



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider – BISKRA
Faculté des Sciences Exactes, des Sciences de la Nature et de la Vie
Département d'informatique

N° d'ordre : Iva15

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de master académique en

Informatique

Parcours : **image et vie artificielle**

Etude maillage et étude de graphe

Par :

CHMINI ABIR

Soutenu le 24/06/2018, devant le jury composé de :

Hattab dalila

M.A. Classe A

Encadreur

Djedi nour edddine

Professeur

Président

ZERRARI ABD ELMOUMEN

M.A. Classe A

Examineur

Remerciements

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements A mon encadreur Mme.Hattab dalila, pour son encadrement, sa grande disponibilité, sa confiance et pour le soutien qu'il a su m'accorder durant toute cette année. Ses compétences scientifiques ont toujours été sources d'enrichissement me permettant de mener à bien ce travail. Merci pour tous vos conseils et votre patience.

Je tiens à remercier tous les enseignants, qui tout au long de mon cycle d'études, m'ont transmis leur savoir.

Je voudrais aussi présenter mes remerciements à ma famille, à mes amis et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce modeste travail.

1 Introduction :

Avec le développement de systèmes de numérisation et d'imagerie rapides et précis, il est maintenant possible de collecter de larges volumes de données (nuages de points) sur de nombreux objets physiques et des organes humains quasiment en temps réel. En général, ces maillages (de surfaces) possèdent le même degré de complexité que les données d'origine. Toutefois, de telles triangulations ne peuvent être ni stockées en mémoire ni affichées par les cartes graphiques, même les plus performantes.

Ce processus inclut notamment les techniques de simplification ou de décimation des maillages de surfaces. Ces méthodes numériques visent à réduire, autant que possible, le nombre de polygones du modèle, tout en préservant le degré de précision géométrique de celui-ci.

Dans ce chapitre nous présentons les deux approches de la maillage triangulaire et rectangulaire des requêtes spécifiques peuvent être imposés sur les maillages résultants, concernant par exemple la qualité en forme et en taille des éléments, par exemple, dans le contexte des simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis.

La simplification de maillages, c'est-à-dire de représentations polyédriques de surfaces tridimensionnelles, est une opération consistant à chercher un maillage proche d'un maillage que l'on estime trop complexe, et donc coûteux en ressources mémoires et en temps de calcul ou de transmission.

2 Maillage

Dans cette section, nous présentons plusieurs définitions de concept de maillage

Définition 1 : Un maillage est représenté par un ensemble de points et un ensemble de polygones (généralement orientés) dont les sommets sont des points de l'ensemble précédent. Pour disposer d'informations utiles sur le voisinage de points et l'adjacence de faces, on introduit de manière redondante une structure supplémentaire, l'arête, qui "connait" ses extrémités, les polygones voisins, et deux autres arêtes donnant sur ses extrémités. Ci-contre en haut, les flèches vertes représentent les pointeurs contenus dans l'arête centrale.

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

Les informations des arêtes permettent d'agir sur leur voisinage sans avoir à tester tous les points ou polygones.

Définition 2 : Un maillage d'un objet ou d'un domaine est une représentation numérique qui consiste en un assemblage d'éléments tels que des triangles en 2D ou des tétraèdres en 3D.

Définition 3 : Soit un domaine fermé borné de \mathbb{R}^3 décrit par sa frontière.

- Un maillage régulière est un maillage dont tous les éléments sont réguliers (équilatéraux lorsqu'il s'agit de triangles). Comme l'existence d'un tel maillage n'est pas démontrée, on considère comme régulier le "meilleur" maillage qu'il est possible de construire. En pratique, deux types de maillages de surfaces peuvent se concevoir :
- les maillages uniformes, dans lesquels la taille des éléments est constante dans tout le domaine.
- les maillages géométriques, dans lesquels la taille des éléments est adaptée localement aux courbures de la surface.

3 Propriétés :

Nous définissons un ensemble de propriétés que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Pour illustrer ces propriétés, nous prenons l'exemple d'un modèle 2D de maison (Figure 1.a) défini par des lignes continues.

-En positionnant des points le long de ces lignes et en les reliant, nous obtenons un maillage des bords de la maison (Figure 1.b). Un maillage peut donc se définir comme un ensemble de points (appelés sommets) reliés entre eux pour former des éléments pouvant être des arêtes, des polygones (appelés facettes) ou (appelés cellules). De manière plus générale, un assemblage d'éléments est considéré comme un maillage.

- l'union des éléments est une approximation de l'objet ou du domaine ;
- l'intérieur de chaque élément n'est pas vide ;
- l'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.

Dans le cas du maillage des bords de la maison (Figure 1.b), le maillage possède deux composantes connexes, c'est-à-dire qu'il a deux parties déconnectées et qu'il n'est pas

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

possible de relier un point de la première composante avec un point de la deuxième par un ensemble d'éléments du maillage.

- Ici par exemple, il n'est pas possible de relier un sommet de la fenêtre avec un sommet du toit. Nous pouvons aussi noter une approximation de la géométrie au niveau du haut de la porte car les arêtes sont trop longues pour représenter cette forme.

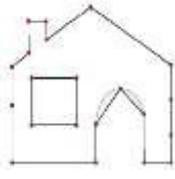
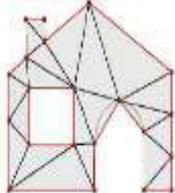
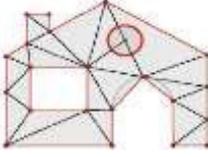
			
a)Modèle continu d'une maison	b) Maillage de bords de la maison	c) Maillage de la maison contraint par le sommet et les arêtes débords	d) Maillage possédant une non-conformité

Figure 1 : maillages d'un modèle de maison.

La position des sommets sur les lignes est importante afin d'avoir une bonne approximation des limites du modèle. Il est possible de forcer ou d'imposer certains éléments à apparaître dans le maillage, nous parlons alors de maillage contraint. Par exemple, le maillage de la Figure 1.c'est le résultat de la génération d'un maillage contraint par les sommets et les arêtes des bords de la maison (Figure 1.b).

Nous retrouvons donc dans ce maillage tous les sommets du maillage des bords ainsi que toutes les arêtes. Il est possible d'interdire l'ajout de nouveaux sommets et d'obtenir ainsi uniquement les sommets contraints dans le maillage (Figure 1.c).Un maillage est dit conforme si l'intersection de deux éléments est soit vide, soit constituée d'un élément commun aux bords de ces deux éléments (Figure 1.b et c).

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

Un exemple de non-respect de cette règle est montré sur la Figure 1.d où l'extrémité d'une arête se termine dans une arête voisine et non à une de ses extrémités.

Finalement, deux maillages sont conformes entre eux si le maillage résultant de l'union de leurs éléments est conforme.

- Il y a deux catégories principales de maillages définies en fonction de leur connectivité, c'est-à-dire par le type des connexions entre les sommets :

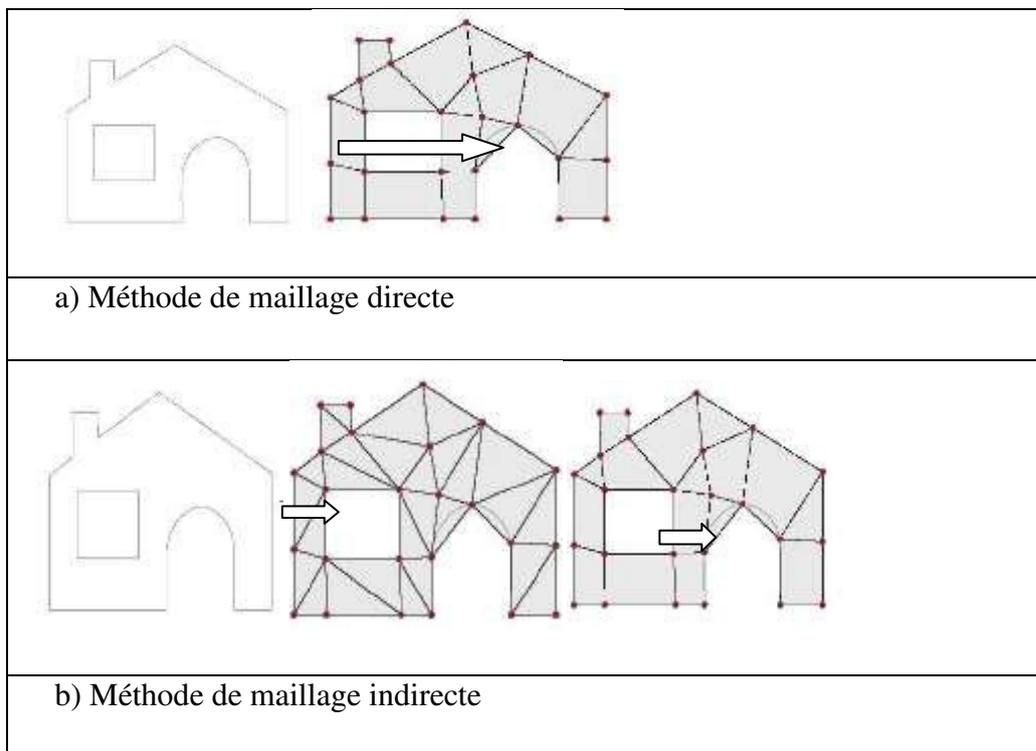


Figure 2 : Méthode de maillage directe et indirecte du modèle de la maison.

- Une méthode directe de maillage génère le maillage final directement à partir du modèle à mailler.
- à l'inverse, une méthode indirecte génère un maillage intermédiaire qui va être modifié pour construire le maillage final.
- les maillages structurés qui ont une connectivité régulière, c'est-à-dire que leurs sommets ont tous le même nombre de voisins ;
- les maillages non structurés qui ont une connectivité quelconque.

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

- à cause de cette régularité de connectivité, les maillages structurés sont géométriquement

Peu flexibles et le plus souvent constitués d'hexaèdres. Ces maillages sont fréquemment appelés des grilles. En revanche, les maillages non structurés peuvent être composés de polyèdres quelconques, ce qui augmente la flexibilité géométrique du maillage et ainsi leur capacité à représenter des géométries complexes.

Dans les deux sections suivantes de ce chapitre, nous passerons en revue différentes méthodes de génération de maillages. De manière très générale, nous pouvons regrouper les méthodes de maillage en deux grandes catégories.

- les méthodes directes qui vont créer un maillage à partir des limites de domaine à mailler (Figure 2a) ;
- les méthodes indirectes qui vont modifier et transformer un maillage préexistant (Figure 2).

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux deux types de méthodes. Nous générons un maillage tétraédrique à l'aide de méthodes directes et un maillage multiéléments en utilisant une méthode indirecte.

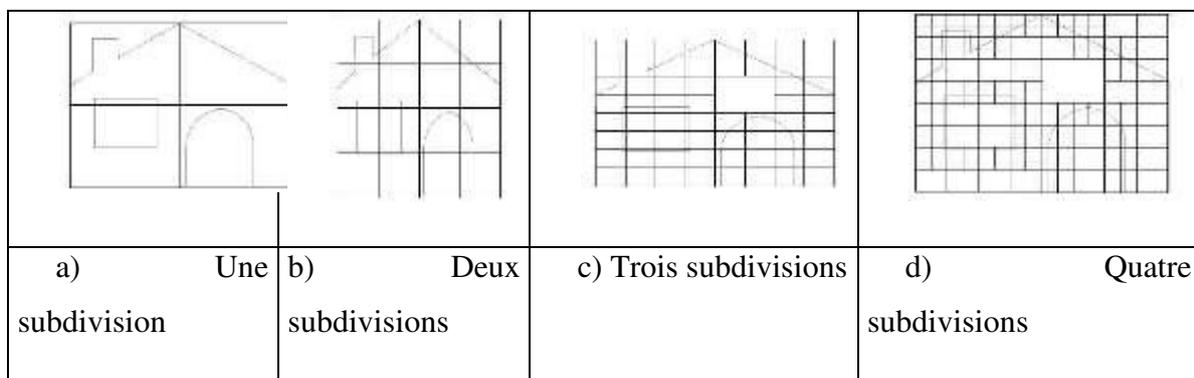


Figure 3 : Subdivisions de la boîte englobante de la maison.

