

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

SEBKHI Esma

Titre :

Sur l'existence et la stabilité des cycles limites

Membres du Comité d'Examen :

Dr. DAKHIA Ghania	UMKB	Président
Dr. LAADJAL Baya	UMKB	Encadreur
Dr. OUAAR Fatima	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

Un très grand et spécial remerciement à mes parents SEBKHI Athmane et SEBKHI Fatiha qui me prennent la main et me montrent le chemin , et qui m'ont appris à avoir confiance en moi. Leurs conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Merci mes parents pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent.

Je dédie aussi ce travail à mes frères et ma sœur qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Enfin, merci à mon amie SEKKEY Anouaar qui ma toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et a toujours cru en ma volonté de réussir.

REMERCIEMENTS

Je remercie Allah avant tout car à lui seul revient les louanges.

Je remercie mon encadreur LAADJAL Baya de m'avoir guidé avec autant d'écoute vers un sujet de recherche qui corresponde à mes attentes. La confiance qu'il m'a accordée ainsi que sa bienveillance m'ont permis d'initier et mener mes travaux de recherche plus sereinement.

Mes remerciements vont également aux professeurs DAKHIA Ghania et OUAAR Fatima pour l'honneur qu'elles m'ont fait en acceptant de faire partie de jury de ce mémoire.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion sans exception.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	v
Introduction	1
1 Notions préliminaires et généralités	3
1.1 Système dynamique	3
1.1.1 Formulation des systèmes dynamiques	5
1.1.2 Existence et unicité des solutions	6
1.1.3 Stabilité des points singuliers	7
1.2 Solutions périodiques	12
1.3 Stabilité des solutions périodiques	15
1.4 Auxiliaires géométrique des systèmes autonomes	17
2 Les cycles limites	20
2.1 Portrait de phase et cycles limites	20

2.2	La théorie de Poincaré-Bendixson	23
2.2.1	Existence et unicité des cycles limites	23
2.2.2	Non existence des cycles limites	27
2.2.3	Stabilité des cycles limites	29
2.2.4	Section de Poincaré	30
2.3	Existence des cycles limites dans \mathbb{R}^n	37
2.3.1	La théorie de R.A.Smith	37
2.3.2	Existence d'orbites récurrentes	39
2.3.3	Application	41
	Conclusion	44
	Bibliographie	44
	Annexe B : Abréviations et Notations	46

Table des figures

1.1	Différents types de stabilité au sens de Lyapunov	8
2.1	Cycle limite stable	22
2.2	Cycle limite instable	22
2.3	Cycle limite semi-stable	22
2.4	Deux trajectoires pour le système (2.3) l'une commençant à $(2, 0)$ et l'autre à $(0.01, 0)$	34
2.5	La courbe de Jordan	47

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse à un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les cycles limites. Il s'agit de solutions périodiques isolées dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques d'un système différentiel autonome plan donné. Ils sont représentés dans le plan de phase par des courbes fermées simples et lisses. Les autres solutions se rapprochent des cycles limites ou s'en éloignent asymptotiquement lorsque le temps croît indéfiniment, il s'agit là de stabilité ou d'instabilité des cycles limites. Le concept de cycles limites paraît pour la première fois dans les fameux articles de **Poincaré** (1881, 1882, 1885, 1886). Puis au début du 20ème siècle, dans le 2ème congrès international de Mathématiques en 1900 à Paris, **David Hilbert** a présenté son célèbre exposé intitulé "Problèmes Mathématiques". La 16ème de ses 23 problèmes s'était de déterminer le nombre maximal de cycles limites existants pour le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_n(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y) \end{cases}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré $\leq n$.

Pour l'existence et l'absence des cycles limites, ils existent quelques anciens résultats largement appliqués, tels que le théorème de **Poincaré-Bendixson**, le critère de **Bendixson** et le critère de **Dulac**. Mais pour le problème d'unicité, la situation est plus compliquée et demande beaucoup plus d'estimation exacte.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

- **Chapitre 1** : Comporte quelques notions préliminaires des systèmes différentiels, introductives et nécessaires à la compréhension de l'ensemble de ce travail. On commence par définir les systèmes dynamiques, la notion de flot, les points d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibres, le portrait de phase, les solutions périodiques et leurs stabilités, et les ensembles limites.
- **Chapitre 2** : Nous proposons quelques résultats d'existence et l'absence des cycles limites dans \mathbb{R}^2 . Puis nous avons étudié la stabilité des cycles limites, comme nous présentons quelques généralisations de résultats connus en dimension deux à la dimension n , en utilisant les résultats théorique de **R.A.Smith** et en ajoutant des hypothèses supplémentaires. Il s'agit des généralisations des théories de Poincaré et Bendixson, nous terminons ce chapitre par une application dans \mathbb{R}^3 .

Chapitre 1

Notions préliminaires et généralités

L'objectif essentiel de ce chapitre est d'étudier quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

Nous commençons par donner les notions de système dynamique, flot, point critique, et linéarisation. Nous introduisons aussi le théorème d'existence et d'unicité. Ensuite, nous examinons la nature et la stabilité des points d'équilibres. Enfin nous terminons par donner la définition des solutions périodiques et leur stabilité.

1.1 Système dynamique

Un système dynamique est un modèle permettant l'évolution au cours temps d'un ensemble des objets en interaction il est défini par un triplet (D, I, φ) constitué de l'espace d'états D , du domaine temporel I , et d'une application de transition d'état $\varphi : I \times D \rightarrow D$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système à tout instant.

Définition 1.1.1 : Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $\varphi(\cdot, X) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue,
- $\varphi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue,
- $\varphi(0, X) = X$,
- $\varphi(t + s, X) = \varphi(t, \varphi(s, X))$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+, X \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1 : Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, X_0 \in \mathbb{R}^n,$$

où A est une matrice constante. La solution de ce système est :

$$X(t) = \exp(tA) X_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

engendre un système dynamique du fait que l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, X \in \mathbb{R}^n$ associé :

$$\varphi(t, X) = \exp(tA) X$$

vérifiée les quatre propriétés du système dynamique.

1.1.1 Formulation des systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

1. Dans le cas où la composante temps est continue, le système dynamique est présenté par un système d'équation différentielle de la forme :

$$\dot{X} = F(X, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t). \end{cases} \quad X \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Si la fonction F est linéaire, le système dynamique est dit linéaire, et si le temps est exprimé explicitement dans la fonction F , le système est dit "non autonome".

2. Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative)

$$X_{k+1} = f(X_k, k), \quad X_k \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1.1 : Dans ce travail nous intéressons aux systèmes dynamiques autonome et à temps continue. du type :

$$\dot{X} = F(X), \quad X \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Définition 1.1.2 :

1. On appelle solution du système (1.1) toute application dérivable $X : I \rightarrow D$, définie sur un intervalle non vide $I \subseteq \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $t \in I$:

$$X(t) \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \dot{X}(t) = F(X(t)).$$

2. L'ouvert D est appelé l'espace de phase.
3. Une fonction \tilde{X} est appelée prolongement de la solution X si elle est définie sur un intervalle \tilde{I} contenant strictement I .
4. La solution X est dite maximale (on dit aussi non prolongeable) si elle n'admet pas de prolongement, c'est-à-dire l'intervalle I est l'intervalle maximal d'existence de la solution X .

Définition 1.1.3 : Soit I_X l'intervalle maximal d'existence de la solution X .

1. La trajectoire (ou l'orbite) de X est définie par : $\gamma(X) = \{X(t) : t \in I_X\}$.
2. La semi-orbite positive est définie par $\gamma^+(X) = \{X(t) : t \geq 0\}$.
3. La semi-orbite négative est définie par : $\gamma^-(X) = \{X(t) : t \leq 0\}$.

Définition 1.1.4 : On appelle point singulier (ou point d'équilibre ou point critique) du système (1.1), le point $X^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$F(X^*) = 0.$$

Définition 1.1.5 : Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase.

