

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

SAMI BENAÏSSA

Titre :

Problèmes inverses et ses applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BERBICHE Mohamed	UMKB	Président
Dr. HASOUNA Houda	UMKB	Encadreur
Dr. SOUKEUR Abdesselem	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce travail à ma chère mère "Rachida", la lumière qui nous a guidés vers le
chemin de savoir.

A mon cher père "Laïd", pour leur sacrifice.

A mes chères sœurs : Imen.

A mes chers frères : Imad, Lahcen.

A toute ma famille "Ben Aissa".

A mes très chers amis : Hani, Housem, Anis, Larbi, Abd Enour, Mahdi, Nadjibe,
Mourad.

REMERCIEMENTS

*Avant tout, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage durant ces
langues années d'étude.*

*Mes sincères remerciements s'adressent à mon encadreur Dr. Houda Hasouna
qui
m'a proposé un sujet d'actualité sur les problèmes inverses et qui l'a accompagné par un
bon suivi et une très bonne orientation.*

*Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département de
Mathématique de l'université de Mohamed Khider, Biskra.*

*Je ne dois pas oublier de remercier les membres de jury qui ont accepté de juger ce
travail.*

Enfin, un grand merci à ma famille, en particulier mes parents.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Généralités sur les Problèmes Inverses	3
1.1 Problèmes Directs et Problèmes Inverses	3
1.2 Problèmes Bien Posés et Mal Posés	5
1.2.1 Exemple de Problèmes Bien Posés et Mal Posés :	6
2 Problèmes Inverses Linéaires et non Linéaires	10
2.1 Problèmes Inverses Linéaires	10
2.1.1 Méthode des Moindr carrés	10
2.1.2 La Méthode de Tikhonov	17
2.1.3 Le Principe de Morozov	19
2.1.4 La méthode de Landweber	21
2.2 Problèmes Inverses Non Linéaires	24
2.2.1 Les Trois Espaces Fondamentaux	24
2.2.2 Formulation par Moindres Carrés	27
3 Quelques Applications de Problèmes Inverses	29

3.1	Problèmes Inverses en Thermique	30
3.2	Problèmes Inverses en Hydrogéologie	32
3.3	Problèmes Inverses dans l'Exploration Sismique	33
3.4	L'Imagerie Médicale	34
	Conclusion	37
	Bibliographie	38
	Annexe B : Abréviations et Notations	41

Introduction

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres. La résolution du problème inverse passe donc en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique. On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de systèmes complexes pour lesquels on a accès qu'à un petit nombre de mesures, par exemple : la Terre en géophysique, les tissus organiques en imagerie médicale, l'Univers en

cosmologie, une salle de concert en acoustique architecturale . . .

Notre mémoire se compose de trois chapitres .**Dans le premier chapitre**, nous présentons la définition des problèmes inverses et directs, puis la définition d'un problème bien et mal posé. **Dans le deuxième chapitre**, nous introduisons une source importante de problèmes inverses

linéaires : nous introduisons des méthodes de discrétisation, conduisant à des problèmes de moindres carrés, ensuite nous présentons une autre méthode pour résoudre un problème inverse s'appelle méthode de Tikhonov et Morozov et on termine par une méthode itérative qui est la méthode de Landweber, et problème inverse non linéaires. **Dans le troisième chapitre**, nous introduisons quelques exemples d'applications (Problèmes inverses dans l'exploration sismique, hydrogéologie, thermique, l'imagerie médicale).

Chapitre 1

Généralités sur les Problèmes

Inverses

1.1 Problèmes Directs et Problèmes Inverses

On peut expliciter et reformuler les notions de problème direct et problème inverse à l'aide de l'artifice de présentation assez commode utilisant la notion de système. La résolution d'un problème mécanique ou thermique peut être vu sous l'angle du calcul de la réponse d (déplacement, contrainte, température,...) à des sollicitations X (forces, conditions aux limites, sources, conditions initiales...) demande un nombre large m d'itérations mais la stabilité nous force à garder m le plus petit possible.

Définition 1.1.1 (*Problème direct*)

Comme exemple la structure mécanique analysée) dépend habituellement de paramètres, symboliquement notés p : géométrie (la région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques....

Le problème direct consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations X et des paramètres p . Les équations de la physique donnent en général la réponse d comme

fonction implicite de X, p :

$$G(X, d; p) = 0.$$

La notation G symbolise les équations de la physique du problème considéré.

Dans la plupart des cas, le problème direct est bien posé.

Définition 1.1.2 (*Problème Inverse*)

Il s'agit généralement de situations où on est dans l'ignorance au moins partielle du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...) ne sont pas connues. En compensation, il faut disposer (en plus des entrées) d'informations, éventuellement partielles, sur la sortie d afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique « à l'envers » connaissant (partiellement) les sorties, on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement internes et échappant à la mesure directe.

L'analyse des nombreux problèmes de type inverse (au sens proposé ici) met en évidence leur caractère mal posé, au sens où au moins une des trois conditions énumérées plus haut ne sont pas vérifiées. En effet, en raison d'incertitudes expérimentale, des données d pourront être incompatibles avec l'entrée X (c'est-à-dire qu'aucun système ne parvient à produire d à partir de X), d'où l'absence de solution pour les données disponibles. De nombreux cas présentent également des possibilités de solutions multiples. Enfin, une caractéristique très répandue est la très grande sensibilité d'une solution par rapport à une perturbation des données.

Exemple 1.1.1 On s'intéresse à l'estimation de paramètres dans une équation aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{dans } \Omega \times]0; T[, \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma \times]0; T[. \end{array} \right.$$

C'est l'équation de la chaleur, y est la température, f est un terme source, a est la conductivité thermique, et g est le flux de chaleur (entrant ou sortant).

On peut utiliser la même équation pour modéliser un écoulement monophasique (comme du pétrole) : y est la pression, f représente les puits de pompage, a est la perméabilité du milieu, et $g = 0$ pour un milieu fermé. Le problème est le suivant : à partir de mesures de y en certains points et à certains instants, il faut identifier a .

Le problème direct est évidemment trivial, mais le problème inverse peut être des plus compliqué.

1.2 Problèmes Bien Posés et Mal Posés

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé (H.W. Engl et al. [2], 1994). Un problème est bien posé au sens de J. Hadamard [25] s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour toute donnée admissible, une solution existe.
2. Pour toute donnée admissible, la solution est unique.
3. La solution dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent. Ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, généralement les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voir les trois ensembles.

- Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.
- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).

- La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (information a priori).
- Le manque de continuité est sans doute le cas qui constitue le plus problématique. En particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données (réelles).

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit mal posé .

1.2.1 Exemple de Problèmes Bien Posés et Mal Posés :

Exemple 1.2.1 (*Problèmes bien posés*) :

On considère un domaine rectangulaire $]0, L[\times]0, h[$, sur lequel on cherche un champ scalaire u connu sur les bords du domaine et satisfaisant l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xy} = 0 \quad \text{dans }]0, L[\times]0, h[\\ u(x, 0) = f_{y0}(x) \\ u(x, h) = f_{yh}(x) \\ u(0, y) = f_{x0}(y) \\ u(L, y) = f_{xL}(y). \end{array} \right.$$

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont nécessairement de la forme :

$$u(x, y) = U(x) + V(y).$$

Si bien qu'aucune solution n'existe au problème posé si la donnée $f = (f_{x0}, f_{xL}, f_{y0}, f_{yh})$

ne satisfait pas les conditions suivantes :

$$f_{y_0}(x) - f_{y_h}(x) = C_y = \text{cste} \quad \text{et} \quad f_{x_0}(y) - f_{x_L}(y) = C_x = \text{cste}.$$

Il s'agit ici d'un problème hyperbolique de « propagation » dans lequel on tente d'imposer la valeur du champ sur tout le bord du domaine. En effet, en effectuant le changement de variables :

$$X = \frac{x+y}{2}, t = \frac{y-x}{2},$$

l'équation devient l'équation des ondes :

$$U_{,XX} - U_{,tt} = 0.$$

Physiquement, on conçoit que l'on ne peut imposer une valeur quelconque à l'amplitude de l'onde à un instant donné si l'on se donne son amplitude à l'instant initial. C'est le sens de la condition sur la donnée f .

