

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

CHOUAT Soumia

Titre :

Synchronisation Identique des Systèmes Chaotiques

Membres du Comité d'Examen :

Dr. CHAMCHAM Madani	UMKB	Président
Dr. MENACER Tidjani	UMKB	Encadreur
Dr. BOUZIANE Nadjette	UMKB	Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

À ma mère Djoughbal Louiza

artisane de ma réussite

Aucun dédicace ne pourrait exprimer ma reconnaissance, mon grand attachement et mon profond amour.

Que Dieu puisse m'aider à te prouver ma sincère gratitude pour ces nombreuses années de sacrifice.

Que Dieu te protège et t'accorde longue vie afin que je puisse te comber à mon tour.

À la mémoire de mon très cher père Chouat

à qui je dois ce qui je suis

J'aurais tant aimé que tu sois la parmi nous pour voir tes souhaits se réaliser.

Tu as toujours été pour moi le meilleur ami, le meilleur exemple, le meilleur papa et tu m'as appris à aider les autres.

Aucun mot ne pourrait témoigner de l'étendue des sentiments que j'éprouve toujours à ton égard.

Je te dédie ce travail et le présent diplôme car c'est à toi les dois et c'est grâce à toi que je les ai obtenus.

Que ce rapport soit l'expression de ma grande affection et en témoignage de mon profond amour.

À mon frère Ismail et ma soeur Hayat

Qu'ils trouvent l'expression de ma gratitude et de ma grande affection.

À ma chère amie Iman Sbaa et mes amies

REMERCIEMENTS

*Je remercie avant tout **Dieu** de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.*

Je remercie également ma famille pour les sacrifices qu'elle ont faits pour que je termine mon études ainsi que mes amies.

*Je exprime toutes mes profonde reconnaissance à mon encadreur **Dr. Tidjani Menacer** pour tout l'effort qu'il a fournis pour faciliter et aider à accomplir notre travail de fin d'étude.*

*Je remercie profondément **Dr Chamcham Madani** pour avoir accepté de présider le jury.*

*Je remercie aussi adresse **Dr Bouziane Nadjette** d'être membre de jury.*

*Je veut aussi remercie plus précisément le chef de département **Dr.HFAYED Mokhtar** pour son aide et ses consiels.*

*Je remercie aussi **Mr Seddiki Abd Almonaim** pour son aide
Aussi Je adressons nos sincères remerciements à l'ensemble des enseignants et tout le personnel du département de Mathématiques.*

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	vi
Introduction	1
1 Généralités sur les systèmes chaotiques	3
1.1 Définitions et notations	3
1.1.1 Flot	4
1.1.2 Orbite	4
1.1.3 L'espace des phases	4
1.1.4 Points d'équilibres	5
1.1.5 Attracteurs	5
1.2 La stabilité	6
1.3 Bifurcations	9
1.4 Le chaos	12
1.4.1 Caractéristiques du chaos	12

1.4.2	Scénarios chaotiques	13
2	Synchronisation des systèmes chaotiques	15
2.1	Définition de la synchronisation	16
2.1.1	Définition générale	16
2.1.2	Définition mathématiques de la synchronisation	16
2.2	Les oscillateurs couplés	17
2.3	Accouplement unidirectionnel	18
2.3.1	Méthode d'accouplement par contrôle continue	19
2.3.2	Méthode d'accouplement par remplacement des variables	19
2.4	Différents types de synchronisation	20
2.4.1	Synchronisation identique	20
2.4.2	Synchronisation généralisée	23
2.4.3	La synchronisation de phase	24
2.5	Méthodes de synchronisation identique	25
2.5.1	Synchronisation par la méthode du contrôle continu	25
2.5.2	La synchronisation par la méthode de Carroll et Pecora	28
3	Application : Synchronisation identique du système de Chen par la méthode de Carroll et Pecora	30
3.1	Le système de Chen	30
3.2	Le cas où le signal transmetteur est x	32
3.3	Le cas où le signal transmetteur est y	34
3.4	Le cas où le signal transmetteur est z	36
	Conclusion	38
	Bibliographie	39

Annexe : Programme en matlab pour synchroniser deux systèmes de Chen par la méthode de Carrol et Pecora (le signal transmetteur est x).	40
--	-----------

Table des figures

1.1	Attracteur étrange de Lorenz (x, y, z)	6
3.1	Synchronisation identique le système de Chen par la méthode de Carroll et Pecora où le signal trasmetteur x	34
3.2	Synchronisation identique le système de Chen par la méthode de Carroll et Pecora où le signal trasmetteur y	35
3.3	Synchronisation identique le système de Chen par la méthode de Carroll et Pecora où le signal trasmetteur z	37

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires ont tardivement fait l'objet d'intenses recherches et explorations. En 1963, le météorologue Edward Lorenz venait de découvrir le phénomène **de sensibilité aux conditions initiales**. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les **systèmes chaotiques** par Tien-Yien Li et James A York qui ont présenté pour la première fois le terme **chaos**. Cependant, les travaux de Davide Ruelle et du mathématicien Floris Takens menaient bien avant cette découverte, et vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique.

Vers la fin du *XIX^{eme}* siècle Henri Poincaré, avait mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors l'étude astronomique du problème des trois corps. Toujours au *XIX^{eme}* siècle, le mathématicien russe Aleksandr Mikhailovich Lyapunov effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Les travaux de Lyapunov seront très précieux pour étudier certaines aspects de **la théorie du chaos**.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est **la synchronisation**. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche active, lié au développement de la télécommunication, il a connu des améliorations très remarquables dans le début du *XIX^{eme}* siècle.

En 1990, Carroll et Pecora, pionniers de la synchronisation, ayant comme idée d'employer un signal chaotique entre deux systèmes dynamique identiques. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système **émetteur (maître)**, le deuxième est le système **récepteur (esclave)**; c'était **la synchronisation identique**.

Vu le développement puissant des moyens de télécommunication, la synchronisation des systèmes chaotiques commence à attirer l'attention de plusieurs chercheurs multidisciplinaires à travers le monde, notamment les Chinois. De nos jours, elle trouve des applications potentielles dans plusieurs domaines telles que les communications, la programmation, la biologie, l'informatique, la physique, la médecine, la robotique, etc.

Par conséquent, plusieurs types de synchronisation sont présentés tels que la synchronisation généralisée, la synchronisation de phase, etc.[3]

L'objectif de cette mémoire est d'étudier la synchronisation identique des systèmes chaotiques.

Notre travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre nous évoquerons brièvement les notions de base sur les systèmes chaotiques, en commençant par une définition et notations sur les systèmes dynamiques et puis les notions de stabilité, en passant par l'étude de la théorie de bifurcation et finissant par la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre sera consacré à la théorie de la synchronisation où nous introduirons une série de définitions qui nous permettront de donner des définitions assez claires sur le phénomène de la synchronisation, les types de la synchronisation seront présentés (la synchronisation identique, la synchronisation généralisée, la synchronisation de phase), le chapitre sera clôturé par les méthodes de la synchronisation identique.