Définition 1.1.6 : Soit $\Phi(t, X_0)$ la solution du système (1.1) telle que $\Phi(0, X_0) = X_0$. L'ensemble des applications $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\Phi_t(X_0) = \Phi(t, X_0)$, est appelé le flot du système (1.1).

1.1.2 Existence et unicité des solutions

Dans cette partie on va étudier l'existence et l'unicité d'une solution. La condition que F soit continue ne suffit pas que la solution est unique. On verra dans le théorème de

Cauchy-Lyapshitz que si F est localement lipschitzienne alors le problème admet une solution unique.

Définition 1.1.7 : *Le problème de trouver une solution du système (1.1) satisfaisant à la condition initiale $X(t_0) = X_0$ est appelé problème de Cauchy.*

Définition 1.1.8 :

1. *On dit que F est Lipschitzienne sur D , s'il existe une constante L telle que :*

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq L \|X - Y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

La constante L est appelé une constante de Lipschitz pour F .

2. *On dit que F est localement Lipschitzienne sur D , si tout point de D possède un voisinage ouvert inclus dans D sur lequel F est Lipschitzienne.*

Théorème 1.1.1 (Cauchy_Lipschitz) : *Soit le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Si F est continue et localement Lipschitzienne sur D dans \mathbb{R}^n , le problème de Cauchy admet une solution maximale unique sur D .

Remarque 1.1.2 : *Le théorème d'existence et d'unicité est encore assuré sous l'hypothèse que $F \in C^1(D)$.*

1.1.3 Stabilité des points singuliers

L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point singulier. Il existe quelques concepts

pour la stabilité des systèmes dynamiques tels que la stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 1.1.9 : Soit X^* un point singulier du système (1.1) :

1. X^* est dit stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(t_0) - X^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - X^*\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

2. X^* est dit asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \eta > 0 : \|X(t_0) - X^*\| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - X^*\| = 0.$$

3. X^* est dit instable si elle n'est pas stable.

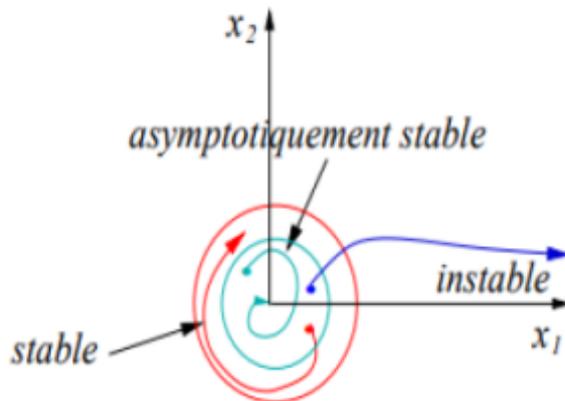


FIG. 1.1 – Différents types de stabilité au sens de Lyapunov

Exemple 1.1.2 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}.$$

$X^* = (0, 0)$ est un point singulier.

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t - y_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \quad \forall t > 0.$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|) \\ &= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta, \quad \text{on prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

d'où X^* est stable au sens de Lyapunov.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \not\rightarrow 0.$$

Donc, la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Définition 1.1.10 : Considérons le système (1.1), et X^* est un point singulier :

1. Le système :

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X^*) \right) X, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est appelé linéarisation de(1.1) en X^* .

2. On appelle X^* point singulier hyperbolique de (1.1), si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X^*) \right)$ sont à partie réelles non nulles.

Définition 1.1.11 : (*Classification des points singuliers*)

Considérons le système linéaire

$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{1.2}$$

1. Si les valeurs propres de A sont réelles et de même signe (négatives ou positives) , la solution $X^* = 0$ est appelée noeud.
2. Si les valeurs propres de A sont réelles et de signe différents , la solution $X^* = 0$ est appelée selle (col).
3. Si les valeurs propres de A sont complexes avec $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$, la solution $X^* = 0$ est appelée foyer.
4. Si les valeurs propres de A sont complexes avec $\text{Re}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$, la solution $X^* = 0$ est appelée Centre.

Théorème 1.1.2 : *Stabilité de Lyapunov (la méthode indirecte)*

1. L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de (1.2) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.
2. L'origine est un équilibre instable de (1.2) si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive.
3. L'origine est un équilibre stable de (1.2) si et seulement si :
 - i) Toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles négative ou nulle.
 - ii) Pour toute valeur propre de A à partie réelle nulle, les multiplicités algébrique et géométrique coïncident.

Théorème 1.1.3 : Soit X^* un point singulier hyperbolique de (1.1). Alors :

1. X^* est asymptotiquement stable si et seulement si l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé en X^* .
2. X^* est instable si et seulement si l'origine est instable pour le système linéarisé en X^* .

Théorème 1.1.4 : *Stabilité de Lyapunov (la méthode directe)*

Soit E un voisinage ouvert de \mathbb{R}^n contenant un point équilibre X^* , et V une fonction continûment différentiable, qui satisfait les conditions suivantes :

- $V(X^*) = 0$,
- $V(X) > 0$, si $X \neq X^*$, où $X \in \mathbb{R}^n$, (V est dite définie positive),

alors :

1. Si $\dot{V}(X) \leq 0$, $\forall X \in E$, on a X^* est stable.
2. Si $\dot{V}(X) < 0$, $\forall X \in E$, X^* est asymptotiquement stable.

Exemple 1.1.3 : On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3 \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre $X^* = 0$, posons : $V(x, y) = x^4 + y^4$.

On a $V(0) = 0$ et V est définie positive, et on a :

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 4x^3(-y^3) + 4y^3(x^3) = 0.$$

Donc, on déduit que l'origine est stable.

1.2 Solutions périodiques

Les points singuliers ne sont pas les seuls éléments déterminant le comportement qualitatif des solutions d'un système dynamique, mais il existe d'autres types tels que les solutions périodiques. Le premier problème que nous rencontrons est l'existence des solutions périodiques dans \mathbb{R}^n , et dans cette section nous proposons quelques résultats d'absence des orbites périodiques.

Définition 1.2.1 : *Une solution $X(t)$ du système (1.1) est une solution périodique de période T si et seulement si chacune de ses n composantes $x_i(t)$ est périodique de période T .*

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad X(t+T) = X(t) \iff \begin{cases} x_1(t+T) = x_1(t) \\ x_2(t+T) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t+T) = x_n(t). \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 :

1. Si $X(t)$ a une période T , la solution a aussi une période kT , et supposons que T est la plus petite période.
2. Les points d'équilibre sont considérés comme des solutions périodiques à une période arbitraire $T \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 1.2.1 : *L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Cette équation équivaut au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque :

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$$

ce qui donne pour ensemble de solutions :

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C.$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan de phase par des ellipses.

Théorème 1.2.1 : Soit $X(t)$ une solution du système (1.1), supposons qu'il existe deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) tels que : $X(t_1) = X(t_2)$ (c.à.d que l'orbite de $X(t)$ se recoupe). Alors, $X(t)$ est une solution périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.2.1 : Une solution périodique du système différentiel autonome (1.1) correspond à une orbite fermée dans le plan de phase, et une orbite fermée correspond à une solution périodique.

Alors en topologie l'orbite d'une solution périodique est topologiquement équivalent au cercle de centre 0 et de rayon 1. Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui transforme toute orbite périodique en ce cercle c'est à dire que cet homéomorphisme transforme le système (1.1) en un système équivalent qui admet le cercle de centre 0 et de rayon 1 comme solution périodique.

Proposition 1.2.1 : *Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.*

Théorème 1.2.2 : *(Critère de fonction de Lyapunov)*

Considérons le système (1.1), et X^ est un point singulier.*

Si tel système admet une fonction de Lyapunov il ne peut admettre d'orbite fermée.

