



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département des Sciences de la Matière

# MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des Sciences de la Matière

Filière de Physique

Spécialité Physique des Matériaux

Réf. :

---

Présenté et soutenu par :

***Meriem Debab et Rimane Haffas***

Le : Mardi 25 Juin 2019

## Initiation à la Supersymétrie

---

Jury :

Mme	Chahinaz Siad	Professeur	Université Med-Khider Biskra	Président
Mme	Nadjoua Bensalah	M. C. B	Université Med-Khider Biskra	Rapporteur
Mr	Mebarak Heddar	M. A. A	Université Med-Khider Biskra	Examineur

Année universitaire : 2018/2019

***Grace à dieu le tout puissant, qui m'a donné la volonté , et qui m'a éclairé vers le bon chemin, que nul ne peut se faire sans son désir.***

***Je dédie ce travail ;***

***Aux deux personnes les plus chères ;***

***Mon Père et ma mère.***

***A mes très chères sœurs :***

***Chaïma, Samia, Hamida, Fouzia et Wahiba.***

***A mes très chers frères :***

***Lotfi et Fares.***

***A Mon fiancé Charef Addine.***

***A ceux qui partage ma réussite de près ou loï.***

---

***MERIEM***

***Je dédie ce travail en premier lieu,***

***À mon cher père et à ma chère mère ;***

***Mes frères (Mustafa, Hichem, Seif)***

***Ma sœur (Nassima)***

***Et bien sûr mon époux, et mon cher fils ;***

***Ainsi que toute la promotion 2018/2019 ;***

***À tous ceux qui me sont chers et à toutes mes  
connaissances.***

---

***RIMANE***

## Remerciements

Après des années d'études au département de la physique, il est temps d'écrire un mémoire de fin d'études pour obtenir un diplôme de Master en physique. Ce travail reflète notre compréhension des matières étudiées pendant ce temps passé à l'université de Mohamed Khider, et c'est avec un grand honneur que nous présentons ce humble travail, mais avec fierté et beaucoup de jouissance, car malgré les difficultés du sujet qui semblait assez abstrait, nous avons trouvé un réel plaisir à passer les étapes de chaque problème posé avec un bonheur immense, ce travail nous a fait goûter la saveur de la recherche.

Nous voudrions exprimer notre gratitude à notre rapporteur et enseignante **Mme N.BENSALAH**, qui a rendu ce travail possible grâce à ses conseils et à sa générosité pour la documentation bibliographique ainsi que sa présence et sa continuité pendant la durée de ce semestre.

Nous remercions également tous ceux qui nous ont apporté leur soutien : enseignants, administrateurs, camarades, amies et famille (surtout nos parents que Dieu tout puissant les protège).

On remercie également **Mme Saied Chahinaz**, professeur à l'université de Mohamed Khider d'avoir accepté de siéger à notre jury. Nos plus vifs remerciements aussi vont à **Mr Haddar Moubarak**, Maître Assistant à l'université de Biskra.

Ces membres de jury ont été des interlocuteurs précieux. On les remercie d'avoir accepté de faire partie du jury et avoir examiné ce travail avec un grand intérêt.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Théorie et Exemples</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Le Modèle Standard et la Supersymétrie</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Le Modèle Standard . . . . .	6
1.2.1	Insuffisances du Modèle Standard (MS) . . . . .	6
1.3	Supersymétrie . . . . .	7
1.3.1	Principe . . . . .	7
1.3.2	Motivation de la supersymétrie . . . . .	10
1.3.3	Formulation hamiltonienne de la MQSUSY . . . . .	11
1.3.4	Equation de Schrödinger stationnaire . . . . .	12
1.3.5	La SUSY pour l'étude de potentiels à une dimension . . . . .	15
1.4	Brisure de la SUSY . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Exemples d'utilisation de la supersymétrie</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	27

*Table des matières*

2.2	le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse . . . . .	30
2.3	Traitement exact des interactions du Potentiel Coulombien perturbé .	34
2.4	Potentiel carré infini . . . . .	42
<b>II</b>	<b>Calculs et Discussions</b>	<b>46</b>
<b>3</b>	<b>Determination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Etude analytique . . . . .	50
3.2.1	Etude du potentiel du type $V_1(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$ . . . . .	50
3.2.2	Etude du potentiel du type $V_2(r) = A_2r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$ . . . . .	56
<b>III</b>	<b>Conclusion Générale :</b>	<b>64</b>
	<b>References</b>	<b>68</b>

**Première partie**

**Théorie et Exemples**

# Introduction

Au début de 20<sup>ème</sup> siècle, de nombreux travaux ont été effectués sur une nouvelle théorie connue par la mécanique quantique. Cette dernière dont le domaine est très vaste a été développée dans le but de mettre au point des formalismes décrivant la structure fine de la matière. Des efforts considérables ont été consacrés par les théoriciens dans ce sens afin d'apporter des explications aux nombreux problèmes physiques soulevés à l'époque [1, 2, 3]. Inspiré par l'idée de Louis de Broglie, d'Einstein et de Max Planck, Erwin Schrödinger a établi sa célèbre équation ondulatoire de l'électron [4]. Par la suite, Dirac réécrit la forme relativiste de cette équation [5, 6] et introduit une méthode de factorisation de l'oscillateur harmonique en 1928.

Dés lors, Schrödinger note certaines symétries de son équation et fournit une méthode de factorisation des Hamiltoniens [4]. Après une décennie, Infeld et Hull [7] généralisent cette méthode pour d'autres systèmes quantiques.

Au début des années quatre vingts, la physique des particules élémentaires a tenté de faire une conception de la structure fondamentale de la matière en vue d'unifier les quatre forces de la nature. Cette théorie suggère d'utiliser l'hypothèse de partenaire pour chaque particule où chaque fermion a comme partenaire un boson et vice versa. Cette symétrie entre ces deux derniers est connue par la supersymétrie et abrégée par l'appellation 'SUSY'[8, 9, 10, 11, 12]. Appliquée au départ aux systèmes à haute énergie [8, 9] dont l'analyse expérimentale ne paraît pas évidente, le concept de la supersymétrie a rencontré des difficultés critiques pour s'imposer.

Afin de contourner cette contrainte, les physiciens ont pensé à tester cette supersymétrie en mécanique quantique 'SUSYQM'[10, 11] où des exemples d'application sont accessibles. En fait, le recours à la mécanique quantique était dans le but de traiter des systèmes de dimension (3D) où le test de la brisure de symétrie est possible. Au cours de ces essais via la SUSYQM, une mise au point de la propriété de l'inva-

riance de forme suggérée par Gendenshtein en 1983 [13] a montré qu'il est possible de trouver des solutions algébriques à certains potentiels qui n'ont pas de solutions analytiques. En effet, cette méthode attribuée à des systèmes quantiques a fait l'objet de beaucoup d'études [13 – 21]. Leur particularité de factorisation a permis de construire le formalisme général de cette théorie servant comme outil de base pour traiter d'autres cas plus compliqués [22, 23]. Le formalisme a contribué dans l'étude des systèmes quantiques et qui a conduit les physiciens à établir un nouveau domaine qui est connu maintenant par le nom de la mécanique quantique supersymétrique .

Les idées de la SUSY ont contribué à la naissance de plusieurs nouvelles approches dans différentes branches de la physique ; physique atomique, moléculaire, nucléaire, statistique, physique de solide et bien sur la mécanique quantique.

Dès le début des recherches sur la SUSY, il a été clair qu'elle n'était pas seulement un modèle pour tester les méthodes de la théorie des champs, mais aussi un outil intéressant et puissant par ses propres idées. Pour la première fois, les idées de la SUSY ont été appliquées en mécanique quantique non relativiste (SUSYQM) par Nicolai en 1976, et ensuite en 1981 par Edward Witten qui a proposé une classe de grands modèles unifiés au sein du cadre théorique de terrain. Plus précisément, il a considéré des modèles (en Moins de quatre dimensions) dans lesquelles SUSY pourrait être brisée dynamiquement. Cela a conduit à la découverte remarquable de SUSY en quantum Mécanique traitant de systèmes inférieurs ou égaux à trois dimensions., Nicolai et Witten [24] ont montré le lien avec la méthode de factorisation, proposée pour la première fois par Schrödinger pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène ; Ces travaux ont été généralisés par la suite par Infeld et Hull qui ont obtenu une large classe de potentiels exactement solubles en considérant six formes différentes de factorisation. (thèses état lié) Un développement considérable a été donné à ces travaux par plusieurs auteurs , et notamment après l'introduction du concept d'invariance de forme en 1983 par Gendenshtein [25]. Ce

concept est à l'origine de la découverte d'une large classe de potentiels analytiquement (algébriquement) solubles.

Cette nouvelle approche est devenue très célèbre par sa simplicité à obtenir le spectre des potentiels supersymétriques algébriquement et avec un moindre coût. Elle est maintenant généralisée et appliquée à la résolution de problèmes avec potentiels non hermitiens.

Ce mémoire a été intitulé une initiation à la supersymétrie, car le but est de nous introduire dans le monde incroyable de la supersymétrie, pour cela nous avons structuré ce travail en trois chapitres principaux,

Le premier chapitre dont nous avons essayé d'expliquer les différentes raisons qui on conduit à une approche supersymétrique puis d'introduire un formalisme de base de cette méthode.

Un deuxième chapitre où nous avons cité quelques exemples d'utilisations de ce formalisme sur différents potentiels,

Un troisième chapitre, dont nous avons essayé de déterminer les énergies et les fonctions propres pour deux potentiels différents en utilisant la MQSUSY,

Bien sûr en terminant par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Le Modèle Standard et la Supersymétrie

### 1.1 Introduction

Ce chapitre s'articule en deux parties

- **Le modèle standard** et ses limites dans un premier temps, nous allons rappeler les éléments essentiels du modèle standard en montrant qu'ils peuvent être compris comme étant les reliquats à basse énergie d'une théorie plus fondamentale décrivant la physique aux très hautes énergies. On précisera ensuite les limites du modèle standard en insistant sur le problème le plus quantitatif celui de la hiérarchie de masse.

- **La supersymétrie** ces limites indiquent l'existence d'une théorie plus fondamentale que nous allons essayer de décrire le cadre général de la solution qui s'est révélée être à la fois la plus cohérente et la plus riche : la supersymétrie [26].

## 1.2 Le Modèle Standard

Le Modèle Standard est le résultat de cinquante années d'efforts, de recherche et de mesures pour décrire la physique des particules élémentaires. Il s'appuie sur les solides piliers que sont la relativité restreinte, la mécanique quantique et la notion de symétrie. Le M.S comprend la description des 3 forces fondamentales (électromagnétique, faible et forte) à l'échelle microscopique et décrit la matière par l'intermédiaire de 3 familles de fermions. Ces fermions sont classés en quarks (sensibles aux interactions électromagnétiques, faibles et fortes), et en leptons (sensibles aux interactions électromagnétiques et faibles). Les bosons de jauge, quant à eux, véhiculent les interactions qu'elles soient de type électromagnétique (photon, de masse nulle), faible (3 bosons massifs  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z$ ) ou forte (8 gluons  $g$  de masses nulles). Toutes ces particules sont considérées comme ponctuelles dans les limites expérimentales actuelles  $\leq 10^{-18}m$ ) [27].

### 1.2.1 Insuffisances du Modèle Standard (MS)

Le constat expérimental précédent, en faveur du MS, confronté au constat théorique suivant est source d'étonnements dans la communauté des physiciens des particules. En effet, le MS n'explique pas, par exemple, les nombres quantiques des particules (charge électrique, isospin faible, couleur,...), ne prédit pas le spectre de masse ni n'inclut l'interaction gravitationnelle [28].

#### La masse du neutrino

Le Modèle Standard minimal confère une masse nulle aux neutrinos. Or, les travaux de Masatoshi Koshiba (2002) au détecteur SuperKamiokande au Japon ont permis de prouver qu'ils possédaient une masse. Il faut donc compléter le Modèle Standard pour obtenir une prédiction correcte de cette masse.

### **Les fermions**

Le Modèle Standard en tant que tel n'est pas capable d'expliquer l'existence des trois familles de fermions, ni de prédire leurs masses.

### **Le problème hiérarchique**

L'énergie typique de la Grande Unification (l'énergie pour laquelle les constantes de couplage des trois interactions fondamentales du Modèle Standard deviennent sensiblement équivalentes) se situe aux alentours de  $10^{16}\text{GeV}$ , alors que celle des particules du Modèle Standard se situe aux alentours de  $10^2\text{GeV}$ . On en vient alors à se demander comment un écart si grand est possible entre masses des particules et énergie de grande unification alors que la brisure de symétrie (apparaissant à l'énergie de grande unification) devraient être le phénomène provoquant l'apparition des masses.

### **La gravité**

À part la prédiction de l'hypothétique graviton qui n'a jamais encore été observé, la gravité est la seule interaction fondamentale à être la grande absente du Modèle Standard actuel [29].

