

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

BOUAZIZ Tayeb

Titre :

Calcul d'Itô et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. LABED Boubakar	UMKB	Président
Dr. AGRAM Nacira (Pr. HAFAYAD Mokhtar)	UMKB	Encadreur
Dr. LABED Saloua	UMKB	Examineur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail purement à
mes chers parents **Saliha** et **Hachemi**,
et mes deux frères **Mohammed** et **Brahim**.

BOUAZIZ Tayeb, Juin 2019.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **Allah** le plus puissant de m'avoir permis d'accomplir ce humble travail.

Je remercie infiniment les deux personnes les plus importantes de ma vie : ma mère **SALIHA** et mon père **HACHEMI**, pour leur éternel soutien abstrait et concret, je ne peux jamais leur dire des mots qui leur rapportent ce qu'ils méritent, sans leur soutien, je ne serais jamais ici, merci beaucoup à eux et qu'**Allah** bénisse leurs jours et santés. Sans oublier le reste de la famille et mes amis, merci à vous tous.

Ensuite, je tends à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à mon encadreur :

Dr. AGRAM Nacira, qui m'a guidé avec soin et patience tout en faisant ce travail, ce que j'ai appris en lui contactant et travaillant sous sa direction n'a pas de prix sur tous les niveaux, je lui dois toute ma vie et lui souhaite le meilleur dans sa carrière professionnelle.

De plus, je remercie vivement mon professeur modèle : **Pr. HAFAYAD Mokhtar** pour avoir accepté de remplacer mon encadreur, son comportement agréable et son esprit humain, qu'**Allah** le récompense.

Je déclare mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à toute la famille enseignante de la faculté de mathématiques de Biskra, sans exception. En particulier, je remercie mes professeurs modèles : **MERAGHNI Djamel** et **MEZERDI Brahim** pour leurs aides énormes et illimitées et leurs consciences professionnelles exceptionnelles, telles personnalités essentielles auxquelles on ne peut faire face deux fois pendant plusieurs décennies.

Je remercie chaleureusement : **Dr. LABED Boubakar** et **Dr. LABED SALOUA** de m'avoir honoré et accepté d'évaluer ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué dans ce travail, de près ou de loin.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Abréviations et Notations	vi
Introduction	1
1 Intégrale Stochastique	4
1.1 Construction d'une intégrale stochastique	4
1.2 Propriétés de L'intégrale Stochastique	8
1.3 Théorème de représentation des martingales	10
1.4 Théorème de changement de probabilité	12
2 Equations Différentielles Stochastiques	13
2.1 Exemples des EDS linéaires	14
2.1.1 Mouvement Brownien géométrique	14
2.1.2 Processus d'Ornestein-Uhlenbeck (équation de Langevin)	16
2.1.3 EDS linéaire avec mémoire (retard)	17
2.1.4 EDS à champ moyen	18
2.2 EDS non-linéaires	20

3 Applications	24
3.1 Dynamique des populations	24
3.2 Formule de Black-Scholes	27
Conclusion	35
Bibliographie	35
Annexe A : Logiciel python	37
Annexe B : Définitions et lemmes	44

Table des figures

2.1 Simulations des trajectoires d'un mouvement Brownien géométrique	15
3.1 Comportement de la population	25
3.2 Simulation des prix de Stoks	33
3.3 Simulations de 5 trajectoires du mouvement Brownien	46

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Les lettres grecs

Ω, ω Γ α β δ η π σ ϕ φ χ ψ
omega gamma alpha beta delta eta pi sigma phi varphi chi psi

les autres symboles mathématiques

$\ f\ _\infty$	$\sup_{x \in D_f} \{ f(x) \}$, D_f : domaine de définition de la fonction : $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$
\mathbb{N}^*	L'ensemble des nombres entiers positifs.
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels.
$C^2([0, \infty[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions continues définies de $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .
$\frac{\partial}{\partial x}$	La dérivé partielle première par rapport à la variable x .
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	La dérivé partielle seconde par rapport à la variable x .
$\mathbb{E}(X)$	L'espérance mathématique de la VA X .
$Cov(., .)$	La covariance.
$\exp(x)$	Exponentielle de x .
$\mathcal{B}(\cdot)$	La tribu borélienne.

Les abréviations

MB	mouvement Brownien
MBG	mouvement Brownien géométrique
VA	variable aléatoire

Introduction

En commençant par quelques exemples de motivation :

- Croissance exponentielle dans un environnement déterministe (constant) :

Soit Y_t la densité de la population au temps t . On l'associe l'équation de l'évolution suivante

$$\frac{dY_t}{dt} = cY_t,$$

où $c \in \mathbb{R}$ (constante) est la croissance démographique relative.

Afin de comprendre mieux le model,

- Pour obtenir un modèle plus réaliste, on laisse c varier avec le temps. Par exemple, si nous voulons modéliser une situation avec un environnement bruyant imprévisible changeant, nous obtenons le modèle suivant :
- Croissance exponentielle dans un environnement bruyant :

Heuristiquement, la densité Y_t vérifie maintenant l'équation

$$\frac{dY_t}{dt} = (\alpha + \beta \text{"bruit"})Y_t,$$

avec "bruit" = " $\frac{dW_t}{dt}$ " où W est un *mouvement Brownian standard* et α et β sont des constantes données. Une interprétation mathématiquement rigoureuse de cette équation est que Y_t satisfait ce qu'on appelle une *équation différentielle stochastique* (EDS) de type Itô suivant :

$$dY_t = \alpha Y_t dt + \beta Y_t dW_t.$$

Dans le modèle de marché classique Black-Scholes, le prix S_t au moment t de l'actif risqué (par exemple, le stock) est représenté par la solution d'une (EDS) de la forme :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0,$$

où μ (le drift) et $\sigma \neq 0$ (la volatilité) sont des constantes et $W_t = W(t, \omega); (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$ est un *mouvement Brownien standard*. On va voir par la formule d'Itô que la solution satisfait une EDS

$$S_t = S_0 \exp \left[\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right], \quad t \geq 0.$$

En plus de l'actif risqué de prix S_t , nous supposons que le marché dispose d'un actif sans risque (par exemple, une obligation) avec un prix

$$B_t = \exp(rt); \quad t \geq 0, \tag{1}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque (pour simplicité, on suppose qu'il est constant).

Dans ce travail, on s'intéresse aux points suivants :

- Le marché est-il exempt d'arbitrage ?
- Le marché est-il complet ?
- Si la réponse aux deux premières questions ci-dessus est oui, nous pouvons également demander :

Quel est le prix d'une option européenne sur ce marché ?

Existe-t-il une formule de Black-Scholes ?

Avant plus qu'une dizaine de décades, *L. Bachelier* a donné naissance d'une nouvelle structure de modélisation en introduisant un nouveau membre aux équations des stocks (dit le terme *Brownien en 1904*), ce qui était considérée révolutionnaire à l'époque pour beaucoup des observateurs (mathématiciens, économistes ou physiciens...etc.). Puis les années 40's témoignaient la démonstration d'une formule mathématique (dite *formule d'Itô*) par *K. Itô* qui facilitait et permettait de prolonger la théorie des processus stochastiques vers

divers domaines d'études, ce travail n'est qu'un modeste essai de faire simuler une. Ce travail prend la forme de trois chapitres dépendants :

Le premier chapitre traite la notion d'*intégrale stochastique*, qu'on commence par la construire, puis citer quelques propriétés importantes et utiles (*l'isométrie d'Itô, le théorème de Girsanov et le théorème de représentation*).

Le deuxième chapitre est une extension du premier, dans lequel on introduit *les équations différentielles stochastiques (notées EDS)*, puis parcourt quelques exemples des fameux EDS avec leurs solutions explicites et on le termine par un théorème fondamental d'existence et d'unicité de telles solutions des EDS.

Finalement, le troisième chapitre utilise ceux qui précèdent pour faire appliquer *le calcul d'Itô* aux deux exemples importants :

1. Dynamique des populations : le modèle exponentiel déterministe, modèle logistique, puis un modèle de dynamique dans un environnement bondé stochastique.
2. Le modèle de *Black-Scholes* : on introduit des terminologies financières nécessaires, puis on utilise les divers éléments introduits dans les chapitres précédents, pour évaluer les prix des options européennes dans un marché financier de *Black-Scholes*.

Le lecteur est supposé d'avoir des connaissances financières et de la théorie de la mesure et l'intégration basiques.

Chapitre 1

Intégrale Stochastique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la notion d'une intégrale stochastique due à Itô, c'est à dire : on va donner un sens (construire) à cette intégrale :

$$\int \cdot dW$$

par rapport à un processus stochastique nommé mouvement Brownien $(W_t)_{t \geq 0}$. On va donner aussi ses propriétés. En terminant ce chapitre par le théorème fondamental de *représentation des martingales* et le théorème de *changement probabilité de Girsanov*.

Tout au long de ce chapitre, on se réfère aux : cours de Jeanblanc ([5]) et le livre d'Øksendal ([6]).

1.1 Construction d'une intégrale stochastique

Considérant l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Soient $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien (MB) unidimensionnel et \mathcal{G} est la filtration engendrée par ce MB. La construction de l'intégrale d'Itô est assez technique, on l'étend graduellement des fonctions élémentaires étagées aux martingales de carré intégrable, puis aux martingales locales, et enfin aux semi-martingales. Tout d'abord, on définit la classe des fonctions sur laquelle on va définir l'intégrale d'Itô :

Définition 1.1 Soit $\Gamma = \Gamma(S, T)$, $0 \leq S \leq T \leq +\infty$, la classe des fonctions : $g(t, \omega) : [0, +\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

1. $(t, \omega) \longmapsto g(t, \omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{G}$ -mesurable,
2. $g(t, \omega)$ est \mathcal{G}_t -adaptée,
3. $\mathbb{E} \left[\int_S^T g^2(t, \omega) dt \right] < +\infty$.