Preuve. : *En effet si X est une solution correspondant à une orbite fermée, $\forall t, X(t) \neq X^*$ (sinon le cycle se réduit à un point) et donc*

$$\frac{d}{dt}V(X(t)) = \overrightarrow{\text{grad } V(X(t))} \cdot F(X(t)) < 0,$$

ce qui signifie que la fonction $t \rightarrow V(X(t))$ est strictement décroissante le long de l'orbite fermée or ceci est absurde.

(ceci ne prouve pas que $X(t) \rightarrow X^$ la preuve étant plus délicate) ■*

Exemple 1.2.2 : *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

Posons $V(x, y) = x^2 + 4y^2$. Alors

$$\begin{cases} V(x, y) > 0, & \forall (x, y) \neq (0, 0), \\ \overrightarrow{\text{grad } V(x, y)} \cdot F(x, y) = -2x^2 - 8y^4; & \overrightarrow{\text{grad } V(x, y)} \cdot F(x, y) < 0. \end{cases}$$

Ainsi V est une fonction de Lyapunov et le système n'admet donc pas d'orbite fermée (toutes les trajectoires tendent vers 0).

Définition 1.2.2 : Supposons que le système différentiel puisse s'écrire sous la forme $\dot{x} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(x)$ où $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ et V est une fonction C^1 définie sur U à valeur dans \mathbb{R} . On dit alors que V est un potentiel du système.

Théorème 1.2.3 : (*La méthode du gradient*)

Si un système admet un potentiel il ne peut admettre d'orbites fermées.

Exemple 1.2.3 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(y) \\ \dot{y} = \cos(y) \end{cases}$$

Le système n'admet pas d'orbites fermées puisqu'il admet la fonction $V(x, y) = -x \sin(y)$ comme potentiel.

1.3 Stabilité des solutions périodiques

Supposons que le système (1.1) admet une solution périodique $\Phi(t)$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et telle que $\Phi(t + kT) = \Phi(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce paragraphe nous considérons une autre définition de la stabilité d'une solution périodique, appelée "*stabilité au sens de Poincaré*" qui est plus significative et fait intervenir la distance d'un point X à la courbe périodique $\Phi(t)$:

$$d = \inf_{\tau \in [0, T[} \|X - \Phi(\tau)\|.$$

Définition 1.3.1 : Soit $X(t)$ une solution du système (1.1) définie par $X(t_0) = X_0$:

1. $\Phi(t)$ est dite orbitalement stable ou stable au sens de Poincaré si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(t_0) - \Phi(t_0)\| \leq \delta \implies d(t) = \inf_{\tau \in [0, T]} \|X(t) - \Phi(\tau)\| \leq \varepsilon, \forall t \in [t_0, +\infty[.$$

2. $\Phi(t)$ est dite asymptotiquement stable au sens de Poincaré si elle est stable et si de plus :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0.$$

3. $\Phi(t)$ est instable si elle n'est pas orbitalement stable.

Remarque 1.3.1 : Pour une solution périodique, la stabilité au sens de Lyapunov implique la stabilité au sens de Poincaré, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 1.3.1 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y}(t) = x\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

qui admet l'unique point critique 0. En résolvant ce système en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &\implies r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) &\implies \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = 0 & \Rightarrow & r(t) = r_0 \\ \dot{\theta}(t) = r(t) & \Rightarrow & \theta(t) = r_0 t + \theta_0, \theta_0 = \theta(0). \end{cases} \quad (1.3)$$

L'origine 0 est fermé de cercles centrés. Soit $\Phi(t)$ une solution périodique définie par (1.3). Pour étudier la stabilité de cette solution, nous considérons un voisinage de $\Phi(0)$ défini par $\|X - \Phi(0)\| \leq \delta$, un point $X(0)$ appartenant à ce voisinage et la solution $X(t)$ correspondante qui est un cercle de centre 0, de rayon $r_0 + \alpha$, $|\alpha| \leq \delta$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|X(0) - \Phi(0)\| \leq \delta \Rightarrow d(t) \leq \varepsilon \quad t \geq 0,$$

ce qui prouve que la solution $\Phi(t)$ sont stable au sens de Poincaré.

Cependant la solution $\Phi(t)$ est instable au sens de Lyapunov. Pour le prouver il suffit de montrer que, $\forall \delta > 0$, il existe au moins une solution $X(t)$ définie par $\|X(0) - \Phi(0)\| \leq \delta$.

En effet, pour la solution $\Phi(t)$ on a pour l'instant t_1

$$\|X(t_1) - \Phi(t_1)\| = 2r_0 + \alpha.$$

Donc la condition de stabilité au sens de Lyapunov ne peut pas être satisfaite : la solution $\Phi(t)$ est instable au sens de Lyapunov.

1.4 Auxiliaires géométrique des systèmes autonomes

Considérons la solution $X(t)$ du système (1.1) de valeur initial $X(0) = X_0$ correspond dans l'espace de phase à une orbite qui nous indiquons par $\gamma(X_0)$. Alors si $X(t_1) = X_1$, nous avons $\gamma(X_1) = \gamma(X_0)$.

Parfois nous distinguerons le comportement de la solution pour $t \geq 0$, correspondant à

l'orbite positive $\gamma^+(X_0)$, et le comportement pour $t \leq 0$, correspondant à l'orbite négative $\gamma^-(X_0)$; $\gamma(X_0) = \gamma^+(X_0) \cup \gamma^-(X_0)$.

Dans le cas des solutions périodiques nous avons : $\gamma^+(X_0) = \gamma^-(X_0)$.

Définition 1.4.1 : (*Ensemble ω _limite et α _limite*)

* $q \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point ω _limite de $p \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\exists \{t_n\}, \text{ telle que } \Phi_{t_n}(p) \rightarrow q, \text{ si } t_n \rightarrow +\infty. \quad \text{où } \Phi_{t_n}(p) = X(t_n, p).$$

* $q \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point α _limite de $p \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\exists \{t_n\}, \text{ telle que } \Phi_{t_n}(p) \rightarrow q, \text{ si } t_n \rightarrow -\infty.$$

Définition 1.4.2 : Un point q dans \mathbb{R}^n est appelé point limite positif de l'orbite $\gamma(X_0)$ correspondant à la solution $X(t)$, s'il existe une suite croissante des nombres $t_1, t_2, \dots \rightarrow +\infty$ tels que les points de $\gamma(X_0)$ correspondant à $X(t_1), X(t_2), \dots$ ont point limite q .

De la même manière on définit un point limite négatif en utilisant une suite décroissante des nombres t_i .

Définition 1.4.3 :

- L'ensemble de tous les points limite positifs d'une orbite γ est appelé le ω -limite de γ , noté par $\omega(\gamma)$.
- L'ensemble de tous les points limite négatifs de γ est appelé α -limite de γ , noté par $\alpha(\gamma)$.

Exemple 1.4.1 : Considérons le système linéaire autonome dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

L'origine est un centre pour le plan de phase. Toutes les orbites sont fermées. Considérons une orbite γ . Il est clair que chaque point p de γ est à la fois positif et négatif. Choisissez par exemple $p = (1, 0)$. L'orbite γ à la paramétrisation $(\cos t, -\sin t)$, choisir pour un point limite positif la suite $t_n = 2\pi n - \frac{\pi}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Donc $(x_1(t_n), x_2(t_n)) \rightarrow (1, 0)$.

Nous avons pour chaque orbite : $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = \gamma$.