## **1.3 Supersymétrie**

### **1.3.1 Principe**

#### **Origine des théories supersymétriques :**

Deux grandes classes de symétries sont à distinguer en Physique : Les symétries d'espace-temps (réunies dans le groupe de Poincaré) et les symétries internes qui se

classent en deux sous-catégories, à savoir les symétries globales (saveur, chirale) et les symétries de jauge (couleur, électrofaible). Les premières tentatives d'unification de ces deux genres de symétries furent non relativistes. Ces modèles concernaient les quarks et rassemblaient le groupe  $SU(2)$  de spin et  $SU(3)$  de saveur dans un groupe  $SU(6)$ . En 1967, Coleman et Mandula furent à l'origine d'un théorème [30] qui est le plus précis et le plus puissant d'une série de "no-go theorems" traitant des symétries possibles de la matrice  $S$ , dans le cadre de la théorie quantique des champs. D'après ce théorème, si  $G$  est un groupe de symétrie connexe de la matrice  $S$  qui contient le groupe de Poincaré, qui met un nombre fini de particules dans un supermultiplet et qui a des générateurs pouvant être représentés comme des opérateurs d'intégration dans l'espace des moments (avec des noyaux qui sont des distributions), si la matrice  $S$  n'est pas triviale et si les amplitudes de diffusion élastique sont des fonctions analytiques de  $s$  et  $t$  dans un voisinage de la région physique, alors  $G$  est localement isomorphe au produit direct du groupe de Poincaré devant être graduée (qui contiennent à la fois des commutateurs et des anticommutateurs) afin de ne pas violer la connection entre le spin et la statistique [31]. Une algèbre graduée comprend des générateurs  $B_i$ , appartenant à une algèbre de Lie, et des générateurs  $F_i$ , obéissant à des relations d'anti-commutation entre eux et à des relations de commutation avec les  $B_i$  [28].

$$[B_i, B_j] \sim B_k, [B_i, F_j] \sim F_k, \{F_i, F_j\} \sim B_k.$$

si l'on considère une extension du groupe poincaré, les  $B_i$  représentent les générateurs du groupe de Poincaré. La seconde relation permet à l'extension obtenue de ne pas être trivialement un produit direct entre le groupe de Poincaré et le groupe associé aux générateurs  $F_i$ . Ces générateurs  $F_i$ , ne commutant pas avec les transformations de Lorentz, changent le spin des particules. Les générateurs  $F_i$  possèdent donc un

spin contrairement aux  $Bi$ , d'où la notation ( $Bi$  pour bosonique et  $Fi$  pour fermionique). De plus, le théorème de Coleman-Mandula supprime la possibilité de prendre les  $Fi$  de spin entier. Ce nouveau groupe échange donc les fermions et les bosons introduisant ainsi une nouvelle symétrie. Notons que cette symétrie **Bose-Fermi** a aussi été introduite en 1971 par Neveu, Schwarz et Ramond, dans des modèles de cordes pour les fermions. Haag, Sohnius et Lopuszanski prouvèrent ensuite que l'algèbre de supersymétrie (ou superalgèbre) était la seule algèbre graduée généralisant le groupe de Poincaré, compatible avec une théorie quantique des champs [32], [33]. L'introduction de représentations linéaires de la supersymétrie dans le contexte de la théorie quantique des champs fut donnée la première fois par Wess et Zumino en 1974 [34]. Peu après, Ferrara, Salam, Strathdee, Wess et Zumino inventèrent le formalisme des superspaces et superchamps [35-39]. Depuis le début des années 1980, des efforts importants ont été investis dans le développement de la supersymétrie tant sur le plan expérimental que théorique. Aucun partenaire supersymétrique d'une particule du Modèle Standard, c'est à dire aucune particule supersymétrique, n'a cependant été découvert à ce jour [28].

Particle	Symbol	Spin	Superpartner	Symbol	Spin
quark	Q	1/2	Squark	$\tilde{q}$	0
Electron	e	1/2	Selectron	$\tilde{e}$	0
Muon	$\mu$	1/2	Smuon	$\tilde{\mu}$	0
Tauon	$\tau$	1/2	Stauon	$\tilde{\tau}$	0
W	W	1	Wino	$\tilde{W}$	1/2
Z	Z	1	Zino	$\tilde{Z}$	1/2
Photon	$\gamma$	1	Photino	$\tilde{\gamma}$	1/2
Gluon	g	1	Gluino	$\tilde{g}$	1/2
Higgs	H	0	Higgsino	$\tilde{H}$	1/2

Tableau 1 : Les particules du MS et leurs superpartenaires [40].

## Fermions et bosons

**Boson** : Les bosons sont des particules qui ne doivent pas satisfaire le principe d'exclusion de Pauli. Elles peuvent donc être nombreuses à occuper le même état quantique. On peut considérer des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation, qui ont respectivement pour effet de créer et annihiler une particule dans un état quantique donné.

**Fermion** : Par opposition aux bosons, les fermions sont des particules qui doivent satisfaire le principe d'exclusion de Pauli. Dans un état donnée, il ne peut donc y avoir que 0 ou 1 fermion. La Supersymétrie n'est rien d'autre qu'une symétrie supposée entre fermions (*spin*1/2) [28].

### 1.3.2 Motivation de la supersymétrie

Quelles sont aujourd'hui les motivations pour la supersymétrie? Tout d'abord, la supersymétrie (SUSY) apporte un cadre particulièrement propice aux théories de grande unification dites théories GUT (Grand Unification Theory) [41, 42, 43, 44] ainsi qu'aux modèles d'unification des forces incluant la gravitation vers  $10^{19}\text{GeV}$  : Les théories de cordes (supercordes si elles incluent SUSY). Dans le modèle GUT supersymétrique basé sur le groupe de jauge  $SU(5)$ , si l'échelle effective de brisure de la supersymétrie est de l'ordre du TeV, les trois constantes de couplage du Modèle Standard s'unifient à l'échelle d'unification MGUT, ce qui n'est pas le cas dans le modèle non supersymétrique GUT basé sur le groupe de jauge  $SU(5)$ . De plus, dans le modèle GUTSU(5) supersymétrique, l'échelle d'unification est repoussée de MGUT  $\approx 10^{15}\text{GeV}$  (cas du modèle GUTSU(5) non supersymétrique) à MGUT  $\approx 2.10^{16}\text{GeV}$  ce qui augmente le temps de vie du proton. Notons cependant que dans les théories

SUSY, la stabilité du proton est menacée par des opérateurs non renormalisables. Par ailleurs, SUSY offre un candidat naturel pour la masse cachée de l'Univers : La LSP (Lightest Supersymmetric Particle), qui est la particule supersymétrique la plus légère. En effet, la LSP est stable (excepté dans les scénarios dans lesquels la symétrie de R-parité est violée, et interagit faiblement avec la matière. Mais la principale motivation pour les théories SUSY reste la résolution du problème des hiérarchies d'échelles de masse comme nous l'avons déjà mentionné précédemment [28].

### 1.3.3 Formulation hamiltonienne de la MQSUSY

#### Commutation et anticommutation

Le commutateur de deux opérateurs  $A$  et  $B$  se calcule de la manière suivante [45]

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.1}$$

On définit également leur anticommutateur

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{1.2}$$

Sur ce principe et on se basant sur ce qui a été décrit précédemment, on peut également définir des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation (que nous noterons respectivement  $f^+$  et  $f$ ). Ceux-ci satisfont les relations d'anticommutation

$$\{f^\dagger, f\} = 1, \{f^\dagger, f^\dagger\} = \{f, f\} = 0 \quad (1.3)$$

De la même manière que les opérateurs bosoniques  $b$  et  $b^+$  satisfont les relations de commutation

$$[b, b^+] = 1, [b, b^+] = [b, b] = 0 \quad (1.4)$$

### 1.3.4 Equation de Schrödinger stationnaire

L'équation de Schrödinger pour l'évolution dans le temps de la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$  d'une particule repérée par son vecteur position  $\vec{r}$  s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H \psi(\vec{r}, t) \quad (1.5)$$

Où  $H$  est l'opérateur hamiltonien de la particule et  $\hbar$  la constante de Planck. Si la particule est en interaction avec un potentiel scalaire stationnaire et en l'absence de champ magnétique,  $H$  ne dépendra pas explicitement du temps et prendra la forme simple suivante :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \quad (1.6)$$

Où  $m$  est la masse de la particule, supposée constante,  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien et  $V(\vec{r})$  étant l'opérateur d'énergie potentielle associée au potentiel d'interaction. Les états physiques sont celles qui correspondent à des solutions pour lesquelles

$\psi(\vec{r}, t)$  est normalisable sur tout l'espace de définition de  $V(\vec{r})$ . Autrement dit  $\psi(\vec{r}, t)$  appartient à l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable :

$$\int d\vec{r} |\psi(\vec{r}, t)|^2 < \infty \quad (1.7)$$

Car  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  représente la densité de probabilité de présence. Pour résoudre une équation du type (1.5) dans le cas stationnaire, on utilise souvent la technique de séparation des variables d'espace et du temps. Ceci consiste à chercher les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps :

$$\psi(\vec{r}, t) = U(t) \psi(\vec{r}) \quad (1.8)$$

En substituant (1.8) dans (1.5), on obtient après séparation

$$\frac{i\hbar}{u(t)} \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(\vec{r})} H\varphi(\vec{r}) \quad (1.9)$$

Il s'agit d'une égalité entre deux expressions, dont l'une ne dépend que de l'espace et l'autre ne dépend que du temps, qui n'est satisfaite que si chaque membre est égal à la même constante. Ainsi, si on dénote cette constante par  $E$ ,  $u(t)$  et  $\varphi(\vec{r})$  seront donnés par

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E u(t) \quad (1.10)$$

dont la solution est simplement donnée par

$$u(t) = u(0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E(t)\right) \quad (1.11)$$

et

$$H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) que doit satisfaire la fonction  $\varphi(\vec{r})$  est une équation aux valeurs propres de l'opérateur  $H$  agissant dans l'espace de Hilbert. Par conséquent les valeurs propres  $E$  de l'Hamiltonien coïncident avec les énergies possibles que peut prendre la particule soumise aux interactions extérieures. Cette équation est appelée "équation de Schrödinger stationnaire".

Selon la forme de l'interaction, les solutions physiques peuvent être de deux natures différentes. Les solutions étendues dans l'espace, c'est-à-dire qui ne s'annulent qu'à l'infini, représentent les états de diffusion et sont associées à des énergies appartenant au spectre continu de la particule. Par contre, les solutions localisées dans l'espace, c'est-à-dire qui s'annulent à l'extérieur d'un domaine fermé et borné, représentent les états liés [46, 47] et correspondent à des énergies discrètes appartenant au spectre quantifié. Un système physique peut avoir uniquement des états de diffusion ou uniquement des états liés comme il peut avoir les deux à la fois. Pour un hamiltonien du type (1.6), on peut avoir une idée sur la nature du spectre directement à partir de la forme du potentiel si ce dernier est à une dimension de l'espace,  $V(\vec{r}) \equiv V(x)$ , ou central,  $V(\vec{r}) \equiv V(r)$ . Dans ces cas particuliers, comme en mécanique classique [48], l'existence d'un minimum pour le potentiel est une signature de l'existence d'états localisés et par conséquent d'un spectre d'énergies quantifiées dont le nombre dépend de la profondeur du minimum. Par ailleurs, on montre que dans ces

cas le spectre n'est pas dégénéré [47], de sorte qu'à chaque niveau d'énergie quantifiée correspond une seule fonction propre caractérisée par le nombre de zéro qu'elle possède sur l'intervalle de définition du potentiel [49]; la plus basse énergie lui correspond une fonction d'onde qui n'a aucun zéro et est appelé niveau fondamental, celle du premier niveau excité possède un seul zéro, et ainsi de suite, c'est à dire de façon générale la fonction d'onde du nième niveau excité possède exactement  $n$  zéro. Toutes les solutions ne satisfaisant pas ces conditions ne peuvent pas représenter des états physiques.

### 1.3.5 La SUSY pour l'étude de potentiels à une dimension

Cette section peut être considérée comme une première étape importante pour la découverte de nouveaux potentiels analytiquement solubles. Nous y verrons comment, à partir d'un potentiel donné, générer ses superpartenaires. Il est connu maintenant que l'Hamiltonien Supersymétrique  $HS$  d'un système de combinaison de bosons et fermions est écrit comme la somme de l'hamiltonien bosonique  $HB$  et fermionique  $HF$  [50].

$$HS = HB + HF \tag{1.13}$$

En substituant les superpartenaires hamiltoniens  $H_+$  et  $H_-$  [51].

$$H_s = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Pour l'Hamiltonien à une dimension  $H_1$ , il est redéfini comme  $H_+$  dans l'éq (1.14) Un des ingrédients principaux pour la résolution exacte des problèmes d'un potentiel dimensionnel est le raccordement entre les fonctions d'onde et le potentiel.

Ce n'est pas toujours évident de connaître exactement le potentiel (jusqu' à une constante) juste en connaissant la fonction d'onde de l'état fondamental (ou toute autre fonction d'onde d'un autre état). Le non donné à ces opérateurs n'est pas dépourvu de sens car celui de création augmente les valeurs propres, et d'annihilation les diminue.

Soit l'Hamiltonien d'une particule

$$H_1 = -\frac{\hbar^2 d^2}{2mdx^2} + V_1(x) \quad (1.15)$$

On va voir ici qu'il est possible de déterminer le potentiel  $V_1(x)$  si l'on connaît l'état fondamental [52]. Si  $\psi_0(x)$  (l'état fondamental) tend vers zéro pour  $x \rightarrow \pm\infty$  et ne possède aucun noeud, et si on choisit l'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien  $H_1$  comme étant zéro ( $E_0^{(1)} = 0$ ). Alors on a l'équation de Schrödinger de la fonction d'onde de l'état fondamental  $\psi_0(x)$  :

$$H_1\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2 d^2\psi_0}{2mdx^2} + V_1(x)\psi_0(x) \quad (1.16)$$

A partir de cette équation, on trouve facilement une expression de  $V_1$

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2\psi_0''(x)}{2m\psi_0(x)} \quad (1.17)$$

Une fois que nous réalisons ceci, il est maintenant très simple de factoriser l'hamiltonien en utilisant :

$$H_1 = A^\dagger A \quad (1.18)$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.19)$$

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.20)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation  $A^\dagger$  et  $A$  sont une généralisation d'opérateurs  $b^\dagger$  et  $b$  que nous avons cité précédemment. Ceci nous permet d'identifier

$$V_1 = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (1.21)$$

Cette équation est l'équation bien connue de Riccati. Où  $W(x)$  est généralement connu sous le nom de "superpotentiel" en littérature de la MQ SUSY. La solution pour  $W(x)$  en termes de fonction d'onde d'état fondamental est :

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad (1.22)$$

Cette solution est obtenue à condition que  $A\psi_0 = 0$  est satisfaite, nous avons automatiquement une solution  $H_1\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 = 0$ . La prochaine étape en construisant la théorie SUSY liée à l'hamiltonien original  $H_1$  est de définir l'opérateur  $H_2 = AA^\dagger$  obtenu en renversant l'ordre de  $A$  et de  $A^\dagger$ . Une peu de simplification prouve que l'opérateur  $H_2$  est en fait la correspondance hamiltonienne à un nouveau potentiel  $V_2(x)$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2 d^2}{2m dx^2} + V_2(x) \quad (1.23)$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W' \quad (1.24)$$

Les potentiels  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  sont connus en tant que les potentiels partenaires supersymétriques ou encore les potentiels "SUSY-partenaires".

