

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**TORKI Ladmia**

Titre :

Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka.

Membres du Comité d'Examen :

Dr. REZKI Brahim	UMKB	Président
Dr. KHLIL Naceur	UMKB	Encadreur
Dr. REMILI Nacira	UMKB	Examineur

Juin 2018

## DÉDICACE

Nous tenons tout d'abord à remercier <<**Dieu**>>  
et tout puissant et miséricordieux,  
qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail

A ma belle reine :

**Ma mère**

A qui sacrifie leur vie pour mon réussite :

**Mon père**

A mes chers frères : **Yassine Okba Sofiane Mbarek**

A mes adorables sœurs : **Akila Sabah Rabab**

A tout ma famille

A mes chers amis

merci d'être toujours là pour moi

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dr KHELIL Naceur, maître de conférences à l'Université de Biskra, qui m'a donné ce sujet et m'a encadré pendant mon Master. Il a toujours été à mon écoute et son point de vue complémentaire est souvent été très utile.

Je suis très reconnaissante envers Dr REZKI Brahim, et Dr REMILI Nacira d'avoir manifesté de l'intérêt pour mon travail en acceptant de participer à ce jury. Leurs remarques et commentaires constructifs m'ont permis d'en améliorer le manuscrit.

Enfin, que toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
<b>1 Généralités</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation du modèle . . . . .	3
1.1.1 L'histoire du modèle proie -prédateur . . . . .	3
1.1.2 Description des variables . . . . .	4
1.1.3 Mise en équation . . . . .	5
1.2 Propriétés de la solution : . . . . .	6
1.2.1 L'existence locale et l'unicité de la solutions . . . . .	6
1.2.2 Positivité des solutions . . . . .	8
1.2.3 Périodicité de la solution . . . . .	10
1.3 Points d'équilibre . . . . .	11
<b>2 Etude théorique</b>	<b>13</b>
2.1 Analyse des équations prédateur-proie de Volterra-Lotka . . . . .	13
2.1.1 Solution du système . . . . .	13

2.1.2	Moyenne sur un période . . . . .	17
2.1.3	Application ou système de Volterra-Lotka . . . . .	18
2.2	Influence de l'homme . . . . .	21
2.3	Amélioration du modèle . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>26</b>
3.1	Méthode de Runge-kutta d'ordre 4 (1895) . . . . .	26
3.2	Calcul numérique des points d'équilibre . . . . .	29
	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>31</b>

# Table des figures

1.1	Positions des points d'équilibre . . . . .	12
2.1	portrait de phase de l'équation prédateur-proie de lotka-volterra . . . . .	15
2.2	Effectif des prédateurs en fonction de l'effectif des proies pour différentes valeurs de $b$ ( $x_0 = 2, y_0 = 1, a = 2, c = d = 1$ ) . . . . .	23
2.3	Effectif des prédateurs en fonction de l'effectif des proies ( $x_0 = 3, y_0 = 4, a = 2, c = d = 1$ ). Courbe magenta : $k=0.5$ et la courbe en rouge à $k=3$ . . .	25
3.1	population de proies en bleu et des prédateurs en rouge au cours du temps .	28

# Introduction générale

## Motivation

On suppose qu'on a un milieu peuplé par deux populations, une population de proie  $x(t)$  et une autre population de prédateur  $y(t)$ . Spontanément, la population des proies a tendance à croître à un taux  $a$  ( $x' = ax$ ), tandis que celle des prédateurs, à jeun, décroît à un taux  $c$  ( $y' = -cy$ ). Mais en contact l'une de l'autre, la population des proies subit des pertes à un taux  $-bxy$  (le nombre de rencontres est supposé proportionnel à  $xy$ ) tandis que la population de prédateurs se reconstitue, et le système qui régit les populations est alors :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \text{ avec } a, b, c, d > 0.$$

Le but de ce mémoire est l'étude de ce système d'équation différentielle .

## Organisation du mémoire

La partie principale de ce mémoire est composée de trois chapitres, Le mémoire comporte également, un résumé, et une introduction (page 1).

Le chapitre 1 est divisé en trois sections, la première section est consacré à la présentation du modèle, son histoire, la description des variables et la mise en équation. Tandis que la deuxième section est réservée aux propriétés (l'existence, l'unicité et la positivité des solutions, et la Périodicité de la solution). Finalement la troisième section est dédiée aux

point d'équilibre.

Dans le chapitre 2 nous considérons l'analyse des équations prédateur-proie par la solution du système, moyenne sur un période, et application de système ou nous le résolvons par la méthode de Lyapunov. puis l'influence de l'homme et l'amélioration du modèle.

Dans le chapitre 3 nous résolvons le système numériquement à l'aide de la méthode de Runge-kutta (d'ordre 4) et on calcule les points d'équilibres. Finalement, on termine par une conclusion (page 30).

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Présentation du modèle

#### 1.1.1 L'histoire du modèle proie -prédateur

A l'origine du modèle appelé «proie-prédateur» il y a un grand mathématicien italien, Vito-Volterra (1860-1940) et une histoire de poissons.

Pendant la première guerre mondiale, Volterra fut très engagé comme militaire et comme directeur de «l'Ufficio Invenzione Ricerche». Il fut l'un des mathématiciens italiens les plus actifs d'un point de vue scientifique

Dans une série de leçons données à l'Institut Henri Poincaré à Paris en 1928-29 (Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie), Volterra rappelle les raisons qui l'ont amené à s'occuper de l'interaction entre les formes biologiques qui vivent dans un même écosystème : «A la suite de conversations avec monsieur D'Ancona, qui me demandait s'il était possible de trouver quelque voie mathématique pour étudier les variations dans la composition des associations biologiques, j'ai commencé mes recherches sur ce sujet à la fin de 1925». Le biologiste Umberto D'Ancona (1896-1964) était le beau-fils de Volterra et sa question, à la fois scientifique et commerciale, était très simple : comment interpréter certaines statistiques qui montraient la fluctuation des poissons de la mer Adriatique en

relation avec l'activité de pêche.