Dans chaque étape, l'idée clé est d'approximer les intégrales stochastiques (soient de $\psi(t, \omega)$) par d'autres intégrales stochastiques (soient de $\psi_n(t, \omega)$) quand ψ_n tend vers ψ dans $L^2([S, T] \times \Omega)$, c'est à dire

L'IS de ψ est la limite de l'IS de $(\psi_n)_{n \geq 0}$, dans L^2 .

Pour des fonctions $h \in \Gamma$, on va voir comment définir l'intégrale d'Itô

$$\mathcal{I}(h)(t, \omega) := \left[\int_S^T h(t) dW_t \right] (\omega). \quad (1.1)$$

Premièrement, on définit (1.1) pour une classe des fonctions simples :

Définition 1.2 (Fonction simple) On dit qu'une fonction $\psi \in \Gamma$ est simple (ou élémentaire) s'il existe une subdivision de l'intervalle $[S, T] : S = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ et une famille des variables aléatoires (VA) $\{\beta_j\}_{j=0}^{2^n}$, telles que pour tout $j = \overline{0, 2^n}$ les VA β_j sont bornées et \mathcal{G}_{t_j} -mesurables, on a

$$\forall (t, \omega) \in [S, T] \times \Omega : \psi(t, \omega) = \sum_{k=0}^n \beta_k(\omega) \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

Exemple 1.1 Posant pour $j = \overline{0, 2^n} : t_j = j \frac{T}{2^n}$ avec $t_0 = S, n \in \mathbb{N}$ et $\beta_j = W_{t_j}$, on a pour $j = \overline{0, 2^n}$, les VA β_j sont bornées et \mathcal{G}_{t_j} -mesurables. On définit la fonction simple φ par

$$\forall (t, \omega) \in [S, T] \times \Omega, \varphi(t, \omega) = \sum_{j=0}^{2^n} \beta_j(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t). \quad (1.2)$$

Définition 1.3 On définit l'intégrale stochastique (1.1) pour les fonctions simples $\psi(t, \omega)$ par

$$\mathcal{I}(\psi)(t, \omega) := \sum_{k \geq 0} \beta_k(\omega) [W_{t_{k+1}}(\omega) - W_{t_k}(\omega)], \quad (1.3)$$

$$t_k = \begin{cases} S & \text{si } \frac{k}{2^n} < S, \\ \frac{k}{2^n} & \text{si } S < \frac{k}{2^n} < T, \\ T & \text{si } T < \frac{k}{2^n}. \end{cases}$$

Exemple 1.2 Si on prend φ comme dans l'exemple 1 (1.2) l'IS (1.1) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\varphi)(t, \omega) &:= \sum_{k=0}^{2^n} \beta_k(\omega) [W_{t_{k+1}}(\omega) - W_{t_k}(\omega)] \\ &= \sum_{k=0}^{2^n} W_{k \frac{T}{2^n}}(\omega) [W_{t_{k+1}}(\omega) - W_{t_k}(\omega)]. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 L'espace $L^2([S, T] \times \Omega)$ muni de la norme

$$\|\psi\|^2 := \mathbb{E} \left(\int_0^t [\psi(s, \omega)]^2 ds \right), \psi \in \Gamma$$

est un espace de Hilbert, donc on peut utiliser une isométrie linéaire pour prolonger la définition de l'IS pour des fonctions simples à des fonctions définies dans Γ . (c'est à dire : on commence par des fonctions bornées continues dans Γ , puis des fonctions bornées et enfin pour des fonctions quelconques définies dans Γ).

Définition 1.4 (L'intégrale d'Itô) Soit $g \in \Gamma$, alors l'intégrale d'Itô de g est définie par

$$\int_S^T g(t) dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \psi_n(t) dW_t \quad (\text{la limite dans } L^2(\mathbb{P})). \quad (1.4)$$

où ψ_n est une suite des fonctions simples telles que :

$$\begin{aligned} \|g - \psi_n\| &\rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ c-à-d :} \\ \mathbb{E} \left(\int_S^T [g(t, \omega) - \psi_n(t, \omega)]^2 dt \right) &\rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Exemple 1.3 On pose : $\varphi_n(t, \omega) = \sum_{k \geq 0} W_k \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t)$, avec $W_k = W_{t_k}$, alors

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t). \quad (1.5)$$

Avant de démontrer (1.5), on a besoin de ce qui suit :

Définition 1.5 (Processus d'Itô) On dit qu'un processus $Y = (Y_t, t \geq 0)$ est d'Itô si

$$Y_t = y + \int_0^t a_s ds + \int_0^t L_s dW_s \quad (1.6)$$

où a est un processus adapté tels que : $y \in \mathbb{R}$, $\int_0^t |a(r, \omega)| dr < \infty$ \mathbb{P} -p.s (au sens de Lebesgue) et $L \in \Gamma$. L'équation intégrale (1.6) est équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} dY_t = a_t dt + L_t dW_t, \\ Y_0 = y. \end{cases} \quad (1.7)$$

Remarques 1.1 1. On peut affaiblir la version de l'IS par considérer la classe $\Gamma'(S, T)$

définie par : $g(t, \omega) : [0, +\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

(a) $(t, \omega) \longrightarrow g(t, \omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{G}_t$ -mesurable,

(b) Il existe une filtration $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$, telles que

i. W_t est une \mathcal{H}_t -martingale,

ii. g_t est \mathcal{H}_t -adaptée.

(c) $\mathbb{P} \left[\int_S^T g^2(t, \omega) dt < +\infty \right] = 1$.

2. Si $h \in \Gamma'$, on peut montrer qu'il existe une suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 0} \subset \Gamma'$, telles que :

$\int_0^t |h_n(s) - h(s)|^2 ds \rightarrow 0$, en probabilité, alors on peut définir

$$\int_0^t h(s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t h_n(s) dW_s, \text{ en probabilité, pour } h \in \Gamma'.$$

1.2 Propriétés de L'intégrale Stochastique

Après avoir construit L'IS, on mentionne maintenant quelques propriétés importantes qu'on va les utiliser dans la suite :

1. **La linéarité** : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall Y, Z \in \Gamma$, on a

$$\int_S^T (\alpha Y_u + Z_u) dW_u = \alpha \int_S^T Y_u dW_u + \int_S^T Z_u dW_u.$$

2. **L'isométrie d'Itô**

Lemme 1.1 *Si ψ est simple et bornée, on a*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T \psi(t) dW_t \right)^2 (\omega) \right] = \mathbb{E} \left[\int_S^T \psi^2(t, \omega) dt \right]. \quad (1.8)$$

Preuve On pose $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, alors $\mathbb{E} [\beta_i \beta_k \Delta B_i \Delta B_k] = \mathbb{E} [\beta_i^2] (t_{i+1} - t_i) \delta_{k,i}$,

$$\delta_{k,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i, \\ 1 & \text{si } k = i. \end{cases}$$

En utilisant le fait que $\beta_i \beta_k \Delta B_i$ sont indépendants de ΔB_k si $k < i$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_S^T \psi(t) dW_t \right]^2 (\omega) &= \sum_i \sum_k \mathbb{E} [\beta_i \beta_k \Delta B_i \Delta B_k] \\ &= \sum_k \mathbb{E} [\beta_k^2] (t_{k+1} - t_k) = \mathbb{E} \left[\int_S^T \psi^2(t, \omega) dt \right]. \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on a voulu montrer. \square

Corollaire 1.1 *Si $g \in \Gamma(S, T), \forall n = 1, 2, \dots, g_n \in \Gamma(S, T)$ et*

$$\mathbb{E} \left(\int_S^T [g_n(t, \omega) - g(t, \omega)]^2 dt \right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

on a

$$\int_S^T g_n(t) dW_t \rightarrow \int_S^T g(t) dW_t \text{ dans } L^2 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Preuve Exemple 1.3. (1.5)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t (\varphi_n - W_s)^2 ds \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (W_j - W_s)^2 ds \right] \\ &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds = \sum_j \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta t_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par le corollaire précédent on trouve

$$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \varphi_n dW_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_j W_j \Delta W_j.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta(W_j)^2 &= W_{j+1}^2 - W_j^2 \\ &= (W_{j+1} - W_j)^2 + 2W_j(W_{j+1} - W_j) \\ &= (\Delta W_j)^2 + 2W_j \Delta W_j, \end{aligned}$$

et comme $W_0 = 0$, on obtient

$$\sum_j W_j \Delta W_j = \frac{1}{2} W_t^2 + \frac{1}{2} \sum_j (\Delta W_j)^2,$$

et $\sum_j (\Delta W_j)^2 \rightarrow t$ dans L^2 quand $\Delta t_j \rightarrow 0$, le resultat désiré est obtenu. □

3. Propriétés de martingale (Jeanblanc 5) : Soit $Y \in \Gamma$, on définit $Z_t = \int_0^t Y_u dW_u$, alors

(a) Le processus Z_t est une \mathcal{G}_t -martingale, de plus

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E}[Z_t] = 0 \text{ et } \forall s, t \geq 0, \text{Cov}(Z_t, Z_s) = \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge s} Y_u^2 du \right].$$

(b) $M_t = Z_t^2 - \mathbb{E} \left[\int_0^t Y_u^2 du \right]$ est une \mathcal{G}_t -martingale.

