (III,85) devient :

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE

$$\mathcal{D}_l(\mathcal{D}_l - \sigma)W(r) = F \quad (\text{III,94})$$

En rapportant l'équation (III,94) dans l'équation (III,86) on obtient :

$$(\mathcal{D}_l - \sigma Pr)F = -l(l+1)Ra_l W(r) \quad (\text{III,95})$$

La fonction F est radiale et s'annule aux frontière comme W(r) (frontière imperméables).

Soit F* le conjugué complexe de F. en multipliant l'équation (III,95) par r² F* et en intégrant sur le domaine des valeurs de r, de η à l(η étant le rapport des rayons), on obtient :

$$\int_{\eta}^1 r^2 F^* (\mathcal{D}_l - \sigma Pr)F dr = -l(l+1)Ra_l \int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr \quad (\text{III,96})$$

$$\int_{\eta}^1 (r^2 F^* \mathcal{D}_l F - r^2 F^* F \sigma Pr) dr = -l(l+1)Ra_l \int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr \quad (\text{III,97})$$

Avant de calculer ces intégrales, on est amené à développer certaines propriétés de l'opérateur \mathcal{D}_l .

- Soit $\psi(r)$ et $\phi(r)$ des fonctions quelconques ne dépendant que de r. Sur un intervalle [a, b] :

$$\int_a^b r^2 \phi(r) \mathcal{D}_l \psi(r) dr = \int_a^b r^2 \phi(r) \left\{ \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi(r) \right\} dr \quad (\text{III,98})$$

On met :

$$I = \int_a^b \left\{ \phi(r) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) - l(l+1) \psi(r) \phi(r) \right\} dr \quad (\text{III,99})$$

En intégrant par partie :

$$I = \left[r^2 \phi(r) \frac{d\psi(r)}{dr} \right]_b^a - \int_a^b \left\{ r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} + l(l+1) \psi(r) \phi(r) \right\} dr \quad (\text{III,100})$$

$$I = \left[r^2 \phi(r) \frac{d\psi(r)}{dr} \right]_b^a - r^2 \left[\psi(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \right]_b^a + \int_b^a \psi(r) r^2 \left(\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi(r) \right) dr \quad (\text{III,101})$$

$$I = \left[r^2 \phi(r) \frac{d\psi(r)}{dr} \right]_b^a - \left[\psi(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \right]_b^a + \int_b^a r^2 \psi(r) \mathcal{D}_l \phi(r) dr \quad (\text{III,102})$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE

L'équation (III,100) et l'équation (III,102) sont des résultats importants, en effet, si ψ et ϕ sont des fonctions de r seulement et s'annulant aux limites (a et b), alors :

$$I = - \int_b^a \left\{ r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} + l(l+1) \psi(r)\phi(r) \right\} dr \quad (III,103)$$

Et :

$$I = \int_b^a r^2 \phi(r) \mathcal{D}_l \psi(r) dr = \int_b^a r^2 \psi(r) \mathcal{D}_l \phi(r) dr \quad (III,104)$$

L'équation (III,104) indique que l'opérateur \mathcal{D}_l , appliqué sur des fonctions de r seulement et s'annulant aux bornes est un opérateur hermétique et plus particulièrement, si

$$\psi(r) = \phi^*(r)$$

$\phi^*(r)$ étant le complexe conjuguée de $\phi(r)$

$$\text{On a: } \int_b^a r^2 \phi^*(r) \mathcal{D}_l \phi(r) dr = - \int_b^a \left\{ r^2 \left| \frac{d\phi(r)}{dr} \right|^2 + l(l+1) |\phi(r)|^2 \right\} dr \quad (III,105)$$

En appliquant ces propriétés à l'équation on obtient :

$$\int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dF}{dr} \right|^2 + l(l+1) |F|^2 + r^2 \sigma Pr |F|^2 \right\} dr = l(l+1) Ra_l \int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr \quad (III,106)$$

On a :

$$\int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr = \int_{\eta}^1 r^2 W(r) \mathcal{D}_l^2 W^*(r) - \sigma^* \int_{\eta}^1 r^2 W(r) \mathcal{D}_l W^*(r) dr \quad (III,107)$$

On met :

$$I_1 = \int_{\eta}^1 r^2 \mathcal{D}_l (\mathcal{D}_l W^*(r)) dr = \left[-r^2 \frac{dW}{dr} \mathcal{D}_l W^*(r) \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 [\mathcal{D}_l W(r)]^2 dr \quad (III,108)$$

$$I_2 = -\sigma^* \int_{\eta}^1 r^2 W(r) \mathcal{D}_l W^*(r) dr = \sigma^* \int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dW}{dr} \right|^2 + l(l+1) |W(r)|^2 \right\} dr \quad (III,109)$$

En revenant à I_1 où :

$$|\mathcal{D}_l W^*(r)|_{\eta}^1 = \left| \frac{d^2}{dr^2} W^*(r) \right|_{\eta}^1 + \left| \frac{2}{r} \frac{d}{dr} W^*(r) \right|_{\eta}^1 - \left| \frac{l(l+1)}{r^2} W^*(r) \right|_{\eta}^1 \quad (III,110)$$