L'idée géniale de Volterra fut de distinguer les habitants de la mer en deux grandes catégories : les proies et les prédateurs, deux quantités variables en fonction du temps. En introduisant des hypothèses simplificatrices, Volterra trouva une formule qui lie la variation des proies à celle des prédateurs. Cette équation dépend de plusieurs facteurs, par exemple les taux de natalité et mortalité, ou encore le nombre initial d'individus des deux populations. voir [12]

### 1.1.2 Description des variables

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : des proies (lapins, sardines) et des prédateurs (renards, requins, respectivement). Pour cela, on note  $X(t)$  et  $Y(t)$  le nombre de proies et de prédateurs au temps  $t$ . Les quantités  $X, Y$  sont donc des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{N}$ . afin de disposer d'outils mathématique, on préfère travailler avec des variable continues. C'est pourquoi on considère deux nouvelles quantités :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0} \quad , \quad y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}$$

Où  $X_0$  (respectivement  $Y_0$ ) est un nombre de proies (respectivement de prédateurs ) fixé et grand . Les quantités  $x$  et  $y$  sont donc des proportions de proies et prédateurs. les variations de  $x(t)$  et  $y(t)$  sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ .

Les nombres  $X_0$  et  $Y_0$  sont choisis suffisamment grand pour les variations de  $X(t)$  et soient comparativement petites .Cela permet de supposer les fonction :

$$x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow x(t)$$

$$y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow y(t)$$

continues et de classe  $C^1$  pour tout  $t > 0$ .

Enfin, considérons les taux de variation sur un intervalle  $\Delta t$  :

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}$$

Si on suppose que les variations de  $X(t)$  sont petites par rapport à  $X(t)$  (ce qui paraît vraisemblable seulement pour des populations nombreuses), on peut passer à la limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

### 1.1.3 Mise en équation

En l'absence de prédateurs, les proies ont une croissance constante (on suppose la nourriture abondante et l'absence de compétition) :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a$$

où  $x(t) > 0$  et  $a > 0$  est le taux de naissance.

De même, les prédateurs ont tendance à disparaître en l'absence de proies, faute de nourriture

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c$$

$y(t) > 0$  et  $c > 0$  est le taux de mort.

Il reste à prendre en compte les interactions entre les deux espèces : le taux de prédation

(taux de décroissance des proies dû prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs. De la même façon, le taux de dérivation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à la leur disposition, c'est-à-dire nombre de proies. Ces considération nous conduisant aux équation suivant :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by \text{ et } \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx, (a, b, c, d > 0)$$

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équation différentielles, auquel on ajoute des condition initiale (population de départ de chacune des espèces) :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \text{ tell que } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), x_0, y_0 > 0 \quad (1.1)$$

Ce système est appelé système de Volterra-Lotka. voir [4] ou [10]

## 1.2 Propriétés de la solution :

Soit un système différentiel autonome

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u'(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $u_0 \in \Omega$

Le système obtenu est un système différentiel, dont la solution ne peut obtenu d'une façon analytique

Selon les résultats classiques concernant l'existence et l'unicité des solutions d'un système *EDO* qui passe par une valeur initiale donnée  $(x_0, y_0)$ .

### 1.2.1 L'existence locale et l'unicité de la solutions

On considère l'équation différentielle

$$\{y' = f(t, y), (t, y) \in U, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m\}$$

**Lemme 1.2.1** Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution du problème de Cauchy de données initiale  $(t_0, y_0)$  si et seulement si :

- i)  $y$  est continue et  $(\forall t \in I), (t, y(t)) \in U$
- ii)  $(\forall t \in I), y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du.$

**Lemme de GRONWALL. Convergence et unicité locale**

soit  $C_0 = [t_0 - T_0; t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$  un cylindre sur lequel  $f$  est  $k$ -lipchitzienne en  $y$  et soit  $M = \sup_{C_0} \|f\|$ . on se donne  $\varepsilon > 0$  et on considère deux solutions  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  respectivement  $\varepsilon_1$  approchée et  $\varepsilon_2$  approchée du problème de Cauchy de donnée initiale  $(t_0, y_0)$ , avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ .

On a alors  $\|y_{(i)}(t)\| \leq M + \varepsilon$ , et un raisonnement analogue à celui du lemme précédent montre que les graphes de  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  restent contenus dans le cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$$

dès que  $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M+\varepsilon})$ , ce qu'on suppose désormais.

**Lemme 1.2.2** Sous les hypothèses précédentes, on a :

$$\|y_{(1)}(t) - y_{(2)}(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|-1}}{k}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

**Théorème 1.2.1** : (Cauchy-Lipchitz)

si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipchitzienne en  $y$ , i.e Pour tout point  $(t_0, y_0) \in U$  il existe un cylindre  $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$  est une constante  $k = k(t_0, y_0) \geq 0$  tels que  $f$  soit  $k$ -lipchitzienne en  $y$  sur  $C_0$  :

$$(\forall (t, y_1)(t; y_2) \in C_0) \quad f(t, y_1) - f(t; y_2) \leq ky_1 - y_2$$

**Définition 1.2.1** Alors pour tout cylindre de sécurité  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$  comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec condition initiale  $(t_0, y_0)$  admet une unique solution exacte  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow U$ . De plus, toute suite  $y_{(p)}$  de solutions  $\varepsilon_p$  approchées avec  $\varepsilon_p$  tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte  $y$  sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .

**Preuve. Existence** Soit  $y_{(p)}$  une suite quelconque de solutions  $\varepsilon_{(p)}$  approchées avec  $\lim \varepsilon_{(p)} = 0$ , par exemple celles fournies par la méthode d'Euler. Le lemme de Gronwall montre que

$$d(y_{(p)}, y_{(q)}) \leq (\varepsilon_{(p)} + \varepsilon_{(q)}) \frac{e^{kT}-1}{k} \text{ sur } [t_0 - T, t_0 + T],$$

par conséquent  $y_{(p)}$  est une suite de Cauchy uniforme. Comme les fonctions  $y_{(p)}$  sont toutes à valeurs dans  $\overline{B}(y_0, r_0)$  qui est un espace complet,  $y_{(p)}$  converge vers une limite  $y$ . Cette limite  $y$  est une solution exacte de l'équation

**Unicité** : Si  $y_{(1)}, y_{(2)}$  sont deux solutions exactes, le lemme de Gronwall avec  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  montre que  $y_{(1)} = y_{(2)}$  ■

donc l'existence locale et l'unicité de la solution du système Volterra- Lotka est assurée (Théorème de Cauchy-Lipchitz). voir [3]