4. Formule d'Itô unidimensionnelle :

Théorème 1.1 Soient $dX_t = a_t dt + L_t dW_t$ un processus d'Itô unidimensionnel et $f(t, x) \in$

$C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$, alors

$Z_t = f(t, X_t)$ est aussi un processus d'Itô et

$$d(Z_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) .dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2 \quad (1.9)$$

où $(dX_t)^2$ est calculée selon les règles suivantes : $dW_t .dW_t = dt$, et $dW_t .dt = dt .dW_t = dt .dt = 0$.

Donc on peut réécrire (1.9) comme

$$dZ_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + a_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) L_t^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) L_t dW_t.$$

Remarque 1.2 Pour simplicité, on a considéré le cas unidimensionnel, mais l'extension vers celui multidimensionnel existe dans beaucoup des références tels : cours de Jeanblanc ([5]) ou le livre d'Øksendal ([6]).

Corollaire 1.2 Soient X, Y deux processus d'Itô, on applique la formule d'Itô (1.9) au produit XY , on obtient

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t. \quad (1.10)$$

En intégrant (1.10) par rapport à t , on obtient la formule d'intégration par parties suivante

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s. \quad (1.11)$$

1.3 Théorème de représentation des martingales

Théorème 1.2 (Øksendal [6]) On suppose que M_t est une $\mathcal{G}_t^{(n)}$ -martingale de carré intégrable, pour tout $t \geq 0$, il existe un unique processus $f \in \Gamma^{(n)}(0, t)$ et

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t f(s) dW_s, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (1.12)$$

avec $\mathcal{G}_t^{(n)}$ est la filtration engendrée par les VA $W(s_i), 0 \leq s_i \leq t, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.4 (Martingale exponentielle) Soit le processus Z défini par

$$Z_t = \exp \left\{ p \int_0^t dW_s - \frac{p^2}{2} \int_0^t ds \right\} = f(t, W_t), p \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

On admet que Z est une $\mathcal{G}_t^{(n)}$ -martingale de carré intégrable, avec

$$f(t, x) = \exp(px - \frac{p^2}{2}t) \in C^2([0, \infty] \times \mathbb{R}).$$

On applique la formule d'Itô (1.9) à $f(t, x)$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{p^2}{2}f(t, x), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = pf(t, x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = p^2f(t, x).$$

Alors l'équation (1.13) est équivalente à

$$\begin{cases} dZ_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) \cdot dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) d(W_t)^2 \\ &= -\frac{p^2}{2}f(t, W_t)dt + pf(t, W_t)dW_t + \frac{p^2}{2}f(t, W_t)dt = pf(t, W_t)dW_t \\ &= pZ_t dW_t, \\ Z_0 &= 1. \end{cases}$$

Où sous forme intégrale

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t pZ(s)dW_s = 1 + \int_0^t g(s)dW_s,$$

où $g(s, \omega) = pZ_s(\omega)$. Comme Z_t une $\mathcal{G}_t^{(n)}$ -martingale de carré intégrable, g est l'unique processus vérifiant l'égalité précédente et on a $g(s, \omega) \in \Gamma^{(n)}(0, t)$.

1.4 Théorème de changement de probabilité

Théorème 1.3 (Girsanov) Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô

$$\begin{cases} dY_t = a(t, \omega)dt + dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_0 = 0. \end{cases}$$

$T \leq \infty$ une constante donnée, posons

$$M_t = \exp \left\{ - \int_0^t a(s, \omega) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s, \omega) ds \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Supposons que M_t est une \mathcal{G}_t -martingale, on définit la mesure \mathbb{Q} sur $\mathcal{G}_t^{(n)}$ par $d\mathbb{Q}(\omega) = M_T d\mathbb{P}(\omega)$, alors \mathbb{Q} est une mesure de probabilité sur $\mathcal{G}_T^{(n)}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un \mathbb{Q} -mouvement Brownien, pour tout $0 \leq t \leq T$ et

$$\frac{d\mathbb{Q}(\omega)}{d\mathbb{P}(\omega)} = M_T(\omega) = \exp \left\{ - \int_0^T a(s, \omega) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T a^2(s, \omega) ds \right\},$$

s'appelle la dérivée de Radon-Nikodym.

Chapitre 2

Equations Différentielles Stochastiques

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles stochastiques (EDS), notamment les EDS linéaires et leurs solutions explicites et on va démontrer le théorème d'existence et d'unicité des EDS non-linéaires.

Définition 2.1 Une EDS est une équation de la forme :

$$Z_t = z + \int_0^t a(u, Z_u)du + \int_0^t \sigma(u, Z_u)dW_u, \quad (2.1)$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dZ_t = a(t, Z_t)dt + \sigma(t, Z_t)dW_t, \\ Z_0 = z. \end{cases} \quad (2.2)$$

Le coefficient de drift (La dérive) $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et le coefficient de diffusion (volatilité) $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque 2.1 Dans le cas général, on ne peut pas avoir la forme différentielle (2.2) de la forme intégrale même dans le cas déterministe. Considérons

$$X_t = x + \int_0^t \alpha(t, s)ds, \quad t \in [0, T], s \in [0, t]$$

dans ce cas, on peut écrire la forme différentielle

$$dX_t = \alpha(t, t)dt + \left[\int_0^t \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s)ds \right] dt$$

si α est continuellement différentiable par rapport t pour chaque s .

Définition 2.2 Une solution de (2.1) est un processus Z continu, \mathcal{G}_t -adapté tel que les intégrales : $\int_0^t a(u, Z_u)du$ et $\int_0^t \sigma(u, Z_u)dW_u$ ont un sens et l'égalité

$$Z_t = z + \int_0^t a(u, Z_u)du + \int_0^t \sigma(u, Z_u)dW_u$$

est satisfaite pour tout t , $\mathbb{P} - p.s.$

2.1 Exemples des EDS linéaires

2.1.1 Mouvement Brownien géométrique

On considère l'EDS linéaire nommée *mouvement Brownien géométrique* (notée MBG)

$$\begin{cases} dZ_t = Z_t[adt + LdW_t], & t \in [0, T], \\ Z_0 = z, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$. Cette EDS est très importante surtout lorsqu'on étudie la formule de *Black-Scholes* qu'on va voir après. Le graphe au-dessus montre une simulation de 5 trajectoires d'un mouvement Brownien géométrique en utilisant le chemin de convergence d'*Euler-Maruyama* avec les paramètres : $a = 1.5$, $L = 0.06$ et $z = 0.1$ (voir l'annexe A, programme 1) :

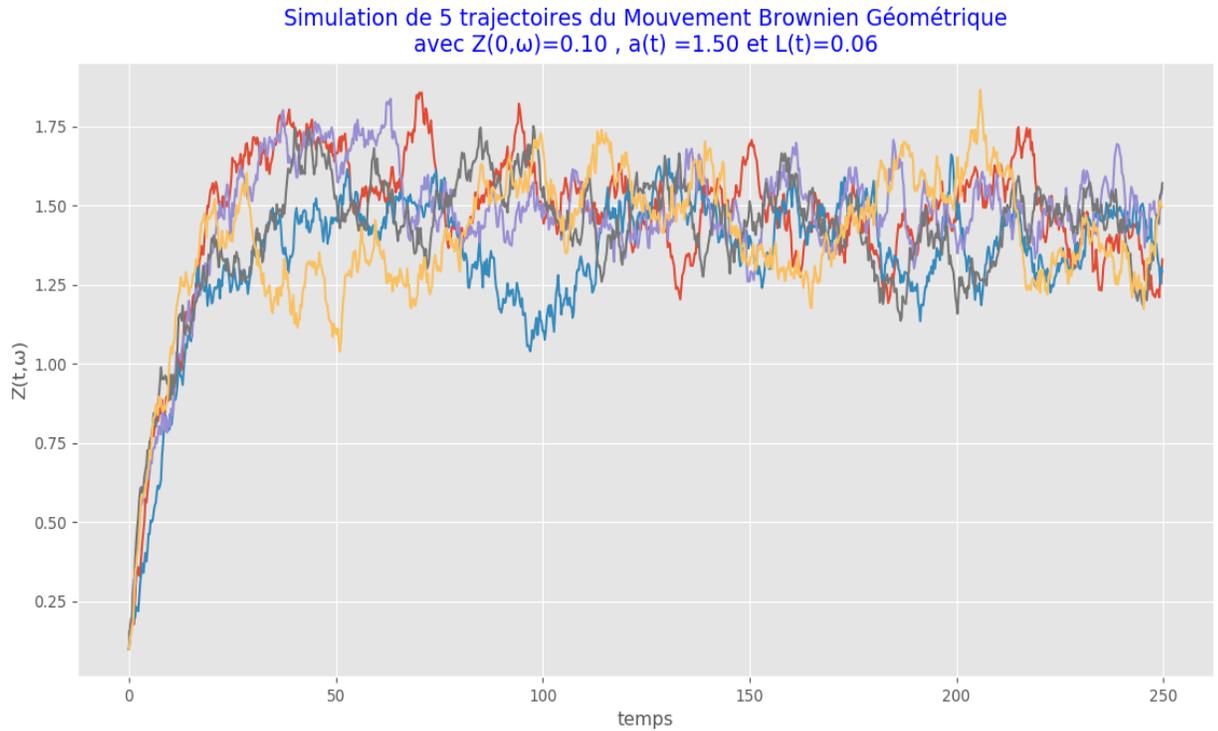


FIG. 2.1 – Simulations des trajectoires d’un mouvement Brownien géométrique

Théorème 2.1 La solution explicite de (2.3) est

$$Z_t = z \exp \left\{ \left(a - \frac{L^2}{2} \right) t + LW(t) \right\}. \quad (2.4)$$

Preuve On a (2.3) est équivalente à

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = a dt + L dW_t,$$

et par intégration, on trouve

$$\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = at + LW_t, \quad (W_0 = 0) \quad (2.5)$$

pour évaluer l'intégrale du coté gauche de (2.5), on utilise la formule d'Itô (1.9) pour une fonction

$$f(t, x) = \ln x, x > 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} d(\ln Z_t) &= \frac{1}{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{Z_t^2}\right) (dZ_t)^2 \\ &= \frac{dZ_t}{Z_t} - \frac{1}{2Z_t^2} L^2 Z_t^2 dt \end{aligned}$$

par suite

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = d(\ln Z_t) + \frac{1}{2Z_t^2} L^2 Z_t^2 dt,$$

donc de (2.5) on conclut

$$\ln Z_t = \left(a - \frac{L^2}{2}\right)t + LW_t,$$

ou bien

$$Z_t = z \exp \left\{ \left(a - \frac{L^2}{2}\right)t + LW(t) \right\},$$

c'est ce que fallait dire. □

2.1.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck (équation de Langevin)

On appelle Z_t un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* (ou équation de *Langevin*) qui satisfait l'équation suivante

$$Z_t = - \int_0^t a Z_s ds + \sigma W_t + Z_0, \tag{2.6}$$

avec a , σ et Z_0 sont des constantes. Ce processus est un cas particulier du modèle de taux d'intérêt de *Vasicek* et décrit approximativement le mouvement d'une particule libre dans un fluide.