Le troisième chapitre on propose une synchronisation identique entre deux systèmes chaotiques (système de Chen), en utilisant la méthode de Carroll et Pecora.

À la fin de la mémoire, on donne une conclusion générale suivie d'une bibliographie.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes chaotiques

L'objectif de ce chapitre est l'introduction de quelques notions élémentaires de systèmes dynamiques et chaos.

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1.1 *Un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, le terme "système" fait référence à un ensemble de variables d'état et aux interactions entre ces variables.*

Dans le cas continu un système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \beta), \quad (1.1)$$

$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\beta \in D \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champ de vecteur sur Ω .

Dans le cas discret un système dynamique est décrit par une itération de la forme :

$$x_{n+1} = x_n + \beta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Remarque 1.1.1 *Ce mémoire sera consacré aux systèmes dynamiques continus.*

Définition 1.1.2 *Un système dynamique (1.1) est dit **autonome** lorsqu'il ne dépend pas explicitement du temps t . Dans le cas contraire on dit que le système (1.1) est **non autonome**.*

1.1.1 Flot

On suppose que les solutions du système (1.1) sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.3 *On note $\Psi_t(\alpha) = f(t, \alpha)$ l'unique solution du problème de cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \beta), \\ x(0) = a. \end{cases}$$

*L'application "à temps t fixé" $x \rightarrow \Psi_t(x)$ s'appelle **flot** du système (1.1). [1]*

1.1.2 Orbite

Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable $t \rightarrow \dot{x}(t)$, définie d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans Ω telle que pour tout $t \in I$ on a $\dot{x}(t) = f(x, t, \beta)$

L'image d'une solution X est appelée **orbite** et notée :

$$\{\delta \in \Omega; \exists t \in I : x(t) = \delta\}.$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur f . [1]

1.1.3 L'espace des phases

Dans un système dynamique de dimension n , l'espace x_1, x_2, \dots, x_n est appelé **espace des phases** ou **espace d'états**. Ainsi le chemin parcouru par le système est appelé "trajectoire", et x_1, x_2, \dots, x_n sont les "états" du système. [5]

1.1.4 Points d'équilibres

Les points d'équilibre (ou états stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés du système.

Définition 1.1.4 *Un point x^* est dit point d'équilibre du système (1.1) s'il satisfait $f(x^*) = 0$ (ou bien de manière équivalente si $\Psi_t(x^*) = x^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) sinon le point x^* est dit point ordinaire.*

1.1.5 Attracteurs

Définition 1.1.5 *La région de l'espace de phases vers lequel convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle **attracteur**. Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.*

Il ya deux types d'attracteurs :

★ **Les attracteurs réguliers**

★ **Les attracteurs étranges ou chaotiques**

A Attracteurs réguliers

Les attraracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques. et il existe trois types distincts :

1- Le point fixe : est le plus simple et le plus courant d'attracteurs, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point).

2- Un cycle limite : c'est une trajectoires fermée qui attire toute les trajectoires proches.

3- Un tore : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois " mouvements quasi périodiques ".

B Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases domment les trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

- 1- Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotiques).
- 2- La dimension \mathbf{d} de l'attracteur est fractale avec $2 < \mathbf{d} < \mathbf{n}$ (ce qui justifie l'adjectif étrange).
- 3- L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.[9]

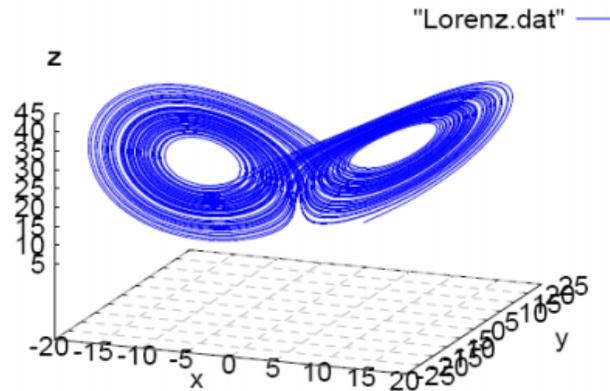


FIG. 1.1 – Attracteur étrange de Lorenz (x, y, z)

1.2 La stabilité

Stabilité au sens de Lyapunov

Considérons le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.3)$$

avec f une fonction non linéaire.

Définition 1.2.1 *Le point équilibre x^* du système (1.3) est :*

- 1- Stable si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 : \|x(t_0) - x^*\| \leq \gamma \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| \leq \varepsilon, \forall t > t_0. \quad (1.4)$$

2- Asymptotiquement stable si :

$$\exists \gamma > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \gamma \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

3- Exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 : \|x(t_0) - x^*\| \leq \gamma \implies a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t > t_0. \quad (1.6)$$

4- Instable si l'équation (1.4) n'est pas satisfaite.

Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x),$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et soit x^* un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\epsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point d'équilibre x^* . La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage de point x^* comme suit :

$$\epsilon(t) + x^* = f(x^* + \epsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \epsilon(t), \quad (1.7)$$

où $J_f(x^*)$ est la **matrice Jacobienne** de la fonction f définie par :

$$J_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^*}. \quad (1.8)$$

Comme $f(x^*) = x^*$, alors l'équation (1.7) devient :

$$\epsilon(t) = J_f(x^*) \cdot \epsilon(t). \quad (1.9)$$

L'écriture (1.9) veut dire que le système (1.8) est linéarisé.

Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x^* du système (1.3). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de x^* s'expriment comme suit :

- ▲ Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x^* est exponentiellement stable.
- ▼ Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x^* est instable.

Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

La méthode directe de Lyapunov est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

Théorème 1.2.1 *Le point d'équilibre x^* du système (1.3) est stable s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- ◆ D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$.
- ◆ $V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*)$, $\forall x \neq x^*$ dans D .

◆ $V(x) \leq 0, \forall x \neq x^*$ dans D .