Notez que les valeurs propres d'énergie de  $H_1$  et de  $H_2$  sont semi-définies positifs ( $E^{(1,2)} \geq 0$ ). Pour  $n > 0$ , l'équation de Schrödinger pour  $H_1$

$$H_1\psi_n^{(1)} = A^+A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \quad (1.25)$$

implique

$$H_2\left(A\psi_n^{(1)}\right) = AA^+A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\left(A\psi_n^{(1)}\right) \quad (1.26)$$

De la même façon, l'équation de Schrödinger pour  $H_2$

$$H_2\psi_n^{(2)} = A^+A\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \quad (1.27)$$

Implique

$$H_1\left(A^+\psi_n^{(2)}\right) = A^+AA^+\psi_n^{(2)} = E_n^{(1)}\left(A^+\psi_n^{(2)}\right) \quad (1.28)$$

D'après les éqs (1.22) et (1.28) et du fait que  $E_0^{(1)} = 0$ , il est clair que les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$  sont reliées par

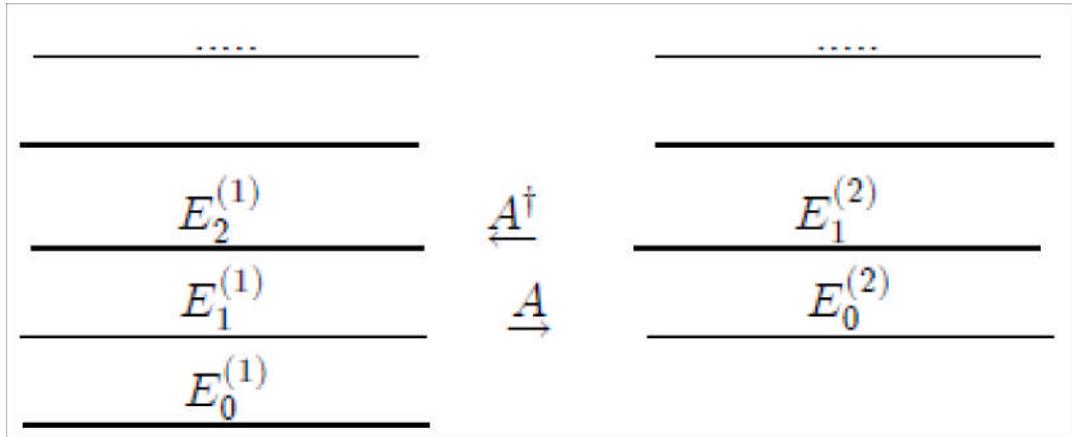
$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad (1.29)$$

$$E_0^{(1)} = 0 \quad (1.30)$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{A\psi_{n+1}^{(1)}}{\sqrt{E_{n+1}}} \quad (1.31)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \frac{A^+\psi_n^{(2)}}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \quad (1.32)$$

( $n = 0, 1, 2..$ ) Notez que si  $\psi_{n+1}^{(1)}$  ( $\psi_n^{(2)}$ ) de  $H_1(H_2)$  est normalisé alors la fonction d'onde  $\psi_n^{(2)}$  ( $\psi_{n+1}^{(1)}$ ) dans les éqs. (1.31) et (1.32) est également normalisé. De plus, ces relations nous montrent que si l'on connaît toutes les fonctions propres de  $H_1$ , on peut déterminer les fonctions propres de  $H_2$  en appliquant l'opérateur  $A$ , et si l'on connaît toutes les fonctions propres de  $H_2$ , on peut déterminer les fonctions propres de  $H_1$  (mis à part l'état fondamental, qui n'a pas de SUSY-partenaire) en appliquant l'opérateur  $A^\dagger$ . l'opérateur  $A(A^\dagger)$  convertit non seulement une fonction propre de  $H_1$  ( $H_2$ ) à une fonction propre de  $H_2(H_1)$  avec la même énergie, mais elle détruit également (créé) un noeud supplémentaire dans la fonction propre. Puisque la fonction d'onde de l'état fondamental de  $H_1$  est annihilée par l'opérateur  $A$  cet état n'a aucun partenaire de SUSY. Ainsi l'image que nous obtenons est que en sachant toutes les fonctions propres de  $H_1$  nous pouvons déterminer les fonctions propres de  $H_2$  en utilisant l'opérateur  $A$  et vice versa en utilisant  $A^\dagger$  nous pouvons reconstruire toutes les fonctions propres de  $H_1$  de ceux de  $H_2$  excepté l'état fondamental. Ceci est illustré dans la figure(1 – 1) [28].



**Fig (1-1) : Action des opérateurs  $A$  et  $A^+$**

La raison fondamentale de la dégénérescence des spectres de  $H_1$  et de  $H_2$  peut être comprise très facilement des propriétés de l’algèbre de SUSY. On peut maintenant écrire et considérer une matrice hamiltonienne SUSY de la forme

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Cette matrice hamiltonienne fait partie d’une algèbre fermée qui contient les opérateurs bosoniques et fermioniques avec des relations de commutation et d’anti-commutation (voir l’algèbre précédemment). Nous considérons les opérateurs supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  (déjà rencontrés lors de l’étude de l’algèbre SUSY) sous la forme  $Q = Af^\dagger$  et  $Q^\dagger = A^\dagger f$  dans un cadre général[53], ce qui est équivalent à

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

De par la généralisation des opérateurs de création et d'annihilation. Dans ce contexte, l'effet de  $Q$  et de  $Q^\dagger$  est de relier les fonctions d'onde de  $H_1$  et  $H_2$ .

Les relations suivantes de commutation et d'anticommutation décrivent la superalgèbre fermée  $sl(1/1)$  :

$$[H, Q] = [H, Q^+] = 0, \{Q, Q^+\} = H, \{Q, Q\} = \{Q^+, Q^+\} = 0 \quad (1.36)$$

Le fait que les supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  commutent avec  $H$  c'est le responsable de la dégénérescence. Les opérateurs  $Q$  et  $Q^\dagger$  peuvent être interprétés comme opérateurs qui changent des degrés de liberté bosoniques au fermioniques et vice versa. Ceci est élaboré au plus loin dans les exemples de l'oscillateur harmonique de SUSY (Voir réf [53, 54]).

### Factorisation et Hiérarchies d'Hamiltoniens

Dans ce qui précède nous avons trouver qu'une fois qu'on connaît la fonction d'onde de l'état fondamental qui correspond à  $H_1$ , on peut trouver le superpotentiel de l'éq (1.22). On sait aussi que la fonction d'onde de l'état fondamental du partenaire hamiltonien  $H_2$  est déterminée par le premier état excité  $H_1$  en appliquant l'opérateur  $A_1$ , donc on vient de voir qu'on peut déterminer  $H_2$  si l'on connaît  $H_1$ . On peut dès lors aussi refactoriser  $H_2$  pour déterminer son partenaire  $H_3$ , puis refactoriser  $H_3$  pour déterminer son partenaire  $H_4$ , et ainsi de suite. Chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent.

Pour simplifier on prend  $\hbar = 2m = 1$

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (1.37)$$

où

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x), \quad A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x), \quad W_1 = -\frac{d \ln(\psi_0^{(1)})}{dx} \quad (1.38)$$

Le partenaire SUSY Hamiltonien est donné alors

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (1.39)$$

où

$$V_2(x) = W_1^2 + W_1' + E_0^{(1)} = V_1(x) + 2W_1' = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)} \quad (1.40)$$

On doit introduire la notion  $E_n^{(m)}$ ,  $n$  est le niveau d'énergie et  $(m)$  refert le  $m$ 'ième hamiltonien  $H_m$ . Les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)}, \quad \psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_1 \psi_{n+1}^{(1)} \quad (1.41)$$

Maintenant commençant par  $H_2$  dont l'énergie fondamentale est  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ , on peut simuler généralement le troisième hamiltonien  $H_3$  comme le partenaire SUSY de  $H_2$ , d'après ceci nous pouvons écrire  $H_2$  sous la forme

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = A_2^+ A_2 + E_1^{(1)} \quad (1.42)$$

où

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad A_2^+ = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad W_2(x) = -\frac{d \ln(\psi_0^{(2)})}{dx} \quad (1.43)$$

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (1.44)$$

$$V_1(x) = W_2^2 + W_2' + E_1^{(1)} = V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^2 = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^1, \psi_0^2) \quad (1.45)$$

En outre

$$E_n^3 = E_{n+1}^2 = E_{n+2}^1 \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \psi_n^3 &= (E_{n+1}^1 - E_0^2)^{-\frac{1}{2}} A_2 \psi_{n+1}^2 \\ &= (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-\frac{1}{2}} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \psi_{n+2}^1 \end{aligned} \quad (1.47)$$

De cette manière, c'est clair que si l'Hamiltonien d'origine  $H_1$  a un nombre  $p$  d'états liés, aux valeurs propres  $E_n^{(1)}$  et aux fonctions propres  $\psi_n^{(1)}$  avec  $0 \leq n \leq (p-1)$ , alors on peut toujours générer une hiérarchie de  $(p-1)$  Hamiltoniens  $H_1, H_2, \dots, H_p$  telle que  $H_m$  (où  $m = 2, 3, \dots, p$ ) a le même spectre de valeurs propres que

$H_1$ , à part que  $H_m$  n'a pas les  $(m - 1)$  premières valeurs propres de  $H_1$  [52]. Pour  $m = 2, 3, \dots, p$ ,

$H_m$  est alors donné par la relation suivante :

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \quad (1.48)$$

où

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad W_m(x) = -\frac{d \ln(\psi_0^{(m)})}{dx} \quad (1.49)$$

on a aussi les relations

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \quad (1.50)$$

$$\psi_n^{(m)} = \left[ \left( E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-1}^{(2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left( E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \quad (1.51)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{(m-1)} \right) \quad (1.52)$$

Dans ce chemin, connaître tout les valeurs propres et fonctions propres de  $H_1$  on sera directement tout les valeurs propres d'énergie et fonctions propres de la hiérarchie de  $p - 1$  Hamiltonien.

## 1.4 Brisure de la SUSY

On vient de voir que si on connaît les solutions d'un hamiltonien, c'est-à-dire ses fonctions propres et ses valeurs propres, on peut obtenir les solutions de son partenaire. D'après (1.21) et (1.24) ces deux hamiltoniens partenaires sont construits à partir du superpotentiel  $W(x)$ , déduit de la fonction propre de l'état fondamental  $\varphi_0^-(x)$  du potentiel en question en inversant

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \log \varphi_0^-(x) \quad (1.53)$$

Le problème c'est qu'on général la fonction propre de l'état fondamental  $\varphi_0^-(x)$  n'est pas connue au préalable, et il faut donc se débrouiller pour résoudre l'équation non linéaire de Riccati (1.21) qui admet une infinité de solutions "mathématiques". Cependant après résolution, on doit sélectionner parmi toutes les solutions possibles celle qui génère la fonction propre de l'état fondamental. Autrement dit si on dénote cette solution par  $W_0(x)$ , il faudrait que l'expression

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_0(y) dy\right) \quad (1.54)$$

soit une fonction d'onde satisfaisant aux contraintes physiques, requises pour la fonction d'onde de l'état fondamental. En particulier, elle doit être de carré sommable et garantissant l'hermiticité de l'hamiltonien. Il se trouve que ces deux conditions sont satisfaites si on exige que l'expression (1.54) soit une fonction continue, bornée et s'annulant seulement aux extrémités du domaine de définition du potentiel en question. On doit donc avoir

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_0(y) dy\right)_{x \rightarrow a,b} \rightarrow 0 \quad (1.55)$$

Si la contrainte (1.55) est satisfaite on dit que la symétrie est non brisée, sinon il y'a brisure de symétrie. Notons que la technique supersymétrique utilisée comme méthode de résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire n'est applicable, que si la symétrie est non brisée, car en cas de brisure de symétrie elle peut conduire à des résultats complètement erronés [55].

# Chapitre 2

## Exemples d'utilisation de la supersymétrie

### 2.1 Introduction

Si le mouvement de la particule est confiné sur une droite, le potentiel est alors une fonction à une seule variable de l'espace. Dans ce cas l'équation de Schrödinger de la particule ne dépend que d'une seule variable de l'espace. L'hamiltonien du type (1.5), s'écrit alors [55]

$$H = -\frac{\hbar^2 d^2}{2mdx^2} + V(x) \quad (2.1)$$

De nos jours, ce type de problèmes de mécanique quantique à une dimension et d'une importance capitale en physique, dans le domaine du solide où de l'électronique. Parmi les potentiels les plus utilisés on cite le potentiel de l'oscilateur harmonique, le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse et le potentiel de Pöschl-Teller et

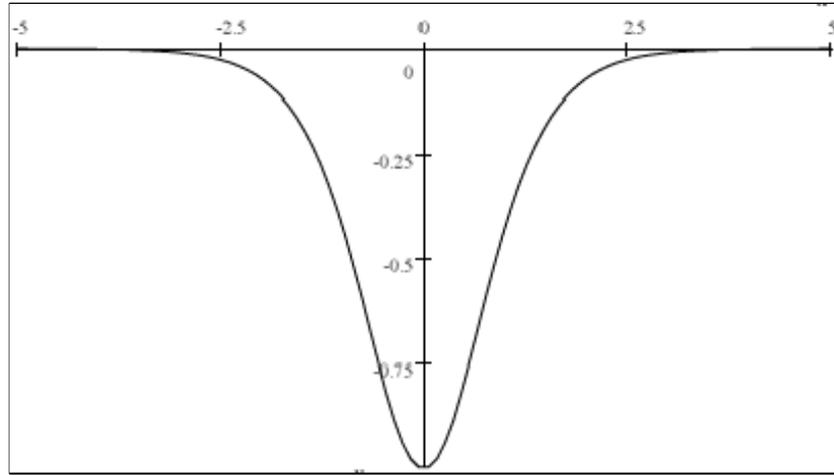
d'autres encore ;

- Le potentiel hyperbolique de Pöschl-Teller est donnée par

$$V(x) = \frac{-V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \quad (2.2)$$

où  $V_0$  et  $\alpha$  sont des constantes positives.