Théorème 2.2 *L'équation (2.6) admet solution explicite suivante*

$$Z_t = e^{-at} Z_0 + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dW_s. \tag{2.7}$$

Preuve Il suffit d'appliquer la formule d'intégration par partie (1.10) à $(Z_t e^{at})$, on obtient

$$\begin{aligned} d(Z_t e^{at}) &= e^{at} dZ_t + Z_t d(e^{at}) + dZ_t d e^t \\ &= -e^{at} a Z_t dt + \sigma e^{at} dW_t + e^{at} a Z_t dt \\ &= \sigma e^{at} dW_t. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$Z_t e^{at} - Z_0 = \int_0^t \sigma e^{as} dW_s.$$

Donc

$$Z_t = e^{-at} Z_0 + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dW_s.$$

ce qui termine la preuve. □

2.1.3 EDS linéaire avec mémoire (retard)

Théorème 2.3 (Arriojas et al. [2]) *Soit l'EDS linéaire suivante dite EDS avec mémoire (ou avec retard)*

$$\begin{cases} dS_t = f(t, S_t) dt + g(S_{t-\delta}) S_t dW_t, t \in [0, T], \\ S_t = \varphi_t, \quad t \in [-L, 0], L = \max\{a, \delta\}. \end{cases} \quad (2.8)$$

On suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, \eta) = \mu \eta(-a) \eta(0), \\ \exists \tilde{L} > 0, |f(t, \eta)| \leq \tilde{L}(1 + \|\eta\|_\infty), \forall (t, \eta) \in [0, T] \times C([-L, 0], \mathbb{R}), \\ \{\forall n \in \mathbb{N}, \exists L_n > 0 : \\ |f(t, \eta^1) - f(t, \eta^2)| \leq L_n \|\eta^1 - \eta^2\|_\infty, \forall (t, \eta^i) \in [0, T] \times C([-L, 0], \mathbb{R}), \text{ avec } \|\eta^i\|_\infty \leq n, i = 1, 2\}, \\ \forall (t, \eta) \in [0, T] \times C([-L, 0], \mathbb{R}) : f(t, \eta) > 0, \\ g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ continue et} \\ a \geq 0 \text{ et } \delta \geq 0 \text{ sont les constantes de retard,} \end{array} \right.$$

alors l'équation (2.8) admet une unique solution S_t pour un processus initial donné

$\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$, $\mathcal{G}_0 - \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}))$ -mesurable, de plus si $\varphi_t \geq 0$ pour tout $t \in [-L, 0]$

(respectivement $\varphi_t > 0$ pour tout $t \in [-L, 0]$) $\mathbb{P}.p.s$ alors $S_t \geq 0$ $\mathbb{P}.p.s$ pour tout $t \in [-L, 0]$
 (respectivement $S_t > 0$ $\mathbb{P}.p.s$ pour tout $t \in [-L, 0]$)

Preuve On définit pose $l = \min\{a, \delta\}$, on obtient

$$\begin{cases} dS_t = S_t[\mu\varphi_{t-a}dt + g(\varphi_{t-\delta})dW_t], & t \in [0, l], \\ S_0 = \varphi_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

On définit la \mathcal{G}_t -semi-martingale

$$\begin{aligned} M_t &= \mu \int_0^t \varphi_{u-a} du + \int_0^t g(\varphi_{u-\delta}) dW_u, \quad t \in [0, l], \text{ alors sa variation quadratique} \\ \langle M \rangle_t &= \int_0^t g^2(\varphi_{u-\delta}) du, \quad t \in [0, l]. \end{aligned}$$

Donc S_t vérifie

$$dS_t = S_t dM_t, t > 0, S_0 = \varphi_0. \quad (2.10)$$

Par (2.4) l'unique solution de (2.10) est un *mouvement Brownien géométrique*

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\{M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t\} \\ &= \varphi_0 \exp\left\{\int_0^t [\mu\varphi_{u-a} - \frac{1}{2}g^2(\varphi_{u-\delta})] du + \int_0^t g(\varphi_{u-\delta}) dW_u\right\}, \quad \forall t \in [0, l]. \end{aligned}$$

Il est claire aussi que si $\varphi_0 > 0$, alors $S_t > 0, \forall t \in [0, l]$, $\mathbb{P}.p.s$. Par un raisonnement similaire, il vient que $S_t > 0, \forall t \in [l, 2l]$, $\mathbb{P}.p.s$. et par suite $S_t > 0, \forall t \in [0, L]$, $\mathbb{P}.p.s$. par induction. \square

2.1.4 EDS à champ moyen

On considère l'EDS dite à *champ moyen*

$$\begin{cases} dX_t = [b_1(t)X_t + b_0(t)]dt + [\sigma_1(t)X_t + \sigma_0(t)]dW_t; & t \in [0, T] \\ X_0 = x, \end{cases} \quad (2.11)$$

pour des processus \mathcal{G}_0 -mésurables : $b_0, b_1, \sigma_0, \sigma_1$.

Maintenant, on pose

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t \left(-b_1(s) + \frac{1}{2} \sigma_1^2(s) \right) ds - \int_0^t \sigma_1(s) dW_s \right\}; t \in [0, T].$$

Alors, par la formule d'Itô (1.9) on a

$$\begin{cases} dZ_t &= Z_t ([-b_1(t) + \sigma_1^2(t)] dt - \sigma_1(t) dW_t); t \in [0, T], \\ Z_0 &= 1. \end{cases}$$

On pose

$$Y_t = X_t Z_t.$$

Donc par la formule d'Itô (1.9) on obtient :

$$\begin{aligned} dY_t &= d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d \langle X, Z \rangle_t \\ &= X_t Z_t ([-b_1(t) + \sigma_1^2(t)] dt - \sigma_1(t) dW_t) + Z_t ([b_1(t) X_t + b_0(t)] dt + [\sigma_1(t) X_t + \sigma_0(t)] dW_t) \\ &\quad - \sigma_1^2(t) Z_t X_t dt = Z_t [b_0(t) dt + \sigma_0(t) dW_t], \end{aligned}$$

et alors

$$X_t Z_t = Y_t = y_0 + \int_0^t Z_s b_0(s) ds + \int_0^t Z_s \sigma_0(s) dW_s,$$

et par suite l'unique solution X_t est donnée

$$X_t = Y_t Z_t^{-1} = Z_t^{-1} \left[x + \int_0^t Z_s b_0(s) ds + \int_0^t Z_s \sigma_0(s) dW_s \right], \quad (2.12)$$

d'où le résultat cherché. □

Maintenant, la question naturelle à poser : Quand telles solutions existent ? et si elles existent, est-ce qu'elles sont uniques ?

2.2 EDS non-linéaires

Le théorème suivant n'est qu'une généralisation de celui du cas déterministe vers le cas stochastique dans le cas lipschitz.

Théorème 2.4 (Existence et unicité [6]) Soient $T > 0$, $a : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables qui satisfont

$$\exists k \geq 0, |a(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq k(1 + |x|), x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (2.13)$$

et

$$\exists D \geq 0, |a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|, x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T]. \quad (2.14)$$

Soit z une VA indépendante de la tribu $\mathcal{G}_t^{(m)}$ engendrée par $W_s, 0 \leq s \leq t$, tel que

$$\mathbb{E} [|z|^2] < \infty.$$

Alors l'EDS (2.1) (ou (2.2)) admet une unique solution $Z(t, \omega)$ (dite solution forte) à trajectoires continues, adaptée à la filtration engendrée par z et $W_s, 0 \leq s \leq t$ (notée : \mathcal{G}_t^z)

et

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |Z_t|^2 dt \right] < \infty.$$

Preuve **Unicité** : Soient $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ et $Y(t, \omega) = Y_t(\omega)$ deux solutions de (2.1) telles que :

$$X(0, \omega) = x(\omega) \text{ et } Y(0, \omega) = y(\omega), \omega \in \Omega.$$

On pose

$$\alpha(s, \omega) = a(s, X_s) - a(s, Y_s) \text{ et}$$

$$\gamma(s, \omega) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s),$$

alors

$$\mathbb{E}[|X_t - Y_t|^2] = \mathbb{E} \left[\left(x - y + \int_0^t \alpha ds + \int_0^t \gamma dW_t \right)^2 \right],$$

par les inégalités de *Young*, de *Cauchy-Schwartz*, l'isométrie d'*Itô* et la condition (2.13) on trouve

$$\mathbb{E}[|X_t - Y_t|^2] \leq 3\mathbb{E}[|x - y|^2] + 3(1 + T)D^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - Y_s|^2] ds. \quad (2.15)$$

On considère la fonction

$$v(t) = \mathbb{E}[|X_t - Y_t|^2].$$

Par (2.15) on a

$$\begin{aligned} v(t) &\leq F + A \int_0^t v(s) ds, \\ F &= 3\mathbb{E}[|x - y|^2] \text{ et } A = 3(1 + T)D^2, \end{aligned}$$

donc par l'inégalité de *Gronwall*

$$v(t) \leq F \exp(At).$$

Maintenant, on suppose que $x = y$ alors $F = 0$, par suite $v(t) = 0$, pour tout $0 \leq t \leq T$. Il en résulte que

$$P[|X_t - Y_t| = 0, \forall t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]] = 1.$$

Et par la continuité de $t \mapsto |X - Y|$, on obtient que

$$P[|X(t, \omega) - Y(t, \omega)| = 0, \forall t \in [0, T]] = 1.$$

L'unicité est prouvée.

