



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Électrique
Filière d'Electrotechnique

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et Technologies
Génie Électrique
Machines Electriques

Réf. :

Présenté et soutenu par :
SAADALLAH Houssam Eddine

Le : samedi 6 juillet 2019

Etude théorique de la méthode des éléments finis Application : calcul de l'induction magnétique

Jury :

Mr. NAIMI Djemai	Dr	Université de Biskra	Président
Mr. SRAIRI Kamel	Pr	Université de Biskra	Encadreur
Mr. MAHDAD Belkacem	Pr	Université de Biskra	Examineur



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Électrique
Filière d'Electrotechnique

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et Technologies
Génie Électrique
Machines Electriques

Réf. :

Présenté et soutenu par :
SAADALLAH Houssam Eddine

Le : samedi 6 juillet 2019

Etude théorique de la méthode des éléments finis Application : calcul de l'induction magnétique

Présenté par :
SAADALLAH Houssam Eddine

Avis favorable de l'encadreur :
Prof. SRAIRI Kamel

Avis favorable du Président du Jury :
Dr. NAIMI Djemai

Cachet et signature

Année universitaire : 2018 - 2019

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electrotechnique
Option : Machines Electriques

Mémoire de Fin d'Etudes en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Thème :

Etude théorique de la méthode des éléments finis. Application : calcul de l'induction magnétique

Présenté par : Monsieur SAADALLAH Houssam Eddine

Avis favorable de l'encadreur :

Prof. SRAIRI Kamel

Avis favorable du Président du Jury :

Dr. NAIMI Djemai

Cachet et signature

Année Universitaire : 2018 / 2019



Remerciements



Remerciements

Je remercie, tout d'abord, mon Dieu le tout puissant **ALLAH** qui ma donné volonté et patience pour faire ce modeste travail.

Je remercie mon encadreur **Pr. SRAIRI Kamal** que j'ai eu l'honneur d'avoir comme encadreur et que je remercie pour ses conseils.

J'adresse ma gratitude à chacun des membres du jury **Dr.NAIMI Djemai** et **Pr. MAHDAD Belkacem** qui ont bien voulu lire et évaluer ce travail.

SAADALLAH Houssam Eddin



Dédicace



Dédicace

Je dédie mon travail à mon père et ma mère.

Merci pour tout le soutien et l'amour que vous m'avez donné depuis mon enfance et j'espère que vos bénédictions m'accompagneront toujours.

A tous mes frères et ma sœur.

Je dédie aussi mon travail à MIMOUNI Houssem Eddine et KAHLOUL Djamel Eddine pour leurs conseils et leur aide constante.

Du profond de mon cœur je dédie ce travail à Iman .H, mes

Remerciements ne pourront jamais égaler ton grand cœur qui m'a

Apporté du soutien au moment où j'avais besoin d'aide.

A tous ceux que j'ai omis de citer.



Résumé



ملخص:

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو حل المعادلات الكهرومغناطيسية المميزة للظواهر الموجودة في الأنظمة الكهربائية. في البداية، سيتم ضمان الدقة عن طريق الطرق الدقيقة المرتبطة بمعادلات بسل. ومع ذلك، فإن هذه الأساليب محدودة للغاية وتتطلب تبسيطاً لا يعكس الواقع المادي الموجود في هذا النوع من الأجهزة. وبالتالي فإن استخدام الأساليب العددية القائمة على تقنيات التقريب يصبح أمراً لا غنى عنه. هو أكثر تحديداً طريقة العناصر المحددة. وتعرف هذه الطريقة من خلال تكيفها مع أي نوع من المشاكل المادية وجميع أشكال النموذج الهندسي.

Résumé :

Le but principal de ce travail est la résolution des équations électromagnétiques caractéristiques aux phénomènes présents dans les systèmes électriques. Dans un premier temps la résolution sera assurée par le biais de méthodes exactes associées aux équations de Bessel. Cependant, ces méthodes sont très limitées et nécessitent de simplifications qui ne reflètent pas la réalité physique présente dans ce genre de dispositifs. Ainsi le recours à des méthodes numériques basées sur des techniques d'approximation devient indispensable. Il s'agit, plus particulièrement, de la méthode des éléments finis. Cette méthode est connue par son adaptation à tout genre de problème physique et à toutes formes de modèle géométrique.



Sommaire



Sommaire

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Différents Modèles physico-mathématiques en électromagnétisme

I.1. Introduction	3
I.2. Équations de Maxwell.....	3
I.3. Descriptions des Équations de Maxwell.....	4
I.3.1. Loi d'Ampère.....	4
I.3.2. Loi de Faraday.....	5
I.3.3. Loi de Gauss.....	6
I.3.4. Théorème de la divergence de l'induction magnétique \vec{B}	7
I.3.5. Conservation de la densité du courant total.....	8
I.4. Formulation mathématique des phénomènes électromagnétiques dans les systèmes électriques	8
I.4.1. Modèle magnétodynamique.....	9
I.4.2. Modèle magnétostatique.....	11
I.4.2.1. Modèle magnétostatique scalaire.....	11
I.4.2.2. Modèle magnétostatique vectoriel.....	12
I.4.3. Classification mathématique.....	13
I.4.4. Classification physique des Equation aux denrées partielles.....	14

I.5. CONCLUSION	14
------------------------------	----

Chapitre II

Modèle mathématique détaillé en électromagnétisme

II.1. Introduction	15
II.2. Analytique magnétostatique	15
II.2.1. Dans le cas cylindrique axisymétrique	15
II.2.2. Dans le cas cartésien	18
II.2.2.1. En particulier	18
II.3. magnétodynamique	20
II.4. Explications	20
II.4.1. Résolution de l'équation en $Z(z)$	22
II.4.2. Résolution de l'équation en $R(r)$	24
II.5. Conclusion	27

Chapitre III

Application de la méthode des éléments finis au calcul du potentiel magnétique vecteur

III.1. Introduction	28
III.2. Application sur la méthode des éléments finis	28
III.3. Principe de la méthode des éléments finis	28

III.3.1. Discrétisation.....	29
III.3.2. Eléments triangulaires linéaires.....	29
III.4. Couplage des méthodes numériques aux solutions analytique	30
III.5. Modèle géométrique.....	30
III.6. Calcule des paramètres B_{ni}	31
III.7. Conclusion.....	34
Conclusion Générale.....	35
Références Bibliographiques.....	37



Liste des figures



Liste des figures

Figure III.1 Elément triangulaire linéaire du premier ordre.....	29
Figure III.2.Modèle géométrique.....	30



Table des symboles



Table des symboles

Symbole	Définition
\vec{A}	Potentiel magnétique vecteur [Tm].
\vec{B}	Vecteur d'induction magnétique [T].
\vec{H}	Vecteur du champ magnétique [$A \cdot m^{-1}$].
\vec{E}	Vecteur du champ électrique [$V \cdot m^{-1}$].
\vec{D}	Vecteur de l'induction électrique [$C \cdot m^{-2}$].
I	Courant total [A].
\vec{J}_t	Vecteur densité volumique du courant électrique total [A].
\vec{J}_d	Vecteur densité du courant de déplacement [$A \cdot m^{-2}$].
\vec{J}_c	Vecteur densité volumique du courant de conduction [$A \cdot m^{-2}$].
\vec{J}_s	Vecteur densité du courant imposé [$A \cdot m^{-2}$].
V	Potentiel électrique [V].
e	Force électrique [V].
q	Charge ponctuelle [C].
r	Cordonnée radiale [m].
s	Surface [m^2].
t	Temps [s].
ω	Pulsation de la source [rd. s^{-1}].
z	Cordonnée axiale [m].
Φ	Flux magnétique [Wb].
$\vec{\epsilon}_r$	Permittivité relative au milieu [U S I].
$\vec{\epsilon}_0$	Permittivité absolue du vide [$F \cdot m^{-1}$].
μ_r	Perméabilité magnétique relative au milieu [U S I].
ν	Réductivité magnétique [$H^{-1} \cdot m$].
μ_0	Perméabilité magnétique absolue du vide [$H \cdot m^{-1}$].
ρ	Densité volumique de la charge électrique [$C \cdot m^{-3}$].
σ	Conductivité électrique [$S \cdot m^{-1}$].