## 1.2.2 Positivité des solutions

**Théorème 1.2.2** Soient  $x_0, y_0$  des réels strictement positifs et  $t_0$  un réel quelconque. Alors la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t; x(t), y(t)) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases} \text{ vérifie por tout réel } t \begin{cases} x(t) \succ 0 \\ y(t) \succ 0 \end{cases}$$

Nous démontrons d'abord un lemme :

**Lemme 1.2.3** Dans chacun des cas suivants, la fonction  $(x, y)$  ainsi définie est l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t; x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (x_1, y_1) \end{cases}$$

(i) si  $x_1 = 0$  et si  $y_1 = 0$  alors pour tout réel  $t$ , on définit  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$

(ii) si  $x_1 = 0$  et si  $y_1 > 0$  alors pour tout réel  $t$ , on définit  $(x(t), y(t)) = (0, y_1 e^{-d(t-t_1)})$

(iii) si  $x_1 > 0$  et si  $y_1 = 0$  alors pour tout réel  $t$ , on définit  $(x(t), y(t)) = (x_1 e^{-a(t-t_1)}, 0)$

**Preuve. du lemme :** On vérifie facilement que les fonctions sont des solutions dans chaque cas et qu'elles vérifient les conditions initiales. L'unicité est donnée par le théorème de Cauchy-Lipchitz ces solutions sont d'ailleurs définies sur  $\mathbb{R}$  donc sont globales. ■

**Preuve. du théorème :** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $t_1$  tel que  $x(t) \leq 0$  ou  $y(t) \leq 0$  supposons plutôt qu'il existe  $t_1$  tel que  $x(t_1) = 0$  ou  $y(t_1) = 0$  (i.e. une solution franchit l'axe  $Ox$  ou l'axe  $Oy$ ).

Si jamais nous obtenons une contradiction la continuité des solutions empêchera leurs coordonnées de devenir négatives, sachant que les conditions initiales sont strictement positives.

\* Si  $x(t_1) = 0$  et  $y(t_1) = 0$ , alors  $(x, y)$  vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t; x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (0, 0) \end{cases}$$

donc d'après le lemme,  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$  pour tout réel  $t$ . Ceci est absurde car pour  $t = t_0, x(t_0) > 0$ .

\* Si  $x(t_1) = 0$  et  $y(t_1) > 0$ , alors  $(x, y)$  vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t; x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (0, y_1) \end{cases}$$

donc d'après le lemme,  $(x(t), y(t)) = (0, y_1 e^{-d(t-t_1)})$  pour tout réel  $t$ . Ceci est à

nouveau absurde car on aurait ,  $x(t_0) = 0 > 0$ .

\* Le raisonnement est strictement le même pour le dernier cas :

$$x(t_1) > 0 \text{ et } y(t_1) = 0.$$

voir[8]

■

### 1.2.3 Périodicité de la solution

**Proposition 1.2.1** *Au voisinage du point d'équilibre  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ , les solutions des equations de Lotka-Volterra sont periodiques de période  $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$  et s' écrivent sous la forme :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \lambda_1 \cos(\sqrt{adt}) + \mu_1 \sin(\sqrt{adt}) + \frac{d}{c} \\ y(t) = \lambda_2 \cos(\sqrt{adt}) + \mu_2 \sin(\sqrt{adt}) + \frac{a}{b} \end{cases}$$

**Preuve.** Matriciellement, le système de Lotka-Volterra au voisinage de  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$  devient :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - \frac{d}{c} \\ y(t) - \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de le résoudre par substitution. Ainsi en dérivant la première équation et en remplaçant  $y'(t)$  par sa valeur d'après la deuxième équation, nous constatons que  $x$  vérifie l' équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$f'' + adf = \frac{ad^2}{c}$$

L'équation caractéristique a pour solutions  $\pm i\sqrt{ad}$ , donc l'équation homogène a pour solutions :

$$t \rightarrow \lambda \cos(\sqrt{adt}) + \mu \sin(\sqrt{adt}), \text{ oavec } \lambda \text{ et } \mu \text{ des constantes.}$$

Comme  $\frac{d}{c}$  est une solution particulière, nous en déduisons la forme voulue pour  $x$ .

Nous en déduisons la forme de  $y$  sachant que

$$y'(t) = \frac{ac}{b} \left( x(t) - \frac{d}{c} \right) = \frac{ac}{b} (\lambda \cos(\sqrt{adt}) + \mu \sin(\sqrt{adt}))$$

voir [8] ■

### 1.3 Points d'équilibre

**Définition 1.3.1**  $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$  est un point d'équilibre (ou stationnaire) ssi  $f'(\bar{u}) = 0$

**Définition 1.3.2** Soit  $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$  un point d'équilibre.  $\bar{u}$  est stable ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, \|u_0 - \bar{u}\| < \eta \Rightarrow \forall t > 0, \|u_0(t) - \bar{u}\| < \varepsilon$$

si de plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_0(t) - \bar{u}\| = 0$$

le point  $\bar{u}$  est dit asymptotiquement stable.[4]

#### calcul des points d'équilibre

Soient des réels  $t, x, y$ .

$$(x, y) \text{ est un point d'équilibre de } F \Leftrightarrow F(t, x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } (a - by) = 0 \\ y = 0 \text{ ou } (-c + dx) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{(x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)\}$$

voir [8]