Si de plus pour x , $V(x) < 0, \forall x \neq x^*$ dans D alors x_0 asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x^* est globalement asymptotiquement stable) .[9]

1.3 Bifurcations

La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. De façon générale, tous les déstabilisations d'un système se ramènent à trois types de bifurcations génériques que (cependant il existe des cas particuliers que nous allons présenter sur trois cas simples monodimensionnels :

★ **Bifurcation noeud-col**

★ **Bifurcation fourche**

★ **Bifurcation de Hopf**

Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation la plus simple, elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - x^2, \quad (1.10)$$

qui s'appelle équation générique de bifurcation noeud-col. On a alors $f(x, \lambda) = \lambda - x^2$; les points critiques sont données par :

$$\begin{cases} x = +\sqrt{\lambda} \\ x = -\sqrt{\lambda} \end{cases} \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

* Si $\lambda > 0$ l'équation $f(x, \lambda) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

Par conséquent (1.10) admet deux points fixes :

$$\begin{cases} \frac{df(x,\lambda)}{dx} \Big|_{x=+\sqrt{\lambda}} = -2\sqrt{\lambda}, \\ \frac{df(x,\lambda)}{dx} \Big|_{x=-\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

L'analyse de la stabilité linéaire montre que :

$$\begin{cases} x = +\sqrt{\lambda} \text{ est stable,} \\ x = -\sqrt{\lambda} \text{ est instable.} \end{cases} .$$

Les deux états (stable et instable) se coïncident alors en $x = 0$

Bifurcations fourche

L'équation générique d'une bifurcation fourche est :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - \alpha x^3, \tag{1.11}$$

avec λ et α les paramètres de contrôle.

* Si $\alpha < 0$ (Bifurcation fourche sur-critique).

L'équation générique est :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^3, \tag{1.12}$$

alors $f(x, \lambda) = \lambda x - x^3$. Les points critiques sont données par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{\lambda} \end{cases} \text{ pour } \lambda > 0,$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\lambda} \\ x = 0 \end{cases} \text{ pour } \lambda < 0.$$

Nous calculons la stabilité de ces points fixes :

$$\begin{cases} \frac{df(x,\lambda)}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda \\ \frac{df(x,\lambda)}{dx} \Big|_{x=\mp\sqrt{\lambda}} = 2\lambda \end{cases}$$

L'analyse de la stabilité linéaire montre que :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\lambda} \\ x = -\sqrt{\lambda} \end{cases} \text{ sont stables.}$$

On remarque un échange dans le nombre des points fixes et dans la stabilité en $\lambda = 0$.

* Si $\alpha > 0$ (Bifurcation fourche sous-critique)

L'équation générique est :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + x^3, \tag{1.13}$$

alors $f(x, \lambda) = \lambda x + x^3$. Faisons le même calcul on trouve :

$$\begin{cases} x = 0 & \text{pour tout } \lambda, \\ x = \mp\sqrt{-\lambda} & \text{pour } \lambda < 0. \end{cases}$$

Nous calculons la stabilité de ces points fixes :

$$\begin{cases} \frac{df(x,\lambda)}{dx} \Big|_{x=\mp\sqrt{\lambda}} = -2\lambda, \\ \frac{df(x,\lambda)}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda. \end{cases}$$

Comme pour le cas supercritique, le point $x = 0$ est stable pour $\lambda < 0$ et devient instable à $\lambda = 0$. Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes $\mp\sqrt{\lambda}$ existent dans la région où $x = 0$ est stable, et sont toujours instables.

Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle λ prend une valeur critique

λ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existent change avec l'apparition d'un cycle limite.[9]

1.4 Le chaos

Il n'existe pas définition exacte du chaos. En générale , **le chaos** est défini comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

- ★ La non-linéarité. Si le système est linéaire, il ne peut être chaotique.
- ★ Le déterminisme. Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes.
- ★ La sensibilité aux conditions initiales. De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- ★ L'imprévisible. En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- ★ L'irrégularité. Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables. Cet ordre caché forme l'infrastructure des système chaotiques.

1.4.1 Caractéristiques du chaos

♠ Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques sont extrêmement sensibles aux perturbation. On peut illustrer ce fait par l'effet papillon, popularisé par le météorologue **Edward Lorenz**. L'évolution d'un système dynamique chaotiques est imprédictible en ce sens qu'elle est sensibles aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale. Il est en particulier clair que la moindre erreur ou simples imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tous temps quelle sera trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une statistique sur le devenir à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible

de prévoir à long terme leur comportements.

♠ **Attracteur chaotique**

Dans le cas d'un système chaotique, la trajectoire converge vers une région particulière de l'espace appelée attracteur étrange qui est une signature du chaos, c'est ce qui différencie un signal chaotique d'un signal aléatoire. En effet, si le mouvement est aléatoire les points de la trajectoire remplissent l'espace de phase de manière aléatoire.

♠ **Exposants de Lyapunov**

Les exposants de Lyapunov sont des coefficients qui permettent de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. Par définition, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou de convergence de trajectoires voisines de l'espace des phases. Il mesure le taux local d'expansion de l'espace dans lequel l'expansion est maximal, c'est-à-dire en général vers l'attracteur. Un attracteur étrange est un attracteur dont l'un au moins de ses exposants de Lyapunov est positif. Autrement dit, le plus grand exposant est positif pour le système chaotique et négatif pour les autres systèmes.[9]

1.4.2 Scénarios chaotiques

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

★ **Doublement de période**

Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourche. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc ..., ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.[6][7]

★ **Par intermittence**

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus fréquentes,

et finalement, la turbulence domine.[4][10]

★ **Via la quasi-périodicité**

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par travaux théorique de **Ruelle** et **Takens**. Dans un système dynamique à comportement périodique à un seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi-périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.[7]

Chapitre 2

Synchronisation des systèmes chaotiques

Le phénomène de synchronisation est manifesté lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction du temps. L'une des configurations de synchronisation les plus populaires est la configuration maître-esclave pour laquelle un système dynamique appelé système esclave (récepteur) suit le rythme et la trajectoire imposés par un autre système dynamique appelé système maître (émetteur). Les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. Cette synchronisation paraît difficile à réaliser, car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire seulement une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Le principe de ce chapitre est de donner la définition, types et méthodes de synchronisation.[2]

2.1 Définition de la synchronisation

2.1.1 Définition générale

Définition 2.1.1 (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : **Syn** veut dire ensemble et **Chrono** veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*[9]

Définition 2.1.2 *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*[9]

2.1.2 Définition mathématiques de la synchronisation

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, **Brown** et **Kocarev** ont récemment fourni une définition mathématiques de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous systèmes :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = f_2(y, x, t) \quad , \quad (2.1)$$

où, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit $\varphi(\omega_0)$ une trajectoire du système globale donnée par (2.1) avec la condition initiale $\omega_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Pour chaque sous-système on forme une trajectoire $\varphi_x(\omega_0)$ et $\varphi_y(\omega_0)$ (ω_0 étant une condition initiale don

On note par χ l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par ς l'espace de toutes les trajectoires du second sous-système, et on considère deux fonctions (propriétés) $g_x : \chi \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $g_y : \varsigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, qui ne sont pas identiquement nulle, le premier \mathbb{R} représente le temps, nous disons que les fonctions, g_x et g_y , sont des propriétés des sous-systèmes définies par (2.1) respectivement.