Afin de prouver **l'existence**, on pose

$$\begin{cases} Y_t^{(0)} &= z, \\ Y_t^{(m+1)} &= z + \int_0^t a(s, Y_s^{(m)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(m)}) dW_s, m \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (2.16)$$

Un calcul similaire au calcul ci-dessus montre que

$$\mathbb{E} \left[\left| Y_t^{(m+1)} - Y_t^{(m)} \right|^2 \right] \leq 3(1+T)D^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\left| Y_s^{(m)} - Y_s^{(m-1)} \right|^2 \right] ds,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, T]$, alors

$$\mathbb{E} \left[\left| Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)} \right|^2 \right] \leq A_1 t,$$

pour une constante A_1 dépendante de k , T et z . Par récurrence, on a donc

$$\mathbb{E} \left[\left| Y_t^{(m+1)} - Y_t^{(m)} \right|^2 \right] \leq \frac{A_2^{m+1} t^{m+1}}{(m+1)!}, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}^*, t \in [0, T] \text{ et une constante } A_2(D, k, T, z).$$

Il est alors facile de vérifier que la suite des $Y_t^{(m)}$ est une suite de *Cauchy*. Il existe donc un processus limite

$$Z_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)}$$

Alors Z_t est \mathcal{G}_t^z -mesurable pour tout t , puisque c'est valide pour chaque $Y_t^{(n)}$. Maintenant on prouve que Z_t satisfait (2.1) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, T]$ on a

$$Y_t^{(n+1)} = z + \int_0^t a(s, Y_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dW_s,$$

on fait tendre $n \rightarrow \infty$. Alors par l'inégalité de *Hölder* on obtient que

$$\int_0^t a(s, Y_s^{(n)}) ds \rightarrow \int_0^t a(s, Z_s) ds, \text{ dans } \mathbb{L}^2,$$

et par l'isométrie d'*Itô*

$$\int_0^t a(s, Y_s^{(n)}) dW_s \rightarrow \int_0^t a(s, Z_s) dW_s, \text{ dans } \mathbb{L}^2.$$

On conclut que pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$Z_t = z + \int_0^t a(s, Z_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Z_s) dW_s, \mathbb{P}.p.s. \quad (2.17)$$

Il reste à prouver que Z_t peut être choisi de telle sorte qu'il soit continu. On peut montrer qu'il existe une modification continue du membre droite de (2.17), qu'on note \widehat{Z}_t . Alors \widehat{Z}_t est continu et

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_t &= z + \int_0^t a(s, Z_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Z_s) dW_s \\ &= \widehat{z} + \int_0^t a(s, \widehat{Z}_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \widehat{Z}_s) dW_s, \mathbb{P}.p.s. \end{aligned}$$

L'existence est prouvée. □

Après avoir cité des exemples et méthodes de résolutions des fameuses EDS, on est maintenant prêt à exposer quelques applications dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Applications

3.1 Dynamique des populations

Ce paragraphe est inspiré d'un exercice du livre d'Øksendal ([6]). Un modèle déterministe qui est considéré le plus simple d'une dynamique d'une population, qu'on appelle *l'équation exponentielle*

$$\begin{cases} y'(t) = cy(t), c \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0 \geq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

c (constante) est le *coefficient de croissance relative*; la solution de (3.1) est

$$y(t) = y_0 \exp(ct), t \geq 0, \quad (3.2)$$

Si on étudie le comportement asymptotique de $y(t)$, $t \geq 0$, on trouve deux cas selon le signe de c :

1. Si $c > 0$: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ (la taille de la population dépasse le nombre maximal des individus).
2. Si $c < 0$: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ (extinction de la population).

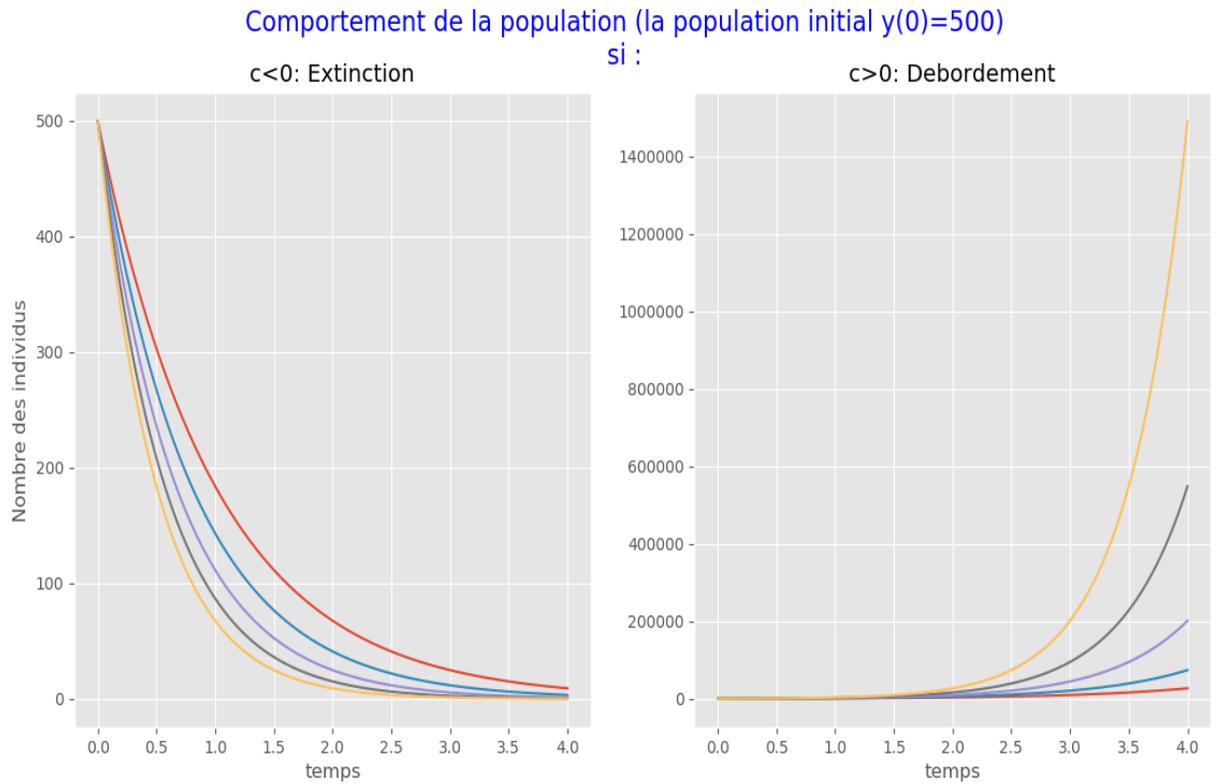


FIG. 3.1 – Comportement de la population

Les deux cas font le modèle (3.2) précédent irréaliste, alors on introduit le modèle *logistique*

$$\begin{cases} y_t' = rKy_t - y_t^2, & t \geq 0, \\ y(0) = y_0 \geq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec $r \in \mathbb{R}$, $K > 0$ et y sont des constantes données.

Néanmoins, dans plusieurs situations, r n'est pas constante mais assujetti aux fluctuations aléatoires. Pour modéliser ça mathématiquement on pose

$$r = r + \beta \dot{W}_t. \quad (3.4)$$

Avec $\dot{W}_t = \frac{dW_t}{dt}$ bruit blanc d'espérance $r \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, remplaçant (3.4) dans (3.3) on obtient

$$\begin{cases} dY_t = rY_t(K - Y_t)dt + \beta Y_t dW_t, \\ Y_0 = y. \end{cases} \quad (3.5)$$

Le processus Y l'unique solution de (3.5) est souvent considéré comme modèle de la dynamique d'une population de taille Y_t , $t \geq 0$ dans un environnement bondé stochastique, où $K > 0$: La capacité maximale de l'environnement pour cette population (Nombre maximal des individus).

$r \in \mathbb{R}$: Mesure de qualité de l'environnement.

$\beta \in \mathbb{R}$: Mesure de taille des fluctuations dans l'environnement.

$y > 0$: Le nombre initial des individus.