Exemple 1.2.2 (Problèmes mal posés) :

L'équation de Fredholm de première espèce constitue un problème mal-posé. Considérons l'équation fonctionnelle suivante :

$$\int_a^b K(x;t)z(t)dt = u(x), \text{ pour } x \in (c, d),$$

Expression dans laquelle $z(t)$ est une fonction inconnue de l'espace F des fonctions continues sur (a, b) et $u(x)$ est une fonction connue de l'espace U . Mentionnons au passage que l'équation de convolution est un cas particulier de cette équation fonctionnelle $K(x, t)$ devenant $K(x, -t)$:

Ajoutons une hypothèse supplémentaire sur le noyau $K(x, t)$ qui est connu : c'est une fonction continue en x qui possède une dérivée partielle $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ également continue.

Montrons que le problème est mal-posé. Supposons que pour un second membre $u_1(x)$, nous

connaissions une solution exacte $z_1(t)$, on peut alors écrire :

$$\int_a^b K(x; t) z_1(t) dt = u_1(x).$$

Maintenant supposons que l'on connaisse un second membre approché peu différent de $u_1(x)$ dans la métrique L^2 , et on se propose de rechercher une solution voisine de $z_1(t)$:

Considérons dans L_2 , la solution

$$z_2(t) = z_1(t) + \Gamma \sin(\omega t).$$

Elle est solution de l'équation :

$$\Gamma \int_a^b K(x; t) \sin(\omega t) dt + u_1(x) = u_2(x).$$

Dans une métrique quadratique μ_u (U est l'espace des fonctions carrés sommables L^2), cette expression permet de calculer la distance de $|u_1(x) - u_2(x)|$:

$$\mu_u(u_1, u_2) = \left\{ \int_c^d |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_u(u_1, u_2) = |\Gamma| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x; t) \sin(\omega t) dt \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Prenant $\omega > |\Gamma|$, on peut trouver un $K(x, t)$ où, l'intégrale converge avec ω au dénominateur. Cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Calculons maintenant la distance des solutions correspondantes, dans la même métrique :

$$\begin{aligned} \mu_u(z_1, z_2) &= \left\{ \left[\int_c^d |z_1(t) - z_2(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = |\Gamma| \left[\int_a^b \sin^2(\omega t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ \mu_u(z_1, z_2) &= |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ \mu_u(z_1, z_2) &= |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{dt}{2} - \int_a^b \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ \mu_u(z_1, z_2) &= |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} + \frac{\sin(2\omega b)}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega a)}{4\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \mu_u(z_1, z_2) &= |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin[\omega(b-a)] \cos[\omega(b+a)] \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)).$$

On voit sans peine qu'on peut choisir les nombres ω et Γ tels que pour les écarts aussi petits que l'on veut de $u_1(x)$ et $u_2(x)$, l'écart des solutions respectives calculé par la formule (1.1) soit arbitrairement grand.

Si l'on se propose d'évaluer l'écart des solutions dans la métrique μ_z de la convergence uniforme (F peut être pris égal à L^∞) :

$$\mu_z(z_1, z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| \text{ pour } t \in (a, b).$$

On calcule alors,

$$\mu_z(z_1, z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| = \sup |\Gamma \sin(\omega t)| = |\Gamma| \text{ pour } t \in (a, b).$$

Choisissant ω et Γ tels que pour que les écarts de $u_1(x)$ et $u_2(x)$ soient aussi petits que l'on veut, l'écart des solutions peut être arbitrairement grand. Ici le problème n'a pas été modifié par le choix de la norme.

Chapitre 2

Problèmes Inverses Linéaires et non Linéaires

2.1 Problèmes Inverses Linéaires

On aborde dans cette partie de ce chapitre le principe de quelques introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes : la méthode moindr carré, la méthode de Tikhonov, la méthode de Morozov et on termine par une méthode itérative de Landweber.

2.1.1 Méthode des Moindr carrés

Dans cette subsection, nous étudions le cas où le second membre n'est pas dans l'image de \mathbf{A} puis nous allons appliquer la méthode de moindres carrés qui admet une solution unique si le second membre est dans $\mathbf{Im} \mathbf{A} \oplus \mathbf{Im} \mathbf{A}^\perp$, cette solution est stable puisque $\mathbf{Im} \mathbf{A}$ est fermé dans ce cas, ensuite nous étudions cette méthode dans le cas de dimension finie.

Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés :

Étant donné $z \in \mathbf{F}$, nous cherchons $x \in \mathbf{E}$ solution de :

$$A\hat{x} = \hat{z}. \quad (2.1)$$

Revenons dans ce cas particulier sur la discussion du **chapitre 1** concernant les problèmes bien et mal posés :

- L'opérateur \mathbf{A} peut ne pas être surjectif;
- Il peut ne pas être injectif;
- Si un inverse existe, il peut ne pas être continu.

Théorème 2.1.1 *Soit $\mathbf{A} \in L(E, F)$, \mathbf{E} et \mathbf{F} deux espaces de Hilbert.*

Supposons que \mathbf{A} soit injectif, et notons \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{Im} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{E} \text{ linverse de } \mathbf{A}.$$

On a :

$$\mathbf{Im} \mathbf{A} \text{ fermé} \iff \mathbf{A}^{-1} \text{ est continu.}$$

Preuve.

\Rightarrow Dans ce cas $\mathbf{W} = \mathbf{Im} \mathbf{A}$ est un espace de Hilbert (il est immédiat que \mathbf{W} est un espace préhilbertien, et il est complet parce qu'il est fermé).

L'opérateur $\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{W}$, $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ pour $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$ est un opérateur linéaire continu et bijectif.

Une conséquence classique du théorème de l'application ouverte est que $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ est continu.

Il en est donc de même pour \mathbf{A}^{-1} .

\Leftarrow Puisque \mathbf{A}^{-1} est continu, et que $\mathbf{E} = \mathbf{Im} \mathbf{A}^{-1}$ est fermé, $\mathbf{Im} \mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1}(\mathbf{E})$ est fermé dans \mathbf{F} . ■

Proposition 2.1.1

- 1) L'opérateur \mathbf{A} pourra ou non être injectif, mais la situation générale sera que $\mathbf{Im} \mathbf{A}$ n'est pas fermée dans le cas où \mathbf{A} est compact.

- 2) Le problème (2.1) n'a de solution que pour $z \in \mathbf{Im} \mathbf{A}$.
- 3) Si $z \in \mathbf{Im} \mathbf{A}$, le système (2.1) n'a pas de solution au sens strict alors on cherche une solution au sens de moindres carrés. Nous allons voir que ce problème est équivalent à une équation linéaire, mais pour un opérateur

$$\min_{x \in E} \frac{1}{2} \|Ax - z\|_F^2. \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.1 *La méthode la plus classique consiste à chercher la solution des moindres carrés, en résolvant l'équation (2.2).*

Théorème 2.1.2 *Soit $\mathbf{A} \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, \mathbf{E}, \mathbf{F} deux espaces de Hilbert, et soit $\hat{z} \in \mathbf{F}$. Un élément $x \in \mathbf{E}$ est une solution de (2.2) si et seulement si :*

$$A^* A \hat{x} = A^* \hat{z}. \quad (2.3)$$

Cette équation est dit équation normale.