Γ	Frontière du domaine d'étude.
α_i	Fonction d'interpolation.
B_i	Fonction de projection.
MEF	Méthode des éléments finis.



Introduction Générale



Introduction Générale

Dans la majorité des dispositifs électriques, l'électromagnétisme, ou les phénomènes électromagnétiques, constituent le noyau. Ces phénomènes assurent le rôle d'intermédiaire de conversion de l'énergie électrique vers d'autres formes soit électrique, thermique, mécanique et le tout à la fois et ceux quelque soit le mode de fonctionnement spatiotemporelle de ces systèmes électriques en question.

Ces phénomènes physiques, à caractère magnétique, ou électromagnétique, sont régis, mathématiquement, par un ensemble d'équations aux dérivées partielles dites de J. C. Maxwell [1 – 4].

Les équations de Maxwell sont capables de prédire, de concevoir, voire d'optimiser, mathématiquement, le comportement spatiotemporelle des phénomènes présents dans les systèmes électriques ; les machines électriques de tout genre, le réseau électrique, les semi-conducteurs, ...etc [3 – 5].

Les équations de J. C. Maxwell nous donnent, par le biais d'équations aux dérivées partielles dites EDPs, non pas les valeurs de ces champs électriques ou magnétiques, mais leurs variations du premier ordre ou d'ordres supérieurs, de ces grandeurs physiques en question. Ainsi, le traitement mathématique par résolution de ces équations variables dans l'espace et le temps s'impose et ses difficultés doivent être surmontées d'une manière analytique, numérique ou combinées aussi [3 – 5].

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à l'étude mathématique des phénomènes électromagnétiques dans les dispositifs électriques. Il s'agit plus particulièrement, d'une étude mathématique et où les modèles adéquats seront établis.

Par la suite nous intéressons à la résolution des équations électromagnétiques par des méthodes ou techniques analytiques à base des équations de Bessel. Néanmoins ces méthodes sont très limitées et exigent des conditions simplificatrices draconiennes ce qui est en

contradictions par la réalité physique et le monde industriel. Ainsi, la recherche de d'autres méthodes beaucoup plus convenables et adaptées à toutes les situations possible s'impose. Il s'agit des méthodes numériques, plus spécialement, la méthode des éléments finis. Cette méthode connue pour son adaptation et possibilité de traitement de tout genre de problèmes physiques et pour toutes sortes de forme géométriques.

Pour ce, notre mémoire est organisée, de la manière suivante :

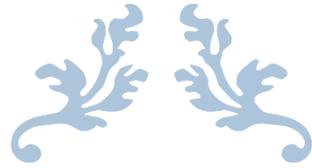
Dans le premier chapitre nous présentons les différents Modèles physico-mathématiques en électromagnétisme.

Dans un deuxième chapitre nous avons consacré aux modèles mathématique détaillés en électromagnétisme, plus particulièrement, le traitement analytique des modèles mathématiques en électromagnétisme. Il s'agit donc de la formulation et de la résolution analytique de ces modèles

Dans un troisième chapitre nous nous intéressons à la résolution numérique à base d'éléments finis des modèles mathématiques présentés en premier chapitre Le cas linéaire du premier ordre et mono variable sera traité comme un exemple d'illustration.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale résumant notre travail, suivie de quelques conseils utiles aux utilisateurs de la modélisation des systèmes électriques et aussi nous proposons quelques perspectives futures à ce très modeste travail.

Une liste des références bibliographiques sera présentée à la fin de ce manuscrit.



Chapitre I



Différents Modèles
physico-mathématiques en
électromagnétisme

I.1 Introduction

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de Maxwell et les équations caractéristiques du milieu à étudier.

I.2 Équations de Maxwell

C'est J. C. Maxwell (1831-1879), qui a apporté des travaux sur les champs électromagnétiques et qui a fait apparaître, pour la première fois, les quatre équations différentielles qui décrivent l'évolution mutuellement dépendante des champs électriques et magnétiques dans l'espace et dans le temps. Ces équations constituent aujourd'hui la base de l'électromagnétisme [3 – 6].

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I. 1})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I. 2})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{I. 3})$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{I. 4})$$

Ces équations ne suffisent pas pour résoudre les problèmes électromagnétiques, il faut leur joindre des relations qui traduisent le rendement des milieux à étudier :

Alors :

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (\text{I. 5})$$

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I. 6})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{I. 7})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I. 8})$$

Tel que :

\vec{H} : Champ magnétique [$A \cdot m^{-1}$]

\vec{D} : Induction Electrique [$C \cdot m^{-2}$]

\vec{E} : Champ Electrique [$V \cdot m^{-1}$]

\vec{B} : Induction magnétique [T]

\vec{J}_c : Densité volumique du courant électrique total [A]

\vec{J}_d : Densité volumique du courant de conduction [$A \cdot m^{-2}$]

ρ : Densité volumique de la charge électrique [$C_b \cdot m^{-2}$]

σ : conductivité électrique [S.m]

ε : Permittivité diélectrique [$F \cdot m^{-1}$]

μ : perméabilite magnétique [$H \cdot m^{-1}$]

ν : Reluctivité magnétique [$H^{-1} \cdot m$]

avec : $\vartheta : \frac{1}{\mu}$

I.3 Descriptions des Équations de Maxwell

I.3.1 Loi d'Ampère

En intégrant le champ magnétique \vec{H} sur le long d'un contour fermé (C) qui est égale au courant I encerclé par le contour (C), on obtient : [4 – 10].

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (I.9)$$

Donc :

$$\iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = \iint \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{ds} \quad (I.10)$$

De la loi de stockes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \, d\vec{s} = \oint_C \vec{H} \, d\vec{l} \quad (\text{I.11})$$

La comparaison entre (I.10) et (I.11) donne (I.1)

La formule (I.1) exprime la dépendance du champ magnétique en fonction de la densité de courant total c'est-à-dire le courant de conduction.

