

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Menacer Rihab

Titre :

Sur certains aspects des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Laadjal baya	UMKB	Encadreur
Dr. Kaboul hanen	UMKB	Examineur
Dr. Mokhtari Zouhair	UMKB	président

Juin 2019

DÉDICACE

*C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé,*

***DIEU** qui m'a donné fois, raison et lucidité.*

Merci mille fois et que "Allah" vont garde et protège.

*Mes chers parents "**Menacer tidjani** et **Benmoussa zahra**" pour leurs amours, leurs
patience et leur encouragement qui n'jamais cassé de me convenir Durant mes années
d'études,*

*♡ Mes sœurs " **Djihad, Safa, Tasnim** " ♡.*

*♡ Mes frères " **Mouhamed , Yasmine, Raid** " ♡.*

♡ Mes amis proches ♡

*♡ Toute ma famille " **Menacer** et **Ben moussa** " ♡.*

*♡ Tous mes collègues de ma promotion **2019** ♡*

REMERCIEMENTS

C'est avec l'aide de DIEU tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé,

DIEU qui m'a donné fois, raison et lucidité.

*Je tiens à remercier ma encadreur **Dr. Laadjal Baya**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet.*

*Mon sincère remerciement aux membres de jury **Drs. (Mokhtari Zouhair) et (Kaboul hanen)** qui ont accepté de juger mon travail.*

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-même afin de nous assurer une formation de qualité.

Je n'oublie pas de remercier ma famille d'être avec nous dans tout les moments.

Enfin je m'exprime ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Généralités sur les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire	3
1.1 Les dérivées d'ordre fractionnaire	3
1.1.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	3
1.1.2 Dérivées Fractionnaires de Caputo	10
1.1.3 Comparaison entre la Dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo	14
1.2 Equations différentielles fractionnaires	15
1.2.1 Problème de Cauchy fractionnaire	16
1.2.2 Notions de base	17
1.2.3 Existence et unicité	18
1.2.4 Résolution numérique	21
1.3 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire	23

1.3.1	Méthode directe (Lyapounov)	24
1.3.2	Méthode indirecte (Linéarisation)	25
2	Etude d'un Système fractionnaire chaotique	29
2.1	Bifurcations	29
2.1.1	Bifurcation noeud-col	30
2.1.2	Bifurcation fourche	31
2.1.3	Bifurcation transcritique	32
2.1.4	Bifurcation de Hopf	32
2.2	Théorie du Chaos	33
2.2.1	Définition du Chaos	33
2.2.2	Caractéristique du Chaos	34
2.2.3	Routes vers le chaos	34
2.3	Etude du système de Chen d'ordre fractionnaire	35
2.3.1	Introduction au système de Chen	35
2.3.2	L'équilibre du modèle	36
2.3.3	Stabilité des points d'équilibre	37
2.3.4	Diagramme de bifurcation	42
	Conclusion	44
	Bibliographie	46
	Annexe A : Outils de base	48
	Annexe B : Abréviations et Notations	50

Table des figures

1.1 Les dérivées à droite et à gauche comme opérations sur le "passé" et le "futur" de $f(x)$	7
1.2 Région de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$	27
2.1 Diagramme de bifurcation Hopf	33
2.2 Le système est instable pour l'ordre entier $\alpha = 0.95$ avec la valeur du paramètre $c = 20.07$	40
2.3 Le système est instable pour l'ordre entier $\alpha = 1$ avec la valeur du paramètre $c = 20.07$	41
2.4 Le système est stable pour l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.81$, avec les paramètres $a = 35, b = 3$ et $c = 28$	41
2.5 Le système est instable pour l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$, avec les paramètres $a = 35, b = 3$ et $c = 28$	42
2.6 La trajectoire $(x, y$ et $z)$ converge vers le point d'équilibre t_0 , pour $c = 15$	43
2.7 Le système se stabilise sur l'un des t_1 ou t_2 pour $c = 18$	43

Liste des tableaux

Introduction

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du **17ème** siècle, l'époque où **Newton** et **Leibniz** ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, **Leibniz** a présenté le symbole de dérivation d'ordre n , $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$, où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans \mathbb{Q} . Il posa la question : Et si $n = \frac{1}{2}$? En 1695, dans une lettre à l'**Hospital**, **Leibniz** écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $x\sqrt{dx} : x$, un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences » . Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée en 30 septembre 1695 [7], comme heure de naissance du calcul fractionnaire. Donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Ce sujet peut être considéré comme un vieux roman et encore nouveau sujet. mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiées. Le chaos est la deuxième notion-clé sur laquelle se base ce mémoire. La théorie des systèmes dynamiques a pour but initial la description du mouvement d'un objet comme celui d'une planète ou d'une particule, représenté, en temps continu, par une équation différentielle autonome ou bien, en temps discret, par une application que l'on itère. Elle tient ses origines de la mécanique céleste, avec le travail fondateur de **Henri Poincaré** motivé par la question de la stabilité du système solaire, qu'il élabora dans son mémoire "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique" paru en 1890.

L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils

présentent une dynamique beaucoup plus complexe. Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept de calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [10], thermiques [11] et visco-élastiques [9] sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés [6]

Un problème que nous allons étudier c'est quand un système ordinaire est chaotique, dans quelles conditions le système fractionnaire correspondant est aussi chaotique? Plus précisément pour quelles ordres, le système fractionnaire reste chaotique?

Notre mémoire est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, Nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cet étude (la dérivation fractionnaire, généralités sur les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, notions de stabilité)

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude d'un système dynamique chaotique d'ordre fractionnaire. On choisit le système de Chen. Et nous avons introduit la théorie de chaos et celle de la bifurcation où nous avons discuté leurs définitions et leurs caractéristiques. A la fin de ce mémoire qui annexé par deux annexes, le premier contient des fonctions utiles telle que la fonction de Gamma, Béta, Mittag-Leffer, tandis que le deuxième est consacré aux différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire. En fin on trouvera une bibliographie utilisée pour cette étude

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire

1.1 Les dérivées d'ordre fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

1.1.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue et intégrable sur tout intervalle borné (a, x) pour $a < x < b$.

Alors l'intégrale :

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (1.1)$$

existe et a une valeur finie, donc on peut considérer l'intégrale double :

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du = \int_a^x (x-t)f(t)dt, \quad (1.2)$$

Par induction dans le cas général, nous avons la formule de **Cauchy** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : I^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt. \quad (1.3)$$

Depuis la généralisation du factoriel par la fonction **gamma** $(n-1)! = \Gamma(n)$, **Riemann** rendu compte que le second membre de (1.3) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.1 Si $f(x) \in C[a, b]$ et $a < x < b$ on a :

1. On appelle *intégrale fractionnaire (à gauche)* de Riemann -Liouville, d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale :

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \quad \text{pour } x \in]a, b[. \quad (1.4)$$

Où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma (voir l'annexe).

2. On appelle *intégrale fractionnaire (à droite)* de Riemann -Liouville, d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale :

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \quad \text{pour } x \in]a, b[. \quad (1.5)$$

Remarque 1.1 Dans la suite du chapitre on utilise uniquement l'intégrale (*à gauche*).

Théorème 1.1 Pour $f(x) \in C[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de **Riemann -Liouville** possède la propriété suivante :

$$I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x), \quad \forall \alpha, \beta > 0. \quad (1.6)$$

preuve. La preuve découle directement de la définition :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du. \end{aligned}$$

Puisque $f \in C[a, b]$ et d'après le théorème de **Fubini** on peut changer l'ordre de l'intégration on obtient alors :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) du \int_u^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha} (t-u)^{1-\beta}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha-\beta}} du = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale de u à x , nous avons utilisé le changement de variable $t = u + s(x-u)$ ce qui nous permet de l'exprimer en termes de la la fonction Bêta (voir l'annexe). ■

Exemple 1.1 Soit $f(x) = x^\beta$, $\beta > -1$ alors pour $\alpha > 0$ non entier on a :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt,$$

posant $t = xu$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} (xu)^\beta x du \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} (u)^\beta du \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Dérivée fractionnaire sur intervalle $[a, b]$

Soit l'équation intégrale **d'Abel** pour tout $\alpha \in [0, 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \varphi(t) dt, \quad x > 0. \quad (1.7)$$

Formellement l'équation (1.7) peut être résolue en changeant x par t puis t par s et en multipliant l'équation (1.7) par $(x-t)^{-\alpha}$ et en l'intégrant donc (1.7) devient :

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt. \quad (1.8)$$

En appliquant le théorème de **Fubini** on obtient :

$$\int_a^x \varphi(s) ds \int_a^t (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad (1.9)$$

avec le changement de variable $t = s + (x-s)$ et la fonction **Bêta** on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (1.10)$$

Après la différentiation on arrive finalement à l'expression :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt. \quad (1.11)$$

Riemann réalise le lien entre l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire à partir de la solution de l'équation intégrale d'**Abel** comme suit :

Soit f une fonction intégrable sur $[a, x] \subset]a, b[$.

