



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique Mécanique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
Mr. Abdelouahab Kahhoul

Le : mercredi 10 juillet 2019

Etude numérique de la convection thermosolutale dans une cavité parallélépipédique

Jury :

Mr.	Hamza Ben Trah	MCA	Université de Biskra	Président
Mr.	Adel Benchaabane	Pr	Université de Biskra	Examineur
Mr.	Adnane Labeled	MCA	Université de Biskra	Rapporteur

ملخص:

هذا العمل هو محاكاة رقمية في نظام زمني متغير لظاهرة الحمل الطبيعي المزدوج (حراري/كتلي) وهو يعتمد على عمل الدكتور عدنان العابد في سنة 2004 بجامعة محمد خيضر-بسكرة. هذه المحاكاة هي دراسة رقمية ثنائية البعد للحمل الطبيعي المزدوج في غرفة متوازية المستطيلات مائلة. الحواف الجانبية للنموذج معرضة لقيم متباينة وثابتة التركيز ودرجة الحرارة، أما الحافتان العلوية والسفلية فتم اعتبارهما كظومتان للحرارة والتركيز. الطريقة الرقمية للأحجام المنتهية تم استعمالها لحل المعادلات المتعلقة بالنموذج وهي: الحرارة، التركيز الكتلي، الكتلة وكمية الحركة. النتائج المتحصل عليها سمحت بدراسة تأثير العديد من العوامل في جريان المائع، التوزيع الحراري وكذا الكتلي (التركيز).

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري الكتلي، الأحجام المنتهية، نقل الحرارة والكتلة.

Résumé :

Ce travail est une étude numérique de la convection naturelle thermosolutale en régime laminaire transitoire dans une cavité parallépipédique bidimensionnelle inclinée. Cela basé sur le travail du Dr. Adnane Labeled en 2004 à l'université Mohamed Khidher Biskra. Les parois horizontales de l'enceinte sont adiabatiques et imperméables. Par contre les parois verticales sont soumises à des températures et des concentrations constantes et différentes. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour la résolution des équations de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse. Les résultats obtenus ont permis l'étude de l'influence de certains paramètres sur l'écoulement, sur les transferts de chaleur et de masse.

Mots clé : la convection naturelle thermosolutale, volumes finis, transferts de chaleur et de masse.

Abstract:

This work studied numerically the natural thermosolutal convection in transitional laminar regime in a bidimensional inclined parallelepiped cavity. This is based on the work of Dr. Adnane Labeled in 2004 at Mohammed Khidher Biskra University. The chamber filled with a fluid composed of a solvent and a solute in low concentration. The horizontal walls of the enclosure are adiabatic and impervious. On the other hand, the vertical walls are subjected to constant and different temperatures and concentrations. The numerical method of finite volumes is used for solving the equations of continuity, momentum, energy and mass. The obtained results allowed us to study of the influence of certain parameters on the fluid flow, the heat and mass transfers.

Key words: thermosolutal natural convection, finished volumes, heat and mass transfers.

Je dédie ce modeste travail

 *À mes très chers parents*

 *À mon frère*

 *À ma famille*

 *À mes Amis*

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, par leur participation et leur encouragement, m'ont permis de mener à bonne fin mon travail de mémoire de Master.

Plus particulièrement, je remercie mon encadreur Monsieur LABED Adnane pour m'avoir suivi avec patience et intérêt et pour la confiance qu'il a placée en moi tout au long de ce travail. Ses conseils précieux et ses encouragements m'ont été d'une aide très précieuse dans la réalisation de ce projet.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur le docteur BEN TRAH Hamza pour avoir accepté de présider le jury d'examen de ce mémoire. Je remercie également Monsieur le Professeur BEN CHABANE Adel pour l'honneur qui m'a fait d'avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré de leur temps à la lecture de ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Sommaire

Dédicace I
Remerciements II
Sommaire III
Liste des figures VI
Liste des tableaux VI
Nomenclature VII
Introduction générale 1

Chapitre I : Recherche bibliographique

1.Introduction 3
2. Les différents modes de transfert de chaleur 3
 2.1. Transfert de chaleur par conduction 3
 2.2 Transfert de chaleur par rayonnement 4
 2.3. Transfert de chaleur par convection..... 4
3. Les types de la convection..... 5
 3.1 Convection forcée 5
 3.2 Convection mixte 5
 3.3 La convection naturelle..... 6
4. La convection naturelle thermosolutale 6
5.Transfert par diffusion 6
6.Etat de l’art 7

Chapitre II :présentation de la méthode des volumes finies

1.Introduction 13
2. Les différentes méthodes numériques 13
 2.1 Méthode des différences finies 13
 2.2. Méthode des éléments finis 13

2.3.Méthode des volumes finis	14
3.Principe de la méthode des volumes finis	15
3.1.Forme générale de l'équation de transport	15
4. Maillage décalé pour évaluer les vitesses.....	18
5. Equation de correction de la vitesse	19
6. Equation de correction de la pression.....	20

Chapitre III : Résolution numérique du modèle étudié

1. Introduction	23
2. Description du problème	23
4. Simplification des équations.....	24
4.1. Equation de la continuité	24
4.2. Equations de mouvement.....	24
4.3.Equation de la chaleur.....	25
4.4.Equation de la concentration.....	25
5. Conditions aux limites.....	26
6. Formes adimensionnelles des équations.....	26
6.1. L'équation du mouvement suivant \overline{Ox}	27
6.2. L'équation du mouvement suivant \overrightarrow{Oy}	27
6.3. L'équation de chaleur	28
6.4. L'équation de concentration chimique.....	28
7. Conditions aux limites (après l'adimensionnalisation)	29
8. Formulation finale des équations et mise en œuvre pour le calcul numérique	30
8.1.Equations de mouvements	31
8.1.1. Composante horizontale.....	31
8.1.2. Composante verticale	31

8.2. L'équation de correction de pression.....	32
8.3. Equation de pression et correction de vitesse	32
8.4. L'équation de chaleur	33
8.5. L'équation de concentration chimique.....	33
9. Maillage.....	34
10. Programme de calcul	34
11. L'algorithme « Simple ».....	35

Chapitre IV: Résultats et discussion

1.Introduction	36
2. Influence du nombre de Rayleigh.....	36
3.Influence de l'angle d'inclinaison	41
4. Influence du rapport de forme	48
5. Evolution de la température et de la concentration par rapport au temps	53
Conclusion générale	56
Annexe	57
Références	58

Liste des figures

Fig.II-1 volume de contrôle pour la méthode des volumes finis 14

Fig.II-2 volume de contrôle pour le cas unidimensionnel. 16

Fig II-3 Maillage décalé 2-D (pour évaluer les vitesses)..... 19

Fig. II-4 Le volume de contrôle pour l'équation de continuité..... 21

Fig.III-1 Représentation schématique du modèle physique étudié..... 23

Fig.IV-1 Les isovaleurs de T, C et V pour différents nombres de Rayleigh.
 $Le=A=|N|=Sc=Pr=1$ 41

Fig.IV-2 Les isovaleurs de T, C V,P pour différents angles d'inclinaison ($\theta=0^0$, $\theta=30^0$
 et $\theta=60^0$) ; $Le=A=|N|=Sc=Pr=1$ 47

Fig.IV-3 Les valeurs de T,V,C et P pour différentes valeurs du rapport de forme ($A=0.5$,
 $A=1$, $A=2$). $Ra_t=Ra_c=10000$. $Le=A=|N|=Sc=Pr=1$ 53

Fig.VI-4 Evolution de la température en fonction du temps $Ra_t=Ra_c=10000$.
 $Le=A=|N|=Sc=Pr=1$ 54

Fig.VI-5 Evolution de la concentration en fonction du temps. $Ra_t=Ra_c=10000$.
 $Le=A=|N|=Sc=Pr=1$ 55

Liste des tableaux

Tableau II-1. Expression de A(Pe) relatives aux différents schémas numériques..... 22

Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité $\left(\frac{H}{L}\right)$	
C	fraction massique de soluté	kg/m ³
C_0	fraction massique de soluté de référence $\left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)$	kg/m ³
C_P	capacité calorifique massique à pression constante	J/kg.k
D	coefficient de diffusion moléculaire de soluté	m ² /S
\vec{g}	accélération de la pesanteur	m/S ²
h	coefficient d'échange par convection	w/m ² k
H	hauteurs de la cavité	m
L	largeur de la cavité	m
Le	nombre de Lewis $\left(\frac{\alpha}{D}\right)$	
N	rapport des effets volumiques d'Archimède massique et thermique $\left(\frac{\beta_c \Delta C}{\beta_r \Delta T}\right)$	
$Nu(y)$	nombre de Nusselt local $\left(\frac{h_r L}{\lambda}\right)$	
Nu_m	nombre de Nusselt moyen	
Pr	nombre de Prandtl $\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)$	
Ra	nombre de Rayleigh $\left(\frac{g \cdot \beta_r \Delta T \cdot L^3}{\alpha \cdot \nu}\right)$	
Sc	nombre de Schmidt $\left(\frac{\nu}{D}\right)$	
Sh	nombre de Sherwood local $\left(\frac{h_c L}{D}\right)$	
Sh_m	nombre de Sherwood moyen	
T	température thermodynamique du système	°k
T_0	température de $\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)$	°k
U	composante de la vitesse selon l'axe \vec{ox}	
V	composante de la vitesse selon l'axe \vec{oy}	
x	coordonnée selon \vec{ox}	

y coordonnée selon \vec{oy}

Lettre grecque

α	diffusivité thermique	m^2/S
β_c	coefficient d'expansion volumique massique	
β_r	coefficient d'expansion volumique thermique	$1/^\circ k$
ΔC	différence de fraction massique (C_1-C_2)	kg/m^3
ΔT	différence de température (T_1-T_2)	$^\circ K$
θ	angle d'inclinaison de l'enceinte	$^\circ$
λ	conductivité thermique	$w/m^\circ k$
μ	viscosité dynamique	kg/m^2s
ν	viscosité cinématique $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$	m^2/s
T^*	Température adimensionnelle	
ρ	masse volumique	Kg/m^3

Introduction générale

Introduction Générale

*D*epuis la découverte de la convection naturelle par les expériences de Bénard en (1900) [1] et l'analyse théorique de Rayleigh au début du vingtième siècle ; l'étude de ce phénomène a suscité et elle suscite encore l'intérêt de nombreux scientifiques et industriel par ses applications dans plusieurs secteurs industriels tel que la météorologie, l'électronique, les fours et l'industrie agroalimentaire.

La convection combinée des forces de poussée thermique (dues au gradient thermique) et solutale (dues au gradient de concentration) est connu sous le nom de double diffusion (convection thermosolutale). Il se trouve que ce type de phénomènes convectifs a de multiples applications dans différents domaines de l'industrie.

Les travaux sur la convection dans de telles configurations se différencient principalement par la géométrie de la cavité, le régime d'écoulement considéré, le type de conditions aux limites imposées sur les parois de la cavité et la nature du milieu qu'elle renferme.

Le choix de ce thème est justifié par l'importance fondamentale que représentent les interactions des phénomènes de transfert de chaleur et de masse couplés, et par l'importance pratique de ses applications. On peut citer comme exemple les procédés de fabrication qui nécessitent de connaître avec précision les quantités d'énergies échangées dans les diverses parties du système et les chambres de séchage et de stockage des différents produits.

Ce travail consiste à analyser le phénomène de convection naturelle thermosolutale dont le régime est transitoire $2-D$ qui s'établit dans une cavité parallélépipédique inclinée. Le caractère mixte température/concentration se reflète au système d'équation à résoudre. En effet celui-ci se compose des équations de Navier-Stokes. Quant à double diffusion, elle se distingue par l'augmentation du nombre de grandeurs caractéristiques régissant le mouvement.

A cette fin, ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à un exposé bibliographique permettant de situer notre travail et de donner un aperçu sur quelques résultats relatifs aux cas présentant une ressemblance avec le nôtre.

La présentation générale de la méthode des volumes finis afin d'éclaircir la méthode de résolution constitue le contenu du deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est dédié à la présentation de la géométrie du problème étudié, la formulation mathématique du problème (les équations de base ; dimensionnelles et non-dimensionnelles gouvernant le système avec les conditions aux frontières associées) et une brève description de la méthode numérique adoptée pour linéariser les équations analytiques et résoudre le problème.

Le chapitre quatre est consacré à la présentation des principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats de cette étude paramétrique sont également présentés.

Finalement, on terminera ce manuscrit par une conclusion générale qui englobe l'ensemble des résultats issus de cette étude.

Chapitre I :

Recherche bibliographique

1. Introduction

Cette étude est principalement centrée sur la dynamique de l'écoulement convectif et les transferts de chaleur et de masse qui se développent à l'intérieur d'une cavité fermée.

Dans la convection naturelle thermosolutale, il s'agit principalement de l'étude des mouvements convectifs induits par un gradient de température et un gradient de concentration. Ces gradients engendrent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui génère à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité.

L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années à la convection naturelle thermosolutale est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles telles que : le stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine, les processus de séchage, les opérations de dessalement d'eau de mer, la distillation, la climatisation, le séchage du bois, le refroidissement des composants électroniques... [2]

La convection thermosolutale se caractérise principalement par les quatre cas extrêmes de prédominance décrits par *Trevinsan et Al. (1985)* et qui sont directement liés aux divers couplages possibles entre le rapport des forces volumiques d'Archimède et le nombre de *Lewis* [3]

2. Les différents modes de transfert de chaleur

Si un solide est à une température uniforme on dit qu'il est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Dès qu'il existe entre deux corps, ou entre deux parties d'un même corps une différence de température ; cette dernière tend à disparaître spontanément par échange de chaleur qui peut se faire par trois modes différents : Conduction, Convection et Rayonnement.

2.1. Transfert de chaleur par conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique. (Gradient de température dans un milieu). Dans la plupart des cas on étudie la conduction dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il

y a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection. La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité du flux est proportionnelle au gradient de température [4] :

$$\vec{\phi} = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$$

Avec : $\vec{\phi}$ = Densité du flux thermique (W.m^{-2})

λ = Conductivité thermique du milieu ($\text{W m}^{-1}.\text{C}^{-1}$)

T = température ($^{\circ}\text{C}$).

2.2 Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement thermique est une émission de rayonnement électromagnétique par un corps chaud, le rayonnement a la particularité de se déplacer dans le vide (rayonnement solaire), l'énergie électromagnétique reçue par le système est absorbée et convertie en énergie thermique (chaleur) [5].

Le rayonnement thermique est un phénomène de surface, La relation de base du rayonnement est celle de STEFAN- BOLTZMAN selon laquelle la puissance M_0 du rayonnement thermique émis par unité de surface d'un corps noir est directement proportionnelle à T^4 .

$$M_0 = \sigma T^4 \quad [\text{W.m}^{-2}] \quad (\text{I.2})$$

σ = constante de STEFAN-BOLTZMAN = $5.67 \cdot 10^{-8} \quad \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

Cette formule se déduit par intégration sur l'ensemble des longueurs d'onde de la relation fondamentale obtenue par PLANK dans sa théorie de quanta.

2.3. Transfert de chaleur par convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules [4]. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

3. Les types de la convection

3.1 Convection forcée

Le mouvement du fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur, etc.) qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement de fluide [6].

3.2 Convection mixte

Les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment on parle alors de convection mixte [7].

Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre.

L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle.

3.3 La convection naturelle

La convection naturelle est un mode de transfert de chaleur d'un milieu chaud vers un milieu froid, par un transport macroscopique de la matière (mouvement des particules fluides) généré par des effets de poussée d'Archimède lié à l'action du champ de pesanteur à la présence d'un gradient de la température.

4. La convection naturelle thermosolutale

Ce phénomène a été largement étudié pendant les dernières décennies. Un nombre important des travaux de recherche sur ce sujet est très abondant dans la littérature. Par ailleurs, le mouvement d'un fluide peut être généré par des variations de densité conséquence de l'existence d'un champ de gradient de température ou d'autres quantités scalaires. Dans le cas le plus fréquent, les deux quantités scalaires responsables de ces mouvements convectifs du fluide sont les gradients de température et de concentration. Ce phénomène cruciale est connu sous le nom de convection thermosolutale ou double diffusion. En effet, ces deux forces de poussées peuvent agir ensemble ou bien en opposition selon des conditions aux frontières ainsi que le coefficient d'expansion solutale.

Les phénomènes de transfert de chaleur et de masse sont particulièrement importants à étudier compte tenu du grand nombre d'applications industrielles ou environnementales où elles sont présentes. La grande majorité des travaux en cavités parallépipédique concerne la convection naturelle d'origine thermique [4].

5. Transfert par diffusion

Comme dans la convection thermique, la convection massique est la superposition de deux mécanismes de transferts : transport dû au mouvement de la matière, et diffusion moléculaire.

Les phénomènes de diffusion pure constituent des exemples de transfert d'une grandeur extensive sans mouvement apparent à l'échelle macroscopique. Ils sont gouvernés par le gradient de densité volumique locale ($\overrightarrow{\text{grad}} C$) de la grandeur considérée, et par le coefficient de diffusion D caractéristique du phénomène et du milieu, sous la forme [4] :

$$\vec{q}_s = -D \overrightarrow{\text{grad}} C$$

La concentration d'un constituant dans un mélange fluide peut être exprimée de plusieurs manières : (concentration massique ρ_i , molaire m_i , fraction molaire m_i/m , et finalement la fraction massique c_i).