Preuve.

On peut obtenir facilement (2.3) en calculant le gradient de la fonctionnelle $x \rightarrow \frac{1}{2} \|Ax - z\|_F^2$.

Nous présenterons plutôt l'argument élémentaire suivant, emprunté à Björck [2]:

\Rightarrow Soit x vérifiant (2.3). On a pour tout $y \in \mathbf{E}$:

$$\hat{z} - Ay = \hat{z} - Ax + A(x - y).$$

L'équation normale (2.3) implique que les deux termes de la somme sont orthogonaux (le résidu $\hat{z} - Ax$ est orthogonal à l'image de \mathbf{A}).

Le théorème de Pythagore implique :

$$\|\hat{z} - Ay\|_F^2 = \|\hat{z} - Ax\|_F^2 + \|A(x - y)\|_F^2 \geq \|\hat{z} - Ax\|_F^2,$$

x est donc bien solution de (2.2).

\Leftarrow Soit x tel que $\mathbf{A}^*(\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}x) = \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Choisissons $\mathbf{y} = x + \varepsilon \mathbf{w}$, avec $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$\|\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}\mathbf{y}\|_F^2 = (\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}\mathbf{y}, \widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}\mathbf{y}) = \|\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}x\|_F^2 - 2\varepsilon (\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}x; \mathbf{w}) + \|\mathbf{A}\mathbf{w}\|_F^2 < \|\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{A}x\|_F^2.$$

Si ε est suffisamment petit, x n'est donc pas solution de (2.2). ■

Remarque 2.1.2 Dans la proposition suivante la condition que $\widehat{\mathbf{z}} \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$ est toujours vérifiée si $\text{Im}(A)$ est fermé.

1. Il existe une solution unique du problème (2.2) si et seulement si l'opérateur \mathbf{A} est injectif.
2. L'équation (2.2) admet une solution si et seulement si $\widehat{\mathbf{z}} \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$.
3. Si $\widehat{\mathbf{z}} \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$, l'ensemble \mathbf{S} des solutions de (2.3) est un convexe fermé non vide de \mathbf{E} .
4. Si $\widehat{\mathbf{z}} \in \text{Im } A \oplus \text{Im } A^\perp$, le problème (2.2) admet une unique solution de norme minimale.

Preuve.

1. Soit $\ker(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \ker(A)$ parce que $\forall x \in E$

$$\begin{aligned} x \in \ker(A^*A) &\Rightarrow A^*Ax = 0 \\ &\Rightarrow (A^*Ax, x)_F = 0 \\ &\Rightarrow (Ax, Ax)_F = 0 \\ &\Rightarrow \|Ax\|_F^2 = 0 \Rightarrow x \in \ker A, \end{aligned}$$

donc \mathbf{A} et $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sont injectifs en même temps. Supposons que le problème (2.2) admet deux solutions x_1 et \widehat{x} alors,

$$\begin{aligned}\widehat{y} &= A^* A \widehat{x} \text{ et } \widehat{y} = A^* A x_1 \Rightarrow A^* A (\widehat{x} - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow \widehat{x} - x_1 = 0 \text{ (} A^* A \text{ et injectif)} \\ &\Rightarrow \widehat{x} = x_1 \text{ d'où le résultat.}\end{aligned}$$

2. Soit $x \in E$ solution de (2.3) donc :

$$Ax - \widehat{z} \in \ker A^* \text{ et } \ker A^* = \text{Im } A^\perp,$$

(d'après proposition d'Adjoint d'un opérateur), on a :

$$\widehat{z} = Ax + (\widehat{z} - Ax) \text{ telque } Ax \in \text{Im } A \text{ et } \widehat{z} - Ax \in \text{Im } A^\perp \text{ alors, } \widehat{z} \in \text{Im } A + \text{Im } A^\perp.$$

Inversement, on a : $\widehat{z} \in \text{Im } A + \text{Im } A^\perp$ on pose, $z = z_1 + z_2$; $z_1 \in \text{Im } A$ et $z_2 \in \text{Im } A^\perp$ donc :

il existe $x \in E$. Posons $z_1 = Ax$, il est évident que $A^* z_1 = A^* Ax$ et on a :

$A^* z_2 = 0$ car $z_2 \in \ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$ alors, $A\widehat{z} = A^* Ax$ et \widehat{z} est une solution de (2.3).

3. D'après le point 2, l'ensemble des solution est non vide, c'est un espace affine, c'est donc en particulier un convexe, et il est fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{A * \widehat{z}\}$ par l'opérateur continu $A^* A$. Ceci prouve que $S = x_0 + \ker A$, où x_0 est une solution quelconque de (2.3).

4. Notons par S l'ensemble de solutions de (2.2), nous voulons chercher une solution de norme minimale de ce problème et danc cela revient à résoudre le problème suivant :

$$\min_{x \in S} \|x\|_E, \quad S = \{x \in E, \|Ax - z\|_F \text{ minimal}\},$$

c'est-à-dire à projeter l'origine sur l'ensemble \mathbf{S} . D'après la proposition précédente, \mathbf{S} est un convexe fermé non vide de \mathbf{E} , et d'après le théorème de projection, \mathbf{S} possède un élément unique de norme minimale, qui note par $\widehat{\mathbf{x}}$.

■

Cas de la dimension finie

Si \mathbf{E} et \mathbf{F} sont deux espace de dimension finie, on peut supposer que $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^m$. Dans ce cas, \mathbf{A} s'identifie à une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nous supposerons en général que $m > n$, c'est-à-dire que le problème est sur-déterminé. On peut préciser, dans ce cas, les résultats du paragraphe précédent.

Proposition 2.1.2 *Quand \mathbf{E} et \mathbf{F} sont deux espaces de dimension finie, le problème de moindres carrés admet toujours au moins une solution.*

Cette solution est unique si, et seulement si, \mathbf{A} est de rang maximal (de rang n si le problème est sur-déterminé).

Preuve. Il s'agit d'une simple application de la remarque (2.1), puisque l'image de \mathbf{A} est toujours fermée. \mathbf{A} est injective si et seulement si il est de rang maximal (quand $m > n$). On peut également donner une preuve directe, n'utilisant pas les résultats du paragraphe précédent. Nous montrons que les équations normales ont toujours au moins une solution, c'es-à-dire que $\mathbf{A}^t \widehat{\mathbf{z}} \in \text{Im}(\mathbf{A}^t)$. Pour cela, commençons par remarquer que $\text{Im} \mathbf{A}^t = \text{Im}(\mathbf{A}^t \mathbf{A})$. En effet, $\text{Im}(\mathbf{A}^t \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^\perp = \ker(\mathbf{A})^\perp = \text{Im} \mathbf{A}^t$. Il suffit donc de vérifier que $\mathbf{A}^t \widehat{\mathbf{z}} \in \ker(\mathbf{A})^\perp$, or c'est immédiat, puisque, si $\mathbf{x} \in \ker(\mathbf{A})^\perp$, $(\mathbf{A}^t \widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{x}) = (\widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{A} \mathbf{x}) = 0$. ■

Proposition 2.1.3 *Sous l'hypothèse que \mathbf{A} est de rang n , la matrice des équations normales $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ est définie positive.*

Preuve. Il est facile de voir que $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ est semi-définie positive (c'est en fait toujours vrai) :

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A}x, x) = (\mathbf{A}x, \mathbf{A}x) = \|x\|^2 \geq 0.$$

De plus, quand \mathbf{A} est de rang n , nous avons vu (au remarque (2.1)) que la matrice (carrée) $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ est injective, donc inversible. Elle est donc définie positive. ■

Exemple 2.1.1 (*Régression linéaire*).