I.3.2 Loi de Faraday

La force électromotrice (e) induite dans un circuit (C) placé dans un champ électrique \vec{E} est donnée par l'intégrale curviligne suivante : [4 – 10].

$$e = \oint_C \vec{E} \, d\vec{l} \quad (\text{I.12})$$

e : [volt]

La variation du flux magnétique passant à travers une surface quelconque (S) limitée par un contour est égale à la force électromotrice induite c'est-à-dire :

$$e = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{I.13})$$

Le flux magnétique à travers une surface (S) est donné par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \, d\vec{s} \quad (\text{I.14})$$

D'après le théorème de stocks, on a :

$$e = \oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \, d\vec{s} \quad (\text{I.15})$$

En remplaçant l'équation (I.14) dans (I.13), on aura :

$$e = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{ds} \quad (\text{I.16})$$

À partir des équations (I.15) et (I.16), nous avons :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \vec{ds} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{ds} \quad (\text{I.17})$$

Finalement, on obtient (I.2), cette équation exprime le couplage électrique magnétique en dynamique ou la variation temporelle de \vec{B} détermine le $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$ à la variation spatiale vectorielle de \vec{E} ($\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$).

I.3.3 Loi de Gauss

Le vecteur champ électrique \vec{E} , sortant d'une surface fermée (S), est égale au quotient par ϵ_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de cette surface (S), tel que : [1 – 10].

$$\iint_S \vec{E} \vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I.18})$$

Si les charges libres se repartent uniformément selon une densité volumique (ρ), la relation précédente deviendra :

$$\iint_S \vec{E} \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \text{div} \vec{E} \vec{ds} \quad (\text{I.19})$$

D'où le théorème de Ostrogradski - Gauss on aura :

$$\iint_S \vec{E} \vec{ds} = \iiint_V \text{div} \vec{E} dv \quad (\text{I.20})$$

Dans les deux relations précédentes, on a :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I.21})$$

Le vecteur de densité de polarisation \vec{p} le moment électrique d'un petit volume dv on obtient :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \iiint_V \rho \, dv \quad (\text{I.22})$$

Donc :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad (\text{I.23})$$

Le vecteur d'induction électrique \vec{D} est égal à :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (\text{I.24})$$

Finalement on trouve la formule précédente (I.4).

I.3.4 Théorème de la divergence de l'induction magnétique \vec{B}

On constate que le flux magnétique à travers une surface quelconque fermée (s) est toujours nul, c'est-à-dire : [4 – 10].

$$\oiint_S \vec{B} \, d\vec{s} = \vec{0} \quad (\text{I.25})$$

Du théorème d'Ostragradski-Green, on aura :

$$\oiint_S \vec{B} \, d\vec{s} - \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, dv = 0 \quad (\text{I.26})$$

En fin on trouve la formule précédente (I.3).

Cette relation, traduit, mathématiquement, que les seules sources de champ sont fermées sur elles-mêmes, elles n'ont ni point ni de départ ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative.

I.3.5 Conservation de la densité du courant total

Le champ dépend du temps et la dérivée par rapport au temps de (I.21) est : [4 – 10].

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{I. 27})$$

Puis, en tenant compte de l'équation de continuité, on peut écrire :

$$\operatorname{div} \vec{J}_c = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{I. 28})$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \right) = 0 \quad (\text{I. 29})$$

On a alors :

$$\vec{J}_t = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \quad (\text{I. 30})$$

Finalement, on trouve l'équation (I.1)

I.4 Formulation mathématique des phénomènes électromagnétiques dans les systèmes électriques

Les équations de propagation électromagnétique, peuvent être formulées de différentes manières suivant les hypothèses auxquelles elles sont soumises, et sont, par conséquent strictement équivalentes en termes d'approximation. On distingue, en générale, les formulations, intégrale et différentielle des équations de Maxwell exprimées dans le domaine temporel ou spectral à chacune de ces représentations qui correspondent à une technique particulière de résolution [4 – 10].

On retiendra, malgré tout, que plus qu'un problème de terminologie auquel tout cela peut se ramener, l'idée directrice est de résoudre des équations pour déterminer les valeurs des champs électromagnétiques en temps et en espace [4 – 10].

I.4.1 Modèle magnétodynamique

La magnétodynamique consiste à l'étude des phénomènes magnétiques et électriques en régime dynamique, en négligeant toute fois les courants de déplacement,

$\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$, c'est-à-dire, sous l'hypothèse de l'électrotechnique. Les champs électromagnétiques sont alors variables, soit par variation de courants d'excitation, soit par mouvement d'une partie de la géométrie. Ce problème de courants induits : il s'agit de calculer, sous l'excitation du courant J_s , variable dans le temps, la distribution du champ magnétique \vec{H} (ou \vec{B}) dans chaque point du domaine d'étude et de la densité de courant J_s dans le domaine conducteur pour un temps supérieur au temps initial [4 – 10].

L'application de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs de chauffage par induction, des transformateurs, ...etc. de l'équation (I.1) et comme dans le cas des systèmes fonctionnant à faible fréquence, le courant de déplacement est fortement négligeable devant le courant de conduction, dans ce cas on peut écrire : [4 – 10].

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I. 31})$$

On intègre la relation (II.2) par rapport au temps, on obtient :

$$\vec{B} = - \int \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} dt \quad (\text{I. 32})$$

Remplaçant l'équation (II.32) dans (II.31), on aura :

$$-\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \left[\int \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} dt \right] = \sigma \vec{E} \quad (\text{I. 33})$$

Compte tenu de la relation (I.3), l'induction magnétique s'écrit comme le rotationnel d'un vecteur appelé potentiel vecteur magnétique A :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{I. 34})$$

Remplaçant l'équation (II.34) dans (II.2), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{I.35})$$

Ceci nous permet de constater que le champ $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ conservatif ; tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} U \quad (\text{I.36})$$

Comme U est le potentiel électrique scalaire [v] du champ électromagnétique, on obtient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.37})$$

Ensuite, remplaçant (I.37) dans (I.33) on obtient :

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \left[\int \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt \right] + \sigma \left(\overrightarrow{\text{grad}} U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{I.38})$$

On constate que le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = \vec{0} \quad (\text{I.39})$$

Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = -\sigma \left(\overrightarrow{\text{grad}} U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.40})$$

La formule (I.40) est une équation différentielle contient deux inconnues \vec{A} et U, pour avoir une solution unique. On doit ajouter à cette équation une autre équation pour former un système de deux équations à deux inconnues, dans ce cas, l'équation la plus utilisée est celle de la conservation de la densité de courant.

Pour introduire cette densité de courant \vec{J}_s dans la formulation générale (I.40) et cette grandeur \vec{J}_s sera éliminée selon la région étudiée car \vec{J}_s est à divergence nulle.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} U - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \\ \text{div} \left(\sigma \overrightarrow{\text{grad}} U - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

Pour surmonter ce problème, on introduit une condition supplémentaire dite de coulomb, donnée par :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (\text{I.42})$$

Dans le cas où les dispositifs sont alimentent en courant, l'équation magnétodynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \right) + \vec{J}_s \\ \operatorname{div} \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

I.4.2 Modèle magnétostatique

La magnétostatique consiste à étudier les phénomènes magnétiques en régime stationnaire.

Le champ magnétique est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'aux courants stationnaires imposés ou à des aimants permanents.

Les équations à considérer sont les équations de Maxwell ou les dérivées temporelles sont annulées.

Deux sortes de ce modèle sont adaptées : [4 – 10].