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SPHERIQUE

- Si, la limite est rigide, alors :

$$\frac{d}{dr}W(r)=0$$

Et tout le terme : $\left[-r^2 \frac{d}{dr} W(r) \mathcal{D}_l W^*(r)\right]_{\eta}^1 = 0$

- Si non, la limite est libre et :

$$\frac{d^2}{dr^2}W^*(r)=0$$

Ainsi :

$$|\mathcal{D}_l W^*(r)|_{\eta}^1 = \left| \frac{2}{r} \frac{d}{dr} W^*(r) \right|_{\eta}^1$$

Et donc :

$$I_1 = -2 \left[r \left| \frac{d}{dr} W(r) \right|^2 \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 |W(r)|^2 dr \quad (\text{III},111)$$

L'équation (III,106) devient :

$$\int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dF}{dr} \right|^2 + l(l+1)|F|^2 + r^2 \sigma Pr |F|^2 \right\} dr - l(l+1)Ra_l \left\{ -2 \left[r \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 |\mathcal{D}_l W(r)|^2 dr + \sigma^* \int_{\eta}^1 \left[r^2 \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2 \right] dr \right\} = 0 \quad (\text{III},112)$$

σ^* Étant le complexe conjugué de σ

Le membre de gauche de l'équation(III.112) est un nombre complexe qui ne s'annule que si ses parties réelle et imaginaire sont nulles simultanément, la partie imaginaire étant :

$$Imag(\sigma) \left\{ Pr \int_{\eta}^1 r^2 |F|^2 dr + l(l+1)Ra_l \int_{\eta}^1 \left[r^2 \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2 \right] dr \right\} = 0 \quad (\text{III},113)$$

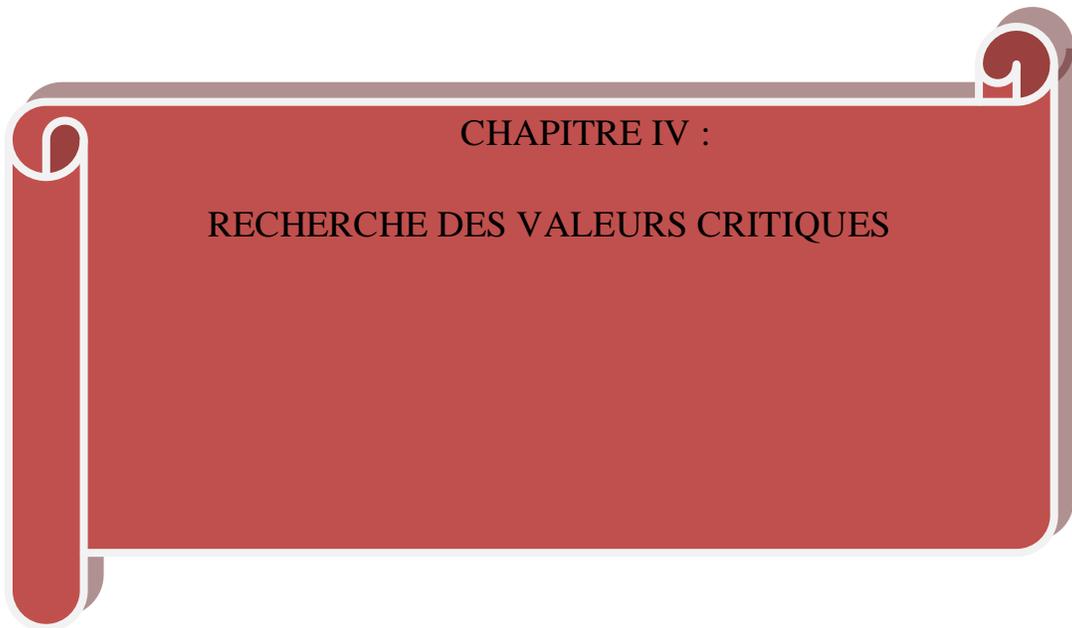
Les termes entre les grandes accolades étant la somme de carrés (positifs), l'équation (III,113) n'est vérifiée que si :

CHAPITRE III : TÉORIE DES PERTURBATIONS ET PRINCIPE D'ÉCHANGE DE STABILITE THERMIQUE DANS UN MILIEU SFERIQUE

$$\text{Imag}(\sigma)=0$$

(III,114)

Le taux d'amplification des perturbations est ainsi réel. On a prouvé qu'avec les conditions du problème, fluide newtonien répondant à l'approximation de Boussinesq, confiné dans un espace sphérique soumis à une distribution de chaleur volumétrique uniforme, il y a possibilité d'échange de stabilité ou convection (il y a instabilité thermique).

A decorative red scroll graphic with white outlines and shadows, containing the chapter title.

CHAPITRE IV :
RECHERCHE DES VALEURS CRITIQUES

IV.1 PROBLEME A VALEURS CARACTERISTIQUES Ra :

Le principe d'échange de stabilité étant validé, on se propose de déterminer les valeurs critiques et minimales pour lesquelles se manifeste la convection. Le fluide convectant homogène est confiné entre deux sphères concentriques de rayons extérieur et intérieur R_1 et R_2 respectivement, les conditions aux limites sont les mêmes qu'auparavant.