Nous cherchons à faire passer une droite $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \alpha + \beta \mathbf{t}$ par un ensemble de points expérimentaux $(\mathbf{t}_i, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Cela conduit au système sur-déterminé

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_m \end{pmatrix}$$

L'équation normale

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i t_i \end{pmatrix},$$

a pour solution

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^m y_i t_i - \bar{m} \bar{y} \bar{t}}{\sum_{i=1}^m t_i^2 - m \bar{t}^2}, \quad \alpha = \bar{y} - \beta \bar{t},$$

où nous avons noté $\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^m y_i / m$ et $\bar{\mathbf{t}} = \sum_{i=1}^m t_i / m$.

Noter que la droite obtenue passe par les moyennes $(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{y}})$.

Remarque 2.1.3 Dans cette partie $K : X \rightarrow Y$, désigne un opérateur linéaire et borné défini entre deux espaces de Hilbert X et Y .

2.1.2 La Méthode de Tikhonov

Cette méthode de régularisation consiste à résoudre le système linéaire

$$Kx = y, \tag{2.4}$$

qui revient à minimiser

$$\|Kx - y\|_Y,$$

tels que $x \in X, y \in Y$.

Si X est de dimension infinie et l'opérateur K est compact, ce problème de minimisation est aussi mal-posé, voir le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *Soient $K : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $y \in Y$. Il existe $\hat{x} \in X$ tel que $\|K\hat{x} - y\|_Y \leq \|Kx - y\|_Y$, pour tout $x \in X$ si et seulement si $\hat{x} \in X$. est une solution de l'équation :*

$$K^*K\hat{x} = K^*y. \tag{2.5}$$

Maintenant on se donne $K : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $y \in Y$ et on veut déterminer $x \in X$, qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov :

$$J_\alpha(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2. \tag{2.6}$$

Et on a le théorème suivant :

Théorème 2.1.3 *Soient $K : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $\alpha > 0$: alors La fonctionnelle de Tikhonov J_α admet un seul minimum $x^\alpha \in X$: Ce minimum est la solution unique de l'équation*

$$\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = Ky. \tag{2.7}$$

La solution de l'équation (2.7) peut être écrite sous la forme $x^\alpha = R_\alpha y$, tel que

$$R_\alpha = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* : Y \rightarrow X. \quad (2.8)$$

En choisissant un système singulier (μ_j, x_j, y_j) pour l'opérateur compact K , on voit que $R_\alpha y$ admet la représentation suivante :

$$R_\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (y, y_j) x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (y, y_j) x_j \quad , \quad y \in Y \quad (2.9)$$

avec : $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$ Cette fonction q est appelée la fonction filtre.

Théorème 2.1.4 Soit $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact et $\alpha > 0$:

a) L'opérateur $\alpha I + K^*K$ admet un inverse borné.

L'opérateur $R_\alpha : Y \rightarrow X$ défini par (2.8) forme une stratégie de régularisation avec

$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. On l'appelle la méthode de régularisation de Tikhonov. $R_\alpha y^\alpha$ est déterminé comme la solution unique $x^{\alpha, \delta} \in X$ de l'équation du second espèce

$$\alpha x^{\alpha, \delta} + K^*K x^{\alpha, \delta} = K^*y^\delta, \quad (2.10)$$

chaque choix $\alpha(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$ avec $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$ est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in \text{Im}(K^*)$ avec $\|z\| \leq E$: On choisit $\alpha(\delta) = \frac{\delta}{E}$ pour $c > 0$, alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) \sqrt{\delta E}. \quad (2.11)$$

c) Soit $x = K^*Kz \in \text{Im}(K^*K)$ avec $\|z\| \leq E$. Le choix $\alpha(\delta) = c \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2}{3}}$, pour $c > 0$, donne l'estimation de l'erreur :

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}. \quad (2.12)$$

Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour

$$\|(K^*)^{-1}x\| \leq E \text{ où } \|(K^*K)^{-1}x\| \leq E.$$

*Les valeurs propres de K tendent vers zéro et les valeurs propres de $\alpha I + K^*K$ sont bornées loines de zéro par $\alpha > 0$. Du théorème précédent, on observe que α a été choisit d'une façon à dépendre de δ et qu'il converge vers zéro quand δ tend vers zéro mais pas plus vite que δ^2 .*

Théorème 2.1.5 *Soit $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact tel que l'image $\text{Im}(K)$ est de dimension infinie. De plus, soit $x \in X$, et on assume qu'il existe une fonction continue $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ avec $\alpha(0) = 0$, telle que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \delta^{-\frac{2}{3}} = 0$$

pour tout $y^\delta \in Y$ avec $\|y^\delta - Kx\| \leq \delta$ où $x^{\alpha(\delta), \delta} \in X$ résoud (2.10). Alors $x = 0$.

La démonstration détaillée de ce résultat se trouve dans le livre de Kirsch [13].

Ce résultat montre que la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas optimale pour des hypothèses plus fortes sur la solution x .

Le choix de α dans le théorème (2.5) est mis à priori, c'est-à-dire avant de commencer le calcul de x^α en résolvant le problème des moindres carrés.

2.1.3 Le Principe de Morozov

On donne ici un exemple de méthode de choix à posteriori du paramètre de régularisation.

On expose la plus classique de celles-ci "the discrepancy principle" de Morozov [10], ou le principe de décalage de Morozov.

D'après kirsch [13], on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov.

On assume que $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact et injectif défini entre les deux espaces de Hilbert X et Y avec une image dense $\text{Im}(K) \subset Y$.

En étudie encore l'équation $Kx = y$, $y \in Y$.

On calcule maintenant le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, tel que la solution de Tikhonov correspondante est la solution de l'équation (2.10) et elle est le minimum de (2.5) qui satisfait à l'équation

$$\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\| = \delta.$$

On note que le choix de α par "the discrepancy principle" guarentie d'une part que l'erreur est δ , d'autre part, α est très petit.

Théorème 2.1.6

Soit $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire et compact avec une image dense dans Y

Soit $Kx = y$, $x \in X$, $y \in Y$, $y^\delta \in Y$ tels que :

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta < \|y^\delta\|.$$

Soit $x^{\alpha(\delta)}$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\|Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\| = \delta$ pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$

Alors :

a) $x^{\alpha(\delta),\delta} \rightarrow x$ pour $\delta \rightarrow 0$. Donc "the discrepancy principle" est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in K^*(Y)$ avec $\|z\| \leq E$; alors :

$$\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \leq 2\sqrt{\delta E}.$$

Pour cela "the discrepancy principle" est une stratégie de régularisation optimale sous la condition $\|(K^*)^{-1}x\| \leq E$.

La preuve de ce théorème est dans [13]. p.48.

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction monotone :

$$\phi(\alpha) = \|Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\|^2 - \delta^2,$$

pour δ fixé. Ce n'est pas nécessaire de satisfaire l'équation $\|Kx^{\alpha,\delta} - y^\delta\| = \delta$ exactement, une inclusion de la forme

$$c_1\delta \leq \|Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\| \leq c_2\delta,$$

est sur sante pour prouver les assertions du théorème précédent. Dans le théorème suivant, on prouve que l'ordre de convergence $O(\sqrt{\delta})$ est meilleur pour le principe de décalage de Morozov.

Théorème 2.1.7 *Soit K un opérateur compact et soit $\alpha(\delta)$ choisit par le principe de décalage. On assume que pour tout $x \in \text{Im}(K^*K)$, $y = Kx \neq 0$ et pour toute suite $\delta_n \rightarrow 0$ et $y^{\delta_n} \in Y$, tel que :*

$$\|y - y^{\delta_n}\| \leq \delta_n \text{ et } \|y^{\delta_n}\| > \delta_n \text{ pour tout } n$$

La solution de Tikhonov correspondante $x^n = x^{\alpha(\delta_n),\delta_n}$, converge vers x plus vite que $\sqrt{\delta_n}$ vers zéro, donc

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \|x^n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

alors l'image $\text{Im}(K)$ est de dimension fini.