I.4.2.1 Modèle magnétostatique scalaire

Dans ce modèle, les courants électriques sont nuls, alors les champs ne dépendent pas du temps on obtient les relations suivantes, donc d'après les équations (I.1) et (I.3), on obtient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

Tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{I. 45})$$

\vec{H} : est dérive d'un potentiel scalaire, d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire Φ

La formule précédente, devient :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = 0 \quad (\text{I. 46})$$

I.4.2.2 Modèle magnétostatique vectoriel

Dans ce modèle, les courants électriques ne sont pas nul, Alors les deux équations (I.1) et (I.2) deviennent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{I. 47})$$

Combinant les deux formulations (I.38) et (I.8) avec (I.47), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{j} \quad (\text{I. 48})$$

Donc, en tirant une équation qui relie directement le potentiel vecteur à la densité du courant

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \nabla \Delta \vec{A} \quad (\text{I. 49})$$

La jauge de Coulomb est la jauge la plus couramment utilisée.

Or pour

La formulation constituée par l'équation (I.49) est adaptée aux problèmes bidimensionnels et où l'inconnue possède une composante, le cas cylindrique axisymétrique fera exemple, alors le jauge de coulomb $\text{div} \vec{A} = 0$ on obtient alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \Delta \vec{A} \quad (\text{I. 50})$$

On introduit un nouvel opérateur :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{A}) = \Delta \vec{A} \quad (\text{I. 51})$$

On combinant les équations (I.50), (I.51) et (I.47), on obtient :

$$\overline{\text{rot}}(\nu \overline{\text{rot}} \vec{A}) = -\text{div}(\overline{\text{grad}} \vec{A}) = \vec{j} \quad (\text{I. 52})$$

Cette formule représente le potentiel vecteur magnétique du genre équation de Poisson

Pour surmonter ce problème, deux types de classifications seront présentées :

I.4.3 Classification mathématique

En général, les équations aux dérivées partielles sont classifiées en trois catégories, appelées elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Pour illustrer cette classification on considère en général, équation différentielle de deuxième ordre en deux variables indépendantes x et y .

Si U est une fonction de n variables indépendantes, les E.D.P linéaires de second ordre seront du type :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial U}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)U + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (\text{I.53})$$

- Si $a_i = 0$ (et de même signe) alors que l'E.D.P est de type elliptique,
- Si $a_i \neq 0$ on dit que l'E.D.P est de type hyperbolique,
- Si un seul des a_i est nul et tous les autres de même signe et si b_i n'est pas nul L'E.D.P. sera du type parabolique,

Soient $U(x, y)$ une fonction de deux variables et $V(x, y, t)$ une fonction de trois variables

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(x) \quad \text{est une E. D. P elliptique} \quad (\text{I. 54})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + F(x) \quad \text{est une E. D. P hyperbolique} \quad (\text{I. 55})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + F(x) \quad \text{est une E. D. P parabolique} \quad (\text{I. 56})$$

Telle que : $F(x)$ est la densité de la source.

I.4.4 Classification physique des Equation aux denrées partielles

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes : [4 – 10].

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (Champ, Chaleur, ... etc.) dans un domaine borné ou non, il est gouverné par des E.D.P. du typé elliptique.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas per exemple de la résonance des circuits électriques.
- Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration,... etc.) à partir d'un état initial.

I.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre on se propose, les différentes formulations mathématico physiques des phénomènes électromagnétiques. Nous avons exposé la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique et la formulation magnétodynamique aussi.



Chapitre II



Modèles mathématiques
détaillés en
électromagnétisme

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons des modèles mathématiques détaillés en électromagnétique, dans lesquels nous utilisons des méthodes analytiques.

II.2. Analytique magnétostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J}_s \quad (\text{II. 1})$$

II.2.1 Dans le cas cylindrique axisymétrique :

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ J_z & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (\text{II. 2})$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{A}_r \\ \vec{A}_j \\ \vec{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ A_z & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (\text{II. 3})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_{q_1} & h_2 A_{q_2} & h_3 A_{q_3} \end{vmatrix} \quad (\text{II. 4})$$

$$(x, y, z) : \begin{cases} h_1 = 1 & q_1 = x & \vec{e}_1 = \vec{i} \\ h_2 = 1 & q_2 = y & \vec{e}_2 = \vec{j} \\ h_3 = 1 & q_3 = z & \vec{e}_3 = \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 5})$$

$$(r, \varphi, z) : \begin{cases} h_1 = 1 & q_1 = r & \vec{e}_1 = \vec{e}_r \\ h_2 = r & q_2 = \varphi & \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi \\ h_3 = 1 & q_3 = z & \vec{e}_3 = \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 6})$$

$$(r, \varphi, \theta) : \begin{cases} h_1 = 1 & q_1 = r & \vec{e}_1 = \vec{e}_r \\ h_2 = r & q_2 = \varphi & \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi \\ h_3 = r \sin \varphi & q_3 = \theta & \vec{e}_3 = \vec{e}_\theta \end{cases} \quad (\text{II. 7})$$

EX :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(r, \varphi, z) : \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{II. 8})$$

$$\vec{j} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ J_z & \vec{e}_z \end{cases} \quad (\text{II. 9})$$

$$\vec{A}(r, \varphi) : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ A_z(x, \varphi) & \vec{e}_z \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} : \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(r, \varphi) \end{vmatrix} \quad (\text{II. 11})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} : \begin{cases} \frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi} & \vec{e}_r \\ -\frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial r} & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) : \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi} & -\frac{\partial A_z(r, \varphi)}{\partial r} & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II. 13})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ -\frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} & \vec{e}_z \end{cases} \quad (\text{II. 14})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \left[-\frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \vec{e}_z \quad (\text{II. 15})$$

$$\left[-\frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \vec{e}_z = \mu_0 J_z \vec{e}_z \quad (\text{II. 16})$$

$$\frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_z(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -\mu_0 J_z \quad (\text{II. 17})$$

II.2.2 Dans le cas cartésien

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J} \quad (\text{II. 18})$$

$$\vec{J} : \begin{cases} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ J_z & \vec{k} \end{cases} \quad \vec{A} : \begin{cases} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ A_z(x,y) & \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 19})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(x,y) \end{vmatrix} \quad (\text{II. 20})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(x,y) : \begin{cases} \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} & \vec{i} \\ -\frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 21})$$

II.2.2.1. En particulier :

Soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = V_x, \quad -\frac{\partial A_z}{\partial x} = V_y, \text{ nous avons ainsi :} \quad (\text{II. 22})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} : \begin{cases} V_x & \vec{i} \\ V_y & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 23})$$

Pour : $\mu = \mu_0$ dou, le cas du vide $\mu_r = 1, \vartheta_r = 1$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x(x,y) & V_y(x,y) & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II. 24})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}: \begin{cases} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} & \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 25})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \quad (\text{II. 26})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}, \quad \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} = V_x, \quad -\frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} = V_y \quad (\text{II. 27})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) : \begin{cases} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ -\frac{\partial^2 A_z(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z(x,y)}{\partial y^2} & \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II. 28})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \left[-\frac{\partial^2 A_z(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z(x,y)}{\partial y^2} \right] \vec{k} = \mu_0 J_z \vec{k} \quad (\text{II. 29})$$

$$\frac{\partial^2 A_z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z(x,y)}{\partial y^2} = -\mu_0 J_z \quad (\text{II. 30})$$

II.3. magnétodynamique :

$$\frac{\partial^2 A_z(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z(x, y, t)}{\partial y^2} + i 2 \pi f \mu_0 A_z(x, y, t) = -\mu_0 J_{s_{\max}} \quad (\text{II. 31})$$

II.4. Explications :

$$J_s = 0, \sigma = 0, \mu = \mu_0$$

L'équation électromagnétique prendra la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} A \right) = \vec{0} \quad (\text{II. 32})$$

L'air est un milieu linéaire, de perméabilité μ_0 constante, l'équation (II.32) prendra la forme suivante :

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} A) = \vec{0} \quad (\text{II. 33})$$

Donc l'équation (II.33) s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} A) = \vec{0} \quad (\text{II. 34})$$

On peut écrire (II.34) comme un Laplacien : $\Delta A = 0$.