L'allure de ce potentiel pour  $\alpha = V_0 = 1$  est représentée sur la figure (2-1)



Le potentiel de hyperbolique de Pöschl-Teller à une dimension

Dans ce cas, il existe des solutions étendues correspondant à un spectre continu d'énergies positives,  $E \geq 0$ . Les solutions d'énergies strictement négatives,  $E < 0$ , sont toutes localisées et correspondent à un spectre quantifié selon la loi suivante [25]

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left[ -(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \right], \text{ pour } 0 \leq n < n_{\max} \quad (2.3)$$

avec

$$n_{\max} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} - 1 \right) \quad (2.4)$$

Ainsi, le nombre des états localisés dépend de la profondeur du potentiel,  $V_0$  et de sa largeur  $\alpha$ .

- On entend par “oscillateur harmonique quantique” un système dont l’amplitude de probabilité  $\psi(x, t)$  est solution de l’équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t) \quad (2.5)$$

où

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (2.6)$$

Par séparation des variables, nous sommes donc amenés à résoudre l’équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x) = E\phi(x) \quad (2.7)$$

Classiquement une particule dans un potentiel harmonique est toujours liée et confinée dans une région limitée de l’espace. Ainsi pour une énergie  $E$  (arbitraire mais fixée) la particule est confinée dans la région de l’espace où  $V(x) \leq E$ . En mécanique quantique une particule dont l’amplitude de probabilité est solution de l’équation (2.7) sera également dans un état lié. A la lumière des exemples traités dans les paragraphes précédents, nous nous attendons à une amplitude de probabilité de carré sommable (normalisable) qui ne s’annule pas dans la région classiquement interdite

mais y décroît suffisamment vite. Mais surtout nous nous attendons également à une quantification de l'énergie : l'équation (2.7) admet des solutions physiquement acceptables uniquement pour certaines valeurs discrètes de  $E$ . Effectivement c'est ce qui se passe. On trouve en effet que le spectre de l'hamiltonien (2.6) est donné par

$$E_n = (n + 1) \hbar\omega \quad (2.8)$$

avec  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

L'intervalle constant ( $\hbar\omega$ ) entre deux "niveaux successifs" d'énergie est une des caractéristiques de l'oscillateur harmonique. Le terme  $\frac{1}{2}\hbar\omega$

dans l'équation (2.8) est appelé "énergie au point zero".

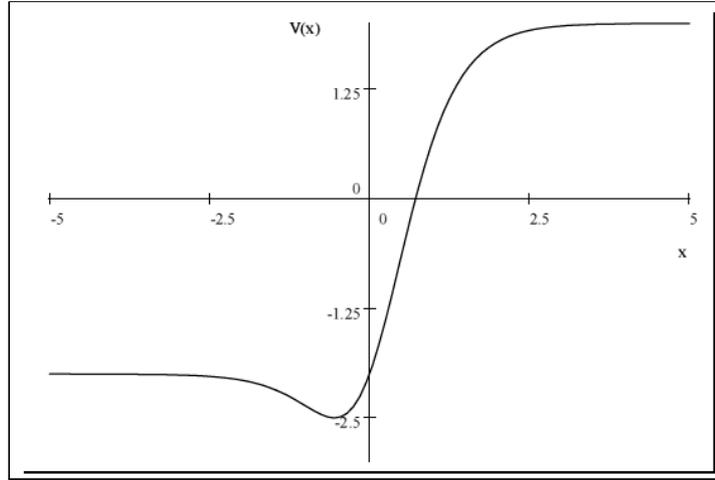
A présent nous allons voir trois autres exemples où le formalisme de la SUSY a bien été appliqué pour résoudre l'équation de Schrödinger.

## 2.2 le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse

Considérons le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse, donné par

$$V(x) = -\frac{2}{\cosh^2 x} + 2 \tanh x \quad (2.9)$$

défini sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  et dont l'allure est donnée dans la figure suivante :



Le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse.

Il est clair, d'après cette allure et du fait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = -2$ , que si des états liés existent, leurs énergies dans le système d'unités  $\hbar = 2m = 1$  seraient comprises entre  $-2$  et  $-2.5$  (le minimum du potentiel). En utilisant l'approche SUSY le potentiel  $V_-(x)$  est donné par

$$V_-(x) = W^2(x) - \frac{dW(x)}{dx} = V(x) = -\frac{2}{\cosh^2 x} + 2 \tanh x - E_0 \quad (2.10)$$

où  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental, qui est à priori inconnue, et  $W(x)$  le superpotentiel.

En principe, il faut résoudre l'équation différentielle de Riccati (2.3) pour obtenir  $W(x)$  mais ici on va juste le proposer et vérifier s'il convient ou pas. Considérons donc le choix

$$W_0(x) = a \tanh x + b \quad (2.11)$$

Chapitre 2. Exemples d'utilisation de la supersymétrie

où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres réels. En reportant (2.4) dans (2.3), on obtient

$$\frac{2}{\cosh^2 x} + 2 \tanh x - E_0 = -\frac{a(a+1)}{\cosh^2 x} + 2ab \tanh x + a^2 + b^2 \quad (2.12)$$

Par identification, on établit trois équations pour les paramètres  $a, b$  et  $E_0$ , qui sont

$$a(a+1) = 2 \quad (2.13)$$

$$ab = 1 \quad (2.14)$$

$$a^2 + b^2 = -E_0 \quad (2.15)$$

Les équations (2.6) et (2.7) serviront pour fixer  $a$  et  $b$  et l'équation (2.8) permettra de déterminer l'énergie de l'état fondamental. On trouve donc deux solutions distinctes dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableau suivant :

$a$	1	-2	
$b$	1	$-\frac{1}{2}$	
$E_0$	-2	$-\frac{17}{4}$	
$W_0(x)$	$\tanh x + 1$	$-2 \tanh x - \frac{1}{2}$	(2.16)
$\varphi_0(x)$	$\frac{\exp(-x)}{C \cosh x}$	$C \cosh^2 x$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_{0(x)}$	$2C$	$\infty$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}_{0(x)}$	0	$\infty$	

Chapitre 2. Exemples d'utilisation de la supersymétrie

où  $C$  est une constante de normalisation finie.

On constate donc que, pour les deux solutions possibles, d'une part l'énergie obtenue pour l'état fondamental est loin des valeurs permises et d'autre part la contrainte suivante n'est pas satisfaite.

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^x W_0(y)dy\right) \xrightarrow{x \rightarrow a, b^0} \quad (\text{Contrainte})$$

En conclusion, les superpotentiels qu'on a proposés ne conduisent pas à la solution physique du problème. Ainsi, s'il n'existe que ces deux solutions pour l'équation (2.3), la supersymétrie serait brisée pour le potentiel (2.2). Par ailleurs, si on veut que la symétrie ne soit pas brisée, on doit fixer les paramètres  $a$  et  $b$  de sorte que la fonction de l'état fondamental, qui est facilement obtenue sous la forme

$$\bar{\varphi}_0(x) \sim \exp\left(-\int (a \tanh y + b) dy\right) = \exp(-bx) (\cosh x)^{-a} \quad (2.17)$$

s'annule pour  $x \rightarrow \pm\infty$  (contrainte). On constate que  $\bar{\varphi}_0(x)$  satisfait cette condition si

$$(a + b) > 0 \text{ et } a > b \quad (2.18)$$

En dehors de ces limites, (2.4) conduit à une brisure de symétrie.

## 2.3 Traitement exact des interactions du Potentiel Coulombien perturbé

Une nouvelle méthode pour la solvabilité exacte des systèmes quantiques est discuté et utilisé pour obtenir des expressions analytiques en dimensions fermées pour les solutions exactes de l'atome d'hydrogène dans le potentiel externe  $\Delta V(r) = br + cr^2$  qui est basé sur la théorie de perturbation supersymétrique. L'un des problèmes de la mécanique quantique non relativiste est de trouver des solutions exactes à l'équation de Schrödinger pour les potentiels utilisés dans différents domaines de la physique. En particulier, les potentiels de Coulomb perturbés représentent les modèles simplifiés de nombreuses situations rencontrées dans les domaines atomique, moléculaire, de la physique des particules de la matière condensé. L'obtention de résultats analytiques a suscité beaucoup d'intérêts aux solutions de ces potentiels dans des dimensions arbitraires. Ces problèmes ont été étudié depuis des années et aucune solution générale n'a encore été trouvée[56].

$$V(r) = -a/r + br + cr^2 \tag{2.19}$$

Une telle classe de potentiels, sont des candidats possibles pour le potentiel de quarkonium ( le quarkonium désigne un meson sans saveur), comme l'a indiqué le spectroscopie des mesons. Dans le cas particulier de  $c = 0$  et  $b > 0$  de tels potentiels réduire au potentiel bien connu de charmonium (dont les particules élémentaires constituants sont des antiquarks et des quarks de charme). Outre sa pertinence dans spectroscopie lourde de quarkonium, cette classe de potentiels avec  $c = 0$  présente des applications en physique atomique. L'effet Stark dans un atome d'hydrogène dans un la dimension est donnée exactement par le potentiel de charmonium ( $b$  étant le paramètre de champ). La classe plus générale de ces potentiels avec  $c > 0$  est également

pertinentes en physique atomique. Cela pourrait être interprété comme le potentiel perçu par un électron d'un atome exposé à un mélange approprié d'électrique et magnétique des champs. De plus, les noyaux en présence d'un fond d'électron forment un système qui est important pour la physique de la matière condensée et pour le laboratoire et plasmas stellaires. Le potentiel entre deux noyaux inclus dans un tel plasma est approximativement Coulombien plus oscillateur harmonique, ce qui correspond à  $b = 0$  dans (2.9).

Comme la forme exacte de telles interactions est en grande partie inconnue, il est donc souhaitable d'étudier les propriétés analytiques générales d'une grande classe de potentiels dans (2.9). Dans ce contexte, l'analyticité des niveaux d'énergie pour ce genre de potentiels a été étudié de manière rigoureuse par de nombreux auteurs en utilisant théories différentes [57 – 70] en relation avec leurs applications potentielles en des problèmes de spectroscopie.

Dans cet exemple, nous introduisons une alternative, un formalisme simple pour un algébrique solution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel de Coulomb perturbé et trouver des solutions exactes dans l'espace N-dimensions. Le nouveau formalisme est basé sur le la mécanique quantique supersymétrique et utilise l'esprit de la théorie des perturbations, dans lequel il n'y a pas de place pour les inconvénients rencontrés dans les calculs avec les théories de perturbation disponibles dans la littérature. Le travail présenté dans cette Cette lettre précise également, dans le cadre puissant du formalisme actuel, que le Le potentiel de (2.9) est en fait un potentiel invariant de forme parfaitement soluble, contrairement à la revendication dans un travail récent [67] où les auteurs ont déclaré que la mécanique quantique supersymétrique donne des solutions exactes pour un seul état que pour le Potentiel de Coulomb perturbé dans (2.9) qui a été traité comme un potentiel quasi-exactement soluble. Introduisons maintenant le formalisme. L'équation d'onde radiale réduite de Schrödinger pour un potentiel sphérique symétrique dans l'espace N-dimensions

s'écrit

$$\frac{\hbar^2 \psi_n''(r)}{2m\psi_n(r)} = V(r) - E_n, \quad V(r) = V_{Es}(r) + \Delta V(r), \quad V_{Es}(r) = V_0(r) + \frac{\Lambda(\Lambda+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (2.20)$$

où  $V_0$  est l'un des potentiels parfaitement solubles, tels que le potentiel de coulomb et les potentiels d'oscillateur l'harmonique utilisés dans le présent travail ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  étant le nombre quantique radial, et  $\Lambda = (M - 3)/2$  avec  $M = N + 2l$ . Nous voyons que l'équation radiale de Schrödinger en  $\mathbf{N}$  dimensions a la même forme que la un en trois dimensions. Par conséquent, étant donné que le potentiel a la même forme quelle que soit la dimension, la solution en trois dimensions peut être utilisée pour obtenir la solution dans des dimensions arbitraires simplement par l'utilisation de la substitution  $l \rightarrow \Lambda$ . Dans l'équation ci-dessus,  $\Delta V$  représente la petite perturbation ( $= br + cr^2$ ) en supposant le paramètre de potentiel  $a$  est grand par rapport aux autres paramètres de couplage  $b$  et  $c$  dans (2.9) en tenant compte des interactions de Coulomb perturbées tandis que pour le cas de grand  $c$  et relativement petit  $a$  et  $b$  le potentiel de perturbation implique  $V(x) = -a/r + br$  conduisant à un potentiel d'oscillateur harmonique perturbé. Cette fonctionnalité importante sera utilisée plus tard dans ce travail pour tester les résultats. En utilisant l'esprit de la théorie standard de perturbation , nous mettons ici en avant un formalisme plus général pour traiter les problèmes de perturbation de la mécanique quantique efficacement dans un cadre simple, qui a déjà été discuté en détail à travers les travaux récents [71, 72] impliquant différentes applications du modèle.