Des efforts énormes sont faits pour modifier le principe de décalage original. Voir [15], [26], [31] et d'autres.

2.1.4 La méthode de Landweber

Les méthodes itératives sont des méthodes qui construisent une suite de solutions approchées qui (dans le cas non bruité) convergent vers la solution désirée. Dans le contexte

des problèmes inverses la situation est plus compliquée : en présence de bruit, la suite construite par la méthode itérative ne converge pas, en général, vers une solution du problème de départ. Il est, encore une fois, nécessaire de régulariser le processus itératif, et c'est l'indice d'itération lui-même qui joue le rôle de paramètre de régularisation. En d'autres termes, il convient d'arrêter les itérations plus tôt qu'on ne le ferait dans un cas non bruité.

On examine dans ce paragraphe que la plus simple des méthodes itératives : la méthode de Landweber [14], qui a pour principal avantage de se prêter à une analyse simple. Malheureusement, elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique, d'autant plus que des méthodes beaucoup plus performantes existent, et surtout la méthode du gradient conjugué et ses variantes. Cette dernière méthode est la plus employée. Dans le contexte des problèmes mal-posés, un exposé accessible se trouve dans le livre de Kirch [15], des exposés plus complets sont dans [15], [17] (cette dernière référence est consacrée entièrement à l'analyse des méthodes de type gradient conjugué pour les problèmes mal-posés).

Landweber [14], Fridman [16] et Bialy [18] ont proposé de récrire l'équation $Kx = y$ sous la forme :

$$x = (I - aK^*K)x + aK^*y,$$

pour $a > 0$. Le schéma itérative de cette équation est le suivant :

$$x^0 = 0 \text{ et } x^m = (I - aK^*K)x^{m-1} + aK^*y, \quad (2.13)$$

pour $m = 1, 2, \dots$

Lemme 2.1.2 *Soit la suite (x^m) définie par (2.13) et on définit la fonctionnelle $\Psi : X \rightarrow R$ par :*

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \|Kx - y\|^2, \quad x \in X$$

Alors Ψ est différentiable au sens de Fréchet pour tout $z \in X$ et

$$\Psi'(z)x = \operatorname{Re}(Kz - y, Kx) = \operatorname{Re}(K^*(Kz - y), x), x \in X. \quad (2.14)$$

La fonctionnelle linéaire $\Psi'(z)$ peut être identifiée avec $K^*(Kz - y) \in X$ sur l'espace de Hilbert X : C'est facile de voir la forme explicite $x^m = R_m y$, où l'opérateur $R_m : Y \rightarrow X$ est défini par :

$$R_m = a \sum_{k=0}^{m-1} (I - aK^*K)^k K^*, m = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Théorème 2.1.8 a) Soit $K : X \rightarrow Y$, un opérateur compact et soit $0 < a < \frac{1}{\|K\|^2}$. On définit les opérateurs linéaires et bornés $R_m : Y \rightarrow X$ par (2.15). Ces opérateurs définissent une stratégie de régularization de paramètre $\alpha = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$ et $\|R_m\| \leq \sqrt{am}$. La suite $x^{m,\delta} = R_m y^\delta$ est calculée par les itérations suivantes :

$$x^{0,\delta} = 0 \text{ et } x^{m,\delta} = (I - aK^*K)x^{m-1,\delta} + aK^*y^\delta,$$

pour $m = 1, 2, \dots$. Toute stratégie $m(\delta) \rightarrow \infty (\delta \rightarrow 0)$ avec $\delta^2 m(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$ est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in \operatorname{Im}(K)$ avec $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \leq m(\delta) \leq c_2 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^{m,\delta} - x\| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}},$$

avec c_3 qui dépend de c_1, c_2 et a . Pour cela, l'itération de Landweber est aussi optimale pour $\|(K^*K)^{-1}x\| \leq E$ on remarque que cette méthode donne une haute précision .

2.2 Problèmes Inverses Non Linéaires

Nous abordons maintenant les problèmes inverses non-linéaires, et nous nous concentrerons sur les méthodes numériques, et tout particulièrement sur la formulation aux moindres carrés.

2.2.1 Les Trois Espaces Fondamentaux

Pour donner une formulation abstraite des problèmes que nous considérerons dans la suite de ce partie, nous allons introduire 3 espaces de Hilbert, ainsi que des applications entre ces espaces. Dans toutes les applications que nous considérerons par la suite, ces espaces seront tous de dimension finie.

Il nous paraît toute fois utile de donner les définitions dans ce cadre plus général.

- l'espace des modèles (ou paramètres) M ;
- l'espace d'état U ;
- l'espace des données (ou observations) D ;

Comme nous l'avons signalé, l'introduction de l'espace U permet de rendre explicite la dépendance entre le paramètre et les données. Par contre, l'existence de l'état ne dispense pas d'introduire l'observation, puisqu'il est en général non mesurable.

Deux application mettent en évidence les relations entre ces 3 espaces :

L'équation d'état relie de façon implicite le paramètre et l'état (tous deux peuvent évidemment être des vecteurs). Nous l'écrivons

$$F(a, u) = 0, \quad a \in M, \quad u \in U, \quad F(a, u) \in Z, \quad (2.16)$$

où Z est un autre espace de Hilbert. Nous supposons qu'il existe un sous-espace $M_{ad} \subset M$ telque pour tout $a \in M_{ad}$, F définit localement un état unique $u = u_a$. Cela était le cas pour tous les exemples du chapitre 3 avec $M_{ad} = M$, puisque l'application F était linéaire

par rapport à u . Il sera pratique de noter

$$u = S(a) = u_a, \quad (2.17)$$

la solution de l'équation d'état (2.16). La première égalité sera commode quand nous voudrons opérer sur cette solution (la dériver par exemple), alors que la seconde est un abus de notation suggestif.

L'équation d'observation extrait de l'état la partie correspondant aux mesures. Cela sera souvent une injection, rarement l'identité (sauf dans des exemples purement pédagogiques). Elle s'écrit

$$d = Hu; \quad u \in U. \quad (2.18)$$

Nous avons fait l'hypothèse simplificatrice que l'observation est un opérateur linéaire, indépendant du paramètre. L'extension à une situation plus générale n'est pas difficile, et est laissée au lecteur.

Si nous injectons la solution de (2.16) dans (2.18), nous obtenons l'application qui relie le paramètre à l'observation. Nous la noterons

$$d = \Phi(a) = H(S(a)) = H(u_a).$$

Le problème inverse est alors, étant donnée une observation d_{obs} , de résoudre l'équation :

$$\Phi(a) = d_{obs}. \quad (2.19)$$

Donnons maintenant quelques exemples pour illustrer les concepts précédents.

Exemple 2.2.1 *Nous considérons le problème aux limites en une dimension d'espace :*

$$\begin{cases} -bu''(x) + cu'(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, u'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans ce cas, le paramètre est le couple $m = (b, c)$ et $M = \mathbb{R}^2$. Le théorème de Lax–Milgram montre que l'on peut prendre $M_{ad} = \{f(b, c) \in M, b > 0\}$, et qu'alors un choix naturel pour U est $U = H^1(0, 1)$.