Dans notre cas on exprime la concentration par la fraction massique $c_i = \rho_i/\rho$. Donc, la fraction massique de l'espèce i est la masse de l'espèce i divisée par la masse totale du mélange.

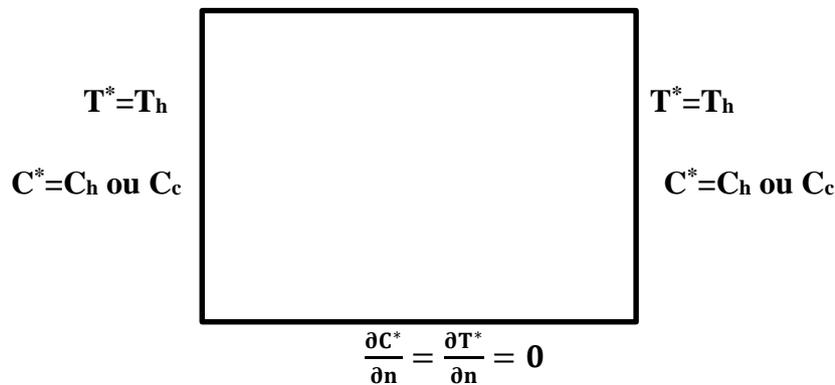
6. Etat de l'art

L'étude de la convection naturelle à double diffusion dans des enceintes fermées a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Dans cette partie nous allons présenter une synthèse de quelques travaux antérieurs sur la convection thermosolutale et les résultats issus de ces travaux.

Séveléder et al (1989) [8] se sont intéressés à l'influence des conditions aux limites de la température et de la concentration sur la structure d'écoulement de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec les paramètres suivants : $Pr = 2.2$, $Sc = 130$, $Ra_t = 5.5 \times 10^5$, $Ra_s = 1.3 \times 10^5$, qui correspondent à un gaz liquéfié. Les résultats montrent l'apparition d'une seule cellule à cause de la condition de température et de concentration uniforme sur les parois verticales, mais la condition de la variation linéaire de température et de concentration a fait apparaître quatre cellules.

C.Béghein et al (1991) [9] ont étudié numériquement en deux parties, la convection thermosolutale dans une cavité carrée, en régime stationnaire remplie d'air et soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration :

- Dans la première série de simulations, ils ont étudié l'influence de la force de poussée solutale sur les taux de transfert de chaleur ou de masse : les nombres de Lewis et de Rayleigh thermique sont constants ($Le = 1$, $Ra_t = 107$), le nombre de Rayleigh solutale varie ($Ra_s = 105 \text{ à } 5 \times 107$).
- La deuxième série de simulations se rapporte à l'analyse de l'influence du nombre de Lewis sur le mouvement du fluide, dans les cas d'écoulements à force de poussée thermique dominante ($Ra_t = 107$, $Ra_s = 0$) et à force de poussée solutale dominante ($Ra_t = 0$, $Ra_s = 107$). Le nombre de Lewis varie de 0.3 à 5.

$$\frac{\partial C^*}{\partial n} = \frac{\partial T^*}{\partial n} = 0$$


$T^* = T_h$ $T^* = T_h$
 $C^* = C_h \text{ ou } C_c$ $C^* = C_h \text{ ou } C_c$

$$\frac{\partial C^*}{\partial n} = \frac{\partial T^*}{\partial n} = 0$$

O.Sovran et al (2001) [10] ont étudié la naissance de la convection dans une couche poreuse infinie, saturée par un fluide binaire, en présence d'effet Soret. Les parois horizontales, imperméables à la matière, sont maintenues à des températures constantes et différentes.

De même, M. Marcoux et al (1999) [11] ont étudié la naissance de la convection thermosolutale mais dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Des flux constants de chaleur et de masse sont imposés sur les parois verticales, en supposant que les parois horizontales sont isolées.

R. Bennacer [12] en 1993 a élaboré une étude numérique sur la convection naturelle thermosolutale, où des gradients horizontaux de température et de concentration sont imposés aux parois verticales d'une enceinte fermée. Cette configuration se réfère au couplage pouvant avoir lieu lors du changement de phase dans des systèmes binaires. Il a analysé l'influence des différents paramètres qui caractérisent le problème sur les transferts de chaleur et de masse, ainsi que sur la structure de l'écoulement. Deux situations sont envisagées. Dans la première, les températures et les concentrations imposées aux parois verticales de la cavité sont constantes et uniformes, ce qui permet l'étude du régime permanent : une corrélation originale pour le transfert de masse est établie. La décroissance du transfert de chaleur avec l'accroissement du rapport des forces de volume à nombre de Lewis élevé est mise en évidence, et reliée à la structure multicellulaire de l'écoulement. La seconde configuration représente le problème de la fusion d'un solide pur dans un liquide binaire : l'évolution au cours du temps de la structure de cet écoulement non stationnaire est analysée. Dans le cas particulier où les forces de volume (thermique et solutale) sont

égales et opposées, il a montré l'existence d'un seuil pour le nombre de Rayleigh en deca de laquelle la solution diffusive est stable même dans une couche verticale. La valeur critique en fonction du nombre de Lewis par une étude de stabilité linéaire a été déterminée et confirmée numériquement. Par ailleurs, il a montré que la présence d'un maximum de densité caractérisant l'eau et les solutions aqueuses influence fortement la structure d'écoulement dans le cas de solutions diluées, aussi bien dans le cas de la convection thermique que dans le cas thermosolutal.

L'étude du transfert naturel de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale chauffée par le bas et refroidie par la paroi inclinée supérieure a été présentée par M, Boussaid et al (1999) [13].

K, Ghorayeb et al [14] ont présenté en 1996 une étude sur la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire de parois horizontales isolées et verticales soumises à des gradients horizontaux de température et de concentration différents. Dans cette étude, ils étaient intéressés à la situation où le rapport des forces de volume solutale et thermique est égal à -1 . Ils ont ainsi, étudiés la stabilité linéaire de la solution d'équilibre pour une cellule rectangulaire jusqu'au cas limite de la cellule d'extension infinie.

Quelques années plus tard, K, Ghorayeb et al (1999) [15] ont étudié numériquement la convection à double diffusion instable dans une cavité carrée avec des gradients de température et de concentration horizontaux égaux mais opposés. Les conditions aux limites le long des parois latérales verticales sont imposées de telle sorte que le rapport de flottabilité $N = Gr_s/Gr_t$ soit égal à -1 , où Gr_s et Gr_t sont respectivement les nombres de Grash solutal et thermique. Dans cette situation, le flux convectif à l'état stable est stable jusqu'à une valeur seuil Gr_{c1} du nombre de Grashof thermique qui dépend du nombre de Lewis Le . Au-delà de Gr_{c1} , des écoulements convectifs oscillatoires se produisent. Le flux oscillatoire apparaissant pour le Gr_t légèrement supérieur à Gr_{c1} est soit un flux centrosymétrique (pour $Le \geq 17$), soit asymétrique (pour le $Le \leq 17$). Pour des valeurs plus grandes du nombre de Grashof thermique, les deux régimes se produisent pour des valeurs fixes de Gr_t et Le .

Charrier-Mojtabi et al (1997) [16] ont étudié la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois verticales sont maintenues à des températures et concentrations différentes mais uniformes.

Les murs horizontaux sont imperméables et adiabatiques. Ils ont déduit que, lorsque le rapport des forces de flottabilité solutale et thermique résultantes est égal à -1 ; une solution d'équilibre correspondant à un régime purement diffusif est obtenue. Le régime est linéairement stable jusqu'à une valeur du nombre de Rayleigh thermique, Fonction du rapport d'aspect de la cellule et du nombre de Lewis. Le résultat de stabilisation est confirmé par une simulation numérique directe, qui permet de décrire les différents régimes d'écoulement apparaissant après la perte de la solution de diffusion pure.

A. Amahmid et al (1999) [17] ont élaboré une étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une couche poreuse de Brinkman doublement diffusive. Les résultats de la convection naturelle pur sont également comparé à ceux de la convection thermosolutale.

C. Le Marec (1996) [18] a souligné l'influence de la convection thermosolutale sur la solidification dirigée d'un alliage binaire dans un creuset cylindrique. Pour cela, il a développé deux codes pour résoudre les équations de Navier-stokes incompressibles et instationnaires ; le premier concerne le cas cartésien bidimensionnel et le deuxième est écrit en coordonnées cylindriques. La méthode utilisée est la méthode de collocation Fourier-Tchebycheff pour la résolution spatiale. Deux situations sont envisagées :

- La première, concerne le cas bidimensionnel ; Il a étudié l'influence du confinement latéral et du nombre de Rayleigh solutal sur la nature de la bifurcation convective, les ségrégations radiale et axiale et le régime instationnaire. L'effet déstabilisant d'un gradient thermique horizontal est également considéré.
- La deuxième, concerne une configuration qui se rapporte à l'expérience, il a étudié l'influence des écoulements sur la composition du cristal.

Chamkha et al. (2002). [19] ont étudié l'écoulement convective bidiffusive instable et laminaire d'un mélange binaire de gaz dans une cavité rectangulaire inclinée remplie d'un milieu poreux uniforme. Les gradients de la chaleur et de la masse sont appliqués sur les deux parois verticales de la cavité, tandis que, les deux autres parois sont adiabatiques et imperméables. Les forces de buoyancy thermique et solutale sont supposées opposantes. Une solution numérique basée sur la méthode des différences finies est obtenue. Avec l'absence du milieu poreux, un comportement oscillant d'écoulement dans la cavité est

obtenu pour un rapport de buoyancy égale à 1. Cependant, en présence du milieu poreux, on observe un affaiblissement dans le comportement oscillant. Les résultats obtenus illustrent les effets de l'inverse de nombre de Darcy et de l'angle d'inclinaison sur les contours des lignes courant, de la température, de la concentration et de la densité aussi bien des profils de vitesses que de la température et de la concentration au centre de la cavité. En outre, les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood sont présentes et discutés pour différentes conditions paramétriques.

Bahloul et al. (2003) [20] ont examiné les écoulements dans une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse avec effet Soret. Ils ont démontré que la solution prend la forme d'une bifurcation qui peut être sous critique ou fourche, dépendamment du rapport des forces de volume N et du nombre de Lewis, Le . Avec les mêmes conditions précédentes, le cas de la cavité verticale a été étudié par Boutana et al. (2004) [21] qui ont prédit divers types d'écoulements. Ils ont démontré que dans le cas d'un écoulement opposé et au voisinage de $N > -1$, des solutions multiples sont possibles pour des valeurs données des paramètres de contrôle du problème.

Bourich et al. (2004) [22] ont étudié la convection naturelle bidiffusive bidimensionnelle dans une cavité carrée poreuse partiellement chauffée au-dessous tandis que sa surface supérieure est refroidie à une température constante. Les parois verticales de la cavité sont soumises à un gradient de concentration horizontal. Les équations gouvernantes sont discrétisées avec le schéma des différences centrées et résolues avec la méthode (ADI). Les paramètres gouvernants sont le nombre de Rayleigh thermique ($Ra=100$ et 200), le nombre de Lewis égale (0.1 , 1 et 10), le rapport de buoyancy ($-10 \leq N \leq 10$) et la position relative de l'élément chauffant avec la ligne médiane verticale de la cavité ($\delta=0$ et 0.5). L'effet des paramètres gouvernants sur les caractéristiques de fluide est analysé. La multiplicité de solutions est explorée et l'existence de l'écoulement bicellulaire asymétrique est obtenue quand l'élément chauffé est change vers la limite verticale ($\delta=0.5$). Les forces de buoyancy solutales produit par le gradient de concentration horizontal mènent à l'élimination de la multiplicité de solutions obtenues dans la convection pure thermique quand N atteint un seuil de valeur qui dépend de Le et Ra .

En 2009 H. Sun et al [23] ont montré que l'analogie transfert de chaleur–transfert de matière reste applicable dans des domaines de paramètres plus étendus que ceux habituellement admis.

D. V. Lyubimov et al (2008) [24] Ont focalisé sur l'effet d'un écoulement longitudinal homogène sur l'apparition de la convection dans une couche poreuse horizontale saturée par un fluide binaire et chauffée de bas en haut. Les limites des couches sont soumises à un flux de chaleur constant. L'enquête est faite en prenant en compte l'effet Soret.

L'étude expérimentale de la convection thermosolutale réalisée par Kamotani et al (1985) [25] concerne le cas d'une cavité de faible rapport de forme ($0.33 \leq A \leq 0.55$) pour : $Pr=7$ et $Sc = 2100$. Les nombres de Grashof thermique et massique considérés varient de telle sorte que leurs rapports $N = Gr_c / Gr_t$ restent supérieurs à 3.8. Des écoulements complexes et variés ont été observés et des conditions d'instabilité ont été rapportées.

A. Attia (2007) [26] a étudié numériquement un cas bidimensionnel de la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux en présence d'un champ magnétique externe uniforme et constant. Les autres parois sont imperméables et adiabatiques. Les nombres de Grashof solutal et de Hartmann sont variés. Les résultats obtenus montrent que la variation du nombre de Grashof solutal a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements, et aussi qu'un champ magnétique relativement élevé ($Ha=100$) provoque la suppression des oscillations et fournit un effet de stabilisation de l'écoulement. Il a aussi observé que ce champ magnétique cause des modifications dans la structure de l'écoulement et permet de contrôler la convection et les transferts de chaleur et de masse.

Chapitre II :
Présentation de la méthode
des volumes finis

1. Introduction

Au cours de ces dernières années, nous assistons à une augmentation fulgurante de la performance des ordinateurs, qui a permis l'utilisation de méthodes numériques de plus en plus performantes et efficaces pour la résolution de systèmes d'équations différentielles non linéaires et résoudre des problèmes de transfert et de transport en 2-D et 3-D.

Actuellement, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur et de masse, ce sont les méthodes des différences finies, des volumes finis et des éléments finis.

2. Les différentes méthodes numériques

2.1 Méthode des différences finies

La variable inconnue ϕ est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage. Le développement de l'inconnue en séries de Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations différentielles par différences finies on obtient un système d'équations algébriques pour les valeurs de l'inconnue dans chaque point du maillage [27].

2.2 Méthode des éléments finis

Dans la méthode des éléments finis on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de l'inconnue ϕ . Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte. En remplaçant l'approximation de ϕ dans les équations différentielles, on constate que celles-ci ne vérifient pas exactement, et un résidu est défini dans ce cas pour mesurer l'erreur. Le résidu est minimisé en le multipliant par une fonction de pondération et en l'intégrant. Le résultat de l'intégration est un set d'équations algébriques pour les coefficients des fonctions d'approximation [27].

2.3. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes de contrôle est une méthode développée par Spalding et Patankar. La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et elle est donc particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie. Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des parallélépipèdes rectangles en trois dimensions). Cependant, la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, donc de traiter des géométries complexes comme c'est le cas dans de nombreux problèmes industriels., ce qui est un avantage sur les différences finies [28].

Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représenté à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs, ensuite la forme intégrale est discrétisé dans le domaine d'étude [29].

Pour écrire le schéma de discrétisation en un point P, nous désignerons par e, w, s et n les faces latérales respectivement « est », « ouest », « sud » et « nord ». Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les nœuds E, W, N et S (figure II-1) . Les noeuds E et W sont pris dans la direction « ox », et les noeuds S et N dans la direction « oy ».

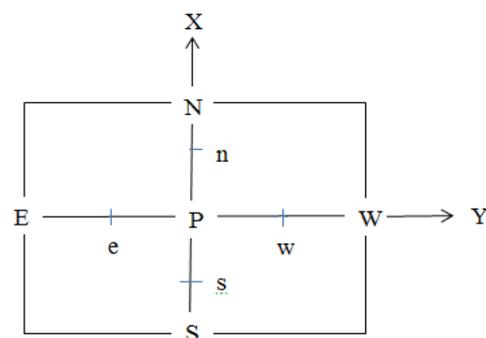


Fig.II.1 : volume de contrôle pour la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations de conservation des différentes grandeurs physiques.

3. Principe de la méthode des volumes finis

3.1. Forme générale de l'équation de transport

La forme *générale* de l'équation de transfert d'une quantité quelconque ϕ dans un fluide en mouvement donné par Patankar [30] :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \phi)}_{[1]} + \underbrace{div(\rho \cdot \phi \cdot V)}_{[2]} = \underbrace{div[\Gamma \cdot grad(\phi)]}_{[3]} + \underbrace{S}_{[4]} \quad (II-1)$$

[1] : Terme temporel. [2] : Terme convectif. [3] : Terme de diffusion.
 [4] : Terme source. Γ : Coefficient de diffusion.
 ϕ : fonction générale (soit T, soit C, soit V...).