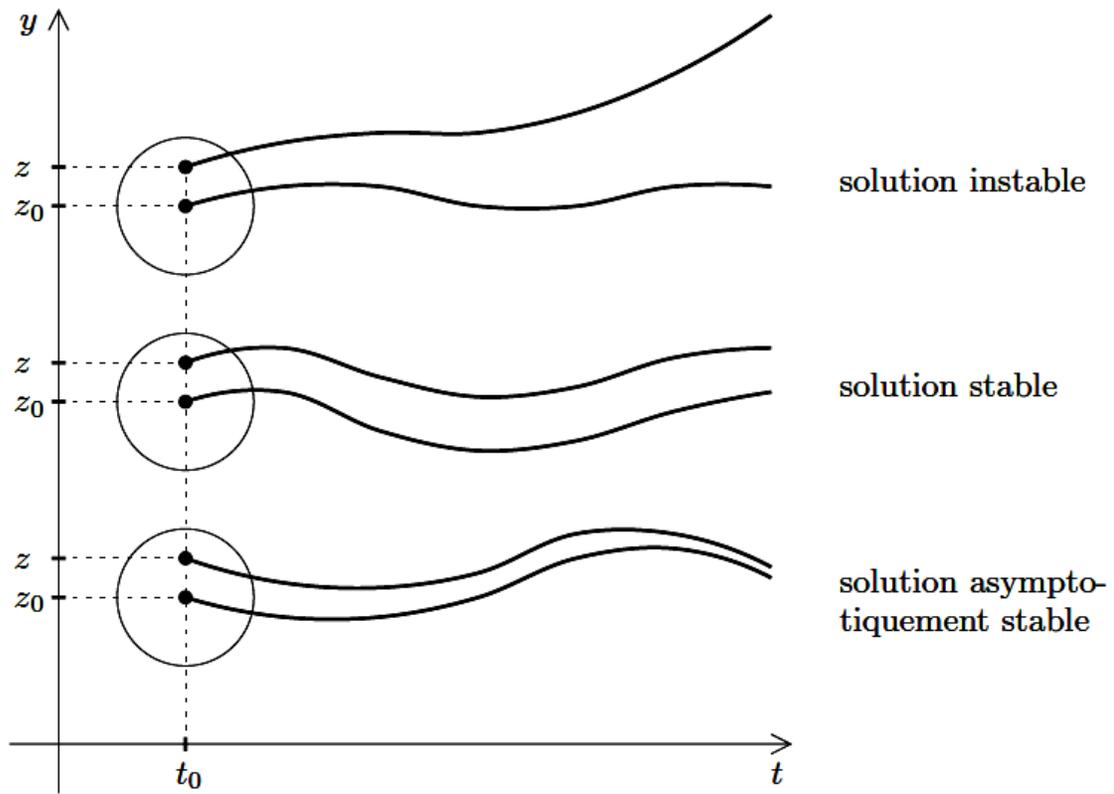


FIG. 1.1 – Positions des points d'équilibre

# Chapitre 2

## Etude théorique

### 2.1 Analyse des équations prédateur-proie de Volterra-Lotka

**Définition 2.1.1** Soit  $x = x(t)$  une fonction de  $t$ , on appelle orbite de  $x$  l'ensemble  $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

#### 2.1.1 Solution du système

**Définition 2.1.2** Soit  $x = x(t)$  une fonction de  $t$  et soit  $x' = f(x)$  une équation différentielle qui ne dépend pas de  $t$ . On peut avoir trois types de solutions  $x(t)$  :

- a) Si  $x(t) \equiv x$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire si  $x(t)$  est constant, alors  $x$  est appelé un point d'équilibre (c'est un point dans l'ensemble des solutions mais on est bien en train de parler d'une fonction, donc d'une solution stationnaire). Ces points sont caractérisés par  $f(x) = 0$ .
- b) Si  $x(T) = x$  pour un certain  $T > 0$  et  $x(t) \neq x$  pour tout  $t \in [0, T]$ , alors  $x$  est appelé point périodique et  $T$  est la période. On remarque que tous les autres points sur l'orbite sont périodiques de période  $T$ . Le mouvement décrit ainsi une oscillation

périodique infinie.

**c)** Si  $t \rightarrow x(t)$  est injective, alors l'orbite ne s'intersecté jamais avec elle même.

On considère l'équation 1.1. On peut déjà en déduire trois solutions :

**(i)**  $x(t) = y(t) = 0$

**(ii)**  $x(t) = 0$  ,  $y(t) = y_0 e^{-ct}$  (avec  $y_0 > 0$ )

**(iii)**  $y(t) = 0$  ,  $x(t) = x_0 e^{at}$  (avec  $x_0 > 0$ )

Cela signifie que si la densité des prédateurs ou des proies est nulle à un certain temps, alors elle est toujours nulle. En absence de proies, les prédateurs s'éteignent

( $y(t) \rightarrow 0$ , si  $t \rightarrow \infty$ ). En absence de prédateurs, la population des proies explosera

( $x(t) \rightarrow +\infty$ , si  $t \rightarrow \infty$ ).voir [9]

Aux trois solutions (i), (ii) et (iii) correspondent trois orbites :

**i)** l'origine  $(0, 0)$ , qui est un point d'équilibre

**ii)** l'axe des  $y$  positifs

**iii)** l'axe des  $x$  positifs

La réunion des trois orbites forme la frontière du quadrant positive

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$$

Étant donné que les densités des populations doivent être non négatives, on considère seulement la restriction de 1.1 sur  $\mathbb{R}_+^2$ . Cet ensemble est invariant, dans le sens que si une solution commence dans  $\mathbb{R}_+^2$ , elle va y rester pour tout le temps où elle est définie. La frontière  $\partial\mathbb{R}_+^2$  est invariante et puisque aucune orbite ne peut croiser les autres, l'intérieur

$$int\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

Est aussi invariant.

Il y a un unique point d'équilibre dans  $\text{int}\mathbb{R}_+^2$ . En effet un tel point d'équilibre  $F = (\bar{x}, \bar{y})$  doit satisfaire  $\bar{x}(a - b\bar{y}) = 0$  et  $\bar{y}(-c + d\bar{x}) = 0$ . Or  $\bar{x} > 0$  et  $\bar{y} > 0$  impliquent :

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \quad \bar{y} = \frac{a}{b}$$

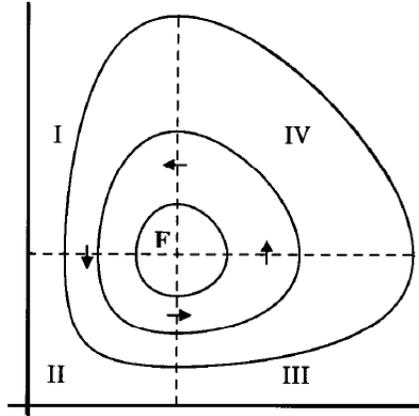


FIG. 2.1 – portrait de phase de l'équation prédateur-proie de Lotka-Volterra

Les signes de  $x'$  et  $y'$  dépendent du fait que  $y$  soit plus grand ou plus petit que  $\bar{y}$  et que  $x$  soit plus grand ou plus petit que  $\bar{x}$ . Ainsi  $\text{int}\mathbb{R}_+^2$  est divisé en quatre régions  $I, II, III, IV$  (voir 2.1).  $F$  est entouré par des orbites périodiques qui voyagent de  $I$  à  $II$ , de  $II$  à  $III$ , etc . . . dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