Définition 1.2 Pour $\alpha \in]0, 1[$. La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** (à gauche) d'ordre α est définie par l'expression :

$$D_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad \text{pour } a < x < b. \quad (1.12)$$

Définition 1.3 Pour $\alpha \in [n - 1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** (à gauche) d'ordre α est définie par l'expression :

$$\left[D_{a^+}^{(\alpha)} f \right] (x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left[I_{a^+}^{(n-\alpha)} f(x) \right], \quad \text{pour } a < x < b.$$

D'après (1.4) on peut écrire :

$$\left[D_{a^+}^{(\alpha)} f \right] (x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Où $[\cdot]$ désigne la partie entière d'un nombre réel.

Si on remplace $\left[I_{a^+}^{(n-\alpha)} f \right]$ par $\left[I_{b^-}^{(n-\alpha)} f \right]$ dans la définition précédente on obtient la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** (à droite) d'ordre α comme suit :

$$\left[D_{b^-}^{(\alpha)} f \right] (x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_b^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad n = [\alpha] + 1$$

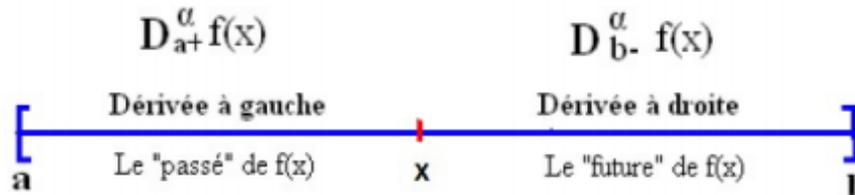


FIG. 1.1 – Les dérivées à droite et à gauche comme opérations sur le "passé" et le "futur" de $f(x)$

On rappelle quelques propriétés utiles dans la suite de ce travail, pour plus de détails on renvoie au livre de Podlubny [1].

Propriété 1.1 : (Composition avec les dérivées d'ordre entier)

La dérivée de **Riemann-Liouville** commute avec la dérivée usuelle, si et seulement si, $f^k(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, n - 1$.

preuve. Soit $D_{a^+}^\alpha$ un opérateur de dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** et $\frac{d^n}{dx^n}$ la dérivée n -ième on a :

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(D_{a^+}^{(\alpha)} f(x) \right) = D_{a^+}^{n+\alpha} f(x) \quad (1.13)$$

Par contre, on a

$$D_{a^+}^{(\alpha)} \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = D_{a^+}^{n+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(1+k-\alpha-n)} \quad (1.14)$$

En comparant les relations (1.13) et (1.14)

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(D_{a^+}^{(\alpha)} f(x) \right) = D_{a^+}^{(\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right),$$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, n-1$. ■

Propriété 1.2 : (*Composition avec les dérivées fractionnaires*)

Soit $D_{a^+}^\alpha$ ($m-1 \leq \alpha < m$) et $D_{a^+}^\beta$ ($n-1 \leq \beta < n$) deux opérateurs et de dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville**. Alors :

$$D_{a^+}^\alpha \left(D_{a^+}^\beta f(x) \right) = D_{a^+}^\beta \left(D_{a^+}^\alpha f(x) \right)$$

seulement dans les deux cas suivantes :

1. $\alpha = \beta$ (le cas trivial).
2. $\alpha \neq \beta$ et $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, r-1$, où $r = \max(n, m)$.

preuve. On a :

$$D_{a^+}^\alpha \left(D_{a^+}^\beta f(x) \right) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^n \left[D_{a^+}^{\beta-k} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)} \quad (1.15)$$

$$D_{a^+}^\beta \left(D_{a^+}^\alpha f(x) \right) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^n \left[D_{a^+}^{\alpha-k} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)} \quad (1.16)$$

En comparant les relations (1.15) et (1.16) on a :

1. Si $\alpha = \beta$ les opérateurs $D_{a^+}^\alpha$ et $D_{a^+}^\beta$ de dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** commutent.
2. Si $\alpha \neq \beta$ les opérateurs $D_{a^+}^\alpha$ et $D_{a^+}^\beta$ de dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** commutent seulement si les deux sommes dans les membres droite de (1.15) et (1.16) sont nulles. Pour cette raison nous demandons la vérification simultanée des conditions :

$$\sum_{k=1}^n \left[D_{a^+}^{\beta-k} f(x) \right]_{x=a} = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n$$

et les conditions :

$$\sum_{k=1}^m \left[D_{a^+}^{\alpha-k} f(x) \right]_{x=a} = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, m$$

Si f admet un nombre suffisant des dérivées continues, alors les conditions précédentes sont équivalentes à $f^k(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, r - 1$, où $r = \max(n, m)$.

■

Propriété 1.3 : (*Composition avec l'intégrale fractionnaire*)

Soit $\alpha, \beta > 0$, telle que $\alpha \in [n - 1, n]$, $\beta \in [m - A, m]$.

1. L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** du même ordre.

$$D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = f(x).$$

En général on a :

$$D_{a^+}^\alpha \left[I_{a^+}^\beta f(x) \right] = D_{a^+}^{\alpha-\beta} f(x),$$

et si $\alpha - \beta < 0$, on pose :

$$D_{a^+}^{\alpha-\beta} f(x) = I_{a^+}^{\beta-\alpha} f(x).$$

2. La dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas.

$$I_{a+}^{(\alpha)} \left[D_{a+}^{(\beta)} f(x) \right] = D_{a+}^{(-\alpha)} \left[D_{a+}^{(\beta)} f(x) \right] = D_{a+}^{(\beta-\alpha)} f(x) - \sum_{k=1}^m \left[D_{a+}^{\beta-k} f(x) \right]_{t=a} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Un cas particulier important doit être mentionné si $0 < \alpha < 1$, alors :

$$I_{a+}^{(\alpha)} D_{a+}^{(\alpha)} f(x) = f(x) - \left[D_{a+}^{\alpha-1} f(x) \right]_{t=a} \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Exemple 1.2 :

$\mathbf{f}(x)$	$\mathbf{I}_a^{(\alpha)} \mathbf{f}(x)$	$\mathbf{D}_a^\alpha \mathbf{f}(x)$	Spécifications
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\beta+\alpha}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda x}$	$a = -\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$
$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda x}$	$a = +\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$

1.1.2 Dérivées Fractionnaires de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $x = a$. Une certaine solution de ce problème a été proposée par **M. Caputo**.

Soient $D_{a+}^{(\alpha)}$ et $D_{b-}^{(\alpha)}$ les dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** qui sont définies précédemment.

Définition 1.4 Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]a, b[$.

1. La dérivée fractionnaire de **Caputo** (à gauche) d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$\left({}^c D_{a+}^{(\alpha)} f \right) (x) = I_{a+}^{(n-\alpha)} (f^{(n)}) (x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt. \quad (1.17)$$

2. La dérivée fractionnaire de **Caputo** (à droite) d'ordre α d'une fonction f est définie

par :

$$\left({}^c D_{b^-}^{(\alpha)} f\right)(x) = I_{b^-}^{(n-\alpha)}(f^{(n)})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b f^{(n)}(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt.$$

Théorème 1.2 Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$, et f possède $n-1$ dérivée en a et si $D_{a^+}^{(\alpha)} f$ existent, alors [2] :

$$\begin{aligned} \left({}^c D_{a^+}^{(\alpha)} f\right)(x) &= \left(D_{a^+}^{(\alpha)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right] \right). \\ \left({}^c D_{b^-}^{(\alpha)} f\right)(x) &= \left(D_{b^-}^{(\alpha)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(b-x)^k}{k!} \right] \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pour presque tout $x \in [a, b]$.