Pour déterminer le champ de la variable ϕ dans un domaine d'étude par la méthode des volumes finis. Les étapes à suivre sont essentiellement [27] :

- Définir le domaine d'étude ces domaines appelés volumes finis.
- Intégrer l'équation de transport sur chaque volume fini.
- Discrétiser les différents termes de la forme intégrée de l'équation de transport (transformer l'équation différentielle ponctuelle en un système des équations algébriques).
- Introduire les conditions initiales et aux limite appropriées.
- Résoudre le système algébrique final par une méthode de résolution pour obtenir un champ approche de ϕ dans des points discrets du domaine considère.

l'intégration de l'équation « générale » :

$$\int_V \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} dv + \int_V div(\rho \phi \cdot \vec{V}) dv - \int_V div(\Gamma grad \phi) dv = \int_V S(\phi) dv \quad (II-2)$$

Par l'utilisation du théorème de « flux-divergence » on obtient :

$$\int_V \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} dv = \int_V div(\rho \phi \cdot \vec{V} - \Gamma \cdot \nabla \cdot \phi) dv + \int_V S(\phi) \cdot dv \quad (II-3)$$

avec : $J = (\rho\phi.\vec{V} - \Gamma.\nabla.\phi)$.

De composantes : $J_x = \vec{J}.n_x = \rho.U.\phi - \Gamma.\frac{\partial\phi}{\partial x}$.

$$J_y = \vec{J}.n_y = \rho.V.\phi - \Gamma.\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

On peut écrire (II-1) et (II-2) sous la forme tensorielle suivante :

$$\frac{\partial(\rho.\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j.\phi)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} (\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X_j}) + S$$

En commençant par le cas le plus simple, pour simplifier les choses :

D'après l'équation (II-1) on peut écrire, pour le cas unidimensionnel stationnaire :

$$\frac{\partial(\rho U.\phi)}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} (\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X})$$

- La même chose pour l'équation (II-2) :

$$\frac{\partial}{\partial X} (\rho.U) = 0 \quad \text{où} \quad \rho.U = \text{constante.} \tag{II-4}$$

L'intégration de l'équation (IV-3) sur le volume de contrôle (Fig.01) est :

$$(\rho U.\phi)_e - (\rho U.\phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \tag{II-5}$$

Par l'utilisation de la formule de série de « TAYLOR » [3]: (voir annexe)

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_p) \quad \text{et} \quad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_p + \phi_w)$$

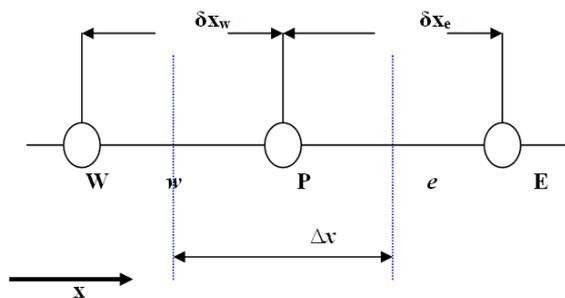


Fig.II-2. volume de contrôle pour le cas unidimensionnel.[3]

$$\left(\Gamma \cdot \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e \cdot \frac{(\phi_e + \phi_p)}{(\delta x)_e} \quad \text{et} \quad \left(\Gamma \cdot \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w \cdot \frac{(\phi_p + \phi_w)}{(\delta x)_w}$$

Par la Substitution dans l'équation (II-5) on obtient :

$$\frac{1}{2}(\rho U)_e \cdot (\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho U)_w \cdot (\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma_e \cdot (\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w \cdot (\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w}. \quad (\text{II-6})$$

Pour écrire l'équation sous forme plus compacte ; on défini :

$$F = \rho \cdot U \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}. \quad (\text{II-7})$$

où : F est l'intensité de la convection et D est la conductance de la diffusion.

Tel que « D », reste toujours positive, alors que la valeur de « F » dépend de la direction de l'écoulement.

Et : $Pe = F/D$, est le nombre de « Peclet » qui est déterminé par le rapport entre l'intensité convective et la conductance diffusive.

Après le rangement de l'équation (II-6) on obtient :

$$a_p \cdot \phi_p = a_E \cdot \phi_E + a_W \cdot \phi_W \quad (\text{II-8})$$

$$a_E = D_e \cdot A(|Pe_e|) + [|-F_e, 0|]_{max}. \quad (\text{II-9-a})$$

$$a_W = D_w \cdot A(|Pe_w|) + [|-F_w, 0|]_{max}. \quad (\text{II-9-b})$$

$$a_p = a_E + a_W + (F_e - F_w). \quad (\text{II-9-c})$$

Cas bidimensionnel :

Pour le cas bidimensionnel l'équation (II-8) s'écrit (d'après la formulation généralisée donnée par Patankar) ;

$$a_p \cdot \phi_p = a_E \cdot \phi_E + a_W \cdot \phi_W + a_N \cdot \phi_N + a_s \cdot \phi_s + b \quad (\text{II-10})$$

* La formulation généralisée est:

$$a_E = D_e \cdot A(|Pe_e|) + [|-F_e, 0|]_{max}. \quad (\text{II-11-a})$$

$$a_W = D_w \cdot A(|Pe_w|) + [|-F_w, 0|]_{max}. \quad (\text{II-11-b})$$

$$a_N = D_n.A(|Pen|) + [|-Fn, 0|]_{max}. \quad (II-11-c)$$

$$a_S = D_s.A(|Pes|) + [|-Fs, 0|]_{max}. \quad (II-11-d)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 + S_p \Delta x \Delta y \quad (II-11-e)$$

$$b = Sc.\Delta x.\Delta y + a_p^0.\phi_p^0 \quad et \quad a_p^0 = \frac{\rho_p^0.\Delta x.\Delta y}{\Delta t} \quad (II-11-f)$$

Les valeurs (ϕ_p , ϕ_E , ϕ_w , ϕ_N et ϕ_S) sont des quantités inconnues à l'instant ($t+\Delta t$) ; d'autre part, les taux de masse (d'écoulement) : F_e , F_w , F_n et F_s sont déterminés par l'équation (IV-7), et les conductances correspondantes sont définies par [30]:

$$D_e = \frac{\Gamma_e.\Delta y}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w.\Delta y}{(\delta x)_w}, \quad D_n = \frac{\Gamma_n.\Delta y}{(\delta y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s.\Delta y}{(\delta y)_s} \quad (II-12)$$

Et les nombres de « Peclet » par :

$$(Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad (Pe)_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad (Pe)_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad (Pe)_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (II-13)$$

Par la relation $A(|Pe|)$, on peut utiliser les différentes méthodes, ce qu'on appelle « les schémas ».

pour le schéma « Power-Law » [30]:

$$A(|Pe|) = [0, (1-0.1/|Pe|)^5]_{max}.$$

4. Maillage décalé pour évaluer les vitesses

Dans la (M.V.F), il est préférable d'évaluer les composantes de vitesse aux interfaces entre deux volumes adjacents (Fig :II-4).

La raison pour laquelle un maillage décalé doit être utilisé pour résoudre (numériquement) les équations de Navier-Stokes est expliquée ces-dessous :

Quand le gradient de pression est discrétisé, on obtient la formule :

$$P_w - P_e = \frac{P_w + P_p}{2} - \frac{P_p + P_e}{2} = \frac{P_w - P_e}{2} \quad (II-14)$$

C'est à dire que la différence de pression entre deux volumes qui ne sont pas adjacents est utilisée dans l'équation de mouvement (Navier-Stokes). Le même problème apparaît dans l'équation de continuité ($\rho = \text{constante}$) est :

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{U_e - U_w}{\Delta x} = 0 \Rightarrow U_e - U_w = 0 \Rightarrow \frac{U_P + U_E}{2} - \frac{U_W + U_P}{2} = 0 \Rightarrow \frac{U_E + U_W}{2} = 0$$

Au point de vue historique, le maillage décalé est un concept introduit par « Harlow » et « Welch » en 1966 pour la méthode (MAC).

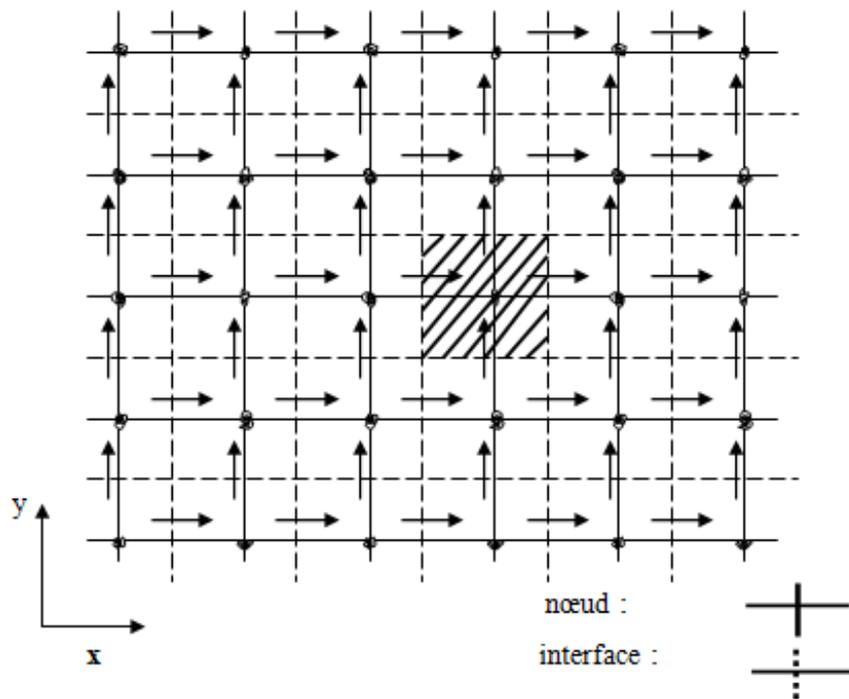


Fig II.3: Maillage décalé 2-D (pour évaluer les vitesses).

5. Equation de correction de la vitesse

D'après la discussion précédente, le calcul des composantes de vitesse consiste un maillage décalé, la discrétisation de la composante horizontale de l'équation de mouvement est :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) \cdot \Delta y \tag{II-15}$$

le maillage décalé qui utilisé pour calculer la composante de vitesse dans la direction verticale, la discrétisation s'est :

$$a_n V_n = \sum a_{nb} V_{nb} + b + (P_P - P_N) \cdot \Delta x \tag{II-16}$$

Si le champ de pression est connu, il est possible de calculer le champ de vitesse à partir des équations ci- dessus.

Après avoir deviné le champ de pression on calcule un champ « hypothétique » de vitesses :

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) \cdot \Delta y \quad (\text{II-17})$$

$$a_n V_n^* = \sum a_{nb} V_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) \cdot \Delta x \quad (\text{II-18})$$

Il reste à corriger l'estimation initiale de la pression afin de converger vers la solution exacte, si (P^*) est la pression donnée et (P') la correction de pression, la nouvelle pression sera calculée avec :

$$P = P^* + P' \quad (\text{II-19})$$

Et les corrections (U') et (V') sont déterminés si la correction de pression est connue, tel que les composantes des vitesses corrigées s'obtiennent de manière analogue :

$$U = U^* + U' \quad \text{et} \quad V = V^* + V' \quad (\text{II-20})$$

Il ne reste qu'a trouver une équation pour (P'), par la soustraction des équations (II-17) et (II-15) on obtient [3] :

$$a_e U_e' = \sum a_{nb} U_{nb}' + (P_P' - P_E') \cdot \Delta y \quad (\text{II-21})$$

6. Equation de correction de la pression

L'équation de correction de la pression est déduite de l'équation de continuité.

L'équation de continuité est :
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-22})$$

On intègre cette équation sur le volume de contrôle (l'aire hachuré Fig.05) ; le même volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation pour la variable générale ϕ .

Donc l'intégration de l'équation (II-22) donne [30]:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta y + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta x = 0 \quad (\text{II-23})$$

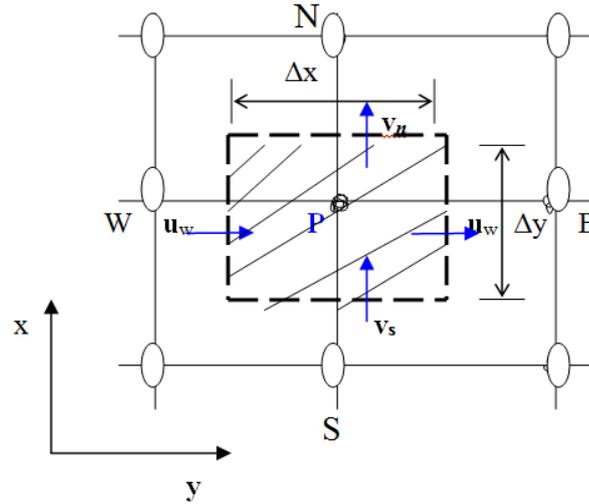


Fig. II-4 : Le volume de contrôle pour l'équation de continuité [3].

En remplaçant les composantes des vitesses par les équations de correction des vitesses, et après le rangement on obtient l'équation du correction de pression (p') :

$$a_p.P'_p = a_E.P'_E + a_W.P'_W + a_N.P'_N + a_S.P'_S + b \quad (\text{II-24})$$

Avec :

$$a_E = \rho_e.d_e.\Delta y \quad (\text{II-25-a})$$

$$a_W = \rho_w.d_w.\Delta y \quad (\text{25-b})$$

$$a_N = \rho_n.d_n.\Delta x \quad (\text{25-c})$$

$$a_S = \rho_s.d_s.\Delta x \quad (\text{25-d})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{25-e})$$

$$b = \frac{(\rho_p^0 - \rho_p)\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho U^*)_w - (\rho U^*)_e]\Delta y + [(\rho V^*)_s - (\rho V^*)_n]\Delta x \quad (\text{25-f})$$

Dans le cas où seules valeurs de ϕ aux nœuds (i,j) et $(i+1,j)$ sont utilisées dans l'approximation des dérivées partielles des différentes équations différentielles, cette somme s'écrit :

$$\sum_k a_k \phi_k = a_e(\phi_{i+1,j}) + a_w(\phi_{i-1,j}) + a_n(\phi_{i,j+1}) + a_s(\phi_{i,j-1}) \quad (\text{II-26})$$

Notons que les indices p, w, e, n et s sont utilisés en vue d'indiquer respectivement les nœuds $(i,j), (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1)$ et $(i,j+1)$.

Les expressions a_p , a_n , a_s , a_e , a_w et le terme source $b(i,j)$ dépendent de la méthode numérique adopté pour l'approximation de l'équation analytique relative à la grandeur ϕ . Ces coefficients sont toujours exprimés en fonction du coefficient de diffusion Γ , des pas d'espaces $\delta(x_e)$, $\delta(x_w)$, $\delta(y_n)$, $\delta(y_s)$, Δx , et Δy ainsi que du nombre Pe de *Peclet local* (Patankar 1980). Leurs expressions générales respectives sont données par :

$$\begin{aligned}
 a_n &= D_n \cdot A(Pe_n) + \max[-F_n, 0] \\
 a_s &= D_s \cdot A(Pe_s) + \max[-F_s, 0] \\
 a_e &= D_e \cdot A(Pe_e) + \max[-F_e, 0] \\
 a_w &= D_w \cdot A(Pe_w) + \max[-F_w, 0] \\
 a_p &= a_e + a_w + a_n + a_s \\
 b &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot Sc + a_p^0 \cdot \phi_p^0 \\
 a_p^0 &= (\rho_p^0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y) / \Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{II-27}$$

Les différents termes utilisés dans les relations (II-27) sont définis comme suit :

$$F_e = \rho U_e \Delta y \quad D_e = (\Gamma_e \cdot \Delta y) / \delta(x_e) \quad Pe_e = F_e / D_e.
 \tag{II-28}$$

L'expression de la fonction $A(Pe)$ relatives aux différents schémas numériques :

Schéma numérique	$A(Pe)$
Différence centrées	$1 - 0.5 Pe $
Upwind	1
Hybrid	$\text{Max}[0, 1 - 0.5 Pe]$
Power Law	$\text{Max}[0, (1 - 0.5 Pe)^5]$
Exponential (exact)	$ P / [\exp(P) - 1]$

Tableau II-1. Expression de $A(Pe)$ relatives aux différents schémas numériques[27].

Chapitre III :
Résolution numérique du
modèle étudié

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons le modèle physique où nous donnons la formulation mathématique du problème, les hypothèses simplificatrices, les conditions aux limites appropriées ainsi que les résolutions de ces équations.

2. Description du problème

Cette étude porte sur l'analyse de la convection naturelle bidimensionnelle, laminaire et transitoire engendrée par des gradients de température et de concentration dans une cavité parallélépipédique allongée. La géométrie du problème considéré est illustrée sur la figure (III.1). Il s'agit d'une enceinte parallélépipédique inclinée d'un angle θ , de longueur L et de hauteur H , ayant un rapport d'aspect A .