- La boîte englobante initiale est subdivisée récursivement quatre fois. Chaque cellule est subdivisée uniquement si une limite du modèle se trouve à l'intérieur. [1]

4 Maillages à base de triangles ou de tétraèdres

Il existe de nombreuses méthodes de générations de maillages à base de triangles ou de tétraèdres mais elles peuvent se regrouper en deux approches :

- Les méthodes de décomposition spatiale (en utilisant des quadtree-octree).
- les méthodes de type avancée de fronts et les méthodes de type Delaunay.

Ces méthodes de générations de maillages Simplicius garantissent l'existence d'un maillage quelle que soit la géométrie du modèle.

4.1 Méthodes de type quadtree-octree

Les méthodes de décomposition spatiale ont été introduites par Yerry et al. Elles utilisent une structure d'arbre qui va découper le modèle à mailler.

L'arbre est une représentation hiérarchique des différentes subdivisions de l'espace. Ce découpage est ensuite utilisé pour générer les éléments du maillage final.

L'arbre utilisé est un quadtree pour les méthodes de maillage surfacique et un octree pour les maillages volumiques. Partant de la boîte englobante du modèle, elle est subdivisée en quatre pour un quadtree et en huit pour un octree. Chaque subdivision, appelée cellule ou case, est ensuite récursivement subdivisée tant que les limites du modèle intersectés la cellule, jusqu'à un critère d'arrêt (Figure 3). Ce critère d'arrêt peut être conditionné par la taille d'éléments locale souhaitée, par la courbure du modèle présent dans la cellule, ou un nombre de subdivisions. Un autre critère, permettant de conserver la topologie du modèle, est de minimiser le nombre de composantes connexes Del 'intersection entre le modèle et une cellule. Afin de ne pas avoir de trop grandes variations de taille d'éléments dans le maillage, la différence de niveaux de subdivision entre deux cellules adjacentes est limitée.

Une fois la décomposition terminée, les sommets du maillage sont les coins des cellules de subdivisions et éventuellement les intersections entre les limites du modèle et les cellules.

Les éléments du maillage sont alors construits en découpant les cellules suivant des patrons prédéfinis ou des techniques de découpe plus générales.

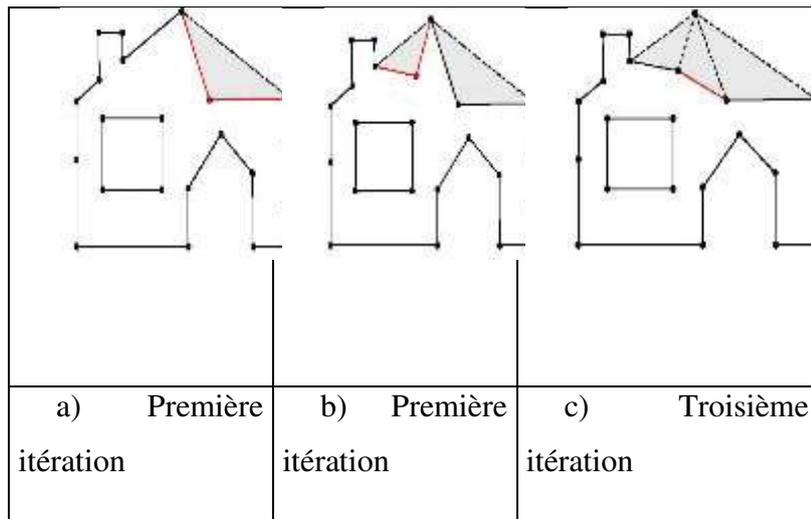


Figure 4 : Maillage par avancée de fronts à partir des bords de la maison.

Un front composé d'arêtes (en traits pleins) se propage à l'intérieur de la maison. Chaque itération ajoute des sommets et des arêtes (en rouge).

Les variations de taille des éléments du maillage sont contrôlées par les subdivisions.

En revanche, même si le positionnement des sommets est robuste, il introduit une certaine régularité au maillage car ils sont positionnés sur les coins des cellules de subdivisions. Des étapes d'optimisation de la position des sommets sont très souvent nécessaires.

4.2 Méthodes de type Delaunay

Les méthodes de type Delaunay sont des méthodes de générations de maillage utilisant la triangulation de Delaunay. Une triangulation est un objet défini à partir d'un ensemble de points et qui respecte les conditions suivantes :

- les éléments d'une triangulation sont des simplexes, c'est-à-dire des triangles en 2D ou des tétraèdres en 3D ;
- l'union des éléments est une approximation de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points ;
- l'intérieur de chaque élément n'est pas vide ;
- l'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.
- Par comparaison à un maillage, la triangulation est définie uniquement à partir d'un ensemble de points, elle ne doit pas nécessairement être une approximation d'un objet.

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

Une triangulation est dite de Delaunay (Figure 5.b) si aucun sommet de cette triangulation ne se trouve à l'intérieur du disque (ou de l'aboule) circonscrit au triangle (ou au tétraèdre).

L'idée de ces méthodes est de générer une triangulation de Delaunay à partir d'un ensemble de points. Il est ensuite possible d'ajouter de nouveaux sommets à cette triangulation jusqu'à l'obtention de certains critères de qualité.

La triangulation de Delaunay peut être calculée à l'aide d'un diagramme de Voronoï (Figure 5.a). Un diagramme de Voronoï est un découpage de l'espace, à partir d'un ensemble de points P appelés sites, en polygones (en 2D) ou en polyèdres (en 3D) convexes appelés cellules de Voronoï (Figure 5. a). En reliant toutes les paires de sites, dont les cellules de Voronoï sont voisines, nous obtenons la triangulation de Delaunay (Figure 5.b) et d).

Les méthodes d'insertion de nouveaux sommets doivent garantir cette propriété dans la nouvelle triangulation.

Un diagramme de Voronoï est un objet infini (Figure 5.a) et la triangulation de Delaunay correspondante a une extension limitée à l'enveloppe convexe de l'ensemble des points. En revanche, cette triangulation n'est pas reliée à un modèle, comme ici celui de la maison. Afin de représenter ou d'approximer un modèle à l'aide d'une triangulation de Delaunay, proposent de calculer un diagramme de Voronoï restreint au modèle.

Ce diagramme restreint correspond à l'intersection entre le diagramme de Voronoï de l'ensemble des points et le modèle (Figure 5c). En calculant ensuite la triangulation de Delaunay de ce diagramme, nous obtenons une approximation du modèle (Figure 5d).

Contrairement aux méthodes précédentes, les méthodes de type Delaunay ne garantissent pas de respecter la discrétisation des limites du modèle (Figure 5d). Si l'objectif est de conserver les limites du modèle dans le maillage, il faut utiliser alors des méthodes de Delaunay contraintes (Figure 5e).

Il existe deux stratégies pour assurer que la discrétisation des limites soit présente dans

la triangulation de Delaunay :

- ajouter des sommets sur les limites jusqu'à ce que les limites correspondent géométriquement.
- modifier localement le maillage afin d'obtenir la discrétisation initiale des Limites.

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

- En 2D, des basculements d'arêtes permettent de retrouver les limites initiales.
- En 3D, l'algorithme est beaucoup plus complexe.[2]

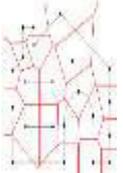
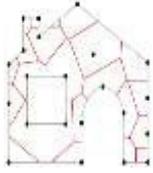
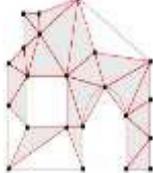
				
a) Diagramme de Voronoï des sommets de la maison.	b) Triangulation de Delaunay de la maison.	c) Diagramme de Voronoï restreint à la maison	d) Triangulation de Delaunay restreinte à la maison	e) Triangulation de Delaunay restreinte et contrainte à la maison

Figure 5 : Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay de la maison.

5 Maillages à base de quadrilatères ou d'hexaèdres

Grâce à leur flexibilité géométrique, il est actuellement possible de générer un maillage tétraédrique pour un modèle à géométrie arbitraire. En revanche, les maillages hexaédriques sont préférés aux maillages tétraédriques pour effectuer certains calculs comme ceux par éléments finis.

En effet, les maillages hexaédriques peuvent produire des résultats plus précis que des maillages tétraédriques. De plus, il faut 4 à 10 fois moins d'hexaèdres que de tétraèdres pour le même nombre de sommets.

Cette différence d'un nombre d'éléments, pour le même nombre de sommets, a un impact direct sur le temps de calcul d'une simulation numérique de type éléments finis. Pour toutes ces raisons, nous présentons dans cette section des méthodes de génération de maillages quadrilatéraux ou hexaédriques. De manière générale, la génération des maillages à base de

quadrilatères ou d'hexaèdres est plus difficile qu'avec des triangles ou des tétraèdres de par la forme anisotrope et les angles droits des éléments.

3.1 Méthodes de type association

La plus simple des méthodes est d'associer un quadrillage prédéfini sur la surface à mailler. Cette méthode produit des éléments de bonne qualité mais reste très difficile à utiliser. En effet, il faut que la géométrie du modèle puisse accepter cette association ; c'est-à-dire des angles à 90° et peu de variation de longueurs entre deux côtes opposés sinon l'association produit des éléments très tordus avec des angles éloignés de 90°. En utilisant cette association, un maillage hexaédrique peut être généré par balayage ou extrusion et est souvent appelé un maillage 2,5D. Le quadrillage de départ se propage alors dans le domaine en partant d'une surface associée appelée source jusqu'à une surface cible (Figure 6).

Dans le cas d'un modèle qui n'accepterait pas d'association, celui-ci peut être décomposé en sous domaines qui acceptent le balayage mais cette méthode se restreint aux modèles aux formes géométriques peu complexes.

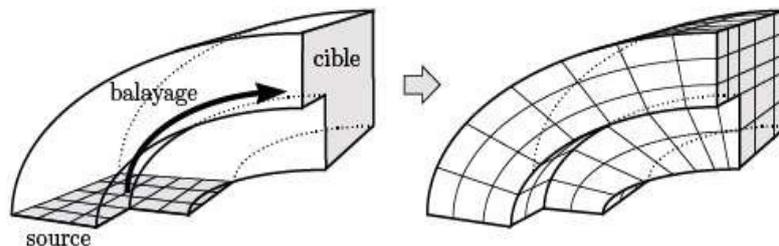


Figure 6 : Méthode de maillage par balayage.

Une extension de cette association directement en 3D, appelée poly cube, a été proposée par Tarini et al. [2004]. L'idée est de déformer une grille régulière (voxel) pour l'associer au modèle à mailler. Malgré cette extension, cette méthode ne permet pas de générer automatiquement un maillage hexaédrique pour un modèle de géométrie.[3]

5.1 Méthodes de type quadtree-octree

D'autres méthodes se basent sur une subdivision du modèle afin de créer le maillage. En suivant cette idée et afin de générer des maillages à base de quadrilatères ou d'hexaèdres, choisir de subdiviser le modèle en utilisant un quadtree sur une surface ou un octree sur un volume semble intéressant.

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

Une fois l'arbre de subdivision calculé il faut effectuer une transformation du résultat. il faut effectuer une transformation du résultat. En effet, le résultat est non conforme entre deux niveaux de subdivisions de l'arbre (Figure 7.a) : il y a deux facettes de cellules en face d'une seule [Schneiders, 2000]. Maréchal[2009] propose de faire quelques modifications de l'arbre afin de gérer ces éléments non conformes. L'idée est de les connecter par des polygones ou polyèdres (Figure.7 b). , la seule restriction est que chaque sommet de cette subdivision soit relié à quatre (en 2D) ou huit (en 3D) sommets. Finalement, le maillage final est calculé en suivant ces règles :

- les sommets du maillage sont situés au barycentre des subdivisions de l'arbre, il y a donc un sommet par subdivision ;
- pour chaque paire de subdivisions adjacentes de l'arbre, une arête entre les deux sommets correspondant est créé ;
- une projection des sommets sur la surface réelle est effectuée.