En particulier si $0 < \alpha < 1$

$$\left({}^c D_{a^+}^{(\alpha)} f\right)(x) = (D_{a^+}^{(\alpha)} [f(x) - f(a)])(x)$$

$$\left({}^c D_{b^-}^{(\alpha)} f\right)(x) = (D_{b^-}^{(\alpha)} [f(x) - f(b)])(x)$$

preuve. En effet par définition on a :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{(\alpha)} f(x) &= D_{a^+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right], \\ &= D^n I_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right], \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} \right] dt, \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt, \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) (x-t)^{n-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \left[Df(t) - D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt,
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
 &I_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt, \\
 &= I_{a^+}^{n-\alpha+1} D \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt.
 \end{aligned}$$

De la même façon pour n fois alors :

$$\begin{aligned}
 &I_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt, \\
 &= I_{a^+}^{n-\alpha+n} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt, \\
 &= I_{a^+}^n I_{a^+}^{n-\alpha} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt.
 \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, alors :

$$\begin{aligned}
 &I_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \\
 &= I_{a^+}^n I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x),
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 D_{a^+}^\alpha & \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \\
 & = D^n I_{a^+}^n I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x), \\
 & = I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x), \\
 & = D_{a^+}^\alpha f(x).
 \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. ■

Exemple 1.3 1) *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :*

L'utilisation de la formule (1.17) pour calculer la dérivée fractionnaire de la constante C ($C \in \mathbb{R}$) au sens de **Caputo** d'ordre $\alpha > 0$ exprime que cette dérivée est nulle c'est à dire :

$${}^c D_{a^+}^{(\alpha)} C = I_{a^+}^{(n-\alpha)} [C^{(n)}] = 0.$$

2) *La dérivée de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Caputo :*

Soit α non entier et $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ avec $\beta > n-1$ alors on a :

$$f^n(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta & = I_{a^+}^{(n-\alpha)} f^n(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt, \\
 & = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1) \Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt,
 \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x - a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
 D_{a^+}^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(n - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds, \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1) B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(n - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}.
 \end{aligned}$$

1.1.3 Comparaison entre la Dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Notre but dans cette partie est de faire une comparaison entre la dérivée au sens Riemann liouville et celle de Caputo. Pour cela, nous allons citer quelques observations générales :

- Nous avons vu que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont reliées par la formule (1.19)

$$\left({}^c D_{a^+}^{(\alpha)} f \right) (x) = (D_{a^+}^\alpha f) (x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (x - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}$$

- Les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo qui représentent l'avantage principal de cette approche. Elles acceptent la même forme des équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- En utilisant la propriété suivante de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
 L[f^n(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\
 &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k f^{n-k-1}(0).
 \end{aligned}$$

on arrive à La formule suivante de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour $\alpha \in [n - 1, n[$ et $a = 0$ est :

$$L[D_0^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D_0^{(\alpha-k-1)} f(t) \right]_{t=0}.$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville tandis, on arrive à celle de Caputo pour $\alpha \in [n - 1, n[$ et $a = 0$ est :

$$L[{}^c D_0^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est une généralisation de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier, où n remplacé par α .

Il n'en va pas de même pour la dérivée de Riemann-Liouville. Cette propriété est un avantage important de l'opérateur Caputo sur l'opérateur Riemann-Liouville.

- La dérivée d'une constante est nulle par Caputo contrairement a Riemann-Liouville, elle est :

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

- Riemann commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier n , pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $(n-1 \leq \alpha < n)$. Par contre caputo commence par la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$ pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $(n-1 \leq \alpha < n)$.

1.2 Equations différentielles fractionnaires

Dans cette partie on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo (On considère les dérivées fractionnaire au sens de Caputo ${}^c D^\alpha$). On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). En plus, on va supposer sans perte de généralité que les

dérivées fractionnaires sont développées au point 0.

1.2.1 Problème de Cauchy fractionnaire

Définition 1.5 (*Equations différentielles fractionnaires*)

Une équation différentielle d'ordre fractionnaire est donnée par l'équation :

$${}^c D_0^\alpha x = f(t, x) \quad (1.19)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in [m - 1, m[$, ($m \in \mathbb{N}^*$).

${}^c D_0^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. (pour $a = 0$).

Lorsque f dépend explicitement du temps (1.19) est dit **non-autonome**, dans le cas contraire on dit que (1.19) est **autonome**

Définition 1.6 Une solution $x(t)$ de (1.19) est une fonction α -dérivable définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n telle que :

$${}^c D_0^\alpha x(t) = f(t, x(t))$$

Définition 1.7 (*Problème de Cauchy*)

1. On appelle donnée de Cauchy pour l'équation (1.19) les conditions initiales :

$${}^c D_0^k x(0) = b_k \in \mathbb{R}^n, \quad \text{pour } k = 0, \dots, m - 1 \quad (1.20)$$

2. Le problème de trouver une solution de l'équation (1.19) satisfaisant aux conditions initiales (1.19) est appelé problème de Cauchy fractionnaire (problème aux conditions initiales) et l'on écrit :

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha x = f(t, x) \\ D_0^k x(0) = b_k \in \mathbb{R}^n, \quad \text{pour } k = 0, \dots, m - 1. \end{cases}$$

1.2.2 Notions de base

Définition 1.8 (*Espaces de phases*) :

Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace de phase. On considère chaque composante x_i de x comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n . L'évolution suivant t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

Définition 1.9 (*orbite*)

L'image d'une solution x de l'équation (1.19) est appelée orbite (trajectoire) et notée :

$$\gamma_x = \{y \in \mathbb{R}^n; \exists t \in \mathbb{R} : x(t) = y\}$$

Définition 1.10 (*Points d'équilibre* :)

Un point a est dit point d'équilibre (solution stationnaire) du système (1.19) s'il satisfait $f(a) = 0$

Définition 1.11 (*Un cycle limite*)

Une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires est dite cycle limite c'est donc une solution périodique isolée

Définition 1.12 (*Attracteur*) Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Il existe deux type d'attracteurs :

1. **les attracteurs réguliers** : qui caractérisent l'évolution du système (1.19) comme les points singuliers et les cycles limites.
2. **les attracteurs étranges** (ou chaotiques) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

Définition 1.13 (*Le bassin d'attraction*)

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur.

1.2.3 Existence et unicité

Soit α un réel positif vérifiant $m - 1 < \alpha < m$, ${}^c D_0^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo .

On se donne le problème aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha x(t) = f(t, x) \\ D_0^k x(0) = x_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (1.21)$$

Lemme 1.1 *Si la fonction f est continue alors le problème aux conditions initiales (1.21) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (1.22a)$$

preuve. Premièrement supposons que x est solution de (1.22a), on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)} + I_0^\alpha f(t, x(t)).$$

■

En appliquant l'opérateur de différentiation D_0^α sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que x est solution de l'équation différentielle (1.21).

Appliquons maintenant l'opérateur D_0^k , $0 \leq k \leq m - 1$ sur l'équation de Volterra (1.22a)

$$D_0^k x(t) = \sum_{j=0}^{m-1} D_0^k \frac{(t)^j}{j!} x_0^{(j)} + D_0^k I_0^k I_0^{\alpha-k} f(t, x(t))$$

puisque $D_0^k(t)^j = 0$ pour $j < k$, alors si $t = 0$ on a :

$$D_0^k x(0) = D_0^k \frac{(t)^k}{k!} x_0^{(k)} \Big|_{t=0} + I_0^{\alpha-k} f(t, x(t)) \Big|_{t=0},$$

et comme $\alpha - k \geq 1$, l'intégrale est nul c'est à dire $I_0^{\alpha-k} f(t, x(t)) \Big|_{t=0} = 0$, par suite $D_0^k x(0) = x_0^{(k)}$.

D'autre part on définit $z(t) = f(t, x(t))$, alors $z \in C[0, h]$, on réécrit l'équation de la forme :

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, x(t)) = {}^c D_0^\alpha x(t) = D_0^\alpha (x - T_{m-1}[x; 0])(t) \\ &= D_0^m I_0^{m-\alpha} (x - T_{m-1}[x; 0])(t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Où $T_{m-1}[x; 0]$ est le polynôme de Taylor de degré $m - 1$ pour la fonction f autour de 0

$$(T_{m-1}[x; 0] = \sum_{k=0}^{m-1} D_0^k \frac{(t)^k}{k!} x_0^{(k)})$$

En appliquant l'opérateur I_0^m sur les deux termes de la relation (1.23) elle devient

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (x - T_{m-1}[x; 0])(t) + q(t)$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $m - 1$.

Comme z est continue la fonction $I_0^m z$ a un zéro d'ordre au moins m à l'origine.