L'instabilité se manifeste à travers un état de stabilité neutre, réécrivons les équations de perturbation gouvernant cet état correspondant à $\sigma = 0$, état stationnaire :

$$D_\rho^2 \theta(r) = -\frac{2\beta(r)}{\kappa} R_1^2 W(r) \quad (IV.1)$$

$$D_\rho^2 W(r) = \frac{\gamma(r)}{\nu} R_1^4 l(l+1)\theta(r) \quad (IV.2)$$

Soient $\beta(r)$ et $\gamma(r)$ les fonctions relatives à la distribution de chaleur et la gravité radiale, définies d'une façon appropriée par:

$$\gamma(r) = \gamma_1 c(r)$$

$$\beta(r) = \beta_1 b(r)$$

Où $\gamma_1 = \gamma(r=1)$

$$\beta_1 = \beta(r=1)$$

Posons $F = \frac{\gamma_1 R_1^4}{\nu} l(l+1) c(r)\theta(r)$ (IV.3)

Le problème à valeurs caractéristiques se résumera donc dans les équations:

$$\mathcal{D}_\rho^2 W = F \quad (IV.4)$$

$$\frac{1}{b(r)} \mathcal{D}_l \left\{ \frac{F}{c(r)} \right\} = -l(l+1) Ra_l W(r) \quad (IV.5)$$

Ce problème admet les mêmes conditions aux limites que précédemment.

La forme de l'équation(IV.4) linéaire mène à suggérer pour la fonction F un développement en séries de fonctions de Bessel du premier type, d'ordre $(l+1/2)$; leur utilité réside dans le fait qu'elles s'annulent aux frontières (rigides ou libres).

Soit donc :

$$F = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) \quad (\text{IV.6})$$

A_j étant des coefficients constants et les fonctions $\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)$ sont données par l'expression suivante:

$$\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) = J_{-(l+\frac{1}{2})}(\alpha_j \eta) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) - J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j \eta) J_{-(l+\frac{1}{2})}(\alpha_j r) \quad (\text{IV.7})$$

Les fonctions de Bessel $J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)$ et $J_{-(l+\frac{1}{2})}(\alpha_j r)$ sont linéairement indépendantes.

Les fonctions $\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha r)$ étant normalisées, on définit la norme par :

$$\int_{\eta}^1 r \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) \cdot \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_k r) dr = N_{l+\frac{1}{2}, j} \delta_{jk}$$

Où :

$$N_{l+\frac{1}{2}, j} = \frac{2}{\pi^2 \alpha_j^2} \left\{ \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(\alpha_j \eta)}{J_{l+\frac{1}{2}}^2(\alpha_j)} - 1 \right\}$$

α_j Étant la $j^{\text{ème}}$ racine de l'équation :

$$\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

$J_{(l+\frac{1}{2})}(\alpha_j r)$ est une fonction de Bessel du premier type, d'ordre $(l + \frac{1}{2})$

• **Relation de récurrence reliant les fonctions de Bessel :**

a) $J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z)$

b) $-J_{\nu-1}(z) + \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = J'_{\nu}(z)$

c) $J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z)$

d) $J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu}(z)$

Propriétés importantes pour la dérivée :

$$\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)' = \frac{1}{\alpha_j} \frac{d}{dr} \left[\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) \right]_{r=1} = (-1)^l \frac{2}{\pi \alpha_j} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j)}{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j)}$$

$$\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)' = \frac{1}{\alpha_j} \left[\frac{d}{dr} \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) \right]_{r=1} = (-1)^l \frac{2}{\pi \alpha_j}$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\nu+1} \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, \nu+1}(z) \right\} = z^{\nu+1} \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, \nu}(z)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-\nu+1} \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, \nu-1}(z) \right\} = -z^{\nu-1} \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, \nu}(z)$$

L'équation (4) s'écrit :

$$\mathcal{D}_\ell^2 W = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) \quad (IV, 9)$$

Il s'ensuit que les solutions pour W peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$W = \sum_j A_j W_j \quad (IV, 10)$$

Telle que : W_j est la solution de l'équation :

$$\mathcal{D}_\ell^2 W_j = \frac{1}{\sqrt{r}} \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) \quad (IV.11)$$

Qui satisfait les conditions aux limites du problème.

On démontre que :

$$\mathcal{D}_l \mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r) = -\alpha_j^2 \frac{\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)}{\sqrt{r}} \quad (IV.12)$$

Ainsi W_j est donnée comme suit :

$$W_j = \frac{1}{\alpha_j^4} \frac{\mathcal{C}_{l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)}{\sqrt{r}} + B_1 r^l + B_2 r^{l+2} + B_3 r^{-(l+1)} + B_4 r^{-(l-1)} \quad (IV.13)$$

qui est la somme d'une solution générale et d'une solution particulière en puissance de r,

B_1, B_2, B_3 et B_4 sont des constantes. En rapportant cette solution dans l'équation à valeurs caractéristique Ra , on aboutit au système d'équations suivant :

$$\sum_j \left\{ P_{k,j}^{b,c} - l(l+1)Ra_l \left[\frac{N_{\ell+\frac{1}{2},k}}{\alpha_j^4} \delta_{kj} + Q_{kj} \right] \right\} A_j = 0 \quad (IV.14)$$