Définition 1.4.4 : *L'ensemble S est invariant si pour tout point $x \in S$ alors l'orbite $\gamma(x) \subset S$.*

- *L'ensemble S est invariant positif si $x \in S$ alors $\gamma^+(x) \subset S$.*
- *L'ensemble S est invariant négatif si $x \in S$ alors $\gamma^-(x) \subset S$.*

Théorème 1.4.1 : *Les ensembles $\alpha(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ sont fermés et invariants, nous avons que si l'orbite positive γ^+ est bornée, donc l'ensemble de ω limite est compact, connecte, et non vide.*

Définition 1.4.5 : *Un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est appelé un ensemble minimale du système (1.1), si M est le plus petit sous ensemble fermé, invariant et non vide.*

Théorème 1.4.2 : *Supposons que A est un ensemble non vide, compact, invariant du système (1.1) dans \mathbb{R}^n , alors il existe un ensemble minimal $M \subset A$.*

Théorème 1.4.3 : *Si M est un ensemble minimal, borné de (1.1) dans \mathbb{R}^2 , alors M est un point singulier ou une orbite périodique.*

Chapitre 2

Les cycles limites

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude des cycles limites. Nous débuterons par l'étude qualitative des cycles limites. Ensuite, nous exposons des principaux résultats sur l'existence et l'absence. Ainsi que la stabilité de cycles limites dans le plan (théorie de Poincaré-Bendixson). Enfin, nous présentons quelques généralisations de la théorie de Poincaré et Bendixson dans \mathbb{R}^n .

2.1 Portrait de phase et cycles limites

Un autre comportement possible pour une trajectoire est de tendre vers un mouvement périodique, dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

Définition 2.1.1 : *On appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.*

Les cycles limites sont aussi des séparatrices : ils séparent des régions où les trajectoires ont des comportements différents.

Théorème 2.1.1 : Γ étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de Γ sont telle que : soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de Γ pour $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.

Exemple 2.1.1 : Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

ce système a deux états d'équilibres $r = 0$ et $r = 1$.

La solution générale distincte de zéro est donnée par :

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-2t}}, \quad \theta = t - t_0,$$

Ainsi, en utilisant l'espace des phases (x, y) , toutes les trajectoires excepté l'équilibre $r = 0$, tendent vers le cycle $r = 1$ (s'enroulent en spirales autour du cercle).

Remarque 2.1.1 : Les cycles limites sont des phénomènes non linéaires. Il ne peuvent apparaître dans des systèmes linéaires, ce qui implique que les centres ne sont pas des cycles limites.

Définition 2.1.2 : (*Classification des cycles limites*)

1. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de Γ , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.

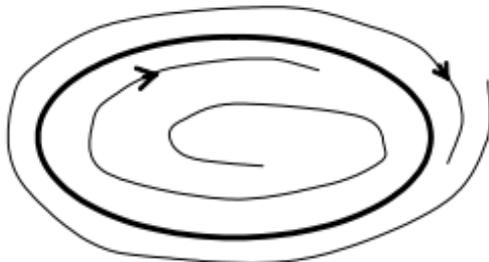


FIG. 2.1 – Cycle limite stable

2. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de Γ pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.

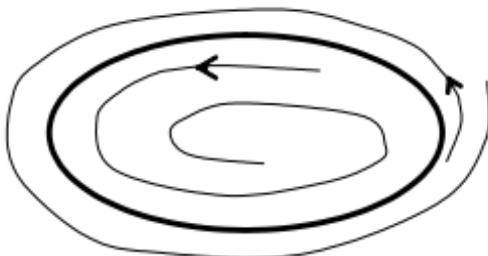


FIG. 2.2 – Cycle limite instable

3. S'il existe dans son voisinage des trajectoires convergentes et d'autres divergentes, le cycle limite est semi-stable.

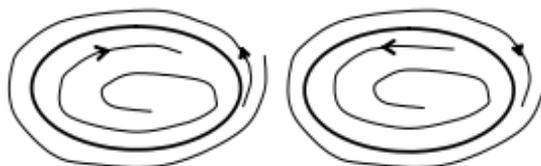


FIG. 2.3 – Cycle limite semi-stable

2.2 La théorie de Poincaré-Bendixson

Pour étudier l'existence des solutions périodiques, on présente les critères de Bendixson et Dulac qui affirment l'absence des cycles limites, et le théorème de Poincaré-Bendixson qui affirme l'existence des cycles limites pour des systèmes différentiels dans le plan.

Maintenant nous allons nous intéresser à la question : comment prouver qu'il en existe une orbite fermée isolée ?

2.2.1 Existence et unicité des cycles limites

On considère le système autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de décrire tous les ensembles ω -limites compacts d'un système dynamique planaire.

Théorème 2.2.1 : (Poincaré-Bendixson)

Considérons l'équation (2.1) dans \mathbb{R}^2 et où $f, g \in C^1(D)$. Supposons que γ^+ est une orbite bornée et positive et que $\omega(\gamma^+)$ ne contient que des points ordinaires. Alors $\omega(\gamma^+)$ est une orbite périodique. De plus si $\omega(\gamma^+) \neq \gamma^+$ alors l'orbite périodique est appelé cycle limite .

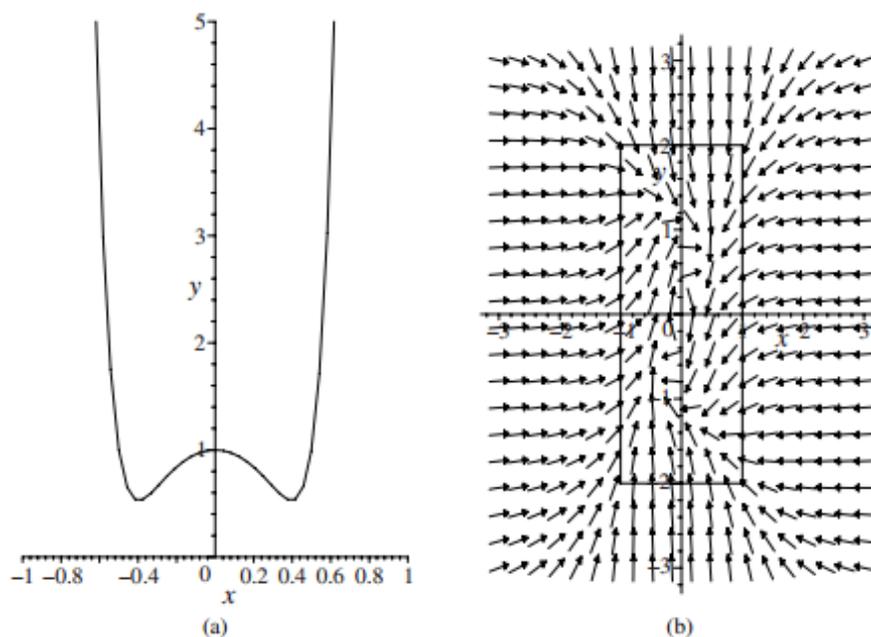
Un résultat analogue est valable pour une orbite bornée et négative.

Preuve. : D'après le théorème (1.4.1), $\omega(\gamma^+)$ est compacte, connecte et non vide, alors le théorème (1.4.2) donne qu'il existe un ensemble minimale borné $M \subset \omega(\gamma^+)$, tel que M contient des points ordinaires, à cause du théorème (1.4.3) M est une orbite périodique. ■

Corollaire 2.2.1 : Soit D un ensemble fermé borné ne contenant aucun point singulier et supposons que D est positivement invariant . Alors il existe un cycle limite contenu dans D .

Exemple 2.2.1 : En considère un rectangle avec des coins à $(-1, 2), (1, -2), (-1, -2)$ et $(1, 2)$, prouvons que le système suivant a au moins un cycle limite :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 8x^3. \\ \dot{y} = 2y - 4x - 2y^3. \end{cases}$$



Les points singuliers sont trouvés par résolvant les équations $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Soit $y = 8x^3$. Alors $\dot{y} = 0$ si $x(1 - 4x^2 + 256x^8) = 0$. Le graphique de la fonction est donné à la figure (a). Le graphique n'a pas de racines et l'origine est le seul point singulier. Il n'est pas difficile de montrer que l'origine est un foyer instable. Considérons le flot sur les côtés du rectangle (la figure (b)) :

– sur $y = 2, |x| \leq 1, \dot{y} = -4x - 12 < 0$.