En outre la différence $x - T_{m-1}[x; 0]$ a la même propriété par construction. Et donc la fonction $I_0^{m-\alpha} (x - T_{m-1}[x; 0])$ doit avoir un zéro d'ordre m aussi. Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $m - 1$ il en résulte que $q = 0$, par conséquent

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (x - T_{m-1}[x; 0])(t)$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de **Riemann-Liouville** $D_0^{m-\alpha}$ sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$I_0^\alpha z(t) = x(t) - T_{m-1}[x; 0](t)$$

En substituant $z(t)$ et $T_{m-1}[x; 0](t)$ on retrouve l'équation de **Volterra** :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Théorème 1.3 On définit l'ensemble $G = [0, h^*] \times [x_0^{(0)} - K, x_0^{(0)} + K]$, pour $K > 0, h^* > 0$, et $x_0^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, m-1$.

soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, satisfaisant la condition de **Lipchitz** par rapport à x suivante :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|, \quad \text{où } A = \text{constante}$$

Si on pose $h = \min \left\{ h^*, (k\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha} \right\}$ avec $M = \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$, alors il existe une fonction unique $x \in C[0, h]$ solution du problème (1.21)

Théorème 1.4 Soit $\alpha > 0, m$ entier tel que $m-1 < \alpha \leq m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La solution du problème aux conditions initiales suivant.

$$\begin{aligned} {}^c D_0^\alpha x(t) &= \lambda x(t) + q(t) \\ x^{(k)}(0) &= x_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Où $q \in C[0, h]$, est la fonction donnée par :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} x_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$$

$$\text{avec } \tilde{y}(t) = \begin{cases} I_0^\alpha q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u_0(\tau) d\tau & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}, \quad u_k(t) = I_0^k e_\alpha(t), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \text{ et} \\ e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$$

Dans le cas d'une équation différentielle fractionnaire linéaire, on peut donner une expression explicite de la solution, et ce, en utilisant la fonction de Mittag-Leffler E_α

Théorème 1.5 Soit $\alpha > 0$, m entier tel que $m - 1 \leq \alpha < m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solution du problème aux conditions initiales suivant.

$${}^c D_0^\alpha x(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = 1 \quad (k = 1, \dots, m - 1),$$

est donnée par

$$x(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad t \geq 0.$$

Autrement dit, les fonctions propres de l'opérateur différentiel de Caputo s'écrivent en termes de fonctions de Mittag-Leffler

1.2.4 Résolution numérique

Il y a plusieurs méthodes pour la résolution numérique des systèmes fractionnaires. Dans le cas linéaire la méthode la plus simple et rapide est basée sur la définition de la dérivation fractionnaire au sens de **Grunwald-Letnikov**. La méthode la plus adaptée pour les équations non linéaires est la méthode prédictioncorrection (**PCEC**, **Predict-Evaluate-Correct-Evaluate**) qui est une généralisation naturelle de la méthode très connue de **Adams-Bashforth-Moulton**

Présentation de l'algorithme :

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale([1.21](#)) par l'équation intégrale de **Volterra** ([1.22a](#)) et on utilise la formule (produit de quadrature des trapezes) pour remplacer l'intégrale par les noeuds $t_j, j = 0, 1, \dots, n + 1$ qui sont prises respectivement à la fonction $(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1}$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau &\approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{g}_{n+1}(\tau) d\tau \\ &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j) \end{aligned}$$

avec

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n - \alpha)(n + 1)^\alpha & \text{Si } j = 0 \\ (n - j + 2)^{\alpha+1} + (n - j)^{\alpha+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha+1} & \text{Si } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{Si } j = n + 1 \end{cases}$$

Cela nous donne la formule de correction (corrector) :

$$xh(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \left[f(t_{n+1}, x_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, x_j) \right].$$

Pour déterminer la formule de prédiction (predictor) qui donne x_{n+1}^p , on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j),$$

$$\text{Où } b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n + 1 - j)^\alpha - (n - j)^\alpha)$$

par conséquent on a :

$$x_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, x_{h_j})$$

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimée (voir [8]) par :

$$\max_{j=0,1,2,\dots,N} |x_j - x_{h_j}| = O(h^p), \text{ avec } p = \min(2, 1 + \alpha)$$

Remarque 1.2 *Par souci de simplicité, nous n'avons traité dans cette section que le cas scalaire cependant, tous ces résultats peuvent être étendus au cas vectoriel (c'est-à-dire un système d'équations différentielles) sans aucun problème.*

1.3 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

Nous allons maintenant considérer la question de stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles fractionnaires. Dans le cas classique d'équation d'ordre entier la stabilité est un domaine de recherche important et bien connu, et elle est généralement étudié pour des équations différentielles du premier ordre. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une classe de problèmes proche de ce cas. Soit donc l'équation différentielle fractionnaire

$${}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \text{ avec } \alpha \in (0, 1). \quad (1.24)$$

Ici $x(t) \in \mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^{N+1} . Supposons que les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées et que :

$$f(t, 0) = 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad (1.25)$$

Cette condition implique que la fonction $x(t) = 0$ est une solution de (1.24)

Définition 1.14 :

- a) La solution $x(t) = 0$ de l'équation (1.24) est dite **stable** si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que la solution du problème à valeurs initiales constitué de l'équation (1.24) et de la condition initiale $x(0) = x_0$ vérifie $\|x(t)\| < \varepsilon$, pour tout $t \geq 0$ quand $\|x_0\| < \delta$
- b) La solution $x(t) = 0$ de l'équation (1.24) est dite **asymptotiquement stable** si elle est **stable** et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Remarque 1.3 Dans la définition nous avons seulement discuté les propriétés de la solution nulle de l'équation (1.24). On peut transférer ces propriétés ainsi que les résultat suivants au voisinage d'une solution arbitraire qui satisfait ou non la condition (1.25) par la procédure suivante :

Une solution x de l'équation différentielle ${}^c D^\alpha x(t) = g(t, x(t))$ est dite (**asymptotiquement**) **stable** si et seulement si la solution nulle de ${}^c D^\alpha z(t) = f(t, z(t))$ est (**asymptotiquement**) **stable** avec $f(t, z) = g(t, z + x(t)) - g(t, x(t))$.

1.3.1 Méthode directe (Lyapounov)

Par méthode directe de Lyapounov nous faisons allusion à la méthode consistant à trouver une fonction de Lyapounov associée à un problème non-linéaire, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapounov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction, cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat. Commençons par définir la stabilité au sens de **Mittag-Leffler** [5]

Définition 1.15 *La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire (1.24) est dite **Mittag-Leffler** stable si*

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)] (t - t_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(t - t_0)^\alpha)\}^b, \quad (1.26)$$

Où $0 < \alpha < 1, \gamma \in [0, 1 - \alpha], \lambda \geq 0, b \geq 0, m(0) \geq 0, m(x) \geq 0$, et est localement lipschitzienne sur $t \in B \subset \mathbb{R}^N$ avec $m(0)$ comme constante de Lipschitz.

Remarque 1.4 *La stabilité de **Mittag-Leffler** implique la stabilité **asymptotique**.*

On va maintenant énoncer un théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de **Lyapounov** au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de **Mittag-Leffler**.

Théorème 1.6 *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (1.24) et $D \in \mathbb{R}^N$ un domaine contenant l'origine. Soit $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable et localement lipschitzienne par rapport à x telle que*

$$\alpha_1 \|y\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|y\|^{ab},$$

$${}^c D^\beta V(t, x(t)) \leq -\alpha_3 \|y\|^{ab}, \quad (1.27)$$

Où $t \geq 0, x \in D, \beta \in (0, 1), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives. Alors $x = 0$ est **Mittag-Leffler stable**

Si les hypothèses sont vérifiées sur \mathbb{R}^N , alors $x = 0$ est globalement **Mittag-Leffler stable**.

Pour la démonstration de ce théorème voir ([6])

Exemple 1.4 Soit le système fractionnaire suivant

$$D_0^\alpha |x(t)| = -|x(t)|,$$

où $\alpha \in (0, 1)$.

Considérons la fonction Lipschitzienne $V(t, x) = |x|$

Nous avons

$${}^c D_0^\alpha V = {}^c D_0^\alpha |x| \leq D_0^\alpha |x| \leq -|x|,$$

Donc il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -1$, et l'application du théorème nous donne

$$|x(t)| \leq |x(0)| E_\alpha(-t^\alpha),$$

1.3.2 Méthode indirecte (Linéarisation)

On commence par donner un résultat de stabilité dans le cas très simple d'une équation différentielle fractionnaire linéaire homogène à coefficients constants

Théorème 1.7 Le système linéaire autonome d'ordre fractionnaire suivant ([3]) :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1 \quad (1.28)$$

et A Matrice d'ordre $N \times N$.

1. La solution $x(t) = 0$ du système (1.28) est **asymptotiquement stable**, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, N$$

pour tous λ , où λ sont toutes les valeurs propres de la matrice A .

De plus le vecteur d'état $x(t)$ tends vers 0 et vérifie la condition suivante : $\|x(t)\| < Kt^{-\alpha}$, $t > 0$, $\alpha > 0$.

2. la solution $x(t) = 0$ du système (1.28) est **stable**, si et seulement si, les valeur propre de A vérifient $|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}$ et toutes les valeurs propre vérifiant $|\arg(\lambda_i)| = \alpha \frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique égale à 1.
3. la solution $x(t) = 0$ du système (1.28) est **instable**, s'il existe une valeur propre de A vérifiant $|\arg(\lambda_i)| < \alpha \frac{\pi}{2}$

Le même résultat a été prouver dans le cas $1 < \alpha < 2$.