Commencer avec

$$\psi_n(r) = \chi_n(r) \phi_n(r) \quad (2.21)$$

dans laquelle  $\chi_n$  est la fonction propre normalisée connue pour le potentiel parfaitement soluble dans (2.9) incluant le terme barrière et  $n$  est une fonction modératrice due à le potentiel perturbateur. En remplaçant (2.11) par (2.10), on obtient

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\chi_n''}{\chi_n} + \frac{\phi_n''}{\phi_n} + 2 \frac{\chi_n' \phi_n''}{\chi_n \phi_n} \right) = V - E_n \quad (2.22)$$

Avec les nouvelles définitions,

$$W_n = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\chi_n'}{\chi_n}, \quad \Delta W_n = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\phi_n'}{\phi_n} \quad (2.23)$$

on arrive à

$$\frac{\hbar^2 \chi_n''}{2m \chi_n} = W_n^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W_n' = V_{Es} - \epsilon_n \quad (2.24)$$

où  $\epsilon_n$  est la valeur propre du potentiel d'intérêt parfaitement résolu, et

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\phi_n''}{\phi_n} + 2 \frac{\chi_n' \phi_n'}{\chi_n \phi_n} \right) = \Delta W_n^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Delta W_n' + 2W_n \Delta W_n = \Delta V - \Delta \epsilon_n \quad (2.25)$$

dans laquelle  $\epsilon_n$  est le terme de correction pour l'énergie due à  $\Delta V$  et  $E_n = \epsilon_n + \Delta \epsilon_n$ . Par la suite, Eq. (2.12) réduit à

$$(W_n + \Delta W_n)^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} (W_n + \Delta W_n)' = V - E_n \quad (2.26)$$

Comme le spectre complet et les fonctions d'onde sont connus dans l'analyse forme pour les potentiels exactement solubles apparus dans (2.14), il faut ici résoudre (2.15)

obtenir sous une forme fermée les corrections à la fois des fonctions d'énergie et des ondes. En procédant avec le potentiel de Coulomb perturbé dans des dimensions arbitraires

$$V(r) = \left[ -\frac{a}{r} + \frac{\Lambda(\Lambda+1)}{2mr^2} \right] + br + cr^2 \quad (2.27)$$

et définir le superpotentiel, pour les solutions,

$$W_{n=0}(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{a}{(\Lambda+1)\hbar} - \frac{(\Lambda+1)\hbar}{\sqrt{2mr}} \quad (2.28)$$

menant à la première partie du potentiel dans le support, et de la littérature, la fonction d'onde normalisée correspondante et l'énergie sont,

$$\chi_{n=0}(r) = N_{0r^{\Lambda+1}} \exp \left[ -\frac{ma}{(\Lambda+1)\hbar^2 r} \right], \quad \epsilon_{n=0} = -\frac{ma^2}{2\hbar^2(\Lambda+1)^2} \quad (2.29)$$

Pour le potentiel perturbateur,  $\Delta V = br + cr^2$ , le seul choix physiquement acceptable est

$$\Delta W_{n=0}(r) = \sqrt{cr} \quad (2.30)$$

qui satisfait l'éq. (2.15) d'où l'on voit facilement que

$$\Delta \epsilon_{n=0} = \frac{M(M-1)b\hbar^2}{4ma}, \quad b = \frac{2a\sqrt{2mc}}{(M-1)\hbar} \quad (2.31)$$

Il est souligné que de telles solutions ont en général des contraintes sur le potentiel paramètres tels qu'ils sont apparus dans (2.20). Ces contraintes diffèrent pour chaque valeur propre, et par conséquent, diverses solutions ne correspondent pas au même potentiel et ne sont pas orthogonal. À partir de (2.21), la fonction de modération

$$\phi_{n=0}(r) = \exp \left[ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^r \Delta W_{n=0}(r) \right] = \exp \left[ -\frac{b(M-1)}{4a} r^2 \right] \quad (2.32)$$

Par conséquent, la fonction d'onde complète pour le potentiel  $n = 0$  dans (1.41) prend la forme

$$\psi_{n=0}(r) = \chi_n(r) \phi_{n=0}(r) = N_0 r^{\left(\frac{M-1}{2}\right)} \exp \left[ -\frac{2ma}{(M-1)\hbar} r - \frac{b(M-1)}{4a} r^2 \right] \quad (2.33)$$

Enfin, l'énergie exacte de l'état fondamental est

$$E_{n=0} = \epsilon_{n=0} + \Delta\epsilon_{n=0} = -\frac{2ma^2}{\hbar^2(M-1)^2} + \frac{M(M-1)b\hbar^2}{4ma} \quad (2.34)$$

Les résultats en équations (2.33) et (2.34) sont exacts et en accord avec ceux de [67, 68]. Comme indiqué précédemment, le potentiel dans (2.17) se comporte également comme un oscillateur harmonique dans le cas pour le  $c$  et relativement petit  $a$  et  $b$ . Cela permet de vérifier explicitement les résultats obtenus ci-dessus et la fiabilité du formalisme introculé. Pour cette considération, nous définissons les superpotentiels

$$W_{n=0}(r) = \sqrt{cr} - \frac{(\Lambda+1)}{\sqrt{2mr}}, \quad \Delta W_{n=0}(r) = \frac{b/2}{\sqrt{c}} \quad (2.35)$$

Chapitre 2. Exemples d'utilisation de la supersymétrie

qui donnent, par l'utilisation de l'un ou l'autre des équations. (2.14) et (2.15) ensemble, ou (2.16) seul,

$$\epsilon_{n=0} = \frac{\hbar\sqrt{c}}{\sqrt{2m}}(2\Lambda + 3), \quad \Delta\epsilon_{n=0} = -\frac{b^2}{4c} \quad (2.36)$$

qui sont exactement équivalents à ceux trouvés pour le cas de Coulomb perturbé dans (2.24). De même, avec (2.25), on arrive facilement à (2.23). Pour la généralisation, nous précisons encore que la technique actuelle est également applicable aux états excités, pour lesquels il faut utiliser l'invariance de forme la propriété et la relation entre les partenaires supersymétriques [73]

$$V^+(r, \alpha_0) = V^-(r, \alpha_1) + R(\alpha_1) \quad (2.37)$$

où  $\alpha_0 = \Lambda$  et  $\alpha_1 = f(\alpha_0) = \Lambda + 1$  sont les paramètres indépendants de la position tandis que  $V^\pm$  sont les partenaires supersymétriques

$$(W_{n=0} + \Delta W_{n=0})^2 \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(W_{n=0} + \Delta W_{n=0})' = V^\pm - E_{n=0}^- \quad (2.38)$$

Qui dépendent des superpotentiels dans (2.18) et (2.20) pour le cas  $a > b, c$ . Palier en gardant à l'esprit que le remplacement  $\Lambda$  de  $\Lambda + 1$  dans  $V^-(r, \Lambda)$  conduit à  $V^-(r, \Lambda, 1)$  et en maintenant les paramètres potentiels  $b$  et  $c$  comme dans [67, 68] tout en permettant le changement, voir éq. (2.21), nous obtenons par les calculs simples

$$E_n = E_n^- - \frac{b^2}{4c} + \frac{\hbar\sqrt{c}}{\sqrt{2m}}(2\Lambda + 3),$$

$$E_n^- = \sum_{k=1}^n R(\alpha_k) = -\frac{\hbar\sqrt{c}}{\sqrt{2m}} [(2\Lambda + 3) - 2(n + \Lambda) + 3]$$

$$E_n = -\frac{b^2}{4c} + \frac{\hbar\sqrt{c}}{\sqrt{2m}} [2(n + \Lambda) + 3], \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.39)$$

Ce qui est en accord avec [68] dans un espace à N dimensions et avec [65] en trois dimensions. En outre, il est facile de construire les fonctions d'ondes d'état  $n^{th}$  à partir de la fonction d'onde de l'état fondamental utilisant la définition supersymétrique [73]

$$\psi_{n+1}^-(r, \alpha_0) \propto A^+(r, \alpha_0) \psi_n^-(r, \alpha_1), \quad A^+(r, \alpha_0) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\psi'_{n=0}(r, \alpha_0)}{\psi_{n=0}(r, \alpha_0)} \right] \quad (2.40)$$

Nous concluons par deux remarques. Premièrement, le formalisme actuel peut être généralisé à toutes les forces polynomiales

$$V_m(r) = Ar^{2m} + Br^{2m-1} + \dots + F/r + G/r^2 \quad (2.41)$$

comme traitement alternatif mais simple aux autres travaux [74], et d'autres références. Avec la prise en compte du problème de Coulomb perturbé, nous avons clarifié que la solution explicite de l'équation de Schrödinger associée à la famille potentielle en (2.30) reste possible dans un parallèle presque complet avec  $m = 1$ . Dans cette voie, les travaux sont en cours. La deuxième remarque que nous souhaitons faire est que, mis à part l'intérêt inhérent on a dans l'existence de solutions exactes,

les résultats rapportés ici sont probables être utile dans les calculs de perturbation pour les énergies de l'état excité et les fonctions d'ondes, en particulier si la méthode d'autres théories de perturbation est apparue dans la littérature pour évaluer les corrections de second ordre et d'ordre supérieur peut être étendue pour couvrir de tels cas. Dans ce contexte, nous pensons que la forme simple de notre nouvelle approche de ces problèmes ouvre une nouvelle direction de développement vers de nombreux applications pratiques à construire et à apprécier.

## 2.4 Potentiel carré infini

Examinons un potentiel bien connu, à savoir le puits carré infini, et déterminons son potentiel de partenaire SUSY. Considérons une particule de masse  $\mathbf{m}$  dans un puits carré infini potentiel de largeur  $\mathbf{L}$

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, & 0 \leq x \leq L, \\ &= \infty, & 0 < x < \infty, \quad x > L \end{aligned} \tag{2.42}$$

On sait que la fonction d'onde d'état fondamental est normalisée

$$\psi_0^{(1)} = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L \tag{2.43}$$

et l'énergie de l'état fondamental est

$$E_0 = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2} \tag{2.44}$$

Chapitre 2. Exemples d'utilisation de la supersymétrie

Soustraction de l'énergie de l'état fondamental pour pouvoir factoriser l'hamiltonien , les valeurs propres énergétiques de  $H_1 = H - E_0$  sont

$$E_n^{(1)} = \frac{n(n+2)}{2nL^2} \hbar\pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

et les fonctions propres normalisées de  $H_1$  sont les mêmes que celles de  $H$ , Le superpotentiel de ce problème est facilement obtenu en utilisant l'équation

$$\psi_n^{(1)} = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.46)$$

Le superpotentiel de ce problème est facilement obtenu en utilisant des équations. (1.22) et (2.33)

$$W(x) = -\frac{\hbar\pi}{\sqrt{2m}} \cot(\pi x/L) \quad (2.47)$$

et donc le potentiel de partenaire supersymétrique  $V_2$  est

$$V_2(x) = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2} [2 \cos^2(\pi x/L) - 1] \quad (2.48)$$

Les fonctions d'onde pour  $H_2$  sont obtenues en appliquant l'opérateur  $A$  aux fonctions d'onde de  $H_1$ . En particulier, nous constatons que les premières fonctions d'ondes d'état excitée normalisées sont

$$\psi_0^{(2)} = -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2(\pi x/L), \quad \psi_1^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{L}} \sin(\pi x/L) \sin(2\pi x/L) \quad (2.49)$$

Ainsi, nous avons montré en utilisant SUSY que deux potentiels assez différents correspondant à  $H_1$  et  $H_2$  ont exactement les mêmes spectres, sauf que  $H_2$  est lié de

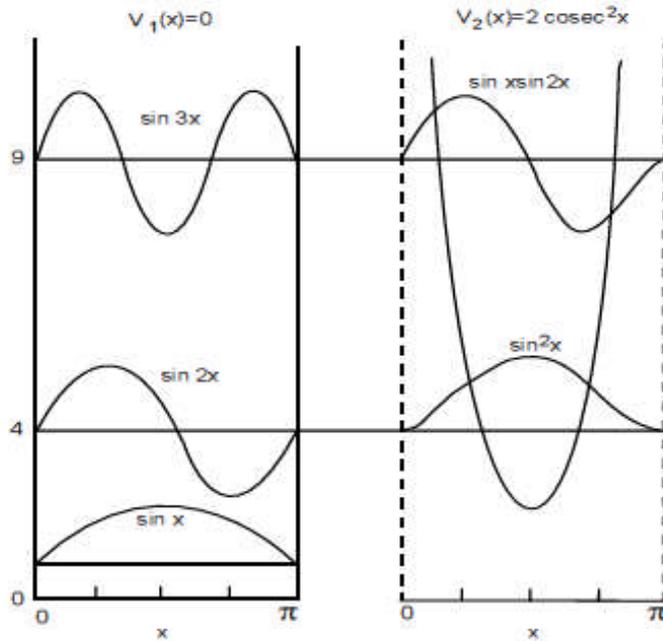
Chapitre 2. Exemples d'utilisation de la supersymétrie

moins. Etat. La figure (2-2) montre les potentiels de partenaires supersymétriques  $V_1$  et  $V_2$  et le premier peu de fonctions propres. Pour plus de commodité, nous avons choisi  $H = \pi$  et  $\hbar = 2m = 1$  Nous pouvons maintenant commencer à partir de  $H_2$  et utiliser sa fonction d'onde d'état fondamental donnée par l'éq (2.39), le superpotentiel correspondant s'avère être

$$W_2(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{2\pi}{L} \cot(\pi x/L) \quad (2.50)$$

et donc le potentiel partenaire  $V_3(x)$  se révèle être

$$V_3(x) = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2} [6 \operatorname{cosec}^2(\pi x/L) - 4] \quad (2.51)$$



Le potentiel de puits carré infini  $V = 0$  de largeur  $\pi$  et son partenaire SUSY

$$V = 2 \operatorname{cosec}^2 x \quad \text{En unités } \hbar = 2m = 1$$

En utilisant le superpotentiel  $W_2$  ci-dessus, la fonction d'onde d'état fondamental de  $V_3(x)$  est facilement calculé en utilisant éq. (1.41)

$$\psi_0^{(3)}(x) \propto \sin^3(\pi x/L) \quad (2.52)$$

De cette façon, on peut construire une famille de paramètres (discrète) de potentiels donnée par ( $p = 0, 1, 2$ )

$$V_{p+1}(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [p(p+1) \cos^2(\pi x/L) - p^2] \quad (2.53)$$

et c'est facile de voir que le spectre est donné par

$$E_n^{(p+1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n(n+2p+2), \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.54)$$

tandis que ses fonctions propres peuvent être facilement dérivées récursivement de celles de carrés infinis. Par exemple, sa fonction d'onde d'état fondamental est

$$\psi_0^{(p+1)} \propto \sin^{(p+1)}(\pi x/L) \quad (2.55)$$

De cette manière, nous avons montré comment générer toute une classe de nouveaux potentiels résolubles en à partir d'un problème analytiquement résolu. Jusqu'ici, nous avons explicitement inclus tous les facteurs tels que  $\hbar$ ,  $m$  etc. Cependant, à partir de maintenant par la suite, pour plus de simplicité (sauf indication contraire), nous pouvons travailler dans des unités où  $\hbar = 1$  et  $2m = 1$  [75].