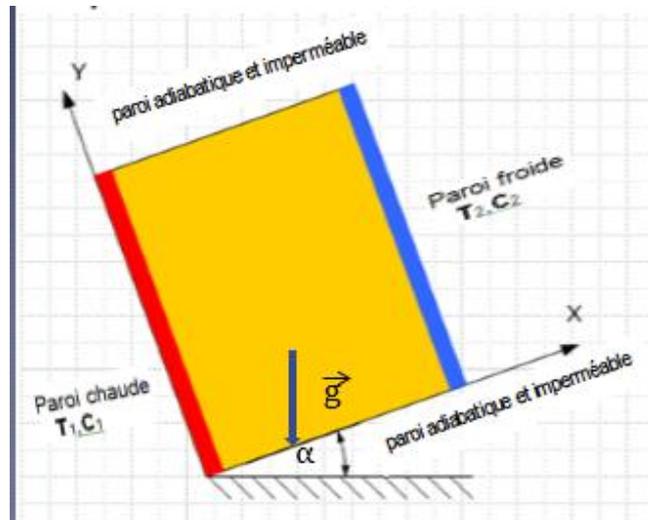


Fig.III-1 : Représentation schématique du modèle physique étudié.

On suppose que le plancher ($y=0$) et le plafond ($y=H$) de la cavité sont adiabatique et imperméables à la matière. La température de la paroi verticale externe de gauche ($x=0$) est égale à T_1 et la fraction massique du soluté à C_1 et la température de la paroi verticale externe de droite ($x=L$) est égale à T_2 et sa fraction massique du soluté à C_2 avec $T_2 < T_1$ et $C_2 < C_1$.

3. Hypothèses simplificatrices

On suppose que la cavité bidimensionnelle de hauteur H est remplie d'un fluide confiné. Les vitesses en convection naturelle sont modérées et on peut donc négliger l'échauffement dû à la viscosité dans l'équation de l'énergie. L'écoulement est supposé bidimensionnel et laminaire, et les propriétés du fluide sont supposées constantes. La variation, dans les couches

limites, de la masse volumique suivant la température est calculée, en utilisant l'approximation de *Boussinesq* [31] et n'est considérée que dans les termes qui engendrent le mouvement.

Le comportement de l'écoulement à l'intérieur de la cavité est modélisé grâce au modèle mathématique considérant un fluide supposé :

- monophasique,
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ainsi que l'interaction entre les transferts de chaleur et de masse
- la dissipation visqueuse ainsi que le terme de pression dans l'équation de la chaleur sont négligeables,
- la configuration ne contient ni source ni puits d'énergie ou de matière et n'est le siège d'aucune réaction chimique,
- le mouvement convectif est supposé bidimensionnel et transitoire.

4. Simplification des équations

Le problème de la convection naturelle à double diffusion est modélisé par les équations mathématiques suivantes :

4.1. Equation de la continuité

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de la variation de la masse volumique du fluide durant un intervalle de temps élémentaire et des flux massiques traversant la surface de ce volume. Après simplification, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{III-1})$$

U et V sont les composantes du vecteur de vitesse.

4.2. Equations de mouvement

D'après les hypothèses précédentes on a :

Suivant l'axe (ox) :

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - g \rho \cdot F(T, C) \cdot \sin \theta \quad (\text{III-2})$$

Suivant l'axe (oy) :

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - g \rho \cdot F(T, C) \cdot \cos \theta \quad (\text{III-3})$$

4.3. Equation de la chaleur

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(T) \right] = \text{div} (\alpha \cdot \text{grad} \cdot T) \quad (\text{III-4})$$

Avec : $\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ diffusivité thermique

4.4. Equation de la concentration

L'équation de la concentration s'écrit de la forme :

$$\left[\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(C) \right] = \text{div} (D \cdot \text{grad} \cdot C) \quad (\text{III-5})$$

Où ν est la viscosité cinématique du fluide, α la diffusivité thermique du fluide et D , le coefficient de diffusion moléculaire du soluté dans le fluide.

\vec{V} est le vecteur vitesse de composantes (U , V), \vec{g} désigne l'accélération de la pesanteur. La masse volumique ρ du fluide, dont la variation est prise en compte uniquement dans le terme de poussée d'Archimède (approximation de *Boussinesq*), est exprimée en fonction de la température et de la concentration par l'approximation linéaire du premier ordre suivante [31] :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0) \right] \quad (\text{III-6})$$

Où : ρ_0 est la masse volumique relative aux grandeurs T_0 et C_0 respectivement température et concentration de référence données par :

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

Alors que β_t et β_c sont respectivement les coefficients d'expansions volumiques thermique et massique définis par [31] :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C}$$

$$\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T}$$

Quant à la viscosité cinématique ν , la diffusivité thermique α du fluide ainsi que la fonction $F(T, C)$, elles sont données par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho_0 \cdot c_p}$$

$$F(T, C) = [\beta_t \cdot (T - T_0) + \beta_c \cdot (C - C_0)]$$

Où : μ est la viscosité dynamique du fluide, λ sa conductivité thermique et c_p sa capacité calorifique massique à pression constante.

III.5. Conditions aux limites

L'ensemble des équations précédentes est complété par les conditions aux limites relatives aux parois verticales et horizontales de la cavité. Elles s'écrivent :

Sur les parois verticales $x=0$ et $x=L$ ($0 \leq y \leq H$) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}(0,y) = \vec{V}(L,y) &= \vec{0} \\ T(0,y) = T_1 \quad \text{et} \quad C(0,y) = C_1 \\ T(L,y) = T_2 \quad \text{et} \quad C(L,y) = C_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-7)}$$

Sur les parois horizontales $y=0$ et $y=H$ ($0 \leq x \leq L$)

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}(x,0) = \vec{V}(x,H) &= \vec{0} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(x,0)} = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(x,H)} &= 0 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{(x,0)} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{(x,H)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-8)}$$

En considérant que la vitesse est nulle sur les parois de la cavité, nous admettons, dans cette étude, que l'espèce diffusante est très diluée (*Trevisan et al.1985, 1986,1987 ; Nield et al.1992*). [3]

6. Formes adimensionnelles des équations

Les équations sont simplifiées à l'aide des grandeurs adimensionnées selon les échelles caractéristiques suivantes :

- la hauteur H de la cavité,
- les différences maximales de température et de concentration entre les parois verticales sont respectivement (T_1-T_2) et (C_1-C_2) .
- La vitesse $\frac{\alpha}{H}$ (utilisation légitime puisque, en régime laminaire, le phénomène de diffusion n'est pas négligeable par rapport au phénomène de poussée).
- Le temps $\frac{H^2}{\alpha}$
- La pression $\frac{\rho \cdot \alpha^2}{H^2}$

6.1. L'équation du mouvement suivant \vec{OX}

Les quantités adimensionnelles résultantes sont les suivantes :

$$X^* = X/H,$$

$$Y^* = Y/H,$$

$$t^* = t / (H^2 / \alpha)$$

$$U^* = U / (\alpha / H)$$

$$V^* = V / (\alpha / H)$$

$$P^* = P / (\rho \alpha^2 / H^2)$$

Notre équation adimensionnelle finale est de la forme :

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \right] + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \left(\frac{Ra_c \cdot S_c}{Le^2} \cdot C^* + Ra \cdot \text{Pr} \cdot T \right) \cdot \sin \theta \quad (\text{III-9})$$

6.2. L'équation du mouvement suivant \vec{OY}

En ajoutant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad C^* = \frac{C - C_0}{C_1 - C_2}$$

Notre équation adimensionnelle finale est de la forme :

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \right] + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + (Ra \cdot \text{Pr} \cdot T^* + \frac{Ra_c \cdot Sc}{Le^2} \cdot C^*) \cdot \cos \theta \quad (\text{III-10})$$

6.3. L'équation de chaleur

En ajoutant la quantité adimensionnelle suivante :

$$T^* = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$$

Notre équation s'écrira :

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (\text{III-11})$$

Et elle peut être écrite aussi sous la forme : (*puisque* : $1/\text{Pr} = Le/Sc$)

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right] = \frac{Le}{Sc} \cdot \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

6.4. L'équation de concentration chimique

En ajoutant la quantité adimensionnelle suivante :

$$t^* = t / (H^2 / \nu)$$

$$V^* = V / (\nu / H)$$

$$C^* = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}$$

Notre équation s'écrira :

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial y^*} \right] = \frac{1}{Le \cdot \text{Pr}} \cdot \left[\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

Et elle peut être écrite aussi sous la forme :

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial y^*} \right] = \frac{1}{Sc} \cdot \left[\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (\text{III-12})$$

7. Conditions aux limites (après l'adimensionnalisation)

A ce système d'équations viennent s'ajouter les équations donnant les conditions aux limites en fonction des nouvelles variables adimensionnelles comme suit :

- Sur les parois verticales $x=0$ et $x=1$ pour $(0 \leq y \leq 1)$

$$\begin{array}{l}
 V(0,y)=V(1,y)=0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 T(0,y)=1 \quad \text{et} \quad C(0,y)=1 \\
 T(1,y)=0 \quad \text{et} \quad C(1,y)=0
 \end{array} \right\} \quad \text{(III-13)}
 \end{array}$$

- Sur les parois horizontales $y=0$ et $y=1$ ($0 \leq x \leq 1$)

$$\begin{array}{l}
 V(x,0)=V(x,1)=0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(x,0)}=\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(x,1)}=0 \\
 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{(x,0)}=\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{(x,1)}=0
 \end{array} \right\} \quad \text{(III-14)}
 \end{array}$$

Cette nouvelle formulation des équations met en évidence les grandeurs caractéristiques adimensionnelles dont dépendent les convections naturelles thermique et massique étudiées et qui sont [32] :

- le nombre de *Prandtl* : $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
- le nombre de *Schmidt* : $Sc = \frac{\nu}{D}$
- le nombre de *Rayleigh thermique* : $Ra = \frac{g \cdot \beta_T \cdot \Delta T \cdot H^3}{\alpha \cdot \nu}$
- le nombre de *Rayleigh matière* : $Ra_C = \frac{g \cdot \beta_C \cdot \Delta C \cdot H^3}{D \cdot \nu}$
- le nombre de *Lewis* : $Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{\alpha}{D}$
- le rapport des effets volumiques d'*Archimède* : $N = \frac{\beta_C \cdot \Delta C}{\beta_T \cdot \Delta T} \equiv \frac{Ra_C}{Ra}$

Ces différentes grandeurs adimensionnelles sont définies à partir des caractéristiques physiques relatives au fluide (ρ , μ , λ , etc.).

A ces grandeurs adimensionnelles gérant le mouvement du fluide qui apparaissent explicitement dans les équations régissant viennent s'ajouter le caractère géométrique suivant de la cavité :

- le rapport de forme de la cavité : $A = \frac{H}{L}$

Ces différentes grandeurs adimensionnelles sont définies à partir des caractéristiques physiques relatives au fluide (ρ , μ , λ , etc.)

8. Formulation finale des équations et mise en œuvre pour le calcul numérique

Le système final à résoudre se compose de cinq équations dont deux sont relatives aux composantes de la vitesse (U , V), l'équation de continuité, l'équation de la température et l'équation de la concentration chimique.

Rappelons que ces équations (après l'adimensionnalisation) sont :

- les équations de mouvements :

Selon (ox) :

$$\left[\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \right] + (Ra \cdot \text{Pr} \cdot T^* + \frac{Ra_c \cdot Sc}{Le^2} \cdot C^*) \cdot \sin \theta + \frac{\partial P^*}{\partial x^*}$$

Selon (oy) :

$$\left[\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \cdot \left[\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \right] + (Ra \cdot \text{Pr} \cdot T^* + \frac{Ra_c \cdot Sc}{Le^2} \cdot C^*) \cdot \cos \theta + \frac{\partial P^*}{\partial y^*}$$

- l'équation de la température :

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

- l'équation de concentration :

$$\left[\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + V^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial y^*} \right] = \frac{1}{Le \cdot \text{Pr}} \left[\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

Remarque : Dans ce qui suit, nous allons utiliser un seul indice afin d'éviter leurs encombrements ; (*- 1^{er} balayage (ox) : on utilise l'indice (i) et en fixe (j) et pour le 2^{ème} balayage (oy) : on utilise l'indice (j) et en fixe (i)).

8.1. Equations de mouvements

8.1.1. Composante horizontale

- Premier balayage : (selon ox)

D'après Patankar on peut écrire notre équation sous la forme :

$$\boxed{a_i U_i^* = b_i U_{i+1}^* + c_i U_{i-1}^* + d_i} \quad (\text{III-15})$$

Où :

- $b_i = a_{Ee} = D_E \cdot A(|Pe|_E) + \max(-F_E, 0)$
- $c_i = a_{Ww} = D_P \cdot A(|Pe|_P) + \max(F_P, 0)$
- $d_i = a_{Ne} \cdot U_{Ne}^* + a_{Se} \cdot U_{Se}^* + b + \Delta y \cdot (P_P^* - P_E^*)$
- $a_{Ne} = D_{ne} \cdot A(|Pe|_{ne}) + \max(-F_{ne}, 0)$
- $a_{Se} = D_{se} \cdot A(|Pe|_{se}) + \max(F_{se}, 0)$
- $b = Sc \cdot \Delta x \cdot \Delta y + a_p^0 \cdot U_p^0$
- $a_p^0 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t}$
- $F_E = F_{i+1} = \frac{1}{2} (U_i^* + U_{i+1}^*) \cdot \Delta y,$
- $F_P = F_{i-1} = \frac{1}{2} (U_i^* + U_{i-1}^*) \cdot \Delta y,$
- $F_{ne} = F_{j+1} = \frac{1}{2} (U_j^* + U_{j+1}^*) \cdot \Delta x,$
- $F_{se} = F_{j-1} = \frac{1}{2} (U_j^* + U_{j-1}^*) \cdot \Delta x,$
- $D_E = D_P = Pr \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_{i+1} = D_{i-1},$
- $D_{ne} = D_{se} = Pr \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = D_{j+1} = D_{j-1},$

* La même chose pour le deuxième balayage, sauf que $b_i = a_N$ et $c_i = a_S$ et

$$d_j = a_{En} \cdot U_{En}^* + a_{Wn} \cdot U_{Wn}^* + b + \Delta x \cdot (P_P^* - P_N^*)$$

8.1.2. Composante verticale

$$\boxed{a_j V_j^* = b_j V_{j+1}^* + c_j V_{j-1}^* + d_j} \quad (\text{III-16})$$

Avec :

- $F_N = F_{j+1} = \frac{1}{2} (V_j^* + V_{j+1}^*) \cdot \Delta x,$

- $F_P = F_{j-1} = \frac{1}{2}(V_j^* + V_{j-1}^*) \cdot \Delta x,$
- $F_{en} = F_{i+1} = \frac{1}{2}(V_i^* + V_{i+1}^*) \cdot \Delta y,$
- $F_{wn} = F_{i-1} = \frac{1}{2}(V_i^* + V_{i-1}^*) \cdot \Delta y,$
- $D_N = D_P = \text{Pr} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = D_{j+1} = D_{j-1},$
- $D_{en} = D_{wn} = \text{Pr} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_{i+1} = D_{i-1}.$

8.2. L'équation de correction de pression

- *Premier balayage* : (selon ox)

$$\boxed{a_i P_i' = b_i P_{i+1}' + c_i P_{i-1}' + d_i} \quad (\text{III-17})$$

Avec :

- $b_i = a_E = d_e \cdot \Delta y = (\Delta y)^2 / a_i$
- $c_i = a_W = d_w \cdot \Delta y = (\Delta y)^2 / a_{i-1}$
- $d_i = a_N \cdot P_N' + a_S \cdot P_S' + b$
- $a_N = d_N \cdot \Delta x = g_j \cdot \Delta x$
- $a_S = d_S \cdot \Delta x = g_{j-1} \cdot \Delta x$

* La même chose pour le deuxième balayage, sauf que $b_j = a_N$ et $c_j = a_S$.

8.3. Equation de pression et correction de vitesse

Concernant l'équation de pression et l'équation de correction de vitesse, nous allons garder celles citées dans le chapitre IV, sauf qu'une sous-relaxation était indispensable à la convergence du processus relatif.

Ainsi pour les pressions, on prendra α comme facteur de sous-relaxation, ce qui veut dire que :

- L'équation de la pression corrigée s'écrit :

$$P = P^* + \alpha \cdot P' \quad (\text{III-18})$$

- L'équation de correction de la composante horizontale de la vitesse s'écrit :

$$U_e = U_e^* + \omega \cdot (P_P' - P_E') \quad (\text{III-19})$$

L'équation de correction de la de la composante verticale de la vitesse s'écrit :

$$V_n = V_n^* + \omega \cdot (P_P' - P_N') \quad (\text{III-20})$$

α : coefficient de sous- relaxation de la pression.

ω : coefficient de sous-relaxation des vitesses.