Définition 1.16 Soit le système non linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$${}^c D_0^\alpha x = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1 \quad (1.29)$$

Supposons le point a est un point d'équilibre du système (1.29) c'est à dire $f(a) = 0$. Le linéarisé de (1.29) autour du point d'équilibre a est donné par :

$$D^\alpha y \simeq Df(a) y$$

où $Df(a)$ est la matrice jacobienne associée à f au point d'équilibre a

Théorème 1.8 Le point d'équilibre a du système (1.29) est **localement asymptotiquement stable** si et seulement si toutes les valeurs propres λ de la matrice jacobienne $A = Df(a)$ satisfaisant

$$|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$$

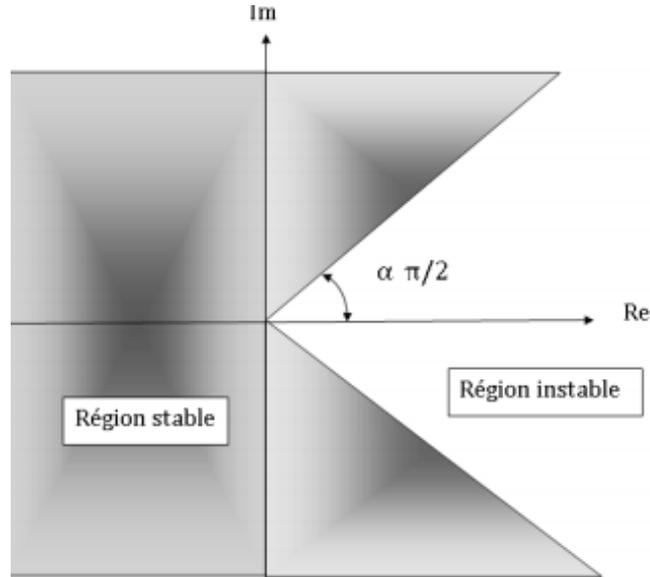


FIG. 1.2 – Région de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$

Exemple 1.5 Soit le système de **Lorenz**([4]) :

$$\begin{cases} D^\alpha x = 10(y - x) \\ D^\alpha y = 28x - y - xz \\ D^\alpha z = -\frac{8}{3}z + xy \end{cases}$$

$(0, 0, 0)$ est un point d'équilibre de ce système.

la matrice Jacobienne associée à f au point $(0, 0, 0)$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ de la matrice Jacobienne A sont les solutions de l'équation suivante :

$$\det(A - \lambda I) = \left(\lambda + \frac{8}{3}\right) (\lambda^2 + 11\lambda - 270) = 0$$

alors

$$\lambda_1 \simeq -\frac{8}{3}, \quad \lambda_2 \simeq 11.83, \quad \lambda_3 \simeq -22.83$$

Les valeurs absolues d'argument sont :

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi, \quad |\arg(\lambda_2)| = 0, \quad |\arg(\lambda_3)| = \pi$$

le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ est instable pour tout $\alpha \in]0, 1]$ puisque :

$$|\arg(\lambda_{1,3})| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad |\arg(\lambda_2)| < \alpha \frac{\pi}{2}. \forall \alpha \in]0, 1]$$

Chapitre 2

Etude d'un Système fractionnaire chaotique

L'objectif de ce chapitre est de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'analyse du comportement d'un système chaotique. Nous partirons de deux théories essentielles permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques chaotiques. Nous commencerons par présenter la théorie de bifurcation, puis nous aborderons la théorie du chaos et nous présenterons des outils d'analyse et de caractérisation des systèmes chaotiques. Enfin nous étudierons le système fractionnaire de Chen comme exemple de système fractionnaire chaotique.

2.1 Bifurcations

Dans cette partie on s'intéresse au système fractionnaire avec paramètre de contrôle μ de la forme suivante :

$$D^\alpha x = f(x, \mu), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k \quad (2.1)$$

Définition 2.1 Une **bifurcation** est un **changement qualitatif** d'une certaine solution (point d'équilibre ou cycle limite) du système (2.1) lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle μ , c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité (de **stable à instable** ou l'inverse) et l'apparition de nouvelles solutions.

On parle ici seulement de la bifurcation de **codimension un** ($k = 1$) et il existe quatre types de bifurcations de codimension un.

2.1.1 Bifurcation noeud-col

La bifurcation noeud-col aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 (appeler valeur de bifurcation) pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une **valeur propre** λ_1 nulle. Cette bifurcation est caractérisée par la naissance de deux points d'équilibres de stabilité différente.

Exemple 2.1 *Considérons l'équation fractionnaire scalaire suivante :*

$$D^\alpha x = \mu - x^2, \quad (2.2)$$

Nous allons étudier cette équation selon le paramètre de contrôle μ :

- Si $\mu < 0$ l'équation $f(x, \mu) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'est pas des points d'équilibres.
- Si $\mu > 0$ on a :

$$\mu - x^2 = 0,$$

$$x^2 = \mu \iff x = \pm\sqrt{\mu}.$$

Par conséquent (2.2) admet deux points d'équilibres :

$$\begin{cases} \dot{f}(a) = -2x \text{ avec } x = +\sqrt{\mu} \text{ alors } \dot{f}(a) = -2\sqrt{\mu} < 0. \\ \dot{f}(a) = -2x \text{ avec } x = -\sqrt{\mu} \text{ alors } \dot{f}(a) = +2\sqrt{\mu} > 0. \end{cases}$$

$$\text{Par suite les points d'équilibres : } \begin{cases} a = +\sqrt{\mu}, \text{ est stable.} \\ a = -\sqrt{\mu}, \text{ est instable.} \end{cases}$$

- Si $\mu = 0$ il y a un seul point d'équilibre $a = 0$ est semi stable.

2.1.2 Bifurcation fourche

La bifurcation fourche aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une **valeur propre** λ_1 nulle. Cette bifurcation est caractérisée par un échange de stabilité du point d'équilibre et la naissance de deux autres points d'équilibres de stabilité différente du premier point d'équilibre.

Exemple 2.2 • *Considérons l'équation fractionnaire scalaire suivante :*

$$D^\alpha x = \mu x - x^3.$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche (sous-critique) on a l'équation générique est :

$$D^\alpha x = \mu x + x^3.$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \iff \mu x - x^3 = 0 \iff x(\mu - x^2) = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu \end{array} \right. .$$

Si $\mu < 0$ on a un seul point d'équilibre $a = 0$, et si $\mu > 0$ on a trois points d'équilibre qui sont :

$$x \left\{ \begin{array}{l} a = 0, \\ a = +\sqrt{\mu}, \\ a = -\sqrt{\mu}. \end{array} \right.$$

Nous étudions la stabilité de ces points d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{f}(a) = \mu - 3x^2 \text{ avec } x = 0 \text{ alors } \dot{f}(a) = \mu \\ \dot{f}(a) = \mu - 3x^2 \text{ avec } x = \pm\sqrt{\mu} \text{ alors } \dot{f}(a) = -2\mu \end{array} \right.$$

- Si $\mu < 0$ le seul point d'équilibre $a = 0$ est stable.
- Si $\mu > 0$ le point d'équilibre $a = 0$ est instable, mais $a = \pm\sqrt{\mu}$ sont stables.

2.1.3 Bifurcation transcritique

La bifurcation fourche aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une **valeur propre** λ_1 nulle.

Cette bifurcation est caractérisée par un échange de stabilité entre les deux points d'équilibres existant (les points stables deviennent instables, les points instables deviennent stables).

Exemple 2.3 *Considérons l'équation fractionnaire scalaire suivante :*

$$D^\alpha x = \mu x - x^2.$$

On a alors :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^2 \iff \mu x - x^2 = 0 \iff x(\mu - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ x = \mu. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{f}(a) = \mu - 2x \text{ avec } x = 0 \text{ alors } \dot{f}(a) = \mu, \\ \dot{f}(a) = \mu - 2x \text{ avec } x = \mu \text{ alors } \dot{f}(a) = -\mu. \end{cases}$$

Alors :

- Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $a = 0$ est stable, mais $a = \mu$ est instable.
- Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $a = 0$ est instable, mais $a = \mu$ est stable.

2.1.4 Bifurcation de Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une **paire de valeurs propres**

λ_1, λ_2 telles que $|\arg \lambda_{1,2}| = \alpha \frac{\pi}{2}$ et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparaition d'un cycle limite.