**Proposition 2.1.1** Soit  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour  $x, y > 0$  par :

$$V(x, y) = dx - c \log x + by - a \log y$$

alors  $V$  est une intégrale première pour le système 1.1, ie si  $(x(t), y(t))$  est solution de 1.1 sur  $[0, T]$  alors :

$$\forall t < T, V(x(t), y(t)) = cste$$

**Preuve.** En effet, si on multiplie l'équation  $\frac{x'}{x} = a - by$  par  $c - dx$ , et l'équation  $\frac{y'}{y} = c + dx$  par  $a - by$  on obtient

$$\left(\frac{c}{x} - d\right)x' + \left(\frac{a}{y} - b\right)y' = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt} [c \log x - dx + a \log y - by]$$

On peut réécrire ça différemment, Avec

$$H(x) = \bar{x} \log x - x \qquad G(y) = \bar{y} \log y - y$$

et

$$V(x, y) = dH(x) + bG(y)$$

L'équation 2 dévient :

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = k$$

Où  $k$  est une constante réelle. La fonction  $V$ , définie dans  $\mathbb{R}_+^2$ , reste constante le long de l'orbite de 1.1 : elle est appelée constante de mouvement.

Etant donné que  $H(x)$  satisfait :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\bar{x}}{x} - 1 \qquad \frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{\bar{x}}{x^2} < 0$$

alors  $H(x)$  atteint son maximum en  $x = \bar{x}$ , de la même façon  $G(y)$  atteint son maximum en  $y = \bar{y}$ .

Ainsi  $V(x, y)$  a un unique maximum à l'équilibre  $F = (\bar{x}, \bar{y})$ . Les ensembles de la forme  $\{(x, y) \in \text{int}\mathbb{R}^2 : V(x, y) = k\}$  sont des courbes fermées autour de  $F$ . Les solutions doivent rester dans ces ensembles, ainsi elles retournent à leurs points de départ. Les orbites sont donc périodiques. voir [8] ■

### 2.1.2 Moyenne sur un période

**Proposition 2.1.2** *On définit les moyennes de  $x$  et  $y$  sur une période  $[0, T]$  comme*

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \text{ et } \bar{y} = \int_0^T y(t)$$

**Preuve.** On remarque que les densités des prédateurs et des proies oscillent avec une certaine période. Or l'amplitude et la fréquence de l'oscillation ne dépendent que des conditions initiales. Par contre, la moyenne des densités par rapport au temps reste constante et à l'équilibre correspond à la valeur suivante :

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \bar{x}$$

Et

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \bar{y}$$

où  $T$  est la période de l'oscillation.

Ce résultat est justifié par le calcul suivant :

En partant de l'équation initiale

$$x' = x(a - by)$$

on écrit :

$$\frac{x'}{x} = a - by = \frac{d}{dt}(\log x)$$

En intégrant on obtient :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \log x(t) dt = \int_0^T (a - by(t)) dt$$

i.e

$$\log x(T) - \log x(0) = aT - b \int_0^T y(t) dt$$

Comme  $x(T) = x(0)$ , on conclut que

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} = \bar{y}$$

Avec un raisonnement analogue on montre le résultat pour  $x$  ■

### 2.1.3 Application ou système de Volterra-Lotka

#### Cas linéaire

On suppose que  $f$  est linéaire, c'est-à-dire que le système différentiel 1.2 est de la forme

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \text{ avec } A \in M_n(\mathbb{R}) \quad (2.1)$$

On s'intéresse au point d'équilibre 0 ( $\mathcal{G}(A)$  désigne le spectre de  $A$ )

**Théorème 2.1.1** pour le système 2.1 :

- 0 est asymptotiquement stable ssi  $\forall \lambda \in \mathcal{G}(A), \operatorname{Re} \lambda < 0$
- 0 est stable ssi  $\forall \lambda \in \mathcal{G}(A), (\operatorname{Re} \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \text{ n'est pas déficiente.})$ [4]

#### Méthode indirecte (Linéarisation) de Lyapunov

Par un changement de coordonnées, le point fixe de (2.4) se ramène à l'origine ( $f(0) = 0$ ) et le développement de  $f$  en série de Taylor autour de  $x = 0$  donne :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{1!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) \dots$$

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre 0, consiste à étudier le système linéaire :

$$x' = Ax \quad (2.2)$$

$$\text{(Avec } A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ la matrice jacobienne de } f \text{ en } 0)$$

qui s'appelle le linéarisé du système (2.4) au point d'équilibre 0.

Si  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  les valeurs propres de  $A$  sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution de 2.2 est

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i, v_i \text{ le vecteur propre associé à } \lambda_i$$

d'où le théorème suivant :

Considérons le système 2.2 avec  $r$  valeurs propres distinctes  $p_1, \dots, p_r$  et  $a$  point d'équilibre

\* Si  $Re(p_j) > 0$ , pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , alors  $a$  est instable.

\* Si  $Re(p_j) < 0$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , alors  $a$  est asymptotiquement stable.

On ne sait rien dire du comportement au voisinage d'un point d'équilibre si tout les valeurs propres de la différentielle sont de partie réelle nulle voir [11]

Maintenant on s'intéresse au point d'équilibre et leur stabilité. Au voisinage du point d'équilibre, le système 1.1 est "proche" d'un système linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = Df(0)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

les deux points d'équilibres du système 1.1 sont :

$$(x, y) = (0, 0) \text{ et } (x, y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$$

**Proposition 2.1.3**  $(0, 0)$  et  $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$  sont les seuls points d'équilibre du système de Lotka-Volterra. Le premier est un point selle, donc instable, le second est un centre.

**Preuve.** Notons  $(x_0, y_0)$  un de ces points d'équilibres et linéarisons  $F$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ . La formule de Taylor nous donne  $F(x, y) \sim DF_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)$  où  $DF$  est la différentielle de  $F$ .