8.4. L'équation de chaleur

- Premier balayage : (selon ox)

$$\boxed{a_i T_i = b_i \cdot T_{i+1} + c_i \cdot T_{i-1} + d_i} \quad (\text{III-21})$$

- $b_i = a_E = D_e \cdot A(|Pe|_e) + \max(-F_e, 0)$.
- $c_i = a_W = D_w \cdot A(|Pe|_w) + \max(F_w, 0)$.
- $d_i = a_N \cdot T_N + a_S \cdot T_S + b$.
- $a_N = D_n \cdot A(|Pe|_n) + \max(-F_n, 0)$
- $a_S = D_s \cdot A(|Pe|_s) + \max(F_s, 0)$
- $D_e = D_w = Pr^{-1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_i = D_{i-1}$
- $D_n = D_s = Pr^{-1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = D_j = D_{j-1}$

- Deuxième balayage : (selon oy)

$$\boxed{a_j T_j = b_j \cdot T_{j+1} + c_j \cdot T_{j-1} + d_j} \quad (\text{III-22})$$

- $b_j = a_S = D_s \cdot A(|Pe|_s) + \max(-F_s, 0)$.
- $c_j = a_N = D_n \cdot A(|Pe|_n) + \max(F_n, 0)$.
- $d_j = a_E \cdot T_E + a_W \cdot T_W + b$.
- $a_E = D_e \cdot A(|Pe|_e) + \max(-F_e, 0)$
- $a_W = D_w \cdot A(|Pe|_w) + \max(F_w, 0)$
- $D_n = D_s = Pr^{-1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = D_j = D_{j-1}$

8.5. L'équation de concentration chimique

- Premier balayage : (selon ox)

$$\boxed{a_i C_i^* = b_i C_{i+1}^* + c_i C_{i-1}^* + d_i} \quad (\text{III-23})$$

Où :

- $b_i = a_E = D_e \cdot A(|Pe|_e) + \max(-F_e, 0)$.
- $c_i = a_W = D_w \cdot A(|Pe|_w) + \max(F_w, 0)$.

- $d_i = a_N.C^*_N + a_S.C^*_S + b.$
- $F_e = F_i = U_i \Delta y$
- $F_w = F_{i-1} = U_{i-1} \Delta y$
- $F_n = F_j = V_j \Delta x$
- $F_s = F_{j-1} = V_{j-1} \Delta x$
- $D_e = D_w = Sch^{-1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_i = D_{i-1}$
- $D_n = D_s = Sch^{-1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = D_j = D_{j-1}$
- $(Pe)_e = (Pe)_i = F_i/D_i, \quad et \quad (Pe)_w = (Pe)_{i-1} = F_{i-1}/D_{i-1},$
- $(Pe)_n = (Pe)_j = F_j/D_j, \quad et \quad (Pe)_s = (Pe)_{j-1} = F_{j-1}/D_{j-1},$

* La même chose pour le deuxième balayage, sauf que $b_j = a_N$ et $c_j = a_S$.

9. Maillage

Le maillage utilisé doit satisfaire les notions de volume de contrôle et de maillage décalé, car il s'agit d'un écoulement. Pour cela on a utilisé généralement un maillage de $31 * 31$ nœuds.

10. Programme de calcul

Le code de calcul (**CONVECTIFa.m**) que nous avons utilisé pour résoudre le problème de l'écoulement convectif dans une enceinte fermée été élaboré par Dr. Labed dans son travail de Magistère (2004) [3], pour cela, nous avons adapté ce code à notre nouvelle configuration avec les nouvelles conditions.

L'organigramme de ce programme est explicité dans la planche 2.

- L'exécution du programme Convectif suffit d'introduire les données :

- Δt : l'intervalle de temps.
- Ra : nombre de *Rayleigh* thermique.
- N : rapport des forces volumiques d'Archimède.
- Le : nombre de *Lewis*.
- Pr : nombre de Prandtl.
- Sch : nombre de Schmidt.
- Ly : la hauteur de la cavité. (*selon oy*)
- f : coefficient de sous relaxation des vitesses.

- ff : coefficient de sous-relaxation de pression.
- $Epsi$: erreur admise pour la convergence.
- $Teta$: angle d'inclinaison de l'enceinte

Les résultats en sortie sont :

- U : la composante horizontale de la vitesse (selon ox).
- V : la composant verticale de la vitesse (selon oy).
- W : la résultante des deux vitesses $W = \sqrt{U^2 + V^2}$.
- MM : la concentration massique.
- TT : la température.
- Piy : la pression.

11. L'algorithme « Simple »

L'algorithme utilisé pour l'évaluation des variables (U , V , P , T , C). Ce programme repose sur la méthode semi-implicite qui à été présenté par Patankar et Spalding pour la première fois en (1972), et puis développé par Garetto, Gosman, Patankar, et Spalding (1972), et enfin il a été raffiné par Patankar (1975) [3]:

L'organisation chronologique des étapes du calcul numérique adoptée est la suivante [30] :

1. Estimer le champ de pression P^*
2. Résoudre les équations de mouvement (III-15) et (III-16) pour obtenir les composantes de vitesse U^* , V^* .
3. Résoudre l'équation de (P') (III-17).
4. Calculer la pression (P) en utilisant l'équation (III-18).
5. Calculer U , V à partir des valeurs initiales (U^* , V^*) en utilisant les formules (III-19) et (III-20).
6. Résoudre les autres équations qui sont couplées à l'équation de mouvement (la température, la concentration...).
7. La pression (P) est une nouvelle estimation de la pression (P^*), retourner à l'étape (2), et répéter cette opération jusqu'à l'obtention d'une solution convergée.

Chapitre IV :

Résultats et discussion

1.Introduction

Les écoulements décrits précédemment sont sujets à des changements de structure et intensité vu que la convection thermosolutale étudiée dépend en outre de plusieurs paramètres tels que Ra , N , Pr , A et θ

Dans ce chapitre, nous allons étudié les effets des paramètres de contrôle du problème sur le transfert de chaleur et de masse, à savoir l'effet du nombre de Rayleigh qui caractérise l'écart de la température, le rapport de forme A et l'angle d'inclinaison θ .

2. Influence du nombre de Rayleigh

Les figures ci-dessous présentent les contours de température, de concentration et de la pression dans le cas d'une cavité horizontale ($\theta=0^\circ$) pour différentes valeur du nombre de Rayleigh.

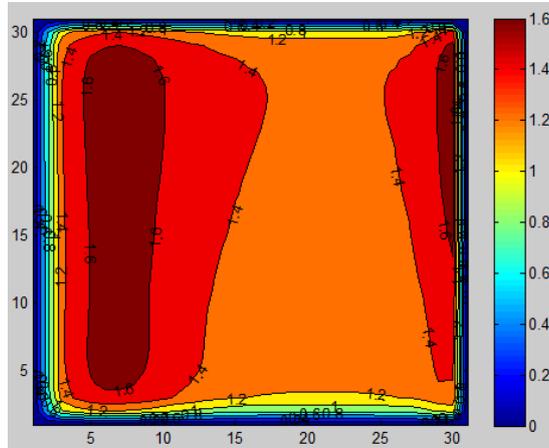
Les résultats illustrés dans la figure (IV-1-a) montrent que l'augmentation du nombre de Rayleigh de $Ra=10^4$ à $Ra=10^5$ et à $Ra=10^6$, conduit à une augmentation de la vitesse dans l'ensemble de la cavité.

Les résultats présentant les valeurs des températures sont présentés dans les figures (IV-1-b). Ces isothermes enveloppent entre elles des zones thermiques. Il s'avère que les contours de température sont des lignes verticales légèrement déformées auprès des parois latérales et deviennent des lignes plus ou moins horizontales au milieu de l'enceinte pour différentes valeurs de Rayleigh. De plus, l'augmentation du nombre de Rayleigh conduit à une amélioration des échanges thermiques

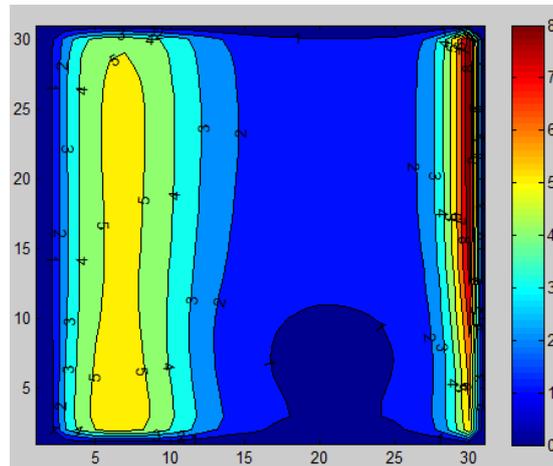
Les contours des isoconcentrations (Fig. IV-1-c) contournent entre elles des zones (couches) verticales plus ou moins larges par rapport aux isothermes les figures (IV-1-c). Il est claire que le l'augmentation du nombre de Rayleigh engendre une amélioration de la diffusion massique. Les contours des isoconcentrations deviennent plus concentrés auprès de la paroi chaude et elles sont plus stables au centre de la cavité. ($C=0.5$) du l'augmentation de nombre de Rayleigh.

Les figures (IV-1-d) présentent les contours de pression pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Il a noté que les contours de pression ont une allure presque horizontale inclinée. Les valeurs les plus élevées de la pression sont situées dans le coin supérieur de la paroi froide. L'augmentation du nombre de Rayleigh conduit à une augmentation de la pression à côté de la paroi froide en haut, par contre la pression devient plus en plus faible à côté de la paroi chaude en bas. Ceci peut être justifié par la dominance

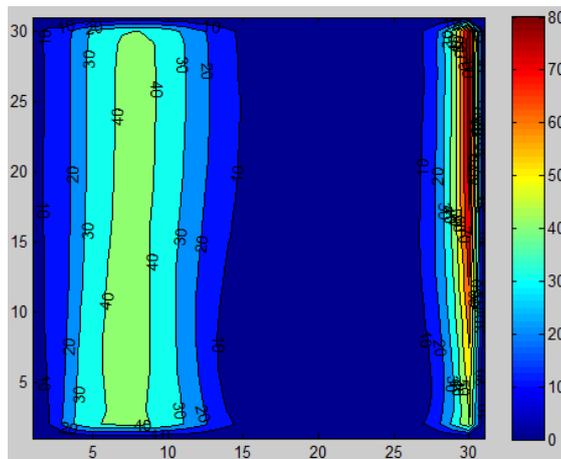
de l'effet des forces de flottabilité engendrée par le gradient de température, par rapport aux forces massiques.



$Ra=10^4$

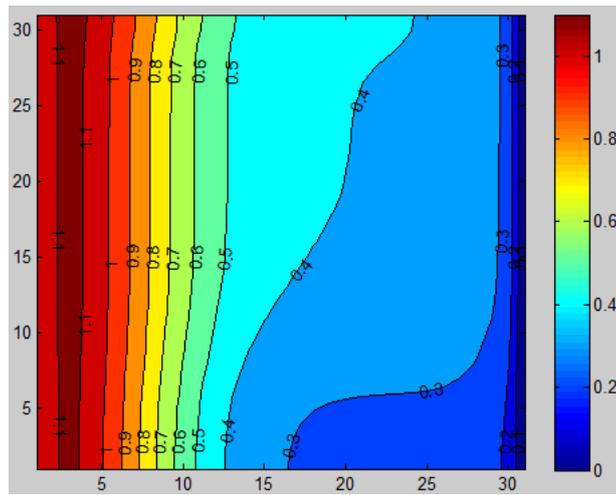


$Ra=10^5$

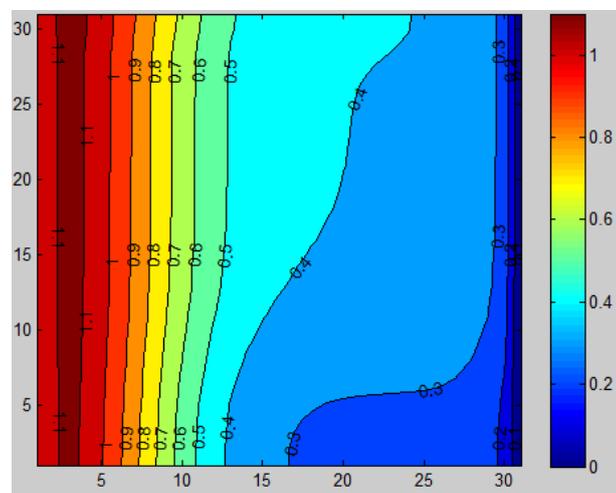


$Ra=10^6$

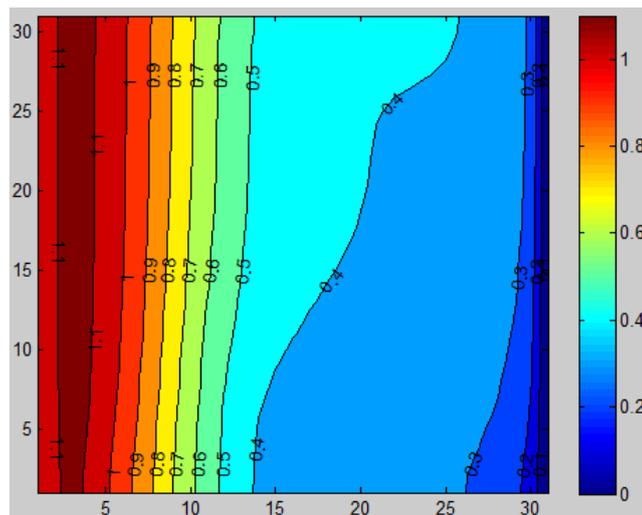
(a) Contours de vitesse pour différents nombres de Rayleigh ($Ra=10^4$, $Ra=10^5$, $Ra=10^6$).



$Ra_t=10^4$

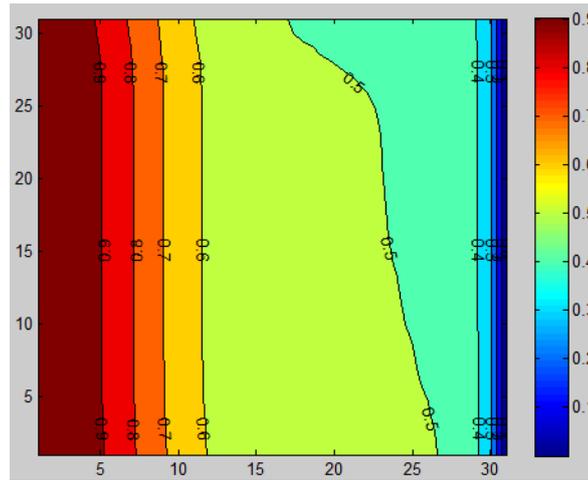


$Ra_t=10^5$

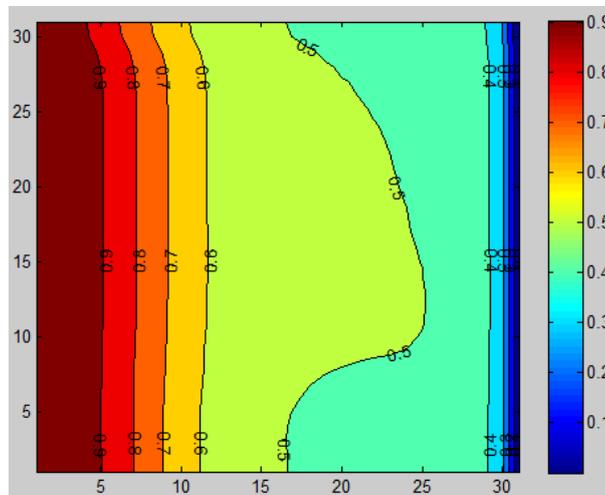


$Ra_t=10^6$

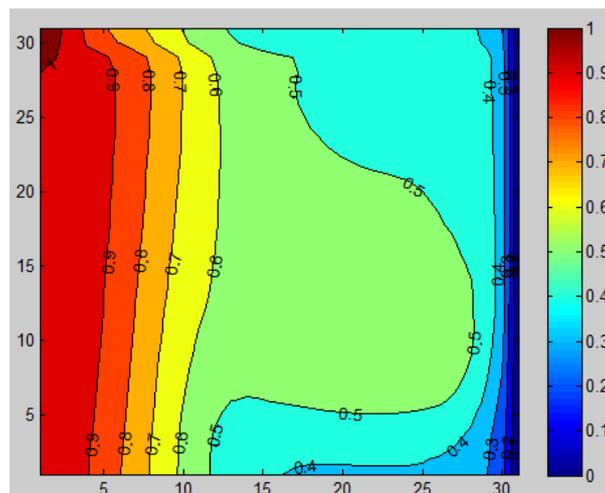
(b) Contours de température pour différents nombres de Rayleigh ($Ra_t=10^4$, $Ra_t=10^5$, $Ra_t=10^6$).