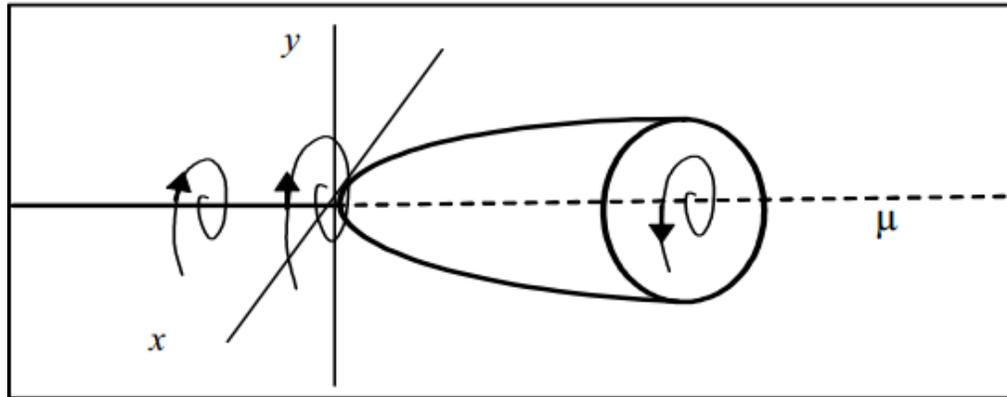


FIG. 2.1 – Diagramme de bifurcation Hopf

2.2 Théorie du Chaos

2.2.1 Définition du Chaos

Des systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceau, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? » ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? » [4]

2.2.2 Caractéristique du Chaos

1. **La non linéarité** : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
2. **La déterminisme** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
3. **La sensibilité aux conditions initiale** : de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final
4. **L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
5. **L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.
6. **Attracteur étrange** : Un attracteur est objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases, c'est-à-dire, une situation au un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses condition initiales.

Dans un espace des phases à deux dimensions, les attracteurs sont soit des points, soit des cycle limites.

2.2.3 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "**de contrôle**", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondantes à des régimes dynamiques qualitativement différents.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos . On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent.

On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

L'intermittence vers le chaos :

Un mouvement périodique stable est entre coupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

Le dédoublement de période :

Il est caractérisé par une succession de **bifurcation de fourches**. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, etc..., Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

La quasi-périodicité :

Il intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit **quasi périodique** Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de **Jean Christophe Yoccoz**, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

2.3 Etude du système de Chen d'ordre fractionnaire

2.3.1 Introduction au système de Chen

En 1963, **Lorenz** a trouvé le premier attracteur chaotique en un système autonome en trois dimensions, Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître, un comportement chaotique, de plus, il constitua le premier et le célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange par certaines des paramètres

En 1999, **Chen et UETA** ont introduit un nouveau système chaotique, qui est similaire mais pas topologiquement équivalent au système de Lorenz.

Les équations du modèle

Ce système de chen s'écrit :

$$\begin{cases} D^\alpha x = a(y - x) \\ D^\alpha y = (c - a)x - xz + cy \\ D^\alpha z = xy - bz \end{cases} \quad (2.3)$$

L'espace des phases est tridimensionnel, (x, y, z) le vecteur d'état et a, b et c sont des paramètres réels

2.3.2 L'équilibre du modèle

On cherche les points d'équilibre $(x; y; z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} a(y - x) = 0 \\ (c - a)x - xz + cy = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

Un premier point d'équilibre trivial est t_0 :

$$x = y = z = 0, \quad \forall c \geq 0.$$

$$t_0 = (0, 0, 0).$$

Les deux autres points d'équilibre t_1 et t_2 sont :

$$\begin{aligned} t_1 &= \left(\sqrt{b(2c - a)}, \sqrt{b(2c - a)}, (2c - a) \right) \\ t_2 &= \left(-\sqrt{b(2c - a)}, -\sqrt{b(2c - a)}, (2c - a) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

D'après la relation (2.4) si $c = a/2$, on a $t_0 = t_1 = t_2$.

Donc pour $c \in [0, a/2]$, il n'y a qu'un seul point d'équilibre t_0 et pour $c > a/2$, il y a 3 points d'équilibre t_0, t_1 et t_2 .

2.3.3 Stabilité des points d'équilibre

La stabilité du système dépend des paramètres a , b et c . L'étude de la stabilité des points d'équilibres repose sur la valeur absolue d'argument des valeurs propres de la matrice Jacobienne A obtenu en linéarisant le système (2.3) autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice Jacobienne A du système (2.3) est :

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c - a - z) & c & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

La stabilité au point t_0

Au point $(0, 0, 0)$, les valeurs propres λ de la matrice Jacobienne A :

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c - a) & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

D'où :

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda + a & -a & 0 \\ -(c - a) & \lambda - c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + b \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + b) (\lambda^2 - (c - a) \lambda + a(a - 2c)) = 0$$

La première valeur propre est :

$$\lambda_1 = -b = -3 < 0$$

Les deux autres racines de ce polynôme sont :

$$\lambda_{2,3} = \begin{cases} \frac{(c-a) \pm \sqrt{(c-a)^2 - 4a(a-2c)}}{2} \\ \frac{(c-a) \pm i\sqrt{(c-a)^2 - 4a(a-2c)}}{2} \end{cases}$$

On supposera que a et b sont constants ($a = 35, b = 3$) et que le paramètre c est variable.

Alors les deux autres racines de ce polynôme sont :

$$\lambda_{2,3} = \begin{cases} \frac{(c-35) \pm \sqrt{c^2 - 350c - 3675}}{2} & \text{Si } c \in]-\infty, -224.50] \cup [14.29, +\infty[\\ \frac{(c-35) \pm i\sqrt{c^2 - 350c - 3675}}{2} & \text{Si } c \in]-224.50, 14.29[\end{cases}$$

Si $14.29 < c < a/2 = 17.5$, les valeur propre $\lambda_{2,3}$ sont réelles **négatives**, par suite les valeurs absolus de ses arguments sont supérieures à $\frac{\pi}{2}$ alors :

$$|\arg(\lambda_{1,2,3})| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in]0, 1]$$

d'où le point d'équilibre t_0 , est **localement asymptotiquement stable** pour $0 < \alpha \leq 1$.

Si $c = a/2 = 17.5$, on à une valeur propre nulle

Si $c > a/2 = 17.5$, deux valeurs propres $\lambda_{1,2}$ sont réelles **négatives** d'argument π mais la troisième est réelle **positive** (son argument est nul) alors le point d'équilibre t_0 est **instable** quelque soit $0 < \alpha \leq 1$.

Puisque on a la naissance de deux autre points équilibres t_1 et t_2 , et par référence à la théorie de bifurcation le système subit une **Bifurcation de fourche** pour la valeur de bifurcation $c = 17.5$.

La stabilité pour les deux autres points d'équilibre t_1 et t_2 .

La matrice jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -c & -\sqrt{b(2c-a)} \\ \sqrt{b(2c-a)} & \sqrt{b(2c-a)} & -b \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la jacobienne sont les solutions de l'équation en λ :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + bc\lambda + 2ab(2c - a).$$

Pour $a = 35, b = 3, c > 17.5$ cette équation admet une solution réelle λ_1 et deux solutions complexe conjuguées $\lambda_{2,3}$.

Pour le cas entier ($\alpha = 1$) posons

$$\lambda_{2,3} = \sigma \pm i\beta$$

Si σ , la partie réelle de la racine complexe est positive, alors, les points d'équilibres sont instables d'où

$$p(\lambda) = (\sigma \pm i\beta)^3 + (a + b - c)(\sigma \pm i\beta)^2 + bc(\sigma \pm i\beta) + 2ab(2c - a).$$

Après simplification, on obtient la formule de σ :

$$\sigma^3 + (a + b - c)\sigma^2 + \frac{1}{4}(a + b - c + 2bc)\sigma + \frac{1}{8}(bc(a + b - c) - 2ab(2c - a)) = 0.$$

La stabilité se définit par rapport à σ , alors :

$$\sigma = 0 \implies bc(a + b - c) - 2ab(2c - a) = 0.$$

Donc :

$$c^2 + (3a - b)c - 2a^2 = 0. \tag{2.5}$$

La stabilité des points d'équilibres t_1, t_2 dépend de la valeur du paramètre c . Par conséquent