- sur $y = -2, |x| \leq 1, \quad \dot{y} = -4x + 12 > 0.$
- sur $x = 1, |y| \leq 2, \quad \dot{x} = y - 8 < 0.$
- sur $x = -1, |y| \leq 2, \quad \dot{x} = y + 8 > 0.$

Le rectangle est positivement invariant et il n'y a pas d'autres points singuliers que l'origine qui est instable.

Par conséquent, il existe un cycle limite stable à l'intérieur du rectangle par le corollaire du théorème de Poincaré-Bendixson.

Théorème 2.2.2 : (Critère de Dulac)

On considère le système (2.1) où f et g sont de classe C^1 sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$. Soit ψ une fonction de classe C^1 . Soit A une région annulaire de E .

Si $\frac{\partial}{\partial x}(\psi f) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi g)$ ne change pas de signe dans A , alors il y a un seul cycle limite contenu dans A .

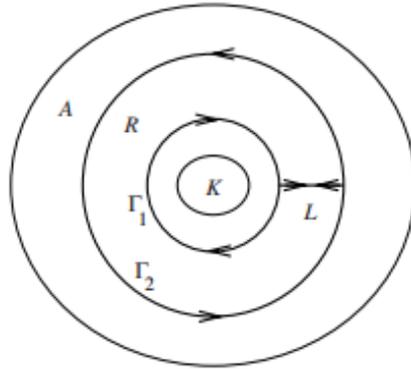
Preuve. : Supposons que Γ_1 et Γ_2 des cycles limites encerclant K des périodes T_1 et T_2 , respectivement. On applique le théorème de Green à la région R .

$$\iint_R \left[\frac{\partial(\psi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y} \right] dx dy = \oint_{\Gamma_2} (\psi f dy - \psi g dx) + \int_L (\psi f dy - \psi g dx) - \oint_{\Gamma_1} (\psi f dy - \psi g dx) - \int_L (\psi f dy - \psi g dx).$$

Maintenant, sur Γ_1 et Γ_2 , $\dot{x} = f$ et $\dot{y} = g$, alors :

$$\iint_R \left[\frac{\partial(\psi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi g)}{\partial y} \right] dx dy = \int_0^{T_2} (\psi f g - \psi g f) dt - \int_0^{T_1} (\psi f g - \psi g f) dt = 0;$$

contradiction avec l'hypothèse $\frac{\partial}{\partial x}(\psi f) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi g) \neq 0$ dans D . Par conséquent, il y a au plus un cycle limite contenu entièrement dans D .



■

Exemple 2.2.2 : Utilisons le critère de Dulac pour prouver que le système a un cycle limite unique dans D .

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

En utilisant les transformations aux coordonnées polaires :

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

Donc, le système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - 2r^2 - r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

l'origine est un seul point singulier. Sur le cercle

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2}, \\ \dot{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \theta\right). \end{cases} \quad d'o\grave{u} \quad \dot{r} > 0$$

Sur le cercle

$$\begin{cases} r = 1, \\ \dot{r} = -1 - \sin^2 \theta \end{cases} \quad d'o\grave{u} \quad \dot{r} < 0$$

Donc

$$\begin{cases} \text{Si } r \geq 1 & \text{alors } \dot{r} < 0 \\ \text{Si } 0 < r \leq \frac{1}{2} & \text{alors } \dot{r} > 0 \end{cases}$$

Par conséquent, il existe un cycle limite dans $A = \{r : \frac{1}{2} < r < 1\}$ d'après le corollaire du théorème de Poincaré–Bendixson.

$\text{div}(X) = 2(1 - 4r^2 - 2r^2 \sin^2 \theta)$ si $\frac{1}{2} < r < 1$, alors $\text{div}(X) < 0$. Puisque la divergence ne change pas le signe dans A , il y a au plus un cycle limite dans A selon le critère de Dulac.

2.2.2 Non existence des cycles limites

Nous venons de voir, par l'application du théorème de Poincaré–Bendixson ou de ses corollaires, qu'il est possible de montrer l'existence d'au moins un cycle limite pour un système dynamique donnée. Nous allons maintenant voir deux critères qui permettent d'exclure l'existence de tout cycle limite, dans un certains domaine.

Théorème 2.2.3 : (*Critère de Bendixson*)

Supposons que le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ soit simplement connexe (pas de trous en D), et (f, g) est continûment différentiable dans D . Le système (2.1) n'admet pas de cycle limite dans D , si $\nabla(f, g)$ ($\text{div}(f, g)$) non nulle et ne change pas de signe en D .

Preuve. : Supposons que $\nabla(f, g)$ conserve un signe constant différent de zéro. De plus supposons qu'il existe un cycle limite pour le système (2.1) représenté par une orbite fermée C contenue entièrement dans D . Notons par G l'intérieur de C .

Appliquons le théorème de Gauss de la forme :

$$\begin{aligned} \int_G \int \nabla(f, g) d\sigma &= \oint_C (f dy - g dx) \\ &= \oint_C \left(f \frac{dy}{ds} - g \frac{dx}{ds} \right) ds \end{aligned}$$

Où s est la surface intérieure à C . La dernière intégrale est égale zéro puisque l'orbite fermée C correspond à une solution de l'équation (2.1). Alors la première intégrale s'anule, il en résulte une contradiction avec la supposition. ■

Exemple 2.2.3 : Considère le système dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = y + x^3 \\ \dot{y} = g(x, y) = x + y + y^3 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1 + 3y^2, \end{cases}$$

La divergence de la fonction vectorielle est $3x^2 + 3y^2 + 1$ puisque cette expression est définie positive, alors le système n'a pas de cycles limites selon le critère de Bendixson.

Théorème 2.2.4 : (*Critère de Dulac*)

On considère le système (2.1) où f et g sont de classe C^1 . Soit ψ une fonction de classe C^1 . Supposons que le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ soit simplement connexe (il n'a pas de trous).

Si $\frac{\partial}{\partial x}(\psi f) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi g)$ non nulle et de signe constant sur D , alors il n'y a pas de cycle limite contenu entièrement dans D .

2.2.3 Stabilité des cycles limites

Considérons $\gamma(t)$ est un cycle limite de période T pour le système (2.1).

Définition 2.2.1 : Si la quantité $\int_0^T (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\gamma(t))dt$ est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

Théorème 2.2.5 : Soit γ une orbite périodique du système (2.1) de période T . On dit que :

* γ est un cycle limite hyperbolique stable si :

$$S = \int_0^T (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\gamma(t))dt < 0.$$

* γ est un cycle limite hyperbolique instable si :

$$S = \int_0^T (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})(\gamma(t))dt > 0.$$

Exemple 2.2.4 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = g(x, y) = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

On a :

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

est un cycle limite de période 2π .

Alors :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) (\cos(t), \sin(t)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [(1 - 3x^2 - y^2) + (1 - x^2 - 3y^2)] (\cos(t), \sin(t)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta) - 3\sin^2(\theta)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2(\theta) - 4\sin^2(\theta)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0.
 \end{aligned}$$

Donc $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est un cycle limite hyperbolique stable.

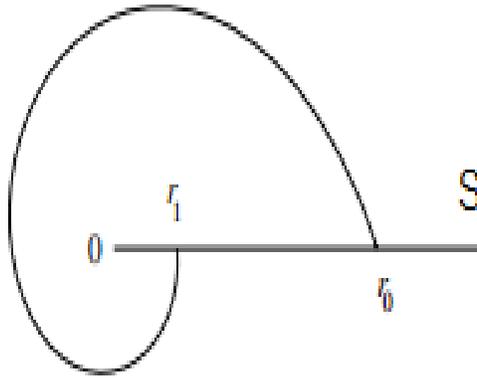
2.2.4 Section de Poincaré

Nous présenterons maintenant une méthode d'étude du comportement qualitatif des solutions périodiques d'un système différentiel, appelée *méthode des sections de Poincaré* ou *application du premier retour* qui peut être utilisée pour les systèmes $\dot{X} = F(X)$ dans \mathbb{R}^n . Nous décrirons cette méthode dans le cas le plus simple des systèmes autonomes dans \mathbb{R}^2 pour simplifier l'étude.