$Ra_c=10^4$

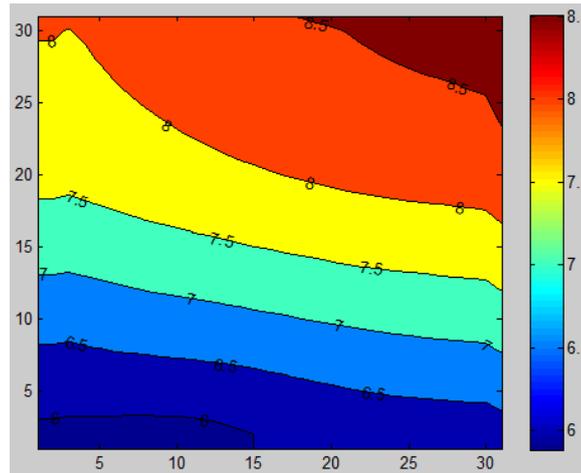


$Ra_c=10^5$

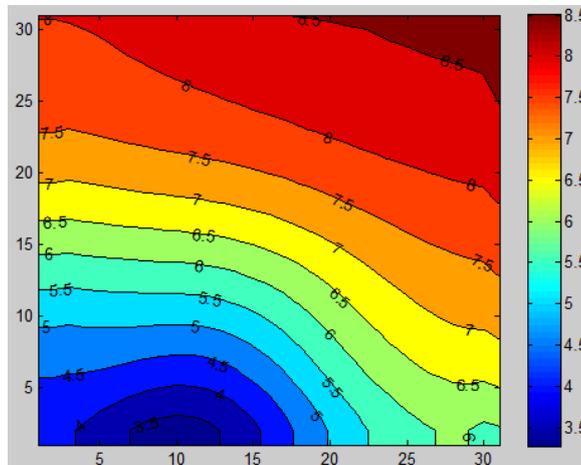


$Ra_c=10^6$

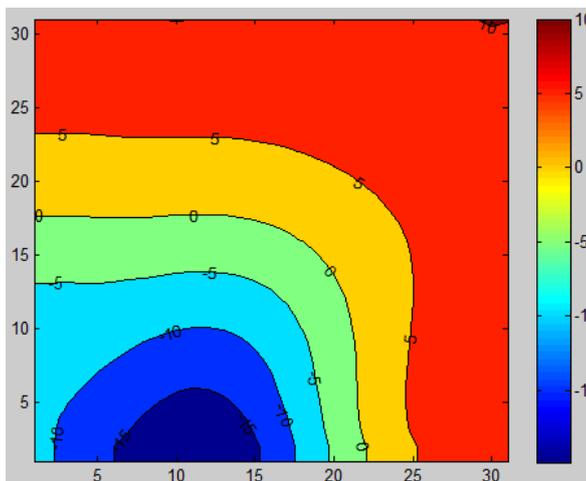
(c) Contours de concentration pour différents nombres de Rayleigh ($Ra_c=10^4$, $Ra_c=10^5$, $Ra_c=10^6$).



$Ra=10^4$



$Ra=10^5$



$Ra=10^6$

(d) Contours de pression pour différents nombres de Rayleigh ($Ra=10^4$, $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$).

Fig.IV-1 : Les isovaleurs de T, C et V pour différents nombres de Rayleigh. $Le=A=N/Sc=Pr=1$

Les résultats obtenus montrent que les isothermes sont des lignes largement déformées. Les isoconcentrations sont des lignes fortement concentrées près de la paroi chaude de la cavité et au centre de la cavité la valeur de la concentration reste constante $C=0.5$. Les valeurs les plus élevées de la pression sont situées au coin supérieur de la paroi froide.

3. Influence de l'angle d'inclinaison

L'angle d'inclinaison de la cavité a un effet important sur le transfert de chaleur et de masse et sur l'écoulement. Dans ce qui suit nous allons étudier l'effet de trois valeurs d'inclinaison sur les différentes structures qui se développent à l'intérieur de la cavité.

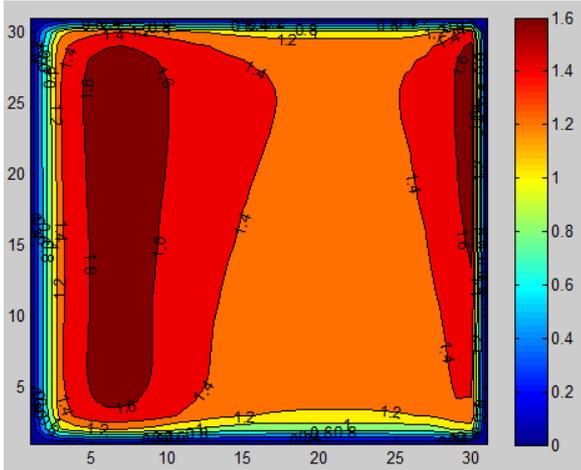
Les figures (IV-2-a) (IV-2-b) (IV-2-c) (IV-2-d) illustrent respectivement, les contours des isovitesse, des isothermes, des isoconcentration et de la pression pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison ($\theta=0^\circ$, $\theta=30^\circ$, $\theta=60^\circ$).

Les figures (IV-2-a) montrent que les valeurs de vitesse les plus élevées sont situées à côté des deux parois latérales. Lorsque on augmente l'angle d'inclinaison, la zone de vitesse la plus élevée se rapproche de la paroi chaude.

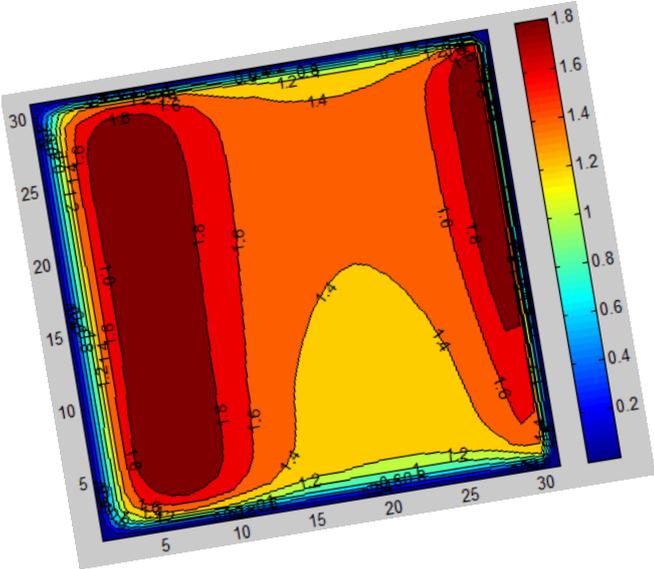
On constate que les isothermes sont des lignes parallèles aux parois latérales, elles sont légèrement déformées auprès des parois latérales et deviennent de plus en plus horizontales au milieu de l'enceinte. En comparant les figures des isothermes (IV-2-b), nous remarquons que l'augmentation de l'angle d'inclinaison favorise l'échange thermique. Une nette propagation des couches (zones) thermiques est remarquée dans l'ensemble de la cavité lorsqu'on augmente l'angle d'inclinaison de $\theta=0^\circ$ à 30° et à $\theta=60^\circ$.

Les figures (IV-2-c) présentent les contours de concentration pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison θ . En comparant entre les trois figures, nous remarquons qu'il y a une nette amélioration des échanges massiques lorsque on augmente l'angle d'inclinaison de 0° à 30° et au-delà de cet angle, il n'y a pas un changement remarquable sur les contours des isoconcentrations.

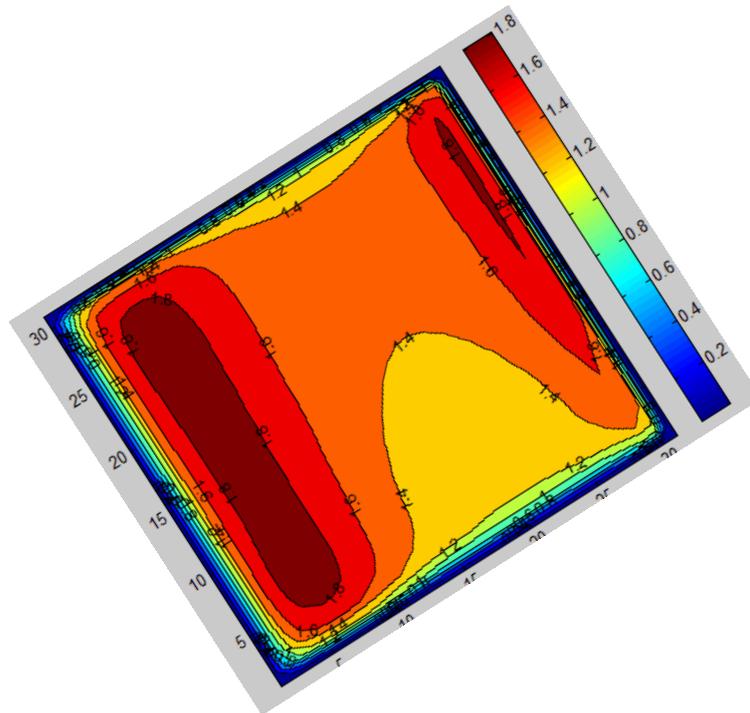
Les valeurs de la pression pour différents angles d'inclinaison θ de la cavité sont présentées dans la figure (IV-2-d). Nous constatons qu'il y a une légère augmentation de la pression dans les cavités inclinées ($\theta=30^\circ$ et $\theta=60^\circ$) par rapport à la cavité horizontale ($\theta=0^\circ$) et il n'y a pas de différence remarquable entre les cavités inclinées avec $\theta=60^\circ$ et $\theta=30^\circ$.



$\theta=0^\circ$

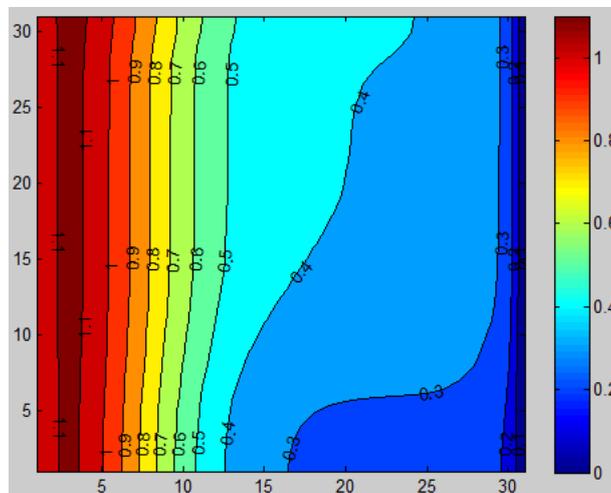


$\theta=30^\circ$

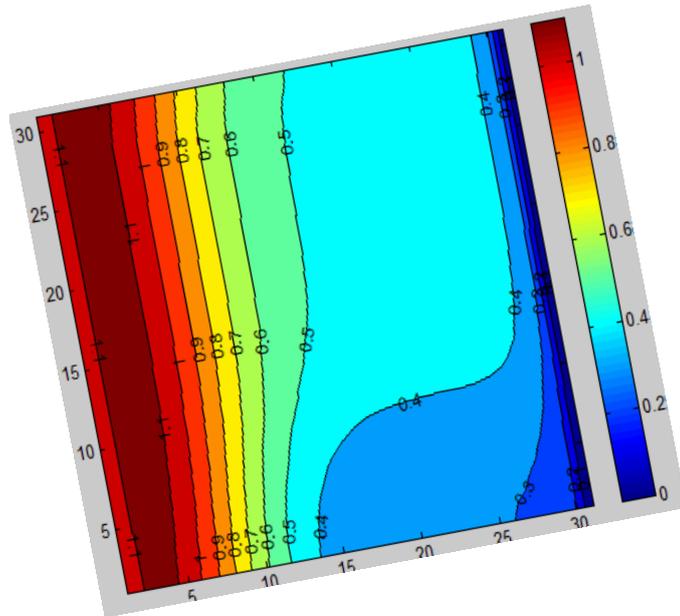


$\theta=60^{\circ}$

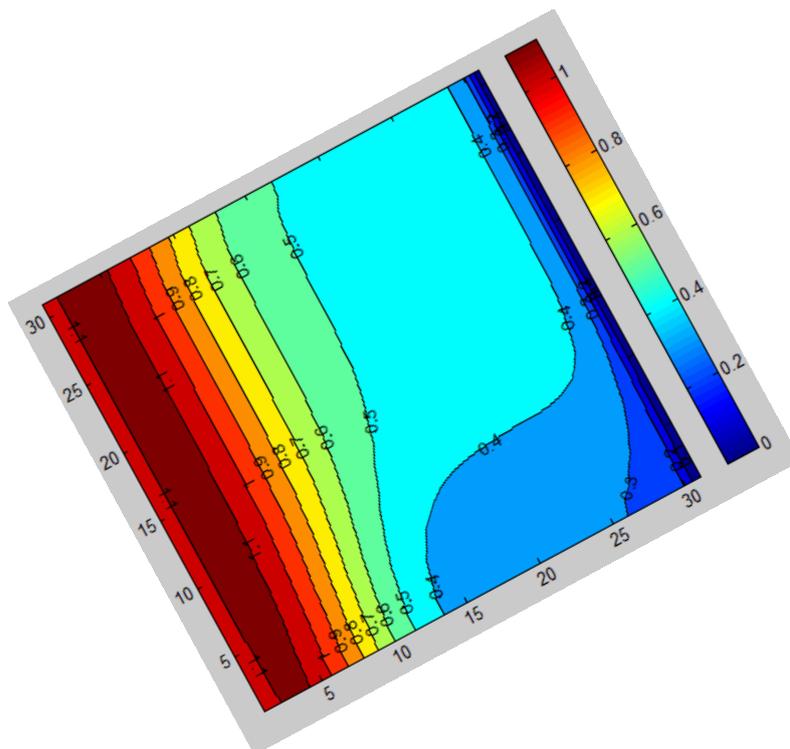
(a) Contours de vitesse pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison($\theta=0^{\circ}$, $\theta=30^{\circ}$, $\theta=60^{\circ}$).



$\theta=0^{\circ}$

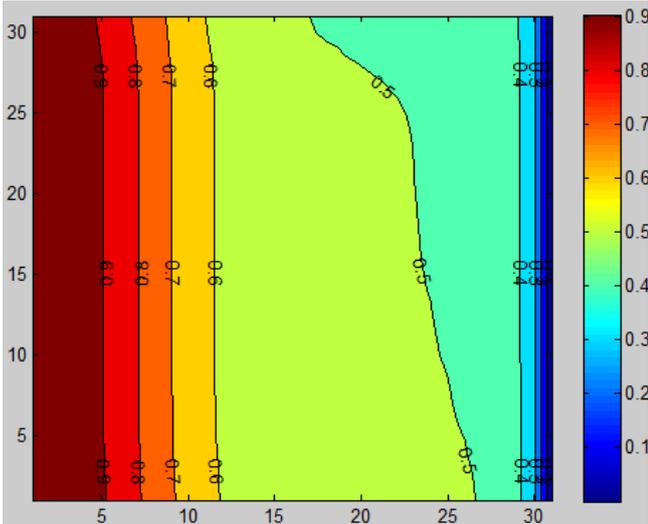


$\theta=30^{\circ}$

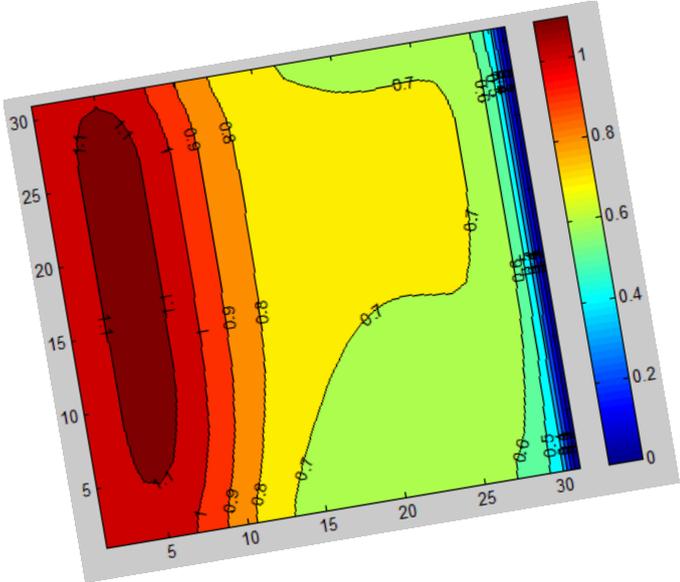


$\theta=60^{\circ}$

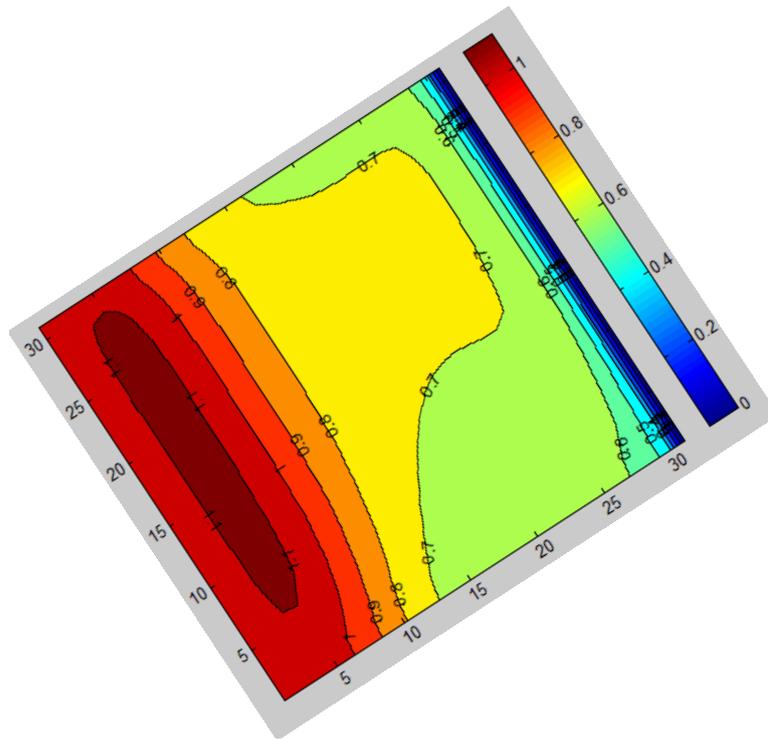
(b) Contours de température pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison ($\theta=0^{\circ}$, $\theta=30^{\circ}$, $\theta=60^{\circ}$).