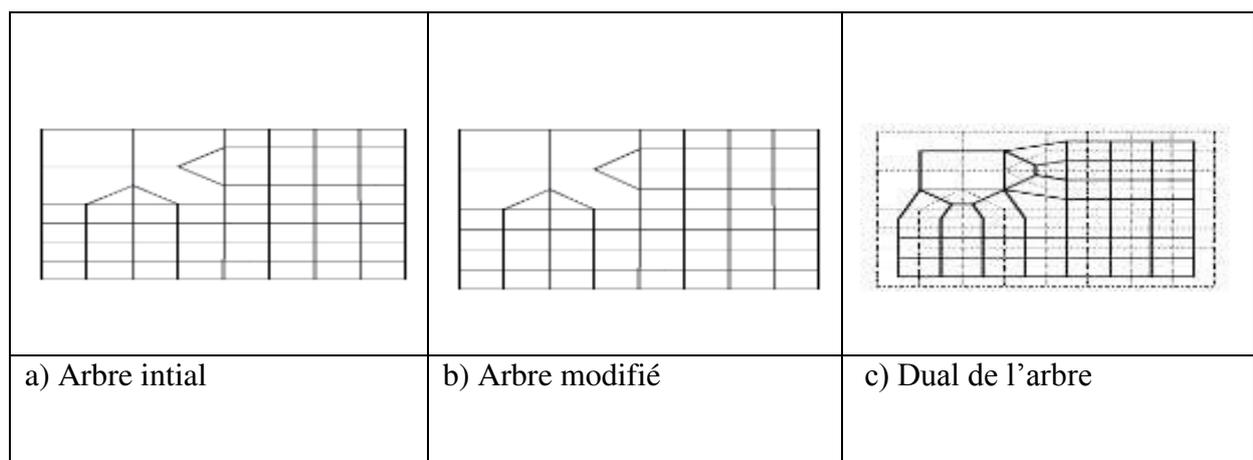


Figure 7 : Arbre de subdivision pour créer un maillage quadrilatéral

5.2 Méthodes utilisant un champ de directions

Les hexaèdres étant des éléments anisotropes, il est utile de savoir à l'avance comment les disposer et les aligner dans le maillage. Ces dernières méthodes utilisent un champ de directions comme support de cette information d'alignement afin de contrôler le placement et la forme des éléments hexaédriques. Elles se servent d'un maillage de fond pour calculer et stocker le champ de directions. Un champ de directions 1 peut être représenté comme une

propriété associant un repère local à chaque élément ou sommet du maillage de fond. Ces méthodes se découpent en deux étapes :

1. Calculer un champ de directions.
2. Générer un maillage correspondant au champ de directions calculé.

L'objectif du champ de directions est de contrôler l'alignement des éléments dans le modèle. Il faut donc calculer un champ de directions le plus lisse possible afin de ne pas avoir de variations brusques de l'orientation des éléments. Déplus, il peut localement correspondre à des axes prédéfinis comme les limites du modèle ou des directions cibles comme des directions d'écoulements. De nombreuses méthodes et approches différentes ont été développées pour calculer ce champ de directions. De récents travaux apportent une formalisation plus générale fonctionnant pour le calcul d'un champ de directions lisse en 3D dans un volume. Il est possible d'ajouter une propriété de taille d'éléments au champ afin de contrôler aussi la taille des éléments du maillage final. Ce champ est ensuite utilisé avec des méthodes de par métrisation globale pour générer un maillage quadrilatéral ou hexaédrique.

De manière générale, il reste très difficile de générer un maillage hexaédrique

Qui respecte les limites du modèle. Ceci est d'autant plus vrai pour les modèles géologiques qui possèdent généralement des géométries complexes et désangles faibles. Afin de relâcher les contraintes qu'impose la génération d'un maillage quadrilatéral ou hexaédrique, d'autres approches proposent de générer des maillages mixtes composés de plusieurs types d'éléments. [5]

6 Méthodes de générations indirectes de maillages

L'approche indirecte découpe la génération du maillage en plusieurs étapes permettant un meilleur contrôle sur la méthode de génération. Elle passe par la génération d'un maillage intermédiaire qui est ensuite transformé pour arriver au maillage final. Plusieurs types de transformations sont possibles comme la fusion d'éléments existants, la suppression d'éléments et la régénération partielle du maillage.

6.1 Génération d'un maillage intermédiaire

Le maillage intermédiaire est souvent composé de triangles ou de tétraèdres. En effet, les méthodes de génération de maillages à base de triangles ou de tétraèdres sont plus flexibles et

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

plus contrôlables que celles générant des quadrilatères ou des hexaèdres. Les méthodes indirectes permettent ainsi de séparer :

- la génération de la majeure partie, voire de la totalité, des sommets du maillage final ;
- la construction des cellules plus complexes telles que les hexaèdres, pyramides, prismes et autres polyèdres.

De par leur flexibilité, ces techniques peuvent donc être contraintes par plus de données afin de générer un maillage intermédiaire aux caractéristiques spécifiques permettant une bonne transformation vers le maillage final. Ces approches indirectes sont le plus souvent utilisées afin de générer un maillage quad-dominant ou hexa-dominant. Dans ce cas, elles utilisent un champ de directions afin de contrôler l'alignement des éléments du maillage intermédiaire. Nous présenterons dans cette section deux des principales approches pour générer un maillage intermédiaire en utilisant un champ de directions. L'objectif est d'obtenir un maillage possédant des éléments avec des angles proches de 90° et alignés sur le champ de directions afin de favoriser la création d'éléments anguleux comme l'hexaèdre ou le prisme.

6.2 Méthodes de type optimisation du diagramme de Voronoï

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points P est un découpage de l'espace en cellules convexes. Chaque cellule est associée à un point et représente

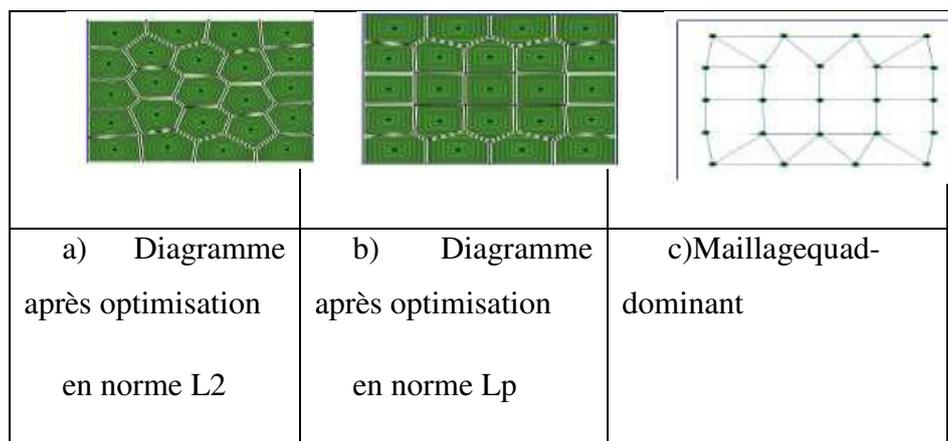


Figure 8 : Diagramme de Voronoï avec la norme L2 et Lp.

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

- Un diagramme de Voronoï barycentrique de 23 points est calculé, après une optimisation en utilisant la norme L2 a) et la norme Lp,b). La triangulation de Delaunay de b) crée des triangles avec des angles proches de 90°. Cette triangulation est adéquate pour une conversion en maillage quad-dominant c).l'espace le plus proche de son point que d'un autre point de P

Une cellule se définit et se calcule en suivant l'Equation. Cette équation utilise la distance euclidienne, aussi appelée norme L2, pour évaluer la distance entre les points. Si le diagramme est barycentrique, il en résulte ainsi un découpage en « nid d'abeilles » avec des cellules principalement hexagonales(Figure 8.a). La triangulation de Delaunay de cet ensemble de points donne des triangles avec des angles proches de 90°. Ces derniers peuvent, une fois fusionnés, être convertis en quadrilatères (Figure 4.2c).

Une fois le maillage intermédiaire généré, il y a deux grandes catégories de méthodes permettant de transformer ou convertir ce maillage en un maillage final :

- la première catégorie est la recombinaison des éléments du maillage intermédiaire. Il existe deux types d'identification de ces éléments : une détection géométrique ou combinatoire ;
- la deuxième consiste à modifier le maillage intermédiaire en déplaçant, ajoutant ou supprimant des sommets du maillage.[6]

7 Génération des maillages

Une fois que les sommets d'une entité sont générés, nous devons calculer le maillage final de celle-ci en utilisant uniquement ces sommets et les entités limites remaillées.

7.1 Maillage des Lignes

La génération du maillage des Lignes a pour objectif de calculer un ensemble de segments adjacents. Les sommets de ces segments sont les deux Coins aux extrémités de la Ligne et l'ensemble des sommets générés par une méthode d'échantillonnage. Lors de l'échantillonnage des Lignes, nous avons pris soin d'ordonner la liste des sommets en partant d'un premier Coin vers le deuxième. Dans ce cas, la génération du maillage est très simple : chaque segment correspond à une paire de sommets consécutifs dans la liste.

7.2 Maillage des Surfaces

Triangulation de Delaunay contrainte restreinte Pour le cas des Surfaces, nous cherchons à obtenir une surface triangulée dont les sommets sont ceux calculés lors de l'échantillonnage et de ceux des Lignes limites remaillées. Ce maillage est aussi contraint par les Lignes limites déjà remaillées. En d'autres mots, toutes les arêtes des Lignes doivent être présentes dans le maillage. De plus, les Lignes limites définissent l'extension de la surface à calculer. Ce maillage peut être généré en utilisant une triangulation de Delaunay. Cependant, cette méthode peut ajouter un grand nombre de sommets supplémentaires pour résoudre des configurations complexes. Pour éviter cette étape de raffinement du maillage, nous avons travaillé sur un nouvel algorithme de calcul de la triangulation de Delaunay contrainte restreinte. Nous considérons P l'ensemble des points générés et des points formant les bords remaillés.

- les bords libres qui sont reliés à un ensemble de triangles sur seulement un de leur côté (pas de triangle de l'autre côté) ;

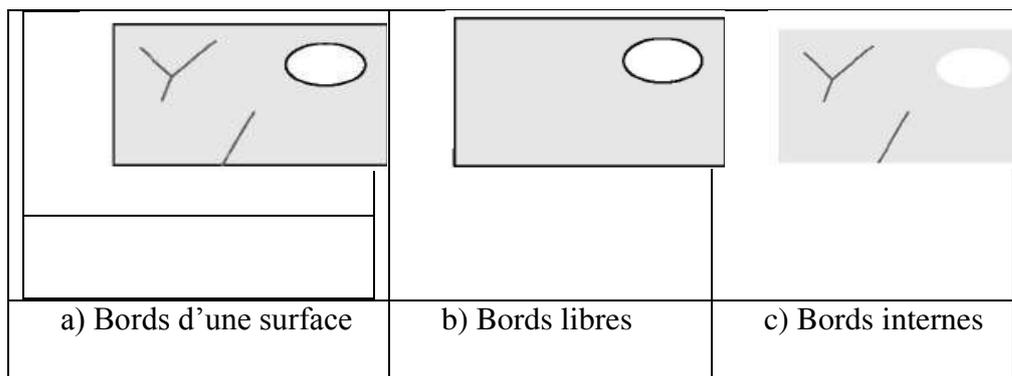


Figure 9 : Types de bords d'une surface.

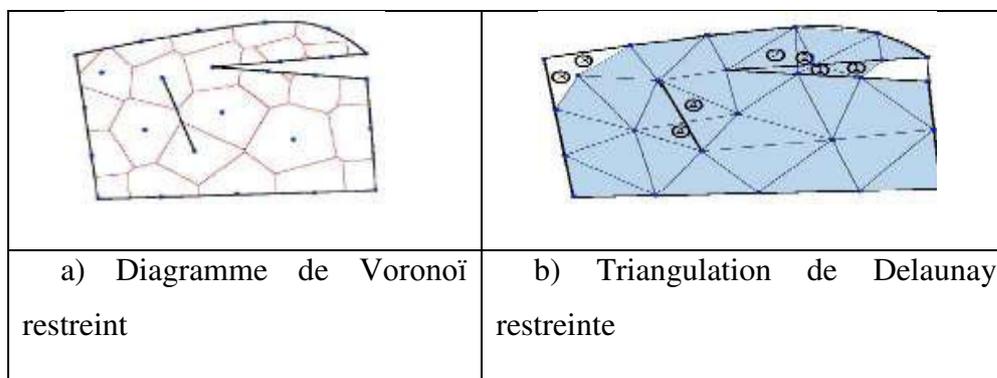


Figure 10 : Configurations problématiques résultant de la triangulation Delaunay restreinte.