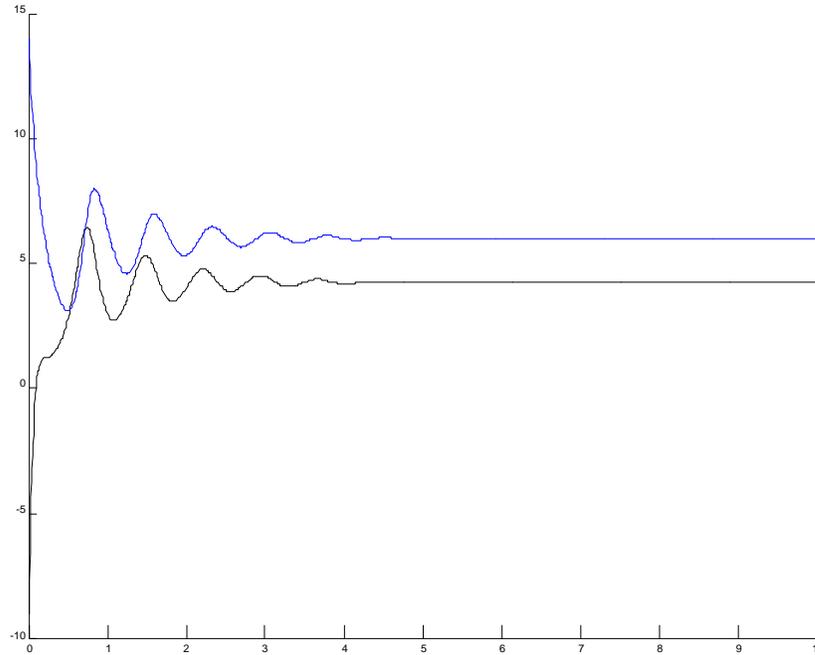


FIG. 2.2 – Le système est instable pour l'ordre entier $\alpha = 0.95$ avec la valeur du paramètre $c = 20.07$.

,la valeur pour laquelle la partie réelle de la racine complexe s'annule, s'obtient à partir de l'équation (2.5) comme suit :

$$c = \frac{1}{2} \left((b - 3a) \pm \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} \right).$$

Pour les deux points t_1 et t_2 , le système est stable pour $c < 20.07$ et instable pour $c > 20.07$. Par référence à la théorie des bifurcations, la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle, les racines du polynôme caractéristique sont purement imaginaires s'appelle **point de bifurcation de Hopf**. Elle est égale dans notre cas $c = 20.07$.

Pour $\alpha = 0.95$, on a $c = 20.1$ les points t_1 et t_2 sont **stables**. ce qui implique que le système dans le cas fractionnaire peut être stable mais instable pour le cas entier voir **Fig. 2.2** et **Fig.2.3**.

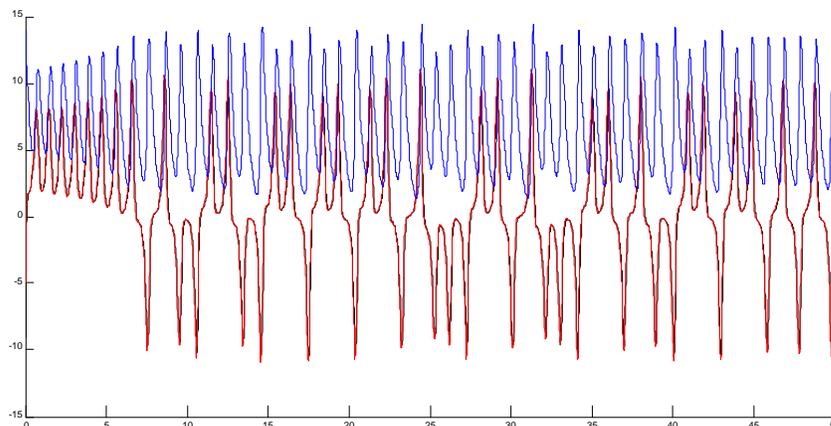


FIG. 2.3 – Le système est instable pour l'ordre entier $\alpha = 1$ avec la valeur du paramètre $c = 20.07$.

Remarque 2.1 Pour calculer la valeur de α appliquer l'inégalité :

$$\tan\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right) > \left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right| \iff \alpha > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right|\right). \quad (2.6)$$

Selon l'inégalité (2.6), la valeur maximale de l'ordre fractionnaire α pour laquelle le système de Chen d'ordre fractionnaire perd la stabilité pour $(a, c, b) = (35, 28, 3)$, est $\alpha \approx 0.82$. voir

Fig. 2.4 et **Fig 2.5**.

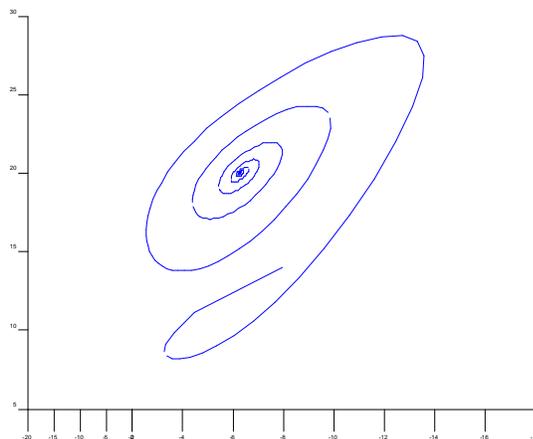


FIG. 2.4 – Le système est stable pour l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.81$, avec les paramètres $a = 35, b = 3$ et $c = 28$.

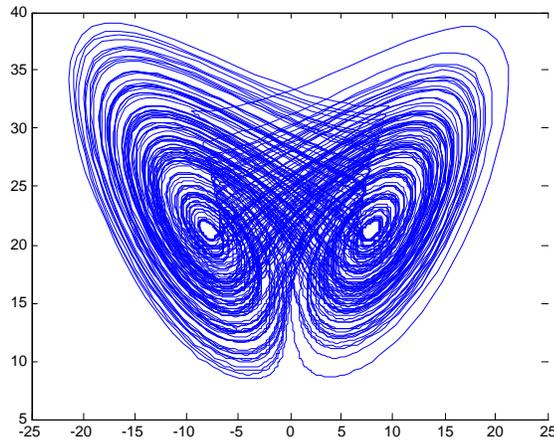


FIG. 2.5 – Le système est instable pour l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$, avec les paramètres $a = 35, b = 3$ et $c = 28$.

2.3.4 Diagramme de bifurcation

Nous avons effectué des simulations en variant le paramètre c 14.29 à 30. Lors de l'évolution du système en fonction du paramètre c , le comportement du système subit trois changements qualitatifs :

1. Pour $c < 17.5$ quelque soit le point initial, la trajectoire converge vers le point d'équilibre t_0 . Le système est **stable** autour de ce point d'équilibre. voir (**Fig. 2. 6** $c = 15$)
2. Pour $17.5 \leq c < 20.07$. Un changement de comportement à partir de $c = 17.5$. Le point t_0 n'est plus un point stable, et le système se stabilise sur l'un des t_1 ou t_2 . (**Bifurcation de fourche**)
3. Pour $c > 20.07$ les deux points t_1 et t_2 perdent leur stabilité en une bifurcation de **Hopf** et donnent naissance à deux **cycles limites** ($\alpha = 1$) (attracteurs réguliers).
4. Pour $c > 20.07$, le système ne contient aucun attracteur régulier et devient alors **chaotique**. L'état du système change complètement. La trajectoire tourne toujours autour de l'**attracteur chaotique**

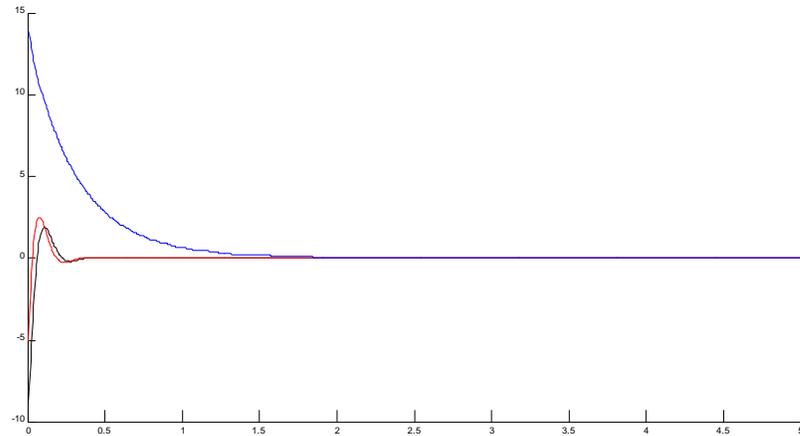


FIG. 2.6 – La trajectoire $(x, y \text{ et } z)$ converge vers le point d'équilibre t_0 , pour $c = 15$.