$\theta=0^{\circ}$

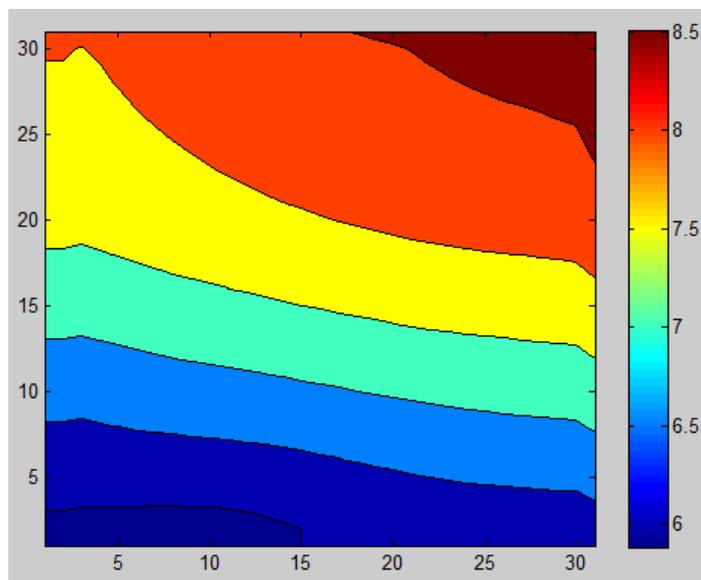


$\theta=30^{\circ}$

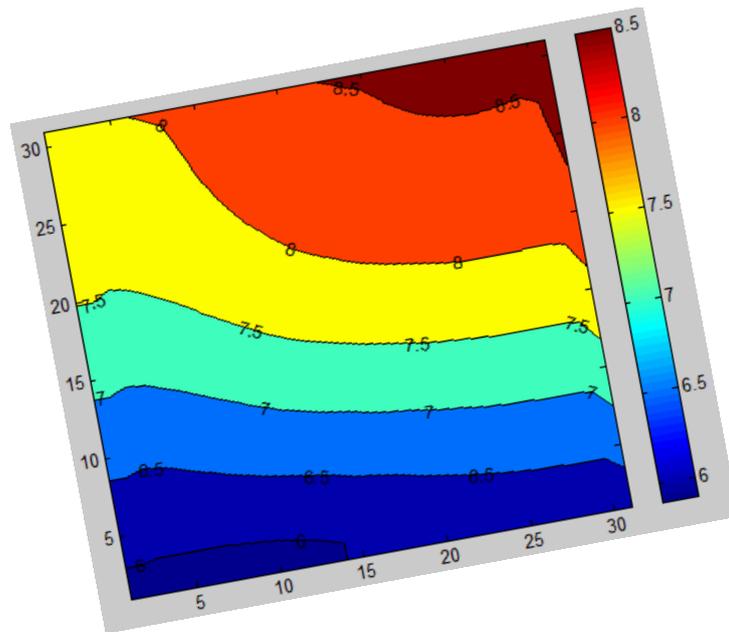
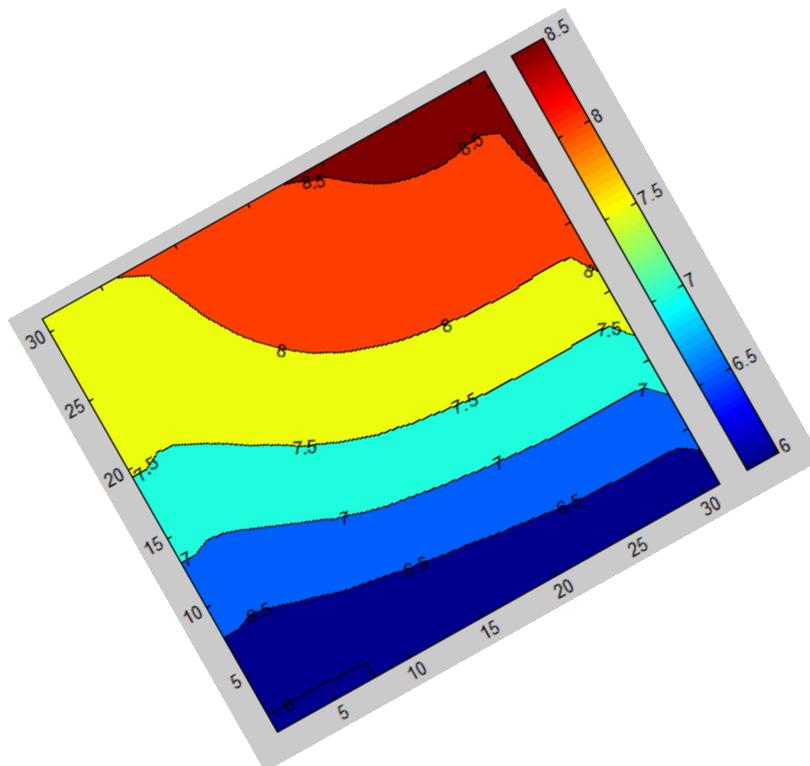


$\theta=60^{\circ}$

(c) Contours de concentration pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison ($\theta=0^{\circ}$, $\theta=30^{\circ}$, $\theta=60^{\circ}$).



$\theta=0^{\circ}$


 $\theta=30^{\circ}$

 $\theta=60^{\circ}$

(d) Contours de pression pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison ($\theta=0^{\circ}$, $\theta=30^{\circ}$, $\theta=60^{\circ}$).

Fig.IV-2 : Les isovalues de T, C, V, P pour différents angles d'inclinaison ($\theta=0^{\circ}$, $\theta=30^{\circ}$ et $\theta=60^{\circ}$) ; $Le=A=N/Sc=Pr=1$

4. Influence du rapport de forme

L'effet du rapport de forme A sur les différentes structures qui se développent à l'intérieur de l'enceinte parallélépipédique est présentés dans les figures (IV-3. a-d).

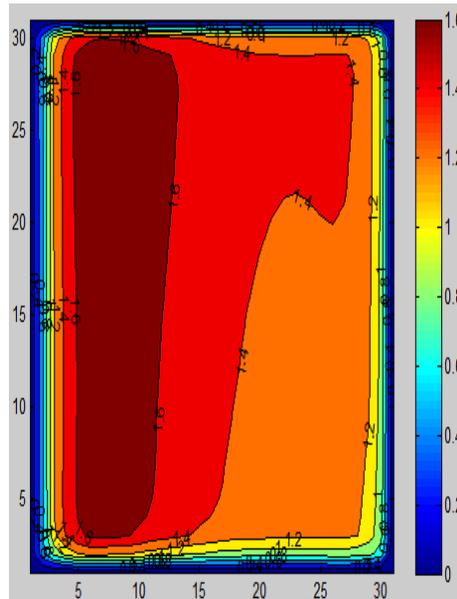
Il s'avère d'après la figure (IV-3-a) que l'augmentation du rapport de forme de $A=0.5$ à $A=1$ engendre une légère augmentation de la vitesse. La première configuration ($A=0.5$) est caractérisée par la présence d'un seul tourbillon auprès de la paroi chaude, tandis que les deux autres configurations sont caractérisées par l'apparition d'un deuxième tourbillon auprès de la paroi froide.

La figure (IV-3-b) présente les contours de la distribution de température dans l'ensemble de l'enceinte pour différentes valeurs du rapport de forme. Il est remarqué d'après ces figures que, l'augmentation du rapport de forme engendre un affaiblissement des échanges thermiques.

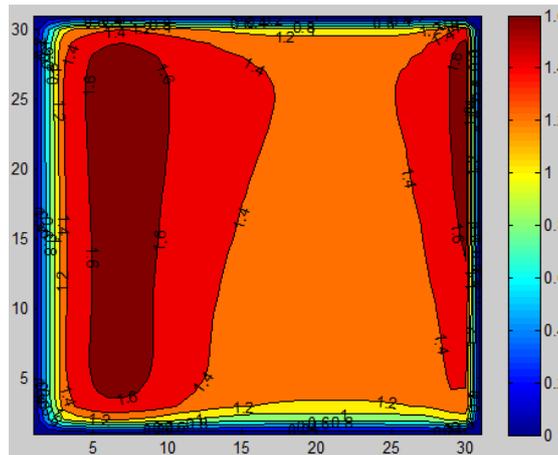
La figure (IV-3-c) présente les contours de la distribution de la concentration dans la cavité pour différentes valeurs du rapport de forme. Il est a noté que, l'augmentation du rapport de forme engendre un affaiblissement de la convection massique dans l'ensemble de l'enceinte.

La figure (IV-3-d) représente la distribution de la pression pour différentes valeurs du rapport de forme A . Il est claire qu'il n y a pas une évolution remarquable dans les valeurs de la pression, à part que les contours deviennent de plus en plus horizontales lorsqu'on augmente le rapport de forme A .

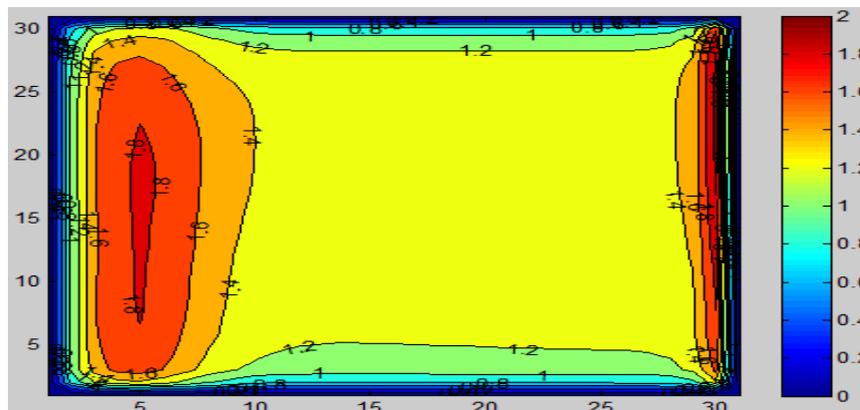
Vérification : *Nous avons effectué des comparaisons avec des résultats quantitatifs publiés par Dr.Adnane Labeled en 2004 qu'étudié des systèmes aux géométries semblables à la nôtre et enregistrons un bon accord.*



A=0.5

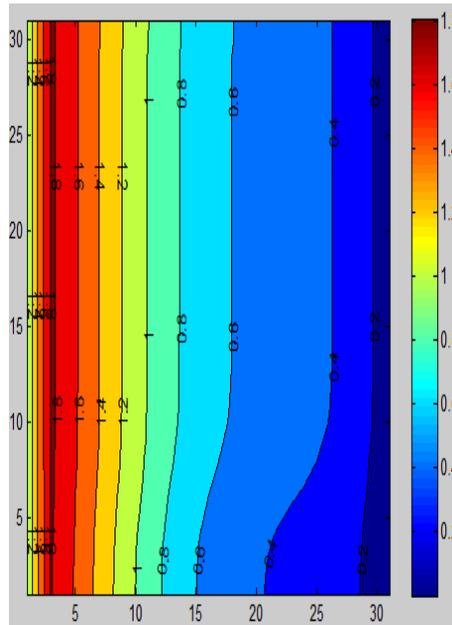


A=1

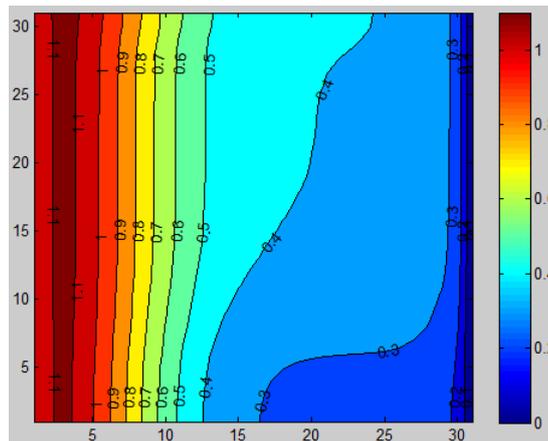


A=2

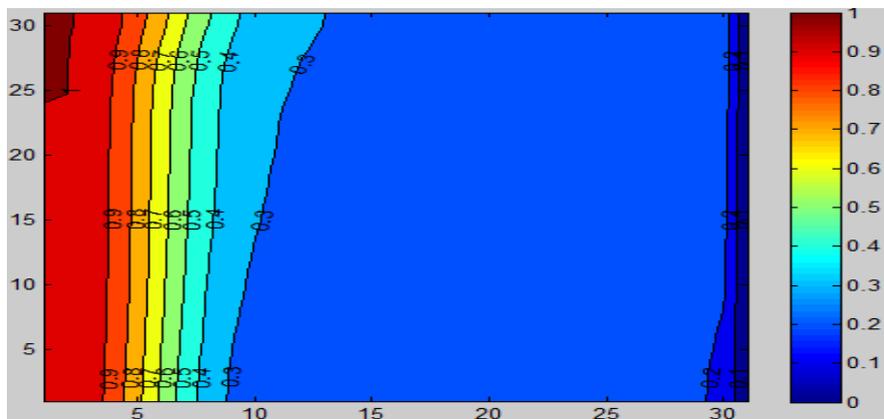
(a) Contours de vitesse pour différentes valeurs du rapport de forme(A=0.5, A=1, A=2).



A=0.5

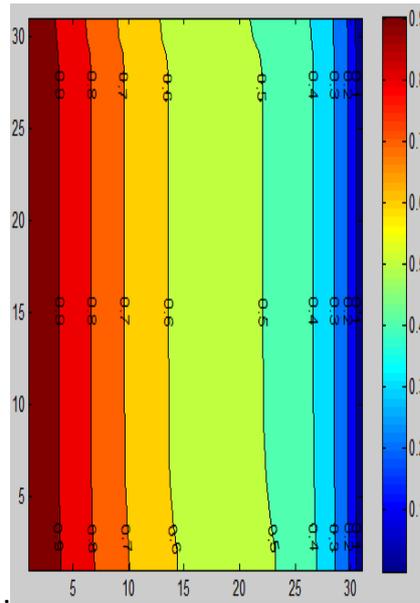


A=1

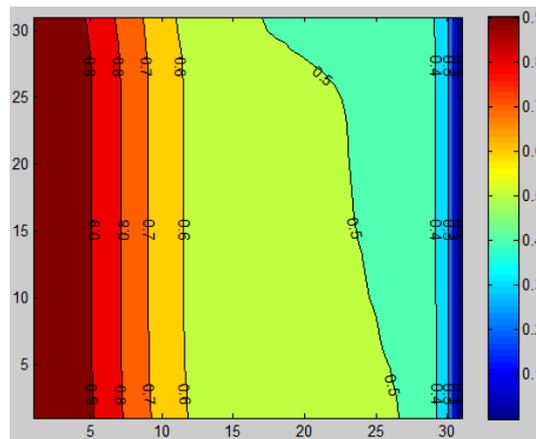


A=2

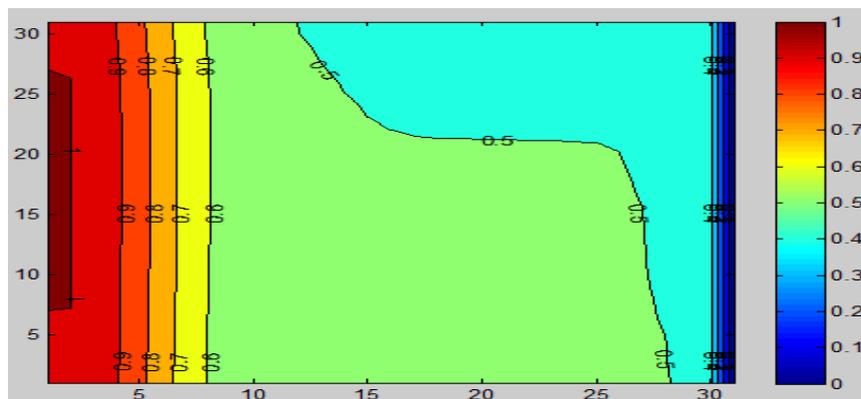
(b) Contours de température pour différentes valeurs du rapport de forme (A=0.5, A=1, A=2).