En coordonnées cylindriques, et en présence d'une symétrie axiale, nous avons

$$\vec{A}_\varphi = A(r, z) \vec{e}_\varphi, \text{ ainsi nous aurons :}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} = 0 \quad (\text{II. 35})$$

Est le azimutal :

\vec{e}_φ : Vecteur unitaire.

L'air est un milieu linéaire de perméabilité constante ($\mu = \mu_0$). Ainsi, nous pouvons appliquer le principe de séparation des variables.

Notons A_φ par A . Mettons A sous la forme

$$A(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad (\text{II.36})$$

La substitution de l'équation (II.36) dans l'équation (II.35) nous donne :

$$R \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + Z \left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right] = 0 \quad (\text{II.37})$$

Pour séparer les variables, on divise par le produit $[R(r) Z(z)]$, nous trouvons :

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right] = \lambda \quad (\text{II.38})$$

λ est la constante de la séparation, des variables.

L'équation (II.38) s'écrit encore comme suit :

$$\frac{Z''}{Z} = - \frac{1}{R} \left[R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{R}{r^2} \right] = \lambda \quad (\text{II.39})$$

La solution des équations en $R(r)$ et en $Z(z)$ dépend de la valeur du paramètre λ . Ainsi, selon la valeur de ce dernier, trois cas peuvent être traités s'agit de : [12 – 17]

1^{er} cas : $\lambda > 0$

1^{er} cas : $\lambda = 0$

1^{er} cas : $\lambda < 0$

II.4.1. Résolution de l'équation en $Z(z)$:

- 1^{er} cas : $\lambda > 0$:

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda \quad \Longrightarrow \quad Z'' - \lambda Z = 0 \quad (\text{II. 40})$$

La solution de cette équation est de la forme suivante :

$$Z(z) = \alpha e^{z\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-z\sqrt{\lambda}} \quad (\text{II. 41})$$

Où α et β sont des constantes d'intégration à déterminer.

- Conditions des frontières :

$$\text{Pour } z = 0 : \quad Z(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = -\beta$$

$$\text{Pour } z = b : \quad Z(b) = 0$$

$$Z(b) = \alpha e^{b\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-b\sqrt{\lambda}} = 0$$

$$Z(b) = \alpha(e^{b\sqrt{\lambda}} - e^{-b\sqrt{\lambda}}) = 0$$

Le terme $(e^{b\sqrt{\lambda}} - e^{-b\sqrt{\lambda}})$ est toujours différent de zéro, quel que soit λ positif, car $e^{b\sqrt{\lambda}}$ est très grand devant le terme $e^{-b\sqrt{\lambda}}$.

Ceci nous conduit à conclure que : $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

Ce cas est à rejeter.

- 2^{ème} cas : $\lambda = 0$:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Z''(z) = 0 \quad (\text{II. 42})$$

La solution de cette équation est de la forme suivante :

$$Z = \alpha z + \beta$$

- Conditions aux frontières :

$$\text{Pour } z = 0 \quad Z(0) = \beta = 0$$

$$\text{Pour } z = b \quad Z(b) = \alpha b = 0$$

$$\text{Donc : } \alpha = \beta = 0 \quad Z = 0, \forall z$$

Ce cas est à rejeter aussi.

- 3^{ème} cas : $\lambda < 0$:

Donc ce cas, le paramètre λ peut-être mis sous la forme : $\lambda = -\omega^2$ telle que : $\omega \in \mathbb{R}^*$ (cas général). Ainsi :

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z^2} = \lambda = -\omega^2$$

$$\implies \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\omega^2$$

$$Z''(z) + \omega^2 Z(z) = 0 \quad (\text{II.43})$$

C'est une équation différentielle du second ordre. Sa solution s'écrit sous la forme suivante :

$$Z(z) = \alpha \cos(\omega z) + \beta \sin(\omega z)$$

Où α et β sont les constantes d'intégration.

- Conditions aux frontières :

$$\text{Pour } z = 0 : \quad \implies \quad Z(0) = 0$$

$$\implies \quad Z(0) = \alpha = 0$$

$$\text{Pour } z = b : \quad \implies \quad Z(b) = 0$$

$$\implies \quad Z(b) = \beta \sin(\omega b) = 0$$

Or, la constante β doit être différente de zéro, sinon, il n'y aura jamais de solutions. Donc :

$$\sin(\omega b) = 0$$

(ωb) Doit être un multiple de π

$$\implies \omega b = \pm n\pi \quad \implies \omega = \pm \frac{n\pi}{b}$$

ω Doit être un multiple de π et $n \in \mathbb{N}^*$

La solution de l'équation (II.43) prendra alors la forme suivante :

$$Z(z) = \beta \sin(\omega z)$$

On remplace ω par sa valeur, on obtient :

$$Z(z) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \quad (\text{II. 44})$$

II.4.2. Résolution de l'équation en $R(r)$:

Seul le cas conforme avec la solution de l'équation en $Z(z)$ sera traité [12 – 17].

Ceci correspond au cas où le paramètre λ est négatif ($\lambda < 0$). Ainsi, notre équation prend la forme :

$$-\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right) = \lambda \quad (\text{II. 45})$$

Avec $\lambda < 0$. Soit $\lambda = -\omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^*$

$$-\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right) = -\omega^2$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} \right) = \omega^2$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r^2} = \omega^2 R$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \omega^2 \right) R = 0$$

En multipliant par r^2 :

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} - (1 + \omega^2 r^2) R = 0$$

En utilisant le changement de variable : $x = \omega r$, on obtient :

$$x^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + x \frac{\partial R}{\partial x} - (1 + x^2) R = 0 \quad (\text{II. 46})$$

Il a agit l'équation de BESSEL, elle représente un cas particulier de l'équation différentielle générale suivante :

$$x^2 R'' + xR' - (x^2 + n^2) = 0$$

Dans notre cas : $n = 1$.

Ainsi, la solution générale de cette équation est de forme :

$$R(x) = C'_1 I_1(x) + C'_2 K_1(x)$$

Où $I_1(x)$ et $K_1(x)$ sont les équations de Bessel modifiées de première espèce, et de deuxième espèce.