Supposons qu'il existe un segment de droite S transversalement traversé (aucune trajectoire n'est tangentielle à S) alors S est appelé une section Poincaré. Considérons un point r_0 situé sur S . comme la montre la figure suivante, suivez le flot de la trajectoire jusqu'à ce qu'elle rencontre ensuite S en un point r_1 . Ce point est connu comme le premier retour de l'application discrète Poincaré $\mathbf{P} : S \rightarrow S$, définie par :

$$r_{n+1} = \mathbf{P}(r_n),$$

où r_n correspond à r_{n+1} et tous les points se trouvent sur S , trouver la fonction \mathbf{P} équivalent à résoudre les équations différentielles(2.1) . Malheureusement, cela est très rarement possible, et il faut compter sur des solveurs numériques pour faire des progrès.



Exemple 2.2.5 : On considère le segment de ligne :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}.$$

On trouve la section de Poincaré pour le système suivant et la liste les huit premiers retours sur S étant donné que $r_0 = 1$.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

en coordonnées polaires, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^2 \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

L'ensemble des équations (2.2) peut être résolu en utilisant les conditions initiales :

$$r(0) = 0, \quad \theta(0) = 0.$$

Les solutions sont données :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{1}{1+t} \\ \theta(t) = t. \end{cases}$$

Les trajectoires circulent autour de l'origine avec une période de 2π , en substituant t , le flot est défini par :

$$r(t) = \frac{1}{1 + \theta(t)}.$$

Le flot est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et les retours successifs requis se produisent lorsque $\theta = 2\pi, 4\pi, \dots$ une carte définissant ces points est donnée par :

$$r_n = \frac{1}{1 + 2n\pi}.$$

Sur S , où $n = 1, 2, \dots$ comme $n \rightarrow +\infty$, la suite de points se déplace vers le point d'équilibre à l'origine comme prévu, à présent :

$$r_{n+1} = \frac{1}{1 + 2(n+1)\pi}.$$

L'algèbre élémentaire est utilisée pour déterminer l'application de retour Poincaré \mathbf{P} , qui peut être exprimée comme :

$$r_{n+1} = \mathbf{P}(r_n) = \frac{1}{1 + 2\pi r_n}.$$

Les huit premiers retours sur le segment de ligne S se produisent aux points :

$$\begin{aligned} r_0 &= 1, & r_1 &= 0.13730, & r_2 &= 0.07371, & r_3 &= 0.05038, & r_4 &= 0.03827, \\ r_5 &= 0.03085, & r_6 &= 0.0258, & r_7 &= 0.02223, & r_8 &= 0.01951. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.6 : On considère le segment de ligne :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < \infty, y = 0\}.$$

On détermine la stabilité du cycle limite dans le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases}$$

On coordonnée polaire le système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

L'origine est un foyer instable, et il y a un cycle limite Γ de rayon 1 centré à l'origine.

Un portrait de phase montrant deux trajectoires est donné dans la figure suivante :

Le système (2.3) peut être résolu puisque les deux équations différentielles sont séparables.

Les solutions sont données par :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{1}{1 + C \exp(-t)} \\ \theta(t) = t + \theta_0. \end{cases}$$

Avec C et θ_0 sont des constantes.

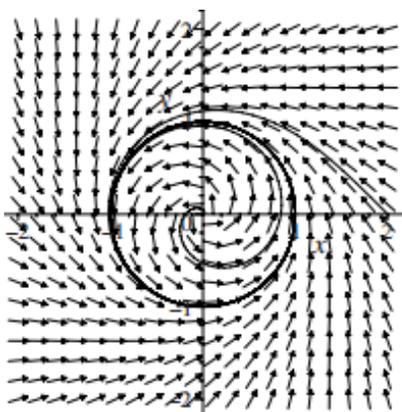


FIG. 2.4 – Deux trajectoires pour le système (2.3) l’une commençant à $(2, 0)$ et l’autre à $(0.01, 0)$.

Les trajectoires circulent autour de l’origine avec une période 2π .

Supposons qu’une trajectoire commence en dehors de Γ on S , disons en $r_0 = 2$.

Les solutions sont alors données par :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \exp(-t)} \\ \theta(t) = t, \end{cases}$$

par conséquent, une application de retour peut être exprimée comme :

$$r_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \exp(-2n\pi)},$$

où n est un nombre naturel. Si, toutefois, une trajectoire commence à l’intérieur de S , disons $r_0 = \frac{1}{2}$, alors :

$$r(t) = \frac{1}{1 + \exp(-t)}, \quad \theta(t) = t,$$

et une application de retour est donnée par :

$$r_n = \frac{1}{1 + \exp(-2n\pi)}.$$

Dans les deux cas $r_n \rightarrow 1$ comme $n \rightarrow \infty$. le cycle limite est stable des deux côtés, et le cycle limite Γ est hyperbolique stable puisque $r_n \rightarrow 1$ comme $n \rightarrow \infty$ pour tout point initial en dehors de l'origine.

Le théorème suivant donne une meilleure méthode pour déterminer la stabilité d'un cycle limite.

Théorème 2.2.6 : Définir le multiplicateur caractéristique M à être :

$$M = \left. \frac{d\mathbf{P}}{dr} \right|_{r^*}$$

où r^* est un point fixe de l'application Poincaré \mathbf{P} correspondant à un cycle limite Γ , puis si :

1. $|M| < 1$, Γ est un cycle limite stable hyperbolique.
2. $|M| > 1$, Γ est un cycle limite instable hyperbolique.
3. $|M| = 1$ et $\frac{d^2\mathbf{P}}{dr^2} \neq 0$, alors le cycle limite est stable d'un côté et instable de l'autre, dans ce cas Γ est appelé un cycle limite semi stable.

Définition 2.2.2 : Un point d'équilibre r^* de la période une d'une application Poincaré \mathbf{P} est appelé hyperbolique si $|M| \neq 1$.

Exemple 2.2.7 : On utilise le théorème précédent pour déterminer la stabilité du cycle limite.

Considérons le système (2.3), l'application retour le long de S est donnée par :

$$r_n = \frac{1}{1 + C \exp(-2n\pi)}, \quad (2.4)$$

où C est une constante, donc :

$$r_{n+1} = \frac{1}{1 + C \exp(-2(n+1)\pi)}. \quad (2.5)$$

En substituant $C = \frac{1 - r_n}{r_n \exp(2n\pi)}$ de l'équation (2.4) en (2.5) donne l'application Poincaré :

$$r_n = \mathbf{P}(r_n) = \frac{r_n}{r_n + (1 - r_n) \exp(-2\pi)}.$$

L'application Poincaré a deux points équilibres, l'un à zéro et l'autre à $r^* = 1$, correspondant

au point équilibre à l'origine au cycle limite Γ , respectivement à présent :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dr} = \frac{\exp(-2\pi)}{(r + (1 - r) \exp(-2\pi))^2},$$

en utilisant le calcul élémentaire, et

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{dr} \right|_{r^*} = \exp(-2\pi) \simeq 0.00178 < 1.$$

Donc le cycle limite Γ est une attraction hyperbolique.

2.3 Existence des cycles limites dans \mathbb{R}^n

Le théorème de Poincaré-Bendixson sur l'existence des solutions périodiques est valable uniquement pour les systèmes autonomes dans le plan ($n = 2$). Dans cette section nous généralisons ce théorème au cas $n > 2$, en ajoutant d'autres hypothèses. Dans ce qui suit nous allons utiliser les résultats théoriques de R.A.Smith.