## Deuxième partie

### Calculs et Discussions

# Chapitre 3

## Determination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

### 3.1 Introduction

Les potentiels singuliers ont beaucoup attiré l'attention ces dernières années pour une variété de raisons, deux d'entre elles étant que :

(i) la théorie de perturbation ordinaire a échoué pas mal de fois pour de tels potentiels, et (ii) en physique, on rencontre souvent des phénomènes phénoménologiques comme les potentiels fortement singuliers à l'origine tels que certains types de nucléon, les modèles singuliers de champs en dimensions nulles, etc. Ainsi, une étude de tels potentiels présente un intérêt, tant du point de vue fondamental que appliqué. L'un des problèmes de la mécanique quantique non relativiste est de trouver des solutions exactes à l'équation de Schrödinger pour les potentiels utilisables dans différents domaines de la physique. Récemment, plusieurs auteurs ont obtenu des solutions exactes pour le potentiel de puissance inverse du quatrième ordre utilisant des méthodes analytiques [76 – 78]. L'intérêt est principalement dû à la large

applicabilité de ces types de potentiels à puissance inversée . Certains domaines d'intérêt sont la diffusion d'ions d'atome [79], plusieurs interactions entre les atomes [80], physique des basses énergies [81], interactions interatomiques dans physique moléculaire [82] et physique de l'état solide [83]. L'avènement de la supersymétrie a eu un impact significatif sur la théorie physique dans un certain nombre de disciplines distinctes. Un sous-champ qui a reçu beaucoup d'attention est la mécanique quantique supersymétrique [84] dans laquelle les Hamiltoniens de systèmes distincts sont liés par une algèbre de supersymétrie. Dans ce travail, nous sommes concernés par, via la mécanique quantique supersymétrique, clarifier la relation entre deux systèmes distincts ayant un potentiel d'interaction de type (1) ( $V_1(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$ ) et interagissant à travers des potentiels pairs uniformes qui ont été largement utilisés dans une variété de domaines, par exemple. voir [81, 85]. Au cours des dernières années, les potentiels anharmoniques d'ordre supérieur ont attiré plus d'attention des physiciens et des mathématiciens afin de comprendre en partie un phénomène récemment découvert, tel que les transitions de phase structurales [86], la formation de polarons dans les solides [87], concept de faux vide dans la théorie des champs [88], fibre optique [89] et physique moléculaire [90]. De plus, il y a environ 60 ans, Michels et autres [91] ont proposé l'idée de simuler l'effet de la pression sur un atome par l'enfermant dans une boîte sphérique impénétrable. Depuis ce temps, il y a eu un grand nombre de publications, pour un aperçu, voir [92], traitant des études sur systèmes quantiques enfermés dans des boîtes, qui impliquent un potentiel d'interaction est un cas particulier ( $B_2 = 0$ ) de (2) (où le type (2) est  $V_2(r) = A_2r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$ ). Ce domaine a reçu une impulsion récente années en raison de la fabrication de points quantiques semi-conducteurs [93]. La motivation principale de ce travail est de révéler l'existence d'un lien entre potentiels de type (1) et (2) (dans un espace à N dimensions, et entre leurs potentiels cas particuliers comme un potentiel de type Mie (ou Kratzer) [94] et pseudo-harmonique (ou Goldman-Krivchenkov) potentiel [95] dans des dimensions plus élevées, qui à notre la connaissance n'a jamais été publiée

### Chapitre 3. Détermination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

dans la littérature. Par contre, avec l'avènement de la technique de croissance pour la réalisation du quantum semi-conducteur puits, la mécanique quantique des systèmes de petite dimension est devenue un élément majeur domaine de recherche.

Le travail présenté dans ce chapitre serait également utile à la littérature car les résultats peuvent facilement être étendus à des dimensions inférieures.

Dans ce chapitre nous allons proposer deux potentiel du type (1) et (2)  $V_1(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$  et  $V_2(r) = A_2r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$  dont les énergies et les fonctions d'onde sont disponibles comme référence par d'autre méthodes d'investigation. Ces potentiels ont été le sujet de plusieurs travaux [96] – [103],

Nous allons maintenant introduire ce potentiel dans l'équation radiale de Schrödinger qui comme nous l'avons déjà prédis à la même forme que l'équation de Schrödinger unidimensionnelle. Ainsi nous pouvons essayé d'introduire les notions de la MQSUSY à ce système. La solution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel central  $V(r)$  s'écrit comme suit [28] :

$$U(r) = U_0(r) U_\infty(r) U_{susy}(r) \quad (3.1)$$

où  $U_0(r)$  est la solution au comportement à l'origine ( $r \rightarrow 0$ ),  $U_\infty(r)$  est la solution au comportement asymptotique ( $r \rightarrow \infty$ ) et  $U_{susy}(r)$  la fonction inconnue que nous allons trouver par la méthode SUSY. Cette solution est liée aux paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  du potentiel.

Rapelons l'équation de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right] U(r) = EU(r) \quad (3.2)$$

## 3.2 Etude analytique

### 3.2.1 Etude du potentiel du type $V_1(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$

On injecte l'expression du potentiel  $V(r)$  dans l'équation (3.2), il vient :

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4} - E \right) \right] U(r) = 0 \quad (3.3)$$

La nécessité de prendre les unités :  $2m = \hbar = 1$  n'est qu'un choix de convenance.

L'équation différentielle devient :

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \left( \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4} - E \right) \right] U(r) = 0$$

On pose :  $A_1 \rightarrow \alpha^2 r^2$

L'équation différentielle devient :

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \left( \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4} - E \right) \right] U(r) = 0$$

En introduisant une nouvelle variable  $x$  telle que  $x = \alpha r$  on obtient

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2} + \left( x + \frac{B_1}{x^2}\alpha + \frac{C_1}{x^3}\alpha^2 + \frac{D_1}{x^4}\alpha^3 - E/\alpha \right) \right] U(x) = 0$$

Etude du comportement asymptotique ( $x \rightarrow \infty$ )

### Chapitre 3. Détermination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

L'équation se réduit et on a :

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x\right) U_\infty(x)$$

La solution de cette équation :

$$U_\infty(x) \propto \exp - \left(\frac{x^3}{6}\right)$$

Etude du comportement à l'origine ( $x \rightarrow 0$ )

$$U_0(x) \propto \exp - \left(\frac{\beta}{x^2}\right)$$

La solution générale se met sous la forme

$$\left[U_\infty(x) \propto \exp - \left(\frac{x^3}{6}\right)\right] \left[U_0(x) \propto \exp - \left(\frac{\beta}{x^2}\right)\right] U_s(x)$$

où  $\beta$ , est un paramètre

$$U(x) = U_s \exp - \left(\frac{x^3}{6} + \frac{\beta}{x^2}\right) \quad (3.4)$$

L'expression (3.3), sera :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(E - \frac{A_1}{r} - \frac{B_1}{r^2} - \frac{C_1}{r^3} - \frac{D_1}{r^4}\right)\right] U(r) = 0 \quad (3.5)$$

On pose

$$-\frac{d^2}{dr^2}U(r) = (E - V(r))U(r) \quad (3.6)$$

Nous pouvons proposer selon la MQ SUSY l'hamiltonien  $H_1$

$$H_1U(r) = \left(A_1^+A_1 + E_0^{(1)}\right)U(r) = \left(-\frac{d^2}{dr^2} + V(r)\right)U(r) \quad (3.7)$$

$$H_1 = A_1^+A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) \quad (3.8)$$

On peut écrire le potentiel sous la forme

$$V(r) = W_1^2(r) - \frac{dW(r)}{dr} \quad (3.9)$$

de l'éq (3.5) et (3.8) on peut déduire

$$V_1(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4} - E_0^{(1)}$$

On propose le superpotentiel  $W_1(r)$  sous la forme

$$W_1(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{d}{r^3} + f \quad (3.10)$$

$$V_1(r) = \frac{1}{r^3}(2b + 2fd + 2ab) + \frac{1}{r^4}(b^2 + 3d + 2ad) + \frac{1}{r^2}(a^2 + a + 2fb) + f^2r^0 + d^2\frac{1}{r^6} + 2fa\frac{1}{r} + 2bd\frac{1}{r^5} = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4} - E_0^{(1)}$$

Chapitre 3. Détermination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

Les relations entre les paramètres de cette équation satisfirent les définitions de la SUSY

$$\left\{ \begin{array}{l} 2fa = A_1 \\ (a^2 + a + 2fb) = B_1 \\ (2b + 2fd + 2ab) = C_1 \\ (b^2 + 3d + 2ad) = D_1 \\ -f^2 = E_0^1 \\ 2bd = 0 \\ d^2 = 0 \end{array} \right.$$

Les relations précédentes seront

$$a = \frac{C_1}{\pm 2\sqrt{D_1}} - 1 \quad (3.11)$$

$$b = \pm\sqrt{D_1} \quad (3.12)$$

$$d = 0 \quad (3.13)$$

$$f = A_1 \frac{\sqrt{D_1}}{C_1 - 2\sqrt{D_1}} \quad (3.14)$$

$$E_0^{(1)} = \left( A_1 \frac{\sqrt{D_1}}{C_1 - 2\sqrt{D_1}} \right)^2 \quad (3.15)$$

La contrainte entre  $D_1$  et  $C_1$  sera

$$-\frac{1}{\sqrt{D_1}} \left( 2D_1 - 4D_1\sqrt{D_1} + C_1^2 \right) = 0 \quad (3.16)$$

alors on peut écrire le superpotentiel comme

$$W_1(r) = \frac{1}{2r^2\sqrt{D_1}(C_1 - 2\sqrt{D_1})} \begin{pmatrix} 2C_1D_1 + 4rD_1 - 4D_1^{\frac{3}{2}} + \\ C_1^2r + 2A_1r^2D_1 - 4C_1r\sqrt{D_1} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

et selon la relation (1-38) nous avons

$$U_0^1(r) = N_0^1 \exp - \int W_1(r) dr \quad (3.18)$$

$$U_0^1(r) = N_0^1 \exp \left( - \int \frac{1}{2r^2\sqrt{D_1}(C_1 - 2\sqrt{D_1})} \begin{pmatrix} 2C_1D_1 + \\ 4rD_1 - 4D_1^{\frac{3}{2}} + C_1^2r + \\ 2A_1r^2D_1 - 4C_1r\sqrt{D_1} \end{pmatrix} dr \right)$$

donc

$$U_0^1(r) = N_0^1 \exp \left( \frac{1}{4rD_1 - 2r\sqrt{D_1}C_1} \begin{pmatrix} 4D_1^{\frac{3}{2}} - 2D_1C_1 \\ +4rD_1 \ln r + rC_1^2 \ln r + \\ 2r^2D_1A_1 - 4r\sqrt{D_1}C_1 \ln r \end{pmatrix} \right)$$

et

$$E_0^{(1)} = -f^2 \quad (3.19)$$

$$A_1 = 2fa \quad (3.20)$$

$$A_1 = -\left(\frac{C_1}{\pm 2\sqrt{D_1}} - 1\right)\sqrt{E_0^{(1)}} \quad (3.21)$$

$$U_0^1(r) = N_0^1 \exp \left( \frac{1}{4rD_1 - 2r\sqrt{D_1}C_1} \begin{pmatrix} 4D_1^{\frac{3}{2}} - \\ 2D_1C_1 + 4rD_1 \ln r + rC_1^2 \ln r \\ + 2r^2D_1 \left( -\left(\frac{C_1}{2\sqrt{D_1}} - 1\right) \sqrt{E_0^{(1)}} \right) \\ -4r\sqrt{D_1}C_1 \ln r \end{pmatrix} \right) \quad (3.22)$$

Le résultat obtenu après l'application de potentiel  $V_1$  dans l'équation de Schrödinger après avoir placé la superpotentiel correspondant est un résultat quasi-exact, c'est-à-dire que l'énergie résultante est liée à la variable  $A_1$

dans le cas  $a < 0$  et sous les contraintes précédentes

$$A_1 = -\left(-\frac{C_1}{2\sqrt{D_1}} - 1\right) \sqrt{E_0^{(1)}} \quad (3.23)$$

Les résultats obtenus concordent avec ceux de la réf. [77, 78, 106] pour les trois dimensions. Remarque cela afin de conserver la solution

bien comportée à  $r \rightarrow 0$  et en  $r \rightarrow \infty$  nous avons choisie  $b = \sqrt{D_1}$

Les expressions obtenues ci-dessus peuvent facilement être étendues aux dimensions inférieures. Par exemple, on peut facilement vérifier que nos solutions bidimensionnelles ( $N = 2, \ell \rightarrow \ell - 1/2$ ) pour le potentiel de puissance inverse considéré sont en excellent accord avec la littérature [106]. Les solutions d'état fondamental dans des dimensions arbitraires pour le Coulomb ( $B_1 = C_1 = D_1 = 0$ ), et pour le Kratzer ( $C_1 = D_1 = 0$ ) [94], et pour une puissance inverse  $C_1 = 0$  [76, 77] on peut également trouver des potentiels à partir du au-dessus des prescriptions.

Kasap [107] et ses collègues ont utilisé la mécanique quantique supersymétrique pour trouver des résultats exacts plus précisément les solutions des potentiels de

Kratzer et pseudoharmonique dans trois dimensions. Leurs résultats peuvent être facilement généralisés à N dimensions.