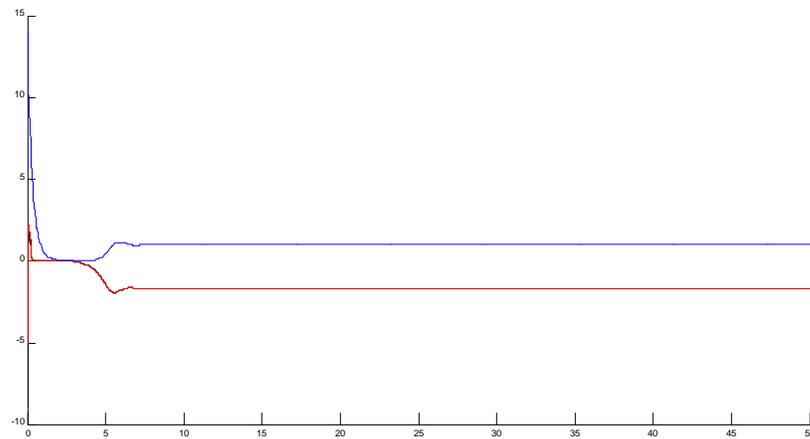


FIG. 2.7 – Le système se stabilise sur l'un des t_1 ou t_2 pour $c = 18$

Conclusion

Ce mémoire a pour objet l'étude des systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire. Il existe des différences importantes dans de nombreux aspects entre les systèmes différentiels ordinaires et les systèmes différentiels fractionnaires correspondants, par exemple, les propriétés qualitatives. La plupart des propriétés des systèmes ordinaires ne peuvent pas être simplement étendues au cas des systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans le chapitre un nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire. On a introduit deux approches des dérivées fractionnaires (l'approche de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés, puis nous avons terminé le chapitre par une section consacré aux équations aux dérivées fractionnaires pour lesquelles les conditions d'existence et d'unicité de la solution sont données, ainsi que des méthodes analytiques et numériques pour la résolution, pour exposer ensuite les différents critères de stabilité et quelques-unes des méthodes d'analyse numériques utiles dans le cas d'un système non-linéaire.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un exemple des systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire (Système de Chen). Premièrement nous avons introduit la théorie de chaos et celle de la bifurcation où nous avons discuté leurs définitions et leurs caractéristiques. Ensuite nous avons donner la description du système de Chen et calculer les points d'équilibre et leurs stabilités, puis nous avons étudié les types des bifurcations de ce systèmes, enfin, nous nous sommes passés par les moyens de détection du chaos et nous avons fini par routes vers le chaos.

Enfin, après cette étude, nous pouvons conclure que les dérivées d'ordre fractinnaire possèdent à la fois l'effet mémoire et le chaos, cela a rendu ces systèmes très utiles pour la modélisation et la compréhension des phénomènes qui possèdent la mémoire (les élastomères, les matériaux

viscoélastiques, la finance . . .), la zone de stabilité de systèmes d'ordre fractionnaire est plus vaste de leurs homologues d'ordre entier. ce qui donne une plus grande marge d'utilisation de ces systèmes et apportant des solutions aux problèmes, ne fournissant pas par des systèmes d'ordre entier.

Bibliographie

[Livre] :

- [1] Podlubny I "**Fractional Differential Equations**". Academic Press, New York.(1999).
- [2] Marchaud, M. A. . "**Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles**". (1927)
- [3] D. Matignon, **Stability result on fractional differential equations** with applications to control processing, in : IMACS-SMC Proceedings, Lille, France, (1996).
- [4] E. Goncalvès, "**Introduction aux systèmes dynamiques et chaos**", Institut National Polytechnique de Grenoble,(2004)
- [5] Y. LI, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. "**Stability of fractional order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability**". Computers and Mathematics with Applications (2009)
- [6] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia. "**Non integer model from modal decomposition for time domain system identification**". Proc. IFAC Symposium on System Identification, Santa Barbara, USA (2000)
- [7] D. del-Castillo-Negrete, "**Fractional calculus : basic theory and applications, in : Lectures Presented at the Institute of Mathematics**" UNAM, Mexico, August (2005)

[Thèses] :

[8] Kamel Haouam "**Existence et non existence de solutions des équations différentielles fractionnaires**", Thèse de Doctorat Univ.Mentouri. Constantine (2008).

[9] C.R. Serment. "**Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques**". Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, France (2001)

[Journal] :

[10] R. Darling and J. Newman. "**On the short behaviour of porous interaction electrodes**".Journal.of the Electrochemical Society (1997)

[11] J. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. "**Heat flux stimulation through inverted non integer identification models. International**" Journal of Thermal Science (2000)

Annexe A : Outils de base

Fonction Gamma

En mathématique, la fonction gamma est une fonction complexe, elle prolonge la factorielle à l'ensemble des nombre complexes.

Pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on définit $\Gamma(\alpha)$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Une propriété important de $\Gamma(\alpha)$ est la relation de la récurrence suivante : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ qu' on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = [-t^\alpha e^{-t}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Et en particulier :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n + 1) = n!$ (la fonction Gamma s'appelle aussi factorielle généralisée)

Fonction Bêta

En mathématiques, la fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexe p et q de parties réelle strictement positives par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Le changement de variable $u = 1 - t$ prouve que cette fonction est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Elle est liée à la fonction gamma par la relation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \forall p, q : \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0.$$

La fonction Mittag-Leffler

La fonction **Mittag-Leffler** joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, et on la trouve largement utilisée dans les solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette fonction est la généralisation de la fonction exponentielle, elle a été introduite par **G.M.Mittag-Leffler** et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, z \in \mathbb{C}, \alpha > 0,$$

La fonction de **Mittag-Leffler** à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par **Agarwal** et elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Transformée de Laplace

Définition 2.2 soit $f \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow f(t)$, une fonction causale

On appelle transformée de Laplace de f la fonction F de la variable complexe p définie par :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

F est la transformée de f tandis que f est appelée l'original de F .

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\Gamma(\cdot)$: La fonction **Gamma** d'Euler

$B(\cdot, \cdot)$: La fonction **Bêta**

$E_\alpha(\cdot)$: La fonction **Mittag-Leffler** à un paramètre

$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$: La fonction **Mittag-Leffler** à deux paramètres.

$I_{a^+}^{(\alpha)} f$: L'intégrale fractionnaire (à gauche) de **Rieman-Liouville** d'ordre α

$\frac{d^{(m)}}{dt}$: La dérivée d'ordre entier

$D_{a^+}^{(\alpha)} f$: La dérivée fractionnaire (à gauche) de **Rieman** d'ordre α

${}^c D_{a^+}^{(\alpha)} f$: La dérivée fractionnaire (à gauche) de **Caputo** d'ordre α

Résumé

Les systèmes chaotiques aux dérivées d'ordre fractionnaire possèdent à la fois l'effet mémoire et le chaos, cela a rendu ces systèmes très utiles pour la modélisation et la compréhension des phénomènes qui possèdent la mémoire (les élastomères, les matériaux viscoélastiques, la finance ...). Nous avons étudié dans ce mémoire le système d'ordre fractionnaire (**le système de Chen**). En variant un paramètre d'une manière continue, plusieurs comportements non connus dans le cas entier apparaissent dans le cas fractionnaire, de plus nous avons observé le chaos avec des ordres de dérivation inférieurs à 1, cela montre l'utilité de l'ordre fractionnaire.

Mots clé

Dérivées fractionnaires, systèmes dynamiques chaotiques, système de Chen, Chaos, Bifurcation

Abstract

The chaotic systems with fractional derivatives possess both the chaos and memory effect, that has made these systems very useful for modeling and understanding of phenomena which possess memory (elastomers, materials visco-elastic, the finance...). We consider in this master thesis, a fractional order chaotic system (Chen system). When we vary the parameter, several behaviors not seen in integer case are fully appears in fractional case, the more you find chaos with orders less than 1, So the fractional order is very useful.

Key words

Fractional derivatives, chaotic dynamical systems, Chen system, chaos, Bifurcation

ملخص

الجمل الديناميكية الفوضوية ذات مشتقات كسرية تمتلك كل من الفوضى والذاكرة في آن واحد وهذا ما جعلها مفيدة جدا لنموذجة وفهم الظواهر التي تمتلك الذاكرة (مثل المواد اللزجة والمرنة معاً، المالية...). لقد درسنا في هذه المذكرة جملة ذات رتب كسرية (جملة شان). عند تغيير رتبة الاشتقاق بشكل مستمر ظهرت العديد من السلوكيات في حالة الرتب الكسرية والتي لم تظهر في حالة الرتبة الصحيحة، زيادة على ذلك فقد ظهر السلوك الفوضوي مع رتب كسرية اقل من 1 وهذا غير ممكن كما نعلم في حالة الرتبة الصحيحة، لذلك فان الرتب الكسرية مفيدة جدا.

كلمات مفتاحية

مشتقات من رتب كسرية ، جمل ديناميكية فوضوية ، جملة شوا ، الفوضى ، تفرع