δ_{kj} Est le symbole de Cronecker; $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$

Les expressions $P_{k,j}^{b,c}$ et Q_{kj} sont :

$$P_{k,j}^{b,c} = -\int_{\eta}^1 r^2 \frac{1}{b(r)} \frac{C_{l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)}{\sqrt{r}} \mathcal{D}_l \left\{ \frac{C_{l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}(\alpha_j r)}{c(r)\sqrt{r}} \right\} dr \quad (IV.15)$$

Et

$$Q_{kj} = \frac{2}{\alpha_k^3} \left\{ (2l+3)I_{l+\frac{1}{2},k} B_2 - (2l-1)H_{l+\frac{1}{2},k} B_4 \right\} \quad (IV.16)$$

Tels que :

$$I_{l+1/2,k} = C'_{l+1/2}(\alpha_k) \eta^{l+3/2} C'_{l+1/2}(\alpha_k \eta) \quad (IV.17)$$

$$H_{l+1/2,k} = C'_{l+1/2}(\alpha_k) \eta^{-l+1/2} C'_{l+1/2}(\alpha_k \eta) \quad (IV.18)$$

B_2 et B_4 sont déterminées par les conditions aux limites homogènes déjà citées pour les différents cas de surfaces en utilisant l'expression de W_j , et sachant que:

$$C'_{l+1/2}(\alpha_k) = \left. \frac{dC_{L+1/2}(ar)}{dr} \right|_{r=1} \quad (IV.19)$$

L'évaluation de l'expression Q_{kj} nécessite la distinction des différents cas de nature de surfaces délimitant le fluide. Les conditions aux limites correspondent aux types de surfaces suivantes :

- 1- Surfaces rigide-rigide
- 2- Surfaces libre-libre

Pour chacun des cas cités, Q_{kj} est évaluée de l à η donnée.

Mais avant tout, il faudrait déterminer approximativement les premières racines α_j de l'équation (IV.8.) sachant que : $C_{l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}(\alpha)$ est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel du premier type. Il est très utile d'user des relations de récurrence et des propriétés de dérivation

des fonctions de Bessel. On approche numériquement les racines pour chaque mode l . Pour l'évaluation de la quantité $P_{k,j}^{b,c}$, on assume que la distribution de la chaleur et la gravitation radiale est uniforme, alors:

$b = c(r) = 1$ et donc

$$P_{k,j}^{b,c} = \alpha_j^2 N_{l+1/2,j} \delta_{kj} \quad (IV, 20)$$

Le système d'équations à valeurs caractéristique devient alors :

$$\sum_j \left\{ \left\{ N_{l+1/2,k} \left\{ \frac{\alpha_k^2}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{\alpha_k^2} \right\} \delta_{kj} - Q_{kj} \right\} \right\} A_j = 0 \quad (IV, 21)$$

La résolution de ce système d'équations aux inconnues A_j impose un déterminant nul (pour éviter la solution triviale nulle). Pour une première approximation de la somme, l'ordre de troncature de k et j est un. Le calcul du déterminant nul de ce système nous conduit aux valeurs de Ra critiques telles que (pour une première approximation $k=j=1$, le déterminant se réduit à un seul élément), en effet:

$$Ra_l = \frac{1}{l(l+1)} \frac{\alpha_1^6 N_{l+1/2,1}}{N_{l+1/2,1} + \alpha_1^4 Q_{11}} \quad (IV, 22)$$

- Exemple de calcul:

Pour $l=1$: $2Ra_1 = \frac{\alpha_1^6 N_{1,1}}{N_{1,1} + \alpha_1^4 Q_{11}}$

α_1 étant la première racine de $\mathcal{C}_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(\alpha) = 0$

Telle que:

$$\mathcal{C}_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(\alpha) = J_{-\left(\frac{3}{2}\right)}(\alpha) J_{\frac{3}{2}}(\alpha) - J_{\frac{3}{2}}(\alpha) J_{-\left(\frac{3}{2}\right)}(\alpha)$$

Les relations de récurrence utilisées pour la détermination des fonctions de Bessel appropriées sont :

$$J_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

et
$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} J_l(x)$$

et donc
$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} J_0(x)$$

ainsi:
$$J_{\frac{3}{2}}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha} \right)$$

Et
$$J_{-\left(\frac{3}{2}\right)}(\alpha) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \left(\frac{\alpha\sin\alpha + \cos\alpha}{\alpha} \right)$$

Dans le cas $l=2$:

$$6Ra_2 = \frac{\alpha_1^6 N_{3/2,1}}{N_{3/2,1} + \alpha_1^4 Q_{11}}$$

$\alpha_{2,1}$ est la première racine de $\mathcal{C}_{\frac{5}{2} \frac{5}{2}}(\alpha) = 0$

Telle que:

$$\mathcal{C}_{\frac{5}{2} \frac{5}{2}}(\alpha) = J_{-\left(\frac{5}{2}\right)}(\alpha\eta) J_{\frac{5}{2}}(\alpha) - J_{\frac{5}{2}}(\alpha\eta) J_{-\left(\frac{5}{2}\right)}(\alpha)$$