8 Reconstruction de surfaces

Aujourd'hui, les systèmes de numérisation actuels sont capables de fournir, de manière quasi-instantanée, des jeux de données précis et de grandes tailles sur à peu près tous les organes biomédicaux possibles. Toutefois, un tel volume de données échantillonnées peut compromettre tout traitement ultérieur de cette information en temps réel, le stockage ou la transmission de cette information, en raison des limitations matérielles actuelles. Par conséquent, les algorithmes de reconstruction de surface sont utilisés pour passer de données volumétriques discrètes (ensembles de voxels ou nuages de points) à une approximation linéaire par morceaux qui interpole la géométrie de la surface sous-jacente. De fait, la triangulation de la surface reste la seule représentation de la géométrie du domaine, ayant ainsi remplacé la donnée échantillonnée d'origine. En fonction de la technologie utilisée, les systèmes de numérisation ou d'imagerie produisent en principe :

- des séries de coupes parallèles,
- des ensembles de voxels (i.e., des images 3D),
- des nuages de points.

Comme la nature des données varie beaucoup d'une technique à l'autre, des méthodes de reconstruction spécifiques ont été développées pour chacun des types énumérés. Dans cette section, on présente brièvement les principes de base de chacune des trois classes d'algorithmes de reconstruction de surfaces.

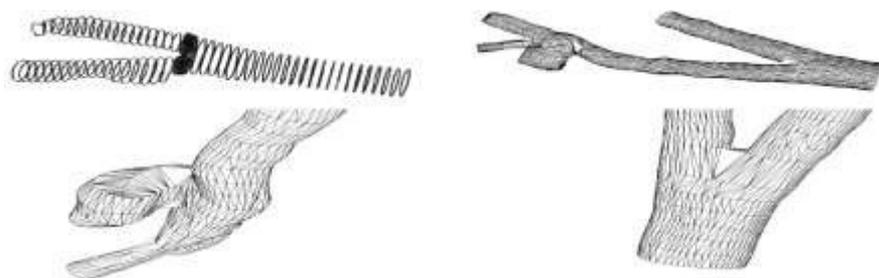


Figure 11 : Reconstruction de surface basée sur un algorithme de Delaunay

8.1 Triangulation de nuages de points

Avec cette technique, il n'y a pas, en principe, besoin d'une étape de traitement d'image puisque tous les points sont supposés appartenir à la surface. La donnée consiste en un ensemble de points aléatoires éventuellement complétés par des directions normales. Reconstruire une triangulation de surface à partir d'un nuage de points fait désormais figure de problème classique dans diverses applications, par exemple en "reverse engineering", en traitement d'image, en infographie, etc. Les données peuvent provenir d'une large gamme de systèmes et techniques, incluant les lasers ou les surfaces implicites, par exemple. Ce sujet a reçu énormément d'attention ces dernières années.

Les principaux problèmes sont liés à la nécessité de traiter des surfaces de topologie quelconque, des échantillons non uniformes et à celle de produire des maillages géométriques avec des contraintes fortes : approximation linéaire par morceaux précise, variétés "lisses", etc.

L'une des méthodes les plus robustes pour traiter ce problème est basée sur un algorithme en deux phases : une triangulation 3D de Delaunay (i.e., composée de tétraèdres) est tout d'abord construite à partir du nuage de points, ensuite l'algorithme extrait une surface (lisse) polygonale en sélectionnant les triangles adéquats de la triangulation 3D, à partir de considérations géométriques et topologiques.

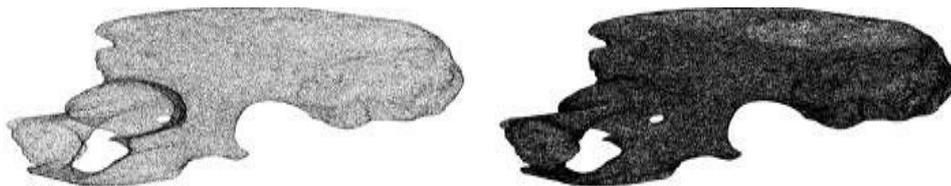


Figure 12 : nuage de point initial et triangulation de surface

8.2 Triangulation d'une iso-surface.

Dans cette approche, la donnée consiste à utiliser une fonction de distance signée et à en calculer le zéro. En d'autres termes, la surface est vue comme une surface de niveau (i.e., une iso-surface) définie sur l'espace entier. Avec les images 3D en niveaux de gris (comme celles fournies par les imageurs IRM), la fonction de densité peut être vue comme une fonction

implicite discrète dont la valeur est connue uniquement aux points d'échantillonnage (les voxels). De telles méthodes ont été appliquées avec succès aux triangulations de surfaces.

Le caractère essentiel de cet algorithme réside dans sa simplicité quasi-biblique. Etant donné un voxel défini par un ensemble de 8 pixels formant une cellule hexaédrique, la méthode consiste à analyser cette cellule de manière à déterminer si celle-ci est intersectée par la surface implicite. Ce test est basé simplement sur l'évaluation du signe de la fonction sommets de la cellule : un changement du signe aux extrémités d'une arête indique que la surface intersecte (au moins une fois) l'arête. La position du point d'intersection peut-être déterminée au moyen de schémas d'interpolation.

9 Construction d'un maillage géométrique

Une fois la triangulation de surface générée selon les principes décrits ci-dessus, la géométrie du domaine est pratiquement capturée. Toutefois, chacune des méthodes de reconstruction décrites souffre généralement d'au moins l'un des inconvénients suivants :

- i) les données sont bruitées (i.e., les points ne sont pas exactement sur la surface),
- ii) le nombre de polygones (triangles) est inutilement trop important,
- iii) les éléments sont souvent de piètre qualité.

Par conséquent, une étape de post-traitement est requise pour construire un maillage géométrique partir de la triangulation de surface. Puis, une étape d'optimisation est appliquée pour supprimer les sommets redondants et pour insérer les chaînons d'information manquants. Dans cette section, on montre que ces étapes font en fait partie intégrante d'un schéma global de maillage destiné produire des maillages géométriques. Avant de discuter d'une méthode générale pour extraire un maillage géométrique, on définit précisément ce concept de maillage géométrique.

9.1 Procédure de lissage

Comme on l'a indiqué, la plupart des triangulations de surfaces générées par un algorithme de reconstruction d'iso-surfaces sont souvent "facétées". Il est donc nécessaire délissé la surface avant de générer un maillage géométrique sinon la procédure de simplification décrite ci-après peut s'avérer inefficace à supprimer les artéfacts. La plupart des procédures de lissage souffrent de plusieurs maux. L'un des plus pénibles est lié à la

contraction de la surface initiale qui survient après plusieurs étapes de lissage. Comme les techniques de lissage sont appliquées un grand nombre de fois, un triangle peut tout à fait dégénérer en un sommet.

Dans ce cas, la complexité de l'algorithme est linéairement nombre de sommets. La nouvelle position d'un sommet est calculée comme un barycentre pondéré des positions de ses voisins de premier ordre (i.e., les sommets connectés au sommet par une arête) et la procédure est répétée un grand nombre de fois. Pour prévenir toute contraction, deux passes de filtrage gaussien sont appliquées. Après une première étape effectuée avec un facteur positif, une deuxième étape est appliquée sur tous les sommets, mais cette fois avec un facteur négatif. Cette procédure a été démontrée équivalente à un filtre passe-bas pour lequel la courbure de la surface joue le rôle de la fréquence. Il convient toutefois de faire attention à la préservation des lignes caractéristiques (arêtes vives, coins, etc.).

9.2 Simplification géométrique de maillage

En général, pas adapté à une description précise de la géométrie, pour au moins deux raisons. En effet, il contient généralement un nombre d'éléments prohibitif (redondant) ainsi que des artefacts géométriques (petits détails) qui doivent être éliminés. Pour résoudre ces problèmes, l'approche qu'on suggère dans ce rapport consiste à simplifier la triangulation de surface à l'aide de modifications locales du maillage. À cette fin, on introduit une bande de tolérance globale autour de la surface (à une distance de Hausdorff donnée) pour contrôler les opérations de simplification.

L'objectif est de supprimer les éléments redondants (i.e., qui ne contribuent pas réellement l'approximation géométrique de la surface) ainsi que les détails insignifiants, tout en préservant la géométrie de la surface sous-jacente.

9.3 Procédure de simplification

D'un point de vue formel, la méthode proposée consiste à supprimer les sommets du maillage de référence de manière itérative. Pour cela, deux opérations de modification sont appliquées : la suppression d'une arête et la bascule d'arête, sous réserve que les deux requis précédents ne soient pas violés. La bascule d'arête consiste à remplacer les deux triangles partageant une arête par la configuration alternative (les deux autres triangles construits sur le même ensemble de quatre points). Cette opération est appliquée si les deux triangles initiaux sont strictement coplanaires afin de ne pas changer le signe de la courbure de la surface.

L'opération de suppression d'une arête consiste à supprimer un sommet P du maillage, ce qui a pour effet de créer un trou, et de reconstruire le maillage de la boule de P (les voisins du premier ordre). Enfin, afin d'optimiser la qualité en forme des éléments du maillage géométrique résultant, une procédure de lissage est appliquée sur tous les sommets. Les vecteurs déplacements associés aux sommets sont usuellement calculés au moyen d'un Laplace discret. Un point est bougé pas à pas vers une position optimale (i.e., une position correspondant à une configuration de triangles de formes optimales). [8]

10 Génération d'un maillage de calcul

En général, pas directement utilisable à des fins de calcul, En effet ,ce maillage représente une approximation linéaire par morceaux précise de la géométrie de la surface (selon une valeur de tolérance donnée). Toutefois, les simulations numériques requièrent un contrôle supplémentaire de la densité de maille (la concentration de sommets dans chaque région du maillage) et de la gradation du maillage (la variation de taille entre éléments voisins). Comme indiqué précédemment, la densité de maille d'un maillage géométrique est liée seulement aux courbures locales de la surface. Mais, en fonction de l'échantillonnage des données, la densité locale du maillage géométrique peut s'avérer insuffisante ,en d'autres termes, le maillage manque localement de sommets pour capturer précisément la géométrie de la surface. Il est possible de mesurer l'adéquation du maillage avec la métrique géométrique, en faisant appel à la notion de longueur moyenne d'une arête.

10.1 Adaptation de maillage

Après des décennies de recherche et développement, les simulations numériques basées

Sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis ont atteint un degré de maturité important, ce qui permet de résoudre avec succès une large gamme de problèmes d'ingénierie.

Avec ces techniques numériques, l'erreur d'approximation peut être reliée au nombre d'éléments, à la densité du maillage ainsi qu'à la position des nœuds .L'objectif de l'adaptation de maillage est de permettre un meilleur contrôle de l'erreur en créant des maillages plus adaptés au modèle physique (généralement basé sur des EDP) ainsi qu'à sa résolution numérique. Deux points sont, à cet égard, particulièrement importants:

Chapitre 01 : Etude théorie des maillages

- la conception d'estimateurs d'erreur précis qui soient capables de transcrire l'erreur d'approximation (ou d'interpolation) en cartes de métriques et le développement de techniques de génération de maillage gouvernées par de telles cartes.

11 Exemples d'applications

Dans cette section, on présente plusieurs exemples de maillages géométriques et démaillages de calcul générés par l'approche décrite dans les sections précédentes.