On remarque que l'équation (3.5) n'est pas linéaire (linéaire-quadratique), pour la rendre linéaire on considère le processus $M_t = Y_t^{-1}$ et appliquant la formule d'Itô (1.9), on trouve

$$dM_t = \frac{-dY_t}{Y_t^2} + \frac{(dY_t)^2}{Y_t^3} \Rightarrow \quad (3.6)$$

$$dM_t = [M_t(\beta^2 - rK) + r]dt - \beta M_t dW_t. \quad (3.7)$$

Mais (3.7) est équivalente à (2.11) avec :

$$a = \beta^2 - rK, \quad f(t) = r, \quad \bar{a} = -\beta, \quad h(t) = 0,$$

dont la solution est donnée par (2.12)

$$M_t = Z_t \left[M_0 + r \int_0^t Z_s^{-1} ds \right],$$

où $Z_t = \exp\left\{ \left(\frac{\beta^2}{2} - rK \right) t - \beta W_t \right\}$.

Donc

$$Y_t = M_t^{-1} = \frac{\exp\left\{ \left(rK - \frac{\beta^2}{2} \right) t + \beta W_t \right\}}{y^{-1} + r \int_0^t \exp\left\{ \left(rK - \frac{\beta^2}{2} \right) s + \beta W_s \right\} ds}$$

Remarque 3.1 L'importance de la forme explicite de la solution apparaît pour mettre en

valeur le comportement de la population lorsque $t \rightarrow \infty$, dans ce cas :

1. Si $rK > \frac{\beta^2}{2}$ alors $Y_t \rightarrow \infty$, quand $t \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}.p.s.$
2. Si $rK < \frac{\beta^2}{2}$ alors $Y_t \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}.p.s.$
3. Si $rK = \frac{\beta^2}{2}$ alors Y_t va osciller entre des valeurs arbitraires (larges et petites) quand $t \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}.p.s.$

3.2 Formule de Black-Scholes

On va travailler dans un marché dit de *Black-Scholes*, c'est à dire : un marché complet et sans arbitrage, consistant d'une obligation $B = B_t$ et un stock $S = S_t$ et une réclamation dont le prix $P = P_t$. On définit un portfolio autofinancé :

Définition 3.1 (Portfolio autofinancé) Une stratégie d'investissement V

$$V_t = aS_t + bB_t$$

est dite autofinancée si

$$\begin{aligned} dV_t &= adS_t + bdB_t, \text{ ou} \\ V_t &= V_0 + \int_0^t adS_s + \int_0^t bdB_s. \end{aligned}$$

- Définitions 3.1**
1. On dit qu'un marché est complet si toutes les réclamations sont couvrables.
 2. Un marché est dit sans arbitrage, si aucun investisseur peut obtenir un gain positif sans avoir pris aucun risque durant son investissement.

On suppose que B , S et P sont des processus adaptés dont les dynamiques :

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \\ B_0 = 1, \end{cases}$$

et S est un *mouvement Brownien géométrique*

$$\begin{cases} dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ S_0 &> 0, \end{cases}$$

où r , α et $\sigma \neq 0$ sont des constantes données. On définit la mesure de probabilité $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_T^{(m)}$

$$\begin{aligned} d\mathbb{Q} &= M_T d\mathbb{P}, \text{ avec} \\ M_t &= \exp\left\{-\sigma W_t - \frac{t\sigma^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Alors par le théorème de *Girsanov*

$$\widehat{W}_t := \int_0^t \frac{\alpha}{\sigma} ds + W_t \tag{3.8}$$

est une $\mathcal{G}_T^{(m)}$ -martingale (et par suite $\mathcal{G}_T^{(m)}$ -mouvement Brownien) par rapport à la mesure \mathbb{Q} et on définit

$$\widehat{S}_t = \widehat{S}_0 + \int_0^t \alpha S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s,$$

on trouve

$$\begin{aligned} d\widehat{S}_t &= \sigma S_t d\widehat{W}_t, \text{ ou encore} \\ \widehat{S}_t &= \widehat{S}_0 + \int_0^t \sigma S_s d\widehat{W}_s, \end{aligned}$$

il en résulte que \widehat{S}_t est une $\mathcal{G}_T^{(m)}$ -martingale par rapport à la mesure \mathbb{Q} , et par le théorème de *représentation des martingales* il admet l'unique représentation

$$\widehat{S}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\widehat{S}_t \right] + \int_0^t \phi(s) d\widehat{W}_s \tag{3.9}$$

où $\phi(t, \omega)$ est un processus mesurable, $\mathcal{G}_T^{(m)}$ -adapté et

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \phi^2(t, \omega) dt \right] < \infty.$$

Donc, par un théorème fameux de la théorie de *trading* (théorème.12.2.5 de [6]) le marché de *Black-Scholes* est bien *complet et sans arbitrage*.

Soit $C(t, S_t) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$, et on suppose que le prix d'une réclamation peut être exprimé :

$$P_t = C(t, S_t). \quad (3.10)$$

On applique la formule d'Itô (1.9) à (3.10) on trouve :

$$dP_t = \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \alpha S_t \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{(\sigma \alpha S_t)^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right] dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x} dW_t. \quad (3.11)$$

On a supposé que le marché est complet, donc toutes les réclamations sont couvrables, en particulier, il existe une stratégie autofinancée (a, b) qui nous permettra d'investir seulement aux a actifs du stock S et b obligations B et couvrir le prix P tel que : $H_t = f(S_t)$. Pour telle stratégie (a, b) on a :

$$H_t = aS_t + bB_t, \quad (3.12)$$

l'hypothèse du non-arbitrage implique que

$$P_t = H_t, \quad (3.13)$$

si ce n'était pas le cas, des opportunités d'arbitrage seraient possibles, on passe vers les dynamiques des deux cotés de (3.13), on trouve :

$$\begin{aligned} dP_t &= dH_t \\ &= adS_t + bdB_t \\ &= (\alpha aS_t + rbR_t) dt + \sigma aS_t dW_t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

en comparant (3.11) avec (3.14), on trouve :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial x}, \\ b &= B_t^{-1} [C(t, S_t) - aS_t], \end{aligned}$$

on remplace a et b par leurs expressions dans (3.14), on compare les coefficients de dt et dW_t dans (3.11) et (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} dP_t &= \frac{C(t,S_t)}{\partial t} + \alpha S_t \frac{C(t,S_t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial x^2} \\ &= \alpha S_t \frac{C(t,S_t)}{\partial x} + r \left[C(t, S_t) - S_t \frac{\partial C(t,S_t)}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} + r S_t \frac{C(t,S_t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial x^2} \\ &= rC(t, S_t). \end{aligned}$$

Donc la fonction $C(t, S_t)$ résout l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\frac{\partial C(t,x)}{\partial t} + rx \frac{\partial C(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C(t,x)}{\partial x^2} = rC(t, x). \quad (3.15)$$

(3.15) est appelée *EDP de Black-Scholes*, dont la solution nous donne le prix théorique de la réclamation contingente $X = f(S_T)$, qu'on déclare dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Benth [3]) Soit le processus $Z_s^{t,x}$ défini par

$$Z_s^{t,x} = x + \int_t^s r Z_u^{t,x} du + \int_t^s \sigma Z_u^{t,x} dW_u, \quad x > 0. \quad (3.16)$$

Alors

$$C(t, x) = e^{[-r(T-t)]} \mathbb{E} [f(Z_T^{t,x})] \quad (3.17)$$

résout l'EDP de Black-Scholes (3.15). De plus, $C(t, S_t)$ est le prix P_t d'une réclamation contingente $X = f(S_T)$ avec une stratégie du couverment autofinancée (a, b) .

Preuve Par (2.3), le processus (3.16) n'est qu'un *mouvement Brownien géométrique* issu de x , donc

$$Z_T^{t,x} = x \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right\},$$

en remarquant qu'il est strictement positif, alors

$$\ln Z_T^{t,x} = \ln x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t),$$

qui (pour un t fixé) suit une loi gaussienne d'espérance $\ln x + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$ et variance $\sigma^2(T - t)$, dont la densité de probabilité :

$$q(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{[s - \ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)} \right\},$$

et on peut récrire

$$C(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) q(t, s) ds,$$

on remarque que seulement la densité q dépend de x , alors on calcule les dérivées partielles de C à partir de celles de q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t}(t, s) &= q(t, s) \left\{ \frac{1}{2(T-t)} - \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})[s - \ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]}{\sigma^2(T-t)} - \frac{[s - \ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)^2} \right\}, \\ \frac{\partial q}{\partial x}(t, s) &= q(t, s) \frac{[s - \ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]}{2x\sigma^2(T-t)}, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, s) &= q(t, s) \left\{ \frac{[s - \ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{x^2\sigma^4(T-t)^2} - \frac{[s - \ln x - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]}{x^2\sigma^2(T-t)} \right\}, \end{aligned}$$

on trouve que

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, s) + rx \frac{\partial q}{\partial x}(t, s) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, s) = 0, \quad (3.18)$$

en utilisant (3.18) on calcule $\frac{\partial C}{\partial t}(t, x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) &= rC(t, x) + e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) q(t, s) ds \\ &= rC(t, x) + e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) \frac{\partial}{\partial t} q(t, s) ds \\ &= rC(t, x) - e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) \left[rx \frac{\partial q}{\partial x}(t, s) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, s) \right] ds \\ &= rC(t, x) - e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) rx \frac{\partial q}{\partial x}(t, s) ds - e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, s) ds \\ &= rC(t, x) - rx \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) q(t, s) ds \right] - \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^s) q(t, s) ds \right] \\ &= rC(t, x) - rx \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) - \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x), \end{aligned}$$

de plus on a la condition finale

$$C(T, x) = f(x),$$

c'est qu'on a voulu montrer. □

Remarque 3.2 *On a utilisé un théorème (théorème 1.11.1 dans [5]) pour permuter l'espérance et l'intégrale, et on a supposé que ses conditions sont vérifiées.*

Utilisant la formule de *Black-Scholes*, on peut obtenir les prix théoriques pour *options Call/Put Européennes* :

Théorème 3.2 *Le prix P_t d'une option Call Européenne avec prix d'exercice K et temps de maturité T est :*

$$P_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (3.19)$$

où

$$\begin{cases} d_1 &= d_2 + \sigma \sqrt{T-t}, \\ d_2 &= \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \end{cases} \quad (3.20)$$

et Φ la fonction de répartition de la loi normale standard.