Or :
$$J_{\frac{5}{2}}(\alpha) = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{x} J_{\frac{3}{2}}(\alpha) - J_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

Et :
$$J_{-\left(\frac{5}{2}\right)}(\alpha) = -J_{\frac{5}{2}}(\alpha)$$

Et dans le cas $l=3$:

$\alpha_{3,1}$ est la première racine de $\mathcal{C}_{\frac{7}{2} \frac{7}{2}}(\alpha) = 0$

Telle que :
$$\mathcal{C}_{\frac{7}{2} \frac{7}{2}}(\alpha) = J_{-\left(\frac{7}{2}\right)}(\alpha\eta) J_{\frac{7}{2}}(\alpha) - J_{\frac{7}{2}}(\alpha\eta) J_{-\left(\frac{7}{2}\right)}(\alpha)$$

Or :
$$J_{\frac{7}{2}}(x) = \frac{2\left(\frac{5}{2}\right)}{x} J_{\frac{5}{2}}(x) - J_{\frac{3}{2}}(x)$$

L'étude quantitative de la valeur critique Ra a été faite pour quelques valeurs de l , et du rapport η . Pas de particularités concernant le nombre Pr du fluide convectant. La valeur critique Ra qui correspond au début de la convection est la valeur minimale relative au mode de perturbation exprimé par une valeur unique du degré l . les tableaux 1 et 2 résument les nombres Ra pour les valeurs croissantes de l . les valeurs critiques sont soulignées.

Tableau 1 : les valeurs critiques de Rayleigh pour des surfaces libres.

| l | $\eta=0.2$ | $\eta=0.3$ | $\eta=0.4$ | $\eta=0.5$ | $\eta=0.6$ |
|-----|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | <u>$5.211 \cdot 10^3$</u> | $8.503 \cdot 10^3$ | $1.683 \cdot 10^4$ | $4.188 \cdot 10^4$ | $1.403 \cdot 10^5$ |
| 2 | $5.708 \cdot 10^3$ | <u>$7.113 \cdot 10^3$</u> | <u>$1.091 \cdot 10^4$</u> | $1.180 \cdot 10^4$ | $6.133 \cdot 10^4$ |
| 3 | $8.882 \cdot 10^3$ | $9.552 \cdot 10^4$ | $1.196 \cdot 10^4$ | <u>$1.924 \cdot 10^4$</u> | $4.424 \cdot 10^4$ |
| 4 | $1.400 \cdot 10^4$ | $1.428 \cdot 10^4$ | $1.585 \cdot 10^4$ | $2.146 \cdot 10^4$ | <u>$4.076 \cdot 10^4$</u> |
| 5 | $2.121 \cdot 10^4$ | $2.131 \cdot 10^4$ | $2.227 \cdot 10^4$ | $2.673 \cdot 10^4$ | $4.313 \cdot 10^4$ |

Tableau2 : les valeurs critiques de Rayleigh pour des surfaces rigides.

| l | $\eta=0.2$ | $\eta=0.3$ | $\eta=0.4$ | $\eta=0.5$ | $\eta=0.6$ |
|-----|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | $1.773 \cdot 10^4$ | $3.057 \cdot 10^4$ | $6.801 \cdot 10^4$ | $1.856 \cdot 10^4$ | $6.678 \cdot 10^5$ |
| 2 | <u>$1.277 \cdot 10^4$</u> | <u>$1.837 \cdot 10^4$</u> | $3.354 \cdot 10^4$ | $7.933 \cdot 10^4$ | $2.571 \cdot 10^5$ |
| 3 | $1.593 \cdot 10^4$ | $1.881 \cdot 10^4$ | <u>$2.797 \cdot 10^4$</u> | $5.560 \cdot 10^4$ | $1.575 \cdot 10^5$ |
| 4 | $2.247 \cdot 10^4$ | $2.381 \cdot 10^4$ | $2.990 \cdot 10^4$ | <u>$4.986 \cdot 10^4$</u> | $1.215 \cdot 10^5$ |
| 5 | $3.182 \cdot 10^4$ | $3.237 \cdot 10^4$ | $3.631 \cdot 10^4$ | $5.179 \cdot 10^4$ | $1.083 \cdot 10^5$ |
| 6 | | $4.432 \cdot 10^4$ | $4.669 \cdot 10^4$ | $5.887 \cdot 10^4$ | <u>$1.061 \cdot 10^5$</u> |

- **Influence de la géométrie et des parois :**

Toutefois, il est intéressant de mettre en évidence la dépendance du Ra critique vis-à-vis de l'épaisseur de l'espace annulaire sphérique. Ceci est fait en calculant les valeurs critiques pour chaque cas d'espace suivant la nature des frontières. Ces valeurs sont rassemblées dans les tableaux précédents.

A première vue, les valeurs critiques de Ra augmentent quand η augmente, autrement dit les sphères concentriques sont rapprochées l'une de l'autre. Ce phénomène est dû aux forces visqueuses intenses aux limites qui freinent les mouvements de convection. Dans ces conditions, les frontières rapprochées sont qualifiées de stabilisatrices, elles retardent la convection.