Nous pouvons envisager plusieurs possibilités pour l'observation :

- i) On suppose que l'on mesure l'état u en tout point de l'intervalle $]0, 1[$. L'espace D est alors $L^2(0, 1)$, et d_{obs} est une fonction définie sur $]0, 1[$. Dans ce cas le problème inverse est (très) sur déterminé. On a ici $Hu = u$.
- ii) Inversement, on peut supposer que l'on ne mesure u qu'à l'extrémité droite de l'intervalle. Dans ce cas, $D = \mathbb{R}$, et d_{obs} est un nombre. Le problème est ici sous-déterminé. Cette fois, nous avons $Hu = u(1)$.
- iii) Un cas intermédiaire est celui où l'on mesure u non-seulement à l'extrémité de l'intervalle, mais aussi en un point intérieur. Pour fixer les idées, nous supposons que u est connu en $\frac{1}{2}$.

L'espace D est ici $D = \mathbb{R}^2$, et d_{obs} est un couple, et $Hu = (u(\frac{1}{2}), u(1))$. Dans ce cas, il y a exactement autant de données que d'inconnues. Cela ne veut pas dire que le problème soit plus simple, puisqu'il faut toujours prendre en compte le caractère mal-posé du problème inverse.

Dans les trois cas, l'application Φ est définie par (rappelons que $u(b, c)$ désigne la solution de l'équation d'état (2.20) correspondant aux paramètres (b, c)) :

- i) $\Phi(b, c) = u(b, c)$ (fonction définie sur $]0, 1[$) ;
- ii) $\Phi(b, c) = u_{(b,c)}(1)$;
- iii) $\Phi(b, c) = (u_{(b,c)}(\frac{1}{2}), u_{(b,c)}(1))$.

Dans les deux derniers cas, l'application F va d'un espace de dimension finie dans un autre, mais sa définition fait intervenir la solution du problème aux limites (2.20).

2.2.2 Formulation par Moindres Carrés

Ce que nous avons dit précédemment laisse à penser que l'équation (2.18) peut ne pas avoir de solution, et que même si elle en a, l'application inverse n'est pas nécessairement continue. Nous allons donc introduire une formulation, à priori plus faible, qui a fait la preuve de son utilité. Nous remplaçons l'équation (2.18) par le problème de minimisation suivant :

$$\text{minimiser } J(m) = \frac{1}{2} \|\Phi(m) - d_{obs}\|_D^2 \text{ pour } m \in M_{ad}.$$

Cette formulation s'appelle une méthode de moindres carrés, et J est la fonction coût, ou fonctionnelle d'erreur (la littérature anglo-saxonne dira : output least squares method, for the cost function, or functional, J). Il est important de comprendre comment \hat{n} fonctionne \hat{z} cette fonctionnelle. L'observation étant donnée une fois pour toute, pour évaluer la fonctionnelle J en un paramètre p , on commence par résoudre l'équation d'état (2.15), puis l'équation d'observation (2.18), et l'on compare l'observation simulée à celle mesurée.

Remarque 2.2.1 (*L'erreur d'équation*). *Il existe une autre façon de reformuler un problème inverse comme un problème d'optimisation. Il consiste à remplacer l'état par l'observation (quitte à interpoler cette dernière). Cela conduit à une fonctionnelle*

$$J_{eqn}(m, d) = \frac{1}{2} \left\| F(p, \tilde{d}) \right\|^2,$$

où \tilde{d} est un interpolé de d . Comme elle est quadratique par rapport aux paramètres, cette méthode est très populaire auprès des physiciens et des ingénieurs. Son principal désavantage est de nécessiter d'interpoler l'observation.

Nous allons maintenant revenir sur les exemples du paragraphe (2.15), et proposer pour chacun d'eux une formulation en terme de minimisation de fonctionnelle.

Difficultés des problèmes inverses

La difficulté des problèmes inverses provient d'une combinaison de facteurs.

- Comme nous l'avons mentionné au paragraphe (2.16), la fonction coût est en général non convexe. Cela conduit à l'existence de minima locaux, et la méthode d'optimisation peut converger vers n'importe lequel de ces minima.
- Le problème inverse peut-être sous-déterminé, du fait d'un manque de données (qui est intrinsèque au problème). Cela conduit à l'existence de plusieurs solutions, autrement dit de plusieurs paramètres produisant les mêmes observations.
- Le manque de continuité produit une instabilité. Même si l'on peut (en théorie) résoudre le problème pour des observations exactes, cela ne veut pas dire que l'on pourra le résoudre pour des données bruitées, même si le niveau de bruit est faible.
- Une difficulté de nature différente est liée au coût de la résolution, en supposant que l'on puisse s'affranchir des obstacles précédents. En effet, la simple évaluation de la fonction coût demande la résolution de l'équation d'état, c'est-à-dire en général d'une (ou de plusieurs) équation aux dérivées partielles.

Chapitre 3

Quelques Applications de Problèmes Inverses

Nous présentons dans ce chapitre quelques exemples concrets z de problèmes inverses, qui interviennent dans les sciences de l'ingénieur. Cette liste est loin d'être exhaustive (voir les références à la fin de ce chapitre pour d'autres applications).

Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important nous pouvons citer :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X, ...);
- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir ...);
- l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques).

3.1 Problèmes Inverses en Thermique

Pour déterminer la répartition de la température dans un matériau inhomogène occupant un domaine (ouvert connexe) Ω de \mathbb{R}^3 on écrit tout d'abord la conservation de l'énergie :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) = f(x, y, z) \text{ dans } \Omega, \quad (3.1)$$

où T est la température, ρ la densité du fluide, c la chaleur spécifique, \vec{q} représente un flux de chaleur et f une source volumique. La loi de Fourier relie ensuite le flux de chaleur au gradient de température :

$$\vec{q} = -K \operatorname{grad}(T),$$

où K est la conductivité thermique (qui peut être un tenseur, et dépend de la position). En éliminant \vec{q} , on obtient l'équation de la chaleur en milieu hétérogène :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(T)) = f \text{ dans } \Omega. \quad (3.2)$$

Cette équation peut être complétée par des conditions aux limites sur le bord de l'ouvert Ω , et une condition initiale.

Le problème direct est de déterminer T connaissant les coefficients physiques ρ , c et K , ainsi que la source de chaleur f . Ce problème est bien connu, tant du point de vue théorique (existence et unicité de la solution) que du point de vue numérique. Plusieurs problèmes inverses peuvent être posés :

- étant donné une mesure de la température à un instant $t_f >$, déterminer la température initiale. ;
- étant donné une mesure (partielle) de la température, déterminer certains des coefficients de l'équation. Notons que le premier de ces problèmes est linéaire, alors que le second est non-linéaire :

en effet l'application $(\rho, c, K) \rightarrow T$ est non-linéaire.

Exemple 3.1.1 (*Équation de la chaleur rétrograde*).

Nous prenons le cas idéal d'un matériau infini et homogène (en une dimension d'espace pour simplifier). La température est solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (3.3)$$

(il n'y a pas de source). On suppose connue la température à un certain instant t_f , soit $T_f(x) = T(x; t_f)$, et l'on cherche à retrouver la température initiale $T_0(x) = T(x; 0)$.

Le problème de déterminer T_f connaissant T_0 est le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Il a une solution unique, qui dépend continûment de la donnée initiale. Comme nous allons le voir, il n'en est rien pour le problème inverse que nous considérons ici. Physiquement, cela est dû au caractère irréversible de la diffusion thermique. Il est bien connu que la température a tendance à s'homogénéiser au cours du temps, et cela entraîne qu'il n'est pas possible de revenir en arrière, c'est-à-dire de retrouver l'état antérieur qui peut être plus hétérogène que l'état actuel.