Le graphe suivant illustre 10 prix théoriques d'un stock, dont le prix initial est $S_0 = 100$ unité de prix, dans un marché dont la volatilité est : 0.2, (voir annexe A : programme 3) :

Preuve Tout d'abord, on sait que pour une option Call Européennes, la fonction f prend la forme

$$X = f(S_T) = \max\{0, S_T - K\}$$

à la date de maturité T , avec un prix d'exercice K , alors

$$\begin{aligned} C(t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [f(Z_T^{t,x})] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [\max\{0, Z_T^{t,x} - K\}] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[\max\left\{0, e^{\ln x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} Y} - K\right\} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

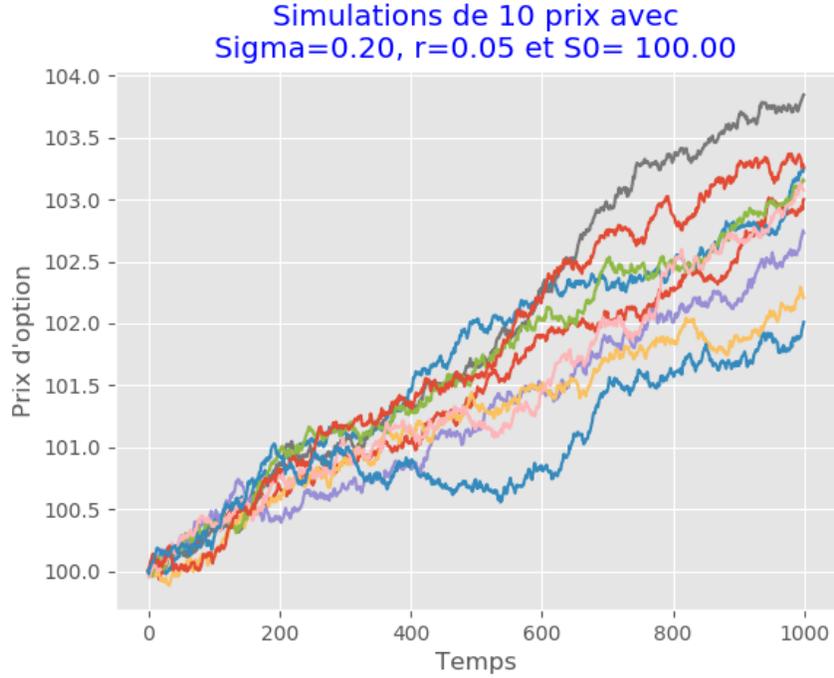


FIG. 3.2 – Simulation des prix de Stoks

Y est une VA normale standard, de la dernière égalité de (3.21), on a

$$C(t, x) = 0 \text{ si}$$

$$Y < \frac{\ln \frac{K}{x} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ ou d'une façon équivalente}$$

$$Y < -d_2, \text{ avec } d_2 = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Sinon, on a

$$\begin{aligned} C(t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[e^{\ln x + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} - K \right] \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} \left[e^{\ln x + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma s\sqrt{T-t}} - K \right] e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma s\sqrt{T-t} - \frac{s^2}{2}} ds - \frac{e^{-r(T-t)}K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \end{aligned}$$

par un changement de variable $z = s - \sigma\sqrt{T-t}$, et en utilisant la symétrie de la loi normale, on trouve

$$C(t, x) = x\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2),$$

où Φ est la fonction de répartition gaussienne, et d_1, d_2 sont définis par (3.20) en remplaçant x par S_t , on trouve finalement (3.19). \square

Conclusion

Dans ce travail, on a construit l'intégrale stochastique d'Itô à l'aide de l'isométrie d'Itô, puis vu quelques propriétés importantes (la formule d'Itô, le théorème de changement de probabilité de Girsanov et le théorème de représentation des martingales) qu'on a utilisées pour exposer quelques fameux exemples des équations différentielles stochastiques et démontré l'existence et l'unicité de leurs solutions dans le cas lipschitz à l'aide de la formule d'Itô, qu'on a également utilisée pour donner un modèle de la dynamique des populations dans un environnement bondé stochastique. Finalement, on a utilisé la formule d'Itô, le théorème de Girsanov et le théorème de représentation des martingales pour évaluer les prix des options Européennes dans un marché de *Black-Scholes*.

Ce mémoire presque touche le domaine large de la théorie des processus stochastiques et leurs applications, mais il montre qu'on peut appliquer des mathématiques du haut niveau pour modéliser beaucoup des phénomènes réels.

Bibliographie

- [1] AGRAM, N AND ØKSENDAL ,B.A Hida-Malliavin white noise calculus approach to optimal control, 8 November 2018,<https://arxiv.org/abs/1704.08899v4>.
- [2] ARRIOJAS, M ET AL.*A Delayed Black and Scholes Formula, February 2, 2008*, <https://arxiv.org/abs/math/0604640>.
- [3] BENTH, F.E.Option Theory with Stochastic Analysis, An Introduction to Mathematical Finance-Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004).
- [4] GARD ,T.C.Introduction to Stochastic Differential Equations-Marcel Dekker Inc (1988).
- [5] JEANBLANC ,M. Cours de Calcul stochastique Mastère2 IF EVRY, septembre (2006).
- [6] ØKSENDAL ,B.Stochastic Differential Equations An Introduction With Applications, 6th Edition, Springer (2013).
- [7] J. YONG AND X.Y. ZHOU, *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer Verlag (1999).

Annexe A : Logiciel python

Simulation de trajectoires du mouvement Brownien géométrique

```
import numpy as np
from pylab import plot, show, grid, xlabel, ylabel
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import style
style.use('ggplot')
num_sims=5 #nombre des trajectoires
t_init=0
t_end=250
N=1000 #evaluer les trajectoires aux N pts
dt=float((t_end-t_init)/N)# un pas uniforme
y_init=0.1
c_theta=0.1
c_mu=1.5
c_sigma=0.06
def mu(y,t) :
    return c_theta*(c_mu-y)
def sigma(y,t) :
    return c_sigma
def dW(delta_t) :
    return np.random.normal(loc=0,scale=np.sqrt(delta_t))
```

```
ts=np.arange(t_init,t_end,dt)
ys=np.zeros(N)
ys[0]=y_init
for _ in range(num_sims) :
for i in range(1,ts.size) :
    t=(i-1)*dt
    y=ys[i-1]
    ys[i]=y+mu(y,t)*dt+sigma(y,t)*dW(dt)
plt.plot(ts,ys)
xlabel('temps', fontsize=12)
ylabel('Z(t,ω)', fontsize=12)
plt.title('Simulation de %d trajectoires du Mouvement Brownien Géométrique\navec Z(0,ω)=%.2f
, a(t) =%.2f et L(t)=%.2f'%(num_sims,y_init,c_mu,c_sigma), color='blue')
plt.show()
```

Program python qui permet de calculer la variance standard annuelle dans un marché pour un indice boursier

```
import datetime as dt
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import style
from mpl_finance import candlestick_ohlc
import pandas as pd
import pandas_datareader.data as web
import numpy as np
pr=[]
ret=[]
log_ret=[]
meD=[]
```

```
n=0
print("SVP, entrer la date de départ : le jours, le mois l'année ") #saisit de la date du depart
d0=int(input('le jour : '))
m0=int(input('le mois : '))
y0=int(input('l'année : '))
print("SVP, entrer la date du close : le jours, le mois l'année")#saisit de la date du close
d1=int(input('le jour : '))
m1=int(input('le mois : '))
y1=int(input('l'année : '))
start=dt.datetime(y0,m0,d0)
end=dt.datetime(y1,m1,d1)
print("SVP, entrer votre indice boursier : e.g :tsla, txt, googl...") #saisit de l'indice boursier
ticker=input('votre indice boursier= ')
df=web.DataReader(ticker,'yahoo',start,end)
name=input('SVP, donner un nom pour votre fichier csv : ')
df.to_csv('name.csv')
df=pd.read_csv('name.csv',parse_dates=True,index_col=0)
pr=df['Close']
n=len(pr)
for i in range(n-1) :
    ret.append(-1+pr[i+1]/pr[i])
    log_ret.append(np.log(pr[i+1]/pr[i]))
    meD.append((ret[i]-np.mean(ret))**2)
var=np.sum(meD)/float(len(meD)-1)
an_var=var*n
an_STD=an_var**0.5
print("La variance standard annuelle de ",ticker, " is : ")
print(an_STD)
```

```
print("Les prix de clos sont : ")
print(pr)
print("les log_revenus sont :")
print(log_ret)
print("Les revenus sont : ")
print(ret)
```

Simulation des prix du stock, pour une option call Européenne dans un marché financier

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import style
style.use('ggplot')
S0 = 100 #prix initial du stock
K = 100 #prix d'exercice
r = 0.05 #taux d'interet
sigma = 0.50 #la volatilité du marché
T = 1 #temps d'exercice (en année)
N = 100 #nombre d'évaluation pour chaque simulation
dt = T/N #le pas du temps
i = 1000 #nombre des trajectoires
discount_factor = np.exp(-r*T) #facteur de normalisation du marché
S = np.zeros([i,N])
t = range(0,N,1)
for y in range(0,i-1) :
    S[y,0]=S0
    for x in range(0,N-1) :
        S[y,x+1] = S[y,x]*(np.exp((r-(sigma**2)/2)*dt + sigma*dt*np.random.normal(0,1)))
```