Quand l'épaisseur diminue (η augmente), la valeur de Ra critique correspond à l'harmonique du plus haut ordre [16].

Pour un η donné, et en comparant les deux tableaux, on remarque que les valeurs de Ra critiques pour le cas des surfaces libres sont inférieures à celles des frontières rigides. Ceci mène à dire que les surfaces rigides freinent le mouvement convectif.

VI.2 INTRODUCTION AU CALCUL DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE LA CONVECTION PAR METHODE SPECTRALE.

Dans cette étude analytique, il a été question surtout de calculer les valeurs critiques de Rayleigh correspondant au début de l'instabilité thermique dans un milieu sphérique où la force de poussée est radiale.

Une étude complète du problème des perturbations devrait fournir les solutions pour les champs de vitesse et de température. Cependant, la connaissance de l'écoulement perturbé implique la détermination de toutes les composantes des champs de vitesse, ce qui fait quatre inconnues à déterminer. Pour remédier à cette complication, une représentation mathématique convenable du champ de vitesse est sollicitée pour réduire le nombre d'inconnues.

En effet, le champ de vitesse étant solénoïdal ($div\vec{V} = 0$), il peut être représenté par une combinaison linéaire de deux champs, l'un poloidal et l'autre toroïdal tel que :

$$\vec{V} = \vec{S} + \vec{T}$$

Ou encore

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \phi \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{\nabla} \wedge \Psi \frac{\vec{r}}{r}$$

Φ et Ψ sont les scalaires de définition des champs poloidal et toroïdal respectivement (voir annexe). Ainsi, connaître \vec{V} c'est déterminer les fonctions scalaires de définition ϕ et Ψ .

Une autre simplification est encore obtenue, en fait, le problème de convection pour les valeurs de Rayleigh proches de celles de Ra critique, étant linéaire et à symétrie, on démontre que le champ de vitesse est purement poloidal, le scalaire de définition Ψ est alors identiquement nul [12]. Les composantes des champs de vitesse poloidal s'écrivent :

$$S_r = \frac{1}{r^2} L^2 \phi$$

$$S_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}$$

$$S_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi}$$

Les solutions $\phi(r, \theta, \varphi)$ et $\theta(r, \theta, \varphi)$ (perturbation de la température) qui satisfont les équations des perturbations peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = f(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$\theta(r, \theta, \varphi) = g(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$Y_l^m(\theta, \varphi)$ Etant la fonction harmonique déjà vue et $f(r)$, $g(r)$ représentent la dépendance radiale des solutions. Les composantes du champs poloidal s'écrivent encore :

$$S_r = \frac{l(l+1)}{r^2} f(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

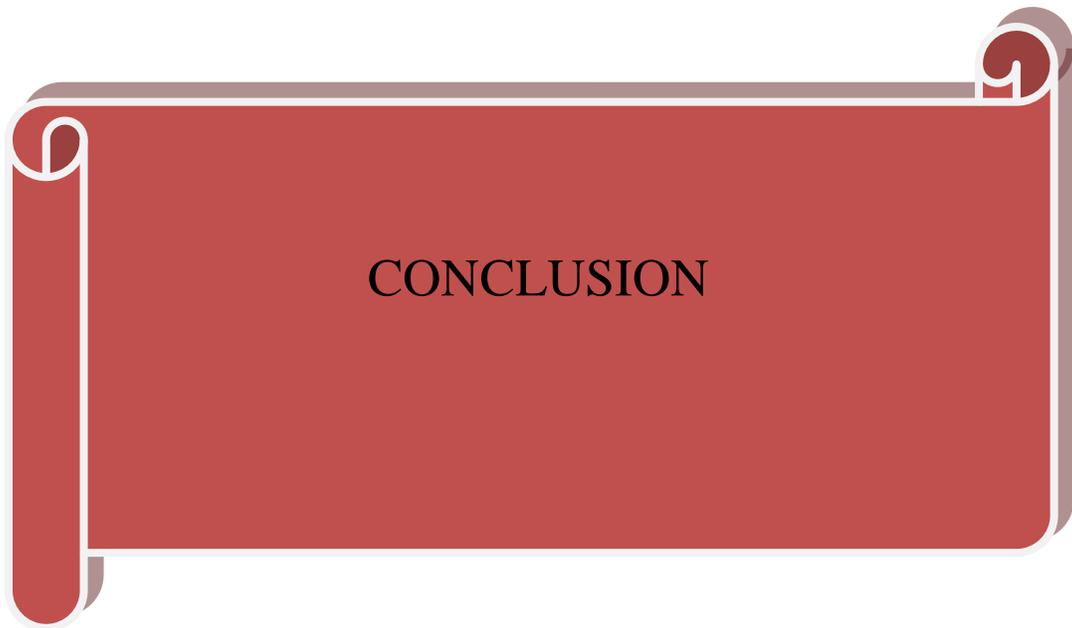
$$S_\theta = \frac{1}{r} \frac{d f(r)}{d r} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta}$$

$$S_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d f(r)}{d r} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}$$

Les solutions indépendantes quand elles existent, dépendent principalement de l'ordre de troncature l et du nombre d'onde m . elles dépendent effectivement des fonctions radiales $f(r)$ et $g(r)$. Ces fonctions selon certains auteurs (Zebib et al) sont des fonctions connues telles que les fonctions de Chebychev. Elles doivent satisfaire les conditions aux limites (surtout les plus compliquées).