Enfin, pour définir un état synchronisé, **Brown** et **Kocarev** exigent une fonction $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\|h\| = 0$ ou $\|h\| \longrightarrow 0$ (où $\|\cdot\|$ est toute norme). Nous disons que la fonction h , qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées sur les deux sous-systèmes, Les deux mesures convergent dans le temps si et seulement si $h(g_x, g_y) = 0$. [9]

Définition 2.1.3 *Brown et Kocarev les sous-systèmes dans les équations (2.1) sont synchronisés sur la trajectoires de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y , s'il existe un instant independant de l'application h tel que $h(g_x, g_y) = 0$. Avec le choix de g_x et g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation qui pourrait être englobés dans un même formalisme. [9]*

Théorème 2.1.1 *Le système émetteur et le système récepteur sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov du système récepteur, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels, sont négatifs.*

2.2 Les oscillateurs couplés

Définition 2.2.1 *On appelle un oscillateur (ou système oscillant), un système pouvent évoluer, du fait de ses caracteristiques propres, de façon periodique et alternative autour d'une position d'équilibre. [9]*

Définition 2.2.2 *On dit que deux oscillateurs sont couplés si l'existence d'une perturbation dans l'un entraîne une perturbation dans l'autre, ce qui se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement est appelé d'accouplement **mutuel**. [9]*

Définition 2.2.3 *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques chaotiques présentés par :*

$$\dot{X} = f_1(X, t). \tag{2.2}$$

$$\dot{Y} = f_2(Y, t). \tag{2.3}$$

On dit que les deux systèmes sont couplés si on peut réécrire les équation (2.2) et (2.3) sous la forme :

$$\dot{X} = g_1 (X, X, Y, t).$$

$$\dot{Y} = g_y (Y, X, Y, t),$$

avec g_1 et g_2 sont des fonctions non lineaires, où la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième sont le résultat de l'effet d'accouplement .[9]

2.3 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = f (X, t). \tag{2.4}$$

$$\dot{Y} = f (Y, t). \tag{2.5}$$

Si l'équation (2.5) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le resultat de cette modification nous donne de nouvelles équations de la forme :

$$\dot{X} = f (X, t). \tag{2.6}$$

$$\dot{Y} = g (Y, X, t). \tag{2.7}$$

tel que $g (Y, X, t) = f (Y, t)$ pour $X = Y$, dans ce cas on parler de l'accouplement unidirectionnel.

Le premier système s'appelle système émetteur et le deuxième système récepteur. La dernière représentation signifie que le système émetteur à un acte sur le récepteur, et le contraire est faux. Il est bien claire que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel.

On distingue deux méthodes d'accouplement unidirectionnel parmi plusieurs autres : la première méthode est par contrôle continue, et la deuxième est par remplacement des variables.[9]

2.3.1 Méthode d'accouplement par contrôle continue

Dans ce cas le système émetteur est toujours donnée par l'équation (2.6) tandis que le système récepteur est donnée par l'équation :

$$\dot{Y} = g(Y, X) = f(Y, t) + M_{n \times n}(X - Y). \quad (2.8)$$

Avec $M_{n \times n}$ une matrice diagonale carré d'ordre n , et elle est constituée des éléments constants de la force d'accouplement.[9]

2.3.2 Méthode d'accouplement par remplacement des variables

Cette méthode a été utilisée dans les travaux de **Carroll** et **Pecora**, son principe est de décomposer le système émetteur, qui est représenté par l'équation (2.6) en deux sous-systèmes présentés par :

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2).$$

$$\dot{Y}_1 = f_2(X_1, X_2).$$

Avec $X_1 \in \mathbb{R}^d, X_2 \in \mathbb{R}^m, d + m = n$, et $X = (X_1, X_2)$.

Dans ce cas le système récepteur est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{Y} = f_2(X_1, Y). \quad (2.9)$$

[9]

2.4 Différents types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation identique, la synchronisation généralisée, la synchronisation de phase, et la synchronisation retard.

Remarque 2.4.1 *Le travail abordé dans ce mémoire porte sur la synchronisation identique.*

2.4.1 Synchronisation identique

La synchronisation identique ou la synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. Elle peut être détectée non seulement dans les systèmes autonome, mais aussi dans les systèmes non autonome. Et le plus intéressant c'est que ce phénomène rassemble tous les autres types de synchronisation (la synchronisation généralisée, de phase, à retard). Elle basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques, on parle de la synchronisation identique, et s'ils sont différents on parle de la synchronisation généralisée.

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques liées par d'accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t). \tag{2.10}$$

$$\dot{Y} = g(Y, X, t). \tag{2.11}$$

[9]

Définition 2.4.1 *On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :*

$$\lim |Y(t) - X(t)| = 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty. \tag{2.12}$$

pour tout conditions initiales $X(0), Y(0)$ des deux systèmes.[9]

Remarque 2.4.2 Cette définition est toujours valable si on applique la méthode de **Brown** et **Kocarev**, il suffit de mettre la condition (2.12) sous la forme :

$$\lim |y(t) - x_2(t)| = 0, \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

[9]

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système à qui on donne le nom du "système erreur". Ce dernier représente la perturbation qui peut exister entre le système émetteur et le système récepteur. La question qu'on peut poser ici : est-ce que cette perturbation va tendre vers le zéro exponentiellement ou non. A cet effet, on va supposer que la petite perturbation entre les deux systèmes est donnée par l'équation :

$$e = Y - X.$$

l'évolution de cette dernière par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{de}{dt} = g(X, Y) - f(X). \quad (2.13)$$

On obtient un système dynamique, et on va étudier sa stabilité, et pour cela il suffit de :

★ Linéariser le système (2.13) au voisinage de ces points d'équilibre. Il est clair que le seul point $x = y$. Alors la linéarisation du système (2.13) nous donne :

$$\frac{de}{dt} = J(X) \cdot e.$$

Avec $J(X) = \left[\frac{\partial g(X, Y)}{\partial Y} \right]_{X=Y}$ la matrice jacobienne associée.

★ Utiliser la deuxième méthode de Lyapunov, pour ce la il suffit de choisir une fonction qui vérifie les conditions nécessaires de stabilité.

★ Calculer les exposants de Lyapunov du système récepteur pour garantir sa stabilité

asymptotique.[9]

Le problème général de la synchronisation du chaos

Comme on a déjà indiqué que le problème de la synchronisation de deux systèmes dynamiques chaotiques va nous ramener à un autre problème qui est celui de la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine. à cet effet, et dans cette partie on va donner une forme plutôt générale du système erreur et nous allons fournir certaines conditions simples, explicites et facile à vérifier pour la stabilité globale et exponentielle de sa solution zéro.

Considérons le système erreur général suivant

$$\begin{cases} \dot{e}_r(t) = f(t, e_r, e_{n-r}), \\ \dot{e}_{n-r}(t) = g(t, e_r) + A.e_{n-r}(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

où $1 \leq r \leq n$, $e_r \in \mathbb{R}^r$, $e_{n-r} \in \mathbb{R}^{n-r}$, $f \in C[I \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{n-r}]$ et $A \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ est une matrice constante réelle.