La fonction modifiée de Bessel de première espèce d'ordre n , ($I_n(x)$) est définie par :

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-\frac{n\pi i}{2}} J_n(ix)$$

Avec :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} \dots \right]$$

$$J_n(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\alpha}}{\alpha! \Gamma(n + \alpha + 1)}$$

Où Γ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} [(x)^{n-1} e^{-x}] dx$$

Pour $n = 1$ (notre cas) :

$$I_1(x) = e^{\frac{\pi i}{2}} J_n(ix)$$

On remplace $J_1(x)$ par sa valeur, on obtient :

$$I_1(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2\alpha}}{\alpha! \Gamma(\alpha + 2)}$$

La fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre n , ($K_n(x)$) est donnée par :

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)} \right]$$

Pour $n = 1$

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-1}(x) - I_1(x)}{\sin(\pi)} \right]$$

Donc, la solution générale de l'équation ($\Delta A = 0$) est donnée par :

$$A(r, z) = R(r).Z(z)$$

En remplaçant $R(r)$ et $Z(z)$ par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$A(r, z) = \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[C_1 I_1\left(\frac{n\pi}{b} r\right) + C_2 K_1\left(\frac{n\pi}{b} r\right) \right] \quad (\text{II. 47})$$

Où : $C_1 = \beta C'_1$ et

$$C_2 = \beta C'_2$$

Cette équation représente la forme générale de la solution analytique de l'équation électromagnétique dans l'entrefer.

C_1 et C_2 sont des coefficients d'intégration que nous déterminons par la suite en

Fonction de l'application à traiter.

II.5. Conclusion

Nous sommes intéressés, dans ce chapitre à l'étude analytique de la formulation mathématique détaillée en électromagnétisme dans les cas (cylindrique axisymétrique, cartésien).

Le but de cette étude analytique est la validation des résultats obtenus par des méthodes numériques, le développement des méthodes numériques capables pour la résolution des équations aux dérivées partielles fera l'objet du prochain chapitre.



Chapitre III



Application de la méthode
des éléments finis au calcul
du potentiel magnétique
vecteur

III.1. Introduction

La méthode des éléments finis est utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans les domaines des sciences de l'ingénieur. Elle consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnue pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. Toutes fois, elle ne s'applique pas directement aux équations aux dérivées partielles mais à une formulation intégrale qui est, à son tour, équivalente au problème à résoudre [6 – 12].

III.2. Application de la méthode des éléments finis

Il existe de nombreuses applications de la méthode des éléments finis. Elle fortement utilisée dans la conception et le développement des dispositifs électriques dans notre cas. Différent programmes de calcul à base d'éléments finis sont disponibles destinés aux domaines de l'électromagnétisme, de la chaleur, de la mécanique des solides et des fluides aussi, au domaine des matériaux aussi, ...etc. [4 – 10].

III.3. Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à rechercher une fonction globale représentant les phénomènes à étudier, sur le domaine à analyser.

Ce domaine doit être divisé, au préalable, en parties finies adjacentes appelées éléments finis. L'ensemble de ces éléments est appelé maillage en éléments finis.

La fonction globale, sera alors construite sur chacun de ces éléments du maillage. Elle doit vérifier globalement les conditions aux limites et les conditions d'interfaces requises par le phénomène question.

La fonction, qui modélise le phénomène, est décrite par une interpolation polynomiale, des valeurs l'inconnue seront cherchées en chacun des points du domaine d'étude. Chaque point de calcul est noté par nœud et l'ensemble des nœuds constitue le maillage [4 – 10].

III.3.1. Discrétisation

La discrétisation consiste à subdiviser le domaine de l'objet à analyser, qui peut être à une, deux ou trois dimensions, en un ensemble d'éléments finis de formes simples. L'ensemble des éléments qui reconstituent le domaine est dénommé par le découpage ou la discrétisation géométrique. Ces éléments peuvent être des segments, des triangles, des quadrilatères, des tétraèdres, des parallélépipèdes, des prismes, ...etc., selon le domaine à discrétiser.

Le recouvrement et les trous, entre les éléments adjacents, sont inadmissibles.

La taille des éléments du maillage n'est pas forcément la même, ce qui permet la possibilité de la densification de la discrétisation dans les zones où l'inconnue est fortement variable [4 – 10].

III.3.2. Éléments finis triangulaires linéaires

- **Exemple**

Les éléments triangulaires sont utilisés pour l'analyse mathématique car ils s'adaptent à toutes configurations géométriques et permettent une discrétisation simple du domaine de résolution bidimensionnel. Le nombre de nœuds par élément triangulaire permet d'approximer l'inconnue sur chaque fonction d'interpolation dont la forme est la suivante [4 – 10] :

$$\alpha(x, y) = a + bx + cy \quad (\text{III. 1})$$

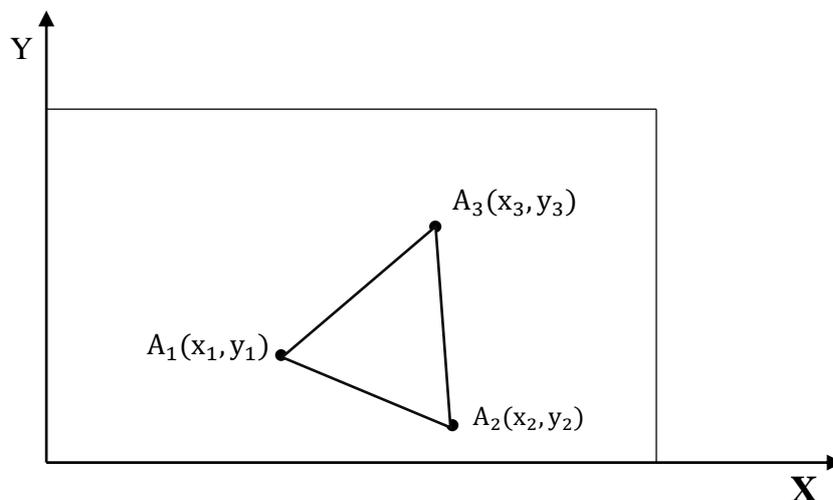


Figure III.1 Élément triangulaire linéaire du premier ordre.

III.4. Couplage des méthodes numériques aux solutions analytiques

Cette technique est utilisée dans le cas des systèmes présentant des pièces ferromagnétiques et des entrefers de séparation entre ces pièces généralement mobiles. Les frontières entre les différentes zones sont appelées les interfaces. Nous citons, à titre d'exemple, tous types de machines électriques mobiles. Ainsi, dans les zones à matière ferromagnétiques, les méthodes numériques sont à utiliser pour la résolution des équations aux dérivées partielles soit linéaires ou non-linéaires. Les méthodes analytiques sont à exploiter dans la zone entrefer, physiquement linéaire, donc mathématiquement linéaires et avec absence de sources d'alimentation. Il s'agit donc d'équation magnétostatique ou quasi-statique sans second membre. Les deux solutions numériques et analytiques sont égales au niveau des frontières : stator-entrefers et rotor-entrefers [9 – 16].

III.5. Modèle géométrique. :

Partant du principe que les deux à base de matière ferromagnétique (zones induit inducteur) sont maillées en éléments finis, dont le potentiel est déterminé numériquement, D'autre part, le potentiel est exprimé analytiquement dans l'entrefers, ceci implique que le couplage des deux solutions sera assuré au niveau des interfaces I et II selon la figure III.2 [9 – 17].