En fait, ceci n'est qu'une introduction au calcul des solutions du problème de la convection en milieu sphérique par la méthode spectrale, qui s'appuie sur des mathématiques appliquées approfondies. Dans cette technique de résolution, il arrive que des solutions convergentes soient dégénérées [3], c'est-à-dire que pour une même valeur de l , on ait plus d'une solution satisfaisant le modèle mathématique. Pour lever la dégénérescence des solutions et déterminer laquelle est la meilleure du point de vue physique, il faut, pour ce faire étudier la stabilité de ces solutions vis-à-vis des perturbations axisymétriques ou tridimensionnelles. On a déjà fait allusion à cette théorie de stabilité en termes de nombre complexe σ . on rappelle qu'une solution est stable si la partie réelle, $\text{Re}(\sigma) \leq 0$, elle est instable dans le cas contraire.

Il est important de signaler que le système d'équations fourni par la modélisation de l'écoulement et du transfert de chaleur est résolu numériquement par diverses méthodes autres que la méthode spectrale. On peut citer les méthodes numériques des différences finies, des volumes finis et des éléments finis qui donnent des solutions convergentes.



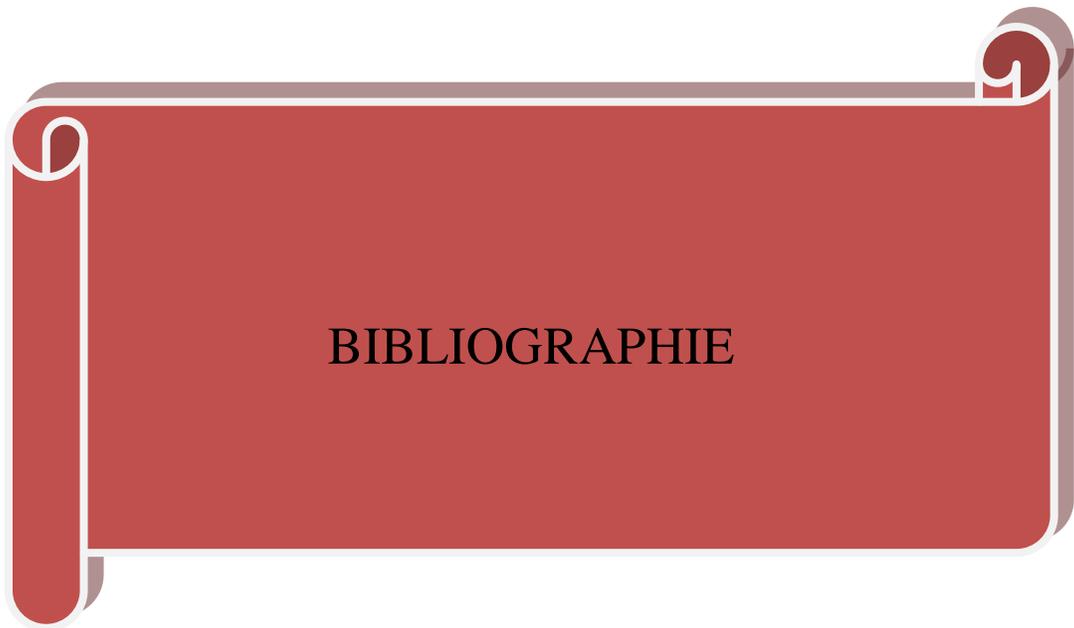
CONCLUSION

conclusion

Une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans une géométrie sphérique et en une source de chaleur interne remplie d'un fluide visqueux soumis à un champ gravitationnel radial a été présentée. L'intérêt majeur de cette étude réside dans les mathématiques approfondies et dans la modélisation du problème de la convection naturelle dans le manteau terrestre.

Premièrement, par la théorie des perturbations infinitésimales, on démontre qu'il y a instabilité thermique. On se propose alors de calculer les valeurs critiques du nombre adimensionnel Ra pour lesquelles se manifeste les premières bifurcations, qui correspondent au seuil de démarrage de la convection dans le fluide confiné dans un espace sphérique.