La matrice jacobéenne de  $F$  est alors :

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a - by_0 & -bx_0 \\ cy_0 & cx_0 - d \end{pmatrix}$$

**Étude du point d'équilibre  $(0,0)$**

On remplace le point  $(0,0)$  dans  $J$  on obtient :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $J$  sont  $\lambda_1 = a > 0$  et  $\lambda_2 = -d < 0$  donc instable

**Étude du point d'équilibre  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$**

on remplace le point  $(0,0)$  dans  $J$  on obtenu :

$$J\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

le polynôme caractéristique de  $J$  est  $\lambda^2 + ad$ , les valeurs propres de  $J$  sont donc imaginaires pures et opposées, donc  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$  est un centre. Considérons maintenant l'explication de Volterra pour le problème initial, concernant l'augmentation des poissons prédateurs.

Pêcher réduit l'augmentation du nombre des proies, ceci signifie que la constante  $a$  dans l'équation initiale diminue et devient  $a - k$  pour un certain  $k > 0$ . Au même temps, le taux de diminution de la population des prédateurs devient plus grand (au lieu de  $c$  on a  $c + m$  avec  $m > 0$ ).

Par contre, les constantes d'interaction  $a$  et  $b$  ne changent pas. Pour conclure, la densité

des prédateurs devient  $\frac{a-k}{b}$  donc plus petit et celle des proies  $c+m$  plus grand. Si on arrête de pêcher, on constate ainsi une augmentation des prédateurs et une diminution des proies. Ceci explique bien le fait analysé par Volterra. ■

## 2.2 Influence de l'homme

Étudions maintenant l'influence de l'homme sur l'évolution des proies et des prédateurs. Imaginons par exemple que les proies soient des insectes et les prédateurs des oiseaux. On utilise des pesticides afin de protéger les champs des insectes. Supposons que ce produit tue chaque année en moyenne une proportion  $e$  (avec  $a > e \geq 0$ ) d'insectes. Et une proportion  $f \geq 0$  d'oiseaux. On pourrait faire l'hypothèse que  $e = f$  si le traitement éliminait autant les insectes que les oiseaux. De même si on suppose que le traitement tue exclusivement les insectes, on prendra  $f = 0$ .

On obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - ex \\ y' = cxy - dy - fy \end{cases}$$

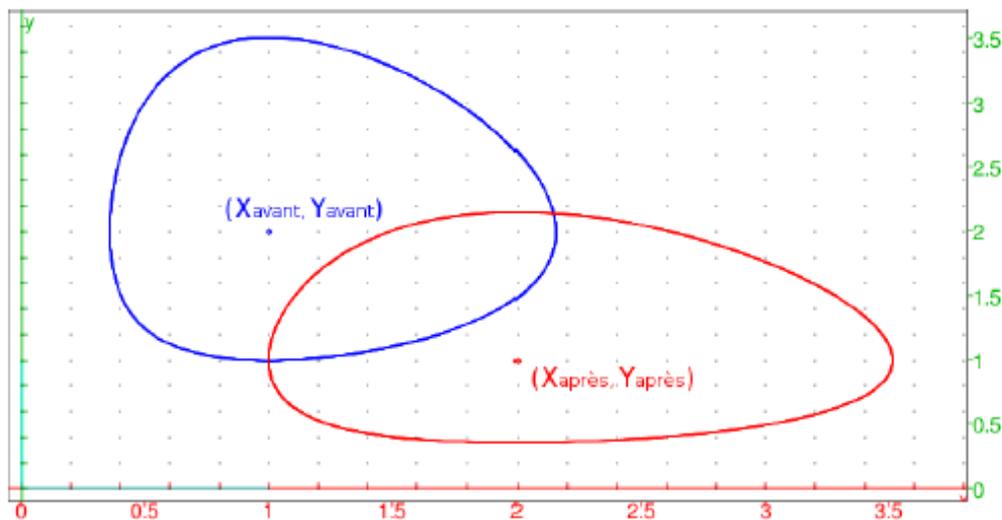
qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = \gamma xy - \delta xy \end{cases} \quad \text{où } \alpha = a - e, \beta = b, \gamma = c, \delta = d + f$$

Il s'agit des équations de Lotka-Volterra avec des coefficients différents. Observons comment est déplacé le nombre moyen de proies et de prédateurs. Notons  $X_{avant}$  le nombre moyen de proies avant le traitement, et  $X_{après}$  le nombre moyen de proies après. Mutatis mutandis pour les prédateurs. On a donc :

$$X_{après} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{d+f}{c} = X_{avant} + \frac{f}{c} \quad \text{et} \quad Y_{après} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a-e}{b} = Y_{avant} - \frac{e}{b}$$

En conséquence contrairement à l'effet souhaité, le nombre moyen de proies a augmenté, tandis que le nombre moyen de prédateurs a diminué. En d'autres termes les proies ont été favorisé au détriment des prédateurs. Ce résultat est parfois appelé "Troisième loi de Volterra". Ce phénomène a été observé en Amérique dans les années 1950 avec l'utilisation d'un insecticide (le DDT).



Portraits de phase (en ordonnée l'effectif des prédateurs et en abscisse l'effectif des proies) avant le traitement en bleu, après en rouge

Remarquons que si le traitement éliminait exclusivement les insectes (i.e.  $f = 0$ ), alors en moyenne le nombre d'insectes ne serait pas modifié par les pesticides, alors que les prédateurs auraient diminué !

En outre, si  $(x_0, y_0)$  est proche de  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ , alors les populations varient peu sans le traitement, alors qu'elles fluctueraient davantage après le traitement. Les pesticides (d'après ce modèle) peuvent créer des irrégularités sur les populations d'insectes et d'oiseaux.

**Remarque 2.2.1 :** *On aurait également pu imaginer que les proies étaient des sardines et les prédateurs des requins, et regarder de la même manière l'effet de la pêche sur ces populations. voir [8]*

## 2.3 Amélioration du modèle

Le modèle de Lotka-Volterra tire sa force de sa simplicité. Il permet de raisonner qualitativement mais n'est pas suffisamment sophistiqué pour faire des prévisions quantitatives. Une de ses limites est la croissance exponentielle des proies en l'absence de prédateurs. Cette hypothèse implique que la croissance de la population des prédateurs est d'autant plus forte que l'efficacité de la prédation est faible. En effet, la population moyenne de prédateurs est  $\frac{a}{b}$  où  $b$  est le coefficient de prédation.