Grâce à la situation très simplifiée que nous avons choisie, nous pouvons calculer à la main la solution de l'équation de la chaleur (3.3). En prenant la transformée de Fourier en espace de l'équation (3.3) (nous notons $\widehat{T}(k, t)$ la transformée de Fourier de $T(x, t)$ en gardant t fixé), nous obtenons une équation différentielle ordinaire (où cette fois c'est k qui joue le rôle d'un paramètre) dont la solution est :

$$\widehat{T}_f(k) = \exp - (|k|^2 t_f) \widehat{T}_0(k). \quad (3.4)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, nous voyons que la solution à l'instant T_f est reliée à la condition initiale par une convolution avec la solution élémentaire de la chaleur :

$$T_f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_f}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - (x - y)^{\frac{2}{4t_f}} T_0(y) dy. \quad (3.5)$$

Il est bien connu [28] que, pour toute fonction T_0 raisonnable \hat{z} (continue, bornée), la fonction T_f est indéfiniment dérivable, ce qui traduit mathématiquement l'irréversibilité mentionnée ci-dessus.

En restant dans le domaine de Fourier, nous pouvons inverser ponctuellement l'équation (3.4), mais la fonction

$$k \rightarrow \exp(|k|^{2t}) \widehat{T}_f(k)$$

ne sera dans $L^2(\mathbb{R})$ que pour des fonctions T_f décroissant très rapidement à l'infini, ce qui est une restriction très sévère. Une température mesurée expérimentalement a peu de chances de la satisfaire, et c'est ce qui entraîne l'instabilité du problème inverse.

3.2 Problèmes Inverses en Hydrogéologie

L'hydrogéologie, ou l'étude des nappes phréatiques, est une autre source abondante de problèmes inverses. Il est en effet difficile d'accéder aux couches du sous-sol pour mesurer les propriétés aqueuses des roches. Un problème actuellement d'actualité est le contrôle des polluants dans les nappes d'eau souterraines. Pour mentionner un seul exemple pratique, la thèse d'habilitation de R. Mosé [19] consistait en l'étude de l'influence d'un accident de camion transportant du gaz CCL_4 dans l'est de la France en 1970 sur l'eau qui est consommée actuellement. Un paramètre fondamental de cette étude est la conductivité hydraulique du sous-sol, qui dépend évidemment de la position.

Il existe une grande variété de modèles physiques, incluant diverses approximations. Nous en présentons un ci-dessous, en nous inspirant de la thèse de P. Siegel [21] (voir aussi [22] et [23] et [24]) :

Exemple 3.2.1 (Hydrogéologie 1D).

Ici encore, nous considérerons le problème simplifié où l'écoulement est essentiellement mono-dimensionnel, dans une direction horizontale que nous prendrons comme axe Ox . Un tel modèle s'obtient par intégration sur des couches verticales du modèle précédent. Les

équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = f & \text{dans } [0, L] \times]0, T[\\ q = -K \frac{\partial h}{\partial z} & \text{dans } [0, L] \times]0, T[\\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\overline{q}C)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) = f_c & \text{dans } [0, L] \times]0, T[\end{array} \right. \quad (3.6)$$

avec (par exemples) des conditions initiales données, h fixé aux deux extrémités, et C donné en $x = 0$.

On mesure $C(L, t)$, et l'on cherche à identifier $K(x)$.

3.3 Problèmes Inverses dans l'Exploration Sismique

La prospection pétrolière par des méthodes sismiques (et la sismologie) donne lieu à un problème inverse qui a été largement étudié en raison de l'intérêt économique qui s'attache à sa solution. Il s'agit en réalité d'une famille de problèmes inverses, dont le but commun est de déterminer les propriétés élastiques du sous-sol (densité, vitesses de propagation des ondes élastiques) à partir de mesures des champs de déplacement, ou de pression, en surface.

Lors d'une campagne sismique, une source (en général une explosion) provoque un ébranlement des roches formant le sous-sol. L'écho est enregistré par une série de capteurs placés en surface. Cette expérience est répétée pour plusieurs positions de la source (de plusieurs centaines à plusieurs milliers). De cette façon une très grande quantité de données est mesurée (pouvant atteindre des centaines de giga-octets). Le but, est encore une fois, d'estimer les propriétés du milieu étant donné un modèle de propagation. La communauté géophysique a mis au point une grande quantité de méthodes spécifiques pour traiter ce problème. Le livre récent [20] présente ces méthodes de façon synthétique.

Exemple 3.3.1 (*Le modèle stratifié*).

L'exemple que nous venons d'étudier, bien que déjà simplifié par rapport à la situation n

réelle z , est encore compliqué : le problème direct requiert la solution d'une équation des ondes pour chaque position de la source, de plus, le nombre d'inconnues nécessaires pour représenter la vitesse peut devenir gigantesque dans une situation 3D de géologie complexe. En fait, si la modélisation 3D est à la portée des super-ordinateurs modernes, l'inversion doit pour l'instant se contenter de modèles 2D, et ceux-ci sont extrêmement coûteux. On utilise donc encore des approximations du modèle acoustique.

L'une d'elles, que l'on justifiera intuitivement en regardant un paysage rocheux en montagne, est de supposer que la terre est stratifiée, c'est à dire que les paramètres ρ et c ne dépendent que de la profondeur (la variable z). Si l'on suppose de plus que la source f est une onde plane (et l'on peut par un traitement approprié des données se ramener approximativement à cette situation), la pression p ne dépend plus que de z (et du temps), et l'équation devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\rho c^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = f & \text{dans } [0, Z] \times]0, T[\\ p(z, 0) = \frac{\partial p}{\partial t}(z, 0) = 0 & \text{dans } [0, Z] \\ p(0, t) = 0 & \text{sur } \{z = 0\}, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

et l'on mesure $p(z_G, t)$, $t \in [0, T]$. Ce problème est plus simple, puisque l'équation (3.7) est à une seule dimension d'espace. Pour ce problème, un assez grand nombre de résultats sont connus. Cet exemple présente déjà les difficultés essentielles du cas général, mais permet une résolution économique du problème direct.

Nous venons de voir que l'on peut poser des problèmes inverses pour les trois types d'équations aux dérivées partielles usuels : hyperbolique, parabolique et elliptique.

3.4 L'Imagerie Médicale

Les sciences médicales fournissent un grand nombre de problèmes inverses, dont l'importance pratique n'échappera à personne. Nous allons évoquer rapidement quelques-uns

d'entre eux. La description que nous présentons ici est empruntée à l'article de Louis [27], où l'on trouvera plus de détails.

Exemple 3.4.1 (*Tomographie par rayons X*).

C'est la technique utilisée par les scanners. Un tube à rayons X est monté sur un portique qui entoure le patient. Les rayons émis sont mesurés par des détecteurs placés en face de l'émetteur. Nous considérons la situation bidimensionnelle, où le domaine représente une section transverse du patient. On suppose que les rayons suivent une ligne droite, et sont atténués à la traversée des tissus, proportionnellement à l'intensité elle-même, et à la distance parcourue (loi de Bouger). Les rayons X suivent des lignes droites, et nous paramétriserons ces lignes par leur vecteur normal $u \in \mathbb{R}^2$, et leur distance s à l'origine. En notant f le coefficient d'atténuation (qui peut dépendre du point), on obtient l'équation suivante :

$$\Delta I(su + t\hat{u}) = -I(su + t\hat{u})f(su + t\hat{u})\Delta t,$$

où \hat{u} est un vecteur unitaire orthogonal à u . En faisant tendre Δt vers 0, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}I(su + t\hat{u}) = -I(su + t\hat{u})f(su + t\hat{u}).$$

Notons I_0 et I_l les intensités à l'émetteur et au récepteur respectivement (que nous supposons en dehors de l'objet, ce qui revient à dire qu'il sont à l'infini), l'équation différentielle précédente s'intègre en

$$-\ln \frac{I_l(s, u)}{I_0(s, u)} = \int_{\mathbb{R}} f(su + t\hat{u})dt.$$

Le problème direct consiste à déterminer l'intensité mesurée au détecteur connaissant celle à l'émetteur ainsi que la fonction d'atténuation f . Le problème inverse est donc de déterminer la fonction f connaissant les deux intensités.