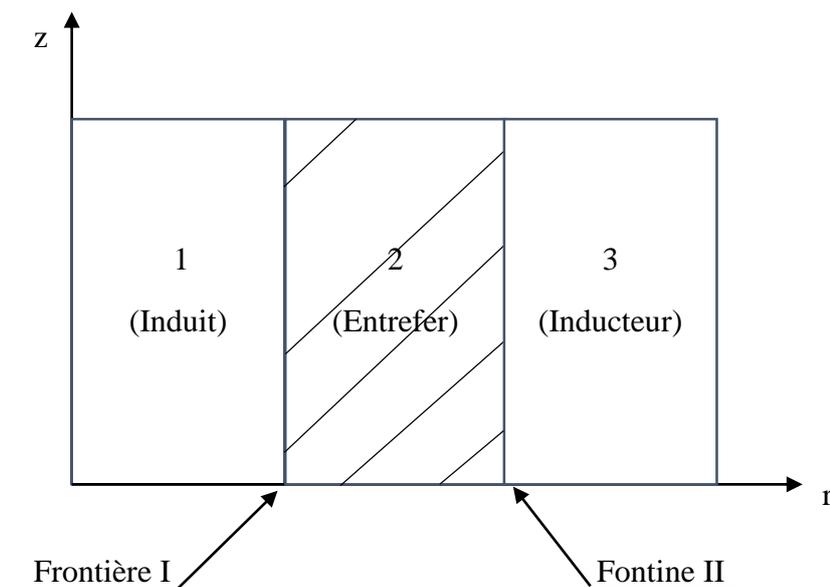


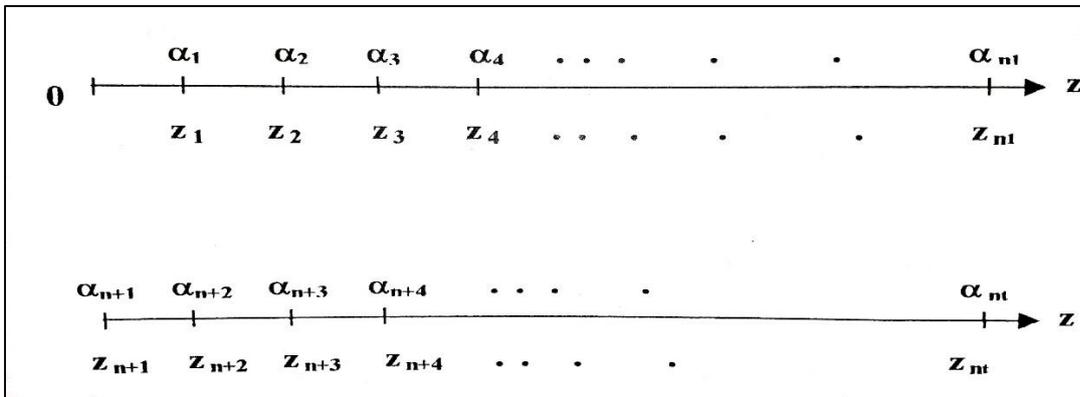
Figure III.2.Modèle géométrique.

(1) et (2) sont les zones de la solution numérique.

(3) est la zone de la solution analytique.

III.6. Calcul des paramètres B_{ni} :

Soit la représentation simplifiée de l'entrefer-induit, et entrefer-inducteur la figure suivante : [9 – 16].



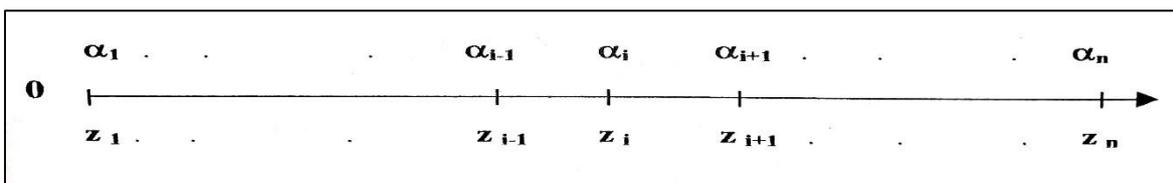
$$\alpha_1(z) = \frac{(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \dots (z - z_{n1})}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4) \dots (z_1 - z_{n1})} \quad \text{(III. 2)}$$

Et

$$\alpha_2(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_3)(z - z_4) \dots (z - z_{n1})}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4) \dots (z_2 - z_{n1})} \quad \text{(III. 3)}$$

Les fonctions d'interpolation $\alpha_1(z)$ ne dépendent que de la variable z .

Pour les éléments du premier ordre, les fonctions d'interpolation $\alpha_1(z)$ se calculent comme suit : [9 – 16].



$$\begin{cases} \alpha_i(z) = \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} & \text{pour } z_{i-1} < z < z_i \\ \alpha_i(z) = \frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}} & \text{pour } z_{i-1} < z < z_{i+1} \\ \alpha_i(z) = 0 & \text{pour } z < z_{i-1} \text{ ou } z > z_{i+1} \end{cases} \quad (\text{III. 4})$$

Ainsi, en intégrant, mathématiquement, les expressions des fonctions $\alpha_i(z)$, les coefficients B_{ni} des fonctions de Bessel sont calculés de la manière suivante :

$$B_{ni} = \frac{2}{b} \int_0^b [\alpha_i(z) \sin(\lambda_n z)] dz \quad (\text{III. 5})$$

Or :

$$\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} y(z) dz = \int_{z_{i-1}}^{z_i} y(z) dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} y(z) dz \quad (\text{III. 6})$$

En intégrant par parties on obtient :

$$B_{ni} = \frac{2}{b} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \sin(\lambda_n z) dz + \frac{2}{b} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}} \sin(\lambda_n z) dz \quad (\text{III. 7})$$

$$\begin{aligned} B_{ni} &= \frac{2}{b} \frac{1}{(z_i - z_{i-1})} \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_{i-1}) \sin(\lambda_n z) dz \\ &\quad + \frac{2}{b} \frac{1}{(z_i - z_{i+1})} \int_{z_i}^{z_{i+1}} (z - z_{i+1}) \sin(\lambda_n z) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 8})$$

Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_{i-1}) \sin(\lambda_n z) dz &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sin(\lambda_n z) dz - (z_{i-1}) \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sin(\lambda_n z) dz \\ &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sin(\lambda_n z) dz + \frac{z_{i-1}}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) \Big|_{z_{i-1}}^{z_i} \end{aligned} \quad (\text{III. 9})$$

Dans le cas général on a :

$$\begin{aligned} \int a db &= ab - \int b da \quad \Rightarrow \\ \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sin(\lambda_n z) dz &= -z \frac{1}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) + \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{1}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) dz \\ &= \frac{-z}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n z) \Big|_{z_{i-1}}^{z_i} \end{aligned} \quad (\text{III. 10})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_{i-1}) \sin(\lambda_n z) dz &= \frac{-z}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n z) + \frac{z_{i-1}}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) \Big|_{z_{i-1}}^{z_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2} [\sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i-1})] - \frac{1}{\lambda_n} (z_i - z_{i-1}) \cos(\lambda_n z_i) \end{aligned} \quad (\text{III. 11})$$

De la même manière, on calcule le deuxième terme :