A=0.5

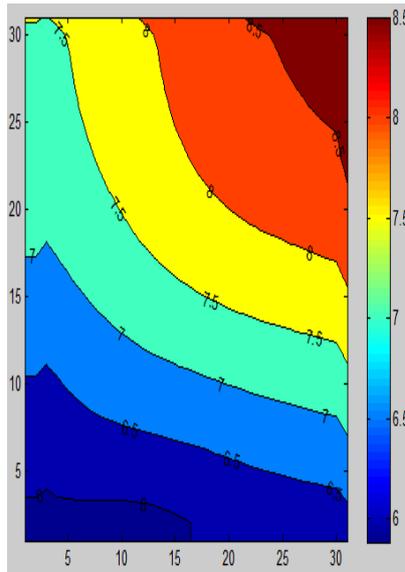


A=1

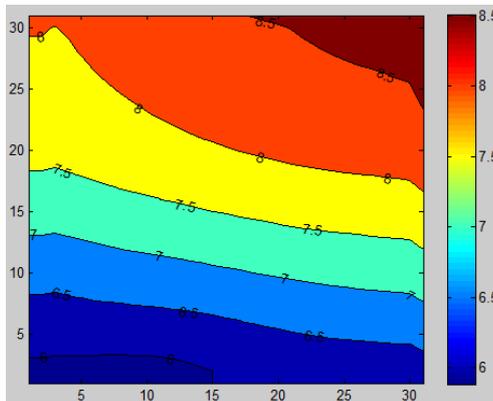


A=2

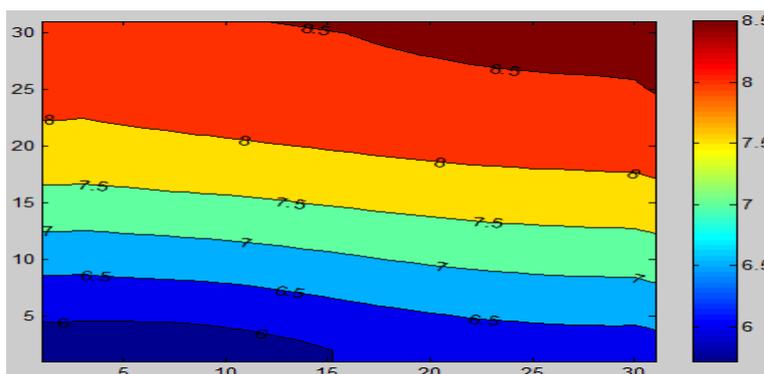
(c) Contours de concentration pour différentes valeurs du rapport de forme(A=0.5, A=1, A=2).



A=0.5



A=1



A=2

(d) Contours de pression pour différentes valeurs du rapport de forme(A=0.5, A=1, A=2).

Fig.IV-3 : Les valeurs de T,V,C et P pour différentes valeurs du rapport de forme (A=0.5, A=1, A=2). $Ra_t=Ra_c=10000$. $Le=A=|N|=Sc=Pr=1$.

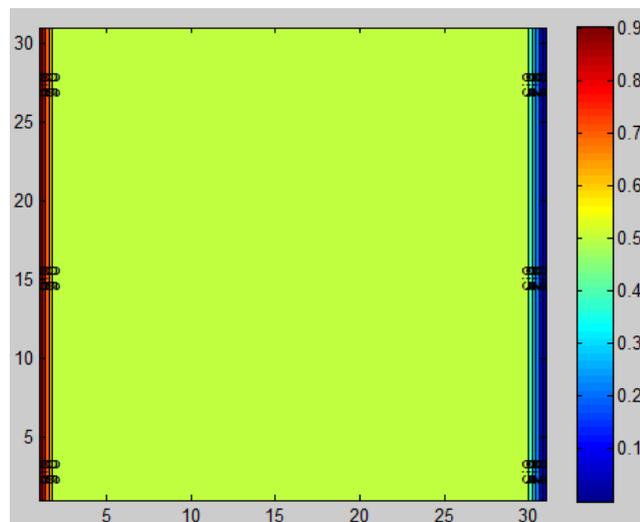
5. Evolution de la température et de la concentration par rapport au temps

D'après les résultats issus de la simulation numérique, nous remarquons qu'il ya trois modes de transfert de chaleur dans la cavité.

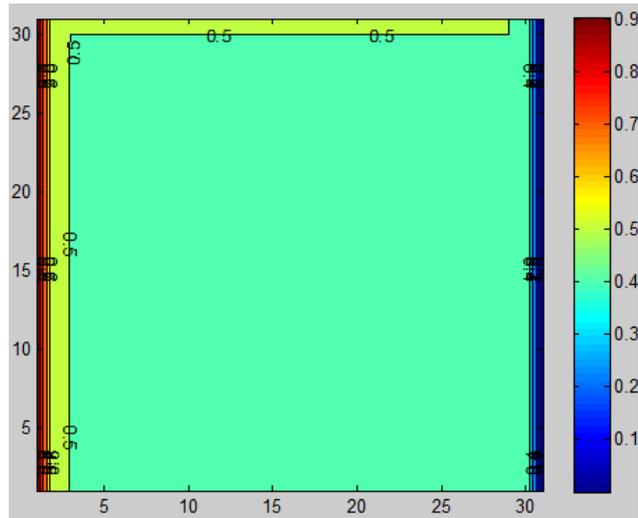
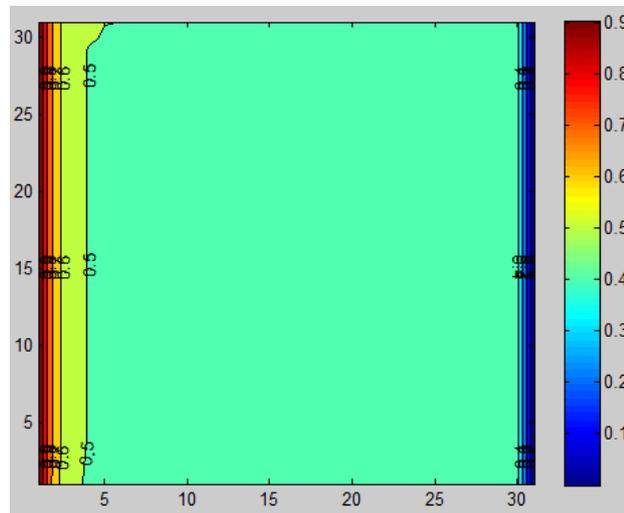
Au début, on remarque l'apparition de couches limites, causées par l'adhérence des particules de fluide avec la paroi, ce qui implique l'échauffement des couches avoisinant la paroi (Fig.VI-4-a).

En deuxième étape, le transfert passe au mode conductif, où la chaleur commence à propager dans le fluide en couches parallèles successives par le mode de conduction (Fig.VI-4-b), ce qui va créer un gradient de température au sein du fluide ; et c'est là où le phénomène de convection commence (Fig-VI.4-c).

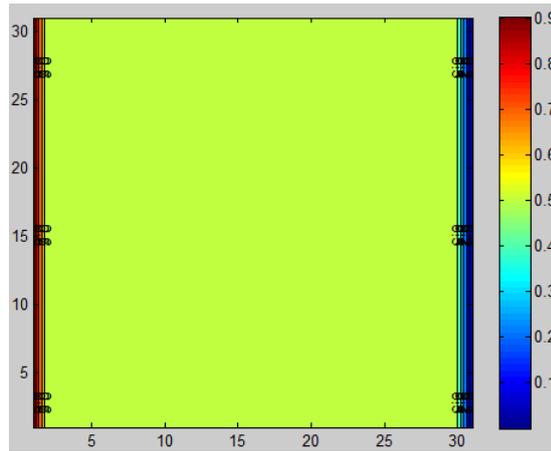
Nous remarquons aussi sur les figures (Fig.VI-5.a-b-c) présentant le transfert de masse, que des phénomènes similaires à ceux du transfert de chaleur se développent dans la cavité.



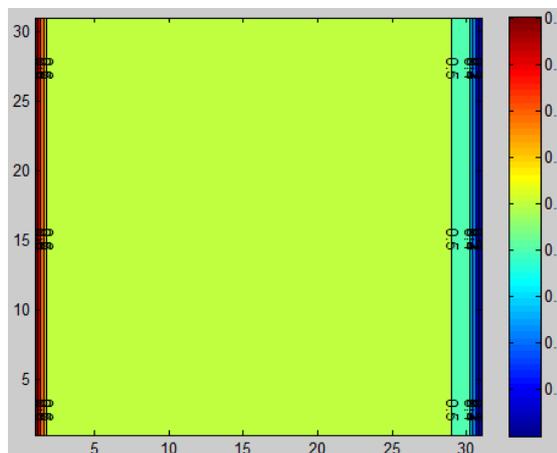
(a)-Isotherme $\Delta t=10^{-20}$

(b)- Isotherme $\Delta t=10^{-10}$ (c)- Isotherme $\Delta t=10^{-5}$ **Fig.VI-4** : Evolution de la température en fonction du temps.

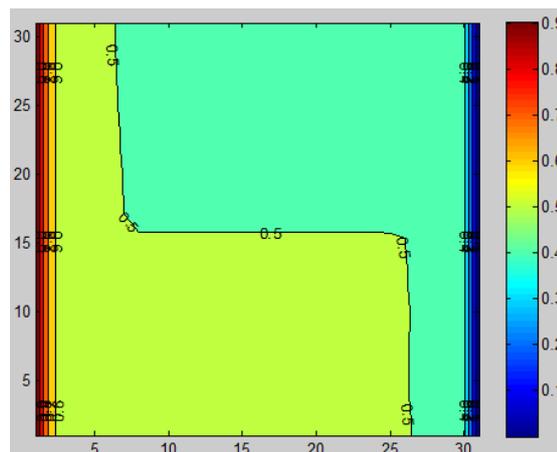
$$Ra_t=Ra_c=10000. \quad Le=A=|N|=Sc=Pr=1.$$



(a)-Isoconcentration $\Delta t=10^{-20}$



(b)-Isoconcentration $\Delta t=10^{-10}$



(c)-Isoconcentration $\Delta t=10^{-5}$

Fig.VI-5 : Evolution de la concentration en fonction du temps.

$$Ra_t=Ra_c=10000. Le=A/N=Sc=Pr=1.$$

Conclusion générale

Conclusion Générale

*D*ans ce travail, nous avons présenté une étude numérique de la convection naturelle bidiffusive en régime laminaire transitoire, dans une enceinte parallélépipédique inclinée remplie d'un fluide composé d'un solvant et un soluté en faible concentration.

En se basant sur les approximations de Boussinesq, On a développé le modèle mathématique décrivant notre problème. De plus, On a mis également au point un modèle numérique basé sur la méthode de volumes fini et permis de décrire l'évolution de la structure des écoulements, des échanges thermique et massique dans la cavité sous l'influence des paramètres caractéristiques relatives au système (nombre du Rayleigh, rapport d'aspect et l'angle d'inclinaison). La description des résultats obtenus peuvent être résumés comme suit.

Une analyse temporelle complète des évolutions des transferts de chaleur et de masse ; ce qui a permis de voir les différentes structures qui se développent à l'intérieur de la cavité en fonction du temps.

Le rapport de forme A (H/L) à une importante influence sur le phénomène, son augmentation accélère le mouvement de l'écoulement en même temps leur augmentation favorise les échanges conductifs et diffusifs.

Quant à la variation du nombre de Rayleigh, elle provoque une forte influence sur la structure de l'écoulement ; son intensité est augmentée avec le nombre de Rayleigh et cette croissance est due à l'accroissement des écarts de température et de concentration (les gradients thermique et solutale) résultants de l'augmentation du nombre de Rayleigh.

L'augmentation de l'angle d'inclinaison de l'enceinte provoque une amélioration dans les échanges thermiques et massique dans l'ensemble.

Annexe

Série de Taylor :

1. Développement d'une fonction en série entière :

Si la fonction $f(x)$ admet, dans le voisinage $|x-a|<R$ du point a , un développement en série entière suivant les puissances de $x-a$, cette série est de la forme :

$$f(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \quad (1)$$

Pour $a=0$ la série de « Taylor » s'appelle aussi série de « Maclaurin ». L'égalité (1) est vraie pour $|x-a|<R$ et le reste de la série de « Taylor » est :

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(a)+\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Pour évaluer le reste on peut utiliser la formule :

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], \text{ où } 0<\theta<1 \quad (2)$$

(Cette dernière formule est la formule du reste de Lagrange).

2. Série de Taylor pour les fonctions de deux variables :

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2f(a,b)+\dots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+\dots \quad (1-3)$$

Si $a=b=0$, la série de « Taylor » s'appelle aussi série de « Maclaurin ».

On utilise ici les notations suivantes :

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=a}(x-a)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{x=a}(y-b)$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a,b)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Big|_{x=a}(x-a)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{x=a}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Big|_{x=a}(y-b)^2, \text{ etc..}$$

Le développement (1-3) a lieu si le reste de la série :

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\left(f(a,b)+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a,b)\right) \rightarrow 0 ; \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Références

- [1] H. Bénard. (1900) Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Rev. G´ en. Sci. pures et appl. 11 1261–1271.
- [2] C. Ghernoug (2017). Approche numérique de la convection naturelle thermosolutale dans des enceintes fermées. Thèse de Doctorat. Université des Frères Mentouri Constantine. Faculté des sciences exactes .Département de physique. Spécialité : Physique énergétique Option : Photo thermique.
- [3] A. Labed (2004). Etude d'un écoulement bidimensionnel d'un fluide dans une enceinte. Mémoire de magister. Université mohamed khider – biskra. Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur. Département de génie mécanique.
- [4] M. Salmi et R. Guebli (2017). Simulation de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse. Mémoire de master .Université Larbi Tébéssi-Tébessa Faculté des sciences et de la technologie. Département de Génie Mécanique
- [5] A. Zine (2004) Détermination du champ de températures dans une cavité pleine en utilisant la méthode mixte volumes finis – éléments finis. Mémoire de Magistère. Université d'Ouargla.
- [6] D. Menacer (2012). Étude numérique de la convection mixte dans des cavités phénomène de bifurcation. Mémoire de magistère. Université de Constantine .Faculté des sciences exactes .Département de physique.
- [7] R. B. Bird et al (2002). Transport Phenomena. 2nd Edition, John Wiley and Sons,
- [8] V. Sévélédér and J.P. Petit. (1989). Flow structures induced by opposing forces in double diffusion natural convection in a cavity, Numerical Heat and mass Transfer Part A. 15, 431-444.
- [9] C. Beghein, et al. (1992). Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity. International Journal of Heat and Mass Transfer, 35(4), 833-846.
- [10] O. Sovran, et al (2001). Naissance de la convection thermo-solutale en couche poreuse infinie avec effet Soret. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, 329(4), 287-293.
- [11] M. Marcoux, et al. (1999). Naissance de la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse soumise à des flux de chaleur et de masse. International journal of thermal sciences, 38(3), 258-266.
- [12] R. Bennacer, (1993). Convection naturelle thermosolutale : simulation numérique des transferts et des structures d'écoulement. Thèse de doctorat. Paris 6

- [13] M. Boussaid et al (1999). Convection naturelle de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale. *International journal of thermal sciences*, 38(4), 363-371
- [14] K. Ghorayeb, et al (1997). Étude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Séries IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 324(1), 19-27.
- [15] K. Ghorayeb et al (1999). Onset of oscillatory flows in double-diffusive convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(4), 629-643.
- [16] Charrier-Mojtabi et al (1997). Onset of thermosolutal convective regimes in a rectangular porous cavity. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Chemistry Astronomy*, 1(324), 9-17.
- [17] A. Amahmid et al (1999). Etude analytique et numérique de la convection naturelle dans une couche poreuse de Brinkman doublement diffusive. *International journal of heat and mass transfer*, 42(15), 2991-3005.
- [18] C. Le Marec,. (1996). Etude numérique de l'influence de la convection thermosolutale sur la solidification dirigée d'un alliage binaire dans un creuset cylindrique . Thèse de doctorat. marceille 3
- [19] A. Chamkha et H .Al-Nacer (2001). double-diffusive convection in an inclined porous enclosure with opposing temperature and concentration gradients. *Int. J. Therm. Sci.* 40, 227–244.
- [20] A. Bahloul et al (2003). Double diffusive and Soret Induced Convection in a Shallow Horizontal Porous Layer, *J. Fluid Mechanics*, 491, 325–352.
- [21] A. Bahloul et al (2004). Soret Driven and Double Diffusive Natural Convection in a Vertical Porous Cavity, *J. Porous Media*, under press.
- [22] A. Bourich et al (2004). Double-diffusive natural convection in a porous enclosure partially heated from below and differentially salted. *Int. J. of Heat and Fluid Flow* vol. 25, 1034–1046.
- [23] H. Sun et G. Lau (2009). On the heat and mass transfer analogy for natural convection of non-dilute binary mixtures of ideal gases in cavities. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(3), 141-149.
- [24] D. Lyubimov et al (2008). Thermosolutal convection in a horizontal porous layer heated from below in the presence of a horizontal through flow. *Physics of Fluids*, 20(4), 044109.

- [25] Y. Kamotani et al (1985). Experimental study natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients. *Int. Heat. Mass transfer*, 28, 165-173.
- [26] A. Attia (2007). *Suppression des Instabilités Thermosolutales par l'Action d'un Champ magnétique*. Thèse de Magistère. Université de Mentouri Constantine Algérie.
- [27] A. Boumaraf (2010). *Étude de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte rectangulaire inclinée*. Mémoire de magister .Université Mentouri–Constantine .Faculté des sciences de l'ingénieur. Département de génie mécanique.
- [28] A. Djebli (2009). *Convection naturelle bidiffusive dans une enceinte rectangulaire remplie d'une matière poreuse*. Mémoire de magister. Université de Mentouri Constantine. Faculté des sciences de l'ingénieur. Département de génie mécanique
- [29] K. Liman et al (1993). Convection naturelle dans une cellule partitionnée. *Rev. Gén. Therm. Fr.* 377, 246-252.
- [30] S. V. Patankar (1980). *Numerical Heat transfer and fluid flow*. Series in computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Hemisphere corp .New York.
- [31] D.A. Nield et A. Bejan (1992). *Convection in porous media*. Springer-Verlag New York. Inc.
- [32] J. F. Sacadura (1980). *Initiation aux transferts thermiques*. Ed : Technique et documentation.