2.3.1 La théorie de R.A.Smith

Considérons le système différentiel autonome

$$\dot{X} = F(X) \tag{2.6}$$

Où F est une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

Supposons que $F(x)$ satisfait l'hypothèse suivante

(H₁) *Il existe un sous-ensemble S de \mathbb{R}^n tel que $F(X)$ soit localement Lipschitzienne sur S .*

(H₂) *Il existe une forme quadratique : $U(x) = x^*P_u x$ telle que*

$$U(x_1(t) - x_2(t)) \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $x_1(t), x_2(t)$ sont des solutions bornées de l'équation (2.6) entièrement contenues dans S .

(H₃) *P_u est une matrice carrée d'ordre n , réelle, constante, symétrique, régulière et possédant 2 valeurs propres négatives et $(n - 2)$ valeurs propres positives.*

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 : *Supposons que l'équation (2.6) satisfait **(H₁)**, **(H₂)**, **(H₃)** est possède*

une semi-orbite bornée $\gamma \subset S$. Si $\omega(\gamma)$ ne contient aucun point singulier de l'équation (2.6) alors $\omega(\gamma)$ contient au moins une orbite périodique.

Remarque 2.3.1 : Pour obtenir des résultats plus forts (assurer l'unicité) nous ajoutons les hypothèses suivantes :

(H₄) Il existe des constantes positives λ, ε_1 et une forme quadratique $V(x)$ telle que pour toutes solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de l'équation (2.6) on ait

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t) - x_2(t)) + 2\lambda V(x_1(t) - x_2(t)) \leq -\varepsilon_1 |x_1(t) - x_2(t)|^2$$

pour tout les t pour les quels $x_1(t)$ et $x_2(t)$ appartiennent à S .

(H₅) Il existe des constantes positives μ, ε_2 et une forme quadratique $W(x)$ telle que pour toutes solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de l'équation (2.6) on ait

$$\frac{d}{dt}W(x_1(t) - x_2(t)) - 2\mu W(x_1(t) - x_2(t)) \leq -\varepsilon_2 |x_1(t) - x_2(t)|^2$$

pour tout les t pour les quels $x_1(t)$ et $x_2(t)$ appartiennent à S .

(H₆) $V(x) = x^*P_v x$, $W(x) = x^*P_w x$, où P_v et P_w sont des matrices carrées d'ordre n symétriques telles que $(P_v - P_w)$ possède deux valeurs propres négatives et $(n - 2)$ valeurs propres positives. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 : Supposons que l'équation (2.6) satisfait **(H₁)**, **(H₄)**, **(H₅)** **(H₆)** est possède une semi-orbite bornée $\gamma \subset S$. Si $\omega(\gamma)$ ne contient aucun point singulier de l'équation (2.6) alors $\omega(\gamma)$ contient au moins une orbite périodique et elle est unique.

Considérons l'hypothèse :

(H₇) $V(x) = x^*P_v x$, P_v est une matrice carrée d'ordre n , réelle, constante, symétrique, et possédant 2 valeurs propres négatives et $(n - 2)$ valeurs propres positives.

Théorème 2.3.3 : Supposons que l'équation (2.6) vérifie les hypothèses $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_7)$ est possède une semi-orbite bornée $\gamma \subset S$. Si $\omega(\gamma)$ ne contient aucun point singulier de (2.6) alors $\omega(\gamma)$ est une orbite périodique de l'équation (2.6) et elle est unique.

2.3.2 Existence d'orbites récurrentes

Dans la pratique, pour appliquer les résultats des théorèmes (2.3.2) et (2.3.3) il est nécessaire de prouver l'existence d'une semi-orbite bornée γ de (2.6) telle que $\omega(\gamma)$ ne contienne aucun point singulier. Considérons les hypothèses suivantes :

(\mathbf{H}_8) $x = 0$ est l'unique point de \mathbb{R}^n tel que $F(x) = 0$.

(\mathbf{H}_9) La matrice jacobienne $J(x) = \left[\frac{dF}{dx}(x) \right]$ existe et est continue sur un voisinage de $x = 0$.

(\mathbf{H}_{10}) Il existe une constante $\beta < 1$ et une matrice K de type $n \times n$ telle que $|x|^\beta [F(x) - Kx] \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow \infty$

(\mathbf{H}_{11}) $J(0)$ ne possède aucune valeurs propre z telle que $0 \geq \operatorname{Re} z \geq -\lambda$, où λ est la constante de l'hypothèse (\mathbf{H}_4) .

(\mathbf{H}_{12}) La matrice K possède au moins une valeur propre z_0 telle que $0 > \operatorname{Re} z_0 > -\lambda$, mais ne possède aucune valeurs propre z telle que $\mu \geq \operatorname{Re} z \geq 0$.

Théorème 2.3.4 : Supposons que l'équation (2.6) satisfait $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_5)$ avec $S = \mathbb{R}^n$. Supposons de plus que $(\mathbf{H}_8), (\mathbf{H}_9), (\mathbf{H}_{10}), (\mathbf{H}_{11}), (\mathbf{H}_{12})$ soient satisfaites. Alors la semi-orbite de l'equation (2.6) possède les trois propriétés suivantes :

1. Si $\omega(\gamma)$ est non vide, alors γ est une semi-orbite bornée.
2. Si $0 \in \omega(\gamma)$, alors 0 est l'unique point dans $\omega(\gamma)$.
3. $0 \notin \omega(\gamma)$ pour au moins une semi-orbite bornée γ de (2.6).

Corollaire 2.3.1 : *Supposons que (\mathbf{H}_6) soit vérifiée ainsi que les hypothèses du théorème (2.3.4). Alors l'équation (2.6) possède au moins une orbite périodique. De plus pour toute semi-orbite de l'équation (2.6) l'ensemble $\omega(\gamma)$ est vide ou réduit au point critique 0 ou bien est une orbite périodique de l'équation (2.6).*

On suppose que l'équation (2.6) satisfait les deux hypothèses suivantes :

(\mathbf{H}_{13}) *Il existe des constantes positives λ, ε et une matrice P de type $n \times n$, constante, réelle, symétrique, singulière, avec deux valeurs propres négatives et $(n-2)$ valeurs propres positives telle que*

$$(x - y)^* P [F(x) - F(y) + \lambda(x - y)] \leq -\varepsilon |x - y|^2, \forall x, y \in S.$$

où $(x - y)^*$ est le vecteur transposé de $(x - y)$ et $|x - y|$ est la norme euclidienne du vecteur $(x - y)$.

(\mathbf{H}_{14}) *Il existe un sous-ensemble ouvert D borné de \mathbb{R}^n positivement invariant avec fermeture $\bar{D} \subset S$ tel que sa frontière ∂D entoure toute orbite de (2.6) qui la rencontre.*

Cette dernière hypothèse signifie que si x est une solution de (2.6) telle que $x(t_0) \in \partial D$ alors $x(t) \in \bar{D}$ pour tout $t > t_0$ et il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t) \in D$ pour tout $t > t_1$.

Définition 2.3.1 : *On dit que l'équation (2.6) est dissipative s'il existe une constante $b > 0$ et une fonction $\tau : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ telle que toute solution x de (2.6) qui vérifie $|x(t_0)| \leq \rho$ existe pour $t_0 \leq t < +\infty$ et vérifie $|x(t)| < b$ pour $t > t_0 + \tau(\rho)$.*

*Si on choisit $\rho > b$ et on prend pour D l'union de toutes les semi-orbités qui au temps t_0 sont dans la boule $|x| < \rho$, alors D est un ouvert borné satisfaisant **(\mathbf{H}_{14})**.*

Théorème 2.3.5 : *Supposons que l'équation (2.6) satisfait **(\mathbf{H}_{13})** et **(\mathbf{H}_{14})** et D contient un seul point critique k . Supposons de plus que F soit continûment différentiable dans un*

voisinage de k avec $\operatorname{Re} z_2 > 0 > \operatorname{Re} z_3$ où z_1, z_2, \dots, z_n sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de F au point k arrangées dans l'ordre : $\operatorname{Re} z_1 \geq \operatorname{Re} z_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} z_n$. Alors toute semi-orbite dans D converge soit vers k soit vers une trajectoire fermée quand $t \rightarrow +\infty$ et D contient au moins une trajectoire fermée qui soit orbitalement stable. Si de plus f est analytique dans S alors D contient seulement un nombre fini de trajectoires fermées et au moins une d'elle est asymptotiquement orbitalement stable.