L'étude des oscillateurs anharmoniques a suscité un intérêt considérable en raison de ses diverses applications, notamment en physique moléculaire. Le potentiel Morse est couramment utilisé pour un oscillateur anharmonique. Cependant, sa fonction d'onde ne disparaît pas à l'origine, mais ceux de type Mie et pseudoharmoniques

les potentiels font. Le potentiel de type Mie possède les caractéristiques générales du véritable énergie d'interaction, inter-atomique et inter-moléculaire, et propriétés dynamiques de solides [108]. D'autre part, le potentiel pseudoharmonique peut être utilisé pour la spectre d'énergie de systèmes linéaires et non linéaires [96]. Le type Mie et pseudo-harmonique les potentiels sont deux types particuliers de puissance singulière analytiquement résoluble car ils ont la propriété d'invariance de forme. Partant de la forme générale du potentiel de type Mie

### 3.2.2 Etude du potentiel du type $V_2(r) = A_2r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$

On injecte l'expression du potentiel  $V(r)$  dans l'équation (3.2), il vient :

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( A_2r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6} - E \right) \right] U(r) = 0 \quad (3.24)$$

La nécessité de prendre les unités :  $2m = \hbar = 1$  n'est qu'un choix de convenance.

On pose  $\lambda = E$  et  $\alpha^2 = A_2$

L'équation différentielle devient :

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + (\alpha^2r^2 + B_2r^{-2} + C_2r^{-4} + D_2r^{-6} - \lambda) \right] U(r) = 0$$

Chapitre 3. Détermination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

En introduisant une nouvelle variable  $x$  telle que  $x = r\alpha$  on obtient

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2} + \left( x^2 + B_2\alpha x^{-2} + C_2\alpha^2 x^{-4} + D_2\alpha^3 x^{-6} - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \right] U(x) = 0$$

Etude du comportement asymptotique ( $x \rightarrow \infty$ )

L'équation se réduit et on a :

$$\left( -\frac{d}{dx^2} + x^2 \right) U_\infty(x) = 0$$

La solution de cette équation :

$$U_\infty(x) \propto \exp - \left( \frac{x^2}{2} \right)$$

Etude du comportement à l'origine ( $x \rightarrow 0$ )

$$U_0(x) \propto \exp - \left( \frac{\beta}{x^2} \right)$$

La solution générale se met sous la forme

$$U(x) = \left[ \exp - \left( \frac{x^2}{2} \right) \right] \left[ \exp - \frac{\beta}{x^2} \right] U_{susy}(x)$$

où  $\beta$ , est un paramètre.

On pose :  $l = 0$  et  $\alpha = \sqrt{a} = 1 \rightarrow x = r$  , on aura alors :

$$U(r) = \left( \exp - \left( \frac{r^4 + 2\beta}{2r^2} \right) \right) U_{susy} \quad (3.25)$$

L'expression (3.3), sera :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \left( E - A_2 r^2 - \frac{B_2}{r^2} - \frac{C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^6} \right) \right] U(r) = 0 \quad (3.26)$$

On pose

$$-\frac{d^2}{dr^2} U(r) = (E - V(r)) U(r) \quad (3.27)$$

Nous pouvons proposer selon la MQ SUSY l'hamiltonien  $H_1$

$$H_1 U(r) = \left( A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} \right) U(r) = \left( -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) \right) U(r) \quad (3.28)$$

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) \quad (3.29)$$

On peut écrire le potentiel sous la forme

$$V(r) = W_2^2(r) - \frac{dW_2(r)}{dr} \quad (3.30)$$

de l'éq (3.5) et (3.8) on peut déduire

$$V_2(r) = A_2 r^2 - \frac{B_2}{r^2} - \frac{C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^6} - E_0^{(1)}$$

on propose le superpotentiel  $W_2(r)$  sous la forme

$$W_2(r) = ar + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^3} \quad (3.31)$$

$$V_2(r) = (2ab - a)r^0 + a^2 r^2 + (b^2 + b + 2ac) \frac{1}{r^2} + (2bc + 3c) \frac{1}{r^4} + \frac{c^2}{r^6} = r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6} - E_0^{(1)}$$

Les relations entre les paramètres de cette équation satisfient les définitions de la SUSY

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = \pm 1 \\ b = \frac{C_2 - 3c}{2c} \\ c = \pm \sqrt{D_2} \\ a(2b - 1) = -E_0^{(1)} \\ b^2 + b + 2ac - B_2 = 0 \end{array} \right.$$

En étudiant ces relations nous allons avoir plusieurs cas selon le signe de  $a$  et  $c$ , et la détermination de ces valeurs sera en fonction du comportement à l'origine et asymptotique de la fonction d'onde donc le cas qui nous intéresse sera en définitive  $a = +1$  et  $c = -\sqrt{D_2}$

Les relations précédentes seront

$$a = +1 \quad (3.32)$$

$$b = -\frac{1}{2\sqrt{D_2}} \left( C_2 + 3\sqrt{D_2} \right) \quad (3.33)$$

$$c = -\sqrt{D_2} \quad (3.34)$$

$$E_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{D_2}} \left( C_2 + 3\sqrt{D_2} \right) + 1 \quad (3.35)$$

La contrainte entre les paramètres est

$$\frac{1}{4D_2} \left( 3D_2 + 4C_2\sqrt{D_2} - 4B_2D_2 + C_2^2 - 8D_2^{\frac{3}{2}} \right) = 0 \quad (3.36)$$

alors on peut écrire le superpotentiel comme

$$W_2(r) = r^2 - \frac{\left( \frac{1}{2\sqrt{D_2}} (C_2 + 3\sqrt{D_2}) \right)}{r^2} - \frac{\sqrt{D_2}}{r^3} \quad (3.37)$$

$$U_0^{(1)}(r) = N_0^{(1)} \exp \left( - \int \left( r^2 - \frac{\left( \frac{1}{2\sqrt{D_2}} (C_2 + 3\sqrt{D_2}) \right)}{r^2} - \frac{\sqrt{D_2}}{r^3} \right) dr \right) \quad (3.38)$$

$$U_0^{(1)}(r) = N_0 \exp \left( -\frac{1}{6r^2\sqrt{D_2}} \left( 3D_2 + 2r^5\sqrt{D_2} + 3rC_2 + 9r\sqrt{D_2} \right) \right)$$

Le résultat est quasi-exact

Chapitre 3. Détermination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

Pour des résultats exacts, nous devons définir  $B_2 = 0$  dans le potentiel  $V_2(r)$  Nous aurons alors un nouveau potentiel  $V(r) = ar^2 + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^6}$  de la réf [28], qui a été traité comme suit,

$$U(r) = \left( \exp - \left( \frac{r^4 + \beta}{2r^2} \right) \right) U_{susy} \quad (3.39)$$

on propose le superpotentiel  $W(r)$  sous la forme

$$W(r) = Ar + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} \quad (3.40)$$

Les relations entre les paramètres de cette équation satisfirent les définitions de la SUSY

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pm 1 \\ B = \frac{1}{2D}(b - 3D) \\ D = \pm \sqrt{c} \\ C = 0 \\ A(2B - 1) = E_0^{(1)} \\ B^2 + 2AD + B = 0 \end{array} \right.$$

En étudiant ces relations nous allons avoir plusieurs cas selon le signe de A et D, et la détermination de ces valeurs sera en fonction du

comportement à l'origine et asymptotique de la fonction d'onde donc le cas qui nous intéresse sera en définitif

$$A = +1 \text{ et } D = -\sqrt{c}$$

Les relations précédentes seront

Chapitre 3. Détermination des énergies et des états au moyens de la MQSUSY

$$A = +1 \tag{3.41}$$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{c}} (b + 4\sqrt{c}) \tag{3.42}$$

$$C = 0 \tag{3.43}$$

$$D = -\sqrt{c} \tag{3.44}$$

$$E_0^1 = \frac{1}{\sqrt{c}} (b + 4\sqrt{c}) \tag{3.45}$$

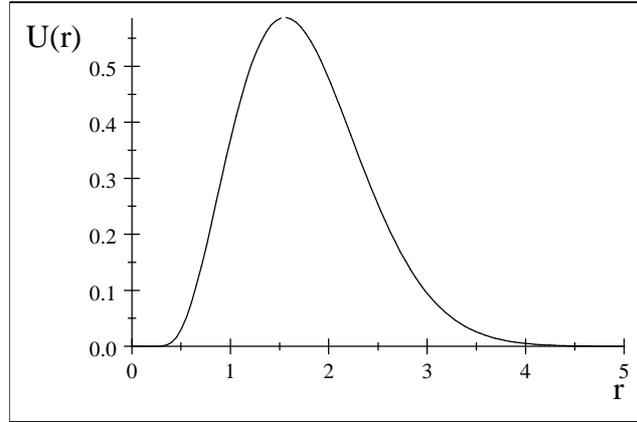
La contrainte entre b et c sera

$$3c + 4b\sqrt{c} + b^2 - 8c^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{3.46}$$

après intégration

$$U_0^{(1)}(r) = N_0^1 \left( \exp - \left( \frac{r^4 + \sqrt{c}}{2r^2} \right) \right) r^{\left( \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{3}{2} \right)} \tag{3.47}$$

Exemple 1.1 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(1)} = 5$



**Fig (3-1)** : La fonction d'onde non normalisée  $U_0^{(1)}(r)$ [28]

On sachant que  $E_1^{(1)} = E_0^{(2)}$  il r ste   trouver la fonction d'onde correspondante  $U_1^{(1)}$ .

Puis on peut arriver jusqu'   $n$   tats liés selon les équations suivantes

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \quad , \quad U_n^{(2)} = \left( E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A_1 U_{n+1}^{(1)} \quad (3.48)$$

et

$$U_{n+1}^{(1)} = \left( E_n^{(2)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A_1^+ U_n^{(2)} \quad (3.49)$$

# Conclusion Générale :

Il est bien connu que la méthode de la supersymétrie quantique se caractérise par sa simplicité et sa flexibilité lors de son application aux potentiels locaux. Cette souplesse se traduit par son processus très efficace dans la détermination exacte des propriétés microscopiques des systèmes, telles que le spectre et les fonctions propres.

Dans ce travail, nous avons voulu reprendre un travail déjà fait sur l'extension de l'applicabilité de cette théorie SUSYQM aux potentiels dépendant linéairement de l'énergie. Pour ce faire, nous avons en premier lieu développé le formalisme de la MQSUSY dans le cas des potentiels unidimensionnels (1D) dépendant uniquement de la position. Cette approche est basée sur la factorisation de l'Hamiltonien étudié suivie par la définition d'un paramètre clef dit le superpotentiel.

Cet élément essentiel sert à construire tous les partenaires supersymétriques et engendrer systématiquement leurs spectres et leurs vecteurs propres. L'établissement d'une hiérarchie des Hamiltoniens supersymétriques permet de définir une classe de potentiels possédant les mêmes solutions exactes, avec un nombre d'états liés différent, malgré leurs formes incompatibles. Cette structure était très avantageuse car elle a été la source de la mise en œuvre d'une propriété rigoureuse et très utile connue par l'invariance de forme. Elle combine entre l'élégance et l'efficacité et permet d'accéder aisément à toutes les solutions, uniquement via les données de l'état fondamental.

Trois exemples d'application vérifiant la propriété de l'invariance de forme ont été abordés : le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse, les interactions Coulombiennes perturbées et le Potentiel carré infini. Ces derniers bien qu'ils soient solubles analytiquement par d'autres méthodes, ils sont à l'origine, pour chacun d'entre eux, d'une famille de potentiels plus compliqués qui deviennent solubles algébriquement grâce à la SUSYQM.

Par la suite, nous nous sommes intéressés dans le troisième chapitre à l'application du formalisme SUSY sur deux potentiels différents que nous avons appelé par convenance type (1)  $V_1(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$  ; et type (2)  $V_2 = A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$

Après un calcul détaillé, nous sommes parvenus à un résultat quasi-exactes, qui est en parfait accord avec les résultats obtenue par la référence [109].

Nous avons remarqué par la suite qu'à chaque fois que nous traitons chaque terme de chaque potentiel en revient à des résultats exacts ce qui ne diminue en rien de ce travail, bien au contraire, il renforce la généralisation de ces type de potentiels à puissances renversées.

Les solutions d'état fondamental dans des dimensions arbitraires pour le potentiel de Coulomb ( $B_1 = C_1 = D_1 = 0$ ), et pour le Kratzer ( $C_1 = D_1 = 0$ )[94], et pour une puissance inverse  $C_1 = 0$  [76, 77] sont des solutions exactes, on peut également trouver des potentiels à partir de ses prescriptions.

Puis dans le cas  $B_2 = 0$  dans le potentiel  $V_2(r)$ , nous aurons alors un nouveau potentiel  $V(r) = ar^2 + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^6}$  qui est le même de la réf [28], qui a été traité aussi convenablement pour aboutir des résultats exactes jusqu'au degré  $n$  hamiltonien.

La méthode supersymétrique est très efficace dans la résolution de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle pour des potentiels jouissant de la propriété d'invariance de forme et dans le cadre d'une symétrie non brisée ; c'est-à-dire si la fonction d'onde déduite, suite à la factorisation de l'hamiltonien, est acceptable physiquement. Malheureusement tous les potentiels ne sont pas invariants de forme, et il est parfois difficile d'éviter la brisure de symétrie, car on a affaire à l'équation de Riccati, où il n'existe aucune recette permettant son intégration de façon générale.

Sans ces deux difficultés majeurs (invariance de forme et brisure de symétrie), la technique supersymétrique serait sans doute la plus géniale des méthodes permettant

d'intégrer l'équation de Schrödinger stationnaire unidimensionnelle avec élégance. Il serait alors bon de penser un jour à trouver une alternative, en cas de non invariance de forme, ou de brisure de symétrie, sans recourir à d'autres méthodes.