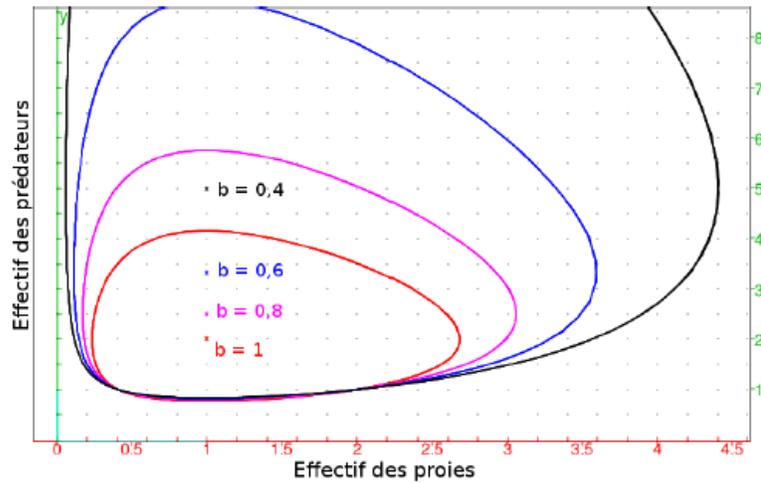


FIG. 2.2 – Effectif des prédateurs en fonction de l'effectif des proies pour différentes valeurs de  $b$  ( $x_0 = 2, y_0 = 1, a = 2, c = d = 1$ )

Il y a cependant un moyen d'éviter cette faiblesse, en limitant la croissance des proies. Nous supposons dans cette partie que les proies suivent une loi logistique. Les équations de Lotka-Volterra deviennent :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - kx^2(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \quad \text{où } k > 0$$

Bien entendu, ce système ne peut être résolu explicitement mais le théorème de Cauchy-Lipchitz s'applique tout aussi bien. La périodicité n'est cependant plus assurée.

Etudions les points d'équilibre. Posons  $G : (x, y) \rightarrow (ax - kx^2 - bxy, -dy + cxy)$ . Soient

des réels  $x$  et  $y$ .

$$G(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - kx - by) = 0 \\ y(d - cx) = 0 \end{cases} \text{ et } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ ou} \\ a - kx - by = 0 \text{ et } y = 0 \text{ ou} \\ a - kx - by = 0 \text{ et } d - cx = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \text{ ou} \\ (x, y) = (\frac{a}{k}, 0) \text{ ou} \\ (x, y) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - \frac{kd}{bc}) \end{cases}$$

D'où les trois positions d'équilibres.

**Remarque 2.3.1** : La troisième position d'équilibre a un sens physique uniquement si  $k < \frac{ac}{d}$ .

★  $(0, 0)$  est un point selle donc instable.

★  $(\frac{a}{k}, 0)$  est stable si  $k > \frac{ac}{d}$ , instable si non.

**Preuve.** Soit  $(x_0, y_0)$  une des trois positions d'équilibre. La jacobéenne de  $G$  au point  $(x_0, y_0)$  est :

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a - 2kx_0 & -bx_0 \\ by_0 & -d + cx_0 \end{pmatrix}$$

\* Ainsi, en  $(0, 0)$  les valeurs propres sont réelles et opposées, d'où le point selle.

\* En  $(\frac{a}{k}, 0)$  la matrice est triangulaire, et les valeurs propres sont  $-a < 0$  et  $-d + \frac{ca}{k}$ .

Or  $-d + \frac{ca}{k}$  est strictement négatif si et seulement si  $k > \frac{ac}{d}$ . Dans ce cas le point est stable

■

voir [8]

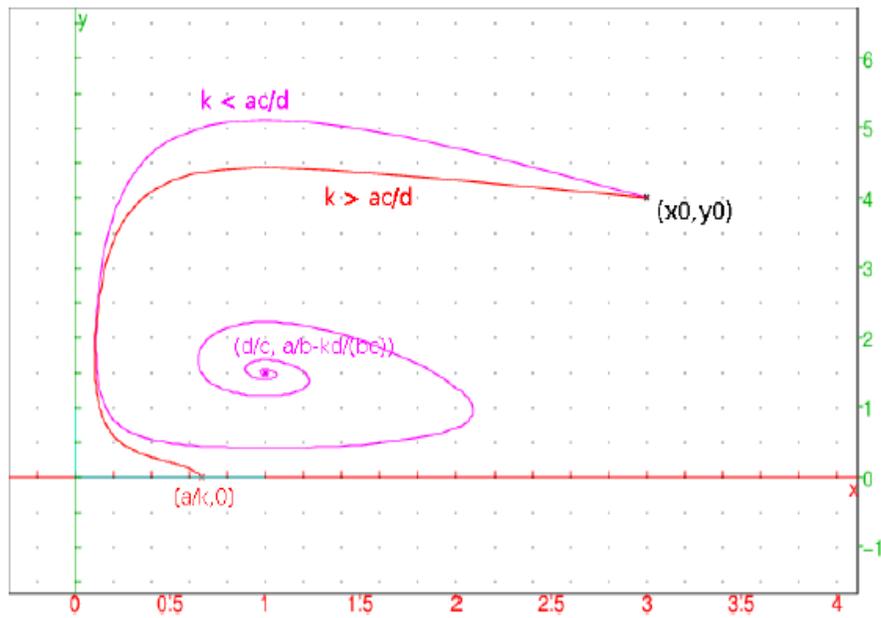


FIG. 2.3 – Effectif des prédateurs en fonction de l'effectif des proies ( $x_0 = 3, y_0 = 4, a = 2, c = d = 1$ ). Courbe magenta :  $k=0.5$  et la courbe en rouge à  $k=3$

# Chapitre 3

## Résolution numérique

Nous savons que la meilleure méthode d'approximation des équations différentielles ordinaires (EDO) est la méthode de Rung-Kutta ,et pour cela, nous allons se limiter à cette méthode

### 3.1 Méthode de Runge-kutta d'ordre 4 (1895)

Dans ce chapitre on va aborder la résolution numérique du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires (EDO) en utilisant une technique approximative on considère l'équation différentielle

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

Nous utilisons la méthode de Runge-kutta pour observer l'évolution des populations.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 consiste à calculer la suite  $(z_n) = (x_n, y_n)$  définie par récurrence de la manière suivante :

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où  $k_1 = F(t_n, y_n)$ ,  $k_2 = F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$ ,  $k_3 = F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$  et  $k_4 = F(t_n + h, y_n + hk_3)$

On a programmé cette méthode à l'aide du logiciel **MATLAB**, et l'on a appliqué au système 1.1 avec les paramètres suivantes :

$$a = 2; b = 1; c = 1; d = 1$$

Voici l'implémentation que nous avons fait :

```
f = @(t,x)[x(1)*(a-b*x(2)); x(2)*(c*x(1)-d)];
hold on
[t,x] = ode45(f,[1 100],[1.5 100]);
plot(t,x(:,1))
plot(t,x(:,2),'r')
hold off
axis([0 60 0 30])
```

Nous avons également utilisé la fonction ode45 ou il résolve les équations différentielles, cette fonction renvoie un vecteur colonne représentant la variable "T" (temps) et une matrice "y" dont les colonnes sont les solutions. On représente x et y en fonction de temps (T) par la fonction plot.