On décrit ici trois séries d'exemples :

- la première série est relative à la génération de maillages géométriques,
- la seconde série à des maillages de calcul et la troisième série concerne l'adaptation de maillages. Tous les maillages de surfaces ont été générés en utilisant Yams, un logiciel de remaillage de surfaces discrètes développé. Tous les maillages de volume ont été créés avec le logiciel GHS3D, un meilleur tétraédrique de type Delaunay .

11.1 Maillages géométriques

En infographie, la visualisation rapide ou le traitement géométrique (CAO) dépend fortement de la génération de maillages géométriques. Pour un nombre fixé de points , une approche la géométrie (lisse) de la surface au mieux au moyen d'éléments anisotropes (é, i.e., suivant les vecteurs et valeurs propres du tenseur de courbure de la surface .Les maillage géométriques générés par une approche basée sur la distance de Hausdorff présentent de telles caractéristiques anisotropes, comme illustré sur les figures ci-dessous il y a plusieurs exemples de maillages géométriques correspondant à des simplifications de Hausdorff à des tolérances différentes.

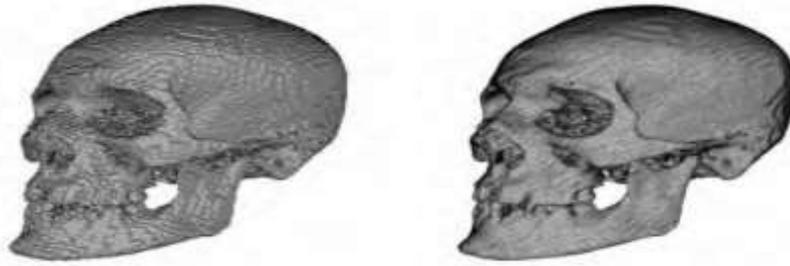


Figure 13 : Illustration de la procédure de lissage gaussien.

11.2 Maillages de calcul

Un maillage de calcul est un maillage unité par rapport au tenseur de métrique géométrique. Ce tenseur de métrique riemannien prescrit en chaque sommet de la surface l'orientation et l'étirement des éléments désirés localement. Pour des raisons de calcul, des requis spécifiques peuvent également être spécifiés, liés notamment à la qualité en forme des éléments, à la densité et à la gradation du maillage.

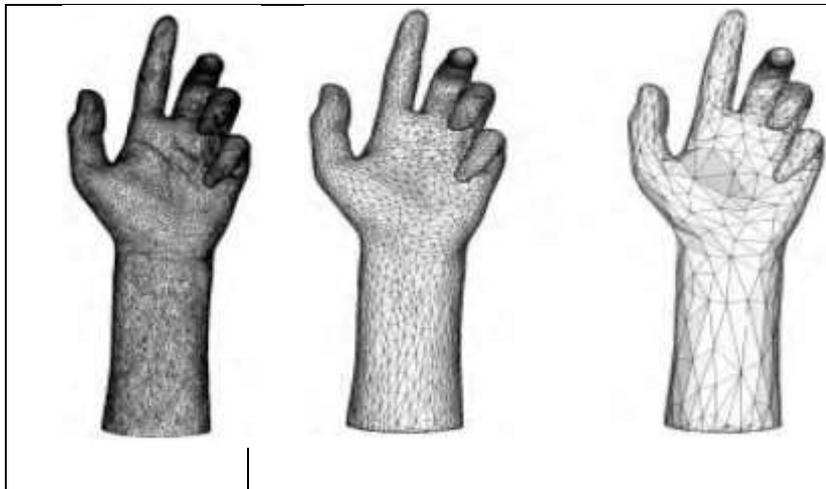


Figure 14 : Triangulation de surface initiale (à gauche) et maillages

Dans cette section, on présente un exemple d'adaptation de maillage pour démontrer comment capturer un tenseur de métrique défini de manière analytique. Dans cet exemple, cinq itérations d'adaptation de maillages ont été nécessaires pour capturer le champ.

À chaque itération, le champ de métrique discret analytique est calculé en chaque sommet du maillage et un nouveau maillage unitaire est généré pour ce champ de métriques. La fonction analytique n'est pas utilisée de manière explicite lors de l'insertion d'un point. [9]

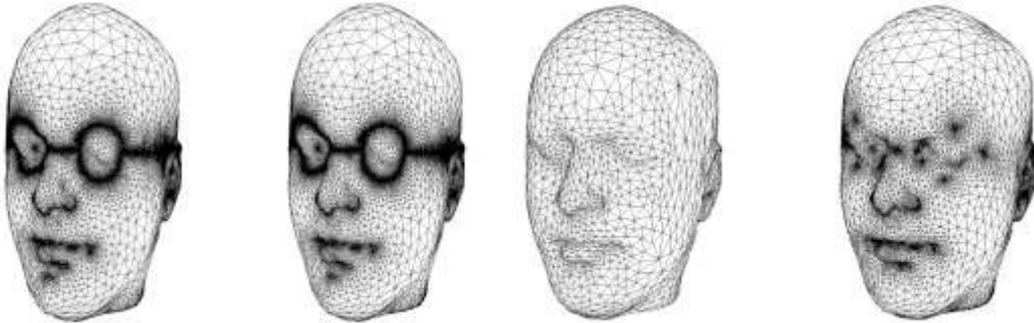


Figure 15 : Exemple d'adaptation de maillage de surface.

12 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté d'une manière explicite le concept de maillage avec ses différentes variantes. Tandis que le maillage est l'une des formes de représentation les plus compactes. Son inconvénient principal est la grande quantité d'information à stocker.

Pour surmonter ce problème, on va passer à la représentation sous forme de graphe qui sera l'objectif du deuxième chapitre.

1 Introduction

La théorie des graphes est une théorie mathématique relative aux ensembles de nœuds et de liens. Le terme « graphe » désigne la représentation visuelle d'un tel ensemble. Les graphes ont été utilisés dans de nombreux domaines d'étude pour modéliser des phénomènes de la réalité. Le formalisme des graphes permet de d' écrire de nombreux problèmes souvent de manière simple, mais qui peuvent s'avérer difficile à résoudre.

Il s'agit essentiellement de modéliser des problèmes :

- ✓ on exprime un problème donné en termes de graphes.
- ✓ il devient alors un problème de « théorie des graphes » que l'on sait le plus souvent résoudre car il rentre dans une catégorie de problèmes connus.

Les solutions de problèmes de graphes peuvent être :

- ✓ faciles et efficaces (car le temps nécessaire pour les traiter par informatique est raisonnable car il dépend poly nominalement du nombre de sommets du graphe).
- ✓ difficiles (car le temps de traitement est exponentiel) ; dans ce cas on utilisera une heuristique, c'est-à-dire un processus de recherche d'une solution.
- ✓ pas forcément la meilleure.

2 Graphes orientés

Dans cette section, nous présentons plusieurs définitions de concept de graphe

Définition : On appelle graphe orienté Il se représente par des points et des flèches entre les points :

- ✓ les points sont les sommets du graphe, les flèches des arcs (orientés) qui relient certains sommets entre eux. D'un point de vue mathématique, si S est l'ensemble des sommets, un graphe représente une relation binaire entre des éléments de S .

Définition : Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une relation sur V).

Le graphe $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E) . Les éléments de V sont appelés les sommets¹ ou nœuds de G . Les éléments de E sont appelés les arcs² ou arêtes de G . Si V est fini, on parlera de graphe fini (en particulier, E est alors fini et contient au plus (2 arcs)).

Définition : On appelle graphe orienté le couple formé par un ensemble S et une partie $A \subset S \times S$. Les éléments de S sont appelés les sommets du graphe et les éléments de A les arêtes.

On dit que l'arête $(a; b)$ va de a vers b , et que a et b sont les extrémités de l'arête $(a; b)$. Une arête du type $(a; a)$ est appelée une boucle. [10]

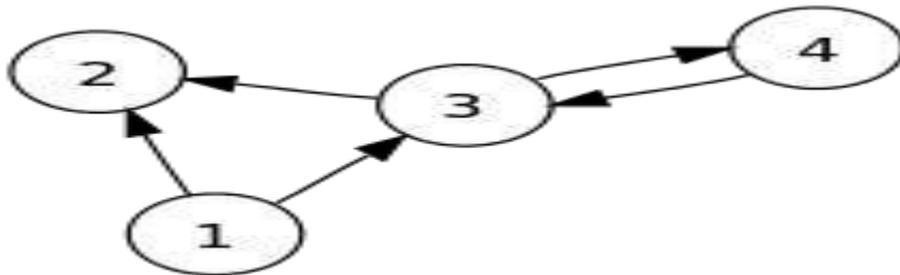


Figure 16 : Graphe orienté

Remarque : pour a et b distincts, $(a; b)$ et $(b; a)$ sont deux arêtes distinctes, puisque $(a; b)$ va de a vers b et $(b; a)$ de b vers a . On dit qu'un graphe $(S; A)$ est symétrique s'il vérifie

$(a, b) \in A \iff (b, a) \in A.$	Equation1
-----------------------------------	-----------

On dit qu'un graphe est simple s'il ne comporte pas de boucle.

2.1 Degrés d'un sommet, matrice d'adjacence

On appelle degré sortant du sommet $x \in S$ le nombre d'arêtes partant de x . On le note $d^+_A(x)$. Ainsi, on a :

$d^+_A(x) = \{y \in S; (x, y) \in A\} $	Equation2
--	-----------

De même, on appelle degré entrant du sommet $x \in S$ le nombre d'arêtes arrivant en x . On le note $d^-_A(x)$. Ainsi, on a :

$d^-_A(x) = \{y \in S; (y, x) \in A\} $	Equation 3
--	------------

Le degré total $d(x)$ du sommet x est défini par :

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

$d_A^T(x) = d_A^+(x) + d_A^-(x)$	Equation 4
----------------------------------	------------

Ainsi, $d_A^T(x)$ est le nombre d'arêtes dont x est une extrémité, la boucle étant comptées deux fois

On appelle matrice d'adjacence du graphe $G = (S; A)$ la matrice $M = (m_{i,j}) (i,j) \in S^2$ indexée par les sommets du graphe telle que (En d'autres termes

$$m_{i,j} = 11A(i,j).$$

Il est facile de voir que l'on

$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in A \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin A \end{cases}$	Equation 5
---	------------

$\forall i \in S \quad d_A^+(i) = \sum_{j \in S} m_{i,j}$ $\forall j \in S \quad d_A^-(j) = \sum_{i \in S} m_{i,j}$	Equation 6
--	------------

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

Comme chaque a exactement un sommet de départ, on a

$ A = \sum_{i \in S} d_A^+(i).$	Equation 7
----------------------------------	------------

De même, comme chaque arête a exactement un sommet d'arrivée, on a

$ A = \sum_{i \in S} d_A^-(i).$	Equation 8
----------------------------------	------------

En faisant la somme des deux identités, on obtient le théorème :

Théorème 1. Soit $G = (S; A)$ un graphe. On a l'identité

$2 A = \sum_{i \in S} d_A^T(i).$	Equation 9
-----------------------------------	------------

2.2 Morphismes de graphes orientés :

Soit $G = (S; A)$ et $H = (T; B)$ deux graphes orientés. On dit qu'une application ϕ de S dans T réalise un morphisme du graphe G vers le graphe H si elle vérifie la propriété suivante :

$$(x, y) \in A \implies (\phi(x), \phi(y)) \in B.$$

Equation10

Si ϕ est une application injective, on dit que le graphe G s'injecte dans le graphe H . On dit aussi parfois que le graphe H contient le graphe G .