2.3.3 Application

On considère le système d'équations différentielles dans \mathbb{R}^3 suivant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, et on étudie suivant les valeurs de ce paramètre, l'existence des solutions périodiques pour ce système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x - F(y) \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y - F(z) \\ \frac{dz}{dt} = -\alpha z - F(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

Théorème 2.3.6 : On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

1. $\alpha \in \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[$,
2. $F \in C^1(\mathbb{R})$, $\dot{F}(0) = 1$ et $\frac{1}{2} < \dot{F}(x) < \frac{3}{2}$,
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{2} - f(x)}{x} = 0$.

Alors le système (2.7) admet au moins une solution périodique orbitalement stable.

Preuve. : Nous allons vérifier qu'avec les hypothèses qu'on a, le système (2.7) vérifie les hypothèses (\mathbf{H}_{13}) et (\mathbf{H}_{14}) .

Ecrivons d'abord le système (2.7) sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\Phi(Cx) \quad (2.8)$$

où A, B et C sont des matrices réelles et constantes de type $n \times n, n \times r, n \times s$, respectivement, et Φ une fonction continue de \mathbb{R}^s dans \mathbb{R}^r . Si $S \subset \mathbb{R}^n$ et $CS = \{Cx : x \in S\}$ alors $CS \subset \mathbb{R}^s$. On suppose qu'il existe une constante $\Lambda(CS) \geq 0$ telle que

$$|\Phi(\varepsilon_1) - \Phi(\varepsilon_2)| \leq \Lambda(CS) |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in CS.$$

La matrice de type $r \times s$

$$\chi(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad \text{telle que } \det(zI - A) \neq 0$$

Si A n'a pas de valeur propre z telle que $\operatorname{Re} z = -\lambda$, alors on peut définir $\mu(\lambda) = \sup |\chi(i\omega - \lambda)|$

en posant $A = J(0), B = C = I_3$ où $J(0)$ est la matrice Jacobiënne du second membre de (2.7), prise en $x = 0$. On a alors

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ -1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - F(x_2) \\ x_3 - F(x_3) \\ x_1 - F(x_1) \end{pmatrix}$$

Avant de poursuivre la démonstration nous allons d'abord annoncer quelques lemmes.

Lemme 2.3.1 : Avec $\lambda = \alpha > 0$, on a :

$$\mu(\lambda) = \sup |\chi(i\omega - \lambda)| = 2 \quad \text{et} \quad \mu(\lambda)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Lemme 2.3.2 : *Pour que le système (2.7), écrit sous forme (2.8) , il suffit que*

$$\frac{1}{2} < \dot{F}(x) < \frac{3}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lemme 2.3.3 : *Pour que le système (2.7) soit dissipatif, il suffit d'avoir*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{2} - F(x)}{x} = 0.$$

Des lemmes (2.3.1),(2.3.2),(2.3.3), on déduit que sous les hypothèses du théorème, le système (2.7) vérifie les hypothèses (\mathbf{H}_{13}) et (\mathbf{H}_{14}) .

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de vérifier que l'ensemble D pour lequel on vérifie l'hypothèse (\mathbf{H}_{14}) , contient un seul point critique k et que la matrice Jacobienne du second membre du système(2.7) au point k a ses valeurs propres telles que : $\operatorname{Re} z_1 \geq \operatorname{Re} z_2 > 0 > \operatorname{Re} z_3$. Pour cela, observons d'abord que l'équation (2.7) n'admet comme point critique que le point 0 et que la matrice Jacobienne du second membre du système (2.7) en ce point est précisément la matrice A dont les valeurs propres sont telles que :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = -\alpha + \frac{1}{2} > 0 & \text{si } \alpha < \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Re} \lambda_3 = -\alpha - 1 < 0 & \text{si on prend } \rho > b \end{cases}$$

et D l'ensemble de toutes les semi-orbités qui à un temps t_0 sont dans la boule $|x| < \rho$ alors D vérifie (\mathbf{H}_{14}) et $0 \in D$. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées et donc le système (2.7) admet au moins une solution périodique orbitalement stable. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels autonomes, il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée, on parle par définition d'un cycle limite.

Dans le premier chapitre on a présenté certains résultats de base, concernant la théorie qualitative des systèmes dynamique en particulier les systèmes différentiels autonomes, pour la compréhension de la suite. Dans le deuxième chapitre on a considéré une classe importante des solutions périodiques nommées les cycles limites. Ce chapitre est réparti en deux parties, dans la première partie on a étudié l'existence, unicité non-existence et stabilité des cycles limites dans \mathbb{R}^2 , où nous avons utilisé la théorie de Poincaré-Bendixson. On a consacré la deuxième partie à une généralisation obtenus grâce à la théorie de R.A.Smith pour l'existence des solutions périodique dans \mathbb{R}^3

Bibliographie

[Livres] :

- [1] M.S Moulay et A. Berboucha. (2005). Sur les solutions périodiques d'un système différentiel de \mathbb{R}^3 Bulltin de la Société Royale des Sciences de Liège. Vol. 74 (4 – 5). pp 239 – 248.
- [2] Stephen, L. (2007). Dynamical Systems with Application using Mathematica. Birkhauser Boston, c/o Springer Science+Business Media LLC, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA.
- [3] Verhulst, F. (1989). Nonlinear Differential Equations And Dynamical Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[Mémoires] :

- [4] Berrah Abdelmalek. (2009). Une étude de la théorie de réduction de R.A.Smith et ses applications. Magister de l'université Abderhmane Mira, Béjaia.
- [5] Gasmi Ahlem. (2018). Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat de l'université de Frères Mentouri, Constantine 1.
- [6] Sekkey Anouaar. (2018). Stabilité des solutions périodiques. Master de l'université Mohamed Khider, Biskra.

Annexes

Annexe 1 : Forme quadratique

Définition 2.3.2 Soit $\varphi : E \times E \rightarrow k$ une forme bilinéaire symétrique (ie :

- φ est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- φ est linéaire par rapport à la $\mathcal{L}^{\text{ème}}$ variable ($\forall \beta \in K, \forall (x, y, y') \in E^3 \varphi(x, \beta y + y') = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$).

On appelle une forme quadratique associée à φ l'application notée ϕ , de E dans K définie par :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x)$$

Annexe 2 : Courbe de Jordan

Théorème 2.3.7 : Toute courbe de Jordan J (courbe fermée du plan sans points doubles) dans \mathbb{R}^2 dévise le plan en deux composantes connexes disjointes dont elle est la frontière commune, une d'entre elles est bornée, plus précisément

$$\mathbb{R}^2 \setminus J = S_e \cup S_i \quad \text{avec } S_e \cap S_i = \emptyset$$

S_e est non bornée, appelée extérieur de J ; S_i est bornée, appelée intérieur de J .

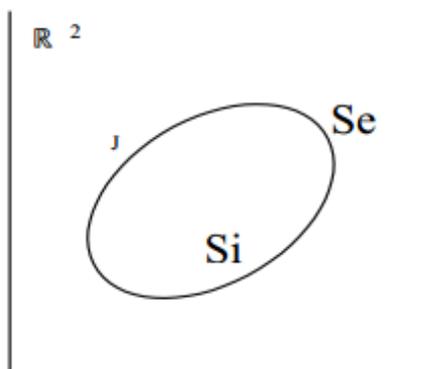


FIG. 2.5 – La courbe de Jordan

Théorème 2.3.8 *Soit J une courbe de Jordan de longueur finie. Supposons que P et Q soient deux fonctions continues différentiables définies sur l'intérieur D de J . Alors*

$$\iint_D \left[\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right] dx dy = \oint_J (P dy - Q dx).$$