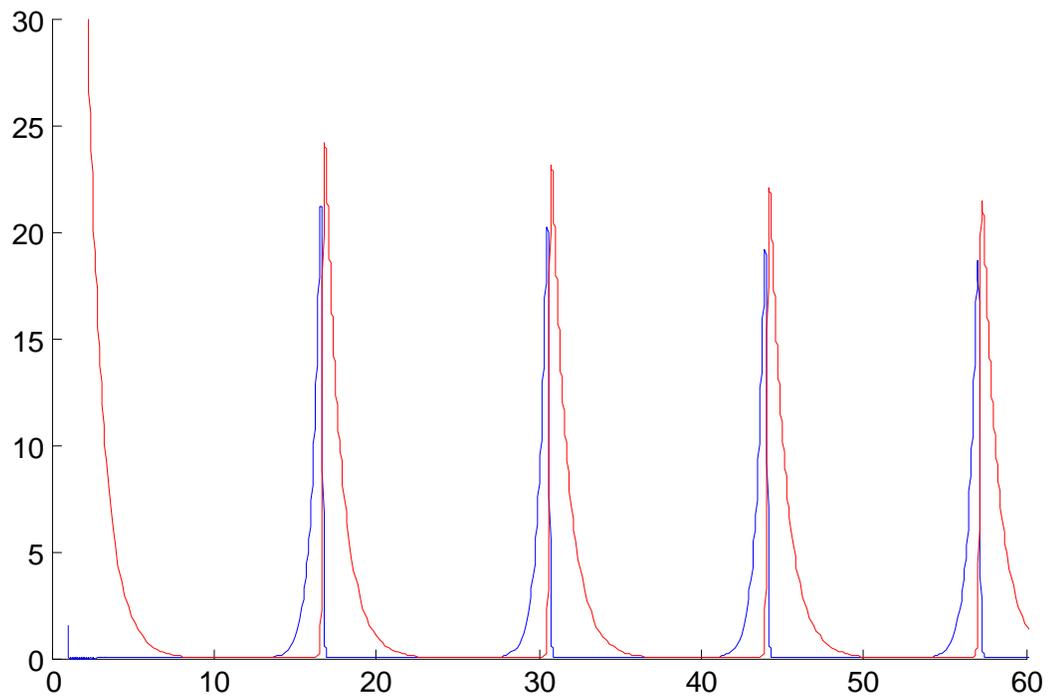


FIG. 3.1 – population de prois en bleu et des prédateurs on rouge au cours du temps

En conséquence, avec la méthode de Runge-kutta (d'ordre 4) les fonction  $x$  et  $y$  semblent bien périodique, et le graphe ressemble à un genre d'ellipse

## 3.2 Calcul numérique des points d'équilibre

On a programmé cette méthode à l'aide du logiciel **MATLAB**, et l'on a appliqué au système 1.1 avec les paramètres suivantes :

$$a = 2, b = c = d = 1$$

Pour calculer les points d'équilibre de ce système nous allons utiliser le programme suivant

```
syms x y
[x,y] = solve(x*(2-y), y*(x-1));[x,y]
```

Où

`syms` : désigne que les variables `x`, `y` utilisées sont de types symbolique

`solve` : c'est la fonction qui résout le système non linéaire

$$\begin{cases} x * (2 - y) = 0 \\ y * (x - 1) = 0 \end{cases}$$

# Conclusion

Le modèle de Lotka-Volterra nous permet d'observer l'évolution des proies et prédateurs, Il était donc utile pour nous d'explorer à la fois la théorie et la simulation en lien avec ce modèle .

Il resterait maintenant a généraliser ce modèle a un nombre supérieur d'espèces, en introduisant par exemple autre prédateur pour les ancienne proies et les prédateurs de ces proies

# Bibliographie

- [1] A.CHAMBERT-LOIR, S.FERMIGIER,V.MAILLOT. *Exercices de mathématique pour l'agrégation*. Masson, Paris, second edition (1997). Analyse3.
- [2] M.CROUZEIX,A,L.MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. masson, Paris (1984).
- [3] J.P.DEMAILLY.*Analyse numérique et équations différentielles*. PUG,Grenoble(1996)
- [4] Grégory.VIAL. *Le système proie-prédateur de volterra-Lotka*. université de Rennes 1
- [5] E.HAIRER,S.P.NORSETT,G.WANNER..*Solving ordinary differential equations*. I.Springer-verlage, berline, second edition(1993). Nostiff problems
- [6] M.W.HIRSCH,S.SMALE. *Differential equations, dynamical systems, and lineare algebra*. academic Press, NEW York-London(1974). Pure and applied mathematics, vol 60.
- [7] Josef Hofbauer et Kral Sigmund. *Evolutionary Game and population dynamics*, Part 1.Cambridge university Press, (1992)
- [8] Kévin TRIBUT et Yavan DURON.*Modèle proie-prédateur*. (2013)
- [9] P.Meier,A.Bonanomi, D.Messina. *Les équations de Lotka-Volterra pour les systèmes des populations*. (2006)
- [10] J.D.MURRAY.*Mathematical biology*. Springer-verlage, berline, seconde edition (1993)
- [11] Rosario,Toscano. *Commande et diagonistic,des systèmes dynamique*. Ellipses. edition. marketinge S.A.(2005)

- [12] <http://www.breves-de-maths.fr/histoire-du-modele-proie-predateur-ou-la-mathematique-des-poissons/feed/>