Si ϕ est un isomorphisme de G dans lui-même, on dit que ϕ est un automorphisme de G . [11]

2.3 GRAPHES NON ORIENTES

Un Graphe non orienté $G=(X, E)$ est déterminé par la donnée :

- D'un ensemble de sommets ou nœuds X
- D'un ensemble E de paires de sommets appelées arêtes.
- Les arêtes ne sont pas orientées

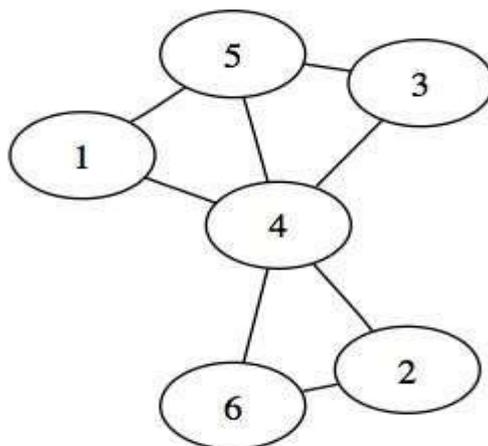


Figure 17 : Graphe non orienté

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

Si ϕ est un isomorphisme de G dans lui-même, on dit que ϕ est un automorphisme de G .
l'ensemble des automorphismes. [12]

Théorème : Soit $G = (S; A)$ un graphe, T un ensemble, et ϕ une application de S dans T .
Alors, si l'on pose

$A_\phi = \{(\phi(x), \phi(y)); (x, y) \in A\},$	Equation 11
--	-------------

L'application ϕ réalise un morphisme du graphe G vers le graphe $H = (T; A_\phi)$.

Graphe engendré par une partie

Soit $G = (S; A)$ un graphe orienté et $\emptyset \neq T \subset S$. On appelle sous-graphe de G engendré par T le graphe

$G[T] = (T, A \cap (T \times T)).$	Equation 12
------------------------------------	-------------

Il a comme sommets les éléments de T et comme arêtes les arêtes de G dont les extrémités sont dans T .

Définition 2. : On appelle graphe non orienté le couple forme par un ensemble S et une partie $A \subset B_1(S) [B_2(S)$. Les éléments de S sont appelés les sommets du graphe et les éléments de A les arêtes. On dit que l'arête $fa; bg$ relie a et b ; a et b sont les extrémités de l'arête $fa; bg$. Une arête du type $fa; fa$ est appelée une boucle.

Remarque : $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ désignent la même arête.

On dit qu'un graphe est simple s'il ne comporte pas de boucle. En d'autres termes, un graphe non-orienté $G = (S; A)$ est simple si et seulement si $A \subset B_2(S)$.

Si $G = (S; A)$ est un graphe simple, on appelle graphe complémentaire de G et l'on note G_c le graphe

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

$G^e = (S, \mathcal{B}_2(S) \setminus A).$	Equation13
--	------------

2.3 Graphes orientés symétriques et graphes non orientés

Théorème .Soit S un ensemble. On considère application d'équation :

$\mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)) \text{ dans } \mathcal{P}(S \times S)$ $Sym : \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)) \rightarrow \mathcal{P}(S \times S)$ $A \mapsto \{(x, y) \in S \times S \mid \{x\} \cup \{y\} \in A\}$	Equation14
---	------------

L'application Sym réalise une injection de l'ensemble des graphes non orientés dans l'ensemble des graphes orientés. Elle induit une bijection de l'ensemble des graphes non orientés dans l'ensemble des graphes orientés symétriques. On considère application de

$\mathcal{P}(S \times S) \text{ dans } \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S))$ $\mathcal{P}(S \times S) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S))$ $A \mapsto \{\{x\} \cup \{y\}; (x, y) \in A\}$	Équation14
--	------------

L'application Désor réalise une surjection de l'ensemble des graphes orientés dans l'ensemble des graphes non-orientés. C'est une bijection de l'ensemble des graphes orientés symétriques dans l'ensemble des graphes non-orientés. On a :

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)) (Désor \circ Sym)(A) = A$ et $\forall A \in \mathcal{P}(S \times S) \quad (S, A) \text{ symétrique} \iff (Sym \circ Désor)(A) = A$	Equation 15
---	-------------

2.4 Degrés d'un sommet,

Matrice d'adjacence

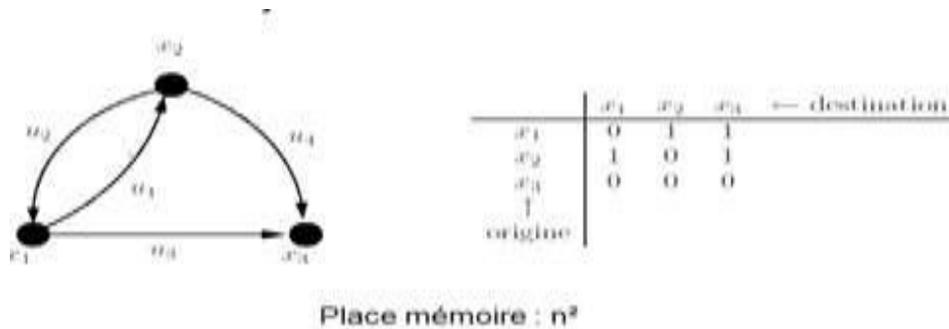
Si $G = (A; S)$ est un graphe non-orienté, on définit le degré $d_A(x)$ du sommet $x \in S$ par

$d_A(x) = d_{\text{Sym}(A)}(x) + 11A(f \times g)$	Equation 16
---	-------------

Théorème 2.4. Soit $G = (S; A)$ un graphe non-orienté. On a l'identité

$2 A = \sum_{i \in S} d_A(i).$	Equation 17
---------------------------------	-------------

2.5 Représentation dans graphe



$$d_A(x) = d_{\text{Sym}(A)}(x) +$$

Figure 18: 5matrice d'adjacence.

1- remplacer par un arc.

2.5 Morphismes de graphes non-orientés

Soit $G = (S; A)$ et $H = (T; B)$ deux graphes non-orientés. On dit qu'une application ϕ de S dans T réalise un morphisme du graphe G vers le graphe H si elle vérifie la propriété suivante :

$v \in A \implies \phi(v) \in B.$	Equation 18
-----------------------------------	-------------

Si ϕ est une application injective, on dit que le graphe G s'injecte dans le graphe H . On dit aussi parfois que le graphe H contient le graphe G . On dit que ϕ est un isomorphisme si il vérifie les deux conditions suivantes :

<ul style="list-style-type: none"> — ϕ réalise une bijection entre A et B. — $v \in A \iff \phi(v) \in B.$ 	Equation 19
---	-------------

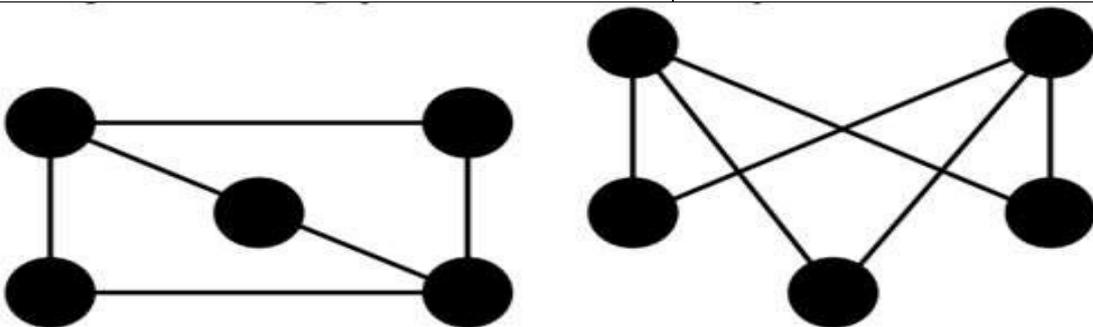


Figure 19 : Les graphes isomorphes.

Si ϕ est un isomorphisme de G dans lui-même, on dit que ϕ est un auto-morphisme de G . On note (G) l'ensemble des automorphismes de G .

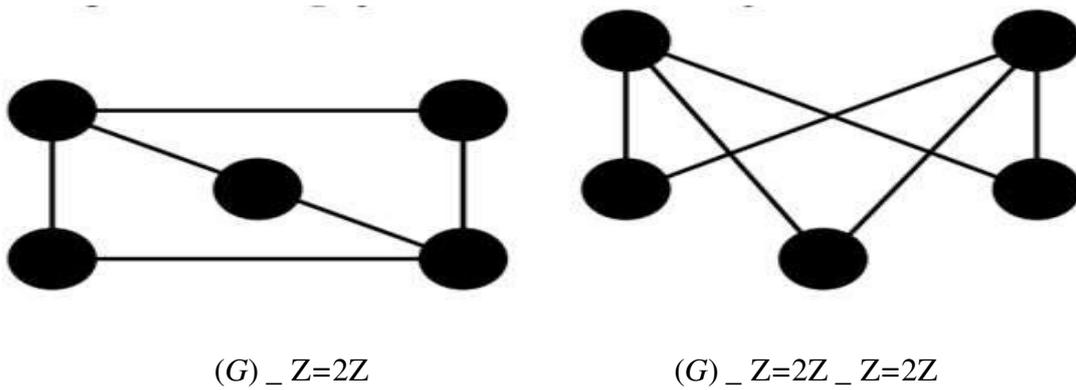


Figure 20 : Les automorphismes

Théorème : Soit $G = (S; A)$ un graphe, T un ensemble, et ϕ une application de S dans T . Alors, si l'on pose

$A_\phi = \{\phi(v); v \in A\},$	Equation 20
----------------------------------	-------------

L'application ϕ réalise un morphisme du graphe G vers le graphe $H = (T; A_\phi)$.

2.6 Graphe engendré par une partie

Soit $G = (S; A)$ un graphe non-orienté et $\emptyset \neq T \subset S$. On appelle sous graphe de engendré par T le graphe $G[T] = (T; A \cap (B_1(T) \cup B_2(T)))$. Il a comme sommets les éléments de T et comme arêtes les arêtes de G dont les extrémités sont dans T .

2.7 Notion de clique

Soit $G = (S; A)$ un graphe non-orienté simple et $\emptyset \neq T \subset S$. On dit que T est une clique de G si les sommets de T sont deux à deux reliés dans G . Autrement dit, T est une clique si et seulement si $G[T] = (T; B_2(T))$. [18]

3 Graphe classique

3.1 Graphe complet

On appelle graphe complet à n sommets tout graphe s'écrivant $G = (S; B_2(S))$, où S est un ensemble à n éléments. Comme les graphes complets à n sommets sont isomorphes, on note K_n l'un d'entre eux.

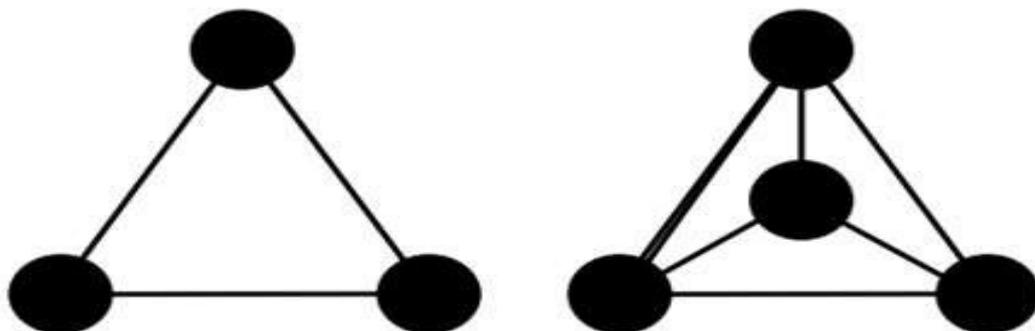


Figure 21 : Les graphes complets

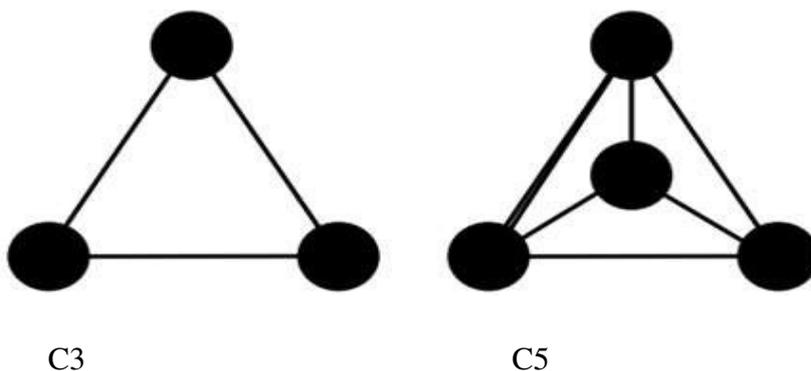
3.2 Graphe cyclique

On appelle graphe cyclique à n sommets tout graphe isomorphe à $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; A)$;

$$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A),$$

où

$$A = \{\{x, y\} \in \mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), x - y \in \{-1, +1\}\}.$$



C3

C5

Figure 22 : Le graphe cyclique.