On a d'abord le résultat principal suivant.[9]

Théorème 2.4.1 *Si le système (2.14) est exponentiellement stable quand $e_r = 0$, la matrice constante A est Hurwitz stable et*

$$\|g(t, e_r)\| \leq K \|e_r\|^\beta,$$

pour les constantes $K > 0$ et $\beta > 0$, donc le système (2.14) est aussi exponentiellement stable quand $e_{n-r} = 0$.[9]

Preuve. *Puisque le système (2.14) est exponentiellement stable au point $e_r = 0$, donc il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que*

$$\|e_r(t, t_0, e_r^0)\| \leq C \|e_r^0\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

pour toute condition initiale $e_r(t_0) = e_r^0$. en revanche, il suit de deuxième équation du système

(2.14) que :

$$e_{n-r}(t, t_0, e_{n-r}^0) = e_{n-r}^0 e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} g(\tau, e_r(\tau)) d\tau,$$

de plus et puisque A est stable au sens de Hurwitz, alors il existe des constantes $M > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq M e^{-\lambda(t-t_0)},$$

il suit alors que

$$\begin{aligned} \|e_{n-r}^0(t, t_0, e_{n-r}^0)\| &\leq \|e_{n-r}^0\| e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} g(\tau, e_r(\tau)) d\tau \\ &\leq \|e_{n-r}^0\| M e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t M e^{-\lambda(t-\tau)} K \|e_r(\tau)^\beta\| d\tau \\ &\leq \|e_n^0\|^{1+\beta} M \left(1 + \frac{KC}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

donc, pour un $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{C}, \left(\frac{\varepsilon}{M+(MKC)/\lambda} \right)^{1/(1+\beta)} \right\}$ tel que pour toutes fois que $\|e_n^0\| < \delta$ on a :

$$\max \{ \|e_r(t, t_0, e_r^0)\|, \|e_{n-r}^0(t, t_0, e_{n-r}^0)\| \} < \varepsilon.$$

On conclut que : $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t M e^{\lambda\tau} KC \|e_r^0\|^\beta e^{-\alpha\beta(\tau-t_0)} d\tau}{e^{\lambda t}} = 0$, exponentiellement. [9] ■

2.4.2 Synchronisation généralisée

Dans le concept de la synchronisation identique sous l'effet d'accouplement unidirectionnel il a été indiqué que le système récepteur est identique ou presque identique au système émetteur. Cependant, on va essayer d'imaginer la situation pratique intéressante où le système récepteur est différent du système émetteur.

En général, quand il existe une différence essentielle entre les systèmes couplés, on ne peut pas être sûr du premier coup d'oeil d'affirmer que les systèmes chaotiques non identiques peuvent être synchronisés, mais plusieurs travaux ont démontré que ce type de synchronisa-

tion chaotique peut exister en généralisant le concept de la synchronisation pour inclure la non identification entre les systèmes couplés, et on a appelé ce phénomène **la synchronisation généralisée**.

Pour définir la synchronisation généralisée pour deux systèmes chaotiques couplés unidirectionnellement, on va travailler avec des systèmes non-linéaires composés d'un système émetteur autonome avec les variables dynamiques x dans un espace de phase X couplés à un système récepteur avec des variables dynamiques y dans l'espace d'état Y . La dynamique des systèmes émetteur et récepteur est donnée par :

$$\dot{x} = F(x(t)), \quad (2.15)$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)), \quad (2.16)$$

avec g une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel.[9]

Définition 2.4.2 *Quand $g = 0$, s'il existe une fonction $\Phi : X \rightarrow Y$, telles que toutes les trajectoires du système émetteur et du système récepteur, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \Phi(X(t))\| = 0, \text{ pour tout } t \rightarrow \infty, \forall x(0) \text{ et } y(0),$$

alors les deux systèmes chaotiques (2.15) et (2.16) se synchronisent au sens généralisé par rapport la fonction Φ .[9]

2.4.3 La synchronisation de phase

Soit φ_1 et φ_2 les phases des systèmes émetteur et récepteur respectivement. La synchronisation de phase est réalisée si pour deux nombres entiers m et n , il existe un nombre positive très petit ε tel que :

$$|m\varphi_1 - n\varphi_2| < \varepsilon.$$

Le phénomène de synchronisation de phase est totalement différent de ceux présentés précédemment. Généralement, lorsque la synchronisation chaotique est obtenue, les exposants de Lyapunov du système récepteur sont tous négatifs. Donc le système récepteur est un système non chaotique avec une sortie chaotique. Cependant, dans le cas de la synchronisation de phase, les les exposants de Lyapunov peuvent prendre des valeurs positives.[9]

2.5 Méthodes de synchronisation identique

Maintenant nous allons deux méthodes de synchronisation identique, la méthode de Carroll et Pecora et la méthode du contrôle continu.

2.5.1 Synchronisation par la méthode du contrôle continu

Il est évident que la matrice jacobienne dans cette partie dépend bien sûr de la matrice $M_{n \times n}$ de l'équation (2.8). Pour cela on va considere les deux systèmes chaotiques présentés par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X). \\ \dot{Y} = f(Y) + M_{n \times n}(Y - X), \end{cases} \quad (2.17)$$

avec $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, f une fonction non linéaire et $M_{n \times n}$ une matrice carrée diagonale d'ordren.

Comme f est non linéaire, donc on peut récrire le système (2.17) sous la forme :

$$\dot{X} = A.X + \Phi(X).$$

$$\dot{Y} = A.Y + \Phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X),$$

telle que A une matrice constante, Φ une fonction qui représente la partie non linéaire de

chaque système. Dans cette partie, la dynamique du système erreur est donnée par :

$$\dot{e} = A.e + \Phi(Y) - \Phi(X) + M_{n \times n}.e. \quad (2.18)$$

Donc selon l'équation (2.18) on peut étudier la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine.[9]

Le principe de la synchronisation identique

On suppose qu'on a deux systèmes chaotiques identiques définis par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = AX + \Phi(X). \quad (2.19)$$

$$\dot{Y} = A.Y + \Phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X). \quad (2.20)$$

Les deux systèmes sont liés par un accouplement unidirectionnel, avec X, Y sont les variables des systèmes émetteur (2.19) et récepteur (2.20) respectivement,

$$M_{n \times n} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

une matrice diagonale, A une matrice carrée d'ordre n et Φ une fonction continue non linéaire d'ordre n qui satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \rho \|X - Y\|,$$

ρ est appelée la constante de Lipschitz, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Alors on a le théorème suivante.[9]

Théorème 2.5.1 Soit E la matrice unitaire d'ordre $n \times n$ et $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ les valeurs propres de la matrice symétrique

$$\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E.$$

Si $\max \{\lambda_i\}_{i=1}^n < 0$, alors le système émetteur (2.19) et le système récepteur (2.20) sont synchronisés dans le sens que le système erreur tend vers zero exponentiellement.[9]

Preuve. Supposons qu'on a le système erreur présenté par l'équation suivante :

$$e = y - x,$$

alors la dynamique de ce dernier est représentée par :

$$\dot{e} = (A + M_{n \times n}) . e + \Phi(Y) - \Phi(X).$$

Comme $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ sont les valeurs propres de la matrice symétrique

$$\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E.$$

Alors cette dernière est si similiaire ou semblable à la matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

par la matrice orthogonale U tel que :

$$U^T . \left[\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E \right] . U = \Lambda.$$

Soit $V(e)$ la fonction de Lyapunov du système erreur défini par :

$$V(e) = \frac{1}{2} \|e\|^2,$$

il est claire que $V(e) > 0$. On va calculer $\dot{V}(e)$.