Dans cette analyse, on démontre que ces valeurs critiques dépendent de la géométrie (épaisseur de l'espace) et de la nature de la frontière qu'elle soit rigide ou libre.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.Chandrasekhar, 'hydrodynamique and hydromagnetic stability', ch.II and ch.VI. Clarendon press, Oxford (1961).
- [2] E.H.Bishop, R.S.Koflat, L.R.Mach J.A.Scanlan, 'Convection heat transfer between concentric spheres', Proc.1964, Heat transphéerer fluid mech. Inst., Berkley, p.69-80(1964).
- [3] J.A.Scanlan, E. Bishop, 'Natural convection heat transfer between concentric spheres', J. Heat transfer, 13, p.1857-1872(1970)
- [4] J.A.Scanlan, S.H.Yin, R.E.Powe and E.H.Bishop, 'Natural convection flow patterns in spherical annuli', J. Heat Mass Transfer, 16, p.1785-1795(1973)
- [5] J.P.Caltagirone, M.Combarous, M. Mojtabi,'Natural convection between tow concentric spheres : Transition toward a multicellular flow', J. Numerical heat transfer, 3, p.107-119(1980).
- [6] J.L.Wright, R.W.Douglass, 'Natural convection in narrow-gap spherical annuli', Int. J. Heat Mass Transfer, 29, p.725-739(1986).
- [7] David R.Gardner, R.W. Douglass, 'Linear stability of natural convection in spherical annuli', J. Fluid Mechanics, 221, p.105-129(1990).
- [8] Rod. W . Douglass, Stevan.A.Trogdon and David R.Gardner, 'Prandtl number effects on the stability of natural convection between spherical shells', Int. Heat Mass Transfer, 33, N 11, p.2533-2544(1990)
- [9] Vijay.k.Gang, «'Natural convection between concentric spheres', Int.J.Heat Mass Transfer, 35, N 8, p.1935-1945(1992)
- [10] Hsin Sen Chu And Tzong Shing Lee, ' Transient natural convection heat transfert between concentric spheres', Int.J. Heat Mass Transfer, 36, N 13, p.3159-3170(1993)
- [11] G.Schubert, D.Bercovici and G.A.Glatzmaire, 'Mantle dynamics in mars and venus : Influence of an immobile lithosphere on three-dimensional mantle convection', J.Geophysical research, 95, N B9, p.105-129(1990)
- [12] F.H.Busse,'Patterns of convection in spherical shells', J.Fluid Mech, 72, p.67-85(1975).

- [13] F.H.Busse and M.Riahi, 'Patterns of convection in spherical shells', J.Fluid Mech, 123, p.283-308(1980).
- [14] A.zebib and G. Schubert, 'Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shells', J.Fluid Mech. 97, p.259-277(1980)
- [15] A. zebib and G. Schubert, 'Thermal convection of a interlly heated infinite Prandtl number fluid in a spherical shells', Geophys. Astrophy.Fluid Dyn. 15, pp.65-90(1980).
- [16] A. zebib and G. Schubert, ' Character and stability of axisymetric thermal convection in spheres and spherical shells' , Geophys. Astrophy.Fluid Dyn. 23, p.1-42(1983).
- [17] A.zebib and Atulk. Goyal, 'Convection motions in spherical shells', J.Fluid Mech. 152, p.39-48(1985).
- [18] D.Bercovici, G.Schubert, G.A.Glatzmairer and A.Zebib, 'Three dimensional thermal convection in a spherical shells', J.Fluid Mech .206, p.75-104(1989).
- [19] D.Bercovici, G.Schubert, G.A.Glatzmairer , 'Three dimensional thermal convection of an infinite Prandtl number, compressible fluid in a basally heated spherical shells', J. Fluid Mech. 239, p.683-719(1992).
- [20] S.Boughali, 'Transfert de chaleur par conduction', Mémoire.(2013\2014).
- [21] H. Salhi, 'Etude numérique de la convection naturelle dans les enceintes nanofluide', Mémoire (2015).
- [22] D.Manacer, 'Etude numérique de la convection mixte dans des cavités phénomène de furcation', Mémoire. (2012).
- [23] A.Bougrara, ' Realization d'un module de calcul en M.D.F', Mémoire. (2005\2006)
- [24] S.Candel, 'Mécanique des fluides', (1990).
- [25] P.Chassaing, 'Mécanque des fluides', (2000).

Résumé

Une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle est présentée pour un fluide répondant au modèle de Boussinesq, soumis au champ gravitationnel radial, dans une géométrie sphérique (cas du manteau terrestre) et en présence d'une source de chaleur interne.

On démontre à l'aide de la théorie des perturbations infinitésimales, la possibilité d'échange de stabilité (instabilité thermique) dans le fluide où la chaleur est générée par une source volumétrique interne.

On se propose de déterminer les valeurs critiques de nombre adimensionnel Ra qui correspondent au seuil de démarrage de la convection dans le fluide confiné dans un espace sphérique. On trouve que ces valeurs critiques dépendent de la géométrie et de la nature des frontières qu'elles soient rigides ou libres.

ملخص

تم تقديم دراسة تحليلية للاستقرار الخطي للحمل الحراري الطبيعي لسائل يستجيب لنموذج Boussinesq، يخضع لحقل الجاذبية المتغيرة بدلالة القطر فقط، في هندسة كروية (حالة وشاح الأرض) وفي وجود مصدر حرارة داخلي.

نوضح باستخدام نظرية الاضطرابات المتناهية الصغر، إمكانية تبادل الاستقرار (عدم الاستقرار الحراري) في السائل.

قمنا بحساب القيم الحرجة لرقم Rayleigh الذي يتوافق مع بداية الحمل الحراري في السائل المحصور في مساحة كروية. نجد أن هذه القيم الحرجة تعتمد على الهندسة وطبيعة الحدود، سواء كانت صلبة أو حرة.