3.3 Graphe biparti complet

On appelle graphe biparti complet tout graphe s'écrivant :

$$G = (X \cup Y, A)$$

Où X et Y sont deux ensembles disjoints et où

$$A = \{\{x, y\}, x \in X; y \in Y\}$$

Si on pose $p = |X|$ et $q = |Y|$, on note $K_{p; q}$ l'un d'entre eux.

Remarque : les graphes $K_p ; q$ et $K_q ; p$ sont isomorphes.

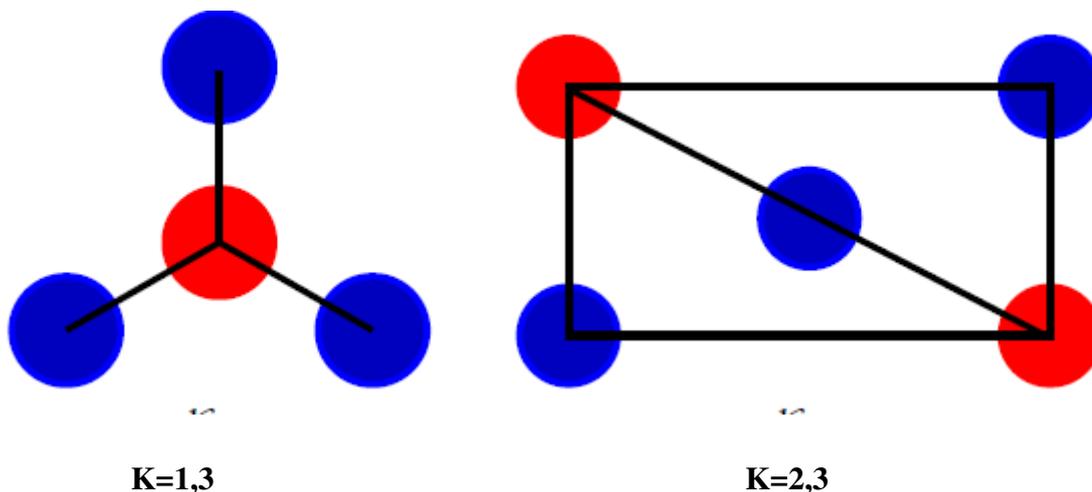


Figure 23: Le graphe biparti complet

4 Chemins dans un graphe orienté

Soit $n \geq 2 \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(s_0; \dots; s_n)$ de points de S constitue une chaîne de longueur n allant de s_0 à s_n si

$$d_A^T(x) = d_A^+(x) + d_A^-(x).$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (s_{i-1}, s_i) \in A.$$

Remarque : Il existe toujours une chaîne de longueur zéro entre un point et lui-même. On dit qu'une chaîne de longueur $n \geq 1$ est un *cycle* si $s_0 = s_n$. On dit que des sommets x et y sont connectés et on note $x \sim y$ si il existe une chaîne allant de x à y et s'il existe une chaîne allant de y à x .

Théorème : est une relation d'équivalence sur S

On appelle composantes connexes du graphe les classes d'équivalence induites par la relation d'équivalence.

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

On dit qu'un graphe est connexe si quels que soient les sommets x et y du graphe, il existe une chaîne allant de x à y . Autrement dit, un graphe est connexe s'il est formé d'une unique composante connexe.

On appelle voisinage à droite de l'ensemble $F \subset S$ l'ensemble

$$\mathcal{V}^+(F) = \{y \in S \mid \exists x \in F \ (x, y) \in A\}.$$

On appelle *voisinage à gauche* de l'ensemble $F \subset S$ l'ensemble

$$\mathcal{V}^-(F) = \{x \in S \mid \exists y \in F \ (x, y) \in A\}.$$

Ces notions ont été présentées pour un graphe orienté. Elles s'étendent aux graphes non-orientés sans difficulté.

5 Chemin de longueur minimale

On suppose qu'à chaque arête d'un graphe (orienté ou non), on associe un nombre $\mu(e)$ positif ou nul appelé coût de l'arête.

Si $(s_0; s_n)$ est un chemin, on appelle coût du chemin la quantité

$$\ell(s) = \sum_{i=1}^n \mu(s_{i-1}, s_i).$$

Deux sommets nous étant donnés, l'un appelé sommet de départ, l'autre sommet d'arrivée, un problème est de déterminer un chemin de coût minimal reliant le sommet de départ au sommet d'arrivée.

Afin de simplifier l'exposé, on supposera ici que l'on travaille avec un graphe fini.[14]

5.1 Cas où toutes les arêtes ont le même coût

On suppose ici que pour tout $e \in A$, $\mu(e) = 1$. Ici la longueur d'un chemin coïncide donc avec son coût. On construit alors une suite D_n par récurrence comme suit

$$\begin{aligned} \text{--- } D_0 &= \{\text{le sommet de départ}\} \\ \text{--- } D_{n+1} &= \mathcal{V}^+(D_n) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^n D_k \right) \end{aligned}$$

Par construction, les D_n sont disjoints. Comme les $(D_n)_{n \geq 0}$ sont inclus dans S qui est fini, seul un nombre fini de D_n est non-vide.

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

Comme $D_n = \emptyset \Rightarrow D_{n+1} = \emptyset$, la suite D_n est donc constamment vide à partir d'un certain rang.

Par construction de $(D_n)_{n \geq 0}$, quel que soit $x \in D_n$, il existe un chemin allant du sommet de départ à x de longueur n .

On va montrer maintenant qu'on ne peut pas fabriquer de chemin plus cours. Comme les D_n forment une partition de l'ensemble A des sommets accessibles depuis le sommet de départ, on peut définir une application p de A dans \mathbb{N} par $p(x) = n$ pour tout x dans D_n . On a par exemple $p(\text{le sommet de départ}) = 0$.

On peut donc reformuler ce que l'on a dit quelques lignes plus haut : quel que soit $x \in A$, il existe un chemin allant du sommet de départ à x de longueur $p(x)$

Si un point t est dans D_n et que $(t, u) \in A$, alors par construction de D_n ,

u est dans D_{n+1} ou dans $\bigcup_{k=0}^n D_k$. On a donc

$$(t, u) \in A \Rightarrow p(u) \leq p(t) + 1.$$

Soit donc (s_0, \dots, s_n) un chemin de longueur n allant du sommet de départ s_0 à $s_n = x$. On a $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} p(s_{k+1}) \leq p(s_k) + 1$. On en déduit $p(x) = p(s_n) \leq p(s_0) + n = n$, ce qui montre que la longueur de ce chemin est au moins aussi grande que $p(x)$.

La mise en œuvre concrète de cet algorithme est aisée : on commence par marquer le sommet initial d'un zéro, puis, à chaque étape, on cherche les sommets non marqués qui sont voisins à droite d'un sommet marqué, et on

les marque alors de l'entier immédiatement supérieur à la marque des dits voisins. On peut s'arrêter lorsque l'arrivée désirée a été atteinte. Pour obtenir un chemin minimal, on part alors du sommet d'arrivée que l'on entoure. Parmi ses voisins à gauche, on cherche un sommet d'index immédiatement inférieur, que l'on entoure. On recommence alors, jusqu'à arriver au sommet de départ. En lisant la suite obtenue à l'envers, on a ainsi un chemin de longueur minimal.

5.2 Cas général : algorithme de Dijkstra

L'algorithme se présente ainsi : on note en face de chaque sommet x le coût $l(x)$ du plus court chemin alors trouvé du sommet de départ jusqu'à

Chapitre 02 : Etude théorie des graphes

x , ainsi que l'étape précédente $p(x)$ de ce chemin. Lorsqu'un des meilleurs chemins a été trouvé, on encadre le coût qui devient définitif.

1. On pose l (départ) = 0 et $l(x) = +\infty$ pour les autres sommets. Aucun sommet n'est entouré. Passer à l'étape suivante.

2. Trouver x_0 réalisant le minimum de $l(x)$ parmi les sommets non-entourés. Entourer ce sommet. Si x_0 est le sommet d'arrivée, s'arrêter, sinon passer à l'étape suivante.

3. Pour tout $y \in V \setminus \{x_0\}$ tel que $l(x_0) + c(x_0; y) < l(y)$, remplacer $l(y)$ par $l(x_0) + c(x_0; y)$ et $p(y)$ par x_0 . Retourner à l'étape précédente.

Remarque :

- à l'étape 2, l'ensemble des sommets non-entourés est non vide : c'est vrai la première fois qu'on passe en deux, car nul sommet n'a été entouré à l'étape 1.
- Les fois suivantes qu'on y passe, il reste encore des sommets non-entourés, car sinon le sommet d'arrivée serait entouré et on se serait arrêté avant.
- L'algorithme se termine bien, car à chaque fois que l'on passe à l'étape 2, le nombre de sommets non-entourés diminue d'une unité. Comme la première fois, il y en a $j \in S_j$, et que ce nombre est positif, cela implique que l'on passe au plus $j \in S_j$ fois à l'étape 2.

Pour obtenir un chemin minimal allant du départ à l'arrivée, on pose

- t_0 = sommet d'arrivée et on définit $t_{n+1} = p(t_n)$ si $t_n \neq$ sommet de départ. Si
- $t_n =$ sommet de départ, alors $(t_n; t_{n-1}; \dots; t_0)$ est un chemin de coût minimal. [14].

6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les deux parties principales graphes les graphes non orientés et les graphes orientés. peuvent être une méthode de résolution de problèmes intéressante car il ne demande pratiquement pas de connaissances préalables.

1 Introduction

Après avoir mis le point sur les concepts théoriques de ce travail qui sont le maillage et les graphes, on va entamer l'aspect réalisation du système. On va commencer par l'étude conceptuelle où on va fournir le schéma fonctionnel de notre système et la relation qui existe entre les différents composants.

Par la suite, on passe à la partie programmation où il y'a les détails techniques de programmation avec les différents algorithmes. Cela sera clôturé par les résultats obtenus.

2 Description du projet

L'objectif de ce travail est de passer de la représentation des objets par maillage vers la représentation par graphes. Cela va faciliter la manipulation de ces objets à travers les graphes. Pour cela, on peut résumer notre travail dans les points suivants :

1. Modéliser des objets bidimensionnels.
2. Faire le maillage de ces objets, dont on a assuré deux types de maillage triangulaire et rectangulaire.
3. Construire le graphe de ce maillage.
4. Assurer la sauvegarde de cette représentation.
5. Assurer une série de manipulation de ces objets tels que translation, rotation et animation.

3 Architecture globale

L'architecture globale de notre maillage est composée des méthodes essentiellement :

- méthode rectangulaire.
- méthode triangulaire.