```
plt.plot(t,S[y])
plt.title('Simulations de%d prix %d Sigma %.2f r %.2f S0 %.2f' % (i, N, sigma, r, S0))
plt.xlabel('temps')
plt.ylabel('Prix des stock')
plt.show()
C = np.zeros((i-1,1), dtype=np.float16)
for y in range(0,i-1) :
    C[y]=np.maximum(S[y,N-1]-K,0)
CallPayoffAverage = np.average(C)
CallPayoff = discount_factor*CallPayoffAverage
print(CallPayoff)
```

Calcul des prix des options théoriques, pour une option Call/Put Européenne dans un marché financier par la formule de Black-Scholes

```
from math import sqrt, exp, log, erf
from decimal import *
getcontext().
prec = 5
lePrixCourant = float(input("le dernier prix : ")) # S
prixdExercice = float(input("le prix d'exercice ? : ")) # K
temps = float(input("Jours jusqu'à maturité ? : ")) # temps jusqu'à maturité en jours
tauxDinteret = float(input("Le taux d'interet ? : ")) # taux d'interet annuaire
sigma = float(input("la volatilité : ")) # la volatilité des revenus des stocks
divrate = float(input("taux de dividende ? : ")) # rapport de dividende sur stock
sigTsquared = sqrt(Decimal(time)/250)*sigma
edivT = exp((-divrate*time)/250)
ert = exp((-rate*time)/250)
d1 = (log(undprice*edivT/strike)+(rate+.5*(sigma**2))*time/250)/sigTsquared
```

```
d2 = d1-sigTsquared
Nd1 = (1+erf(d1/sqrt(2)))/2
Nd2 = (1+erf(d2/sqrt(2)))/2
iNd1 = (1+erf(-d1/sqrt(2)))/2
iNd2 = (1+erf(-d2/sqrt(2)))/2
callPrice = round(undprice*edivT*Nd1-strike*ert*Nd2, 2)
putPrice = round(strike*ert*iNd2-undprice*edivT*iNd1, 2)
print("Call Price = " + str(callPrice) )
print("Put Price = " + str(putPrice) )
```

Simulation de trajectoires du mouvement Brownien

```
from math import sqrt
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.stats import norm
import numpy as np
from matplotlib import style
style.use('ggplot')
def brownian(x0, n, dt, delta, out=None) :
    x0 = np.asarray(x0)
    r = norm.rvs(size=x0.shape + (n,), scale=delta*sqrt(dt))
    if out is None :
        out = np.empty(r.shape)
    np.cumsum(r, axis=-1, out=out)
    out += np.expand_dims(x0, axis=-1)
    return out
import numpy
from pylab import plot, show, grid, xlabel, ylabel
delta = 2.5
```

```
T = 10.0
N = 1000
dt = T/N
m = 10
x = numpy.empty((m,N+1))
x[:, 0] = 10
brownian(x[:,0], N, dt, delta, out=x[:,1:])
t = numpy.linspace(0.0, N*dt, N+1)
for k in range(m) :
    plot(t, x[k])
    xlabel('t', fontsize=16)
    ylabel('W(t,ω)', fontsize=16)
plt.title('Simulation de %d trajectoires du mouvement Brownien'%(m))
grid(True)
show()
```

Annexe B : Définitions et lemmes

Des définitions et lemmes

Définition 3.2 (Tribu [6]) Soit Ω un ensemble donné. Une tribu \mathbb{G} sur Ω est une famille des sous ensembles de Ω possédant les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathbb{G}$.
2. $\forall A \in \mathbb{G} \Rightarrow A^c \in \mathbb{G}$, où $A^c = \Omega \setminus A$ est le complémentaire de A dans Ω .
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{G} \Rightarrow A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{G}$.

Le couple (Ω, \mathbb{G}) est dit espace mesurable.

Définition 3.3 (mesure de probabilité [6]) Une mesure de probabilité sur l'espace mesurable (Ω, \mathbb{G})

$$\mathbb{P} : (\Omega, \mathbb{G}) \longmapsto [0, 1]$$

est une application satisfaisante

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{G}$ et $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ sont deux à deux disjoints (c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$), alors $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Le triplet $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ s'appelle espace de probabilité.

Définition 3.4 Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$, si $B \in \mathbb{G}$ et $\mathbb{P}(B) = 0$. Si $N \subset B$, on dit que N est \mathbb{P} -négligeable.

Définition 3.5 On dit qu'un évènement $F \in \mathbb{G}$ est vérifié \mathbb{P} -presque sûr (noté $\mathbb{P}.p.s$) si il existe un \mathbb{P} -négligeable M , tel que

$$\forall \omega \notin M : P(F) = 1$$

Définition 3.6 (Filtration [5]) Une filtration est une famille $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ croissante de sous tribus de \mathbb{G} , c'est à dire $\forall s < t : \mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t$.

Définition 3.7 (Variable normale [6]) Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale (ou gaussienne) d'espérance m et de variance σ^2 , (on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), si elle admet une densité de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

si on pose $Z = \frac{X-m}{\sigma}$, Z s'appelle une variable aléatoire normale centrée réduite, ($Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$) dont la densité et la fonction de répartition

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x f(s) ds \end{aligned}$$

Définition 3.8 (Processus stochastique [5]) Une famille de variable aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$, est appelé processus stochastique

Définition 3.9 (Martingale [5]) Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, si

1. X_t est \mathcal{G}_t -mesurable et intégrable pour tout t , c'est à dire

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : X_t^{-1}(u) \in \mathcal{G}_t, \forall t,$$

$$\mathbb{E}|X_t| < \infty, \forall t.$$

$$2. \mathbb{E}(X_t | \mathcal{G}_s) = X_s, \forall s \leq t.$$

Définition 3.10 (Mouvement Brownien [5]) On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$, et un processus $W = (W_t)_{t \geq 0}$ sur cet espace.

Le processus W est un mouvement Brownien standard si :

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
2. $\forall s \leq t, W_t - W_s$ est une variable normale, centrée de variance $(t - s)$.
3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ sont indépendantes.

Le graphe suivant montre une simulation des 5 trajectoires d'un mouvement Brownien (Voir annexe A : programme 5) :

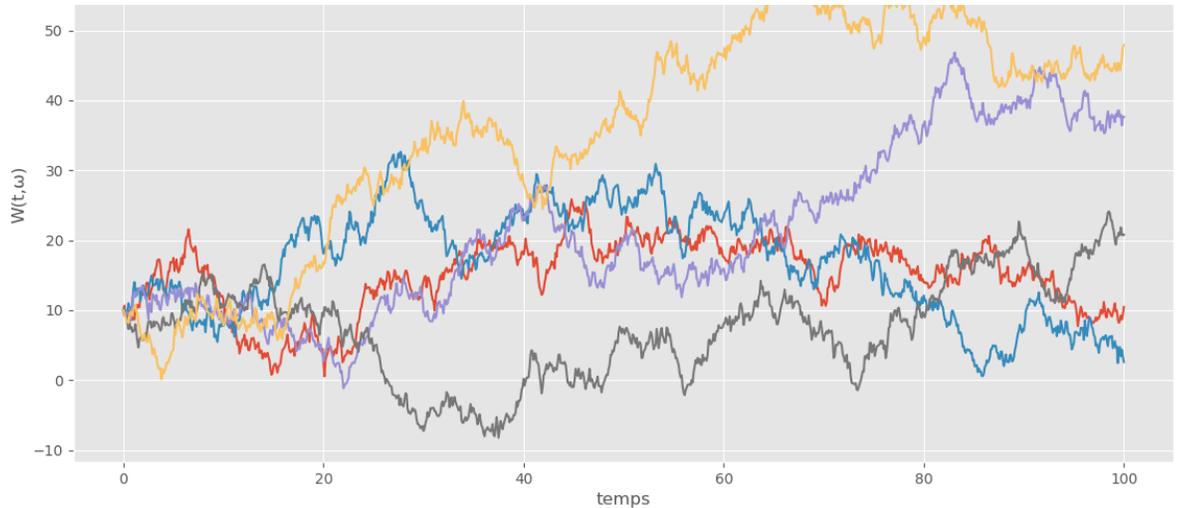


FIG. 3.3 – Simulations de 5 trajectoires du mouvement Brownien

Lemme 3.1 (de Gronwall) Soit v une fonction positive, tel que

$$\exists C \geq 0, \exists A \geq 0 : v(t) \leq C + A \int_0^t v(s) ds, \forall 0 \leq t \leq T, \text{ alors}$$

$$v(t) \leq C \exp(At), \forall 0 \leq t \leq T.$$

ملخص

ملخص

في هذا العمل نهتم بدراسة المكاملة العشوائية بالنسبة الحركة البراونية وتطبيقاتها في الاقتصاد. تطرقنا خلال ذلك إلى:

1. تذكير حول المكاملة العشوائية وبعض الخصائص المهمة للتكامل العشوائي.
2. بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية وحلولها.
3. تطبيقات: تطور السكان ونموذج بلاك-شولز.

Résumé

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'intégration stochastique par rapport au mouvement Brownien et ses applications à la finance, en voyant :

1. Construction et propriétés de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien.
2. Exemples des équations différentielles stochastiques linéaires et leurs solutions.
3. Applications : dynamique des populations et modèle de Black-Scholes.

Abstract

Abstract

In this work we are interested in stochastic integration with respect to Brownian motion and its application to finance, we discuss:

1. Stochastic integral construction and some properties.
2. Linear stochastic differential equations and their solutions.
3. Applications: population Dynamics and Black-Scholes model.