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2} (\dot{e}e + e\dot{e}).$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [(A + M_{n \times n}) \cdot e + \Phi(X) - \Phi(Y) \cdot e + e \cdot (A + M_{n \times n}) \cdot e + \Phi(X) - \Phi(Y)] . \\
 &= \frac{1}{2} [(A + M_{n \times n}) \cdot e \cdot e + e \cdot (A + M_{n \times n}) \cdot e + (\Phi(X) - \Phi(Y)) \cdot e + e \cdot (\Phi(X) - \Phi(Y))] .
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e) &\leq e^T \left[\frac{(A + M_{n \times n}) + (A + M_{n \times n})^T}{2} + \rho E \right] \cdot e \\
 &\leq e^T \cdot U \cdot \Lambda \cdot U^T \cdot e = (U^T e)^T \Lambda (U^T e) \\
 &\leq \max \{ \lambda_i \}_{i=1}^n (U^T e)^T (U^T e) \\
 &\leq 0. \text{ pour tout } e \neq 0.
 \end{aligned}$$

Alors

$$V(e) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

[?] ■

2.5.2 La synchronisation par la méthode de Carroll et Pecora

Certains systèmes chaotiques possèdent la propriété d'autosynchronisation, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en deux sous-systèmes, l'un émetteur, l'autre récepteur. Ces derniers peuvent se synchroniser sous l'effet d'un couplage avec signal commun.

En 1990, Carroll et Pecora ont montré que : Si on substitue une variable d'un système chaotique par la décomposition de ce dernier, alors on peut synchroniser ce système avec un autre système identique.

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques chaotiques de dimension n , et qu'ils sont

identiques et présentés par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x). \\ \dot{Y} = f(y), \end{cases}$$

l'un des deux systèmes est l'émetteur et l'autre récepteur. L'idée de cette méthode est de décomposer le système émetteur en deux sous-systèmes comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Avec $x_1 \in \mathbb{R}^d$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$, $d + m = n$ et $x = (x_1, x_2)$.

On va considérer l'un des deux sous systèmes comme un signal transmetteur et il sera injecter dans le système récepteur, alors on obtient le système suivant

$$\dot{y} = f_2(x_1, y).$$

Comme système récepteur ou émetteur, avec x_1 est le signal transmetteur.[9]

Chapitre 3

Application : Synchronisation

identique du système de Chen par la méthode de Carroll et Pecora

3.1 Le système de Chen

Le système de Chen a été découvert grâce à la chaotification (anti contrôle) du système de Lorenz contrôlé, c'est-à-dire à partir d'un système non chaotique on va essayer de créer un système chaotique en employant la méthode de la rétroaction d'état (state feedback).

Le système de Lorenz contrôlé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec $a; b; c$ sont des constantes, et u le contrôleur linéaire de rétroaction de la forme

$$u = k_1x + k_2y + k_3z,$$

avec k_1, k_2, k_3 des constantes à déterminer.

On souhaite que le système (3.1) devienne chaotique; donc il suffit que k_1, k_2, k_3 prennent des valeurs de sorte que ce système ait un comportement chaotique.

Les points d'équilibre du système (3.1) sont donnés par : $P_1(0; 0; 0)$;

$$P_{2,3}(\pm\sqrt{b(2c-a)}; \pm\sqrt{b(2c-a)}; 2c-a)$$

La matrice jacobienne du système (3.1) au point $(x_0; y_0; z_0)$, est donnée par :

$$J_{(x_0; y_0; z_0)} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c + k_1 - z_0 & k_2 - 1 & k_3 - x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'au point d'équilibre $P_1(0; 0; 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J_{(0;0;0)} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c + k_1 & k_2 - 1 & k_3 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

k_3 ne contribue pas à ses valeurs propres donc il ne contribue pas aux exposants de Lyapunov, alors pour simplifier, Chen a choisi $k_3 = 0$. Pour avoir le comportement chaotique, il faut aux moins avoir une valeur propre instable pour chacun des autres points d'équilibre. En appliquant les critères de Routh-Herwitz, on peut prendre $k_1 = -a; k_2 = 1 + c$ comme un choix simple parmi plusieurs autres.

Alors le contrôleur de rétroaction est donné par :

$$u = -ax + (1 + c)y,$$

donc le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

qu'on appelle le système de Chen.

On va synchroniser deux systèmes identiques de Chen par la méthode de Carroll et Pecora, et on va étudier tous les cas possibles.[3]

3.2 Le cas où le signal transmetteur est x

On va supposer dans cette partie que le système émetteur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (c - a)x_1 - x_1z_1 + cy_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1, \end{cases}$$

qu'on peut décomposer en deux-systèmes par la substitution suivante :

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1), \\ X_2 &= (y_1; z_1). \end{aligned}$$

Dans ce cas le système émetteur est :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (c - a)x_1 - x_1z_1 + cy_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1, \end{cases} \quad (3.2)$$

tandis que le système récepteur va être présenté par :

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = (c - a)x_1 - x_1z_2 + cy_2, \\ \dot{z}_2 = x_1y_2 - bz_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Introduisons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} e_y &= y_2 - y_1, \\ e_z &= z_2 - z_1, \end{aligned}$$

dans les systèmes (3.2), (3.3), on obtient le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = ce_y - x_1e_z, \\ \dot{e}_z = x_1e_y - be_z. \end{cases} \quad (3.4)$$

On va choisir la fonction

$$V_1 = \frac{1}{2}(e_y^2 + e_z^2),$$

comme une fonction de Lyapunov, sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_1 = ce_y^2 - be_z^2,$$

pour que le système (3.4) soit exponentiellement stable au voisinage de l'origine, il suffit que $\dot{V} < 0$; pour cela on obtient :

$$e_y < \sqrt{\frac{b}{c}}e_z.$$

Simulation numérique

Pour les valeurs de paramètre $(a; b; c) = (35; 3; 28)$; et pour les valeurs initiales $(x_1; y_1; z_1) = (50; 10; 10)$, et $(y_2; z_2) = (-10; -10)$ on obtient :