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} (z - z_{i+1}) \sin(\lambda_n z) dz \quad (\text{III. 12})$$

On trouve :

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} [(z - z_{i+1}) \sin(\lambda_n z)] dz =$$

$$-\left[\frac{1}{\lambda_n^2} [\sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i+1})] - \frac{1}{\lambda_n} (z_i - z_{i+1}) \cos(\lambda_n z_i) \right] \quad (\text{III. 13})$$

Donc, l'expression finale de B_{ni} est :

$$B_{ni} = \frac{2}{b} \frac{1}{(z_i - z_{i-1})} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} [\sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i-1})] - \frac{1}{\lambda_n} (z_i - z_{i-1}) \cos(\lambda_n z_i) \right\} - \frac{2}{b} \frac{1}{(z_i - z_{i+1})} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} [\sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i+1})] - \frac{1}{\lambda_n} (z_i - z_{i+1}) \cos(\lambda_n z_i) \right\} \quad (\text{III. 14})$$

III.7. Conclusion

La méthode des éléments finis, qui fait partie de la famille des méthodes numériques, est une méthode remède aux incapacités que présentent les méthodes analytique en matière d'absence de solutions.

La méthode des Elément finis s'adapte à tout genre de problèmes physiques linéaires ou non linéaires et aussi, toutes de géométries régulières ou non.

La méthode des éléments finis est la méthode la plus puissante utilisées jusqu'au là pour le traitement des équations aux dérivées partielles dans les sciences de l'ingénieur et du transfert de la technologie en Génie 2lectrique, en Génie mécanique, dans le domaine du transfert de la chaleur, et d'autres domaines aussi variées du domaine de la physique.

Le couplage des méthodes des éléments finis aux solutions analytique, pour certain type de problèmes, les machines électriques représentant des entrefers physiquement linéaires, augmente largement et remarquablement la précision sur les calculs.



Conclusion Générale



Conclusion Générale

Dans le cadre de ce travail de Master, nous avons, en premier lieu, d'une façon détaillée, les équations de J. C. Maxwell. Nous avons également abordé les formules mathématiques des phénomènes électromagnétiques présents dans les systèmes électriques et nous avons aussi étudié en détails des différents modèles mathématiques en électromagnétisme.

Les méthodes analytiques sont exploitées dans le cas et où l'inconnue présente une seule composante. L'utilisation des méthodes dites numériques ne sera possible que par ce que ces méthodes analytiques sont incapables de prédire d le comportement des systèmes électriques par le biais d'absence de solutions et d'incapacités mathématiques malgré l'utilisation de procédures semi-analytiques. Ceci nous amènera à faire appel aux méthodes approximatives dites aussi numériques.

Par la suite, nous nous sommes intéressés, plus particulièrement, à la méthode des éléments finis pour calculer le potentiel magnétique vecteurs vu que le calcul de cette grandeur, permet la détermination et l'évaluation du reste des grandeurs physiques caractéristiques aux problèmes à résoudre par de simples exploitations directes pour tout genre d'applications électrotechniques : machines (champ magnétique, induction magnétique, couple, vitesse de mouvements des pièces mobile, ...etc.), réseaux (les courants de court-circuit, distance de sécurité entre les lignes, le calcul des isolateurs, ...etc.).

Nous concluons, de ce qui précède, que les méthodes analytiques sont plus précises que les méthodes numériques, mais leur utilisation est limitée et nécessite un modèle physique linéaire et géométriquement trop simple en raison des solutions trop limitées des équations aux dérivées partielles.

De la même manière, nous notons que tous les logiciels de modélisation physico-mathématiques dépendent directement des méthodes numériques.

Ainsi, suite à ce travail très modeste, nous conseillons les utilisateurs de la modélisation des systèmes électriques l'utilisation de la méthode des éléments finis MEF vue sa capacité remarquable en matière de traitement de tout type de dispositifs et toute genre de propriétés physiques et forme géométrique vu que leurs modelés mathématiques sont basés sur des équations aux dérivées partielles. Néanmoins, lorsque les conditions physico-géométriques le permettent, nous conseillons aux utilisateurs l'exploitation des méthodes analytiques en priorité vu leur facilité de traitement et leur précision généralement trop élevée par rapport aux méthodes numériques basées sur des considérations très approximatives.



Références Bibliographiques



Références Bibliographiques

- [1] J.C SABONNADIÈRE et J. L. COULOMB, « Calcul des Champs Electromagnétiques », D 3020, Revue Technique de l'ingénieur, Paris, France, 1988.
- [2] E. GUDEFIN, « Détermination des Champs Magnétique Circuit Magnétique », D3 – 1 et D 420 - 1, Revue Technique de l'ingénieur, Paris, France, 1974.
- [3] ENCARTA Encyclopédie Générale, 1998.
- [4] I. BENRAS, « Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques d'une Micro Pompe Magnétohydrodynamique à Conduction », Thèse de Master Académique, Université d'Ouargla, 2016.
- [5] H. GAREH, « Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques par la Méthode des Volume Finis », Thèse de Master, Université de Biskra, 2013.
- [6] K. GUERGAZI et R. KECHIDA, « Application de la Méthode des Eléments Finis », Mini-Projets Internes des Cours de Magister : Modélisation des Machines Electriques, Université d'El Oued, Algérie, 2008.
- [7] Rapports d'activités internes de l'équipe modélisation du Laboratoire de Modélisation des Systèmes Electriques, LMSE de l'Université de Biskra, depuis 2001.
- [8] L. MOKRANI, « Contribution à la Simulation d'un Moteur Linéaire à Simple Induction par la Méthode des Eléments Finis », Thèse de Magister, Université de Biskra, 1997.
- [9] N. M'ZIOU, « Modélisation Dynamique des Phénomènes Electromagnétiques dans les Dispositifs Electrotechniques à Parties Mobiles par Couplage Eléments Finis - Méthodes Analytiques », Thèse de Magister, Université de Batna, 2001.

- [10] M. SAKER, « Combinaison des Méthodes Volumes Finis Et Décomposition du Domaine pour La Résolution des Systèmes Electromagnétiques » Thèse de Magister, Université de Biskra, 2011.
- [11] A. SELLAMI et A. W. SALEM, « Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques dans un Système Electrotechnique Type », Mémoire de Fin d'Etude d'Ingéniorat d'Etat en Electrotechnique, Université de Biskra, 1998.
- [12] M. SEBAI et R. NOUARI, « Modélisation de l'Entrefer dans une Structure Electrotechnique Linéaire Type », Mémoire de Fin d'Etude d'Ingéniorat d'Etat en Electrotechnique, Université de Biskra, 1999.
- [13] A. ANGOT, « Complément de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunication », Sixième édition, Masson, 1972.
- [14] G. DHATT et G. TOUZOUT, « Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis », Edition Maloine S.A Editeur, Paris, 1984.
- [15] M. R. SPIERGE, « Analyse de Fourier », Série Schaum, 1985.
- [16] P. G. CIARLLET, « The Finite Element Method for Elliptic Problems », North Holland, Amsterdam, Netherland, 1978.
- [17] L. DEMASSIEUX, « Méthode des Eléments Finis Appliquée à la Résolution des Equations de la Diffusion », Cours de D.E.A, Génie Civil et Minier, I.N P.L. Lauranne, France, 1992.