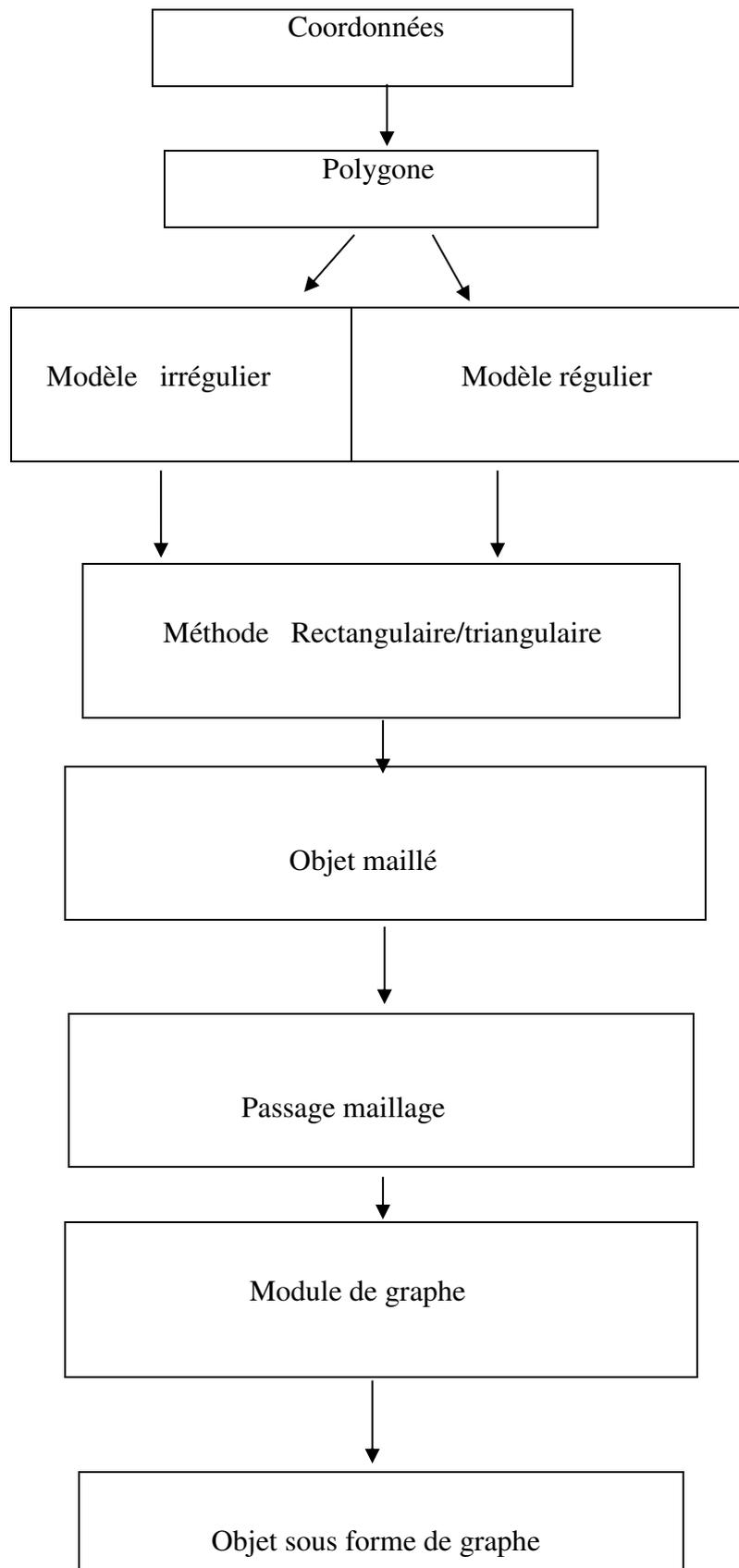


Figure 24 : L'architecture globale du système.

4 Description détaillée

Dans cette partie, nous allons concentrer sur les modules essentiels de notre maillage qui sont :

- **Maillage de forme 2d** : c'est un ensemble de sommets connectés par des facettes polygonales.
- **Maillage de forme 3d** : c'est un ensemble de sommets connectés avec volumique par des facettes polygonales.
- **Les coordonnées** : est un sommet d'écrit des points.
- distance entre les point et lignes pour obtenus la forme polygone.

Il s'agit de la discrétisation d'un milieu continu. D'un point de vue structure de données.

On défini comme une liste d'élément :

$$\mathcal{T}_h = \{K_0, K_1, \dots, K_{m-1}\} \quad (1.1)$$

- Nf faces,
- Ns sommets,
- Ne arête.
- Le maillage contiendra également la liste des coordonnées des sommets.

Les méthodes de maillage :

- **Triangulation** : toutes les faces divisées en triangles
- **rectangulation** : toutes les faces divisées sont en rectangle.
- **Algorithme récursif** : un algorithme récursif est un processus qui s'appelle lui même.
- **Niveau** : nombre d'itération.
- Pour diviser avec méthode triangulaire et rectangulaire en utilise les équations :

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

$$K = M \cdot x_2 - n \cdot x_1 / m - n, Z = m \cdot y_2 - n \cdot y_1 / m - n \quad (2.2)$$

- A chaque itération avec de niveau divisé de maillage.

5 Environnement de l'application :

5.1 Environnement de développement matériel

L'application a été implémentée sur une machine pc :(Lenovo :HEWLET-PACKARD PAVILLION) avec

- **processeur** : Intel (R) Core (TM) i5-4210M CPU @ 1.70GHZ 2.40 GHZ.
- **Ram** : 4.00 GO
- **Système d'exploitation** : Microsoft Windows 7 professionnel 64 bits.

6 Environnement de développement logiciel

Notre système a été implémenté en utilisant le langage de programmation c Sharp.

Le C# est, d'une certaine manière, le langage de programmation qui reflète le mieux l'architecture Microsoft .Net qui fait fonctionner toutes les applications .NET, et en est par conséquent extrêmement dépendant et beaucoup de mécanismes comme les classes, interfaces, délégués, exceptions, ne sont que des moyens explicites d'exploiter les fonctionnalités de la bibliothèque .NET. Le c # est devenu un logiciel de programmation largement utilisé.

6.1 Motivations de choix de c

Le langage c # a été conçu initialement pour faciliter le traitement les interfaces graphisme Il peut utiliser dans tous les domaines de la science qui nécessite de faire des calculs.

6.2 Intérêts :

Programmation infiniment plus rapide pour calcul et pour affichage.

- Une librairie très riche
- il peut possibilité d'inclure un programme en c/c++
- langage interprété
- possibilité d'exécuter du code en dehors du programme.
- Code facile à comprendre et très lisible.

6.3 La boîte à outil Guide

Les interfaces graphiques (ou les interfaces hommes-machine) sont appelées GUI (pour Graphical User Interface) sous C Sharp. Il permettent à utilisateur d'interagir avec

Chapitre 3 : Conception et implémentation du système voulu

un programme informatique, et de concevoir des interfaces utilisateurs pour des applications personnalisées avec différents objets graphiques (boutons, menus.....). Ces objets généralement utilisés à l'aide de la souris ou du clavier.

7 Pseudo algorithme de maillage :

-Les coordonnées sauvegarder avec liste box.

Private void panel1_Click (object sender, EventArgs e).

-polygone (régulier ou irrégulier).

-appliquer les méthodes :

-soit rectangulaire avec de niveau de chaque itération.

- soit triangulaire avec de niveau de chaque itération.

-un obtenu objet mailler.

-transformation dans graphe.

- Manipulation objet de graphe.

Présentation de l'application

8 L'interface graphique

L'interface graphique facilite la consultation de système par les utilisateurs .L'exécution de notre système consiste à appliquer maillage.

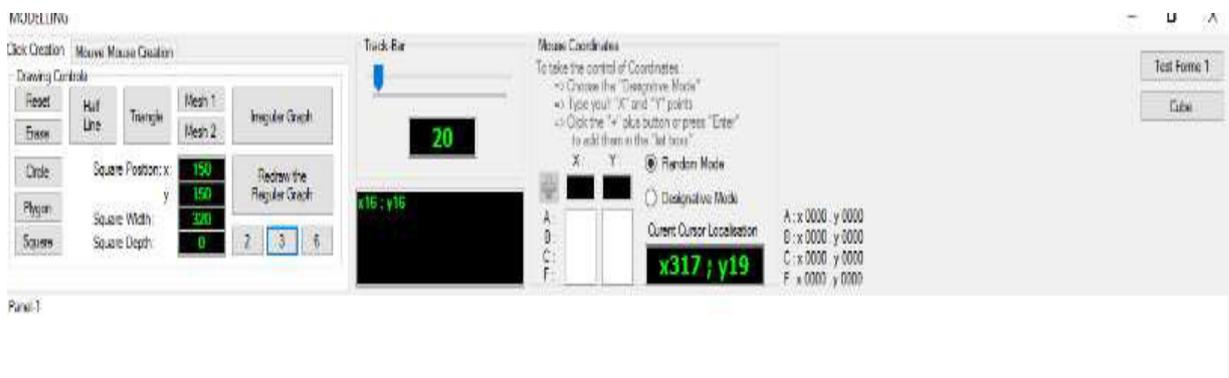


Figure 15 : interface de l'application.

Chapitre 3 : Conception et implémentation du système voulu

L'interface contient des boutons suivants :

design : pour designer un polygone.

Triangle : diviser polygone de forme triangle

Rectangle : diviser polygone de forme rectangle

Niveau : nombre diviser pour chaque itération.

Graphe : designer un graphe .

Cube :polygone se forme 3d.

Rest : effacer quelque polygone ou coordonné

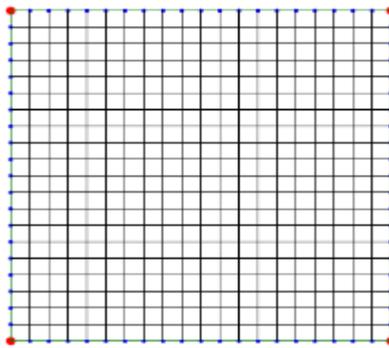


Figure26 : maillage rectangulaire

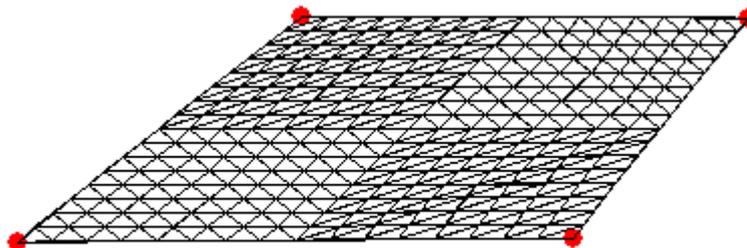


Figure 27 : maillage triangulaire

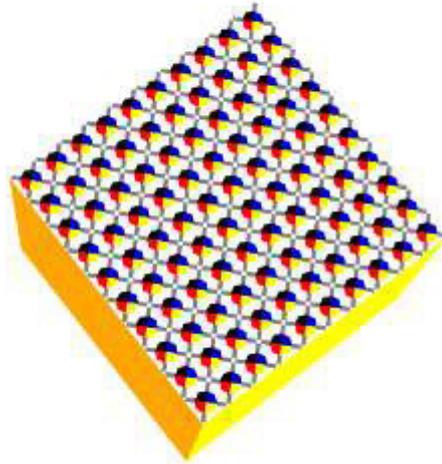


Figure 28 : cube maillé.

9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a bien présenté notre système qui consiste à faire un système assurant le maillage des objets puis passer à la représentation sous forme de graphe.

Bibliographie

[1] :ElmarEisemann, Joëlle Thollot , Xavier Décoret, « Modélisation Géométrique » /DEA IVR 2004.

[2] : Martin Jachimowicz,« Simplification de Maillages. »cour.

[3] :Pascal J. Frey , « Génération et adaptation de maillages de surfaces à partir de données anatomiques discrètes » mémoire , 11 mars 2003.

[4] : Elmar Eisemann, Joëlle Thollot,Xavier Décoret « cour» DEA IVR 2004.

[5] : Arnaud BOTELLA, « Génération de maillages no structurés volumiques de modèles géologiques pour la simulation de phénomènes physiques » Thèse,1998.

[6] : Luca Castelli Aleardi et Steve Oudot, « Introduction à la géométrie algorithmique et ses applications » 10 décembre 2012.

[7] : Pascal Frey, Frédéric Hecht , « Maillage 2D, surfacique et 3D »,cour,2012/2013.

[8] : Pascal J. Frey, « *Génération et adaptation de maillages de surfaces à partir de données anatomiques discrètes* »mémoire 2003.

[9] : F. DI PAOLA , « MAILLAGE » ÉDITION 2011.

[10] :Steven Elliott , « Application de la théorie des graphesà l'élaboration et à l'essai d'instruments d'enquête » article , Juin 2012.

[11] : Olivier GARET, « Introduction aux Graphes » UNIVERSIT_EDE NANCY, 2007-2008

[12] :Jean-Charles Régin, Arnaud Malapert « Théorie des Graphes » cour ,2015.216.

[13] :Didier Müller « Introduction à la théorie des graphes » CAHIERS DE LA CRM,

[14] : Ph. Roux, « théorie de graphe » cour , 3 février 2014.