# Bibliographie

- [1] A. Messiah, Mécanique Quantique T2, Dunod, Paris (1960)
- [2] C.C. Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, Mécanique Quantique T1, Hermann, Paris(1988).
- [3] M. Paty, La physique du XXe siècle. EDP science. September (2003).
- [4] E. Schrödinger. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization.proc. R. Irish Acad, A 47, 53-54 (1941).
- [5] H.A. Bethe and E.E. Salpeter, Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms, Springer-Verlag, Berlin.Göttingen.Heidelberg (1957).
- [6] P. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 3rd ed. Oxford : Clarendon Press(1947).
- [7] L. Infeld and T.E. Hull. The factorization methode, Rev. mod. 23. 21-68. (1951).
- [8] A. Neveu and J. Schwarz, Factorizable dual model of pions, Nucl. Phys. B 31 86 (1971).
- [9] P. Ramond, Dual theory for free fermions, Phys. Rev. D 3, 2415 (1971)
- [10] E. Witten, Dynamical breaking of symmetry, Nucl. Phys. B 188, 513 (1981).
- [11] D. Lancaster, Supersymmetry breakdown in supersymmetric quantum mechanics,Nuovo Cimento A 79, 28 (1984).
- [12] Advanced Series on Directions in High Energy Physics Vol. 21, Perspectives on Supersymmetry II, Editor Gordon L Kane (2010).
- [13] L. Gendenshtein, Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry, JETP. lett.38, 356 (1983).
- [14] F. Cooper, B. Freedman, Aspects of symmetric quantum mechanics, Ann. Phys (NY) 146, 262 (1983).
- [15] L. Gendenshtein, I.V. Krive, Supersymmetry in quantum mechanics, Sov. Phys.Usp. 28, 654 (1985).

## Bibliographie

- [16] G. Stedman, Simple supersymmetry : factorisation methode in quantum mechanics, Euro. Jour. Phys. 6, 163 (1985).50
- [17] C.V. Sukmar, Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and ahamiltonian hierarchy, J. Phys. A 18, L57 (1985).
- [18] R. Hamaker and A.R. P. Rau, Supersymmetry in quantum mechanics, Am. Jour.Phys. 54, 928 (1986).
- [19] R. Dutt, A. Khare and U. Sukatme, Supersymmetry, shape invariance and exactly solvable potentials, Am. Jour. Phys. 56, 163 (1988).
- [20] A. Lahiri, P. Roy and B. Bagchi, Supersymmetry in quantum mechanics, Int. Jour.Mod. Phys. A 5, 1383 (1990).
- [21] O. L de Lange and R.E. Raab, Operator methods in quantum mechanics, Oxford University Press (1991).
- [22] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry in quantum mechanics, Phy.Rep. 251, 267 (1995); Supersymmetry in quantum mechanics, World Scientific Publishings (2001).
- [23] A. Gangopadhyaya, J.V. Mallow, C. Rasinariu, Supersymmetric Quantum Mechanics : An Introduction, World Scientific Publishings (2011).
- [24] E.Witten, "Dynamical breaking of supersymmetry", J. Nucl. Phys. B 188(1981) 513.
- [25] L. Gendenshtein, "Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry", JETP. lett. 38 (1983) 356.
- [26] A. Boucham, Thèse de Doctorat " Recherche de neutralinos avec le detecteur L3 au LEP et réalisation d'un calorimètre plomb- fibres scintillantes pour améliorer son hermécité électromagnétique" UNV Paris 6 1996.
- [27] A.Besson, Thèse de Doctorat "Etude des événement di-leptons +4jets dans le Run II de l'expérience DO à Fermilab"UNV Joseph Fourier 2002.
- [28] N.Bensalah. "Les états liés et de diffusions et l introduction du Superpotentiel"Thèse de Doctorat.Biskra,Algérie(2013).
- [29] Y.Mambrini "De la supersymétrie à la matière noire"Séminaire FIP-4 novembre 2008.
- [30] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [31] Yu. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, JETP Lett. 13 (1971) 323
- [32] R. Haag, J. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. B 88 (1975) 257.
- [33] J. Wess et J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton Series in Physics,ed. P. W. Anderson and A. S. Wightman.
- [34] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B 70 (1974) 39.

## *Bibliographie*

- [35] A. Salam and J. Strathdee, Nucl. Phys. B 76 (1974) 477.
- [36] A. Salam and J. Strathdee, Nucl. Phys. B 80 (1974) 499.
- [37] S. Ferrara, B. Zumino and J. Wess, Phys. Lett. B 51 (1974) 239.
- [38] D. F. Brewer, "Supersymmetry, Superfields and Supergravity : an introduction", Graduate Student Series in Physics.
- [39] S. Ferrara, "Supersymmetry", North Holland/World Scientific.es" thèse de doctorat, Phys Thq. Unv de Paris (1998).
- [40] Martin B.R.and Shaw G."Particle Physics ",UK : John Wily &sons Ltd ,1998. P.274.
- [41] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D 10 (1974) 275.
- [42] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.
- [43] R. N. Mohapatra, "Unification and Supersymmetry", Second Edition, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag.
- [44] G. G. Ross, "Grand Unified Theories", Frontiers in Physics, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.
- [45] D. Baye. Physique quantique et statistique. Presses Universitaires de Bruxelles, 2003.
- [46] Y. Ayant and E. Belorizky, Cours de mécanique quantique, Edition Dunod (1980).
- [47] L. Landau and E. Lifchitz, Mecanique quantique, Edition Mir (1967).
- [48] H. Goldstein, Classical mechanics, Addison-Wesley Publishing Company (1980).
- [49] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Volume 1, Chap. VI, Wiley Classics Library (1989).
- [50] Ming-Tang Lee and Hsiang-Nan Li "Supersymmetric Quantum Mechanics with Spin- Orbit Couplings" The physical society of the republic of China, Unv of Chung-Cheng. 1996.
- [51] H. Yamagishi, Phys. Rev. D29, 2975 (1984) ; Ig. Tamm, Z. Phys. 71, 141 (1931) ; T. T. Wu et C. N. Yang, Nucl. Phys. B107, 365 (1976).
- [52] A. Khare F. Cooper and U. Sukhatme. Supersymmetry in Quantum Mechanics. World Scntific, 2001.
- [53] M-Elise. Ernould. " La supersymétrie en mécanique quantique" projet de phys mathématique, 2005.
- [54] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry and Quantum Mechanics, LAUR- 94-569. (2004).

## Bibliographie

- [55] A. Benachour. "Approche de supersymétrie en mécanique quantique et application à la construction de potentiels non hermitiens avec spectres réels" Thèse de Magister. Constantine, Algérie (2010).
- [56] O. Ozer and B. Gönül "New exact treatment of the perturbed Coulomb interactions" Department of Engineering Physics, Faculty of Engineering, University of Gaziantep, 27310 Gaziantep-Turkiye (2003).
- [57] Killingbeck J. 1978 Phys. Lett. 67A 13; 65A 87.
- [58] Saxena R. P. and Varma V. S 1978 J. Phys. A : Math. Gen. 15 L149.
- [59] Datta A, Dey J, Dey M, and Ghose P 1981 Phys Lett. 106B 505.
- [60] Saxena R. P. and Varma V. S 1982 J. Phys. A : Math. Gen. 15 L221.
- [61] Datta D. P. And Mukherjee S 1982 J. Phys. A : Math. Gen. 15 2369.
- [62] Bessis D., Vrscaj E. R., and Hand C. R. 1987 J. Phys. A : Math. Gen. 20 149.
- [63] Chaudhuri R. N., Tater M, and Znojil M 1987 J. Phys. A : Math. Gen. 20 1401. L3891988
- [64] Saxena R. P., Srivastava P. K., and Varma V. S 1988 J. Phys. A : Math. Gen. 21 L389.
- [65] Roychoudhury R. K. and Varshni Y. P 1988 J. Phys. A : Math. Gen. 21 3025.
- [66] Chhajlany S. C 1993 Phys. Lett 173A 215.
- [67] Chaudhuri R. N. and Mondal M 1995 Phys. Rev. A. 52 1850.
- [68] Morales D. A. and Parra-Mejias Z 1999 Can. J. Phys. 77 863.
- [69] Dong S. H 2000 Int. J. Theor. Phys. 39 1119.
- [70] Alberg M and Wilets L 2001 Phys Lett. 286A 7.
- [71] Gönül B submitted to J. Phys. A : Math. Gen., Generalized supersymmetric perturbation theory.
- [72] Gönül B submitted to Am. J. Phys., Exact treatment of  $\ell \neq 0$  states.
- [73] Cooper F., Khare A., and Sukhatme U. P 1995 Phys. Rep. 251 267.
- [74] Znojil M 1999 J. Math. Chem. 26 157.
- [75] A. Khare, "Supersymmetry in quantum mechanics" Institute of Physics, Orissa, India
- [76] A.O. Barut, M. Berrondo and G. Garcia-Calderon, J. Math. Phys. 21, 1851(1980).
- [77] S. Özçelik and M. Şimşek, Phys. Lett. A152, 145 (1991); S. Özçelik, Tr. J.of Physics 20, 1233 (1996).
- [78] E. Papp, Phys. Lett. A157, 192 (1991).

## Bibliographie

- [79] G. F. Gribakun and V. V. Flambaum, *Phys. Rev.* A48, 546 (1993); R.Szmytkowski, *J. Phys.* A28, 7333 (1995).
- [80] E. Vogt and G. H. Wannier, *Phys. Rev.* 95, 1190 (1954); D. R. Bates and I. Esterman, *Advances in Atomic and Molecular Physics* (Academic Press, New York, 1970).
- [81] A. O. Barut, *J. Math Phys.* 21, 568 (1980).
- [82] M. Kaplus and R. N. Porter, *Atoms and Molecular Physics* (Cambridge, 1970); R. J. Le Roy and R. B. Bernstein, *J. Chem Phys.* 52, 3869 (1970); R. J. Le Roy and W. Lam, *Chem. Phys. Lett.* 71, 544 (1980).
- [83] A. M. Sherry and M. Kumar, *J. Chem. Solids* 52, 1145 (1991).
- [84] V. A. Kostelecky and D. K. Campell, *Supersymmetry in Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1985);
- [85] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules* (Longman, London, 1983); G. C. Maitland, M. Rigbey, E. B. Smith and W. A. Wakeham, *Intermolecular Forces* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1987).
- [86] A. Share and S. N. Behra, *Pramana J. Phys.* 14, 327 (1980).
- [87] D. Emin and T. Holstein, *Phys. Rev. Lett.* 36, 323 (1976); *Phys. Today* 35, 34 (1982).
- [88] S. Coleman, *Aspects of Symmetry, selected Erice Lectures* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988).
- [89] H. Hashimoto, *Int. J. Electron.* 46, 125 (1979); *Opt. Commun.*, 32, 383 (1980).
- [90] M. S. Child, *J. Phys. A* 31, 657 (1998).
- [91] A. Michels, J. de Boer, and A. Bijl, *Physica*, 4, 981 (1937).
- [92] Y. P. Varshni, *Can. J. Phys.* 75, 907 (1997).
- [93] M. A. Reed, *Sci. Am.* 268, 118 (1993); D. S. Chuu, C. M. Hsiao, and W. N. Mei, *Phys. Rev. B* 46, 3898 (1992).
- [94] G. Mie, *Ann. Physik* 11, 657 (1903); A. Kratzer, *Z. Phys.* 3, 289 (1920). I. I. Goldman and V. D. Krivchenkov, *Problems in Quantum Mechanics* (Pergamon Press, New York, 1961);
- [95] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory* (Oxford, Pergamon, 1977).
- [96] M. Znojil, *Math. Phys.* 31 (1990) 108.
- [97] E. Papp, *Phys. Lett. A* 157 (1991) 192.
- [98] R. S Kaushal, *Ann. Phys. (NY)* 206 (1991) 90.
- [99] M Znojil, *Phys. Lett. A* 158 (1991) 436.

## *Bibliographie*

- [100] F. M. Fernandez. Phys. Lett. A 160 (1990) 511.
- [101] R. S Kaushal and D. Parashar, Phys. Lett. A 170 (1992) 335.
- [102] R. Guardiola and J. Ros, J. Phys. A 25 (1992) 1315.
- [103] M. Landtman, Phys. Lett. A 175 (1993) 147.
- [104] Y. P. Vashni, Phs. Lett. A 183 (1993) 9-13.
- [105] N. Bensalah " Etats liés exacts ou quasi-exacts de certaines interactions atomiques et moléculaires" thèse de magister. Biskra, Algérie (2003)
- [106] S. Dong, Z. Ma and G. Esposito, Found. Phys. Lett. 12, 465 (1999) ; quantph/9902081 ; Dong and Z. Ma, quant-ph/9901036.
- [107] E. Kasap, B. Gönül and M. Şimşek, Chem. Phys. Lett. 172, 499 (1990).
- [108] R. Yekken, M. Lassaut and R.J. Lombard, Applying supersymmetry to energy dependent potentials. Ann. Phys. 338, 195 (2013).
- [109] B. Gonul, O. Ozer, M. Ko cak, D. Tutcu and Y. Can celik "Supersymmetry and the relationship between a class of singular potentials in arbitrary dimensions" Department of Engineering Physics, University of Gaziantep, 27310 Gaziantep-T urkiye November 27, 2002

## المخلص

في هذا العمل قمنا بدراسة الطاقات والحالات المرتبطة الموافقة لأنظمة كمونين من النوع

$$V_2 = A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6} \quad V_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$$

وذلك بإدخال الكمون الفائق المقترح حسب الميكانيك الكمية للتناظر الفائق

## Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudié les énergies et les états liés correspondants pour les systèmes de potentiel du type  $V_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$  et

$V_2 = A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$  en introduisant le superpotentiel suggéré par la MQSUSY

## Abstract

In this work, we have studied the energies and the corresponding bound states for systems of potential of the type  $V_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{r^2} + \frac{C_1}{r^3} + \frac{D_1}{r^4}$  and

$V_2 = A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} + \frac{D_2}{r^6}$  by introducing the Superpotential suggested by the QMSUSY.