L'opérateur intégral intervenant à droite de l'équation précédente s'appelle la transformée

de Radon de f , d'après le mathématicien autrichien J. Radon, qui a d'ailleurs donné (en 1917!) la formule d'inversion permettant en principe de reconstruire la fonction d'atténuation f à partir de la connaissance des transformées sur toutes les lignes du plan. Malheureusement le qualificatif en principe de la phrase précédente est important. En effet, la formule d'inversion suppose que Rf est connu pour toutes les directions u . Cela veut dire, en pratique, qu'il faut que les données soient mesurées de façon à peu près uniforme sur un cercle autour du patient (ce qui peut ou non être réalisable). Si cela n'est pas le cas, le problème est beaucoup plus délicat, et il est difficile de retrouver f de façon stable. Par ailleurs, comme nous le verrons dans u cas particulier ci-dessous, la formule de reconstruction fait intervenir la dérivée des mesures, ce qui montre également son caractère instable Ce problème est étudié en détails dans [29] et [30]

Nous allons une fois de plus nous placer dans une situation simplifiée, où les calculs sont accessibles.

Conclusion

Les problèmes inverses se retrouvent dans de très nombreuses disciplines et consistent à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets. Cependant, ce sont des problèmes difficiles à résoudre car très souvent mal posés au sens de Hadamard. Les outils majoritairement employés sont empruntés à l'optimisation. Cette note ne constitue qu'une très brève introduction aux problèmes inverses. Dans ce mémoire nous voulons résoudre le problème d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution d'un problème inverse linéaire et non linéaire. Nous utilisons quelque outils : moindres carrés, la décomposition en valeurs singulières et la méthode de Tikhonov..., Enfin, nous présentons quelques exemples de problèmes inverses.

Bibliographie

- [1] Collewet, G. (2008). Débruitage et correction d'images IRM. Application à la caractérisation de produits agroalimentaires (Doctoral dissertation, Ecole Centrale de Nantes (ECN)).
- [2] Björck, A. (1996). Numerical methods for least squares problems. Siam.
- [3] Kern, M. (2002). Problèmes inverses : aspects numériques.
- [4] Chavent, G., Lailly, P., & Bamberger, A. (1976). Une application de la théorie du contrôle à un problème inverse de sismique. IRIA. Laboratoire de Recherche en Informatique et Automatique..
- [5] Kern, M. (2016). Méthodes numériques pour les problèmes inverses (p. 222). ISTE editions..
- [6] Michel KERN. (2011–2012) : Problèmes inverses, Mines ParisTech
- [7] Djezzar, S. Sur une classe de problèmes non standards décrits par des équations différentielles.
- [8] Belgacem, F. B. (2007). Why is the Cauchy problem severely ill-posed?. *Inverse Problems*, 23(2), 823.
- [9] Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. A. (1977). Solutions of ill-posed problems. Translated from the Russian. Preface by translation editor Fritz John. Scripta Series in Mathematics. VH Winston & Sons.

- [10] V. A. Morozov, (1984). *Methods for Solving Incorrectly Posed problems*. Springer-Verlag New-York
- [11] J. B. Keller, (1976) Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, 83 :107–118.
- [12] Groetsch, C. W. (1993). *Inverse Problems Modeled by Integral Equations of the First Kind : Causation*. In *Inverse Problems in the Mathematical Sciences* (pp. 5-40). Vieweg+ Teubner Verlag, Wiesbaden.
- [13] A. Kirsch. (1996). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. (Applied mathematical sciences ; V.120). Springer, New-York.
- [14] Landweber, L. (1951). An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *American journal of mathematics*, 73(3), 615-624
- [15] Engl, H. W., & Neubauer, A. (1985). Optimal discrepancy principles for the tikhonov regularization of integral equations of the first kind. In *Constructive methods for the practical treatment of integral equations* (pp. 120-141). Birkhuser Basel.
- [16] Fridman, V. (1965). A method of successive approximations for Fredholm integral equations of the first kind. *Uspeki mat Nauk*, 11, 233-234.
- [17] Hanke, M. (1995). *Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems* (Pitman Research Notes in Mathematics Series vol 327)(Harlow : Longman Scientific and Technical).
- [18] Bialy, H. (1959). Iterative behandlung linearer funktionalgleichungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 4(1), 166-176.
- [19] R. Mosé. (1998). *Habilitation à diriger des recherches*, Université Louis Pasteur de Strasbourg.
- [20] N. Bleistein, J. K. Cohen, and J. J. W. Stockwell. (2000). *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration and Inversion*. Number 13 in *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer.

- [21] Siegel, P. (1995). Transfert de masse en milieux poreux complexes : Modélisation et estimation de paramètre par éléments finis mixtes hybrides (Doctoral dissertation).
- [22] Bear, J., & Verruijt, A. (1987). Theory and applications of transport in porous media. Modeling of groundwater flow and pollution, Dordrecht : Reidel.
- [23] Marsily, G. D. (1981). Hydrogéologie quantitative. Masson.
- [24] Sun, N. Z. (1994). Inverse Problems in Groundwater Modeling. Number 6 in Theory and Application of Transport in Porous Media.
- [25] Hadamard, J. (1923). Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale Univ. Press. New Haven.
- [26] Engl, H. W. (1987). Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. Journal of optimization theory and applications, 52(2), 209-215.
- [27] A. K. Louis. (1992). Medical imaging, state of the art and future developments. Inverse Problems, 59 :277–294.
- [28] Cannon, J. R. (1984). The one-dimensional heat equation (Vol. 23). Cambridge University Press.
- [29] Natterer, F. (1986). The Mathematics of Computerized Tomography Wiley. New York.
- [30] Herman, G. T. (1980). Image Reconstruction from Projections : The Fundamentals of Computerized Tomography (Computer Science Applied Mathematics). image, 10, 03.
- [31] Gfrerer, H. (1987). An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. Mathematics of Computation, 49(180), 507-522.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

\mathbb{R} : corps des nombres réels.

\mathbb{C} : corps des nombres complexes.

μ_u : métrique quadratique

L^∞ : espace des fonctions telles que $\sup \|v(t)\|$ est finie

M_{ad} : sou-espace

d_{obs} : fonction d'observations

\vec{q} : vecteur densité de flux estimée (W/m^2)

J_{eqn} : fonctionnelle l'erreur d'équation

\hat{T} : transformée de fourier de T

Δt : pas de temps

ΔI	: pas d'espace
Ψ	: fonction différentiable
$Re(\cdot)$: partie réelle du nombre complexe
L^2	: espace des fonctions carrés sommables
J_α	: fonctionnelle de Tikhonov
R_α	: opérateur
K	: opérateur compact
G	: symbolise les équations de la physique du problème considéré.
A_α	: l'approximation de Yosida de l'opérateur A .
A	: opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert.
$D(A)$: le domaine de définition de l'opérateur A .
A^*	: l'opérateur adjoint de l'opérateur A .
$\ker A$: le noyau de l'opérateur A .
$\text{Im } A$: l'image de l'opérateur A .
H	: espace de Hilbert.
F^\perp	: l'ensemble orthogonal de l'ensemble F .
\overline{F}	: l'ensemble fermeture de l'ensemble F .
$\delta(H)$: l'ensemble des opérateurs auto-adjoint définis sur l'espace de Hilbert.
$S(t)$: semi-groupe.
$\rho(A)$: l'ensemble résolvant de A .
$\sigma(A)$: spectre de A .
(\cdot, \cdot)	: produit scalaire.
$\ \cdot\ $: une norme.
$L(H)$: l'ensemble des opérateurs linéaire définis sur H .
u'	: la dérivée de u par rapport à t .