[3]

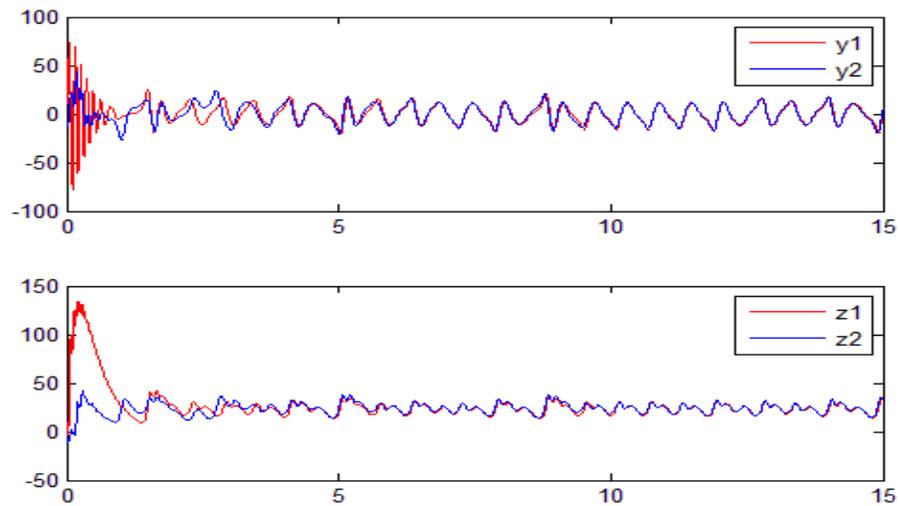


FIG. 3.1 – Synchronisation identique le système de **Chen** par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur x

3.3 Le cas où le signal transmetteur est y

Dans ce cas le système émetteur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b z_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Alors le système récepteur est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_1 - x_2), \\ \dot{z}_2 = x_2 y_1 - b z_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Des équations (3.5), (3.6) on obtient le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -a e_x \\ \dot{e}_z = y_1 e_x - b e_z \end{cases}$$

avec : $e_x = x_2 - x_1$ et $e_z = z_2 - z_1$.

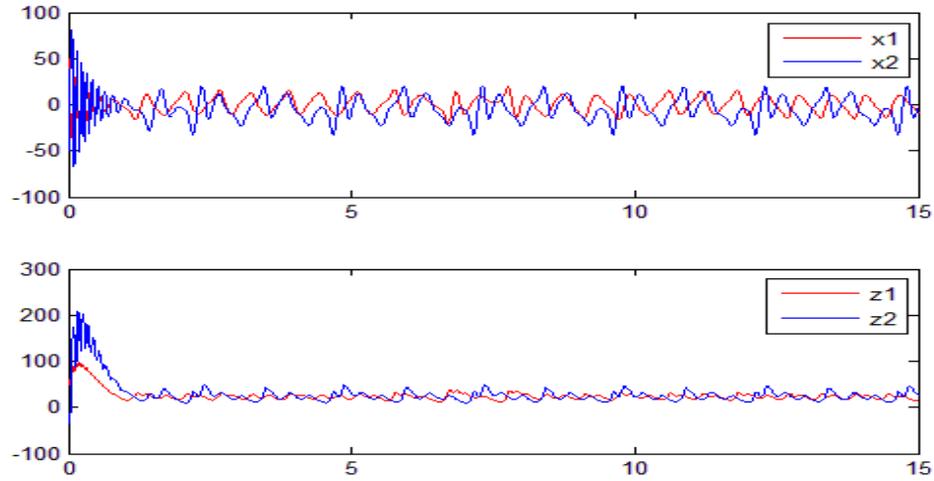


FIG. 3.2 – Synchronisation identique le système de **Chen** par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur y

La fonction de Lyapunov, dans cette partie, va être choisie par :

$$V_2 = \frac{1}{2} (e_y^2 + e_z^2).$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_2 = -(ae_x^2 + be_z^2) + y_1 e_x e_z.$$

Pour que les deux systèmes (3.5) et (3.6) soient synchronisés, il suffit que :

$$y_1 < \frac{ae_x^2 + be_z^2}{e_x e_z}.$$

Simulation numérique

Pour les valeurs de paramètre $(a; b; c) = (35; 3; 28)$; et pour les valeurs initiales $(x_1; y_1; z_1) = (50; 35; 50)$, et $(x_2; z_2) = (-50; 29)$ on obtient :

[3]

3.4 Le cas où le signal transmetteur est z

Dans ce cas le système émetteur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (c - a)x_1 - x_1z + cy_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Alors le système récepteur est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 = (c - a)x_2 - x_2z + cy_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Des équations (3.7), (3.8) on obtient le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x), \\ \dot{e}_y = (c - a)e_x - e_xz + ce_y, \end{cases}$$

avec : $e_x = x_2 - x_1$ et $e_y = y_2 - y_1$.

La fonction de Lyapunov, dans cette partie, va être choisie par :

$$V_3 = \frac{1}{2} (e_y^2 + e_x^2).$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_3 = -ae_x^2 + e_y^2(c - z) + ce_xe_y.$$

Pour que les deux systèmes (3.7) et (3.8) soient synchronisés, il suffit que :

$$\dot{V}_3 < 0.$$

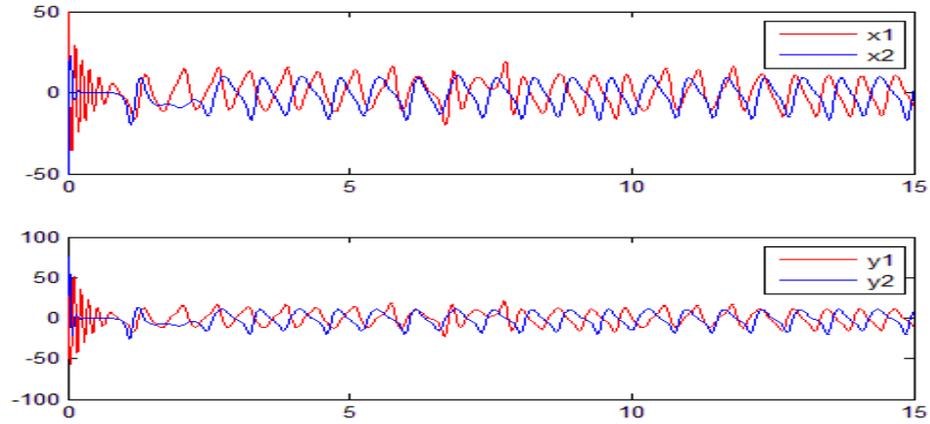


FIG. 3.3 – Synchronisation identique le système de **Chen** par la méthode de Carroll et Pecora où le signal transmetteur z

Simulation numérique

Pour les valeurs de paramètre $(a; b; c) = (35; 3; 28)$; et pour les valeurs initiales $(x_1; y_1; z_1) = (50; 35; 50)$, et $(x_2; y_2) = (-50; 29)$ on obtient :

[3]

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une étude sur la synchronisation identique des systèmes chaotiques

- Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques tel que : points d'équilibre, les attracteurs et ses différents types, notions de stabilité et la théorie de bifurcation, nous avons fini ce chapitre par la théorie du chaos.
- Le deuxième chapitre est dédié à la théorie de la synchronisation où on a donné une série de définitions qui conduisent à une définition mathématique de la synchronisation, ensuite on a présenté des différents types de la synchronisation, en particulier on a discuté la synchronisation identique, en clôturant ce chapitre par les méthodes de la synchronisation identique.
- Enfin, le mémoire est clôturé par une application sur le système de Chen.

Après ce travail on peut poser la question suivante : "à quoi sert cette synchronisation des systèmes chaotiques" ?, la réponse est que ce phénomène a sa propre utilisation dans plusieurs domaines, en particulier dans la communication numérique, avec l'essor des nouvelles technologies de cette dernière et le problème associé de la confidentialité des échanges, il s'avère que les caractéristiques essentielles du chaos-son caractère erratique et sa grande sensibilité aux conditions initiales.[3]

Bibliographie

- [1] Abd Elouahab Mouhamed Salhi, Les Systèmes Chaotiques à Dérivées Fractionnaires, Thèse, Constantine, Mars ,(2009).
- [2] Ahlem Gasri, Chaos et Synchronisation (généralisé) Dans Les Systèmes Dynamiques, Thèse, Constantine, Juillet, (2018).
- [3] Djamila Karaali, Synchronisation des quelques systèmes chaotiques, Majistere, Constantine, (2007).
- [4] Eckmann JP, Roads to turbulence in dissipative dynamical systms, Rev Mod, Phys, 53 :643-5, (1981).
- [5] Hamid Hamiche, Inversion à Gauche Des Systèmes Dynamiques Hybrides Chaotiques. Application à la Transmission Sécurisée de Données, Thèse, Tizi-Ouzou, (2011).
- [6] Hilborn R, Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers, Oxford Student Edition, (1994).
- [7] Kaplan D, Glass L, Finite-difference equations, Understanding nonlinear dynamics, New-York, Springer-Verlag, 1-53, (1995). .
- [8] Ruelle D, Takens F, On the nature of turbulence, Commun, Math, Phys, 20 :67-192, (1971).
- [9] Tidjani Menacer, Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiqueq à Dérivées Fractionnaires, Thèse, Constantine, Mai, (2014).
- [10] Pomeau Y, Manneville P, Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, Commun, Math, Phys, 74(2) :189-197, (1980).

Annexe : Programme en matlab pour synchroniser deux systèmes de Chen par la méthode de Carrol et Pecora (le signal transmetteur est x).

```
% Synchronisation identique de système de Chen par la méthode de Carroll et Pecora  
clear all  
close all  
% on fixe les paramètres du système  
a = 35; b = 3; c=28;  
% on fixe le pas de temps, le temps jusqu'auquel  
dt = 0.01; Tmax = 15;  
x(1) = 50; y(1) = 10; z(1) = 10;  
tps(1) = 0;  
k = 1;  
% itération  
for t=0 :dt :Tmax,  
k = k+1;
```

```
dx1 = a*(y(k-1)-x(k-1));
dy1 = (c-a)*x(k-1)+c*y(k-1)*z(k-1);
dz1 = x(k-1)*y(k-1)-b*z(k-1);
x2 = x(k-1)+dt*dx1/2; y2 = y(k-1)+dt*dy1/2; z2 = z(k-1)+dt*dz1/2;
dx2 = a*(y2-x2); dy2 = (c-a)*x2+c*y2-z2*x2; dz2 = x2*y2-b*z2;
x3 = x(k-1)+dt*dx2/2; y3 = y(k-1)+dt*dy2/2; z3 = z(k-1)+dt*dz2/2;
dx3 = a*(y3-x3); dy3 = (c-a)*x3+c*y3-z3*x3; dz3 = x3*y3-b*z3;
x4 = x(k-1)+dt*dx3; y3 = y(k-1)+dt*dy3; z3 = z(k-1)+dt*dz3;
dx4 = a*(y4-x4); dy4 = (c-a)*x4+c*y4-z4*x4; dz4 = x4*y4-b*z4;
x(k) = x(k-1)+dt*(dx1/6+dx2/3+dx3/3+dx4/6);
y(k) = y(k-1)+dt*(dy1/6+dy2/3+dy3/3+dy4/6);
z(k) = z(k-1)+dt*(dz1/6+dz2/3+dz3/3+dz4/6);
tps(k) = t;
end
% on fixe les parametres du système
% on fixe le pas de temps, le tepms jusqu'auquel
% on calcule, la condition initiale
dt = 0.01;
Tmax = 15;
m(1) = -10;
n(1) = -10;
tps(1) = 0;
k = 1;
% iteration
for t=0 :dt :Tmax,
```

```
k = k+1 ;  
  
dx1 = a*(m(k-1)-x(k-1)); dm1 = (c-a)*x(k-1)+c*m(k-1)*n(k-1); dn1 = x(k-1)*m(k-1)-b*n(k-1);  
  
x2 = x(k-1)+dt*dx1/2; m2 = m(k-1)+dt*dm1/2; n2 = n(k-1)+dt*dn1/2;  
  
dx2 = a*(m2-x2); dm2 = (c-a)*x2+c*m2-n2*x2; dn2 = x2*m2-b*n2;  
  
x3 = x(k-1)+dt*dx2/2; m3 = m(k-1)+dt*dm2/2; n3 = n(k-1)+dt*dn2/2;  
  
dx3 = a*(m3-x3); dm3 = (c-a)*x3+c*m3-n3*x3; dn3 = x3*m3-b*n3;  
  
x4 = x(k-1)+dt*dx3; m3 = m(k-1)+dt*dm3; n3 = n(k-1)+dt*dn3;  
  
dx4 = a*(m4-x4); dm4 = (c-a)*x4+c*m4-n4*x4; dn4 = x4*m4-b*n4;  
  
x(k) = x(k-1)+dt*(dx1/6+dx2/3+dx3/3+dx4/6);  
  
m(k) = m(k-1)+dt*(dm1/6+dm2/3+dm3/3+dm4/6);  
  
n(k) = n(k-1)+dt*(dn1/6+dn2/3+dn3/3+dn4/6);  
  
tps(k) = t;  
  
end  
  
% representation graphique  
  
axis ([0 15 -100 100])  
  
subplot(2,1,1) , plot(tps,y,'r',tps,m,'b')  
  
legend('y1','y2')  
  
subplot(2,1,2) , plot(tps,z,'r',tps,n,'b')  
  
legend('z1','z2')
```